

ZEITSCHRIFT
FÜR
GEOPHYSIK

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

B. Brockamp, Münster i. W.

unter Mitwirkung von **A. Defant**, Innsbruck — **W. Dieminger**, Lindau b. Northeim
W. Hiller, Stuttgart — **K. Jung**, Kiel — **O. Meyer**, Hamburg
F. Möller, Mainz — **H. Reich**, Göttingen.

Jahrgang 25

1959

Heft 3



PHYSICA - VERLAG · WURZBURG

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Bellugi, A.</i> : Neue Theorie für elektrische Sondierungen	113
<i>Kautzleben, H.</i> : Über das geomagnetische Normalfeld nach Fanselau	143
Buchbesprechungen:	
<i>Rihánek, L. V.</i> und <i>Postráneky, J.</i> : Bourky a ochrana před bleskem (H. Israël)	158
Künstliche Erdsatelliten (H. Dolezalek)	159
Personalien	160

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 34,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu nummerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel, auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die Zeitschrift für Geophysik bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Bernhard Brockamp, Institut für reine und angewandte Geophysik.
Münster (Westfalen), Steinfurter Straße 107

Anschrift der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80, Postscheck: Hamburg Nr. 55983

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Münzstraße 12. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing und Hildegund Holler, sämtl. Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler, u. Charl. Kuhnert, beide Würzburg.

Typoskript: Physica-Verlag, Würzburg; Offsetdruck: fotokop, Darmstadt.

Printed in Germany



PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1959

Neue Theorie für elektrische Sondierungen

(in einem Boden mit unendlich leitfähigem oder isolierendem Untergrund, in dem die Leitfähigkeit nur von der Tiefe abhängig ist)

Von A. Belluigi, Perugia¹⁾

Zusammenfassung: Zur Vervollständigung unserer Theorie des Jahres 1957 "Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einem oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials" Zeit. f. Geoph. 1957 (H.3 und 4), Teil I und II, haben wir eine neue Theorie der "elektrischen Sondierungen" entwickelt.

Diese Theorie bezieht sich auf Böden, deren elektrische "Leitfähigkeit" nur in Funktion der Tiefe steht, mit leitendem oder isolierendem Untergrund.

Wir geben eine umfangreiche Kasuistik, die die schichtweise Bodengestaltung des Untergrunds betrifft, indem wir das Verfahren für n Schichten verallgemeinern.

Abstract: To complete our theory of 1957 "Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einem oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials" Zeit. f. Geoph. 1957 (H.3 und 4) Teil I und II, we have developed a new theory for "electric soundings".

This theory concerns grounds of electric "conductivity" in function only with depth, with conductive or insulating underground.

We have given an extensive casuistry that regards the stratiform configuration of the underground, generalizing the proceeding for n layers.

Teil I

Wir wollen hier die Verteilung des elektrischen Potentials $\phi(r)$ auf der Oberfläche eines Bodens von isotroper Leitfähigkeit $\sigma(x)$ untersuchen, in Funktion nur mit der Tiefe x , Verteilung durch ein punktförmiges Elektrod, das

¹⁾ Prof. Dr. A. Belluigi, Istituto di Fisica Terrestre, Facoltà di Scienze, Università, Perugia, Italia.

Gleichstrom liefert, und das sich in der Entfernung r von dem beobachteten Punkt befindet (Fig. 1).

Wir behalten die in [1] und in [2] gebrauchten Anmerkungen ebenso wie die Berichte aus [1] und [2] bei.

Wir betrachten zwei charakteristische Fälle:

§ 1. Der Untergrund hat unendliche Leitfähigkeit ($\sigma_\infty = \infty$) für $x > a$. Dieser Fall (σ_∞) wird von nun an kurz mit dem Buchstaben "c" benannt. (conduttivo = leitfähig).

Der Untergrund ist vollkommen isolierend, ($\sigma_\infty = 0$) für $x > a$, dieser Fall wird von nun an kurz mit dem Buchstaben "i" (isolierend) bezeichnet.

Diese beiden Fälle stimmen überein bzw.: $\sigma_\infty \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$

Über dem tief liegenden Untergrunde liegen horizontale, mehr oder weniger zahlreiche sedimentäre Schichten (bis zur Erdoberfläche).

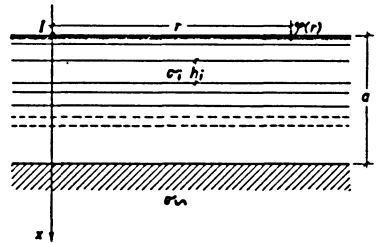


Fig. 1

Die Lösung des Problems führt im allgemeinen auf die Berechnung eines Integrals vom Typ: siehe [1] zurück.

$$(1) \quad \phi(r) = \int_0^{\infty} \Omega(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

wo wir $\Omega(\lambda)$ durch die Funktionen $Y(a, \lambda)$, $Z(a, \lambda)$ ausgedrückt haben, die in [1] festgelegt sind. Wir erhalten genau:

$$(2) \quad \Omega(\lambda) = \lambda Z(a, \lambda) / Y(a, \lambda), \quad (\text{"c"})$$

$$(2') \quad \Omega(\lambda) = \lambda Z'(a, \lambda) / Y'(a, \lambda), \quad (\text{"i"})$$

Im Falle i) müssen wir beachten, daß (1) abweicht, weil wir physikalisch nur diese Subtraktion haben:

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_0^{\infty} \Omega(\lambda) [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] d\lambda$$

aber wir können diese Ungünstigkeit umgehen, indem wir die Bestimmung von $\phi(r)$ ein wenig ändern. Wir brauchen uns nur zu vergegenwärtigen, daß auf

Grund der Reihenentwicklungen, die in [1] abgeleitet sind, wir für $\sigma_\infty = 0$ erhalten:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \Omega(\lambda) = \frac{1}{[\sigma]}, \quad \text{mit} \quad [\sigma] = \int_a^b \sigma(x) dx$$

die uns, verbunden mit der bekannten Relation:

$$\int_0^\infty [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] \frac{d\lambda}{\lambda} = \lg \frac{r_2}{r_1}$$

erlaubt, die $\phi(r_1) - \phi(r_2)$ in dieser Form niederzulegen:

$$\begin{aligned} \phi(r_1) - \phi(r_2) &= \int_0^\infty \left[\Omega(\lambda) - \frac{1}{\lambda[\sigma]} \right] J_0(r_1, \lambda) d\lambda - \\ &\quad - \int_0^\infty \left[\Omega(\lambda) - \frac{1}{\lambda[\sigma]} \right] J_0(r_2, \lambda) d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{[\sigma]} \lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \end{aligned}$$

Es genügt daher im Falle "i" die folgende Gleichung mit zu bestimmen:

$$(1') \quad \phi(r) = \int_0^\infty \left[\Omega(\lambda) - \frac{1}{\lambda[\sigma]} \right] J_0(\lambda r) d\lambda - \frac{1}{[\sigma]} \lg r + \text{const.}$$

mit $\Omega(\lambda)$, die sich von (2') ergibt. Die Konstante ist vollkommen unwichtig, da wir nur die Potentialdifferenz messen, und wir können die Konstante daher mit Null annehmen.

Im isolierenden Fall steht $\phi(r)$ für das Potential, (bis auf den Faktor $1/2\pi$ natürlich), das von einem Elektrod erzeugt wird.

§2. Unser Ziel ist es nun, der $\phi(r)$ als Reihenentwicklung eine andere Form zu geben, die mit jedem Wert von (r) konvergiert. Wie wir sehen, wird es sich um eine Entwicklung handeln, die umso schneller konvergiert, je größer (r) ist.

Es ist zu bemerken, daß $\Omega(\lambda)$, die wir als Funktion von λ betrachten, ein Verhältnis zweier vollständiger, und daher eine meromorphe Funktion ist.

Die Theorie der Differentialgleichungen zeigt:

1. die Pole von $\Omega(\lambda)$, d.h. die Werte von λ für die sich der Nenner von $\Omega(\lambda)$ annulliert, sind alle einfache und nur imaginäre Pole, mit der Ausnahme von Pol ($\lambda = 0$) im Fall von "i",

2. die Reste, d.h. die Grenzwerte: $(\lambda - \lambda_i)_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \Omega(\lambda)$ sind alle positiv (λ_i ein Pol). Da außerdem $\Omega(\lambda)$ eine reelle, ungerade Funktion von λ ist, so wird mit λ_i auch $(-\lambda_i)$ ein Pol sein, und er wird denselben Rest haben.

3. wenn wir den n Pol mit $\lambda_n = i \mu_n$ bezeichnen, wo $\mu_n > 0$, und mit (γ_n) den entsprechenden Residuum: $\gamma_n = \lim_{\lambda \rightarrow i \mu_n} (\lambda - i \mu_n) \Omega(\lambda)$, $\Omega(\lambda)$ so ergibt sich die Entwicklung:

$$(3) \quad \Omega(\lambda) = 2 \sum_1^{\infty} \frac{\lambda \gamma_n}{\lambda^2 + \mu_n^2}, \quad ("c")$$

$$(3') \quad \Omega(\lambda) = \frac{1}{\lambda[\sigma]} + 2 \sum_1^{\infty} \lambda \gamma_n / (\lambda^2 + \mu_n^2), \quad ("i")$$

Bevor wir vorwärtsgehen, wollen wir die Berechnungsbedingungen für die (μ_n) und (γ_n) bestimmen. In Fällen, die in der Praxis interessieren, wird im Allgemeinen die explizite Form der $\Omega(\lambda)$ bekannt sein, die die Form eines Verhältnisses zweier Ausdrücke, vollständige Funktionen von (λ) haben wird. Wir nehmen nun an:

$$(4) \quad \omega(\mu) = i \Omega(i \mu)$$

Auch die $\omega(\mu)$ wird die Form haben (sie wird reell sein, weil es sich um eine ungerade Funktion handelt):

$$(4') \quad \omega(\mu) = \chi(\mu) / \psi(\mu).$$

Wir bestimmen nun die "positiven" Werte von (μ) und erhalten:

$$(5) \quad \psi(u) = 0.$$

Diese Werte können wir in einfachen Fällen errechnen. In komplizierteren Fällen bestimmen wir sie z.B. graphisch zuerst auf grobe Art und Weise, um dann die Berechnung mit einer numerischen Methode, z.B. diejenige von Newton, zu präzisieren.

Wenn wir einen ganz annähernden Wert $\bar{\mu}_n$ der n Wurzel von $\psi(u) = 0$ kennen, so erhalten wir einen vervollkommenen Wert von der:

$$\mu = \bar{\mu}_n - \psi(\bar{\mu}_n) / \psi^1(\bar{\mu}_n)$$

Es genügt nun, dieses Verfahren 2 bis 3 mal zu wiederholen, um sich an den

präzisen Wert anzunähern. Wenn $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ bekannt sind, dann berechnen sich die γ_n (Theorem vom Hospital) von:

$$(6) \quad \gamma_n = \psi(\mu_n) / \psi^1(\mu_n)$$

Wenn wir μ_n, γ_n kennen, und die bekannte Formel anwenden:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda z)}{\lambda^2 + \mu^2} = K_0(\mu r);$$

Bessel Funktion der Ordnung 0, mit dem imaginären Argument, von dem wir weitgehende Tabulaturen haben, indem wir die (3), (3') in die (1) und (1') einsetzen, führt uns zu den folgenden Formeln:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(r) = 2 \sum_1^\infty \gamma_n K_0(\mu_n, r), \quad ("c" \\ \phi(r) = 2 \sum_1^\infty \gamma_n K_0(\mu_n, r) - \frac{1}{[\sigma]} \lg r, \quad ("i" \end{array} \right.$$

Die Reihen (7) konvergieren tatsächlich für jeden Wert von (r) , umso schneller, je größer (r) ist.

Tatsächlich hat die (K_0) für die hohen Werte von (x) , den asymptotischen Ausdruck:

$$K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{-x}$$

und wenn wir die (μ_n) in eine zunehmende Folge bilden, nehmen die Beiträge der einzelnen Glieder schnell ab. In der Praxis genügen, für nicht zu kleine Werte von (r) , oft wenige Glieder um die $\phi(r)$ abzuleiten.

Wenden wir nun die (7), (7') für das Problem einer oder zweier Schichten an.

Zuerst geben wir ein allgemeines Verfahren um in erster Linie $\Omega(\lambda)$ für einen geschichteten Boden, oder für einen Boden mit stetiger, senkrechter Variation (der Sedimentation) zu errechnen.

In der [2] ist die $\Omega(\lambda)$ ausgedrückt worden:

$$(8) \quad \Omega(\lambda) = \frac{\Omega^*(\lambda) \sigma(h) Z'(h, \lambda) + \lambda Z(h, \lambda)}{\Omega^*(\lambda) \sigma(h) Y'(h, \lambda) + \lambda Y(h, \lambda)} \cdot \lambda$$

wo $\Omega^*(\lambda)$ für die $\Omega(\lambda)$ steht, die sich auf einen Boden bezieht, von dem die Schicht $(0 \leq x \leq h)$ weggenommen worden ist. Wenn diese Schicht homogen,

und von der Leitfähigkeit (σ) ist, ist es leicht, siehe [1], auf Grund der Ausführungen von $Y(x, \lambda)$; $Z(x, \lambda)$ zu finden:

$$(9) \quad Y(x, \lambda) = ch(\lambda x); \quad Z(x, \lambda) = \frac{sh(\lambda x)}{\lambda \sigma},$$

und daher wird aus der (8):

$$(10) \quad \Omega(\lambda) = \frac{1}{\sigma} \frac{\Omega^*(\lambda) ch(\lambda h) + \sigma^{-1} sh(\lambda h)}{\Omega^*(\lambda) sh(\lambda h) + \sigma^{-1} ch(\lambda h)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \frac{\Omega^*(\lambda) + \sigma^{-1} th(\lambda h)}{\Omega^*(\lambda) th(\lambda h) + \sigma^{-1}}$$

In einem geschichteten Boden drückt (10) die $\Omega(\lambda)$ durch die Leitfähigkeit aus, (σ) Mächtigkeit (h) der ersten Schicht, und die $\Omega^*(\lambda)$ steht für den Boden, der aus den übrigen Schichten zusammengesetzt ist.

Wenn die $\Omega(\lambda)$ bekannt ist, die sich auf (n) Schichten bezieht, so macht sie es möglich diejenige zu berechnen, die sich auf ($n+1$) Schichten bezieht.

Es genügt also, die (Ω) zu kennen, die sich auf eine einzige Schicht bezieht, um das Problem vollständig zu lösen. Diese erhalten wir leicht durch die (9), (2) und (2').

Für eine Schicht (σ, h) bekommen wir:

$$(11) \quad \Omega(\lambda) = \sigma^{-1} th(\lambda h), \quad ("c"; \quad \Omega(\lambda) = \sigma^{-1} cth(\lambda h), \quad ("i")$$

Gegeben: $\lambda = i\mu$, $\omega(\mu) = i\Omega(i\mu)$, $\omega^*(\mu) = i\Omega^*(i\mu)$

bekommen wir ähnliche Formeln für die $\omega(\mu)$, und d.h.:

Für eine Schicht:

$$(12) \quad \omega(\mu) = -\sigma^{-1} \operatorname{tg}(\mu h), \quad ("c"; \quad \omega(\mu) = \sigma^{-1} \operatorname{ctg}(\mu h), \quad ("i"),$$

während die vorausgegangene Formel (10) diese Form annimmt:

$$(13) \quad \omega(\mu) = \sigma^{-1} \cdot \frac{\omega^*(\mu) \cos(\mu h) - \sigma^{-1} \operatorname{sen}(\mu h)}{\omega^*(\mu) \operatorname{sen}(\mu h) + \sigma^{-1} \cos(\mu h)} =$$

$$= \sigma^{-1} \cdot \frac{\omega^*(\mu) - \sigma^{-1} \operatorname{tg}(\mu h)}{\omega^*(\mu) \operatorname{tg}(\mu h) + \sigma^{-1}}$$

A. Eine einfache Schicht (σ, h) Leitfähigkeit (σ), Mächtigkeit h .

Die Pole werden in diesem Fall durch die Gleichung (5) bestimmt:

$$\cos \mu h = 0, \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime}),$$

$$\operatorname{sen} \mu h = 0, \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime}),$$

durch die wir gelangen zu:

$$\mu_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{h}, \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$\mu_n = n \frac{\pi}{h}, \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

und für die (γ_n) bekommen wir durch die (6): $\gamma_n = 1 / \sigma \cdot h$ in beiden Fällen.

Wir setzen diese Werte in die (7) und (7') ein, und bekommen:

$$(14) \quad \phi(r) = \frac{2}{\sigma h} \sum_1^{\infty} K_0 \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi r}{h} \right], \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$(14') \quad \phi(r) = \frac{2}{\sigma h} \left\{ \sum_1^{\infty} K_0 \left[n \frac{\pi r}{h} \right] - \frac{1}{2} \lg r \right\} \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

B. Zwei Schichten $(\sigma, h), (\sigma', h')$ der Leitfähigkeiten (σ, σ') , Mächtigkeiten (h, h') .

Um die $\omega(\mu)$ zu errechnen, gebrauchen wir die (13). Zuerst haben wir durch die (12) und (12') (die ω^* bezieht sich auf die 2. Schicht):

$$\omega^*(\mu) = -\frac{1}{\sigma'} \operatorname{tg}(\mu h'), \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$\omega^*(\mu) = \frac{1}{\sigma'} \operatorname{ctg}(\mu h'), \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

durch die, wenn wir die (13) anwenden, und $\chi = \sigma' / \sigma$ gegeben ist, wir gelangen zu:

$$\omega^*(\mu) = \sigma^{-1} \frac{\operatorname{tg}(\mu h') + \chi \operatorname{tg}(\mu h)}{\operatorname{tg}(\mu h) \operatorname{tg}(\mu h) - \chi} \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$\omega^*(\mu) = \sigma^{-1} \frac{1 - \chi \operatorname{tg}(\mu h) \operatorname{tg}(\mu h')}{\operatorname{tg}(\mu h) + \chi \operatorname{tg}(\mu h')}, \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

Diesen Ausdrücken können wir auch die Form geben:

$$w(\mu) = -\sigma^{-1} \frac{\operatorname{sen}(\mu a) - \kappa \operatorname{sen}(\mu a a)}{\cos(\mu a) + \kappa \cos(\mu a a)}, \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$w(\mu) = \sigma^{-1} \frac{\cos(\mu a) - \kappa \cos(\mu a a)}{\operatorname{sen}(\mu a) + \kappa \operatorname{sen}(\mu a a)}, \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

Wo wir gegeben haben: $a = h + h'$, $a = (h' - h) / (h' + h)$, $\kappa = (\chi - 1) / (\chi + 1)$.

Wenn wir die Nenner annullieren, so bekommen wir die μ_n . Wenn $\mu_n = \nu_n / a$ gegeben ist, so bekommen wir für die Bestimmung der (ν_n) die Gleichungen:

$$(15) \quad \cos \nu + \kappa \cos \nu a = 0, \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime}); \quad \sin \mu + \kappa \sin \nu a = 0, \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

Die Lösungen dieser Gleichungen bekommen wir durch graphisches oder numerisches Verfahren, (es genügt die Schnittpunkte mit $x > 0$ der Kurven $y = \cos x$ mit $y = -\kappa \cos \alpha x$ im Fall ${}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime}$ und $y = \sin x$ mit $y = -\sin \alpha x$ im Falle ${}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime}$ zu finden). Wenn wir die positiven Lösungen mit ν_n bezeichnen, in zunehmender Ordnung, von den (15) und (15') bekommen wir für die γ_n von der (6):

$$\gamma_n = \frac{1}{\sigma \cdot a} \frac{\sin \nu_n - \kappa \sin (\alpha \nu_n)}{\sin \nu_n + \kappa \cdot \alpha \sin (\alpha \nu_n)} \quad ; \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\sigma \cdot a} \frac{\cos \nu_n - \kappa \cos (\alpha \nu_n)}{\cos \nu_n + \kappa \cdot \alpha \cos (\alpha \nu_n)} \quad , \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

deshalb werden die (7), (7') zu:

$$(16) \quad \phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot a} \sum_1^{\infty} \frac{\sin \nu_n - \kappa \sin (\alpha \nu_n)}{\sin \nu_n + \alpha \kappa \sin (\alpha \nu_n)} \kappa_0 \left(\frac{\nu_n r}{a} \right) \quad , \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

(16')

$$\phi(r) = \frac{1}{\sigma \cdot a} \left\{ 2 \sum_1^{\infty} \frac{\cos \nu_n - \kappa \cos (\alpha \nu_n)}{\cos \nu_n + \alpha \kappa \cos (\alpha \nu_n)} \kappa_0 \left(\frac{\nu_n r}{a} \right) - \frac{1 - \kappa}{1 + \alpha \kappa} \lg r \right\} \quad , \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

Diese Formeln vereinfachen sich sehr für $h = h'$, ($\alpha = 0$).

Im Fall ${}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime}$ wird aus den Lösungen der (15), die nun die Form $\cos \nu = -\kappa$, annehmen:

$$2(\pi n + \alpha), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$2(\pi n - \alpha), \quad n = 0, 1, \dots$$

$\alpha = \arctg \sqrt{\chi} = \arctg \sqrt{\sigma' / \sigma}$, und die γ_n werden gleich: $\frac{1}{\sigma a} = \frac{1}{2 \sigma h}$, deshalb schreiben wir die (16):

(17)

$$\phi(r) = \frac{1}{\sigma \cdot h} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_0 \left[(\pi n + \alpha) \frac{r}{h} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_0 \left[(\pi n - \alpha) \frac{r}{h} \right] \right\} \quad , \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

Noch einfacher zeigt sich Fall ${}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime}$ für $h = h'$.

Die (15') wird zu $\sin \nu = 0$, von der die positiven Lösungen durch $\nu_n = \pi n$, ($n = 1, 2, \dots$ gegeben sind). Die γ_n werden in diesem Falle zu:

$$\gamma_{2n} = 1/h (\sigma + \sigma'), \quad \gamma_{2n+1} = \chi/h (\sigma + \sigma')$$

hierdurch bekommen wir für $\phi(r)$:

$$(17') \quad \phi(r) = \frac{2}{h(\sigma + \sigma')} \cdot \left\{ \sum_1^{\infty} \kappa_0 \left(n \frac{\pi r}{h} \right) - \frac{1}{2} \lg r \right\} + \\ + \frac{2\chi}{h(\sigma + \sigma')} \sum_0^{\infty} \kappa_0 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi r}{h} \right], \quad (\"i\")$$

Unendlich dünne Zwischenschicht.

Wir präzisieren weiterhin die Formeln, in denen die zweite Schicht unendlich dünn ist; die Leitfähigkeit kann im Fall $\"i\"$ vernachlässigt werden, für den Fall $\"c\"$ ist die Leitfähigkeit ∞ groß, sodaß das Verhältnis h'/σ' , oder das Produkt $h'\sigma'$ bestimmt bleiben. h'/σ' , $h'\sigma'$ werden manchmal $\"Stärken\"$ der isolierenden oder der leitfähigen Schicht genannt.

Es ist nicht nötig andere Fälle zu betrachten, weil die keinen Beitrag leisten: tatsächlich verbindet sich eine leitende dünne Schicht $\"c\"$ mit dem Untergrund, und ähnliches kann man für die isolierende Schicht $\"i\"$ sagen.

Wir bezeichnen mit p, q :

$$q = \frac{h'}{\sigma'} \cdot \frac{\sigma}{h}, \quad \text{für } \"c\"; \quad p = \frac{h'\sigma'}{h\sigma} \quad \text{für } \"i\"$$

Nun können wir in dem Ausdruck $\omega(\mu)$, $\text{tg } \mu h'$ durch $\mu h'$ ersetzen, sodaß aus den Ausdrücken wird:

$$\omega(\mu) = \sigma^{-1} \frac{q \mu h + \text{tn}(\mu h)}{q \mu h \text{tg}(\mu h) - 1}, \quad (\"c\")$$

$$\omega(\mu) = \sigma^{-1} \frac{1 - p \mu h \text{tn}(\mu h)}{\text{tg}(\mu h) + p \mu h}, \quad (\"i\")$$

Wie oben ist $\mu = \frac{\nu}{h}$ gegeben, und wir bekommen für die Bestimmung der (ν) die Gleichungen:

$$(18) \quad \text{ctg } \nu = q \nu$$

$$(18') \quad \text{tg } \nu = -p \nu$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen finden wir numerisch oder graphisch. Für die graphische Lösung brauchen wir nur den Schnittpunkt mit $x > 0$ der $y = \text{ctg } x$ mit der Geraden $y = q x$ für $\"c\"$, und der $y = \text{tg } x$ mit der Geraden $y = -p x$ für $\"i\"$ zu finden.

Die γ_n bekommen wir durch (6), und nach einigen Änderungen, (alle ν die linienförmig erscheinen, werden mit $\text{ctg } \gamma$ beziehungsweise $(-\text{tg } \gamma) / p$ ersetzt), auf Grund der (18), (18') schreiben wir:

$$\gamma_n = \frac{1}{\sigma \cdot h} (1 + q \text{sen}^2 \nu_i)^{-1} , \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\sigma \cdot h} (1 + p \text{cos}^2 \nu_i)^{-1} , \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

Wenn wir diese Werte in die (7), (7') einsetzen, bekommen wir bzw.:

$$(19) \quad \phi(r) = \frac{2}{\sigma h} \sum_1^{\infty} \frac{\kappa_0(\nu_i r/h)}{1 + q \text{sen}^2 \nu_i} , \quad ({}^{\prime\prime}c{}^{\prime\prime})$$

$$(19') \quad \phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot h} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{\kappa(\nu_i r/h)}{1 + p \text{cos}^2 \nu_i} - \frac{1}{2(1+p)} \lg r \right\} , \quad ({}^{\prime\prime}i{}^{\prime\prime})$$

die ν_i sind die Lösungen der (18) oder bzw. der (18').

Alle diese Formeln sind für die numerische Berechnung sehr nützlich, da für κ_0 sehr ausführliche Tabellen bestehen. Wenn wir außerdem bedenken, daß wir für die großen Werte des Arguments:

$$\kappa_0(x) \simeq \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-x}$$

haben, können wir auch schnell beurteilen, welche Glieder wir noch in Betracht ziehen müssen.

Verallgemeinerung des Verfahrens für "n" Schichten

Fassen wir noch einmal das Schema zusammen:

1. Durch die (12), (12'), (13) berechnen wir die $\omega(\mu)$, die in Form eines Verhältnisses trigonometrischer Ausdrücke erscheinen wird.

2. Mit einem dem Fall angepaßten Verfahren (graphisch, numerisch oder auch algebraisch, wo das möglich ist), bestimmen wir die Werte (eventuell nur die ersten) der positiven Wurzeln des Nenners der $\omega(\mu)$: μ_1, μ_2, \dots

3. Wir bestimmen durch (6) die entsprechenden $\gamma_n = \lim_{\mu=\mu_n} (\mu - \mu_n) \omega(\mu)$

4. Wir wenden endlich die (7) oder (7') für die Berechnung der $\phi(r)$ an.

§ 3. Methode für "n" homogene Schichten mit Mächtigkeiten in rationellen Verhältnissen.

Das Verfahren, das wir darlegen werden, macht es möglich, die Berechnungen auszuführen, ohne transzendente sondern nur mit algebraischen Gleichungen zu lösen (was vom numerischen und graphischen Standpunkt aus gesehen weniger schwierig ist) und es macht es möglich, die Lösung aus nur drei Typen von Lösungen zusammensetzen, die wir mit: "c₁", "c₂", "i₁" bezeichnen werden.

Der Typ "c₁" wird durch eine einfache Schicht (σ, h) mit leitendem Untergrund ∞^{te} dargestellt, dessen Lösung durch die (14) gegeben ist:

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot h} \sum_0^{\infty} \kappa_0 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi r}{h} \right].$$

Der Typ "i₁" wird durch die ähnliche Lösung für einen isolierenden Untergrund dargestellt und ist gegeben durch die (14'):

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot h} \left\{ \sum_1^{\infty} \kappa_0 \left(n \frac{\pi r}{h} \right) - \frac{1}{2} \lg r \right\}.$$

Zuletzt der Typ "c₂" wird durch 2 Schichten von gleicher Mächtigkeit (h), von der Leitfähigkeit σ (1. Schicht), und σ' (2. Schicht) dargestellt, mit einem leitenden Untergrund ∞^{te}, dessen Lösung durch (17) gegeben ist:

$$\phi(r) = \frac{1}{\sigma \cdot h} \left\{ \sum_0^{\infty} \kappa_0 \left[(n+r) \frac{\pi r}{h} \right] + \sum_1^{\infty} \kappa_0 \left[(n-r) \frac{\pi r}{h} \right] \right\}, \quad \text{mit}$$

$$r = \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\chi}, \quad \chi = \sigma' / \sigma$$

Der nicht allzu rare Fall, den wir wirklich untersuchen, betrifft einen Boden, der aus homogenen Schichten zusammengesetzt ist, deren Mächtigkeiten in rationellen Verhältnissen zueinander stehen, oder sonst vielfache Schichten derselben Mächtigkeiten (h).

Es handelt sich, in anderen Worten, um einen Boden (mit einer leitfähigen oder völlig isolierenden Unterschicht), der aus n Schichten von gleicher Mächtigkeit besteht, mit untereinander verschiedenen oder teilweise gleichen Leitfähigkeiten. Wenn: (σ, σ', σ'' ...) die Leitfähigkeiten der verschiedenen Schichten sind (von der Oberfläche ausgehend), die auch untereinander gleich

sein können. Aus der Struktur der Formeln (10), (11), (11'), sehen wir, daß die $\Omega(\lambda)$ in diesem Fall eine rationale und ungerade Funktion von $\operatorname{tg} \lambda h$, sein wird. In anderen Worten, wenn wir bezeichnen:

$$(20) \quad z = \operatorname{th} h(\lambda h),$$

die $\Omega(\lambda)$ wird von der Form: $\Omega(\lambda) = f(z)$ sein, da $f(z)$ ein Verhältnis zweier Polynome ist, von denen der eine alle geraden und der andere alle ungeraden Potenzen enthält, und von Graden, die sich in der Einheit unterscheiden.

In der geoelektrischen Literatur wenden wir $e^{-2\lambda h}$ als z Veränderliche an. Aber unser Verfahren macht es möglich in der Berechnung Polynome niedriger Grade (Hälfte) zu gebrauchen. Die Berechnung von $f(z)$ wird durch die Formeln ausgedrückt, die wir mit der (20) von den (10) und (11') erhalten, und aus denen wird:

Für eine Schicht:

$$(21) \quad f(z) = \frac{z}{\sigma}, \quad (\text{"c"}); \quad f(z) = \frac{1}{\sigma z}, \quad (\text{"i"})$$

Für n Schichten:

$$(22) \quad f(z) = \sigma^{-1} \frac{f^*(z) + z/\sigma}{z f^*(z) + 1/\sigma}$$

wenn $f^*(z)$ die $f(z)$ ist, die dem Boden entspricht, von dem die Schicht (σ) weggenommen worden ist.

Zum Beispiel, für einen Boden, der aus zwei Schichten zusammengesetzt ist (σ, σ') mit einer leitfähigen Unterschicht (Typ "c₂") haben wir von der (21), $f^*(z) = z/\sigma'$ die, eingesetzt in die (22) sofort ergibt:

$$(23) \quad f(z) = \frac{1 + \chi}{\sigma} \frac{z}{z^2 + \chi}, \quad \text{mit } \chi = \sigma'/\sigma$$

Die (21), (21'), (22), stellen die $f(z)$ in Fällen bezeichnet als Typ "c₁", beziehungsweise "i₁" und "c₂" dar. Sie machen es andererseits möglich, auf wiederkehrende Art und Weise die $f(z)$ für eine beliebige Zahl von Schichten zu berechnen.

Nun leiten wir für $\Omega(z)$ von den Eigenschaften der Funktion $f(\chi)$ angeführt unter 1., 2., des § 1. ab, daß, wenn sie aufgeteilt wird, sie sich in Glieder dieses Typs zusammensetzen wird:

$$a z, \frac{b_i z}{\xi_i + z^2} \text{ und } \frac{c}{z}; a, b_i, \xi_i, c,$$

nicht negativ, von denen das letzte nur im Falle "i" vorhanden sein wird. Das 1. entspricht nun einer Lösung des Typs "c₁" mit $\sigma = a^{-1}$, das 2. entspricht einer Lösung des Typs "c₂" mit $\chi = \sigma' / \sigma$ gleich ξ_i und $\sigma z \frac{1 + \xi_i}{z_i}$, und das dritte entspricht einer Lösung des Typs "i₁". Wenn dann diese Aufteilung ausgeführt worden ist, so genügt es die Lösung $\sigma = c^{-1}$ mit den durch die oben genannten Parameterwerte erwähnten Lösungen zusammenzusetzen.

Wir bestimmen nun die günstigste Art um diese Berechnungen auszuführen, und beginnen mit dem "leitfähigen Untergrund": "c".

Der leitfähige Untergrund: "c".

Wenn $\chi, \chi', \chi'', \dots$ die Verhältnisse von $\chi = \frac{\sigma'}{\sigma}, \chi' = \frac{\sigma''}{\sigma}, \dots$ sind.

Die $f(z)$ ist von der Form: $z \sigma^{-1} \cdot g(z^2)$, mit (g) als rationaler Funktion von z^2 . Ähnlich $g^*(z^2)$ ist die (g) die der f^* entspricht. Wir haben, wenn gegeben ist:

$$f(z) = z \cdot \sigma^{-1} \cdot g(z^2), f^*(z) = z \cdot (\sigma')^{-1} \cdot g^*(z^2), \text{ und } z^2 = \xi$$

in den (21) und (22), die:

$$(24) \quad g(\xi) = 1 \quad \text{für eine Schicht;}$$

$$(25) \quad g(\xi) = \frac{g^*(\xi) + \chi}{\xi g^*(\xi) + \chi} \quad \text{für } n \text{ Schichten,}$$

wenn $g^*(\xi)$ die (g) ist, die einem Boden entspricht, von dem die erste Schicht weggenommen worden ist.

Die (24) und (25) erlauben in wiederkehrender Form die (g) für (n) Schichten zu berechnen.

Die $g(\xi)$ wird sich in der Form ergeben:

$$(26) \quad g(\xi) = p(\xi) / q(\xi)$$

wenn $p(\xi), q(\xi)$ Polynome sind, vom Grad $(n-1)/2$ für (n) ungerade, während für (n) gerade $q(\xi)$ vom Grad $n/2$ und $p(\xi)$ vom Grad $\frac{n}{2} - 1$ ist. Die Wurzeln von $q(\xi)$ sind negativ und verschieden voneinander. Um die Auftei-

lung in Glieder der $g(\xi)$ bestimmen wir die Lösungen (jetzt positiv) der algebraischen Gleichung:

$$(27) \quad q(-\xi) = 0$$

die wir mit ξ_1, ξ_2, \dots bezeichnen. Weiterhin ist gegeben:

$$(28) \quad \begin{cases} \beta_i = \frac{p(-\xi_i)}{q^1(-\xi_i)}, & (= \lim_{\zeta \rightarrow -\xi_i} (\zeta + \xi_i) p(\zeta) / q(\zeta)) \\ \alpha = \lim_{\xi \rightarrow \infty} p(\xi) / q(\xi) \end{cases}$$

für n ungerade bekommen wir die Aufteilung:

$$(29) \quad \begin{cases} g(\xi) = \sum_1^{n/2} \left(\frac{\beta_i}{\xi + \xi_i} \right) & \text{(für } n \text{ gleich)} \\ g(\xi) = \alpha + \sum_1^{(n-1)/2} \left(\frac{\beta_i}{\xi + \xi_i} \right) & \text{(für } n \text{ ungleich)} \end{cases}$$

Wir geben $\xi = z^2$ und führen die $f(z)$ ein, und kommen zu dem Resultat: im Fall von (n) gerade, ist die Lösung die Summe von $n/2$ Lösungen des Typs "c₂" mit $\chi_i = \xi_i$ und (σ_i) (Leitfähigkeit der ersten Schicht) = $\sigma(1 + \xi_i) / \beta_i$.

A. Für (n) ungerade, ist die Lösung die Summe einer Lösung des Typs "c₁" mit $\bar{\sigma}$ gleich σ/α , und von $(n-1)/2$ Lösungen des Typs "c₂" mit $x_1 = \xi_1$ und $\sigma_1 = \sigma(1 + \xi_i) / \beta_i$.

Wenden wir das Verfahren als Beispiel an einen Boden an, der aus drei Schichten von gleichen Mächtigkeiten und von Leitfähigkeiten ($\sigma, \sigma', \sigma''$) besteht, (Unterschicht leitfähig).

Drei Schichten mit leitfähigem Untergrund (vier Schichten in der Gesamtzahl)

Wenn $\chi = \frac{\sigma'}{\sigma}$, $\chi' = \frac{\sigma''}{\sigma}$ gegeben ist, so bekommen wir nach einer ersten Anwendung der (25) mit:

$$g^*(\xi) = 1, \quad \chi = \chi'$$

$$g(\xi) = (1 + \chi') / (\xi + \chi')$$

Wenn wir sie ein zweites Mal mit $g^*(\xi) = (1 + \chi') / (\xi + \chi')$ anwenden, so bekommen wir für die $g(\xi)$:

$$g(\xi) = \frac{x \xi + 1 + \chi' + \chi \chi'}{(1 + \chi + \chi') \xi + \chi \chi'} = \frac{x}{1 + \chi + \chi'} + \frac{(1 + \chi)(1 + \chi')^2}{(1 + \chi + \chi')^2 \cdot [\xi + \chi \chi' / (1 + \chi + \chi')]}$$

In unserem Fall bekommen wir:

$$\alpha = \frac{x}{1 + x + x'}, \quad \xi_1 = \frac{x x'}{1 + x + x'}, \quad \beta_1 = \frac{(1 + \chi)(1 + \chi')^2}{(1 + \chi + \chi')^2}$$

Von unserem Theorem entnehmen wir demnach, daß sich die verlangte Lösung aus einer des Typs "c₁" mit $\bar{\sigma} = \sigma \frac{1 + \chi + \chi'}{x}$ und aus einer des Typs "c₂" mit $\bar{\sigma} = \sigma \frac{1 + \chi + \chi'}{1 + \chi'}$, und $\bar{x} = x x' / (1 + x + x')$ zusammensetzt.

Wenn $x = 1$, $\chi' = 1$ gegeben ist, so bekommen wir die Lösung des Problems der zwei Schichten, mit einem Verhältnis der Mächtigkeiten gleich 2 oder $\frac{1}{2}$.

Drei Schichten mit isolierendem Untergrund.

Hier ist es zuerst angebracht, die Lösung des Typs "i₁" abzusondern.

Es sind: s, s', s'', \dots ; $s' = \sigma' + \sigma'' + \dots$, $s = \sigma + \sigma' + \dots$ usw.

$$\chi = s / \sigma, \quad \chi' = s' / \sigma', \dots$$

Nun haben wir für die Konstante (c) des Glieds c/z :

$$c = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} t h(\lambda h) \Omega(\lambda) = h \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{t h(\lambda h)}{\lambda h} \cdot \lambda \Omega(\lambda) = \frac{h}{[\sigma]}$$

und wenn wir die Begriffsbestimmung $[\sigma] = h s$ haben, so bekommen wir $c = 1/s$.

Wir geben, um die Berechnungen zu erleichtern:

$$f(z) = \frac{1}{s} \left[z g(z^2) + \frac{1}{z} \right], \quad f^*(z) = \frac{1}{s'} \left[z g^*(z^2) + \frac{1}{z} \right], \quad z^2 = \xi$$

Unter diesen Voraussetzungen werden die (21') und (22) zu:

$$(30) \quad g(\xi) = 0, \quad (\text{für eine Schicht})$$

$$(31) \quad g(\xi) = (\chi - 1) \frac{g^*(\xi) + \chi}{\xi g^*(\xi) + \chi}, \quad (\text{für } n \text{ Schichten})$$

wenn es die $g^*(\xi)$, g ist, die dem Boden entspricht, von dem die erste Schicht weggenommen worden ist. Die (30), (31) erlauben es wiederkehrend die (g) für (n) Schichten zu errechnen. Auch die (g) hat jetzt die Form:

$$(26) \quad g(\xi) = p(\xi) / q(\xi)$$

wenn $p(\xi)$, $q(\xi)$ Polynome sind, vom Grad $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ für n gerade, während für n ungerade $q(\xi)$ vom Grad $\frac{n-1}{2}$, und $p(\xi)$ vom Grad $\frac{n-1}{2} - 1$ ist. Wir geben, wie in "c" die Lösungen der Gleichung mit ξ_i an

$$(27') \quad q(-\xi) = 0$$

und mit β_i und α

$$(28') \quad \beta_i = p(-\xi_i) / q(-\xi_i), \quad (\lim_{\zeta \rightarrow -\xi_i} (\zeta + \xi_i) p(\zeta) / q(\zeta))$$

$$\alpha = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{p(\xi)}{q(\xi)}, \quad \text{für } n \text{ gleich}$$

Wir kommen zur Auflösung von $g(\xi)$:

$$(29') \quad \begin{cases} g(\xi) = \sum_1^{(n-1)/2} \beta_i / (\xi + \xi_i), & \text{(für } n \text{ ungerade)} \\ g(\xi) = \alpha + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \beta_i / (\xi + \xi_i), & \text{(für } n \text{ gerade.)} \end{cases}$$

Wir kommen daher zum folgenden Ergebnis für die Auflösung im Falle "i".

B. Für (n) ungerade ist die Lösung die Summe von einer des Typs "i₁" mit $\sigma = s$ und $(n-1)/2$ Lösungen des Typs "c₂" mit $x_i = \xi_i$, und $\sigma_i = s(1 + \xi_i) / \beta_i$.

Für (n) gerade setzt sich die Lösung aus einer des Typs "i₁" mit $\sigma = s$ zusammen, aus einer des Typs "c₁" mit $\sigma = s/a$ und $\frac{n}{2} - 1$ des Typs "c₂" mit $x_i = \xi_i$ und $\sigma_i = s(1 + \xi_i) / \beta_i$.

Wir belegen die Ergebnisse für $n = 2$ und $n = 3$ mit Beispielen.

Für 2 Schichten ($n = 2$) von Leitfähigkeiten σ, σ' , bekommen wir sofort durch die (31) mit $g^*(\xi) = 0$

$$g(\xi) = \chi - 1 = x, \quad (= \sigma' / \sigma)$$

und daher: die Lösung für 2 Schichten ist gleich der Summe aus einer Lösung des Typs "i₁" mit $\bar{\sigma} = s$, ($= \sigma + \sigma'$), und aus einer des Typs "c₁" mit $\bar{\sigma} = s/x$, ($= \frac{(\sigma + \sigma')\sigma}{\sigma'}$), und dieses Ergebnis stimmt mit der (17') überein.

Betrachten wir nun 3 Schichten von den Leitfähigkeiten $\sigma, \sigma', \sigma''$.

Wenn $g^*(\xi) = \chi'$ gegeben ist (obenerwähntes Ergebnis), und wir uns an die Begriffsbestimmung von χ, x, x' , erinnern, so bekommen wir durch die (31):

$$g(\xi) = \frac{x(1+\chi)(1+\chi')^2}{x' \left(\xi + \frac{1+\chi+\chi\chi'}{\chi'} \right)}$$

Wenn wir unser Theorem anwenden, so bekommen wir: die Lösung von 3 Schichten (von gleichen Mächtigkeiten), mit isolierendem Untergrund, ist aus einer Lösung des Typs "i₁" mit $\bar{\sigma} = s$, ($= \sigma + \sigma' + \sigma''$) und aus einer des Typs "c₁" mit:

$$\bar{\sigma} = s / [\chi(1+\chi')], \quad \left(= \frac{\sigma(\sigma + \sigma' + \sigma'')}{\sigma' + \sigma''} \right), \quad \text{und} \quad \bar{x} = (1+x+x x') / x'$$

zusammengesetzt.

Natürlich erhalten wir auch in diesem Fall, wenn $x = 1$ oder $x' = 1$ gegeben ist, die Lösung des Problems der 2 Schichten mit isolierendem Untergrund und Mächtigkeiten 2 oder 1/2.

Abschließend: wenn ein aus n homogenen, horizontalen Schichten zusammengesetzter Boden gegeben ist, und die Mächtigkeiten der Schichten in rationellen Verhältnissen bleiben, so wählen wir als (h) einen Divisor dieser Schichten, und der Boden wird in Schichten der Mächtigkeit (h) aufgeteilt. Durch die sich wiederholenden Formeln (24), (25) im Falle "c" und (30), (31) im Falle "i" berechnen wir $g(\xi)$, (indem wir vom Grund zur Oberfläche hin verfahren).

Wenn die $g(\xi)$ in der Form eines Verhältnisses zweier Polynome $p(\xi) / q(\xi)$ eingesetzt wird, so leiten wir numerisch die Wurzeln der Gleichung $q(-\xi) = 0$ ab, danach die β_i und möglicherweise die α (die nichts anderes als das Verhältnis der Koeffizienten der höchsten Potenz von $p(\xi)$ und $q(\xi)$ in dem Fall ist, in dem die Grade gleich sind, sonst ist $\alpha = 0$) von (29). Durch die Theoreme (A) und (B) bestimmen wir bzw. die $\bar{\sigma}$ und $\bar{\chi}$ Lösungen des

Typs (c_1, c_2, i) von denen sich die Lösung zusammensetzt, die wir letztlich erhalten, indem wir die verschiedenen Komponenten durch die gefundenen Formeln berechnen.

Um das Verfahren besser zu erklären, betrachten wir ein numerisches Beispiel: 4 Schichten deren Mächtigkeiten im Verhältnis 3:1:2 und deren Leitfähigkeiten im Verhältnis 3:1:7 stehen. (Untergrund isolierend), wie wir aus der Fig. 2 ersehen:

Die absoluten Werte der (h, σ) interessieren nur in den Endresultaten, und betreffen im Wesentlichen die Wahl der Einheit, wir können daher von ihnen absehen. Die Einheit ist ein Divisor der drei Mächtigkeiten, um daher unsere Methode anzuwenden, ist es günstig als (h) die Mächtigkeit der zweiten Schicht zu wählen, und das Problem gilt nun für 6 Schichten. Um die $g(\xi)$ zu berechnen, gebrauchen wir die (30) und (31). Da uns in den Berechnungen auch die (χ) interessieren, bedienen wir uns der folgenden Tabelle, die sich aus der Definition, gegeben von s und ψ aufbaut:

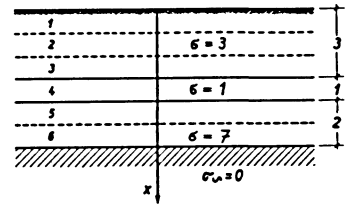


Fig. 2

n	6	5	4	3	2	1
σ	3	3	3	1	7	7
s	<u>24</u>	21	18	15	14	7
χ	8	7	6	15	2	==

An Stelle eines leitenden Untergrunds tritt natürlich die s und χ mit den x indem wir nacheinander die (24), (25) gebrauchen.

Wenn nun die (30), (31) vom Grund aus angewendet werden, so ist die Nummerierung (n) der ersten Reihe auch vom Grund ausgehend niedergelegt worden. Die fortschreitende Berechnung der $g(\xi)$ bietet überhaupt keine Schwierigkeiten. Wir bekommen, (wenn wir die χ der Tabelle nehmen):

$$(30) \quad g(\xi) = 0, \quad (n = 1)$$

$$(31) \quad n = 2 \quad g(\xi) = 1 \frac{0 + 2}{\xi \cdot 0 + 2} = 1$$

$$n = 3 \quad g(\xi) = 14 \frac{1 + 15}{\xi \cdot 1 + 15} = \frac{224}{\xi + 15}$$

$$n = 4 \quad g(\xi) = \frac{2\xi + 157}{23\xi + 9}, \quad g(\xi) = 5 \frac{\frac{224}{\xi + 15} + 6}{\xi \frac{224}{\xi + 15} + 6}$$

$$n = 5 \quad g(\xi) = 8 \frac{41\xi + 55}{\xi^2 + 106\xi + 21}, \quad g(\xi) = 6 \frac{\frac{3\xi + 157}{23\xi + 9} + 7}{\xi \frac{3\xi + 157}{23\xi + 9} + 7}$$

$$n = 6 \quad g(\xi) = \frac{\xi^2 + 147\xi + 76}{6\xi^2 + 23\xi + 3}, \quad g(\xi) = 7 \frac{8 \frac{41\xi + 55}{\xi^2 + 106\xi + 21} + 8}{\xi \cdot 8 \frac{41\xi + 55}{\xi^2 + 106\xi + 21} + 8}$$

daher bekommen wir endgültig

$$g(\xi) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} = \frac{\xi^2 + 147\xi + 76}{6\xi^2 + 23\xi + 3}$$

$$p(\xi) = \xi^2 + 147\xi + 76, \quad q(\xi) = 6\xi^2 + 23\xi + 3$$

Die Gleichung $q(-\xi)$ wird $6\xi^2 - 23\xi + 3 = 0$ mit den Wurzeln:

$$\xi_1 = \frac{1}{12} [23 - \sqrt{457}], \quad \xi_2 = \frac{1}{12} [23 + \sqrt{457}]$$

Von der (28) bekommen wir für die α, β_1, β_2 die Werte:

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta_1 = \frac{\xi_1^2 - 147\xi_1 + 76}{23 - 12\xi_1}, \quad \beta_2 = \frac{\xi_2^2 - 147\xi_2 + 76}{23 - 12\xi_2}$$

Wenn wir das Theorem (B) anwenden, und bedenken, daß $s = 24$ so kommen wir zum Endresultat.

Die Lösung setzt sich zusammen aus: 1. einer Lösung des Typs " i_1 " mit $\sigma = 24$
2. einer Lösung des Typs " c_1 " mit $\sigma = 144$ 3. einer Lösung des Typs " c_2 " mit

$$\chi = \frac{1}{12} (23 - \sqrt{457}), \quad \sigma = 24 \frac{(1 + \chi)(23 - 12\chi)}{\chi^2 - 147\chi + 76}$$

4. einer Lösung des Typs " c_2 " mit

$$\chi = \frac{1}{12} (23 + \sqrt{457}), \quad \sigma = 24 \frac{(1 + \chi)(12\psi - 23)}{-\psi^2 + 147\chi - 76}$$

Teil II

Fassen wir nun die Resultate zusammen, die wir aus der Berechnung des elektrischen Potentials durch die Reihenentwicklung von Kelvin Funktionen der Ordnung K_0 erhalten haben, die einigen der charakteristischsten Böden entsprechen.

Wie wir gesehen haben, besteht die Berechnung im wesentlichen aus einer transzendenten Gleichung, der Bewertung der Koeffizienten der Reihenentwicklung, der Tabellierung der einzelnen Glieder. Nur die Lösung der Gleichung kann einige Schwierigkeiten mit sich bringen, der Rest ist vollkommen elementar, da von den K_0 (B.M.A.) sehr ausführliche Tabellen bestehen. Aus diesem Grund wird für jeden Fall, außer dem Ausdruck $\phi(r)$ auch eine Methode zur Lösung der entsprechenden transzendenten Gleichung gegeben, graphische und numerische Methode. Graphisch werden sich die Wurzeln als Schnittpunkte zweier Kurven ergeben; einer festliegenden, und einer von den Parametern abhängenden. Im allgemeinen genügt es, die Wurzeln nur ungefähr zu bestimmen, und sie dann mit einer numerischen Methode zu vervollkommen, als die wir die Newton Methode gewählt haben. Für jeden Fall wird also eine Formel vom Typ $\nu_i = \psi(\bar{\nu}_i)$ gegeben, (abgeleitet von der Newton Formel), in der wir für $\bar{\nu}_i$ einen annähernden Wert der i Wurzel gesetzt haben, $\psi(\bar{\nu}_i)$ liefert einen genaueren Wert derselben Wurzel. In der Praxis ist es günstig, dieses Verfahren zwei oder drei mal zu wiederholen, bis $\bar{\nu}_i$ und $\psi(\bar{\nu}_i)$ praktisch übereinstimmen. Wir müssen noch hinzufügen, daß die ν_i die positiven Wurzeln der zur Frage stehenden Gleichung sind, und daher zeichnen wir in den Graphiken nur den Teil mit positiven Abszissen auf.

1. Einfache Schicht (σ, h), Leitfähigkeit σ , Mächtigkeit h , Unterschicht unendlich leitfähig (Fig.3):

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot h} \sum_0^{\infty} K_0 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi r}{h} \right]$$



Fig. 3

2. Einfache Schicht σ, h , von der Leitfähigkeit σ , und Mächtigkeit h , Unterschicht isolierend.

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot h} \left\{ \sum_1^{\infty} K_0 \left(m \frac{\pi r}{h} \right) - \frac{1}{2} \lg r \right\}$$

3. Zwei horizontale Schichten, unbestimmt übereinanderliegend σ, σ' , Mächtigkeiten h, h' mit unendlich leitfähigem Untergrund.

$$\begin{aligned} \alpha &= h + h' \\ \alpha &= (h' - h) / (h' + h) \\ \kappa &= (\sigma' - \sigma) / (\sigma' + \sigma) \end{aligned}$$

Gleichung zu lösen: $\cos \nu + \kappa \cos (\nu \alpha) = 0$

Wir zeichnen die Kurven: $y = \cos x$ (festliegend), $y = -\kappa \cos \alpha x$, und wenden die Newton Formel an:

$$\nu_i = \bar{\nu}_i - \frac{\cos \bar{\nu}_i + \kappa \cos (\alpha \bar{\nu}_i)}{\sin \bar{\nu}_i + \alpha \kappa \sin (\alpha \bar{\nu}_i)} .$$

Davon leiten wir ab:

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma a} \sum_1^{\infty} c_i K_0(\nu_i r/a); \quad c_i = \frac{\sin \nu_i - \kappa \sin (\alpha \nu_i)}{\sin \nu_i + \kappa \sin (\alpha \nu_i)}$$

4. Zwei Schichten wie in 3. mit isolierendem Untergrund: $\sigma_{\infty} = 0$.

Gleichung zu lösen: $\sin \nu + \kappa \sin (\nu \alpha) = 0$

Wir zeichnen die Kurven: $y = \sin x$, $y = -\kappa \sin (\alpha x)$

Wir wenden die Newton Formel an:

$$\nu_i = \bar{\nu}_i - \frac{\sin \bar{\nu}_i + \kappa \sin (\alpha \bar{\nu}_i)}{\cos \bar{\nu}_i + \alpha \kappa \cos (\alpha \bar{\nu}_i)} .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{2}{\sigma a} \left\{ \sum_1^{\infty} c_i \kappa_0 \left(\nu_i \frac{r}{a} \right) - c_0 \lg r \right\}; \\ c_i &= \frac{\cos \nu_i - \kappa \cos (\alpha \nu_i)}{\cos \nu_i + \kappa \alpha \cos (\alpha \nu_i)}; \quad c_0 = \frac{1 - \kappa}{2(1 + \alpha \kappa)} \end{aligned}$$

Zwei horizontale übereinanderliegende Schichten von gleicher Mächtigkeit.

Für $h = h'$ leiten wir von Fall 3. ab:

$$(3a) \quad \phi(r) = \frac{1}{\sigma \cdot h} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} K_0[(n + \Theta) \pi r/h] + \sum_{n=1}^{\infty} K_0[(n - \Theta) \pi r/h] \right\},$$

$$\Theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\sigma'/\sigma}$$

während (4):

$$(4a) \quad \phi(r) = \frac{2}{h \cdot (\sigma + \sigma')} \left\{ \sum_1^{\infty} K_0(n \pi r/h) - \frac{1}{2} \lg r \right\} + \\ + \frac{2 \sigma'}{\sigma \cdot h (\sigma' + \sigma)} \sum_0^{\infty} K_0 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi r/h \right]$$

5. Schicht von der Mächtigkeit h , Leitfähigkeit σ , gefolgt von einer dünnen, isolierenden, mit h'/σ' bezeichneten Schicht, mit unendlich leitfähiger Unterschicht (Fig. 4):

$$q = \frac{h'}{\sigma'} \cdot \frac{\sigma}{h}$$

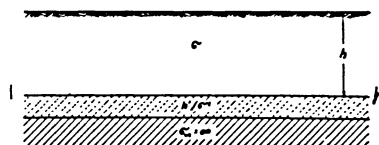


Fig. 4

Gleichung $\operatorname{ctg} \nu = q \nu$

Wir zeichnen die Kurven: $y = \operatorname{ctg} x$, (es genügt im 1. Quadranten) $y = q x$ (Gerade), $q > 0$.

Newton Formel:

$$\nu_i = \bar{\nu}_i + \operatorname{sen} \bar{\nu}_i \frac{\cos \bar{\nu}_i - q \bar{\nu}_i \operatorname{sen} \bar{\nu}_i}{1 + q \operatorname{sen}^2 \bar{\nu}_i}$$

Die Potentialfunktion, die sich daraus ergibt, ist:

$$\phi(r) = \frac{1}{\sigma \cdot h} \cdot \sum_1^{\infty} c_i K_0(\nu_i r/h), \quad \text{mit } c_i = 1 / (1 + q \operatorname{sen}^2 \nu_i)$$

6. Fall 5. (σh), gefolgt von einer dünnen, leitfähigen, mit ($\sigma' h'$) bezeichneten Schicht, mit isolierendem Untergrund.

$$p = \sigma' h' / \sigma h$$

Gleichung $\operatorname{tg} \nu + p \nu = 0$.

Wir zeichnen die Kurven:

$$y = -\operatorname{tg} x, \quad (\text{es genügt im 1. Quadrant})$$

$$y = p x \quad (\text{Gerade}).$$

Newton Formel:

$$\nu_i = \bar{\nu}_i - \cos \bar{\nu}_i \frac{\operatorname{sen} \bar{\nu}_i + p \bar{\nu}_i \cos \bar{\nu}_i}{1 + p \cos^2 \bar{\nu}_i}$$

davon:

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot h} \left\{ \sum_1^{\infty} c_i K_0 \left(\frac{\nu_i r}{h} \right) - c_0 \lg r \right\},$$

mit:

$$c_i = 1 / (1 + p \cos^2 \nu_i), \quad c_0 = 1/2 (1 + p)$$

7. Schicht (σ, h), gefolgt von zwei dünnen, übereinanderliegenden, einer leitfähigen $\sigma' h'$ und einer isolierenden h'' / σ'' , übereinanderliegend mit unendlich leitfähigem Untergrund (Fig. 5).

$$p = \sigma' h' / \sigma h$$

$$q = \frac{h''}{\sigma''} \cdot \frac{\sigma}{h}$$

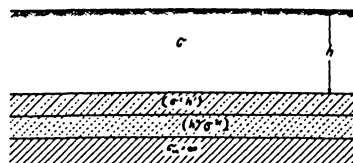


Fig. 5

Gleichung: $\operatorname{tg} \nu = 1/q \nu - p \nu$.

Wir zeichnen die Kurven: $y = \operatorname{tg} x, \quad y = \frac{1}{q x} - p x$ (Hyperbel).

Newton Formel:

$$\nu_i = \bar{\nu}_i - \cos \bar{\nu}_i \frac{\operatorname{sen} \bar{\nu}_i + (p \bar{\nu}_i - 1/q \bar{\nu}_i) \cos \bar{\nu}_i}{1 + (p + 1/q \bar{\nu}_i^2) \cos^2 \bar{\nu}_i},$$

davon

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma \cdot h} \sum_1^{\infty} c_i K_0(\nu_i r/h),$$

mit:

$$c_i = 1 / [1 + (p + 1/q \nu_i^2) \cos^2 \nu_i]$$

8. Schicht σ, h gefolgt von einer dünnen, isolierenden Schicht σ', h' und von einer leitfähigen σ'', h'' übereinanderliegend, mit isolierendem Untergrund (Fig. 6).

$$q = h' \sigma / \sigma' h$$

$$p = h'' \sigma'' / h \sigma$$

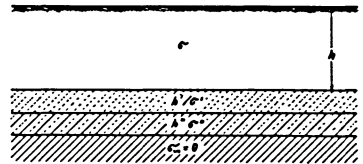


Fig. 6

Gleichung: $\text{ctg } \nu = q \nu - 1/p \nu$

Wir zeichnen die Kurven: $y = \text{ctg } x, y = q x - 1/p x$, (Hyperbel)

Newton Formel:

$$\nu_i = \bar{\nu}_i + \text{sen } \bar{\nu}_i \frac{\cos \bar{\nu}_i + (1/p \bar{\nu}_i - q \bar{\nu}_i) \text{sen } \bar{\nu}_i}{1 + (q + 1/p \bar{\nu}_i^2) \text{sen}^2 \bar{\nu}_i}$$

davon

$$\phi(r) = \frac{2}{\sigma h} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} c_i K_0(\bar{\nu}_i r/h) - c_0 \lg r \right\},$$

mit:

$$c_i = \frac{1}{1 + (q + 1/p \bar{\nu}_i^2) \text{sen}^2 \bar{\nu}_i}; \quad c_0 = \frac{1}{2(1+p)}$$

§ 2. Wir fügen einige Bemerkungen zur Berechnung der $\phi(r)$ durch die Methode, die die rationalen Verhältnisse der Mächtigkeiten der verschiedenen Schichten betrifft, hinzu. Da der einzige Teil der Berechnung, der eine Schematisierung erfordert, die Berechnung von $g(\xi)$ ist, so beschränken wir uns auf ihn. Der Rest (der in den Fällen "c" und "i" nicht verschieden ist), sollte aus den Theoremen A und B und aus den im Teil I angewandten Beispielen klar hervorgehen.

Wie wir schon erwähnt haben, so teilen wir den Boden zuerst in Schichten von gleicher Mächtigkeit auf (gleich eines Divisors der einzelnen Schichten). Danach bezeichnen wir, indem wir von unten mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$, ausgehen, die Leitfähigkeiten der verschiedenen Schichten wie in der Figur 7.

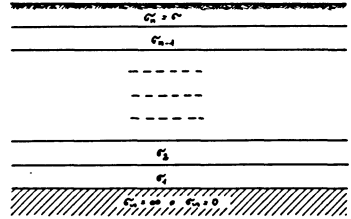


Fig. 7

Wir fahren danach mit der Berechnung der $g(\xi)$ in folgender Art und Weise fort:

Fall "c" ($\sigma = \infty$)

Wir konstruieren die Tabelle:

n	1	2	...	$n-1$	n
σ	σ_1	σ_2	...	σ_{n-1}	σ_n
χ	\	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$...	$\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}$	$\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$

Auf Grund dieser Tabelle bestimmen wir die $g(\xi)$ durch die:

$$g_1(\xi) = 1$$

$$g_2(\xi) = \frac{g_1(\xi) + \chi_2}{\xi g_1(\xi) + \chi_2} = \frac{1 + \chi_2}{\xi + \chi_2}$$

$$g_3(\xi) = \frac{g_2(\xi) + \chi_3}{\xi g_2(\xi) + \chi_3}$$

.....

$$g_{n-1}(\xi) = \frac{g_{n-2}(\xi) + \chi_{n-1}}{\xi g_{n-2}(\xi) + \chi_{n-1}}$$

$$g_n(\xi) = g(\xi) = \frac{g_{n-1}(\xi) + \chi_n}{\xi g_{n-1}(\xi) + \chi_n}$$

Fall "i" ($\sigma_n = 0$).

Wir konstruieren die Tabelle:

n	1	2	3	...	$n-1$	n
σ	σ_1	σ_2	σ_3	...	σ_{n-1}	σ_n
s	σ_1	$S_1 + \sigma_2$	$S_2 + \sigma_3$...	$S_{n-2} + \sigma_{n-1}$	$S_{n-1} + \sigma_n = s$
χ	\backslash	$\frac{S_2}{\sigma_2}$	$\frac{S_3}{\sigma_3}$...	$\frac{S_{n-1}}{\sigma_{n-1}}$	$\frac{S_n}{\sigma_n}$

Danach bestimmen wir die $g(\xi)$ durch die wiederkehrenden Formeln:

$$g_1(\xi) = 0$$

$$g_2(\xi) = (\chi_2 - 1) \frac{g_1(\xi) + \chi_2}{\xi g_1(\xi) + \chi_2}, \quad (= \chi_2 - 1)$$

$$g_3(\xi) = (\chi_3 - 1) \frac{g_2(\xi) + \chi_3}{\xi g_2(\xi) + \chi_3},$$

.....

$$g_{n-1}(\xi) = (\chi_{n-1} - 1) \frac{g_{n-2}(\xi) + \chi_{n-1}}{\xi g_{n-2}(\xi) + \chi_{n-1}}$$

$$g_n(\xi) = (\chi_n - 1) \frac{g_{n-1}(\xi) + \chi_n}{\xi g_{n-1}(\xi) + \chi_n} = \underline{\underline{g(\xi)}}$$

Sobald die $g(\xi)$ bestimmt ist, setzt sich die Berechnung, wie wir schon in Teil I erklärt haben, fort.

Teil III

§ 1. Wir befassen uns nun mit einigen Eigenschaften der $\phi(r)$, wenn der Untergrund eine oder mehrere dünne, sehr leitfähige oder stark isolierende Schichten enthält.

Unter "dünner Schicht" verstehen wir eine Schicht, deren Mächtigkeit wir für vernachlässigbar halten, deren Leitfähigkeit σ hingegen dermaßen groß ist, daß das Produkt $s = \sigma h$ oder dermaßen niedrig ist, daß das Verhältnis $R = h / \sigma$ als bestimmt bestehen bleiben. Dieses Produkt S oder das Verhältnis R bezeichnen wir kurz als "physikalische Mächtigkeit" der Schicht. In anderen Worten lassen wir für dünne Schichten zu, den Übergang zur Grenze $h \rightarrow 0$ auszuführen, während wir gleichzeitig σ zum ∞ neigen lassen, oder σ zu 0, sodaß $\sigma h \rightarrow s$, oder $\frac{h}{\sigma} \rightarrow R$.

Wie wir gezeigt haben, errechnet sich das Potential $\phi(r)$ durch eine charakteristische Funktion $\Omega(\lambda)$ nach (1) in Teil I.

Von der $\Omega(\lambda)$, die eine von der Bodenstruktur abhängige Funktion ist, gebrauchen wir zwei Ausdrücke, die in [1] und [2] abgeleitet sind. Die erste betrifft den Ausdruck, den $\Omega(\lambda)$ in Funktion von $\Omega^*(\lambda)$ annimmt, einer charakteristischen Funktion eines Bodens, von dem der Teil bis zur Tiefe (a) weggenommen worden ist.

$$(1) \quad \Omega(\lambda) = \lambda \frac{\Omega^*(\lambda) \sigma(a) z'(\lambda, a) + \lambda z(\lambda, a)}{\Omega^*(\lambda) \sigma(a) y'(\lambda, a) + \lambda y(\lambda, a)}$$

In (1) hängen die $\sigma(a) z'(\lambda, a)$, $\sigma(a) y'(\lambda, a)$, $z(\lambda, a)$, $y(\lambda, a)$, nur von der Verteilung der Leitfähigkeiten in den Schichten bis zur Tiefe (a) ab, deren Struktur uns weiterhin nicht interessiert (Fig. 8).



Fig. 8

Die zweite ist ein spezieller Fall der ersten, wenn die erste Schicht homogen ist. Wenn wir mit h ihre Mächtigkeit und mit σ ihre Leitfähigkeit bezeichnen, beweist sich die Formel:

$$(2) \quad \Omega(\lambda) = \frac{\Omega^*(\lambda) + \sigma^{-1} t h (\lambda h)}{\sigma t h (\lambda h) \Omega^*(\lambda) + 1}$$

wenn $\Omega^*(\lambda)$, wie oben, die "charakteristische Funktion des Bodens" ist, von dem die Schicht (σ, h) weggenommen worden ist. Die (2) wird uns nur im Fall einer dünnen Schicht interessieren.

Wir betrachten zuerst eine dünne, leitfähige Schicht der Mächtigkeit S . Wenn wir den Übergang zur Grenze $h \rightarrow 0$ ausführen, können wir th (λh) durch (λh) ersetzen, während wir außerdem $\sigma \rightarrow \infty$, $\sigma h \rightarrow S$ neigen lassen, und wir erhalten:

$$\Omega(\lambda) = \frac{\Omega^*(\lambda)}{1 + s \lambda \Omega^*(\lambda)},$$

oder einfacher

$$(3c) \quad 1 / \Omega(\lambda) = s \lambda + 1 / \Omega^*(\lambda).$$

Wir verfahren in ähnlicher Weise für eine dünne isolierende Schicht der Mächtigkeit R , und von der (2) bekommen wir die:

$$(3i) \quad \Omega(\lambda) = R \lambda + \Omega^*(\lambda)$$

Betrachten wir jetzt einen Boden, der (wie in Figur 9) eine Folge (sandwich) von n dünnen Schichten enthält, entweder alle leitfähig, oder alle isolierend, in einer Tiefe (a). Wir nehmen an, daß die Gesamtmächtigkeit dieser Schichten natürlich immer noch so klein ist, daß wir auch sie als dünn betrachten können.

Die Mächtigkeiten der Schichten sind S_1, S_2, \dots, S_n , wenn es sich um leitfähige Schichten handelt, und R_1, R_2, \dots, R_n , im Falle von isolierenden Schichten.

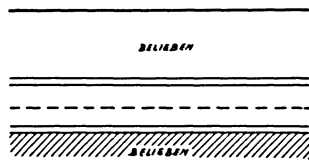


Fig. 9

Wir bezeichnen mit $\Omega(\lambda)$ die "charakteristische Funktion des Bodens", mit $\Omega^*(\lambda) = \Omega_1(\lambda)$ diejenige, die dem Boden entspricht, der bis zur Tiefe (a) weggenommen worden ist, mit $\Omega_\kappa(\lambda)$ diejenige, die dem weiteren Teil entspricht, der weggenommen worden ist, d.h. die ersten $(\kappa - 1)$ dünnen Schichten, und zuletzt mit $\overline{\Omega}(\lambda)$ diejenige, die allen anderen dünnen Schichten entspricht, die weggenommen worden sind.

In der $\overline{\Omega}(\lambda)$ treten die charakteristischen Eigenschaften der dünnen Schichten natürlich nicht mehr auf, und außerdem, wie es aus (1) hervorgeht, wird die $\Omega(\lambda)$ nur durch die $\Omega^*(\lambda)$ von diesen charakteristischen Eigenschaften abhängen. Hier genügt es, uns mit der letzteren zu befassen.

Wir bezeichnen mit R und S beziehungsweise, die "Gesamtmächtigkeit", die bestimmt wird durch:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n, \quad R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

A. Dünne leitfähige Schichten.

Wenn wir die (3c) n mal anwenden, so bekommen wir die folgenden Verhältnisse:

$$\begin{aligned}
 1/\Omega^*(\lambda) &= 1/\Omega_1(\lambda) = S_1(\lambda) + 1/\Omega_2(\lambda) \\
 &1/\Omega_2(\lambda) = S_2(\lambda) + 1/\Omega_3(\lambda) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &1/\Omega_n(\lambda) = S_n(\lambda) + 1/\bar{\Omega}(\lambda) \quad ,
 \end{aligned}$$

von denen wir mit der Ersetzung ableiten:

$$(4c) \quad 1/\Omega^*(\lambda) = S_1\lambda + S_2\lambda + \dots + S_n\lambda + 1/\bar{\Omega}(\lambda) = S\lambda + 1/\bar{\Omega}(\lambda)$$

Wir kommen daher zum folgenden Resultat: die Eigenschaften einer Folge von dünnen leitfähigen Schichten, erscheinen in der Berechnung des Potentials nur durch die "Gesamtmächtigkeit":

$$S = \sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2 + \dots + \sigma_n h_n$$

B. Dünne isolierende Schichten.

Wenn wir in ähnlicher Weise durch die (3i) vorgehen, so bekommen wir die folgenden Verhältnisse:

$$\begin{aligned}
 \Omega^*(\lambda) &= \Omega_1(\lambda) = R_1\lambda + \Omega_2(\lambda) \\
 &\Omega_2(\lambda) = R_2\lambda + \Omega_3(\lambda) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\Omega_n(\lambda) = R_n\lambda + \bar{\Omega}(\lambda)
 \end{aligned}$$

davon leiten wir mit der folgenden Ersetzung ab:

$$(4i) \quad \Omega^*(\lambda) = R_1\lambda + R_2\lambda + \dots + R_n\lambda + \bar{\Omega}(\lambda) = R\lambda + \bar{\Omega}(\lambda)$$

Wir kommen also zu einem dem vorausgehenden ähnlichen Resultat.

Die Eigenschaften einer Folge von dünnen isolierenden Schichten erscheinen in der Berechnung des Potentials nur durch die Gesamtmächtigkeit:

$$R = \sigma_1/h_1 + \sigma_2/h_2 + \dots + \sigma_n/h_n$$

Diese beiden Resultate können wir daher auch so ausdrücken:

zwei Systeme von dünnen Schichten, seien sie leitfähig (oder isolierend), sind untereinander gleichwertig, wenn sie die selbe Gesamtmächtigkeit haben.

Literatur

- [1] Belluigi, A.: Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einem oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials, Teil I Zeit. für Geoph. 1957 (Heft 3).
- [2] Belluigi, A.: Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einem oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials (Fortsetzung), Teil II Zeit. für Geoph. 1957 (Heft 4).
- [3] Belluigi, A.: Principi d'equivalenza geoelettrica ecc., Geofisica Pura e Appl. Milano, Vol. 34 (1956).
- [4] Crea, A.: Formule asintotiche ecc., Metano-Padova 1958.

Über das geomagnetische Normalfeld nach Fanselau

Von H. Kautzleben, Potsdam¹⁾

Zusammenfassung: Der Vorschlag von G. Fanselau über die Ableitung eines Normalfeldes aus geomagnetischen Potentialberechnungen wird unter dem Gesichtspunkt von vier an ein Normalfeld zu stellenden Forderungen betrachtet. Die Möglichkeiten beim gegenwärtigen Stand der analytischen Beschreibung des Erdfeldes lassen die prinzipiellen Vorzüge dieses Verfahrens noch nicht voll zur Geltung kommen. Zur Erleichterung der numerischen Auswertung werden für das Gebiet der DDR Nomogramme vorgelegt, mit denen das vollständige System der Elemente X, Y, Z, H, T, D, J bestimmt werden kann, wobei der vorkommende Wertebereich dieser Variablen umfaßt wird. Als Beispiele sind Normalfelder, die auf der Potentialberechnung des Geomagnetischen Instituts Potsdam für die Epoche 1945,0 beruhen, für das Gebiet der DDR, den Nordosten der USA und Tibet beigelegt.

Abstract: G. Fanselau's suggestion to derive a normal field from geomagnetic potential calculations is discussed considering four conditions to be fulfilled by normal fields. At present the analytical description of the earth's field does not allow to utilize the principal advantages. To facilitate the numerical analysis nomograms are constructed by which the total system of X, Y, Z, H, T, D, J can be determined containing the whole range of these variables, observed in the territory of the DDR. There are enclosed some examples of normal fields for the epoch of 1945,0, derived from the potential calculation of the Geomagnetic Institute of Potsdam, that is to say for the territory of the DDR, of the north-east of USA and of Tibet.

¹⁾ Dipl.-Geophys. H. Kautzleben, Geomagnetisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Potsdam, Telegrafenberg.

1. Definition und Eigenschaften eines Normalfeldes

Bei der Auswertung geomagnetischer Beobachtungen ist meist ein Normalfeld notwendig, um den für das betreffende Gebiet typischen ungestörten Feldverlauf von den Anomalien zu trennen, deren Ursachen in örtlich anomaler Magnetisierung der Gesteinskruste zu suchen sind.

Den verschiedenen Versuchen zur Ableitung eines solchen geglätteten oder normalen Feldes ist der Mangel eigen, daß sie nur Beobachtungswerte innerhalb des vorgegebenen Gebietes verwenden. Das führt aber nur zur Glättung der Beobachtungswerte, keinesfalls zum Anschluß an den ungestörten Verlauf, der nur aus allen auf der Erde verfügbaren Beobachtungen abgeleitet werden kann. Überdies liegt dem meist statistischen Verfahren mit zum Teil überdimensionalem Rechenaufwand nicht die von der Theorie geforderte zufällige Verteilung der Werte zugrunde, weshalb in dem auf diese Weise geglätteten Verlauf noch Anteile der zu reduzierenden Anomalien enthalten sind. Eine solche Ableitung hat weiterhin zur Folge, daß die Normalfelder verschiedener Gebiete sich nicht fehlerfrei aneinander anschließen, sondern mehr oder weniger große Abweichungen an den "Nahtstellen" zeigen. Bedenkt man noch die recht unterschiedlichen Vermessungsdichten in Gebieten, für die Normalfelder dieser Art berechnet sind, so dürften einem Vergleich recht große Unterschiede entgegenstehen. Andere Verfahren – etwa die von Rössiger [1] vorgeschlagene, regional sehr spezialisierte Methode unter Verwendung von sechs europäischen Observatorien – beachten nicht die physikalisch geforderte und für quantitative Auswertungen notwendige Eigenschaft des geomagnetischen Feldes, aus einem skalaren Potential ableitbar zu sein, die ebenfalls für das Feld eines beliebigen Störkörpers gilt. Bekanntlich führt das zu bestimmten Beziehungen zwischen den Koeffizienten in den Normalfeldformeln verschiedener Elemente, etwa zwischen H und Z .

Von diesen drei Forderungen an ein Normalfeld:

a) Das Normalfeld soll nur Bestandteile des Erdfeldes enthalten, deren Ursachen größer oder gleich den geometrischen Maßen des vorgegebenen Untersuchungsgebietes sind,

b) Normalfelder verschiedener Gebiete müssen vergleichbar sein und sich fehlerfrei aneinander anschließen,

c) das Normalfeld muß ein skalares Potential besitzen,

sollten die beiden letzten eigentlich selbstverständlich sein. Dagegen ist die erste vom rein mathematischen Standpunkt aus nicht zu erfüllen. Das folgt aus einem Satz der Potentialtheorie, nach dem man eine vorgegebene Feldverteilung außerhalb der erzeugenden Quellen durch unendlich viele verschiedene

Kombinationen von Quellen herstellen kann. In bezug auf das vorliegende Problem besagt das, daß man ohne weitere Kenntnisse über die geologische Struktur allein aus Beobachtungen des Erdfeldes auf der Erdoberfläche (überhaupt außerhalb der Erde) das Feld eines unbekanntem Störkörpers nicht bestimmen kann. Vom mathematischen Standpunkt aus könnten also geomagnetische Beobachtungen nicht zur Mutung von Lagerstätten herangezogen werden. Jedoch erlauben bekanntlich physikalisch begründete Näherungslösungen und geologische Überlegungen recht weitgehende Schlüsse auf die wirklich vorhandenen Störkörper. Das ist auch beim vorliegenden Problem möglich. Es sei dabei auf zwei Dinge hingewiesen. Die Beobachtung zeigt, daß das Magnetfeld kleiner Körper sehr schnell mit der Entfernung abnimmt. Wenn man demnach aus der beobachteten Feldverteilung alle Schwankungen und Unregelmäßigkeiten durch ein irgendwie gewähltes Glättungsverfahren eliminiert, hat man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die Feldanteile der kleineren Störkörper eliminiert. Jedoch liegt dieser Annahme die meist nicht erwähnte Voraussetzung zugrunde, daß das Feld dieser Störkörper keinen Anteil aufweist, dessen geometrische Konfiguration ebenso einfach ist wie der normale geglättete Verlauf. Mit dieser Einschränkung liegt also ein Normalfeld dann vor, wenn alle Feldanteile nicht mehr enthalten sind, deren charakteristische Dimensionen kleiner oder gleich den Ausmaßen des vorgegebenen Gebietes sind. (Der Begriff "charakteristische Dimension" muß noch präzisiert werden, jedoch genügt hier etwa der Vergleich mit der Wellenlänge einer Sinusschwingung, erweitert auf zwei Dimensionen.)

Es ist dabei noch ein Kriterium darüber erwünscht, wieweit ein solcher "mittlerer Feldverlauf" sich dem angestrebten Normalfeld nähert, da man mit verschiedenen Glättungsverfahren einen mittleren Verlauf konstruieren kann. Eine Aussage gewinnt man, wenn man die im Zusammenhang mit Normalfeldern stets geforderte, aber kaum jemals ausgesprochene Annahme ausnützt, daß die entstandenen Anomalien eine nur geringe oder gar keine zeitliche Veränderlichkeit zeigen. Es ist an anderer Stelle schon gezeigt worden, wie man diese Eigenschaft zur Prüfung der Verfahren zur Ableitung von Normalfeldern ausnutzen kann. Erforderlich sind fehlerfreie Beobachtungen an mindestens zwei Stationen zu zwei verschiedenen Epochen sowie die Normalfelder für diese Epochen. Natürlich ist dieses Kriterium nur für sehr wenige solcher Verfahren anwendbar, da Messungen zu verschiedenen Epochen bisher nur in wenigen Gebieten der Erde ausgeführt worden sind.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist es, unter diesen Gesichtspunkten den Vorschlag von G. Fanselau [2] zu betrachten, nach dem Normalfelder aus geomagnetischen Potentialberechnungen abgeleitet werden sollen.

2. Prinzipielle Erörterungen

Der Grundgedanke des Vorschlags von Fanselau besteht darin, bei der Ableitung der normalen Verteilung nicht nur das Beobachtungsmaterial des betreffenden Untersuchungsgebietes zugrunde zu legen, sondern von allen auf der gesamten Erde verfügbaren Beobachtungen auszugehen. Die zusammenfassende Bearbeitung dieses (zwar recht heterogenen) Materials [3] liegt in den sogenannten Potentialberechnungen vor, die von Zeit zu Zeit angestellt werden. Dabei hat sich ergeben, daß man für das erdmagnetische Feld die Existenz eines skalaren Potentials angeben kann, dessen Quellen bei genügender zeitlicher Mittelung mit der bisher erreichten Genauigkeit ausschließlich im Innern der Erde zu suchen sind.

Solche Potentialberechnungen waren ursprünglich dafür gedacht, das geomagnetische Feld möglichst gut in einer analytischen Darstellung zu erfassen. Die aus physikalischen Gründen verwendete Reihendarstellung nähert sich jedoch bei wachsender Zahl der Glieder wegen der sehr großen Unregelmäßigkeiten im Erdfeld, aber auch wegen der mathematischen Eigenschaften der Reihe so langsam dem wirklichen Wert, daß man das Ziel einer vollständigen Beschreibung aufgeben muß. Jedoch besitzt diese Reihe einige Vorzüge, die auch im hier interessierenden Zusammenhang wichtig sind.

Die Potentialberechnung liefert für das geomagnetische Potential eine Funktion von geographischer Länge und Breite in Form einer Reihe nach bestimmten Grundfunktionen, deren Koeffizienten (außer durch die Wahl des Koordinatensystems) ausschließlich durch die geometrische Konfiguration des Erdfeldes bestimmt sind. Bei geeigneten mathematischen Verfahren ergeben sich diese "Parameter" endgültig, d. h. als unabhängig von der Ausdehnung der Reihe. Sie werden also nicht dadurch beeinflusst, ob man aus dem Beobachtungsmaterial etwa nur das Dipolfeld herausfiltert, zu dessen Beschreibung eine Reihe mit drei Gliedern ausreicht, oder ob man eine Darstellung durch eine Reihe mit z. B. 255 Reihengliedern (wie im Falle der Potentialberechnung von Potsdam für die Epoche 1945,0 [4]) gewinnen will. In beiden Fällen sind die entsprechenden Koeffizienten der ersten drei Glieder einander gleich.

Jedes Glied der entstehenden Reihe entspricht einem Anteil am Erdfeld mit einer bestimmten, durch die jeweilige Grundfunktion vorgeschriebenen geometrischen Konfiguration. Der zugehörige Parameter gibt dann an, in welchem Maße der Anteil dieser Konfiguration im Erdfeld enthalten ist. Dabei werden durch die Reihe mit wachsender Ausdehnung Anteile immer kleinerer Dimensionen erfaßt. (Zum Vergleich sei auf die entsprechenden Verhältnisse bei der gewöhnlichen harmonischen Analyse hingewiesen.) Man kann auf diese Weise er-

reichen, daß in der Reihendarstellung schließlich alle Elemente enthalten sind, deren Dimensionen größer oder gleich den Dimensionen des Untersuchungsgebietes sind, während alle (geometrisch) kleineren noch nicht erfaßt sind. Die Endgültigkeit der Parameter weist darauf hin, daß die dadurch gegebene Aufteilung der Anteile am geomagnetischen Feld nach ihrer geometrischen Konfiguration vollständig ist.

Verwendet man jetzt nur diese Reihendarstellung mit der dadurch bestimmten Anzahl von Reihengliedern zur Beschreibung des Erdfeldes im vorgegebenen Untersuchungsgebiet, so ist mit ihr das durch die Bedingung a) definierte Normalfeld gegeben. Aus dem Potential läßt sich ja sofort die Beschreibung des Feldes selbst durch Richtungsdifferentiation ableiten. Gleichzeitig ist damit auch die Bedingung b) erfüllt, da die Normalfelder für verschiedene Gebiete auf der gesamten Erde durch die gleiche Methode und aus demselben Material (in Form der Potentialreihe) abgeleitet werden.

Der bedeutende Vorzug der auf diese Weise gewonnenen Normalfelder, nämlich ein skalares Potential zu besitzen, liegt in einer weiteren Eigenschaft der Reihendarstellung begründet. Wenn die Beschreibung des Erdfeldes vollständig ist, genügt die Reihe ebenso wie das Erdfeld selbst der Potentialbedingung. In diesem Falle enthält sie unendlich viele Glieder, ist also für numerische Auswertung völlig ungeeignet. Wenn sie nur aus endlich vielen Gliedern besteht, ist durchaus nicht selbstverständlich, daß die Potentialbedingung noch erfüllt ist. In der Potentialreihe kann man jedoch bestimmte Kombinationen von Reihengliedern vornehmen, für die jeweils Potentiale angegeben werden können und die demnach physikalisch möglichen Zuständen entsprechen. Man kann die Reihe dann so ordnen, daß sie nach solchen Teilpotentialen fortschreitet. Diese Ordnung ist aber gleichzeitig eine Ordnung nach der geometrischen Größe der einzelnen Elemente. Wenn man also die Potentialreihe nach einem Teilpotential bestimmter Ordnung abbricht, hat man ein Normalfeld gewonnen, das allen drei Forderungen a, b, c gerecht wird.

Diese prinzipiellen Erörterungen sollen mit dem Hinweis abgeschlossen werden, daß auch das erwähnte Kriterium für die Realität des Normalfeldes anwendbar ist. Das Auftreten der Säkularvariation bringt es mit sich, daß die Verteilung der erdmagnetischen Größen sich mit der Zeit ändert. Folglich ergeben Potentialberechnungen zu verschiedenen Epochen voneinander abweichende Parameter. Diese Zeitabhängigkeit läßt sich analytisch erfassen, so daß zu jeder Epoche innerhalb des Zeitintervalles, für das Potentialberechnungen angestellt worden sind, Fanselause Normalfelder abgeleitet werden können. Da nur die zeitliche Entwicklung der Teilpotentiale als voneinander unabhängiger, physikalisch möglicher Zustände erfaßt wird, besitzen auch diese Normalfelder die obigen drei Eigenschaften.

Es sei noch zusammengestellt, in welcher Hinsicht der Vorschlag von F a n s e l a u Vorteile außer den bisher genannten bringt: Da das Normalfeld ursprünglich für das Potential abgeleitet wurde, kann man die normale Verteilung aller Elemente angeben; am einfachsten für die geographisch orientierten Komponenten des Feldvektors X (positiv nach Norden), Y (positiv nach Osten) und Z (positiv nach unten), mit Hilfe der üblichen Umrechnungsformeln auch für Horizontalintensität H , Totalintensität T , Deklination D und Inklination J . Aus dem Potentialausdruck folgt auch unmittelbar, daß für die Normalfelder die Höhenabhängigkeit angegeben werden kann. Schließlich kann die normale Verteilung ebenfalls für Gebiete abgeleitet werden, die erst in geringem Maße magnetisch vermessen sind.

3. Gegenwärtige Möglichkeiten

Es muß natürlich noch untersucht werden, wie weit diese prinzipiellen Vorteile dieses Vorschlages beim gegenwärtigen Stand der Beschreibung des geomagnetischen Feldes durch Potentialberechnungen schon realisiert werden können. Das läuft auf die Beantwortung von hauptsächlich drei Fragen hinaus, die im wesentlichen jedoch erst durch mehrere durchgerechnete Anwendungsbeispiele gegeben werden kann:

a) Ist das Beobachtungsmaterial in Form von Weltkarten, das den Potentialberechnungen zugrunde liegt, ausreichend, und liefert die ausgleichende Bearbeitung von eng und schwach vermessenen Gebieten im Laufe einer solchen Analyse einen ausreichend geringen Gesamtfehler?

b) Ist die Ausdehnung der Reihendarstellung für das Potential genügend groß, um Konfigurationselemente mit für Zwecke der angewandten Geophysik ausreichenden Dimensionen noch zu erfassen, und ist eine solche Ausdehnung bei der Größe des Fehlers überhaupt sinnvoll?

c) Kann die zeitliche Variabilität mit genügender Genauigkeit erfaßt werden?

Die zuerst genannte Frage ist identisch mit dem Haupteinwand gegen die Verwendung von Potentialberechnungen auch für andere Problemkreise. Es ist nicht zu übersehen, daß große Teile der Erdoberfläche nur ungenügend vermessen sind. Jedoch werden bei der Konstruktion geomagnetischer Karten Methoden benutzt, mit denen bei mehrfacher Anwendung unter der Annahme eines Potentials die recht hohe Genauigkeit in der Kenntnis der magnetischen Verhältnisse von eng vermessenen Gebieten auch auf schwach vermessene ausgedehnt werden

kann. Solche Verbesserungen können z.T. quantitativ angegeben werden. Das endgültige Kriterium kann jedoch nur die Anwendung sein.

Beim zweiten Problem ist dagegen eine genauere Antwort möglich. Die bisher angestellten Potentialberechnungen, mit Ausnahme der im Geomagnetischen Institut Potsdam durchgeführten Analyse, lieferten Reihendarstellungen für das Potential bis zur 6. Ordnung. Damit sind alle Konfigurationselemente erfasst, die größer als $20 \dots 30^\circ$ (Größenordnung der Kontinente) sind. Für Zwecke der angewandten Geophysik ist das noch unzureichend. Bei der Auswertung der Potsdamer Potentialberechnung, die als bisher einzige bis zur 15. Ordnung ausgedehnt worden ist, hat sich aber gezeigt, daß eine Ausdehnung über die 6. Ordnung hinaus, wenig sinnvoll ist. Die Fehler der Koeffizienten höherer Reihenglieder sind größer als ihr Betrag, so daß man die Koeffizienten nicht mehr als reell ansehen kann. Man wird sich daher gegenwärtig noch darauf beschränken müssen, diese Methode für großräumige Untersuchungen, besonders aber für den internationalen Vergleich der Normalfelder verschiedener Gebiete heranzuziehen. Wenn auch der Wert der damit gewonnenen Normalfelder für die Lagerstättenforschung geringer sein wird, so dürften sie für regionaltektonische Untersuchungen besonders gut geeignet sein.

Die dritte Frage muß schließlich ebenfalls verneint werden. Die bisherigen Potentialberechnungen sind einmal so verschiedenartig und zum anderen so ungünstig verteilt, daß man über den Charakter der zeitlichen Variabilität der Parameter nur eine sehr unvollkommene Vorstellung gewinnt. Da jedoch Weltkarten für wesentlich mehr Epochen vorliegen, kann hierbei in nächster Zeit eine Verbesserung erwartet werden.

4. Numerische Auswertung

Das Problem, nach der Methode von Fanselau ein Normalfeld abzuleiten, ist eigentlich schon gelöst, wenn aus einer Potentialberechnung die übliche Reihendarstellung mit Hilfe von Kugelfunktionen für das Potential mit genügender Ausdehnung vorliegt. Aus dem Potential folgen durch Richtungsdifferentiation ähnliche Reihen für die Komponenten X , Y , Z . Die Auswertung dieser Reihen für das vorgegebene Gebiet erfordert jedoch beträchtliche Rechenarbeit. Es ist deshalb wesentlich bequemer – bei Berücksichtigung der möglichen Fehler dabei völlig ausreichend –, die Reihen mit Kugelfunktionen nach Taylor in Reihen umzuformen, die nach Potenzen der Differenzen von Länge und Breite und der Höhe gegenüber den Werten eines im Untersuchungsgebiet ausgewählten Zentralpunktes fortschreiten. Über die mathematischen Einzelheiten ist schon ausführlich berichtet worden [5]. Man erhält schließlich für die Komponente K :

$$\begin{aligned}
K &= K_{000} + K_{100} \Delta \phi + K_{110} \Delta \lambda + K_{111} h \\
&+ K_{200} (\Delta \phi)^2 + K_{210} \Delta \phi \Delta \lambda + K_{211} \Delta \phi h + K_{220} (\Delta \lambda)^2 \\
&+ K_{221} \Delta \lambda h + K_{222} h^2 \\
&+ \dots,
\end{aligned}$$

wobei die K_{ijk} konstante Größen, $\Delta \phi = \phi - \phi_0$ die Breitendifferenz, $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ die Längendifferenz gegenüber dem Zentralpunkt (ϕ_0, λ_0) und h die Höhe über Meeresniveau bedeuten. Die Punkte sollen Potenzen 3. und höheren Grades andeuten. Für Gebiete in der Größe Deutschlands genügt in den meisten Fällen die Ausdehnung bis Potenzen 2. Grades einschließlich. Beschränkt man sich auf die Darstellung der Verhältnisse an der Erdoberfläche, brauchen alle Glieder, in denen h auftritt, nicht berücksichtigt zu werden. Die Auswertung dieses Polynoms ist ohne Schwierigkeiten möglich.

Für die Vertikalintensität Z , auch für Ost- und Nordkomponente ist damit die Aufgabe vollständig gelöst. In den meisten Fällen wird jedoch nicht X und Y , sondern H und D beobachtet. Für diese Elemente folgt aus dem Potentialausdruck aber nicht auf gleiche einfache Weise ein geschlossener Ausdruck wie für X und Y . Der einfachste Weg zu H und D führt dann über die Auswertung der Reihen für X und Y und punktweise Berechnung nach den elementaren Umrechnungsformeln

$$H^2 = X^2 + Y^2, \quad \text{tg } D = Y/X.$$

Wenn man die Werte für Z hinzunimmt, können auch die Werte der restlichen beiden Elemente T und J nach den Beziehungen

$$T^2 = H^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \text{tg } J = Z/H$$

bestimmt werden. Davon gewinnt die Totalintensität für die Deutung aeromagnetischer Profile, bei denen meist T gemessen wird, eine gewisse Bedeutung.

Allerdings erfordern diese Umrechnungen eine etwas umständliche Rechenarbeit, besonders wenn man für X, Y, Z aus den Taylor-Reihen nicht die Absolutwerte, sondern die Differenzen gegen die Werte im Zentralpunkt berechnet hat. Eine Erleichterung, die bei der geforderten Genauigkeit völlig gerechtfertigt ist, erreicht man durch Verwendung graphischer Rechenmethoden. Es wurden dazu vier Nomogramme entworfen, wobei die für H und T kombiniert worden sind, um die Ablesung von T ohne Angabe des Zwischenwertes für H zu ermöglichen. Die Nomogramme für H und T beruhen auf dem Strahlensatz; die Nomogramme für D und J bauen auf den elementaren Sätzen auf, die für den Schnitt dieser Parallelen durch eine dritte Gerade gelten [6]. Alle vier Rechen-

pagiere sind so eingerichtet, daß der ausgenutzte Wertebereich der Variablen X, Y, Z, H, T, D, J im Gebiet der DDR in den letzten 60 Jahren nicht überschritten wurde (Abb. 1, 2, 3).

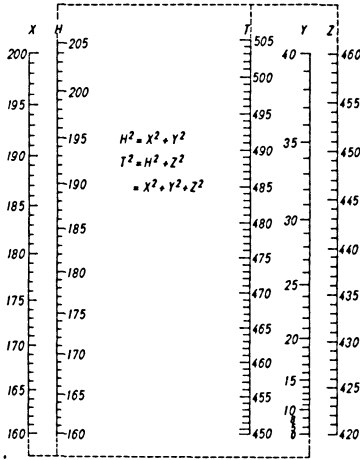


Abb. 1: Nomogramm zur Bestimmung von H und T aus X, Y, Z

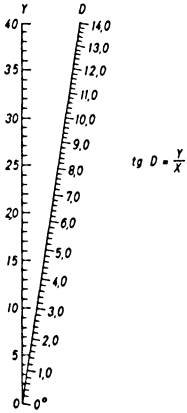


Abb. 2: Nomogramm zur Bestimmung von D aus X, Y

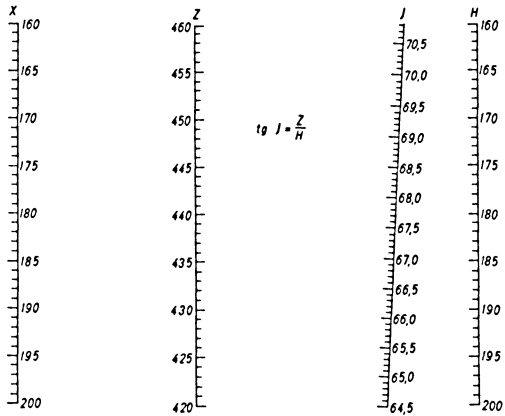


Abb. 3: Nomogramm zur Bestimmung von J aus H, Z

Weiter sind zwei Nomogramme beigelegt, mit denen X und Y nach den Beziehungen

$$X = H \cos D, \quad Y = H \sin D$$

aus vorgegebenen Werten H und D bestimmt werden können (Abb. 4, 5). Die

Verwendung dieser geographisch orientierten Komponenten ist aus theoretischen Gründen manchmal vorzuziehen.

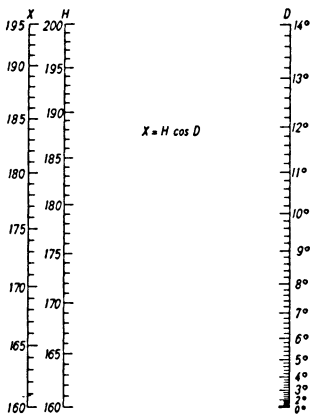


Abb. 4: Nomogramm zur Bestimmung von X aus H, D

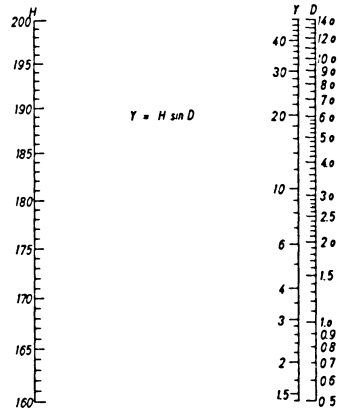


Abb. 5: Nomogramm zur Bestimmung von Y aus H, D

5. Ergebnisse

Die skizzierte Methode wurde mit der Potentialberechnung des Geomagnetischen Instituts Potsdam für die Epoche 1945,0 auf drei verschiedene Gebiete angewendet:

1. Deutsche Demokratische Republik, Zentralpunkt $\phi_0 = 52^\circ,5$; $\lambda_0 = 13^\circ,0$;
2. Nordöstlicher Teil der USA, Zentralpunkt $\phi_0 = 41^\circ,0$; $\lambda_0 = 282^\circ,0$; und
3. Tibet $\phi_0 = 37^\circ,5$; $\lambda_0 = 90^\circ,0$.

Die Potentialdarstellung wurde bis zur 6. Ordnung ausgedehnt. Die Koeffizienten der jeweiligen Taylor-Reihe für X, Y, Z sind in Tab. 1 aufgeführt. Die graphische Darstellung der Normalfelder bilden die Abbildungen 6 bis 14. Für die DDR wurden mit Hilfe der Nomogramme in Abb. 1, 2, 3 auch die Normalfelder für H, T, D und J berechnet und in Abb. 15 bis 18 dargestellt.

Im Gebiet der DDR sind weiterhin die mittleren Feldverläufe von X, Y, Z nach der Methode von Rössiger eingezeichnet. Dabei sei betont, daß dieser Vergleich nicht zu einer Aussage über die Güte der verschiedenen Typen von Normalfeldern führen soll. Wegen der eingangs angegebenen Unmöglichkeit,

Gebiet	Komponente	K_{000} γ	K_{100} γ/Grad	K_{110} γ/Grad	K_{200} $\gamma/(\text{Grad})^2$	K_{210} $\gamma/(\text{Grad})^2$	K_{220} $\gamma/(\text{Grad})^2$
DDR Zentral- punkt	$\phi_0 = 52^\circ,5$	18090	- 480,2	28,6	0,18	- 0,23	- 1,01
	$\lambda_0 = 13^\circ,0$	- 1323	16,3	148,9	- 0,01	- 0,62	- 0,20
		43801	429,1	22,1	- 10,01	- 0,63	2,12
Nordosten der USA Zentral- punkt	$\phi_0 = 41^\circ,0$	16797	- 619,3	- 68,4	- 0,77	6,25	2,31
	$\lambda_0 = 282^\circ,0$	- 2101	- 122,5	- 264,3	1,96	2,13	0,43
		54484	509,2	- 126,5	- 16,65	- 6,21	- 5,45
Tibet Zentral- punkt	$\phi_0 = 37^\circ,5$	30045	- 742,2	117,2	- 6,04	- 2,98	- 1,80
	$\lambda_0 = 90^\circ,0$	- 1534	127,7	- 79,9	- 0,41	- 5,62	1,67
		44080	1121,5	- 39,4	- 22,25	- 8,74	- 2,71

Tabelle 1: Zahlenwerte der Koeffizienten in den Formeln für das Normalfeld nach Fanselau

Abb. 6 bis 8: Normalfelder nach Fanselau für X, Y, Z für das Gebiet der DDR zur Epoche 1945,0 sowie Verlauf der entsprechenden mittleren Feldverläufe nach Rössiger

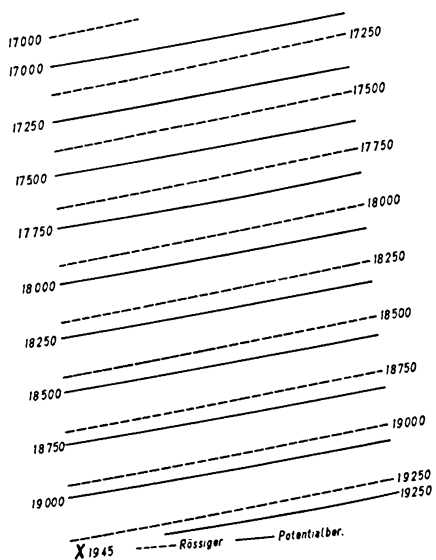


Abb. 6

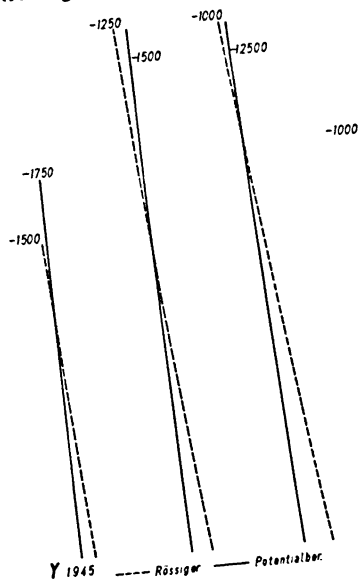


Abb. 7

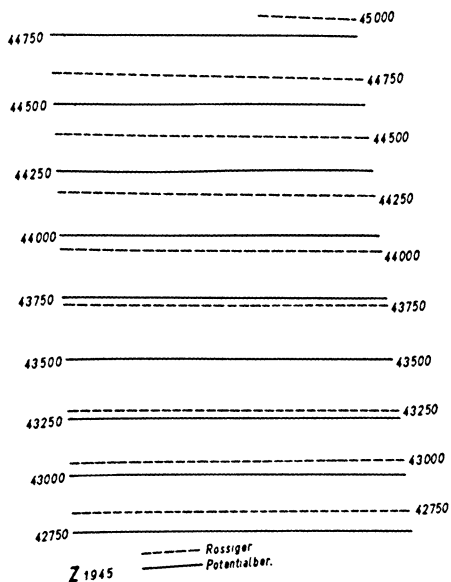


Abb. 8

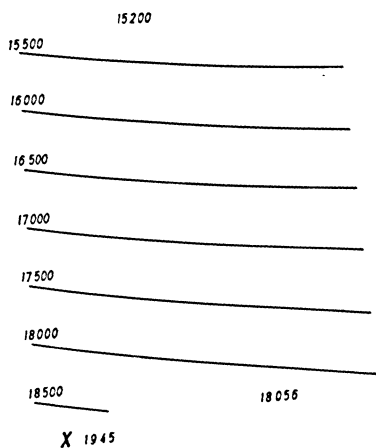


Abb. 9

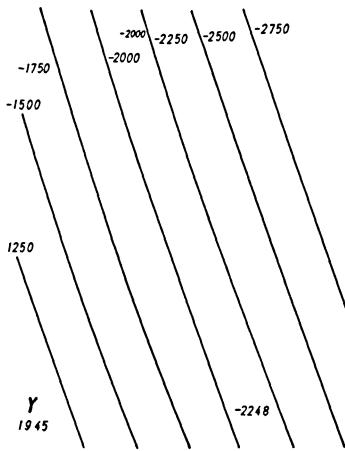


Abb. 10

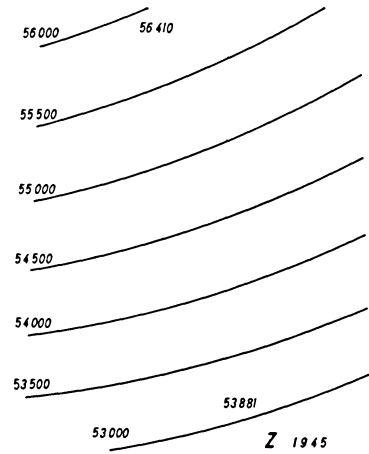


Abb. 11

Abb. 9 bis 11: Normalfelder nach Fanselau für X, Y, Z für den Nordosten der USA zur Epoche 1945,0

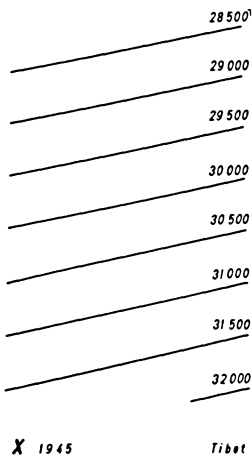


Abb. 12

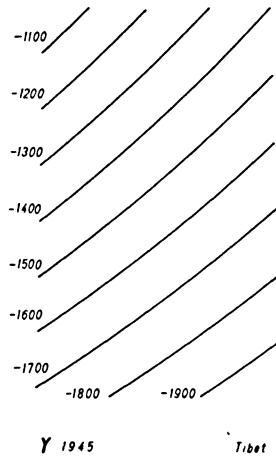


Abb. 13

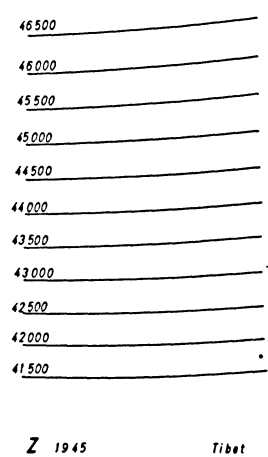


Abb. 14

Abb. 12 bis 14: Normalfelder nach Fanselau für X, Y, Z für ein Gebiet in Tibet zur Epoche 1945,0

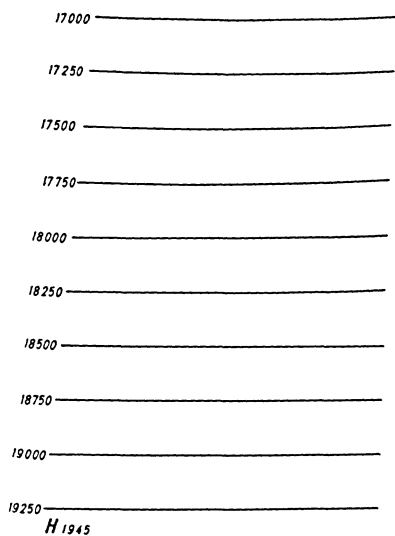


Abb. 15

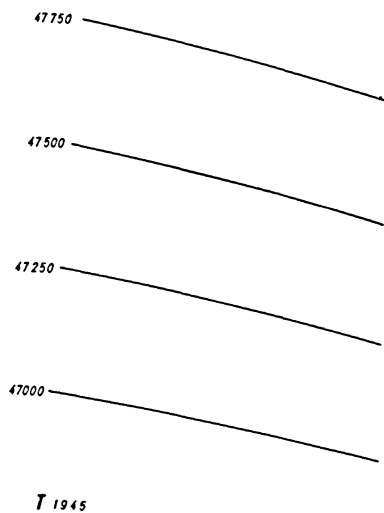


Abb. 16

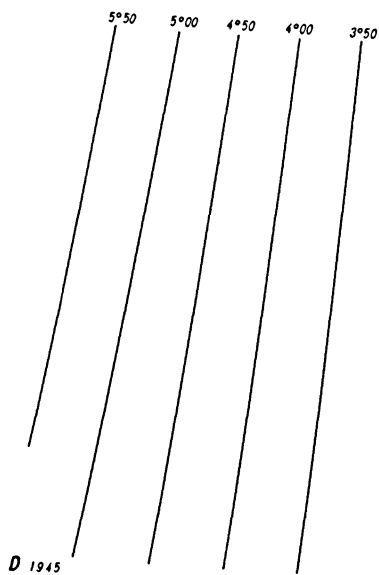


Abb. 17

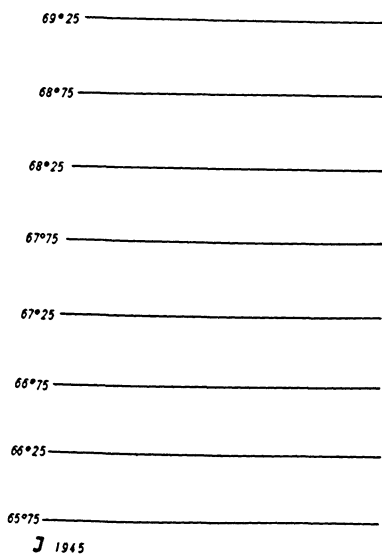


Abb. 18

Abb. 15 bis 18: Normalfelder nach Fanselau für H , T , D , J für das Gebiet der DDR zur Epoche 1945,0

ein Normalfeld exakt zu definieren, wäre eine solche Aussage auch ungerechtfertigt. Vielmehr soll das aus globalen Betrachtungen gewonnene Normalfeld nach Fanselau mit einer möglichst einfachen Beschreibung der lokalen geomagnetischen Verhältnisse verglichen werden. Es zeigt sich, daß das Normalfeld aus der Potentialberechnung sich im Gebiet der DDR recht gut in die tatsächlichen Beobachtungen einfügt und keine größeren systematischen Abweichungen zeigt, die durch geologische Überlegungen auch nicht zu stützen wären.

In den Darstellungen für den Nordosten der USA sind die Beobachtungswerte der beiden dort vorhandenen Observatorien Cheltenham und Agincourt mit angegeben. Eine ähnliche Beschreibung der lokalen Verhältnisse wie bei der DDR konnte nicht beschafft werden. In Tibet war das auch nicht möglich.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Frau G. Kandale und Fräulein B. Weidlich für die Ausführungen der numerischen Rechnungen zu danken.

Literatur

- [1] Rössiger, M.: Das erdmagnetische Normalfeld der Vertikalintensität für Mitteleuropa, Epoche 1941, 5. Beitr. Angew. Geophys. 9 (1942), S. 121-128.
- [2] Fanselau, G.: Zur Frage des geomagnetischen Normalfeldes, Gerlands Beitr. Geophys. 67 (1958), S. 49-59.
- [3] Mauersberger, P.: Mathematische Beschreibung und statistische Untersuchung des Hauptfeldes und der Säkularvariation. Kap. 10 in Geomagnetismus und Aeronomie III. Herausgeg. von G. Fanselau, Berlin 1959.
- [4] Fanselau, G., Lucke, O., Mauersberger, P., Sellien, K.: (In Vorbereitung.) Vorläufige Ergebnisse in G. Fanselau und H. Kautzleben: Die analytische Darstellung des geomagnetischen Feldes. Geof. pur. e. appl. 41 (1958), S. 33-72.
- [5] Fanselau, G. und Kautzleben, H.: Zur Auswertung der Potentialberechnung in begrenzten Gebieten. Abh. Geomagn. Inst. Potsdam, Nr. 24 (1959).
- [6] Luckey, P.: Nomographie. Leipzig 1953.

BUCHBESPRECHUNGEN

Řihánek, Ladislav V. und Josef Postránecký: Bourky a ochrana před bleskem (Gewitter und Blitzschutz). Československá Akademie VĚD Praha, 8°, 507 S., 134 Abb., XV Tafeln, Prag 1957. Kčs 46.--.

Das Buch gibt eine breit angelegte Darstellung der Physik des Gewitters, der einschlägigen Meßtechnik und der Anwendung der Kenntnisse über das Gewitter auf dem Gebiet des Blitzschutzes.

Im "theoretischen Teil", der etwas mehr als die Hälfte des Werkes umfaßt, werden nach einer kurzen Übersicht über die physikalischen Grundlagen, Formelzeichen und Maßsysteme, über die geschichtliche Entwicklung der Gewitterforschung und über die Physik der Atmosphäre zunächst die Lufterlektrischen Grundlagen besprochen (56 S.) und dann die verschiedenen Gewittertheorien sowie die klimatologische Verteilung der Gewitter behandelt (30 S.). Es folgt eine sehr eingehende Darstellung der Physik des Blitzes und seiner Wirkungen (120 S.). Im 2. Abschnitt werden in recht vollständiger Darstellung die Meßmethoden behandelt (90 S.) von Elektrometer und lufterlektrischem Feldmeßgerät bis zur Boys-Kamera und spherics-Peilung.

Der 2. Teil des Buches behandelt den Blitzschutz mit zahlreichen technischen und praktischen Einzelheiten und einer Gegenüberstellung der in verschiedenen Ländern üblichen Schutzmaßnahmen. Beides dürfte für den Blitzschutzfachmann von besonderem Interesse sein. In einer Reihe teilweise farbiger Tafeln werden Blitzableiteranlagen für besondere Gebäude und sonstige Objekte beschrieben.

Alle Einzelkapitel enthalten am Schluß Zitate der Spezialliteratur (insgesamt 155). Außerdem ist ein alphabetischer Literatur-Katalog von 400 Zitaten angeschlossen.

Als ganz besonders wertvoll ist ein fünfsprachiges Fachwörterbuch (tschechisch, russisch, englisch, französisch, deutsch) von fast 700 Fachausdrücken zu bezeichnen.

Es ist zu bedauern, daß das Buch aus sprachlichen Gründen nicht einem größeren Leserkreis zugänglich ist.

Künstliche Erdsatelliten, herausgegeben von E. Reichardt und E. A. Niekisch und weiteren Fachkollegen. Zweiter Sonderband der Zs. "Fortschritte der Physik". VIII/357 Seiten, 147 Abbildungen, 31 Tabellen. Akademie-Verlag, Berlin W 1, broschiert DM 38.--.

Der Band enthält eine zusammenhängende Folge von 17 aufeinanderfolgenden und 4 einzelnen Aufsätzen von insgesamt 38 Autoren, die den Bänden 63 (1957) und 64 (1958) der russischen Zeitschrift "Uspechi fiz. Nauk" (Fortschritte der physikalischen Wissenschaften) entnommen sind. — Es werden die wissenschaftlichen Voraussetzungen eines Satellitenprogramms von verschiedenen Standpunkten aus eingehend betrachtet. Die ersten Aufsätze befassen sich mit dynamischen Problemen der Bewegung von Satelliten im (nichtzentralen) Schwerfeld der Erde und von Mondraketen. Eine spezielle Betrachtung untersucht dann die Möglichkeiten der Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie mit Hilfe von Satelliten. Die letzten fünfzehn Arbeiten betreffen einzelne Elemente wie Sonnenstrahlung, kosmische Strahlung, Korpuskularstrahlung; Druckverhältnisse, Zusammensetzung und Dichteverhältnisse der höchsten Atmosphärenschichten; Ionenuntersuchungen in und über der Ionosphäre; elektrostatische und geomagnetische Felder; feste Komponente der interplanetaren Materie; der letzte von ihnen behandelt optische Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten.

Die Aufsätze wurden geschrieben, ehe die ersten Satellitenergebnisse vorlagen. Da der Band dem Geophysiker der verschiedenen Disziplinen jedoch eine fundierte Übersicht über die Probleme gibt, die mit der Ausdehnung seines Arbeitsfeldes in den interplanetaren Raum hinein auftreten, ist sein Studium auch heute wertvoll und anregend. Die Fülle der mitgeteilten Formeln, Zahlen und Diagramme wird besonders willkommen sein. — Der Text ist nicht immer leicht zu lesen. Hier wird die besondere Schwierigkeit sichtbar, die beim Übersetzen aus Wissenschaftsgebieten mit neuen Begriffen auftaucht: wenn ein solcher Begriff den Sinn eines ganzen Satzes bestimmt, kann er selber wörtlich richtig übersetzt sein, der Sinn des Satzes bleibt trotzdem u.U. dunkel. Gelegentlich stimmen die Bildunterschriften nicht (so z.B. Seite 22). Die Schwierigkeit des Studiums für den deutschen Leser wird noch dadurch erhöht, daß ihm die meisten der vielen russischen Literaturangaben nicht geläufig sein werden. — Die Kenntnis der in den 21 Aufsätzen dargestellten Probleme und Folgerungen scheint für jeden Geophysiker, dessen Arbeitsgebiet außerirdische Bezüge hat oder haben könnte, unerläßlich.

PERSONALIEN

Die Deutsche Geophysikalische Gesellschaft entbietet ihrem Ehrenmitglied, Herrn Professor Dr. F. Errulat, aus Anlaß seines 70. Geburtstages, am 18. Oktober, die herzlichsten Glückwünsche. Sie dankt ihm insbesondere für seine erfolgreichen Bemühungen um die Neugründung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft und um das Wiederscheinen der Zeitschrift für Geophysik. Sie bringt mit diesem Dank gleichzeitig zum Ausdruck, daß ihm noch viele Jahre körperlicher und geistiger Frische beschieden sein mögen.



GEOPHYSICS LTD.

INSTRUMENTAL IN MANY SUCCESSFUL EXPLORATION PROJECTS
4 ALBEMARLE STREET · LONDON W1 · 6 ELSTREE WAY · BOREHAM WOOD · HERTS

Wir suchen zu kaufen:

Zeitschrift für Geophysik

Jahrg. 1-18. 1924-1944
oder Jahrg. 1-25 (ggf. auch einzelne
Bände u. Hefte) sowie alle anderen
wissenschaftl. Zeitschriften, Sammel-
werke, wie auch vollst. Bibliotheken.

U. a. suchen wir z. Zt. noch besonders:

Gerlands Beiträge z. Geophysik
vollst. u. einzeln

Geofisica pura e applicata
Vol. 1-42 u. 1-5

Geophysics Vols. 1-18 od. 1-24

Handbuch d. Geophysik
von B. Gutenberg

Zentralblatt f. Geophysik, Meteorologie
u. Geodäsie Bd. 1-11 usw.

Angebote mit genauen Angaben
(mögl. auch mit Preis) erbittet

"Journalfranz"

ARNULF LIEBING OHG

WURZBURG 2

Postfach 1136

GEOPHYSICS

A Journal of General and Applied Geophysics

Published Quarterly by

**SOCIETY OF EXPLORATION
GEOPHYSICISTS**

Box 1536

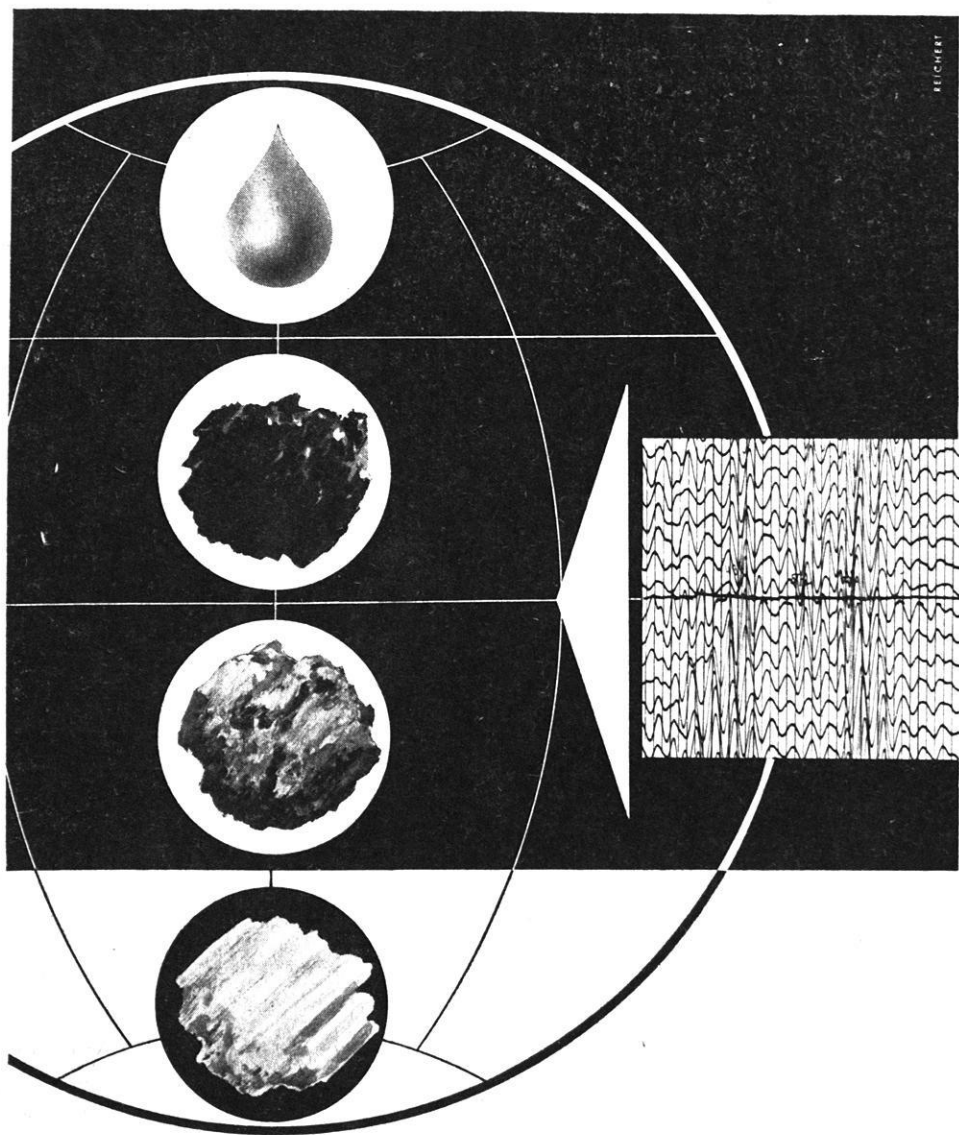
Tulsa, Oklahoma

- The official journal of the leading international group of prospecting geophysicists
- Devoted to current problems in seismograph, gravity, magnetic and other methods of geophysical prospecting for oil and other minerals
- Covers geophysical instrumentation

SUBSCRIPTION RATES

ONE YEAR (4 issues) \$ 10.00,
foreign \$ 10.50 (payment with order)

ALSO AVAILABLE ON MICROCARDS



HANNOVER · HAARSTRASSE 5

RUF: 86661 · FERNSCHREIBER: 922 847 · DRAHT: PRAKLA