

1 Z 22174 F

August

Reich

ZEITSCHRIFT
FÜR
G E O P H Y S I K

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

W. Dieminger, Lindau über Northeim

unter Mitwirkung von *B. Brockamp*, Münster i. W. — *A. Defant*, Innsbruck — *W. Hiller*, Stuttgart
K. Jung, Kiel — *O. Meyer*, Hamburg — *F. Möller*, München — *H. Reich*, Göttingen

Jahrgang 31

1965

Heft 3/4



P H Y S I C A - V E R L A G · W Ü R Z B U R G

INHALTSVERZEICHNIS

GUILINO, G.: Ausbau eines Wechsellichtmonochromators und seine Anwendung zur Messung des Luftleuchtens während der Dämmerung und in der Nacht	115
RAHMAN, A.: A New Type of Wave Discovered in the Schlieren Photographs	146
KUHN, W.: Zur Theorie der endlichen elastischen Verschiebungen und ihre Anwendung auf isotrope elastische Körper, die unter beliebigen Anfangsverzerrungen stehen	159
MÜNCH, J.: Das Auftreten von pc-Pulsationen des erdmagnetischen Feldes in Abhängigkeit von der erdmagnetischen Aktivität	192
DUTTA, S.: Note on the Propagation of Love-Waves in a Two-Layer Heterogeneous Medium	200
EDER, G.: Der Zuwachs des Erdradius	206
STILLER, H. und H. VOLLSTÄDT: Bestimmung ferri- und antiferromagnetischer CURIE-Temperaturen mittels Differentialthermoanalyse	212
Briefe an den Herausgeber	219
Mitteilungen	222
Buchbesprechung	223

DIE ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint zweimonatlich. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 48,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrgangs vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu nummerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autornamen, Titel und Zeitschriftentitel auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur; etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Berechnung. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die *Zeitschrift für Geophysik* bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. WALTER DIEMINGER, Max-Planck-Institut für Aeronomie, 3411 Lindau über Northeim (Hann.)

Anschrift der *Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*:

2 Hamburg 13, Von-Melle-Park 6, 14. Stockwerk, Postscheck: Hamburg Nr. 55983

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Münzstr. 12. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing und Hildegund Haller, sämtlich Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler, und Charlotte Kuhnert, beide Würzburg.

Druckerei: R. Oldenbourg, Graph. Betriebe GmbH, München

Printed in Germany



PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1965

Ausbau eines Wechsellichtmonochromators und seine Anwendung zur Messung des Luftleuchtens während der Dämmerung und in der Nacht¹⁾

Von G. GUILINO, Lindau (Harz)²⁾

Eingegangen am 19. Oktober 1964

Zusammenfassung: Ein im Labor erprobter Interferenz-Wechsellichtmonochromator ist im Hinblick auf die speziellen Erfordernisse bei Messungen des Luftleuchtens weiterentwickelt worden: Es wurde durch die Anfertigung einer neuen Blendenplatte das Auflösungsvermögen auf das Dreifache erhöht, ein Umlenkspiegelsystem konstruiert, um das Himmelslicht aus verschiedenen Richtungen zu erfassen und eine dem Meßprinzip angepaßte, schmalbandige Verstärkeranordnung mit einem phasenempfindlichen Gleichrichter gebaut. Die absolute Kalibrierung der Apparatur erfolgte mittels einer an den schwarzen Körper angeschlossenen technischen Na-Spektrallampe. Die Konstanz dieses sekundären Strahlungsstandards gewährleistete ein besonderer Regelmechanismus.

Den ungünstigen meteorologischen Bedingungen am Beobachtungsort konnte durch eine Arbeitshypothese zur Berücksichtigung der Dunstextinktion Rechnung getragen werden. Sie ermöglicht eine Reduktion der Bodenwerte auf Intensitäten oberhalb der extingierenden Atmosphäre.

Nach einer Korrektur hinsichtlich des Einflusses der solaren FRAUNHOFER-Linien stimmen die Ergebnisse aus den Dämmerungsmessungen der Natrium *D*-Linien mit der Theorie für eine Anregung durch Resonanzstreuung überein. Die resultierende Variation des Gehalts der Atmosphäre an freien Na-Atomen paßt gut zu dem aus der Literatur hervorgehenden Jahresgang. In Einzelfällen ließ sich das Höhenprofil der Na-Atomkonzentration ableiten, wobei am 3. 12. 1963 das physikalisch besonders interessante Auftreten zweier übereinanderliegender Natriumschichten nachgewiesen wurde.

Im Zusammenhang mit der noch ungeklärten Frage, ob die metastabile grüne Sauerstofflinie einen Dämmerungseffekt zeigt, ergaben zwei Messungen erwartungsgemäß keinen merklichen Intensitätsanstieg. In der Nacht wurden bei der gleichen Linie die bekannten starken räumlichen und zeitlichen Intensitätsvariationen beobachtet.

Mit der Interpretation der Meßergebnisse und der Abgrenzung der Leistungsfähigkeit des Wechsellichtmonochromators wurden die Grundlagen für einen umfangreicheren geophysikalischen Einsatz dieses Geräts erarbeitet. Eine Möglichkeit für eine leistungsfähigere Neukonstruktion wurde diskutiert.

Dem jüngst verstorbenen Direktor des Instituts für Stratosphärenphysik am Max-Planck-Institut für Aeronomie, Herrn Professor Dr. J. BARTELS, danke ich für seine freundliche Förderung und für die Möglichkeit, diese Untersuchungen an seinem Institut durchzuführen.

Herr Professor Dr. H. K. PAETZOLD gab mit der Themastellung die Anregung zur vorliegenden Arbeit. Ihm vor allem danke ich herzlich für die wissenschaftliche Betreuung und sein ständiges Interesse am Fortgang der Arbeit.

Ebenso bin ich Herrn Professor Dr. A. EHMERT und Herrn Dr. G. PFOTZER für ihre Unterstützung und für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen sehr zu Dank verpflichtet.

Für das Vertrauen, das mir Herr Professor Dr. H. MAIER-LEIBNITZ mit der Überlassung des an seinem Institut entwickelten Wechsellichtmonochromators entgegenbrachte, möchte ich aufrichtig danken.

¹⁾ Gekürzte Fassung der von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München genehmigten Dissertation, 1964. Die vollständige Abhandlung erscheint als Nr. 17 der Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Aeronomie, Springer-Verlag.

²⁾ Dipl.-Ing. GÜNTHER GUILINO, Max-Planck-Institut für Aeronomie, 3411 Lindau (Harz).

Einleitung

Die hohe Atmosphäre zeigt im Höhenbereich um 100 km ein Eigenleuchten (airglow), das in Zenitnähe 30 bis 50% und in der Umgebung des Horizonts 50 bis 80% zur Flächenhelligkeit des Nachthimmels bei Neumond beitragen kann. Dieses Luftleuchten wird durch Rekombinationsprozesse von den tagsüber durch die kurzwellige UV-Strahlung der Sonne dissoziierten und ionisierten Molekülen und Atomen emittiert. Während der Dämmerung (twilightglow) und am Tage (dayglow) kommt als zusätzlicher Anregungsmechanismus noch die Resonanzstreuung und die Fluoreszenz hinzu, wodurch die Nachthimmelsintensitäten (nightglow) um Größenordnungen überschritten werden können. Das emittierte nightglow-Spektrum zeigt neben einem kontinuierlichen Anteil ein kompliziertes Linien- und Bandensystem, das sich vom infraroten bis in den ultravioletten Spektralbereich erstreckt. Die intensivsten und bekanntesten Emissionen sind im Sichtbaren die *D*-Linien des Natriums bei $\lambda = 5890/96 \text{ \AA}$ mit einer mittleren Zenitintensität von $12 \cdot 10^6$ Quanten/cm² · sec · sterad und die metastabilen Linien des neutralen Sauerstoffatoms [OI] bei $\lambda = 5577$ bzw. $6300/64 \text{ \AA}$ mit $20 \cdot 10^6$ bzw. $12 \cdot 10^6$ Quanten/cm² · sec · sterad (ROACH (1957)). Während die grüne Linie und das rote Dublett des Sauerstoffs bei Polarlichterscheinungen die 10^4 -fache Nachthimmelsintensität erreichen können, stellen die MEINEL-OH-Banden im nahen Infrarot, die HERZBERG-[O₂]-Banden im nahen Ultraviolett und im wesentlichen auch die Na *D*-Linien typische airglow-Emissionen dar. Zur Unterscheidung beider Phänomene lassen sich die Anregungsmechanismen heranziehen: Beim Polarlicht führen Stöße solarer Partikel zu Emissionen, wie z. B. zu den N_2^+ -Banden mit Anregungspotentialen $> 18,5 \text{ eV}$, während die Nachthimmelsemissionen auf Anregungspotentiale $< 5 \text{ eV}$ beschränkt bleiben. Dies entspricht den geringeren, bei den Rekombinationsprozessen freiwerdenden Dissoziations- und Ionisationsenergien. Rein phänomenologisch ist jedoch die Abgrenzung homogener, lichtschwacher Polarlichtformen von intensiven airglow-Erscheinungen mit wolken- und bogenartiger Struktur problematisch und derzeit Gegenstand umfangreicher photometrischer Beobachtungen.

Nach der Art, wie hierbei der fundamentalen Schwierigkeit aller airglow-Untersuchungen, die Emissionslinie vom Untergrund zu trennen, begegnet wird, lassen sich die eingesetzten Geräte typisieren: Zur spektralen Erfassung des Luftleuchtens dienen Spektrometer und Spektrographen (z. B. BLACKWELL et al. (1960), NGUYEN-HUU-DOAN (1963)). Bei Filterphotometern wird der durch ein Interferenzfilter transmittierte Untergrund aus einem benachbarten Spektralbereich ohne Emissionslinien von dem Beitrag des Emissionslinienfilters subtrahiert. Auf diesem Meßprinzip beruhen großenteils unsere Kenntnisse über die räumlichen und zeitlichen Intensitätsvariationen der verschiedenen Nachthimmelsemissionen (z. B. PETTIT et al. (1954), BARBIER (1959), BARBIER (1964)). Durch Modulation der Emissionslinie allein erlauben die Polarisationsphotometer vom LYOTSchen Typ airglow-Messungen bei Vollmond und während der Dämmerung (BLAMONT und KASTLER (1951), DUNN und MANRING (1956),

KOOMEN et al. (1956)). Unter Ausnutzung des ZEEMAN-Effekts werden bei dem Na-Dampfzellenphotometer von BLAMONT (1956) die in Resonanz gestreuten atmosphärischen Na *D*-Linien moduliert und sogar Beobachtungen des Na-dayglow ermöglicht (BLAMONT und DONAHUE (1961)).

Ein von den vorhergegangenen unabhängiges Verfahren wurde von EHGARTNER et al. (1955) zur Untersuchung lichtschwacher flächenhafter Lichtquellen angegeben. Es gestattet ebenfalls eine Modulation und damit eine Trennung der Spektrallinien vom Untergrund. Außerdem kann man mit dem nach der zitierten Wechsellichtmethode arbeitenden Monochromator rasch in verschiedene Spektralbereiche wechseln und gegebenenfalls nach unbekanntem Linien suchen, so daß er sich besonders für airglow-Untersuchungen eignet.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, mittels geeigneter konstruktiver Maßnahmen, der Einsatz des Wechsellichtmonochromators zur Untersuchung des Luftleuchtens. Im folgenden wird zuerst die Apparatur in ihren Grundzügen geschildert.

1. Apparatur

1. Optischer und mechanischer Ausbau des Wechsellichtmonochromators

Die Eigenschaften und die technische Ausführung des Wechsellichtmonochromators sowie die rechnerische Behandlung des Wechsellichtsignals sind eingehend von EHGARTNER et al. (1955) behandelt worden. Auf die geophysikalische Einsatzmöglichkeit des Geräts wiesen GUILINO und MAIER-LEIBNITZ (1958) hin.

Mit Abb. 1 wird das Prinzip der Methode erläutert: Ein in Reflexion betriebenes FABRY-PEROT-Interferometer, das um 45° gegen die Achse des abbildenden Objektivs geneigt ist, entwirft bei monochromatischer Einstrahlung in dessen Brennebene ein

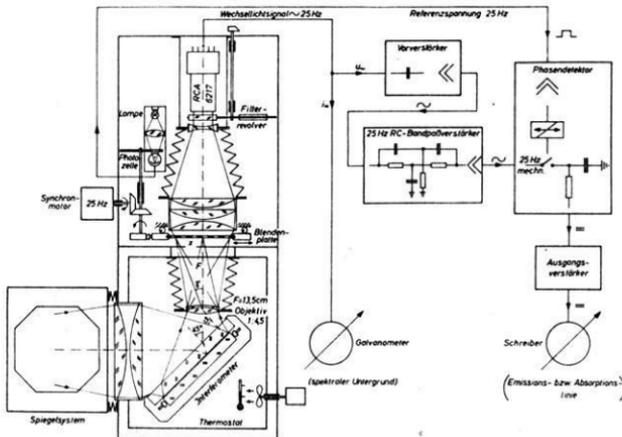


Abb. 1: Gesamtanordnung des Wechsellichtmonochromators in schematischer Darstellung.

leicht gekrümmtes Interferenzstreifensystem. Diese Interferenzfigur wird photographisch aufgenommen und so eine „Blendenplatte“ gewonnen, die am Ort des Streifen-systems eingesetzt, bei einer Schüttelbewegung der Amplitude $\pm 1/4$ mal mittlerer Streifenabstand eine Modulation des transmittierten Lichtstroms bewirkt. Monochromatisches Licht einer anderen Wellenlänge ergibt eine geringere Modulation, da die Blendenplatte nicht mehr zu der Interferenzerscheinung paßt. Durch eine mechanische Veränderung der Dicke d des Luftplättchens zwischen den Interferometerplatten, bei Wahrung ihrer Parallelität, läßt sich für eine beliebige Wellenlänge λ immer dann eine größte Wechsellichtamplitude hervorrufen, wenn das optische Interferenzsystem mit dem Streifen-system der Blendenplatte übereinstimmt. Dies ist der Fall für $d/\lambda = d_0/\lambda_0 = \text{const}$, da nun bei gegebenen Einfallswinkeln ϑ die Phasendifferenzen $\varphi = 4\pi d \cdot \cos \vartheta/\lambda$ der interferierenden Bündel gleich denjenigen bei der Herstellung (d_0, λ_0) der Blendenplatte werden. Auf diese Weise erhält die Apparatur ihre Monochromatoreigenschaften. Ein Kontinuum erzeugt keine Interferenzerscheinung und somit kein Wechsellicht, wodurch die Trennung einer Spektrallinie vom Untergrund ermöglicht wird.

Von EHGARTNER et al. (1955) wurde gezeigt, daß das Auflösungsvermögen des Wechsellichtmonochromators mit wachsender Streifen-zahl auf der Blendenplatte größer wird, wobei die dort verwendete beste Platte eine Gesamtstreifen-zahl $n = 176$ aufwies. Bei einer Erhöhung der Auflösung ist im Hinblick auf Na-Dämmerungsmessungen zu beachten, daß sich die Interferenzsysteme der D_1 - und D_2 -Linie additiv überlagern. Dementsprechend muß das Dispersionsgebiet $\Delta\lambda = 6 \text{ \AA}$ gewählt werden, was zu einer Interferenzordnung von $m_0 = \lambda/\Delta\lambda = 5893/6 = 982$ in der Achse des Objektivs führt. Eine Blendenplatte, die dieser Forderung genügt und $n = 574$ Streifen enthält, wurde auf photographischem Wege durch mehrmaliges Umkopieren einer sehr hart arbeitenden Plattensorte hergestellt. Es konnte ein steiler Übergang von den durchlässigen zu den undurchlässigen Teilen der Blendenplatte erreicht werden, der dem idealen Grenzfall eines rechteckigen Transmissionsverlaufs recht nahe kommt und für eine größtmögliche Modulation erforderlich ist. Zum Vergleich des mit der Blendenplatte $n = 574$ erzielten Auflösungsvermögens mit der Theorie charakterisiert man das erstere zweckmäßig durch die Halbwertsbreite eines Apparateprofils, das von der Hüllkurve über das von einer Spektrallinie (λ_0) erzeugte Wechsellichtsignal bestimmt wird (siehe Abb. 6). Die spezielle Form des Signals oder die Filterkurve, das ist der Wechsellichtstrom Φ_{\sim} als Funktion der Wellenlänge, beschreibt in guter Näherung die von EHGARTNER et al. (1955) aufgestellte Beziehung

$$\Phi_{\sim} = 2 \Phi_m \frac{\sin(\kappa\pi/2) \cdot \sin(n\kappa\pi)}{\kappa \cdot \sin(\kappa\pi)} \cdot \cos \left[\kappa\psi + 2\kappa\pi \left(m + \frac{n}{2} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (1)$$

Φ_m bedeutet den mittleren Wechsellichtstrom; die Abhängigkeit von der Wellenlänge ist durch $\kappa = \lambda/\lambda_0$ und von der Zeit, infolge der Schüttelbewegung der Blendenplatte, gemäß $\psi = (\pi/2) \sin \omega t$ gegeben. Das Apparateprofil

$$P\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}, n\right) = \frac{\sin(\kappa\pi/2) \cdot \sin(n\kappa\pi)}{\kappa \cdot \sin(\kappa\pi)} \tag{2}$$

geht aus dem zeitunabhängigen Faktor der Gl. (1) hervor. Die graphische Lösung der transzendenten Gl. (2) liefert mit $P = \frac{1}{2} P_{\max}$ und $n = 574$ für die Einhüllende ein $\kappa_H = 574,70/574$. Danach ergibt sich die Halbwertsbreite zu

$$HW_P = 2 \lambda_0 (\kappa_H - 1) = 2 \lambda_0 \frac{\Delta n_H}{n} = 1,40 \cdot \frac{\lambda_0}{n}, \tag{3}$$

wobei $\Delta n_H = 0,70$ für $n > 100$ von n unabhängig wird. In der Tabelle 1 sind die nach Gl. (3) sowie die experimentell ermittelten Werte für die Blendenplatte $n = 574$ zusammengestellt. Der lineare Zusammenhang von Wellenlängen und Halbwertsbreiten wird bestätigt. Dagegen sind die letzteren größer als die berechneten Werte. Das kann

Tabelle 1

λ_0 [Å]	4678	4800	5086	5893	6439
berechnet HW_P [Å]	11,4	11,7	12,4	14,4	15,7
gemessen HW_P [Å]	13,4	13,8	15,0	17,6	19,2

dadurch erklärt werden, daß bei der Ableitung der Gl. (1) ein äquidistantes Streifen-system und eine von den tatsächlichen Verhältnissen etwas abweichende Intensitäts-verteilung vorausgesetzt wurde. Die neue Blendenplatte bringt gegenüber der alten eine Verbesserung der Auflösung um den Faktor 3,3, so daß nunmehr die Halbwerts-breiten von der gleichen Größe wie bei den schmalsten, zur Zeit erhältlichen Inter-ferenzfiltern sind.

Der Modulationsgrad ist von grundlegender Bedeutung für die Güte und Anwend-barkeit des Wechsellichtmonochromators. Zu seiner Bestimmung ist die genaue Kenntnis der Intensitätsverteilung im Verlauf einer Interferenzordnung nötig. Die Abb. 2 zeigt die durch Ausphotometrierung einer photographischen Aufnahme des Interferenzsystems der Cd-Linie $\lambda = 5086 \text{ Å}$ gewonnene Intensitätsverteilung¹⁾.

Die relativ schwache Einsenkung der Minima ist durch die Reflexionsverhältnisse an den vorliegenden Interferometerplatten bedingt, während die sägezahnförmige Intensitätsverteilung dadurch zustande kommt, daß infolge einer geringen Phasen-verschiebung der erste Reflex bei der Aufsummierung nicht in die geometrische Reihe der übrigen Reflexe der FABRY-PEROT-Platte paßt.

Der Lichtstrom Φ , der aus dem mit der Phase ψ gegenüber einer Interferenzordnung verschobenen Blendenstreifen austritt, ist gegeben durch

$$\Phi(\psi) = \int_{\psi}^{\psi + \pi} I(\varphi) d\varphi,$$

¹⁾ Herrn Dr. G. BRÜCKNER sei für seine freundliche Unterstützung bei der Photometrierung mit dem Intensitätenphotometer der Universitätssternwarte Göttingen hier nochmals gedankt.

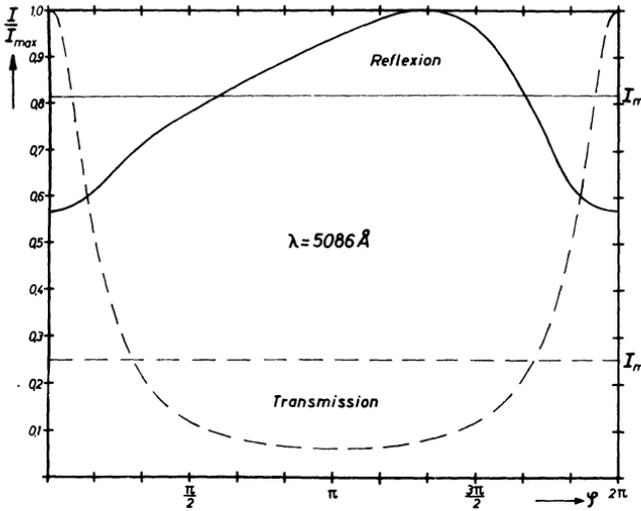


Abb. 2: Experimentell bestimmte Intensitätsverteilung I/I_{max} innerhalb einer Interferenzordnung. I_m mittlere Intensität; $\varphi =$ Phasenwinkel. Gestrichelt: AIRY-Verteilung für den Transmissionsfall mit den Reflexionsgraden $R_1 = R_2 = 0,6$.

wobei in der Blendenlage $\psi = 0$ eine geringe Auslenkung eine maximale Lichtstromänderung bewirkt. Ändert der Schüttelmechanismus die Phase nach der Zeitfunktion $\psi = (\pi/2) \sin \omega t$, so erhält man einen Wechsellichtstrom, dessen zeitlicher Mittelwert nach einer Kommутierung der negativen Halbwellen

$$\overline{\Phi_{\sim}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \int_{\varphi=\frac{\pi}{2} \sin \omega t}^{\frac{\pi}{2} \sin(\omega t) + \pi} |I(\varphi) - I_m| d\varphi \cdot d\omega t \quad (4) \quad \Phi_m = \pi I_m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} I(\varphi) d\varphi$$

mittlerer Lichtstrom

beträgt. Für die in Abb. 2 aufgezeichnete Intensitätsverteilung ergibt die Auswertung des Integrals (4) einen Modulationsgrad von

$$\eta = \overline{\Phi_{\sim}} / \Phi_m = 11,4\%.$$

Tatsächlich sind die Blendenstreifen nicht äquidistant, sondern ihr Abstand variiert über die Blendenplatte um den Faktor 1,9. Daraus resultiert eine Minderung des Modulationsgrades. Für die Blendenplatte mit $n = 574$ Streifen sind die gemessenen effektiven Modulationsgrade

$$\eta_{eff} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\overline{\Phi_{\sim}} / \Phi_m)_i$$

Tabelle 2

λ	[Å]	4678	4800	5086	5893	6439
η_{eff}	[%]	9,6	9,5	8,3	3,9	3,2

der Tabelle 2 zu entnehmen. Ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge ist durch die Reflexionsgrade der Interferometerplatten bedingt.

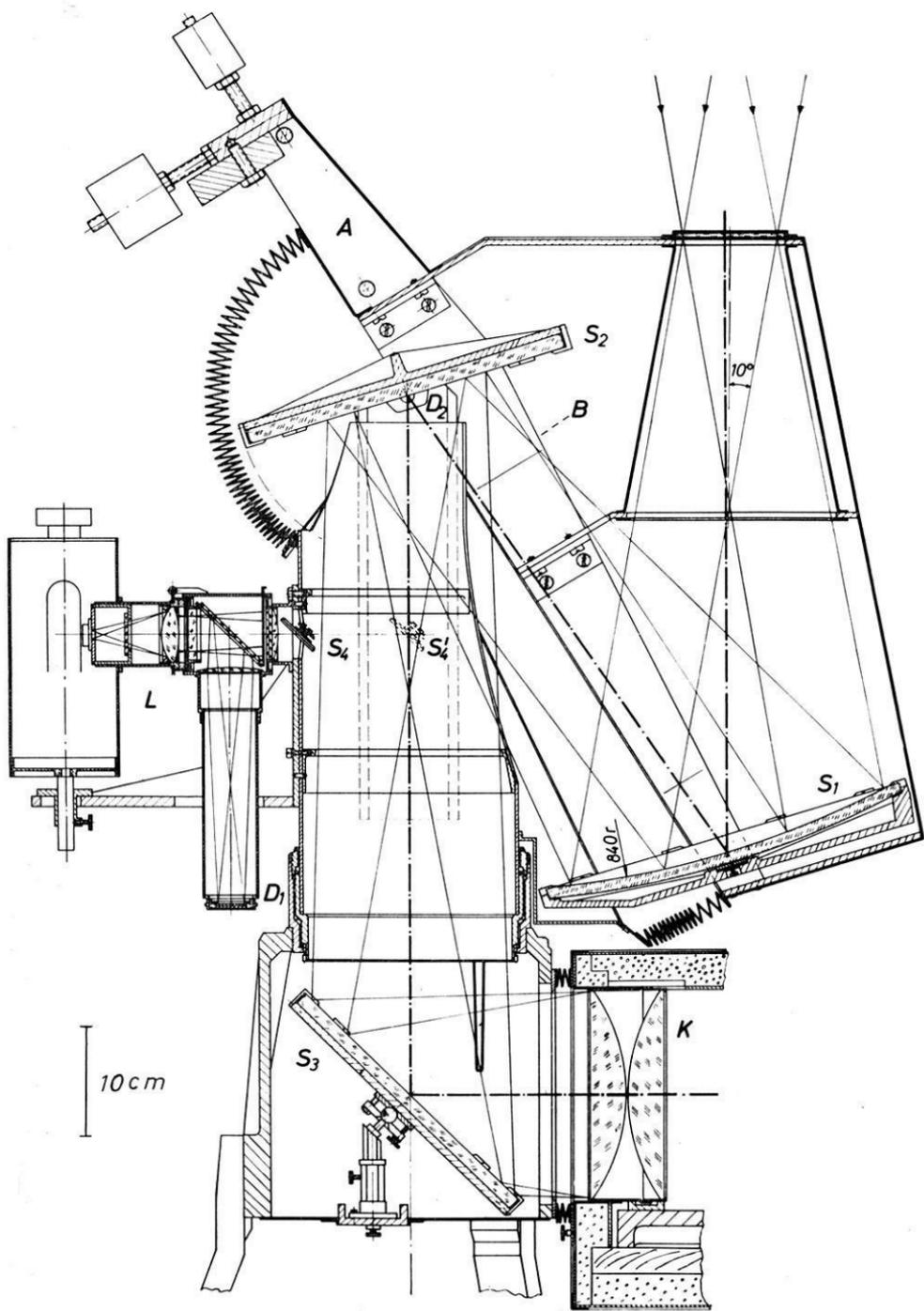
Für eine künftige Weiterentwicklung des Geräts ist es von Interesse, welchen Gewinn im Rauschabstand des Wechsellichtsignals eine Interferometeranordnung erwarten läßt, die bei sonst gleichem Aufbau in Transmission arbeitet. Die durch die AIRY-Formel ausgedrückten Intensitätsverteilungen der vorliegenden und einer in Transmission arbeitenden FABRY-PEROT-Platte ergaben beim Vergleich für den optimal ausgelegten Transmissionsfall ein um den Faktor 4 größeres Signal/Rauschverhältnis. Hierzu müssen die Beschichtungen der Interferometerplatten je einen Reflexionsgrad $R_1 = R_2 = 0,6$ aufweisen, was zu einem Modulationsgrad $\eta_{\text{Tr}} = 57\%$ führt. Die zugehörige AIRY-Verteilung ist in die Abb. 2 mit eingetragen.

2. Gesamtaufbau des Wechsellichtmonochromators

Durch die Abb. 1 wird die prinzipielle Anordnung des Wechsellichtmonochromators verdeutlicht. Die Verwendung der hochauflösenden Blendenplatte erfordert einen sehr stabilen Gesamtaufbau. Insbesondere mußte der Schüttelmechanismus sorgfältig konstruiert werden, denn die Auslenkung der Blendenplatte von $\pm 0,04$ mm ist bei einer Betriebsfrequenz von 25 Hz exakt einzuhalten. Nach dem Einbau der FABRY-PEROT-Platte in einen Thermostat unterschreiten die dort mit Thermoelementen festgestellten Temperaturschwankungen die für ein einwandfreies Arbeiten der Apparatur zulässige Toleranzgrenze von $\pm 0,26^\circ\text{C}$.

Zur Abtastung des Himmels bei feststehendem Interferometer wurde ein Spiegelssystem in azimutaler Montierung gebaut. Der Lichtleitwert $Li = 1,6$ [cm² · sterad] des Wechsellichtmonochromators (durchlässige Fläche der Blendenplatte mal Raumwinkel zum Objektiv) sollte möglichst erhalten bleiben, so daß zum Objektiv hin keine Vignettierung auftritt. Damit die Dimensionen nicht zu groß werden, wurde eine Zwischenabbildung über einen Konkavspiegel erzeugt, wobei die Abbildungsgüte keine Rolle spielt. Eine technische Schnittzeichnung durch das Spiegelssystem gibt die Abb. 3 auf S. 122 wieder. Zur Überprüfung der Vignettierung des Lichtstroms durch die Spiegelfassungen wurde über die Eintrittsöffnung eine ULBRICHTSche Kugel gesetzt und der auf den Multiplier auffallende Lichtstrom bei den verschiedenen Spiegelstellungen gemessen. Die extremen Abweichungen, bezogen auf die Zenitstellung, betragen +1 und -10% und können bei der Auswertung der Meßergebnisse eliminiert werden.

Die gesamte Apparatur wurde auf dem Flachdach des Instituts aufgestellt und durch einen kleinen aufklappbaren Anbau vor der Witterung geschützt.



3. Auslegung des Verstärkers

Für die Dimensionierung der Verstärkeranordnung müssen die bei den Nachthimmelmessungen zu erwartenden Signalamplituden und ihr Rauschabstand bekannt sein. Zur Abschätzung wurden die in der Einleitung angeführten mittleren Nachthimmelsintensitäten der Emissionslinien, Angaben über das extraterrestrische und terrestrische Kontinuum (CHAMBERLAIN (1961 a)) und apparative Größen wie Lichtleitwert, Daten der Interferenzfilter und des Photomultipliers herangezogen. Das in

Tabelle 3

Atmosphärische Emissionslinie	λ [Å]	5577	5893	6300
Wechselstromsignal, kommutiert und zeitlich gemittelt	\bar{i}_{\sim} [10^{-11} A]	30	9	4
Signal/Rauschverhältnis	S/R	22	10	3,5

der Tabelle 3 zusammengefaßte Ergebnis besagt, daß mit dem vorliegenden Reflexionsinterferometer die grüne Sauerstofflinie [OI] $\lambda = 5577$ Å gut, das Na-Dublett $\lambda = 5893$ Å weniger gut und die rote Linie [OI] $\lambda = 6300$ Å schwer nachzuweisen ist, außer man erhöht die Zeitkonstante bei der Registrierung sehr stark. Ein mittleres Wechselstromsignal von $\bar{i}_{\sim} = 10^{-10}$ A an einem Arbeitswiderstand des Multipliers von $5 \text{ M}\Omega$ erfordert demnach zur Aussteuerung eines robusten Linienschreibers (Innenwiderstand $6 \text{ k}\Omega$) eine Spannungsverstärkung von 10^4 .

Die geringe Größe der Wechselstromsignale bei Nachthimmelmessungen macht es notwendig, die vorverstärkte Wechselspannung über einen Bandpaßverstärker, der das Frequenzband einengt und so eine Übersteuerung der Ausgangsstufe durch die Rauschspannung verhindert, einem Phasendetektor zuzuführen. Die Bandbreite Δf der gesamten Registrieranordnung hängt bei der phasenrichtigen Gleichrichtung nach ANKEL und WINTERMEYER (1956) und nach ZEIL und BODENSEH (1960) nur von der geringsten Bandbreite der einzelnen Verstärkungssysteme ab, und diese ist im allgemeinen durch die Zeitkonstante t des RC -Glättungsgliedes

$$\Delta f = \frac{1}{t} = \frac{1}{RC}$$

Abb. 3: Längsschnitt durch das Spiegelsystem zur Umlenkung des einfallenden Lichtstroms in Zenitstellung: Der Konkavspiegel S_1 erzeugt in der Ebene von B ein Bild des unendlich entfernten Objekts, das der Kondensator K über den drehbaren Spiegel S_2 und den festen S_3 in die Eintrittspupille des Objektivs (siehe Abb. 1) abbildet. Das System ist schwenkbar um die vertikale Achse des Drehkranzes D_1 und um die horizontale Achse D_2 . Bei zenitaler Verstellung wird der Drehwinkel des Schwenkarmes A um D_2 durch ein Untersetzungsgetriebe halbiert auf den Spiegel S_2 übertragen. Der Lichtstrom der geregelten Na-Spektrallampe L ist über den von S_4 nach S_4' verschieblichen Umlenkspiegel einblendbar.

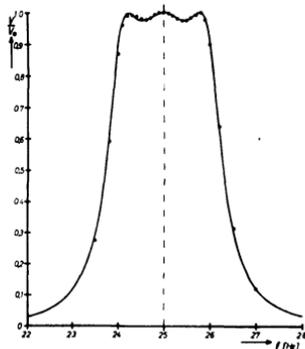
Abb. 4: Ausführung der gesamten Verstärkerschaltung ohne Gleichspannungsversorgung.

Teil a: Photogleichstromregistrierung, Vorverstärker und RC-Bandpaßverstärker.

Teil b: Endverstärker, Phasendetektor mit mechanischer Gleichrichtung und variabler Zeitkonstante τ , anschließende Ausgangsschaltung. Der Umschalter am Schreiber dient zur Erfassung der zeitunabhängigen negativen Signalamplituden.

gegeben (siehe Abb. 4b). Ein Bandpaß hoher Güte bei tiefen Frequenzen läßt sich am besten mit Doppel- T - RC -Gliedern in aktiven Filterschaltungen realisieren, deren Eigenschaften denjenigen von LC -Resonanzkreisen bei höheren Frequenzen analog sind. In Anlehnung an die auf die Praxis zugeschnittene Arbeit von JUNGMEISTER und KÖNIG (1960) wurde nach dem in der Abb. 4a aufgezeichneten Schaltplan ein dreikreisiger RC -Bandpaßverstärker gebaut. Der Frequenzgang der gesamten Verstärkerschaltung ist in Abb. 5 dargestellt.

Abb. 5: Frequenzgang V/V_0 der gesamten Verstärkeranordnung. Der berechnete Verlauf ist ausgezogen dargestellt. f = Frequenz.



4. Signalauswertung und Kalibrierung

Das registrierte Signal bei monochromatischer Einstrahlung mittels einer Na-Spektrallampe kann der Abb. 6 entnommen werden. Bei den Betrachtungen über das Auflösungsvermögen der Apparatur wurde bereits die hier ersichtliche Tatsache verwendet, daß das Signal mit einer Hüllkurve umschrieben werden kann. Innerhalb dieser Hüllkurve hat das Signal weitere zeitunabhängige Nullstellen und positive und negative Maxima, die durch die \cos -Funktion der Filterkurve (Gl. (1)) erfaßt werden. Die Höhe des Signals ist der Intensität einer Spektrallinie proportional. Um eine höhere Genauigkeit zu erzielen, genügt das Ausmessen des Hauptmaximums s_0 , der durch Umpolung des Schreibers zur Anzeige gebrachten negativen Nebenmaxima s_1 und s_1' und der sekundären Nebenmaxima s_2 und s_2' . Durch Laborversuche wurden bei verschiedenen Wellenlängen und mit großem Rauschabstand die Amplitudenverhältnisse

$$p_1 = 2s_0/(s_1 + s_1') = 1,03 \quad \text{und} \quad p_2 = 2s_0/(s_2 + s_2') = 1,24$$

ermittelt. Damit wird die Signalamplitude S für die Interpretation der Meßergebnisse

$$S = \frac{1}{5}(s_0 + p_1(s_1 + s_1') + p_2(s_2 + s_2')). \quad (5)$$

Als typisches Beispiel zeigt die Abb. 6 ferner je eine Registrierung der Na-D-Linien während der Dämmerung und der grünen Sauerstofflinie in der Nacht. Infolge der raschen zeitlichen Intensitätsänderung während der Dämmerung weisen die Nebenmaxima mitunter eine merkliche Unsymmetrie gegenüber dem Hauptmaximum auf. Trotzdem sind die Signalmaxima so gut definiert, daß das obige Auswerteverfahren mit ausreichender Genauigkeit anzuwenden ist. Durch Überlagerung eines Glühlampenkontinuums und Emissionslinien aus technischen Spektrallampen konnte im Laborversuch bestätigt werden, daß der kontinuierliche Untergrund keinen Beitrag zum Wechsellichtsignal liefert.

Die bei den Untersuchungen des Luftleuchtens zur Verfügung stehenden geringen Intensitäten bereiten bei einer absoluten Kalibrierung erhebliche Schwierigkeiten. Je nach dem Typ des Meßgeräts werden hierbei verschiedene Wege beschriften (ROACH (1957), BLAMONT et al. (1958), RUNDLE et al. (1960), TINSLEY und VALLANCE JONES (1962), KULKARNI und SANDERS (1964)). Bei der hier entwickelten Apparatur kann die Kalibrierung mit Labormitteln erfolgen, wobei als Standardlichtquelle für den Wechsellichtmonochromator eine Spektrallampe zu benutzen ist. Da bei den Messungen die Untersuchungen des Na-Dämmerungsleuchtens im Mittelpunkt stehen sollten, wurde die Kalibrierung mit einer Na-Spektrallampe durchgeführt. Technische Metall-dampflampen erfüllen hinsichtlich zeitlicher Konstanz und Reproduzierbarkeit ihrer Strahlungsleistung keineswegs die Anforderungen, die an eine Standardlampe zu stellen sind. Deshalb wurde ein Regelkreis gebaut, der entsprechend den über ein Photoelement an einem Spiegelgalvanometer zur Anzeige gebrachten Strahlungsleistungsänderungen eine Irisblende weiter öffnet oder schließt (Abb. 7, s. S. 128). Damit betragen die zeitlichen Schwankungen der Lichtquelle während einer Registrierung nur noch $\pm 1,5\%$. Über einen kleinen Umlenkspiegel im Spiegelsystem (S_4' in Abb. 3) läßt sich die Strahlungsleistung der geregelten Na-Spektrallampe in die Apparatur einblenden und ihre relative Empfindlichkeit überwachen.

Zur Durchführung einer Kalibrierung wird das Spiegelsystem in die horizontale Stellung ($z = 90^\circ$) gedreht und in 30 cm Abstand vor der Eintrittsöffnung, senkrecht zur optischen Achse des Systems, als Nachthimmelssimulator eine mit MgO berußte Gipsplatte angebracht. Sie wird unter einem Winkel $\vartheta_0 = 45^\circ$ aus 2 m Entfernung von der geregelten Na-Lampe, deren Strahlungsleistung durch ein Graufilter mit dem Transmissionsgrad $T_G = 1,09 \cdot 10^{-2}$ abgeschwächt ist, belichtet und dient somit als sekundäre, diffuse Lichtquelle der Strahlungsdichte oder Flächenhelligkeit

$$\begin{aligned} J'_{5893} &= \frac{1}{\pi} B_{5893} \cdot \cos \vartheta_0 \cdot R_{\text{diff}} \cdot \Delta R_{\text{diff}} \cdot T_G = 8,14 \cdot 10^{-11} \pm 12\% \left[\frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sterad}} \right] \\ &= 2,42 \cdot 10^8 \pm 12\% \left[\frac{\text{Quanten}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sterad}} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Die angegebene Unsicherheit entspricht dem kalkulierten Maximalfehler. Um die obige Aussage, die den Anschluß an den schwarzen Strahler darstellt, zu ermöglichen,

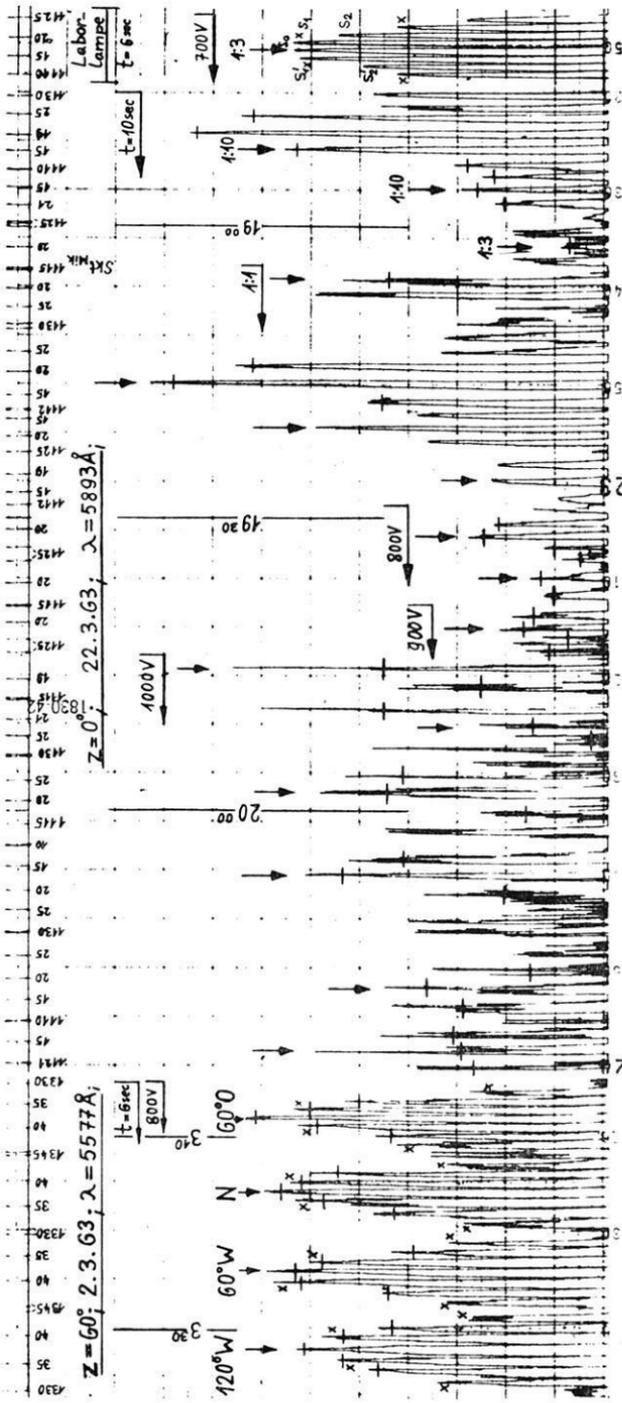


Abb. 6: Reproduktion je einer Originalregistrierung der Na D-Linien $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ während der Dämmerung und der [O] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ Sauerstofflinie in der Nacht (Ausschnitt). Die eingetragenen Pfeile weisen auf die Linienschwerpunkte hin und geben die Umschaltung eines der Apparateparameter (Speisespannung am Multiplier, Verstärkerabschwächung, Zeitkonstante der Registrierung) an. Bei der Dämmerungsmessung tritt das Signalmilieu um 19:02 h deutlich in Erscheinung, was unter 2.2 näher erläutert wird. Die umgepolten negativen Signalamplituden sind angekreuzt und die verwendeten Mittelwerte der Rauschspitzen durch einen Querstrich angedeutet. Die Abstandsänderung Δd der Interferometerplatten wird durch die eingetragenen Mikrometerskalenteile kenntlich gemacht: $1 \text{ Skt}_{\text{Mik}} \cong \Delta d = 1,01 \cdot 10^{-4} \text{ mm} \cong \Delta \lambda = 1,44 \text{ \AA}$.
 $z =$ Zenitdistanz der Beobachtungsrichtung; Zeiten in MEZ.

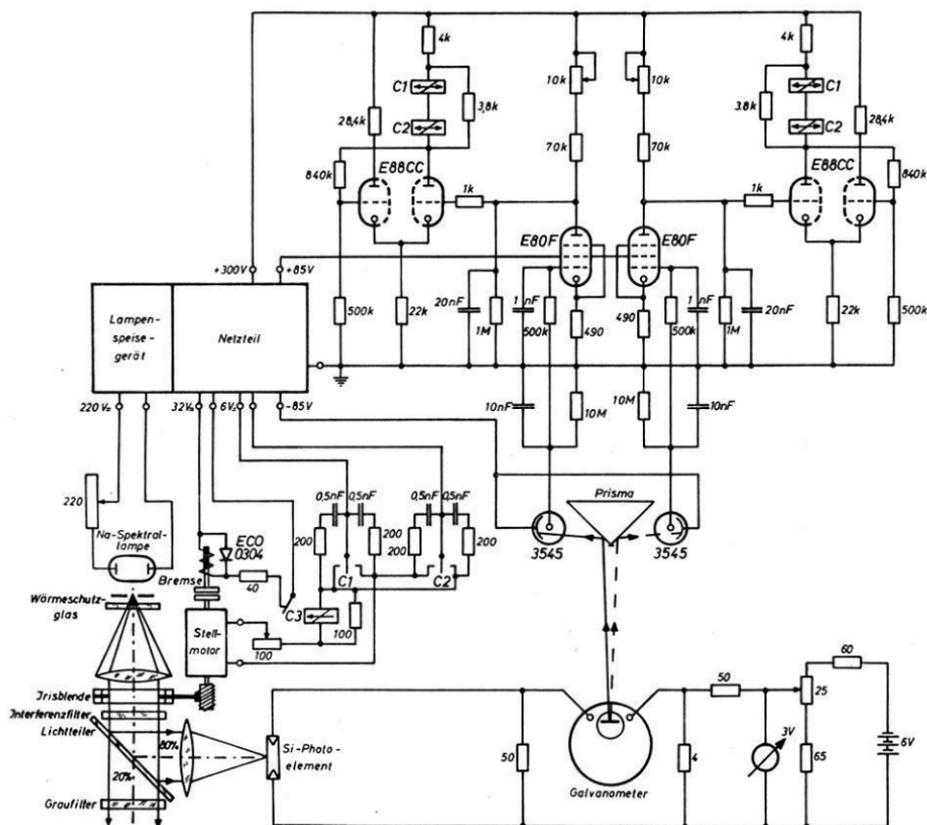


Abb. 7: Prinzipbild der optischen Anordnung und Schaltplan des Regelkreises zur Konstanthaltung der Strahlungsleistung einer Na-Spektrallampe.

wurde die geregelte Na-Spektrallampe an die Physikalisch-Technische Bundesanstalt in Braunschweig eingesandt. Der dort ausgestellte Prüfbericht besagt, daß in 2 m Entfernung vom Lampengehäuse eine Bestrahlungsstärke von $B_{5893} = 0,038 \pm 0,002 [\mu\text{W}/\text{cm}^2]$ vorhanden ist. $R_{\text{diff}} = 0,90$ bedeutet den diffusen Reflexionsgrad der Reflektorplatte und ist für eine MgO-Beschichtung von 0,7 mm Dicke den Messungen von TELLEX und WALDRON (1955) entnommen, während $\Delta R_{\text{diff}} = 0,97$ der experimentell bestimmten, geringfügigen Abweichung der Indikatrix vom LAMBERTSchen Gesetz Rechnung trägt.

Wird bei dem oben angegebenen Kalibrierungsverfahren ein Wechsellichtsignal S_{5893} [Skt] hervorgerufen, so beträgt mit Gl. (6) der Eichfaktor $g_{5893} = 3,04/S_{5893}$ [Kilorayleigh/Skt] (1 Rayleigh = 10^6 Quanten/cm² · sec (Säule)). Wegen des geringen Wellenlängenabstandes ist eine Extrapolation auf die grüne Sauerstofflinie ohne

weiteres möglich. Mittels der bekannten Wellenlängenabhängigkeit des Modulationsgrades, der Interferenzfiltertransmission und der Kathodenempfindlichkeit des Multipliers wird hier der Eichfaktor $g_{5577} = 3,04/1,98 \cdot S_{5893}$ [Kilorayleigh/Skt].

2. Beobachtungsergebnisse

1. Die atmosphärische Reduktion

Die am Erdboden gemessenen, verfälschten Intensitäten müssen noch auf Werte oberhalb der optisch wirksamen Atmosphäre reduziert werden, um Vergleiche mit publizierten Beobachtungsdaten und Theorien zu ermöglichen.

Das Luftleuchten zeigt mit wachsender Zenitdistanz z einen systematischen Intensitätsanstieg J_z , der in erster Näherung, da im allgemeinen keine Selbstabsorption auftritt, von der VAN RHIJNSchen Beziehung $V(z, h)$

$$J_z = J_0 \cdot V(z, h) = J_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho + h} \right)^2 \cdot \sin^2 z \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

ρ Erdradius

h Emissionshöhe

J_0 Zenitintensität oberhalb der optisch wirksamen Atmosphäre

beschrieben wird. Die Extinktion in den tiefer gelegenen Atmosphärenschichten modifiziert diese Zenitabhängigkeit durch Absorption in den CHAPPUIS-Banden des Ozons, durch Streuung an den molekularen Bestandteilen der troposphärischen Luft (RAYLEIGH-Atmosphäre) und durch Streuung an den Partikeln der bodennahen Dunstschicht. Da eine flächenhafte Lichtquelle vorliegt, sind die Extinktionsverhältnisse nicht mehr mit einem einfachen Exponentialgesetz zu erfassen. Vielmehr wird durch Streuprozesse ein zusätzlicher Lichtstrom in die Beobachtungsrichtung umgelenkt und so der Extinktionsverlust verringert. Für den idealen Grenzfall einer RAYLEIGH-Atmosphäre hat ASHBURN (1954) unter Verwendung von CHANDRASEKHARS Theorie des Strahlungstransports (1950) den Bruchteil der gesamten, das heißt auch mehrfach gestreuten Intensität I_R^* einer flächenhaften Lichtquelle in Einheiten der auf die streuende Atmosphäre einfallenden Zenitintensität berechnet und tabelliert. Obgleich die Theorie von CHANDRASEKHAR die Streuung in einem trüben Medium beinhaltet, bringt die Einführung der Dunststreuungsfunktion und der Polarisations-eigenschaften der Dunstpartikel beachtliche mathematische Schwierigkeiten mit sich. So steht für die Streuung in einer Dunstosphäre ein Ausdruck I_D^* , analog zum obigen RAYLEIGH-Streulichtanteil I_R^* , bislang nicht zur Verfügung.

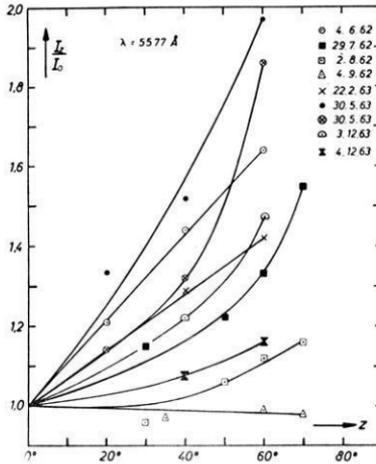


Abb. 8: Meridianschnitte der [OI] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ Emission am Lindauer Nachthimmel, bezogen auf die jeweilige Zenitintensität I_0 . $z =$ Zenitdistanz.

ELSÄSSER und SIEDENTOPF (1957) berücksichtigten bei der Reduktion ihrer photometrischen Gegenseinmessungen den am atmosphärischen Dunst entstandenen Streulichtanteil I_D^* durch den allgemeinen Ansatz

$$I_D^* = J_z \cdot b \cdot [1 - \exp(-\tau_D \cdot M(z))] \quad \text{mit } |b| < 1 \quad (8)$$

und setzten zur Abschätzung von I_D^* wegen der ausgeprägten Vorwärtsstreuung des Dunstes $b = 0,75$. $M(z)$ bedeutet die relative Luftmasse und ist durch die BEMPORADsche Funktion auszudrücken, wobei für $z \leq 60^\circ$ die Näherung $M(z) = \sec z$ genügt. Versteht man unter τ_{O_3} , τ_R , τ_D die monochromatischen Ozon-, RAYLEIGH-, Dunstextinktionskoeffizienten für die gesamte, senkrecht durchstrahlte Atmosphäre, so wird die an der Bodenstation in der Richtung z beobachtete Intensität

$$I_z = J_z \cdot \exp(-(\tau_R + \tau_{O_3} + \tau_D) \cdot \sec z) + I_R^* \cdot \exp(-\tau_{O_3}) + I_D^* \cdot \exp(-\tau_{O_3} \cdot \sec z). \quad (9)$$

Für kleine Werte von τ_D stellt der Ansatz (8) eine gute Näherung dar und besagt, daß der Dunstextinktionsverlust gemäß $J_z \cdot \exp(-\tau_D \cdot M(z))$ weitgehend kompensiert wird. Bei starken Trübungen, die in Lindau am Harz (142 m über NN, Rhumenederung) an wolkenlosen Tagen recht häufig sind, trifft dies nicht zu, sondern es wird bei airglow-Messungen in großen Zenitdistanzen der durch die Gl. (7) gegebene Intensitätszuwachs ganz oder teilweise zunichte gemacht. In der Diskussion ihrer Na-Dämmerungsmessungen in Braunschweig betonten CARIO und STILLE (1954) ebenfalls diese Tatsache. Die Abb. 8 gibt einige mit dem Wechsellichtmonochromator am Nachthimmel gemessene Meridianschnitte der [OI] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ Emission wieder:

Am 2. August 1962, 4. September 1962 und 4. Dezember 1963 herrschte starke Dunsttrübung, wobei entgegen Gl. (7) kein bzw. nur ein geringer Anstieg von I_z/I_0 mit z wahrnehmbar ist. Ausnehmende Klarheit war jedoch am 30. Mai 1963 zu verzeichnen, und das Verhältnis $I_z/I_0 = 1,86$ für $z = 60^\circ$ erreichte nahezu den VAN RHIJN-Wert $V(60^\circ, 100 \text{ km}) = 1,91$. Eine große Diskrepanz zur Gl. (7) drückt sich auch in dem fast geradlinigen Anstieg einiger Meßpunktfolgen aus und ist vor allem auf Inhomogenitäten der emittierenden Schicht und ihre zeitlichen Änderungen im Laufe einer Messung zurückzuführen.

Der diskutierte Sachverhalt legt einen einfachen Exponentialansatz nahe, der es erlaubt, durch die Einführung eines „effektiven Dunstextinktionkoeffizienten“ $\tau'_D = k_D(\tau_D) \cdot \tau_D$ mit $0 < k_D \leq 1$ die im einzelnen äußerst komplexen Verhältnisse bei der Dunstextinktion in erster Näherung zu beschreiben:

$$I_z = J_0 \cdot \exp(-\tau'_D \cdot \sec z) \cdot [V(z, h) \cdot \exp(-(\tau_R + \tau_{O_3}) \sec z) + I_R^* \cdot \exp(-\tau_{O_3})]. \quad (10)$$

In der Form einer Arbeitshypothese berücksichtigt die Funktion $k_D(\tau_D)$ hierbei die Mehrfachstreuung. Sie ist so gewählt, daß für $\tau_D \leq 0,1$ die Gl. (10) die gleichen Ergebnisse liefert wie die Gl. (9), welche den Ansatz für die Dunstextinktion nach Gl. (8) beinhaltet. Setzt man die Beziehungen (10) mit $\tau'_D = 0,1$ und (9) mit $\tau_D = 0,1$ einander gleich, so erhält man den Wert $k_D = 0,2$, und er erweist sich in guter Näherung als unabhängig von der Zenitdistanz. Für eine sehr starke Trübung, wie sie durch $\tau_D \geq 1,5$ gegeben ist, soll mit $k_D = 1$ der Anschluß an die reine Extinktion gewonnen werden. Im Übergangsbereich zwischen den beiden Grenzen konnten empirisch drei Interpolationspunkte gefunden werden. An den Tagen 3., 4. und 9. Dezember 1963 wurden vor Sonnenuntergang mit einem Sonnenphotometer nach VOLZ (1959) bei $\lambda = 0,5 \mu$ die Dunstextinktionskoeffizienten τ_D bestimmt. Dann wurden nach der jeweiligen Dämmerung mit dem Wechsellichtmonochromator bei $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ längs eines Meridians die Intensitäten I_0, I_{40}, I_{60} gemessen und ihren Quotienten gemäß Gl. (10) ein bestimmter Wert τ'_D zugeordnet. Das Verhältnis τ'_D/τ_D ergibt die gesuchten Interpolationspunkte. In Abb. 9 ist der angenommene Verlauf $k_D(\tau_D)$ aufgezeichnet. Nach Gl. (10) wurde schließlich für eine mittlere Emissionshöhe von $h = 100 \text{ km}$ mit Hilfe der Tabellen von ASHBURN (1954) und für einen mittleren totalen Ozongehalt von $0,25 \text{ cm}$ das in Abb. 10 auf S. 132 dargestellte Verhältnis I_z/I_0 und I_z/J_0 berechnet.

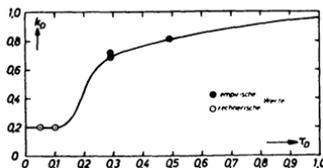


Abb. 9: Abschwächungsfaktor k_D für den Dunstextinktionskoeffizienten τ_D .

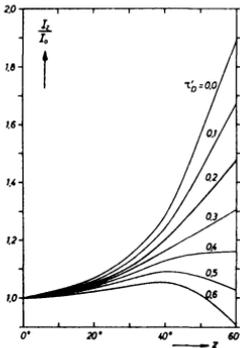


Abb. 10a.

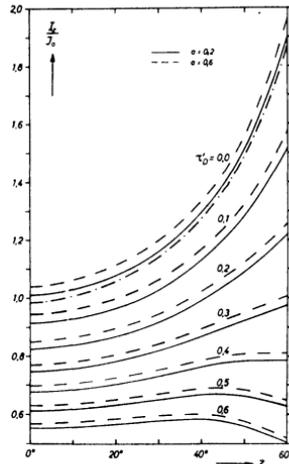


Abb. 10b.

Abb. 10a: Meridianschnittverhältnis nach Gl. (10). τ_D^* = effektiver Dunstextinktionskoeffizient; z = Zenitdistanz; a = Bodenalbedo.

Abb. 10b: Reduktionsverhältnis auf Zenitintensitäten J_0 über der extingierenden Atmosphäre nach Gl. (10). Strichpunktiert: Berücksichtigung der Dunstextinktion für $\tau_D = 0,1$ nach Gl. (9) ($a = 0,2$).

Ein Vergleich der Kurven von Abb. 10a mit den gemessenen Meridianschnitten der Abb. 8 zeigt, daß man unter gewissen Vorbehalten wegen der Emissionsinhomogenitäten eine grobe Interpretation der Dunstverhältnisse mit Gl. (10) vornehmen kann.

Für die Meßtage, an denen eine direkte Messung der Dunstextinktion noch nicht durchgeführt werden konnte, wurde zur Abschätzung die visuelle Sichtweite bestimmt. Nach der Sichttheorie von KOSCHMIEDER hängt die horizontale Sichtweite L eines schwarzen Ziels für das normale, hell adaptierte Auge mit dem komplexen Dunstextinktionskoeffizienten τ_D^* gemäß

$$\tau_D^* = \frac{3,91 \cdot 10^{-5}}{L} - 1,13 \cdot 10^{-7} \quad [\text{cm}^{-1}] \quad L \text{ in km}$$

zusammen. Damit erhält man $\tau_D = \tau_D^* \cdot H_D$, wenn sich begründete Annahmen über die mittlere Höhe H_D einer homogen gedachten Dunstschicht machen lassen. Bei VOLZ (1956) findet man für das Sommerhalbjahr $H_D = 1,2$ km, und im Winter ist nach SIEDENTOPF (1948) und PAETZOLD (1952) wohl die Hälfte bis ein Drittel dieses Wertes als Anhaltspunkt angebracht. Eigene Meßreihen mit dem bereits erwähnten Sonnenphotometer zeigen einen Gang, der geringe Sichtweiten mit kleinen Dunstschichtdicken verbindet und zu Werten von H_D führt, die mit denjenigen aus den obigen Zitaten gut übereinstimmen.

2. Die Dämmerungsemission der D -Linien des Natriums bei $\lambda = 5890/96 \text{ \AA}$

Während der Dämmerung überlagern die im Sonnenspektrum vorhandenen FRAUNHOFERSCHEN Absorptionslinien die airglow-Emissionslinien und bewirken, daß bei allen spektrographischen und photometrischen Meßmethoden, die auf einem Vergleich mit dem benachbarten Kontinuum beruhen, bei kleinen Sonnendepressionen zu geringe Signale gemessen werden. Hierauf haben HUNTEN (1957) und DONAHUE und HUNTEN (1958) eingehend hingewiesen und aufgezeigt, daß sich durch das Mitregistrieren des weißen Untergrundspektrums eine geeignete Korrekturgröße ableiten läßt.

Der Wechsellichtmonochromator muß in gleicher Weise auf ein Emissions- wie auf ein Absorptionsspektrum ansprechen und Signale gleichen Vorzeichens geben. Dies wurde im Laborversuch überprüft und bestätigt. Da die Halbwertsbreite $HW_P = 17,6 \text{ \AA}$ des Apparateprofils (siehe Tabelle 1) groß gegen die der D -Linien (etwa $0,4 \text{ \AA}$, PRIESTER (1953)) und natürlich besonders groß gegen die der atmosphärischen Emissionslinien ist, kann das registrierte Signal S als Differenz $\Delta I = |I_e - I_a|$ zweier Anteile aufgefaßt werden, die entsprechend ihrer spektralen Intensitätsverteilung E_e bzw. E_a von den Emissions- bzw. Absorptionslinien stammen:

$$S \sim \left| \int_0^{\infty} E_e(\lambda) d\lambda - \int_0^{\infty} a(\lambda) d\lambda \right| = \Delta I. \quad (11)$$

Zur Verdeutlichung sind in Abb. 11 (s. S. 134) skizzenhaft oben die verschiedenen Signalbestandteile und darunter die Überlagerungen einer D -Linie in Emission und Absorption aufgetragen. Vom Nachtwert her ansteigend überwiegt zunächst stark die Emissionslinie, um schließlich als Absorptionslinie bei geringen Sonnendepressionen das Signal zu bestimmen.

Im Einklang mit diesen Zusammenhängen befinden sich die in Abb. 12 (s. S. 134) gezeigten und nach den im Abschnitt 1.4. besprochenen Auswerte- und Kalibrierungsverfahren gewonnenen Signalamplituden.

Eine Abschätzung läßt für Sonnendepressionen $5^\circ < \beta < 6^\circ$ ein Differenzsignal $\Delta I = 0$ erwarten. Die Messungen ergeben in diesem Bereich ein ausgeprägtes Minimum, da wegen des zu geringen Rauschabstandes ein sehr kleines Differenzsignal nicht mehr nachweisbar ist.

Es ist möglich, aus dem beobachteten Differenzsignal unter Verwendung von Gl. (11) die Intensität der Emissionslinie

$$I_e = \int_0^{\infty} E_e(\lambda) d\lambda = \pm \Delta I + I_a = \pm \Delta I + C_F \cdot i_{\pm} \quad (12)$$

abzuleiten, weil die mitregistrierte Gleichstromkomponente i_{\pm} proportional der Untergrundhelligkeit und damit dem Integral über die FRAUNHOFER-Linie I_a ist. Der Proportionalitätsfaktor C_F ist, wegen Bestehens der Ungleichung $I_a \gg I_e$, kurz nach Sonnenuntergang bzw. vor Sonnenaufgang experimentell zu ermitteln und wurde

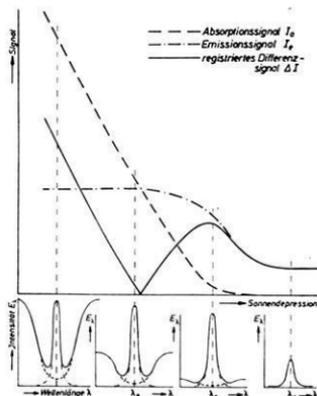


Abb. 11: Signalzusammensetzung und spektrale Intensitätsverteilung bei einer Na *D*-Linie in verschiedenen Dämmerungsphasen, schematisch dargestellt.

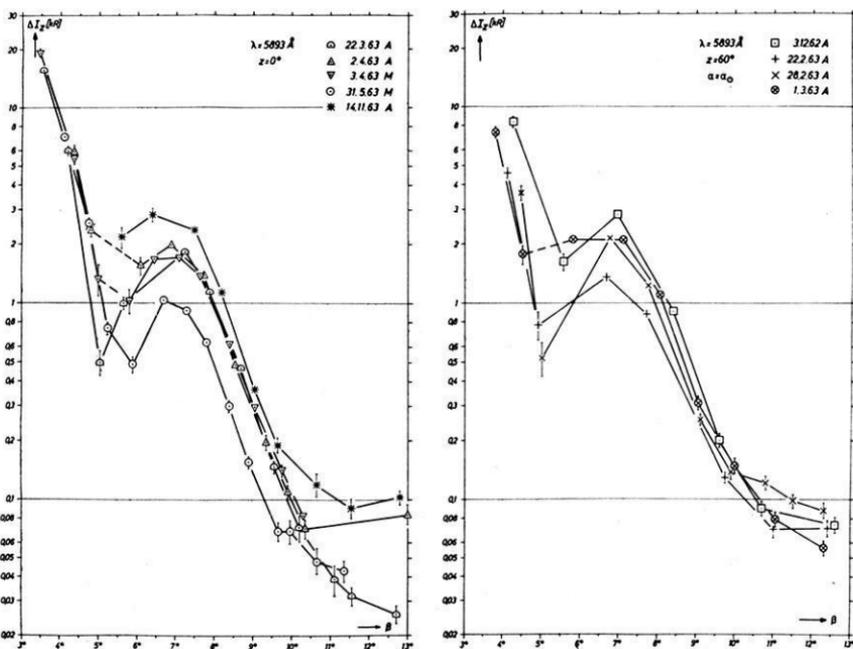


Abb. 12: Dämmerungsmessungen der Na *D*-Linien in Lindau: Registriertes Differenzsignal ΔI_z atmosphärisch unkorrigiert in Kilorayleigh. Die Unsicherheit der Meßpunkte grenzt den maximalen, durch die Rauschspannung verursachten Fehler bei der Amplitudenauswertung ein. β = Sonnendepression in der Emissionsschicht; z = Zenitdistanz, α = Azimut der Beobachtungsrichtung; α_{\odot} = Sonnenazimut; A = Abend-, M = Morgendämmerung.

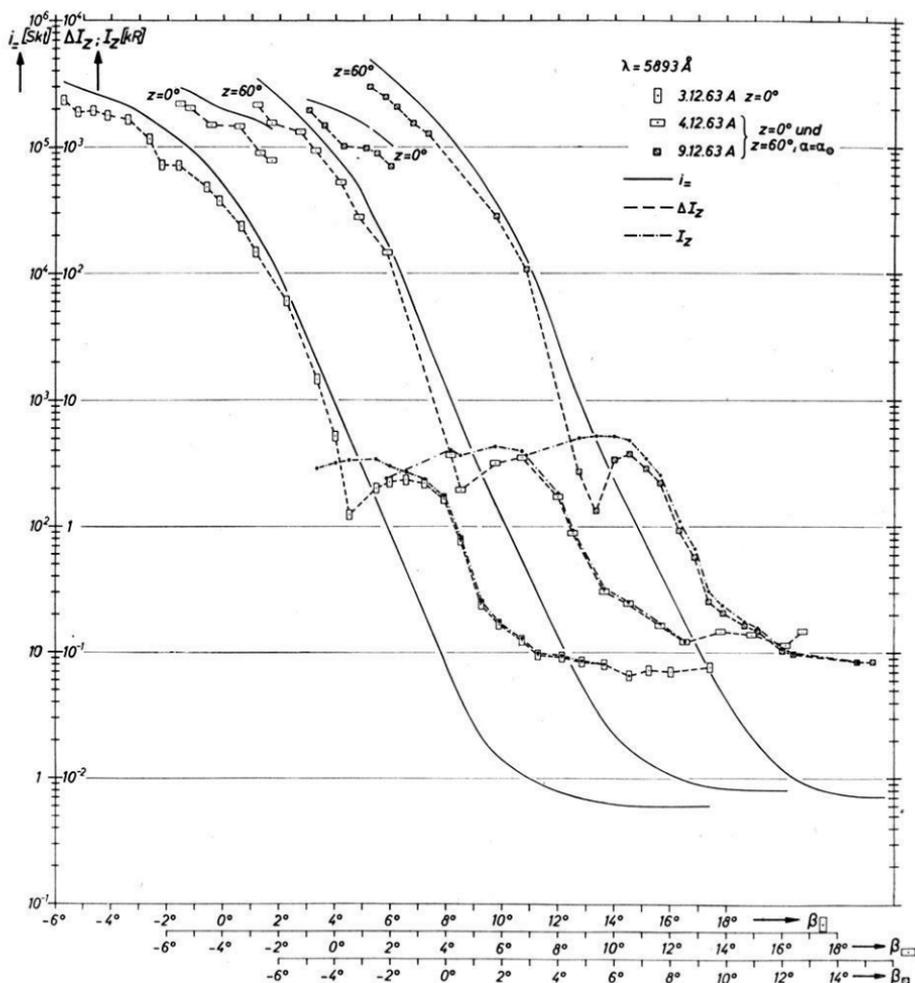


Abb. 13: Dämmerungsmessungen der Na D-Linien in Lindau: Registriertes Differenzsignal ΔI_z und abgeleitetes Emissionssignal I_z atmosphärisch unkorrigiert in Kilorayleigh. Registrierter Gleichstrom i_- in willkürlichen Einheiten. Übrige Symbole wie in Abb. 12. Um eine übersichtliche Darstellung zu erhalten, wurde die Abszisse um 4° je Meßtag versetzt und eine Angabe der Auswertefehler unterlassen. Sie sind von der gleichen Größe und zeigen den gleichen Gang wie bei den aus Abb. 12 ersichtlichen Messungen. Für $\beta < 2^\circ$ ist der Auswertefehler durchwegs kleiner als $\pm 5\%$.

aus den in Abb. 13 wiedergegebenen Messungen im Bereich $\beta \approx 2^\circ$ zu $C_F = I_d/i_- = 8,5 [R/Skt]$ bestimmt. In der Abb. 13 sind weiterhin für jeden Meßpunkt ΔI die mit der Korrektur (12) gewonnenen Emissionsintensitäten $I_e \equiv I$ eingetragen, und ausschließlich von ihnen ist im folgenden die Rede. Dabei ergibt sich nach der Korrektur, daß im Verlauf der Punktfolge an die Stelle des ausgeprägten Minimums von

ΔI ein Plateau von I mit einem flachen tagseitigen Abfall tritt. Das besprochene Korrekturverfahren erweist sich für $\beta \leq 0^\circ$ als unzureichend, denn die wesentliche und während der Dämmerung erfüllte Voraussetzung, daß im betrachteten Wellenlängenbereich die spektrale Intensitätsverteilung des gestreuten Sonnenlichtes und damit auch der Faktor C_p konstant bleibt, ist nicht mehr gegeben.

Heute wird allgemein angenommen, daß der Na-Dämmerungseffekt vorwiegend durch Resonanzstreuung hervorgerufen wird (CHAMBERLAIN (1961 b)).

Erweiterte und verbesserte Theorien, die vor allem die Absorption der anregenden Sonnenstrahlung, wie auch die Selbstabsorption der in Resonanz gestreuten Na-D-Linien auf dem Wege durch die Na-Schicht zum Beobachter einschließen, haben CHAMBERLAIN et al. (1958) und DONAHUE und STULL (1959) veröffentlicht. Da die Unterschiede der Ergebnisse beider Autorengruppen von der gleichen Größe wie die Unsicherheiten der solaren Intensitäten am Grund der FRAUNHOFER-D-Linien sind, wurde, wegen der leichteren Anpassungsmöglichkeit an die vorliegenden Verhältnisse, auf die zuerst genannte Arbeit zurückgegriffen. Demnach ist für einen bestimmten Na-Atomgehalt N_{Na} , das sind N Na-Atome im Grundzustand in einer vertikalen Säule von 1 cm^2 Querschnitt, der in Abb. 14 gestrichelt eingezeichnete Intensitäts-

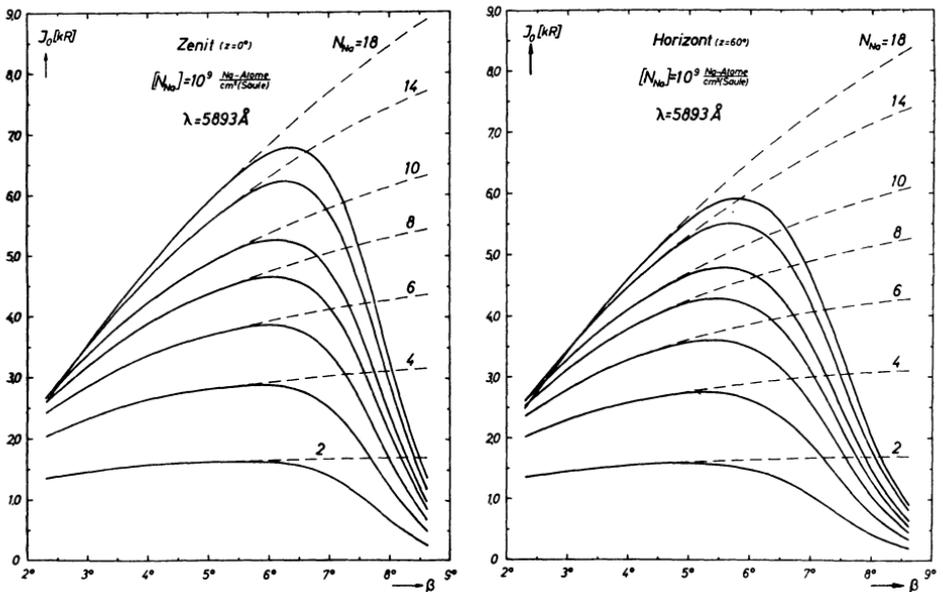


Abb. 14: Aus der Theorie für Resonanzstreuung folgende Zenitintensitäten J_0 der Na D-Linien oberhalb der extingrierenden Atmosphäre in Kilorayleigh (für eine Horizontmessung auf den Zenit reduziert). Gestrichelt: Plateauintensitäten nach CHAMBERLAIN et al. (1958) für $T = 220^\circ \text{K}$. β = Sonnendepression in der Emissionsschicht; N_{Na} = Na-Atomgehalt der Atmosphäre.

verlauf zu erwarten. Die für einen großen Na-Atomgehalt sehr ausgeprägte tagseitige Intensitätsabnahme ist nach der Theorie durch Selbstabsorption der anregenden Strahlung infolge der bei kleiner Sonnendepression rasch anwachsenden optischen Dicke der Na-Schicht bedingt.

Für $\beta > 5,5^\circ$ macht sich eine Abschattung durch die tiefe Atmosphäre bemerkbar, wobei der zeitliche Intensitätsabfall ebenso sehr von den Transmissionseigenschaften der Tropo- und Stratosphäre wie von der Höhenverteilung der Na-Atome beeinflusst wird. Damit ist die beobachtete Intensität proportional der Anzahl der noch von der anregenden Strahlung voll beleuchteten Na-Atome N_{Na}^* , die aus dem Faltungsintegral

$$N_{\text{Na}}^*(h_s) = \int_{h=h_s-20}^{\infty} T(h-h_s) \cdot n_{\text{Na}}(h) dh \quad (13)$$

hervorgeht. Die Funktion $0 \leq T \leq 1$ beschreibt die Transmissionsverhältnisse bei der tangentialen Durchdringung der tiefen Atmosphäre durch die Sonnenstrahlung und hängt nur von der Differenz der betrachteten Höhe h und der Höhe h_s des geometrischen Erdschattens ab. Im Verlauf der Dämmerung bleibt die Form der Transmissionsfunktion erhalten und rückt für eine bestimmte Beobachtungsrichtung mit dem geometrischen Erdschatten nach oben. Die hier verwendete Transmissionsfunktion für $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ist einer neueren Arbeit von HUNTEN (1962) für einen konstanten Ozongehalt der Atmosphäre (0,33 cm) entnommen. Einen plausiblen Anhaltswert für die Höhenverteilung der Na-Atome liefert die Messung der Intensitäts-Höhen-Relation bei einem Raketenanstieg am 28. März 1957 (PACKER (1961)). Danach wird in guter Näherung die Na-Atomkonzentration n_{Na} als Funktion der Höhe durch eine GAUSS-Verteilung mit einem Maximum in 90 km Höhe und einer Breite von 20 km ($1/e$ -Wert) wiedergegeben. Mit diesen Annahmen über $T(h-h_s)$ und $n_{\text{Na}}(h)$ läßt sich das Integral (13) auswerten. Drückt man noch auf Grund einfacher geometrischer Beziehungen die Schattenhöhe h_s durch die Sonnendepression β aus, so erhält man mit Gl. (14)

$$J_0(\beta) = J_{D_1+D_2}(\beta) \cdot N_{\text{Na}}^*(\beta) / N_{\text{Na}} \quad (14)$$

den nachtseitigen, in Abb. 14 stark ausgezogenen Intensitätsabfall, wobei $J_{D_1+D_2}(\beta)$ die dort gestrichelten Plateauintensitäten bedeuten.

Zum Vergleich wurden die mit der Korrektur (12) wegen des Auftretens der FRAUNHOFER-Linien versehenen Meßreihen aus Abb. 12 und 13 unter Berücksichtigung des Extinktionseinflusses in Zenitintensitäten oberhalb der optisch wirksamen Atmosphäre überführt. Nach Abb. 15 (s. S. 138) stimmen die gemessenen Dämmerungskurven mit den theoretischen (s. Abb. 14) so gut überein, daß man durch Interpolation der Intensitätsmaxima auf den an den Meßtagen vorhandenen Na-Atomgehalt schließen kann. Seine Variationen gliedern sich zwanglos ein in das Bild des bekannten ausgeprägten Jahresganges. Im einzelnen passen die Lindauer ($51,7^\circ\text{N}$; $10,1^\circ\text{O}$) Messungen mit einem Sommerminimum, hohen Werten im Dezember, geringen Ende Februar

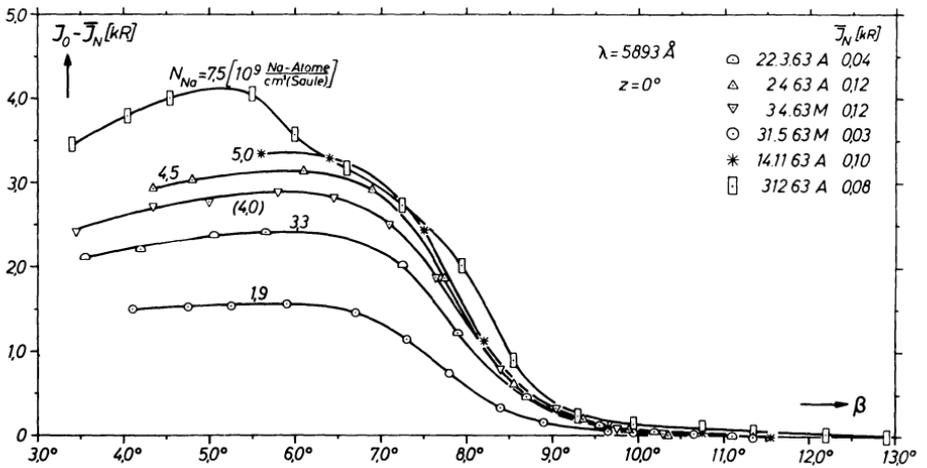
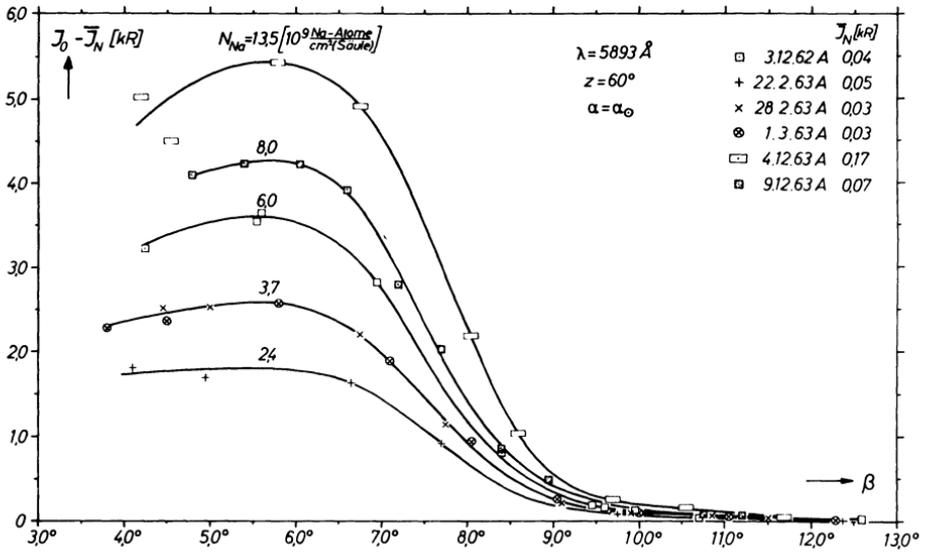


Abb. 15: Dämmerungsmessungen der Na D-Linien aus Abb. 12 und 13 bezüglich der FRAUNHOFER-Linien und der atmosphärischen Extinktion korrigiert und auf den Zenit reduziert. Eingetragener Na-Atomgehalt N_{Na} durch Interpolation mit den Kurven von Abb. 14 ermittelt. J_0 = Zenitintensität, \bar{J}_N = mittlere Nachtintensität im Zenit in Kilorayleigh; β = Sonnendepression in der Emissionsschicht. Übrige Symbole wie in Abb. 12.

und etwas höheren im März/April besser zu den Ergebnissen aus dem Observatoire de Haute Provence (43,9°N; 5,7°O) (BLAMONT et al. (1958), DONAHUE und BLAMONT (1961), NGUYEN-HUU-DOAN (1964)) als zu denjenigen aus Saskatoon (52,1°N; 106,7°W) mit einem einzigen Maximum im Februar (CHAMBERLAIN et al. (1958), BULLOCK und HUNTEN (1961)). Die Erklärung des Jahresganges von DONAHUE und BLAMONT (1961) mit der Konzeption eines im Bereich mittlerer Breiten nord-südwärts hin- und herdriftenden Gürtels von Wolken hohen Na-Atomgehalts sollte jedoch für Lindau eine bessere Übereinstimmung mit dem Jahresgang von Saskatoon ergeben, da beide Stationen nahezu die gleiche geographische Breite aufweisen. Bei Aufrechterhaltung dieser Konzeption müßte sie um die Annahme einer Ost-West-Drift der Na-Wolken erweitert werden. Die mitunter beträchtlichen Fluktuationen des Na-Atomgehalts sind ebenfalls gut bekannt aus den oben zitierten Arbeiten und stellen ein wesentliches Erscheinungsmerkmal des Natriumleuchtens dar. Abweichend von allen übrigen verläuft jedoch die Dämmerungskurve vom 3. Dezember 1963 mit einem Maximum bei $\beta = 5,1^\circ$ und einem eingesattelten Intensitätsabfall. Hierfür kann nach Gl. (13) ebenso sehr eine starke, eventuell örtlich gebundene Variation der Transmissionseigenschaften der Atmosphäre wie eine vom Normalen abweichende Höhenverteilung der Na-Atome verantwortlich sein. Die letztere Annahme ist weitaus plausibler, worauf noch näher eingegangen wird.

Es sei noch betont, daß bisher lediglich BLAMONT et al. (1958) experimentelle Ergebnisse über die tagseitige Intensitätsabnahme für $2^\circ < \beta < 6^\circ$ im Zusammenhang und in Übereinstimmung mit der Theorie der Resonanzstreuung veröffentlicht haben. Gegenüber anderen Apparaturen kommt hier die Eigenschaft des Wechsellichtmonochromators, daß der Untergrund keinen additiven Beitrag zum Signal liefert, voll zur Geltung.

RUNDLE et al. (1960) und HUNTEN (1960) entwickelten eine Methode, die aus dem beobachteten integralen Intensität-Zeit-Verlauf durch Differentiation nach der Schattenhöhe die vertikale Na-Atomverteilung abzuleiten gestattet. Dabei wird von HUNTEN (1960), wegen der Analogie zu spektroskopischen Entzerrungsproblemen, das von BRACEWELL (1955) angegebene graphische Entfaltungsverfahren zur Lösung der auftretenden Integralgleichung benutzt. Unter Anwendung dieser Methode auf ihre über das Frühjahrs-, Sommer-, Herbst- und Winterquartal gemittelten Dämmerungsmessungen konnten BULLOCK und HUNTEN (1961) zeigen, daß trotz der großen jahreszeitlichen Schwankungen des Na-Atomgehalts die mittleren Konzentrationsmaxima über Saskatoon in einem kleinen Höhenintervall von 5 km liegen, mit größten Höhen um 92 km im Frühjahr und Winter und geringsten um 88 km im Sommer (HUNTEN (1962)). Gleichermaßen verhalten sich die in der Abb. 16 aufgezeichneten Höhenprofile derjenigen Dämmerungsmessungen aus Abb. 15, deren nachtseitiger Intensitätsabfall mit hinreichend vielen Meßpunkten belegt ist. Sie wurden mit Hilfe des Differenzverfahrens von HUNTEN (1960) unter Verwendung der oben besprochenen Transmissionsfunktion gewonnen. Der außergewöhnliche Verlauf der Dämmerungskurve vom 3. Dezember 1963 führt hierbei zu den beiden stark aus-

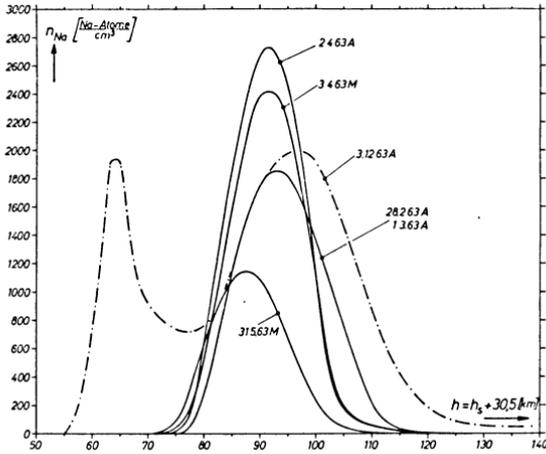


Abb. 16: Nach dem Verfahren von HUNTEN (1960) aus den Intensitätskurven von Abb. 15 abgeleitete Höhenprofile der Na-Atomkonzentration n_{Na} . h = Höhe über der Erdoberfläche. Strichpunktirt: Unentzerrtes Profil in willkürlichen Einheiten.

geprägten Konzentrationsmaxima in 64 km und 96 km Höhe. In der Abb. 16 ist nur die unentzerrte, auf $n_{\text{Na}} = 2000$ [Na-Atome/cm²] normierte Ableitung dJ_0/dh_s eingetragen, da sich für eine genauere Festlegung des Profils die Anzahl der Meßpunkte als zu gering erwies. Die doppelschichtartige Höhenverteilung der freien Na-Atome wird jedoch deutlich. DONAHUE und BLAMONT (1961) stellten bei ihren Na-Dämmerungsmessungen in Tamanrasset (22,8°N) einige Male eine ähnliche, sogar noch stärker abgestufte Intensitätsänderung, als aus Abb. 15 für den 3. Dezember 1963 hervorgeht, fest und interpretieren diesen Sachverhalt durch das mögliche Auftreten zweier übereinandergeschichteter Na-Wolken, von denen die untere während der Messung aus dem Gesichtsfeld zog.

3. Die [OI] Sauerstofflinie bei $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ während der Dämmerung

Das Dämmerungsverhalten der metastabilen [OI] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ -Emission ist vorerst noch ungeklärt, denn verschiedene experimentelle Arbeiten widersprechen sich: So können KOOMEN et al. (1956), ferner MANRING und PETTIT (1956) einen Dämmerungseffekt an der Station auf dem Sacramento Peak nicht nachweisen. Dagegen beobachten DUFAY und DUFAY (1948) und MEGILL (1960) einen Dämmerungsanstieg der Intensität bis zum Faktor 2 gegenüber dem Nachtwert.

MEGILL et al. (1960) berichten außerdem für Rapid City über einen Jahresgang mit häufig in den Herbst- und Wintermonaten und sehr selten im Frühling und Sommer auftretenden Dämmerungseffekten.

Das Termschema der metastabilen Sauerstofflinien bietet die Möglichkeit zu einer Fluoreszenzanregung, indem die Linie $\lambda = 2972 \text{ \AA}$ aus dem Sonnenspektrum absorbiert und entsprechend den Übergangswahrscheinlichkeiten A_{ik} (CHAMBERLAIN (1961 c)) bei $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ reemittiert wird. Unter Vernachlässigung von Stoßdesaktivierung und atmosphärischen Abschattungseinflüssen läßt sich die obere Grenze der Zenitintensität zu

$$J_{5577} = \frac{A_{02}}{A_{01} + A_{02}} \cdot \frac{(n_O)_{3P_1}}{n_O} \cdot N_O \cdot B_{2972} \cdot \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu = 22 \text{ [R]}$$

abschätzen. Dabei bedeutet:

$(n_O)_{3P_1}/n_O = 0,17$ relative Besetzung des $3P_1$ -Niveaus gemäß einer BOLTZMANN-Verteilung bei einer Temperatur von $T = 220^\circ\text{K}$;

$N_O = 3,7 \cdot 10^{18}$ [O-Atome/cm² (Säule)] mittlere Anzahl der O-Atome im Grundzustand (CHAMBERLAIN (1961 d));

$B_{2972} = 91$ [erg/cm² · sec · Å] mittlerer spektraler Strahlungsfluß der Sonne in Erdnähe (ALLEN (1955));

$\int_0^\infty \alpha_\nu d\nu = 9,14 \cdot 10^{-13}$ [cm² · sec⁻¹] integrierter Absorptionsquerschnitt pro Atom.

Da die mittlere Zenitintensität dieser Linie in der Nacht 250 R beträgt, ist ein durch Fluoreszenz bewirkter Intensitätsanstieg während der Dämmerung nur in geringem Maße, etwa um 10%, zu erwarten.

Zwei Dämmerungsmessungen wurden mit dem Wechsellichtmonochromator durchgeführt. Der relative zeitliche Verlauf geht aus Abb. 17 hervor und steht im augen-

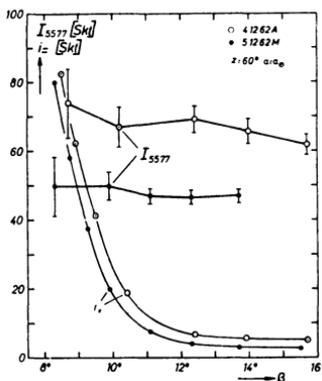


Abb. 17: Dämmerungsmessungen der [OI] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ Linie in Lindau. Intensität I_{5577} und Gleichstromkomponente i_- in willkürlichen Einheiten. Die Fehlergrenzen geben die maximalen Auswerteunsicherheiten an (siehe Legende der Abb. 12). β = Sonnendepression in der Emissionsschicht; z = Zenitdistanz, α = Azimut der Beobachtungsrichtung; α_\odot = Sonnenazimut.

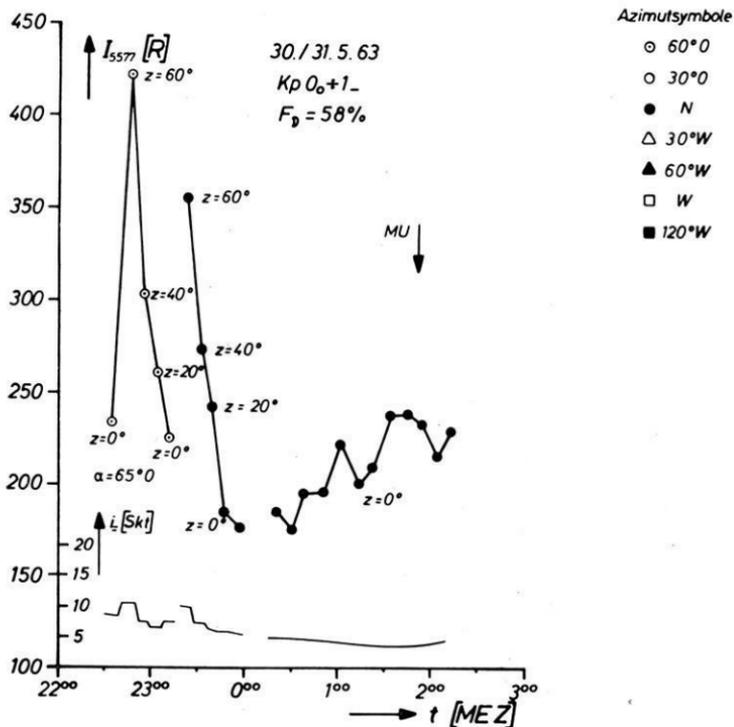
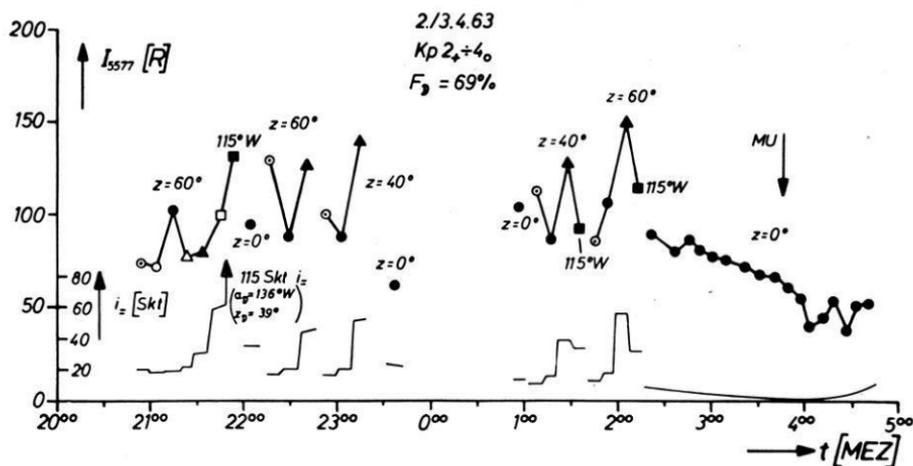
fälligen Gegensatz zu den Dämmerungsmessungen der Na *D*-Linien (vgl. Abb. 13). In Übereinstimmung mit obiger Abschätzung liefert hier das Sonnenkontinuum bei $\lambda = 2972 \text{ \AA}$ durch Fluoreszenz keinen merklichen Beitrag zur Intensität der [OI] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ Linie.

4. Das Nachthimmelsleuchten der [OI] Sauerstofflinie bei $\lambda = 5577 \text{ \AA}$

Die grüne Nordlichtlinie [OI] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ stellt die markanteste und am häufigsten untersuchte airglow-Emission des Nachthimmels dar. Sie konnte mit dem Wechsellichtmonochromator auch in den extremen Fällen von Vollmond und bei Bedeckung des Himmels durch eine nicht allzu dicke Wolkenschicht nachgewiesen werden. In Abb. 18 sind als Beispiel für zwei Meßtage die Nachtintensitäten I_{5577} in verschiedenen Beobachtungsrichtungen aufgetragen. Die atmosphärische Extinktion blieb unberücksichtigt, da hier im wesentlichen die relativen Intensitätsänderungen betrachtet werden. Deutlich kommen bei den Meßreihen die bekannten starken räumlichen und zeitlichen Intensitätsvariationen (ROACH (1961)) zum Ausdruck, die wohl am besten beschrieben werden mit der von ROACH et al. (1958 a, 1958 b) vorgenommenen Interpretation durch bewegte airglow-Zellen im Höhenbereich um 100 km. Den reinen airglow-Verhältnissen mit Rekombinationsvorgängen können Anregungsprozesse durch Stöße mit geladenen Partikeln, wie sie vorwiegend in der Polarlichtzone auftreten, überlagert sein. Deshalb sind als Maß für die erdmagnetische Unruhe die Extremwerte der BARTELSschen dreistündlichen planetarischen Kennziffern K_p während der Beobachtungsdauer in der Abb. 18 angegeben. Die Nacht vom 2./3. April 1963 zeigte nach BARTELS (1963) die gewöhnlichen Störungen, während die Nacht vom 30./31. Mai 1963 sich erdmagnetisch völlig ruhig erwies, so daß Polarlichterscheinungen in mittleren Breiten sicherlich nicht zu beobachten waren. KOOMEN et al. (1956) stellten nach Mondaufgang eine Erhöhung von I_{5577} in Mondnähe fest, ohne diesen Effekt erklären zu können. Hier erkennt man ein ähnliches Verhalten, wenn das Gesichtsfeld der Apparatur die Mondumgebung erfaßt, was am Gleichstrompegel abzulesen ist. Ein Tagesgang der Emission, der nach BARBIER (1963) im Mittel in den Wintermonaten kurz nach Mitternacht ein Maximum und im Sommer einen fortwährenden Anstieg zeigt, deutet sich ebenfalls an.

Literatur siehe S. 144/145.

Abb. 18: Nachtmessungen der [OI] $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ Emission in Lindau. Intensitäten I_{5577} bezüglich der atmosphärischen Extinktion unkorrigiert in Rayleighseinheiten. Gleichstromkomponente i_- in willkürlichen Einheiten als Maß für die Untergrundhelligkeit. K_p = planetare erdmagnetische Kennziffern; $F_{\text{☾}}$ = beleuchtete Mondoberfläche; MU = Monduntergang; z = Zenitdistanz, α = Azimut der Beobachtungsrichtung; $z_{\text{☾}}$ = Zenitdistanz, $\alpha_{\text{☾}}$ = Azimut der Mondstellung.



Literatur

- ALLEN, C. W.: *Astrophysical Quantities*. The Athlone Press, London 1955.
- ANKEL, TH. und W. WINTERMEYER: *Ann. Phys.* 18, S. 181—189, 1956.
- ASHBURN, E. V.: *J. Atm. Terr. Phys.* 5, S. 83—91, 1954.
- BARBIER, D.: *Ann. Géophys.* 15, S. 412—414, 1959.
- Ders.: *Geophysics: The Earth's Environment* (herausgegeben von C. DeWitt, J. Hieblot und A. Lebeau), Gordon and Breach, New York/London 1963, S. 303—368.
- Ders.: *Ann. Géophys.* 20, S. 22—33, 1964.
- BARTELS, J.: *Ann. Géophys.* 19, S. 1—20, 1963.
- BLACKWELL, D. E., M. F. INGHAM und H. RUNDLE: *Astrophys. J.* 131, S. 15—24, 1960.
- BLAMONT, J. E.: *The Airglow and the Aurorae* (herausgegeben von E. B. Armstrong und A. Dalgarno), Pergamon Press, London 1956, S. 99—113.
- BLAMONT, J. E. und A. KASTLER: *Ann. Géophys.* 7, S. 73—89, 1951.
- BLAMONT, J. E., T. M. DONAHUE und V. R. STULL: *Ann. Géophys.* 14, S. 253—281, 1958.
- BLAMONT, J. E. und T. M. DONAHUE: *J. Geophys. Res.* 66, S. 1407—1423, 1961.
- BRACEWELL, R. N.: *J. Opt. Soc. Amer.* 45, S. 873—876, 1955.
- BULLOCK, W. R. und D. M. HUNTEN: *Can. J. Phys.* 39, S. 976—982, 1961.
- CARIO, G. und U. STILLE: *Z. f. Phys.* 138, S. 372—380, 1954.
- CHAMBERLAIN, J. W.: *Physics of the Aurora and Airglow*. Academic Press, New York/London 1961. 1961a, S. 360; 1961b, S. 380ff.; 1961c, Abb. VI 1, Tab. VI 1; 1961d, Tab. IV 1.
- CHAMBERLAIN, J. W., D. M. HUNTEN und J. E. MACK: *J. Atm. Terr. Phys.* 12, S. 153—165, 1958.
- CHANDRASEKHAR, S.: *Radiative Transfer*. The Clarendon Press, Oxford 1950.
- DONAHUE, T. M. und D. M. HUNTEN: *J. Atm. Terr. Phys.* 13, S. 165—166, 1958.
- DONAHUE, T. M. und V. R. STULL: *Ann. Géophys.* 15, S. 481—515, 1959.
- DONAHUE, T. M. und J. E. BLAMONT: *Ann. Géophys.* 17, 116—133, 1961.
- DUFAY, J. und M. DUFAY: *Compt. rend.* 226, S. 1208—1210, 1948.
- DUNN, R. B. und E. R. MANRING: *J. Opt. Soc. Am.* 46, S. 572—577, 1956.
- EHGARTNER, G., W. PIEPENBRINK und H. MAIER-LEIBNITZ, zum Teil nach Messungen von K. MAYER: *Z. f. Phys.* 141, S. 246—253, 1955.
- ELSÄSSER, H. und H. SIEDENTOPF: *Z. f. Astrophys.* 43, S. 132—143, 1957.
- GUILINO, G. und H. MAIER-LEIBNITZ: *J. Phys. Rad.* 19, S. 270—272, 1958.
- HUNTEN, D. M.: *J. Atm. Terr. Phys.* 11, S. 67/68, 1957.

- Ders.: *J. Atm. Terr. Phys.* 17, S. 295—301, 1960.
- Ders.: *J. Atm. Terr. Phys.* 24, S. 333—338, 1962.
- JUNGMEISTER, H. G. und H. L. KÖNIG: *A.E.Ü.* 14, S. 317—324, 1960.
- KOOMEN, M. J., D. M. PACKER und R. TOUSEY: *The Airglow and the Aurorae* (herausgegeben von E. B. Armstrong und A. Dalgarno). Pergamon Press, London 1956, S. 355—365.
- KULKARNI, P. V. und C. L. SANDERS: *Planet. Space Sci.* 12, S. 189—194, 1964.
- MANRING, E. R. und H. B. PETTIT: *The Airglow and the Aurorae* (herausgegeben von E. B. Armstrong und A. Dalgarno). Pergamon Press, London 1956, S. 29—37.
- MEGILL, L. R.: *J. Atm. Terr. Phys.* 17, S. 276—285, 1960.
- MEGILL, L. R., P. M. JAMNICK und J. E. CRUZ: *J. Atm. Terr. Phys.* 18, S. 309—314, 1960
- NGUYEN-HUU-DOAN: *Ann. Géophys.* 19, S. 406—427, 1963.
- Ders.: *Ann. Géophys.* 20, S. 1—21, 1964.
- PACKER, D. M.: *Ann. Géophys.* 17, S. 67—75, 1961.
- PAETZOLD, H. K.: *Astron. Nachr.* 281, S. 17—22, 1952.
- PETTIT, H. B., F. E. ROACH, P. ST. AMAND und D. R. WILLIAMS: *Ann. Géophys.* 10, S. 326 bis 347, 1954.
- PRIESTER, W.: *Z. f. Astrophys.* 32, S. 200—250, 1953.
- ROACH, F. E.: *Manual for photometric observations of the airglow during the International Geophysical Year.* 1957.
- Ders.: *Ann. Geophys.* 17, S. 172—180, 1961.
- ROACH, F. E., E. TANDBERG-HANSSSEN und L. R. MEGILL: *J. Atm. Terr. Phys.* 13, S. 113—121, 1958 a.
- Dies.: *J. Atm. Terr. Phys.* 13, S. 122—130, 1958 b.
- RUNDLE, H. N., D. M. HUNTEN und J. W. CHAMBERLAIN: *J. Atm. Terr. Phys.* 17, S. 205 bis 219, 1960.
- SIEDENTOPF, H.: *Naturwissenschaften* 35, S. 289—298, 1948.
- TELLEX, P. A. und J. R. WALDRON: *J. Opt. Soc. Am.* 45, S. 19—22, 1955
- TINSLEY, B. A. und A. VALLANCE JONES: *J. Atm. Terr. Phys.* 24, S. 345—351, 1962.
- VOLZ, F.: *Handbuch der Geophysik*, Band VIII, Kapitel 14, S. 825, 1956.
- Ders.: *Arch. Meteor. Geophys. Bioklim. B.* 10, S. 100—131, 1959.
- ZEIL, W. und H. K. BODENSEH: *Z. Instr.* 68, S. 76—81, 1960.

A New Type of Wave Discovered in the Schlieren Photographs¹⁾

A. RAHMAN, Lahore²⁾

Eingegangen am 13. August 1964

Summary: While carrying out some experiments on model seismics by using the method of schlieren optics, waves of a new type were recorded. In the schlieren pictures these show a variable velocity of propagation. In order to explain the nature of these waves some special experiments were carried out. No sound physical explanation of the origin and mode of propagation of these waves has been found so far. For the time being these waves are named Ω -Waves.

Zusammenfassung: Bei modellseismischen Versuchen mit der Methode der Schlierenverfahren wurde eine besondere Art von Wellen beobachtet. Sie zeigen im Schlierenbild eine variable Geschwindigkeit. Um die Natur dieser Wellen festzustellen, wurden einige besondere Versuche gemacht, deren Ergebnisse hier vorgelegt werden. Eine exakte Erklärung für diese Wellen fehlt noch. Sie wurden vorläufig Ω -Wellen genannt.

During the course of experiments carried out to investigate the propagation of elastic waves in various models with the help of the schlieren method, wave fronts of a peculiar type were observed. These wave fronts were prominent in the vicinity of the electrodes, which were small compared to the depth of the surrounding water. The anomalous feature of these waves, which seemed to be waves in water guided by waves in the model, was the curvature of their fronts, which could be caused by a variable velocity of propagation along the model. The question of the origin and the mode of propagation of these waves, (in the water), which have been named tentatively Ω -waves, remained unanswered. In the following an account of various experiments, carried out in order to determine the nature of the waves, is given.

Normally, the waves produced in a rod when it is struck at one end, (the other end being clamped) are of compressional, transversal and flexural type. If the dimension of the cross-section is large compared to the wavelength, surface waves can also be observed. All these waves—with the exception of flexural waves—are propagated with a constant velocity.

¹⁾ Extracted from the chapter 6 of the thesis for doctorate: "Untersuchung der Ausbreitung von Wellen in Modellen der Erde und in Modellen geologischer Körper mit der Methode der Schlierenoptik", submitted by the author to the Naturwissenschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität München, October 1963.

²⁾ AZIZ UR RAHMAN, Geology Department, University of the Panjab, Lahore (W-Pakistan).

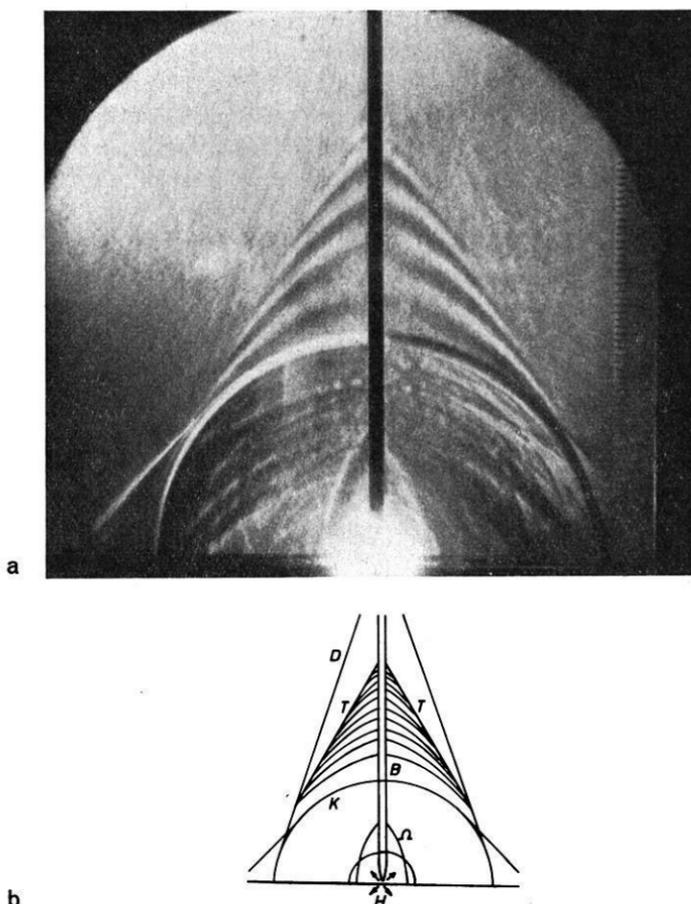


Fig. 1: Wave fronts in the vicinity of an electrode.

- (a) The electrode is a tungsten wire, diameter 0.2 cm. The schlieren picture has been taken about 23 μ sec after the excitation.
- (b) Explanation of wave fronts in (a). H = centre of excitation. D = compressional wave. B = flexured waves. T = transversal wave. K = spherical wave in water. Ω = Ω -wave.

In order to investigate the nature of Ω -waves, some experiments were carried out with the help of a modified form of Toepler's schlieren apparatus (SCHARDIN, H. 1942, Aziz-ur-Rahman 1963). The schlieren pictures were recorded on a film sensitive for ultra violet light. Fig. 1 shows the schlieren picture of the wave fronts in the water produced when a tungsten electrode, which is clamped at one end, receives an impulse through a high voltage spark of short duration. The schlieren picture has been photographed about 23 μ sec after the excitation of the electrode.

A series of photographs depicting the wave propagation in the vicinity of two cylindrical electrodes is shown in Fig. 2. In the centre of picture *d* of Fig. 2 there some curved wave fronts are seen on both electrodes. This is the start of the Ω -waves. In pictures *e* and *f* the same wave fronts are shown after 3 and 7 μsec respectively. In these pictures the Mintrop- (or Head-)wave and the spherical-wave corresponding to the Ω -wave are also seen. The Ω -waves are produced generally about 15 μsec after the excitation of electrodes through the spark.

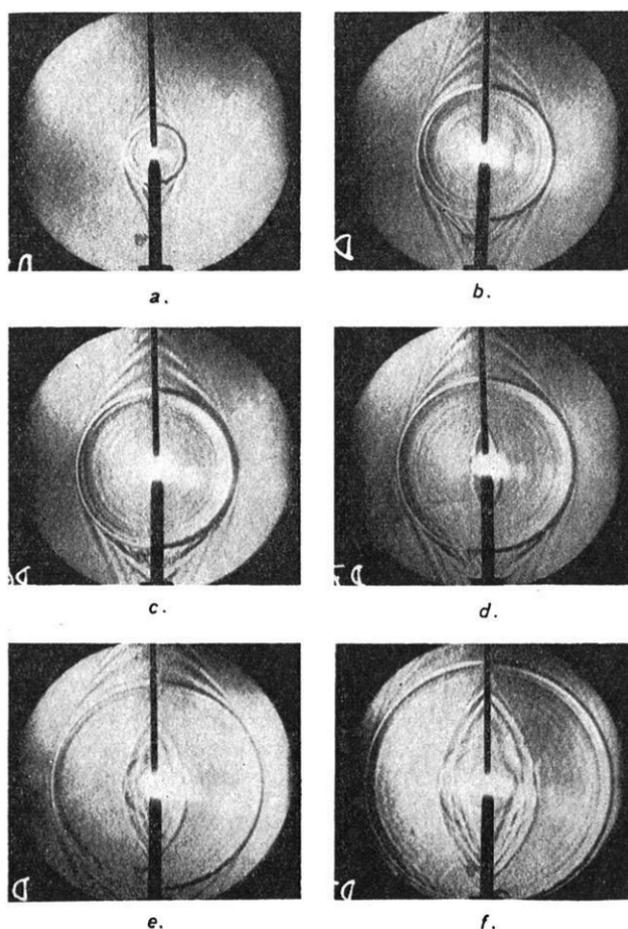


Fig. 2: The origin of Ω -wave in the vicinity of two metallic electrodes. The upper electrode consists of tungsten, the lower one of copper. The photographs have been taken at about 7, 15, 18, 21, 24 and 28 μsec respectively after the excitation.

1. The Origin of Ω -Waves

The last three pictures of Fig. 2 show that Ω -waves originate rather late as compared to the other waves. The experiments have shown that the time-interval between the exciting spark and the origin of the Ω -waves is not constant, but varies from 14 to 18 μsec . Two explanations for the excitation of Ω -waves could be proposed: 1. The Ω -waves might have been produced by a secondary exciting spark, which followed the

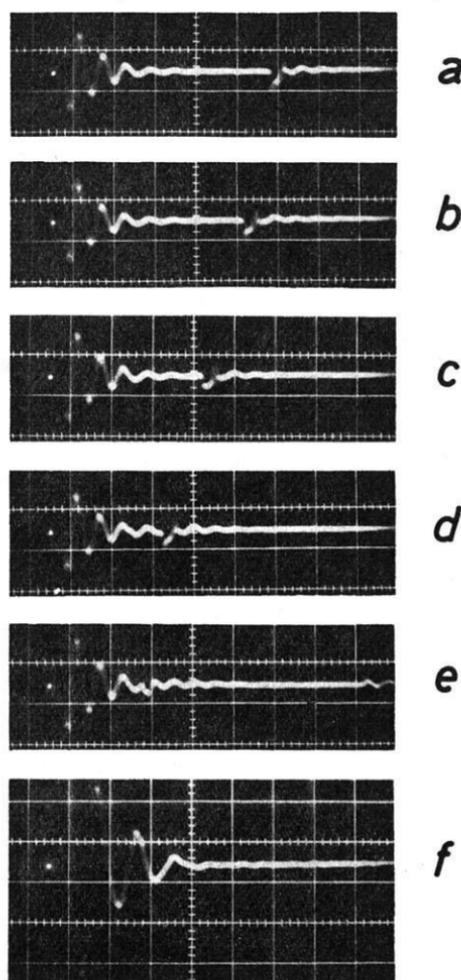


Fig. 3: Oscillogramm showing the exciting- and the illuminating-sparks with different time-intervals. In picture *f* both the sparks are produced at the same time. Interval between two vertical lines is equal to 5 μsec .

first one after about $15 \mu\text{sec}$, or 2. the excitation might be due to the collapse of a gas bubble, which provides a powerful impulse of very short duration. In the following these two possibilities of the cause of origin of Ω -waves are dealt with:

In order to test the first possibility—that the Ω -waves are produced by a secondary spark—experiments were carried out with an oscillograph (Tektronix Typ 502). A series of photographic records are shown in Fig. 3. In these pictures the two breaks, representing the exciting spark on the left and the illuminating spark on the right, are clearly seen. The time interval between these two sparks was reduced gradually from *a* to *f* (Fig. 3). In picture *f* this time-interval is zero, which explains the larger amplitude of the signal in *f* as compared to other pictures of Fig. 3. In fact the illuminating spark consists of two breaks; this is, however, immaterial for the present discussion (for this and other minor details see AZIZ UR RAHMAN 1963). From Fig. 3 it is clear that there is no spark recorded on the oscillograph between the exciting and the illuminating spark. Thus the possibility of a “secondary spark” is ruled out.

As mentioned above, the origin of Ω -waves might be due to the gas- or steam-bubble produced by the heat of the exciting spark. This bubble might oscillate or collapse between the two electrodes and thus produce secondary waves.

A closer study of Fig. 2 shows that the fronts of the Ω -waves are sharper than the corresponding spherical wave fronts. If we take into account the radial distribution of energy from a spherical gas bubble, then the spherical wave fronts in water should have been sharper and more prominent than the Ω -wave fronts. This is, however, not the case. Normally, the spherical wave fronts produced by the exciting-spark are more prominent than all other wave fronts in the picture. It is only the spherical wave fronts corresponding to the Ω -waves, which appear diffused in the picture (Fig. 2).

(There seems to be one possibility to explain the distribution of energy in the case of Ω -waves. If the shape of the bubble at the time when it imparts the energy to the electrodes is considered to be cigar-like (oblong ellipsoid) with its major axis lying parallel to the axis of the electrodes, then the impulse received in the direction of the electrodes could be stronger than in any other direction. This would explain to some extent the distribution of energy in the Ω -waves and in the corresponding spherical waves.)

In order to determine whether the Ω -waves are surface- or body-waves the following experiments were carried out:

2. Experiment with Cylindrical Electrodes

The exciting spark was produced between a tungsten electrode (above), and a brass electrode (below), (Fig. 4). While the tungsten electrode is kept the same in all the pictures, brass electrodes of diameters varying from 0.2 cm to 1.0 cm, were used in turn. The ends of all brass electrodes were tapered to a cone, having an angle of cone of 45° . Fig. 4 shows a series of schlieren pictures taken at about $22 \mu\text{sec}$ after the excitation.

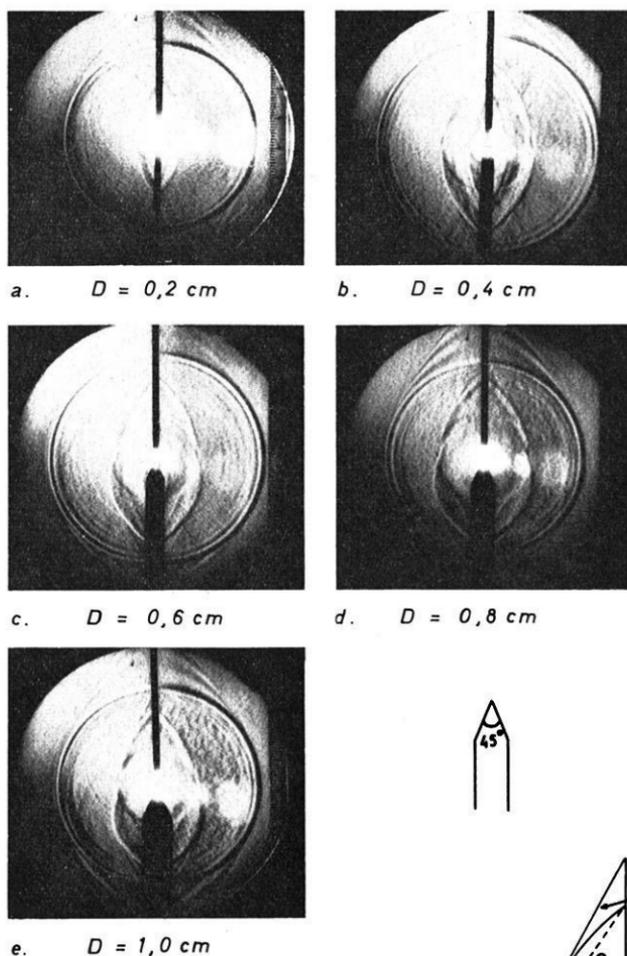
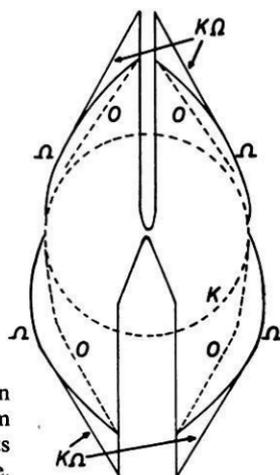


Fig. 4: Wave pattern near a tungsten wire electrode (above), and cylindrical electrodes of brass (below) with different diameter D . The conical upper ends of the brass electrodes have a cone-angle of 45° . The photographs have been taken at about $23 \mu\text{sec}$ after the excitation.

Fig. 5: Comparison of the Ω -waves with "surface waves" in two electrodes. The wave fronts in solid line are traced from picture *d* of fig. 4. The dotted lines are the wave fronts of a surface-wave, which has traveled the same distance.



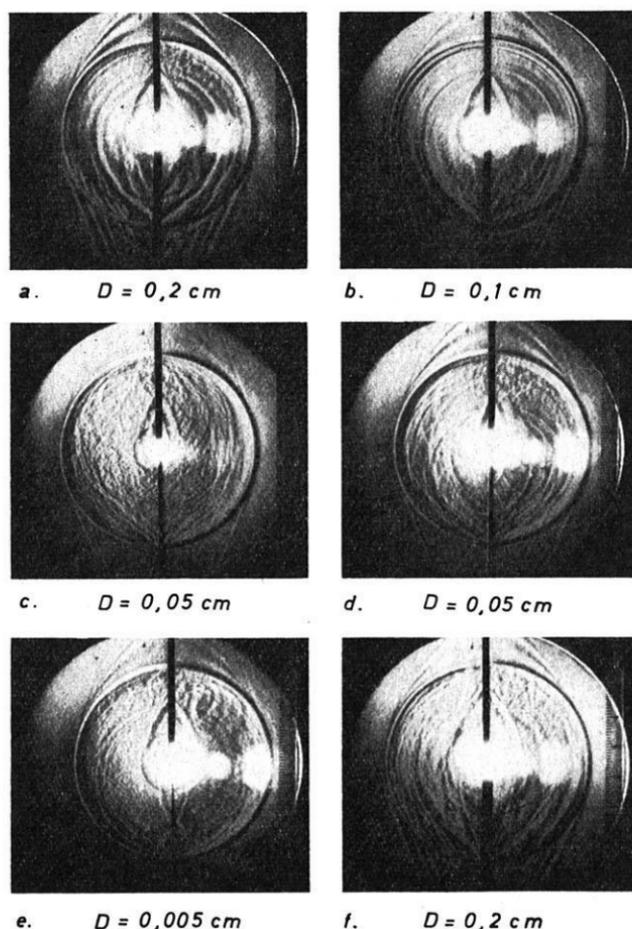


Fig. 6: Wave pattern near a tungsten-wire electrode (above) and plate-electrodes of brass (below) of different thicknesses. The photographs have been taken at about $22 \mu\text{sec}$ after the excitation.

It is obvious that the shape of the Ω -wave fronts on brass electrodes vary with the diameter of the electrodes. Fig. 5 shows a sketch of the wave fronts (solid line) as given by picture *d* of Fig. 4. The dotted lines give the hypothetical wave fronts of a surface-wave with constant velocity of propagation (2900 m/sec). For this hypothetical constant velocity such a value was chosen that Ω -waves and surface-waves have traveled the same distance at the time of photograph (i.e., $22 \mu\text{sec}$ after the excitation). The curved wave fronts of the Ω -waves are due to their variable velocity of propagation.

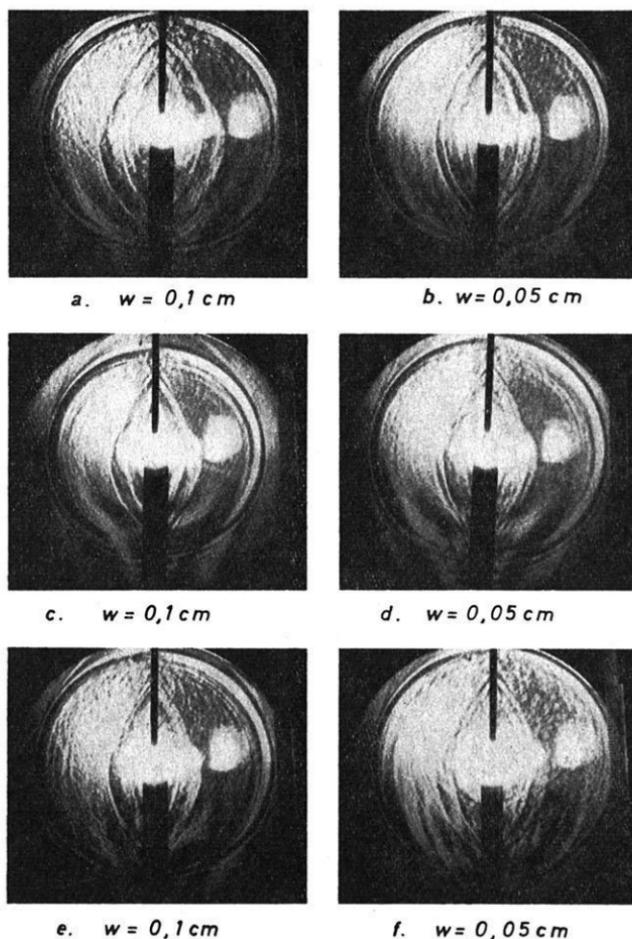


Fig. 7: Wave fronts near hollow cylinders with different thickness w of walls but with constant inner diameter. The hollow cylinders were filled with water (picture *a, b*), with air (picture *c, d*) and with glycerine (picture *e, f*). The photographs have been taken at about $27 \mu\text{sec}$ after the excitation.

3. Experiments with Brass Plates of Different Thickness

The wave pattern in the vicinity of electrodes in the form of brass plates was also studied (Fig. 6). The brass plates were placed perpendicular to the plane of the picture. Different plates of thickness between 0.005 and 0.2 cm were used. The Ω -waves observed in these cases were very faint. This was so, because—unlike the unidirectional distribution of energy in the case of a cylindrical electrode—a major portion of energy was distributed in the plane of the electrodes. Therefore the total effect of the Ω -waves was diffused.

4. Experiment with Hollow Cylindrical Electrodes

This experiment supports—as the last two did—the view that the Ω -waves are some type of surface-waves. Two hollow cylindrical tubes with different thickness of walls were used. Fig. 7 shows the schlieren pictures of the wave pattern in the vicinity of these tubes. The tubes were filled with water (picture *a, b*), with air (picture *c, d*), and with glycerine (picture *e, f*). In all these cases the Ω -waves were clearly seen. It was observed that the velocity and the mode of propagation of Ω -wave were independent of various liquids inside the tubes.

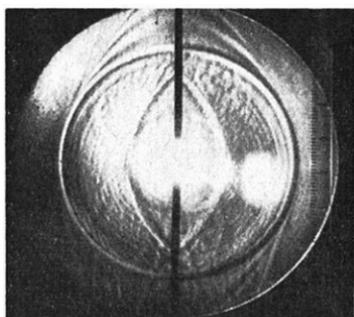
5. Experiments with Different Materials

In order to determine, whether the velocity of Ω -waves depends on the material of the electrodes, seven electrodes made of different materials were used. The diameter of all electrodes was 2.0 cm. In Fig. 8 the upper electrode in all pictures is of tungsten while the lower ones are of tool-steel, precision round-steel, brass, copper, aluminium, soldering-tin and graphite refill of pencil. The Ω -waves in all these cases are seen clearly, the ratios of velocity of Ω -waves in tungsten and in other materials are given in Table 1.

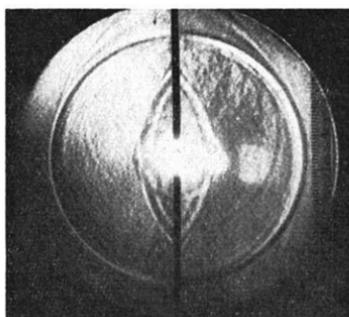
Table 1.

No.	Material		vel. of Ω -wave in Tungsten
			vel. of Ω -wave in sample
1	tool-steel		0.963
2	Precision Roundsteel	DIN 175	0.987
3	Brass Ms 58	DIN 1786	1.020
4	Copper	DIN 1708	0.890
5	Aluminium	DIN 1747	1.006
6	Soldering-Tin 60	DIN 1730	1.011
7	Graphite pencil-refill		1.020

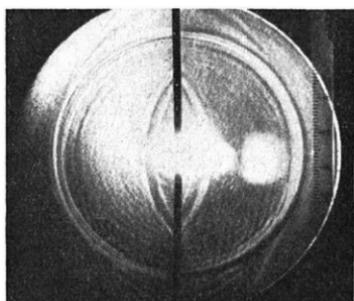
The values of ratios vary by $\pm 3\%$ (excluding copper). Since the error in the measurement of velocities was at least 5%, the variations in the quotients in Table 1 do not carry much weight. Thus the velocity of Ω -waves under present conditions of measurement seems to be more or less independent of the material.



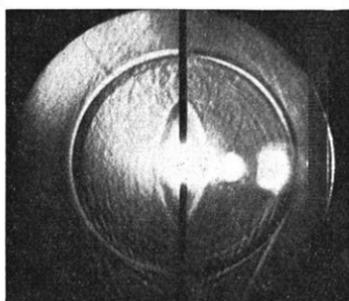
tool steel



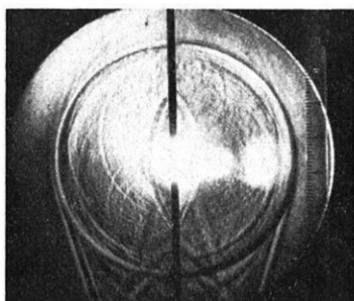
precision round-steel DIN 175



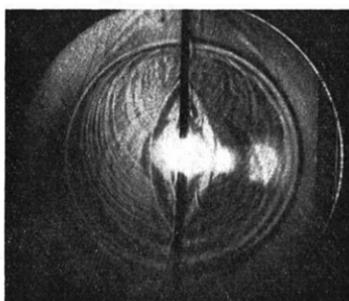
brass 58 DIN 1756



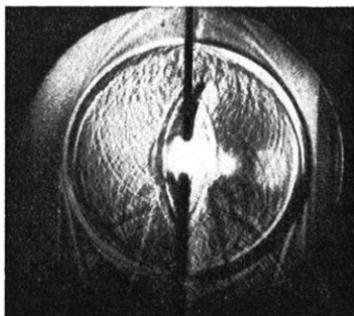
copper DIN 1708



aluminium DIN 1747



soldering tin 60 DIN 1730



graphit refill of pencil

Fig. 8: Wave pattern near wire electrodes of various materials, the upper electrode in all the pictures is of tungsten. The photographs have been taken at about $24 \mu\text{sec}$ after the excitation.

For comparison, some velocity ratios of longitudinal waves in different metals are given in Table 2.

Table 2.

No.	Material	Longitudinal vel. in Material
		Longitudinal vel. in Tungsten
1	Steel	0.934
2	Brass	0.7 to 0.622
3	Copper	0.862
4	Aluminium	1.147
5	Zink	0.61

(The velocities have been taken from H. EBERT (1951))

6. Conclusions

The above mentioned experiments lead to the following conclusions:

1. The Ω -waves are probably some type of surface-waves, whose velocity is independent of the material. 2. The Ω -waves become diffused or even disappear, when a thin layer of wax covers the electrode. 3. The Ω -waves are very prominent as compared to the corresponding spherical waves. 4. The velocity of Ω -waves is variable and decreases with distance. Fig. 9 shows the decrease of velocity (deceleration) over a distance of 4 cm along a tungsten electrode. The velocity drops from 3500 m/sec at the point of excitation to 2500 m/sec at a distance of 4 cm along the electrode. 5. The Ω -waves are not tangential to the corresponding spherical wave. 6. The Ω -waves are accompanied by head-waves.

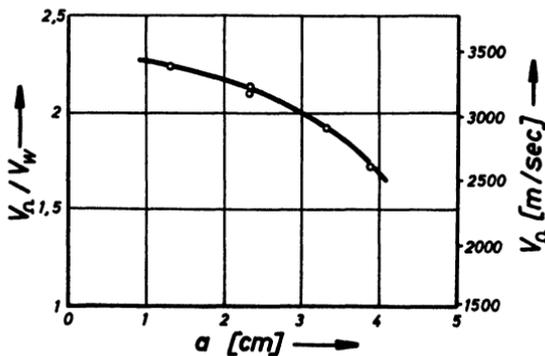


Fig. 9: Decrease in velocity of Ω -waves versus distance along a tungsten electrode of 0.2 cm diameter.

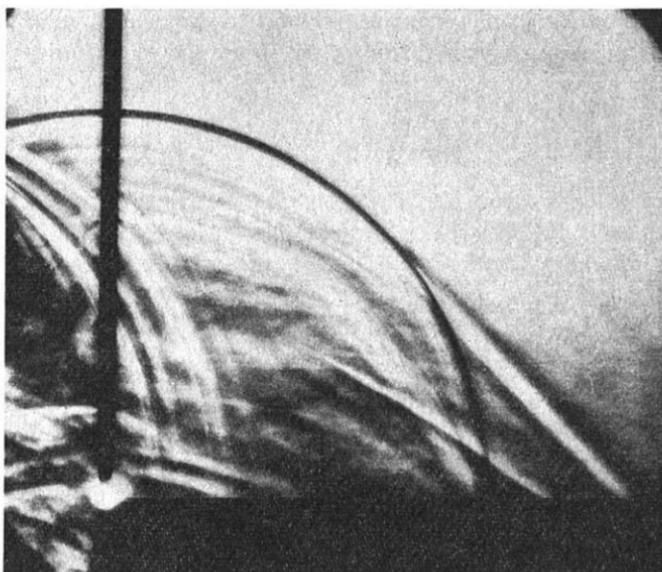


Fig.10: Wave fronts in the vicinity of a wire electrode. On the left lies a reflector. The reflected spherical wave front without any deformation rules out the presence of a temperature gradient in water.

An explanation of points 4 and 5 has been proposed on the basis of a temperature-gradient. It was supposed that the exciting spark produced a temperature gradient in the water around the point of excitation. Because of this gradient the longitudinal wave produced in the electrode, through the secondary excitation would appear to travel with a variable velocity.

Fig. 10 contradicts the hypothesis of temperature gradient: In this schlieren picture the reflected spherical wave and the Ω -wave are photographed side by side. In the presence of a temperature gradient one would expect a distortion of the reflected wave, but obviously there is none.

The observations mentioned above are based on preliminary results. With the data at hand the real physical cause of the origin and mode of propagation of Ω -waves cannot be formulated as yet.

7. Cylindrical Wave fronts

In the lower half of the schlieren picture for an electrode of graphite (Fig. 8), two wave fronts parallel to each other and parallel to the graphite electrode are observed. They represent a cylindrical wave front around the graphite electrode. If interpreted as head waves they would correspond to an infinite velocity. The explanation for this interesting phenomenon is that a graphite electrode, which offers more resistance than

a metallic electrode, expands instantaneously due to the production of Joule's heat. This provides an interesting possibility for the generation of cylindrical wave fronts in model seismics.

Acknowledgement

I am indebted to Professor Dr. G. ANGENHEISTER, Privatdozent Dr. O. FÖRTSCH and Privatdozent Dr. K. HELBIG for helpful discussion and criticism. I wish to thank to Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) for financial support.

References

- AZIZ UR RAHMAN, 1963, Untersuchung der Ausbreitung von Wellen in Modellen der Erde und in Modellen geologischer Körper mit der Methode der Schlierenoptik. Doctorate thesis submitted to Naturwissenschaftlichen Fakultät, Ludwig-Maximilians-Universität, München.
- EBERT, H.: 1951, Physikalisches Taschenbuch. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- SCHARDIN, H.: 1942, Schlierenverfahren, Grundlagen für seine genaue Anwendung und quantitative Auswertung. V.D.I. Forschungsheft. 367 VDI Verlag Berlin.

Zur Theorie der endlichen elastischen Verschiebungen und ihre Anwendung auf isotrope elastische Körper, die unter beliebigen Anfangsverzerrungen stehen

Von W. KUHN, Potsdam¹⁾

Eingegangen am 11. Oktober 1963, in überarbeiteter Form am 21. September 1964

Zusammenfassung: Auf der Grundlage der nichtlinearen Elastizitätstheorie wird allgemein die Überlagerung zweier Verformungen diskutiert und unter Beschränkung auf lineare zweite Verzerrungen, wie sie für die Geophysik von Bedeutung sind, wird eine Spannungs-Dehnungs-Relation abgeleitet. Das innere Spannungsfeld der zusätzlichen Verformung ist eine lineare Tensorfunktion der Verschiebungsableitungen. Der nur von der Anfangsverformung abhängige Koeffiziententensor vierter Stufe wird für beliebige und spezielle Anfangsdeformationen untersucht. Die den deformierten Körper beschreibenden Elastizitätsgrößen werden als Funktion der Komponenten dieses Tensors berechnet.

Summary: A general discussion of the superposition of two deformations based upon the fundamentals of the non-linear elastic theory is presented. Restricted on linear second strains which are of some importance in geophysics, a stress strain relationship is derived. The internal stress field of the second strain is a linear tensor function of the displacement gradient. The fourth-order tensor of the coefficients depends only upon the first deformation which is discussed first for a general deformation and then for a few special cases. Finally, relations are derived between bulk modulus, YOUNG'S modulus, POISSON'S ratio, etc. and the components of the fourth-order tensor for any first deformation.

Bei einigen Problemen in der Geophysik hat sich ein Zweig der Kontinuumsmechanik, nämlich die Theorie der endlichen elastischen Verschiebungen, als fruchtbar für die weiteren Untersuchungen erwiesen. Zwei Problemkreise stehen dabei im Vordergrund:

A. Die Theorie der endlichen elastischen Verschiebungen als Naturzustandstheorie wird in erster Linie dazu benutzt, um für das Material in den einzelnen homogenen Erdschichten eine Zustandsgleichung zu finden, in der neben anderen Parametern eine Beziehung zwischen Druck und Dichte gegeben ist. Bei Kenntnis einer solchen Relation besonders für hohe Drucke ist es möglich, Rückschlüsse auf die chemische Zusammensetzung zu ziehen und vor allem darüber zu entscheiden, welche Parameter

¹⁾ Dr. WALTER KUHN, Pädagogische Hochschule Potsdam.

den entstehenden Einfluß auf die Dichteänderung haben. Die nichtlineare Theorie kann die Lücke zwischen der Behandlung des festen Körpers mit dem HOOKESchen Gesetz (für isotrope und anisotrope Körper) als klassische Theorie und den atomphysikalischen (statistischen) Modellen von THOMAS, FERMI und DIRAC, in denen die Kristallstrukturen völlig verlorengegangen sind, schließen. Wesentliche Unterstützung dabei leisten die experimentellen Befunde der Physik der hohen und höchsten Drucke [1]. Leider können aber aus diesen Daten keine detaillierten Schlüsse auf die elastischen Konstanten höherer als zweiter Ordnung gezogen werden. Die Ergebnisse können höchstens zu globalen Abschätzungen der elastischen Konstanten dritter Ordnung verwendet werden.

B. Die Erweiterung der nichtlinearen Elastizitätstheorie von der Naturzustandstheorie auf solche Körper, deren Ausgangszustand nicht mehr spannungsfrei ist. Baut man diese Theorie auf der bisherigen Theorie der endlichen elastischen Verschiebungen auf, dann läuft das darauf hinaus, wie eine Überlagerung zweier Deformationen im selben Körper vorgenommen werden kann und in welcher Art und mit welchen Mitteln die gegenseitige Beeinflussung erfaßt werden kann. Diese Aufgabe ist für die Seismik von Bedeutung. Hierbei handelt es sich um elastische Wellen, die sich in einem vorgespannten Medium ausbreiten. Für die Auswertung der Ergebnisse der seismischen Beobachtungen zur Analyse der Struktur des Erdinnern ist die theoretische Aussage wichtig, welchen Einfluß die Vorbelastung auf die Kenndaten der elastischen Wellen hat. Gegebenenfalls lassen sich dann umgekehrt Rückschlüsse auf die Vorspannung ziehen. Dazu ist es zunächst notwendig, Spannungs-Dehnungs-Relationen aufzustellen, in denen Parameter auftreten, die eindeutig durch Art und Größe der Vorbelastung bestimmt sind. Von F. BIRCH und Y. SHIMAZU [2] liegen hierzu bereits zwei Ansätze für spezielle Anfangsverzerrungen vor. In dem folgenden Abschnitt II wird eine Spannungs-Dehnungs-Relation abgeleitet und diskutiert, die für beliebige (nach Art und Größe) Anfangsverformungen und lineare zweite Verformungen gültig ist.

1. Grundlagen der nichtlinearen Elastizitätstheorie

In diesem Abschnitt werden die in der Literatur [3] bekannten Formeln der nichtlinearen Elastizitätstheorie zusammengestellt, weil auf sie mehrfach Bezug genommen wird und dabei die benutzte Symbolik angezeigt werden soll.

Für die Quadrate der Linienelemente infinitesimal benachbarter Punkte des deformierbaren Körpers (= physikalisches Kontinuum) im unverformten und verformten Zustand erhält man in Körperkoordinaten

$$d\overset{\circ}{s}^2 = \overset{\circ}{g}_{ij}dq^i dq^j, \quad ds^2 = g_{mn}dq^m dq^n. \quad (1.1)$$

Mit (g_{ij}) wird der metrische Fundamentaltensor bezeichnet, Der Index „0“ weist auf Größen hin, die in der Metrik des unverformten Körpers zu berechnen sind.

Über zwei Indizes, die in einem Produkt einmal unten und einmal oben auftreten, ist von 1 bis 3 zu summieren.

Der *Verzerrungstensor* wird definiert durch

$$2 e_{ij} = 2 \dot{e}_{ij} = g_{ij} - \dot{g}_{ij}. \quad (1.2)$$

Das System der Zahlen e_{ij} ist — wie der metrische Fundamentaltensor — ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Aus der Definitionsgleichung ist zu ersehen, daß die Komponenten des Verzerrungstensors in den beiden Metriken gleich sind, falls die rein kovariante Darstellung benutzt wird. Beim Übergang zur gemischten Darstellung ist darauf zu achten, daß

$$\dot{e}_j^k = \frac{1}{2} (g_{ij} \dot{g}^{ik} - \delta_j^k) \quad (1.3)$$

und

$$e_j^k = \frac{1}{2} (\delta_j^k - \dot{g}_{ij} g^{ik}) \quad (1.4)$$

unterschiedliche Komponenten sind, die einmal durch Überschieben mit \dot{g}^{ik} und zum anderen durch \dot{g}_j^k entstehen. δ_j^k ist das Kroneckersymbol.

In vielen Fällen ist es möglich und auch zweckmäßig, die Verschiebung der Körperpunkte durch ein geeignetes Vektorfeld zu erfassen. Bezeichnet man die Positionsvektoren der bei einer Verschiebung zueinander gehörenden Punkte \dot{P} und P mit $\dot{\mathbf{r}}$ und \mathbf{r} , dann erhält man für den *Verschiebungsvektor* $\overrightarrow{P\dot{P}} = \mathbf{v} = \mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}}$. Die Basisvektoren für den unverformten und verformten Körper in Körperkoordinaten werden definiert durch [4]

$$\dot{e}_v = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q^v} \quad \text{und} \quad e_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^v}. \quad (1.5)$$

Beachtet man nun, daß $\dot{g}_{ij} = (\dot{e}_i, \dot{e}_j)$ und entsprechend $g_{ij} = (e_i, e_j)$ ist, und wird die kovariante Ableitung in der Metrik des unverformten und verformten Körpers mit „|“ bzw. „||“ bezeichnet, dann erhält man die beiden Beziehungen zwischen den Komponenten des Verschiebungsvektors und Verzerrungstensors in den beiden Metriken

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{v}_i|_j + \dot{v}_j|_i + \dot{v}_n|_i \dot{v}^n|_j) \quad (1.6)$$

bzw.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (v_i||_j + v_j||_i - v_n||_i v^n||_j). \quad (1.7)$$

Weiter erhält man die *Kompatibilitätsbedingungen* (ausgedrückt durch die Komponenten des Verschiebungsvektors) in der Form

$$\hat{v}^\pi|_{\mu\lambda\nu} - \hat{v}^\pi|_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (1.8)$$

bzw. (ausgedrückt durch die Komponenten des Verzerrungstensors)

$$\begin{aligned} \hat{e}^\pi|_{\mu\nu} - \hat{e}^\pi|_{\nu\mu} + \hat{e}_{\mu\nu}|\lambda^\pi - \hat{e}_{\mu\lambda}|\nu^\pi + (\hat{e}_\mu|\lambda + \hat{e}_\lambda|\mu + \hat{e}_{\mu\lambda}|\sigma)(\delta_\sigma^\rho + 2\hat{e}_\sigma^\rho)^{-1}(\hat{e}_\rho^\pi|_\nu - \hat{e}_\rho^\pi|_\nu - \hat{e}_{\rho\nu}|\pi) \\ - (\hat{e}_\sigma^\rho|_\nu + \hat{e}_\nu^\sigma|_\mu + \hat{e}_{\mu\nu}|\sigma)(\delta_\sigma^\rho + 2\hat{e}_\sigma^\rho)^{-1}(\hat{e}_\lambda^\pi|_\rho - \hat{e}_\rho^\pi|_\lambda - \hat{e}_{\rho\lambda}|\pi) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

bzw. (durch Verzerrungen und Verschiebungen ausgedrückt)

$$\hat{e}_{\tau\lambda}|\mu\nu - \hat{e}_{\tau\nu}|\mu\lambda + \hat{e}_{\mu\nu}|\tau\lambda - \hat{e}_{\mu\lambda}|\tau\nu + \hat{v}_\sigma|\tau\lambda\hat{v}^\sigma|_{\mu\nu} - \hat{v}_\sigma|\tau\nu\hat{v}^\sigma|_{\mu\lambda} = 0. \quad (1.10)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetriebeziehungen des RIEMANN-Tensors, der die Gestalt dieser Bedingungen bestimmt, und der BIANCHI-Identitäten [4] sind (1.8), (1.9) oder (1.10) jeweils drei voneinander unabhängige Gleichungen.

Ein weiterer Erfahrungssatz in der Theorie der deformierbaren Körper ist der Satz von der Erhaltung der Masse. Wird mit ϱ die Dichte und mit V das Volumen bezeichnet, dann läßt sich der Satz von der Erhaltung der Masse für ein Volumenelement formulieren:

$$\varrho_0 dV_0 = \varrho dV \quad (1.11)$$

oder

$$\varrho_0 \sqrt{\hat{g}} = \varrho \sqrt{g}, \quad (1.12)$$

wo $g = \text{Det}(g_{ij})$ ist.

Formuliert man den Satz von der Erhaltung der Masse mit den Verzerrungsgrößen, so erhält man

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{[1 + 2\hat{J}_1 + 4\hat{J}_2 + 8\hat{J}_3]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.13)$$

bzw.

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = [1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.14)$$

Darin sind J_1 , J_2 und J_3 die Tensorinvarianten des Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} J_1 &= e_1^1 + e_2^2 + e_3^3, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} e_2^2 & e_3^2 \\ e_2^3 & e_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1^1 & e_3^1 \\ e_1^3 & e_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{vmatrix}, \\ J_3 &= \det(e_j^i) = |e_j^i|. \end{aligned} \quad (1.15)$$

\hat{J}_1 , \hat{J}_2 und \hat{J}_3 werden entsprechend mit (1.3) berechnet.

Für einen materiellen Körper postuliert man in der phänomenologischen Theorie ein *inneres Spannungsfeld*. Es existiert dann in jedem inneren Punkt des Körpers ein Spannungstensor (τ_{ij}) , der symmetrisch ist.

Das spezifische Verhalten eines Körpers unter dem Einfluß einer äußeren Belastung wird durch die Beziehungen zwischen dem Spannungs- und Verzerrungstensor erfaßt (*Materialgleichung*). Für einen isotropen Körper gilt

$$\tau = k_0 I + k_1 e + k_2 e^2. \quad (1.16)$$

Hier sind die Koeffizienten k_0, k_1, k_2 skalare analytische Funktionen der Tensorinvarianten J_1, J_2, J_3 des Tensors e . Die Hauptachsen von e und τ stimmen überein, außerdem fallen die Hauptdehnungsrichtungen mit den Hauptspannungsrichtungen zusammen.

Es ist ferner üblich, den vollkommen elastischen Körper dadurch zu definieren, daß für ihn eine skalare Funktion (elastisches Potential, spezifische Energiedichte)

$$E = E(e_{ij})$$

der Verzerrungen existiert mit der Eigenschaft

$$\tau^{\mu\nu} = \varrho \frac{\partial E}{\partial e_{\mu\nu}}. \quad (1.17)$$

Wenn außerdem Isotropie vorliegt, dann ist das elastische Potential eine Funktion der Invarianten des Verzerrungstensors. Mit ϱ_0 als der Dichte des unverformten Körpers und mit $W = \varrho_0 E$ wird (1.17)

$$\tau_v^\mu = \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{\partial W}{\partial e_\mu^v} \quad (1.18)$$

oder

$$\tau_v^\mu = \frac{\varrho}{\varrho_0} \{k_0 \delta_v^\mu + k_1 e_v^\mu + k_2 e_i^\mu e_v^i\}. \quad (1.19)$$

Genau in dem Fall des *isotropen elastischen Körpers* bestehen zwischen den Koeffizienten k_i und dem elastischen Potential W folgende Relationen:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_1 \frac{\partial W}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial W}{\partial J_3}, \\ k_1 &= -\frac{\partial W}{\partial J_2} - J_1 \frac{\partial W}{\partial J_3}, \\ k_2 &= \frac{\partial W}{\partial J_3}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Häufig ist das elastische Potential für einen Körper nicht bekannt. Deshalb benutzt man bei isotropen elastischen Körpern eine Potenzreihenentwicklung des elastischen Potentials nach den Tensorinvarianten

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} J_1^2 - 2\mu J_2 + l_1 J_1^3 + l_2 J_1 J_2 + l_3 J_3 + m_1 J_1^4 + m_2 J_1^2 J_2 + m_3 J_2^2 + m_4 J_1 J_3 + \dots \quad (1.21)$$

Aus der Definitionsgleichung der Tensorinvarianten ist zu ersehen, daß J_1 eine lineare homogene Funktion der Elemente des Verzerrungstensors, J_2 eine lineare homogene Funktion der Quadrate und J_3 eine lineare homogene Funktion der dritten Potenzen der Elemente des Verzerrungstensors ist. Somit ist also (1.21) eine Potenzreihenentwicklung nach den Elementen des Verzerrungstensors. Die Reihenentwicklung beginnt mit den quadratischen Gliedern. Auf das lineare Glied und auf eine additive Konstante konnte im Ansatz (1.21) verzichtet werden, da erstens in die Spannungsverzerrungsbeziehungen nur die Ableitungen von W eingehen und zweitens eine dabei auftretende additive Konstante eine für den ganzen Körper geltende (additive) konstante Spannung liefern würde, was physikalisch uninteressant ist.

In (1.21) sind λ und μ mit den Quadraten der Verzerrungen, l_1 , l_2 und l_3 mit den dritten Potenzen der Verzerrungen verknüpft usw. Danach richtet sich die Bezeichnung „elastische Konstanten zweiter Ordnung“, „elastische Konstanten dritter Ordnung“ usw.

Die lineare Elastizitätstheorie beschränkt sich in dem Ansatz für W auf die quadratischen Glieder *und* auf lineare Beziehungen zwischen den Verzerrungen und Verschiebungsableitungen. Beide Voraussetzungen sind hinreichend für die Linearität sämtlicher auftretenden Gleichungen.

2. Der elastische Körper unter Anfangsverzerrungen

1. Allgemeine Grundlagen und das Verschiebungsfeld für beliebige erste und zweite Verformungen

In dem Kapitel I wurden die Grundgleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie für den Fall abgeleitet, daß der Ausgangszustand spannungsfrei ist. Bei der Anwendung dieser Theorie auf Probleme der Geophysik ist es aber gerade notwendig, nichtspannungsfreie Ausgangszustände zu betrachten. Ein Beispiel dafür ist die Ausbreitung elastischer Wellen im Erdinnern, wo ein mit der Tiefe zunehmender Anfangsdruck vorliegt.

Ziel dieses Kapitels ist es, die bisherige „Naturzustandstheorie“, bei der der Ausgangszustand der spannungsfreie Naturzustand ist, auf solche Probleme zu erweitern, die man kurz unter dem Titel „Elastizitätstheorie für vorbelastete Medien“ zusammenfassen kann.

Die bisherigen Ergebnisse dürfen nur dann übernommen werden, wenn am Beginn der Kette der Zustände, die der materielle Körper zu durchlaufen hat, der spannungsfreie Naturzustand vorliegt. Man kann sich die Vorbelastung eines Körpers aus dem spannungsfreien Ausgangszustand entstanden denken. Die Vorbelastung soll *erste* oder *Anfangsverformung* genannt werden. Zu untersuchen ist nun, wie sich der materielle Körper unter einer weiteren zweiten Belastung verhält. Der Endzustand des Körpers nach der zweiten Verformung wird also aus dem spannungsfreien Ausgangszustand über den Zwischenzustand, in dem sich der Körper nach der ersten Verformung befindet, erreicht.

Wenn die in dem ersten Kapitel aufgestellten Beziehungen übernommen werden sollen, dann ist besonders darauf zu achten, daß sie jetzt auf die Gesamtspannung und Gesamtverzerrung angewendet werden, also auf diejenigen Größen, die erste und zweite Verformung gemeinsam berücksichtigen.

Nun interessieren aber in den meisten praktischen Fällen nicht die Relationen zwischen diesen Größen, sondern lediglich die Beziehungen, die die zweite Verformung allein betreffen. In dem angeführten Beispiel sind das die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen, die allein die Grundlage für die Ableitung der Wellengleichung der elastischen Wellen im Erdinnern sind. Es ist demnach die Aufgabe zu lösen, die Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung für die zweite Verformung in Abhängigkeit von der Vorbelastung aufzustellen.

Da auch im folgenden die Beschränkung auf isotrope Körper im wesentlichen beibehalten werden soll, ist nun zu erläutern, was hier unter dem Begriff „isotrop“ zu verstehen ist. Nun ist es möglich, daß infolge der Vorbelastung viele Eigenschaften des Körpers, die mit dem Begriff „isotrop“ verbunden sind, verlorengehen können. Beschränkung auf isotrope Körper soll jetzt heißen, daß die Spannungs-Verzerrungs-Relation, die die *Gesamtspannung* und *Gesamtverzerrung* enthält, eine isotrope Tensorfunktion sein soll. Dabei wird aber über die Art der Beziehungen zwischen den zweiten Verzerrungen und Spannungen nichts ausgesagt, und es sollen diesbezüglich auch keine weiteren Einschränkungen auferlegt werden.

Weiter ist die Frage wichtig, wie sich die Gesamtverzerrung (Gesamtspannung) aus den Einzelverzerrungen (Einzelspannungen) zusammensetzt. Hierbei handelt es sich um die Verknüpfung von Tensorfeldern. Naheliegend ist die Annahme, daß sich der Verzerrungstensor für die Gesamtverzerrung linear aus den beiden Verzerrungstensoren für die erste und zweite Verzerrung ergibt, so wie es in jeder linearen Theorie üblich ist. Ohne auf diese wichtige Frage näher einzugehen, haben BIRCH [1], SHIMAZU [2] und die darauf aufbauenden Arbeiten anderer Autoren diese Annahme ihren weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, bedeutet diese Annahme eine zusätzliche, sehr wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

Abgesehen von den im ersten Kapitel gemachten Einschränkungen kann die Verformung eines Körpers vollständig durch das Verschiebungsfeld v erfaßt werden. Da es sich dabei um ein Vektorfeld handelt, darf wegen seiner Linearität die Gesamt-

verschiebung ${}^{(g)}v$ aus den beiden Einzelverschiebungen ${}^{(1)}v$ und v , die die erste und zweite Verformung erfassen, zusammengesetzt werden:

$${}^{(g)}v = {}^{(1)}v + v. \quad (2.1)$$

Darin ist

$${}^{(1)}v = \overset{\circ}{r} - \overset{\circ}{t}, \quad v = r - \overset{1}{t}, \quad {}^{(g)}v = r - \overset{\circ}{t}. \quad (2.2)$$

Dabei geht der Punkt $\overset{\circ}{P}$ durch die Anfangsdeformation in $\overset{1}{P}$ und durch die zweite Verschiebung in P über. Die zugehörigen Positionsvektoren sind mit $\overset{\circ}{r}$, $\overset{1}{t}$ und r bezeichnet.

Unter Benutzung der Körperkoordinaten werden die Basisvektoren in den drei möglichen Systemen definiert durch

$$\overset{\circ}{e}_v = \frac{\partial \overset{\circ}{r}}{\partial q^v}, \quad \overset{1}{e}_v = \frac{\partial \overset{1}{t}}{\partial q^v}, \quad e_v = \frac{\partial r}{\partial q^v}. \quad (2.3)$$

Damit läßt sich die Gesamtverschiebung

$${}^{(g)}v = {}^{(g)}v^v \overset{\circ}{e}_v = {}^{(g)}v^x \overset{1}{e}_x = {}^{(g)}v^\mu e_\mu, \quad (2.4)$$

die Anfangsverschiebung

$${}^{(1)}v = {}^{(1)}v^v \overset{\circ}{e}_v = {}^{(1)}v^x \overset{1}{e}_x = {}^{(1)}v^\mu e_\mu \quad (2.5)$$

und die zusätzliche Verschiebung

$$v = \overset{\circ}{v}^v \overset{\circ}{e}_v = \overset{1}{v}^x \overset{1}{e}_x = v^x e_\mu \quad (2.6)$$

schreiben. Die metrischen Fundamentaltensoren in den drei Basissystemen sind:

$$\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = (\overset{\circ}{e}_\mu, \overset{\circ}{e}_\nu), \quad \overset{1}{g}_{\mu\nu} = (\overset{1}{e}_\mu, \overset{1}{e}_\nu), \quad g_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu). \quad (2.7)$$

Zwischen den Basisvektoren bestehen folgende Beziehungen:

$$\overset{\circ}{e}_v = (\delta_v^x - {}^{(g)}v^x | | | | |) e_x, \quad e_v = (\delta_v^x + {}^{(g)}v^x | | | | |) \overset{\circ}{e}_x, \quad (2.8)$$

$$\overset{1}{e}_v = (\delta_v^x - v^x | | | | |) e_x, \quad e_v = (\delta_v^x + v^x | | | | |) \overset{1}{e}_x, \quad (2.9)$$

$$\overset{\circ}{e}_v = (\delta_v^x - {}^{(1)}v^x | | | | |) \overset{1}{e}_x, \quad \overset{1}{e}_v = (\delta_v^x + {}^{(1)}v^x | | | | |) \overset{\circ}{e}_x. \quad (2.10)$$

Die kovarianten Ableitungen in den Metriken des Ausgangs-, Zwischen- und Endsystems wurden mit bzw. „|“, „||“, „|||“ bezeichnet.

Zwischen den Komponenten der Verschiebungsableitungen lassen sich folgende Beziehungen herleiten:

$${}^{(g)}\hat{v}^\mu|_v = {}^{(g)}v^\times \parallel_v (\delta_x^\mu + {}^{(g)}\hat{v}^\mu|_x), \quad {}^{(g)}v^\mu \parallel_v = {}^{(g)}\hat{v}^\mu|_x (\delta_v^\times - {}^{(g)}\hat{v}^\times \parallel_v), \quad (2.11)$$

$$\hat{v}^\mu \parallel_v = v^\times \parallel_v (\delta_x^\mu + \hat{v}^\mu|_x), \quad v^\mu \parallel_v = \hat{v}^\mu|_x (\delta_v^\times - v^\times \parallel_v), \quad (2.12)$$

$${}^{(1)}\hat{v}^\mu|_v = {}^{(1)}\hat{v}^\times \parallel_v (\delta_x^\mu + {}^{(1)}\hat{v}^\mu|_x), \quad {}^{(1)}\hat{v}^\mu \parallel_v = {}^{(1)}\hat{v}^\mu|_x (\delta_v^\times - {}^{(1)}\hat{v}^\times \parallel_v), \quad (2.13)$$

$${}^{(1)}\hat{v}^\nu \parallel_\lambda = {}^{(1)}v^\times \parallel_\lambda (\delta_x^\nu + \hat{v}^\nu|_x), \quad {}^{(1)}v^\nu \parallel_\lambda = {}^{(1)}\hat{v}^\times \parallel_v (\delta_x^\nu - v^\nu \parallel_x). \quad (2.14)$$

Aus (2.12) folgt eine wichtige Beziehung für den Spezialfall einer *linearen zweiten Verformung*. Es gilt dann:

$$v^\mu \parallel_x = \hat{v}^\mu \parallel_x. \quad (2.15)$$

2. Der Verzerrungstensor und die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen für Körper unter beliebigen ersten und zweiten Verzerrungen

Mit Hilfe der Verschiebungsableitungen ist man nun in der Lage, den Verzerrungstensor nach (1.7) anzugeben

$$2 {}^{(g)}\hat{e}_{ij} = {}^{(1)}\hat{v}_i|_j + {}^{(1)}\hat{v}_j|_i + {}^{(1)}\hat{v}_n|i {}^{(1)}\hat{v}^n|_j + \hat{v}_i|_j + \hat{v}_j|_i + \hat{v}_n|i \hat{v}^n|_j + {}^{(1)}\hat{v}_n|i \hat{v}^n|_j + \hat{v}_n|i {}^{(1)}\hat{v}^n|_j,$$

wofür abkürzend

$$2 {}^{(g)}\hat{e}_{ij} = 2 \hat{a}_{ij} + 2 \hat{e}_{ij} + 2 \hat{u}_{ij} \quad (2.16)$$

gesetzt wird. Es ist also neben den bekannten Definitionsgleichungen des Verzerrungstensors ein Tensor \mathbf{u}

$$2 \hat{u}_{ij} = {}^{(1)}\hat{v}_n|i \hat{v}^n|_j + \hat{v}_n|i {}^{(1)}\hat{v}^n|_j \quad (2.17)$$

mit der Eigenschaft

$$\hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ji} \quad (2.18)$$

eingeführt worden.

Leitet man (2.16) über die metrischen Fundamentaltensoren ab, dann ist diese Zerlegung nicht unmittelbar zu sehen. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} {}^{(g)}\hat{e}_{ij} &= \frac{1}{2} (g_{ij} - \hat{g}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (g_{ij} - \hat{g}_{ij}) + \frac{1}{2} (\hat{g}_{ij} - \hat{g}_{ij}) \\ &= \hat{w}_{ij} + \hat{a}_{ij}. \end{aligned}$$

Hier wurde aber die Naturzustandstheorie auf einen Fall angewendet, bei dem der Ausgangszustand nicht mehr spannungsfrei ist. \hat{w}_{ij} ist nicht nur allein von der zweiten Verformung, sondern auch von der ersten abhängig. Der Vergleich mit (2.16) zeigt, daß

$$\hat{w}_{ij} = \hat{e}_{ij} + \hat{u}_{ij}$$

ist.

Nach Gl. (2.16) setzt sich die Gesamtverzerrung linear aus drei Anteilen zusammen: \hat{a}_{ij} , \hat{e}_{ij} und \hat{u}_{ij} . \hat{a}_{ij} ist die Anfangsverformung bei verschwindender zweiter Verformung, \hat{e}_{ij} ist die zweite Verzerrung bei verschwindender erster, und \hat{u}_{ij} ist der Verzerrungsanteil, der die gegenseitige Beeinflussung der Einzelverformungen erfaßt. \hat{u}_{ij} hängt nämlich von den Verschiebungsvektoren der ersten und zweiten Verformung ab.

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, die Gesamtverzerrung in zwei Anteile zu zerlegen, und zwar so, daß beispielsweise \hat{e}_{ij} und \hat{u}_{ij} zu einem Verzerrungsanteil zusammengefaßt werden. Die Summe beider sei als *zusätzlicher* Verzerrungsanteil verzeichnet. Er enthält neben der zweiten Verformung noch Verschiebungsableitungen der ersten Verformung. Spaltet man von der Gesamtverzerrung die ungestörte Einzelverzerrung der ersten Verformung ab, dann können in der zusätzlichen Verformung die Verschiebungsableitungen der Anfangsverformung als Parameter aufgefaßt werden. Die zusätzliche Verzerrung ist also dann abhängig von der speziellen Art der ersten Verzerrung. Eine solche Zerlegung ist prinzipiell natürlich willkürlich, denn man hätte ebensogut auch die Komponenten \hat{u}_{ij} mit der ungestörten ersten Verzerrung zusammenziehen können. Dann würde eine Rückwirkung der zweiten Verformung auf die erste vorliegen. Der erste Weg ist jedoch dann sinnvoll, wenn die ungestörten zweiten Verzerrungskomponenten klein sind gegenüber den ersten Verzerrungskomponenten, wie das zum Beispiel bei infinitesimalen zweiten und endlichen ersten Verschiebungsableitungen der Fall ist. Hier interessiert dann in erster Linie die Abhängigkeit der infinitesimalen zweiten Verformung von der endlichen ersten und nicht umgekehrt.

Die gleichen Überlegungen betreffen die Zerlegung der Gesamtspannung in Einzelspannungen. An dem Beispiel des Verzerrungstensors sind die Verhältnisse, deren Ursache die Nichtlinearität zwischen Verzerrungen und Verschiebungsableitungen ist, leichter zu klären.

In der Literatur [1, 2] wird das Glied \hat{u}_{ij} ohne eingehende Untersuchung vernachlässigt. Meistens wird die Gesamtverzerrung linear aus den Einzelverzerrungen zusammengesetzt. \hat{u}_{ij} enthält die Verschiebungsableitungen der ersten und zweiten Verformung in Form von Produkten, wobei keine linearen Glieder auftreten. Der Tensor \mathbf{u} kann gegenüber den anderen beiden Tensoren \mathbf{a} und \mathbf{e} nur dann vernachlässigt werden, wenn für jede Komponente sowohl (in den nächsten vier Formelzeilen haben die senkrechten Doppelstriche die Bedeutung der Beträge der Größen)

$$\|\hat{u}_{ij}\| \ll \|\hat{a}_{ij}\| \quad (2.19 \text{ a})$$

als auch

$$\|\hat{u}_{ij}\| \ll \|\hat{e}_{ij}\| \quad (2.19 \text{ b})$$

ist. Daß diese beiden Beziehungen gleichzeitig erfüllt sein müssen und die Bedingung

$$\|\hat{u}_{ij}\| \ll \|\hat{a}_{ij} + \hat{e}_{ij}\|$$

allein nicht genügt, ergibt sich aus der Beibehaltung des Gliedes \hat{e}_{ij} . Will man nicht auf die zweite Verformung ganz verzichten, dann muß bei einer Vernachlässigung des Tensors \hat{u}_{ij} gegenüber \hat{e}_{ij} sein Einfluß auf die Gesamtverzerrung noch wesentlich kleiner sein als der durch \hat{e}_{ij} erfaßte Anteil.

Wie man aus (2.16) ersehen kann, enthalten \hat{a}_{ij} und \hat{e}_{ij} auch quadratische Glieder in den Verschiebungsableitungen. Eine notwendige Bedingung für die lineare Theorie ist die Vernachlässigung dieser quadratischen Anteile im Verzerrungstensor gegenüber den linearen. Setzt man voraus, daß sowohl für die erste als auch für die zweite Verzerrung die lineare Betrachtungsweise genügt, dann sind die Ungleichungen (2.19) erfüllt und es gilt:

„Die Gesamtverzerrung setzt sich in der linearen Theorie additiv aus den ungestörten Einzelverzerrungen zusammen.“

In diesem Falle liegt also keine gegenseitige Beeinflussung der Einzelverzerrungen vor.

In dem bereits angeführten Beispiel der Untersuchung der elastischen Wellen im Erdinnern liegen die Verhältnisse anders. Hier ist die erste Verformung durch den im Innern der Erde vorherrschenden großen statischen Druck gegeben, und als zweite Verformung soll die mit der Wellenausbreitung gekoppelte elastische Verformung angesehen werden. Es ist dann

$$\|\hat{v}_{i|j}\| \ll \|\hat{v}_{i|j}^{(1)}\|$$

und in \hat{e}_{ij} können die quadratischen Anteile vernachlässigt werden, nicht aber in \hat{a}_{ij} . Kann in diesem Falle auch auf die Komponenten \hat{u}_{ij} verzichtet werden? Man beachtet zur Beantwortung dieser Frage, daß zwar \hat{u}_{ij} nur quadratische Glieder enthält, aber nicht Produkte von den zweiten Verschiebungsableitungen allein, sondern Produkte mit der ersten Verschiebungsableitung in der ersten Potenz. Es kann also von vornherein sicher nicht angenommen werden, daß der Einfluß von \hat{u}_{ij} im Vergleich zu \hat{e}_{ij} vernachlässigbar klein ist. (2.19b) wird i. a. nicht erfüllt sein. Die Komponenten von \hat{u} sind im Gesamtverzerrungstensor zu berücksichtigen.

Bezogen auf die Metrik des verformten Körpers erhält man aus einem (2.16) analogen Rechengang den Verzerrungstensor in der Gestalt

$${}^{(g)}e_{ij} = a_{ij} + e_{ij} + u_{ij}, \quad (2.20)$$

wobei

$$2u_{ij} = -{}^{(1)}v_n \parallel_i v^n \parallel_j - v_n \parallel_i {}^{(1)}v^n \parallel_j \quad (2.21)$$

gesetzt wurde.

Die gemischten Darstellungen ergeben sich durch Überschieben mit den metrischen Fundamentaltensoren \hat{g} und \hat{g} .

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen werden nach (1.19) und (1.20)

$$\tau_v^\mu = \frac{\rho}{\rho_0} \{ k_0 \delta_v^\mu + k_1^{(g)} e_v^\mu + k_2^{(g)} e_x^{\mu(g)} e_v^x \} \quad (2.22)$$

mit

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_1 \frac{\partial W}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial W}{\partial J_3}, \\ k_1 &= -\frac{\partial W}{\partial J_2} - J_1 \frac{\partial W}{\partial J_3}, \\ k_2 &= \frac{\partial W}{\partial J_3}. \end{aligned} \quad (2.22 a)$$

Die Tensorinvarianten J_1 , J_2 und J_3 sind jetzt Funktionen der Tensoren a_v^μ , e_v^μ , u_v^μ .

(2.22) ist die Spannungs-Verzerrungs-Relation, wie sie sich aus der Naturzustandstheorie ergibt. Der auf der linken Seite stehende Spannungstensor erfaßt die Gesamtspannung. Um die gegenseitige Beeinflussung der ersten und zweiten Verformung näher charakterisieren zu können, muß also der Spannungstensor zerlegt werden. Das Grundsätzliche dazu wurde bereits im Zusammenhang mit dem Verzerrungstensor ausgeführt. Wegen der dabei auftretenden Willkür in der Art der Zerlegung sind wir gezwungen, folgende Verabredung zu treffen:

Es ist der Einfluß der ersten Verformung auf die zweite Verformung zu untersuchen, wobei grundsätzlich als „erste“ Verformung die ungestörte Anfangsverformung verstanden werden soll.

Als Materialgesetz wird (2.22) zugrunde gelegt, worin also die Isotropie enthalten ist. Die folgenden Ausführungen setzen weiter voraus, daß das elastische Potential in eine Potenzreihe nach den Tensorinvarianten entwickelbar ist.

3. Die lineare Theorie

In der linearen Theorie werden lineare Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung einerseits und Verzerrung und Verschiebungsableitungen andererseits gefordert. Außerdem sind nur die quadratischen Glieder bei der Reihenentwicklung des elastischen Potentials zu berücksichtigen.

Es folgt so aus (2.22)

$$\tau_v^x = \frac{\rho}{\rho_0} \{ \lambda ({}^{(1)}J_1 + {}^{(2)}J_2) \delta_v^x + 2 \mu (a_v^x + e_v^x) \}. \quad (2.23)$$

${}^{(1)}J_1$ hängt nur von der Anfangsverzerrung und ${}^{(2)}J_1$ nur von der zweiten Verzerrung ab. Setzen wir

$$\tau_v^x = {}^{(1)}\tau_v^x + {}^{(2)}\tau_v^x,$$

so ersehen wir, daß sich in der linearen Theorie die Gesamtspannung aus den Teilspannungen additiv zusammensetzt. Eine Beeinflussung der zweiten Verzerrung durch die Anfangsverzerrung ist also *nicht* vorhanden.

4. Beliebige Anfangsverzerrungen nach Art und Betrag bei linearen zweiten Verformungen

Im Hinblick auf die Anwendung der nichtlinearen Elastizitätstheorie auf Probleme der Seismik sollen folgende Voraussetzungen gemacht werden:

- a) Die Gesamtspannung sei eine isotrope Funktion der Gesamtverzerrung,
- b) die zweiten Verzerrungen sollen linear von den Verschiebungsableitungen der zweiten Verformung abhängen und
- c) das elastische Potential sei eine analytische Funktion der Invarianten des Tensors der Gesamtverzerrung.

Über die Anfangsverzerrung wird grundsätzlich keine Voraussetzung gemacht, so daß sie nach Art und Größe beliebig ist. Die Gesamtspannung kann dann in zwei Anteile zerlegt werden, von denen der erste Teil *nur* durch die Anfangsspannung bedingt ist und der zweite Anteil sämtliche Glieder enthält, in denen zweite Verzerrungen auftreten:

$$\tau_{ij} = {}^{(1)}T_{ij} + {}^{(2)}T_{ij}. \quad (2.24)$$

Für den Spannungsanteil ${}^{(1)}T_{ij}$ gelten uneingeschränkt die Spannungs-Verzerrungs-Relationen der Naturzustandstheorie.

Der durch die zweite Verformung bedingte Spannungsanteil ${}^{(2)}T_{ij}$ genügt der Relation

$${}^{(2)}T_{ij} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} F_{ijk}{}^e v^k \Big\|_e. \quad (2.25)$$

Das Dichteverhältnis ϱ_1/ϱ_0 (ϱ_1 = Dichte des Körpers nach der ersten Verformung, ϱ_0 = Dichte im unverformten Ausgangszustand) und die Größen $F_{ijk}{}^l$ sind Funktionen der Verschiebungsableitungen der Anfangsverformung (${}^{(1)}v^k \Big\|_l$). ${}^{(2)}T_{ij}$ ist eine lineare Tensorfunktion der Verschiebungsableitungen der zweiten Verformung. Das System der Zahlen $F_{ijk}{}^l$ bildet einen Tensor vierter Stufe, der eindeutig durch die Anfangsverformung bestimmt wird. Zu seiner Berechnung geht man zweckmäßig in folgenden Schritten vor:

- a) Es ist von der Spannungs-Verzerrungs-Relation (2.22) zwischen Gesamtspannung und Gesamtverzerrung auszugehen. In dieser tritt das Dichteverhältnis ϱ/ϱ_0 mit ϱ als Dichte des Körpers im verformten Endzustand auf. Da die zweite Verzerrung linear sein soll, gilt

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} (1 - {}^{(2)}J_1), \quad (2.26)$$

wo ${}^{(2)}J_1 = \sum_{i=1}^3 e_i^i$ ist. ϱ_1/ϱ_0 ist jetzt nur von den Anfangsverzerrungen a_{ij} abhängig und wird nach (1.14) berechnet.

b) Das elastische Potential W wird in eine Potenzreihe nach den Tensorinvarianten entwickelt. Berücksichtigt man beispielsweise nur die Glieder bis zu den elastischen Konstanten vierter Ordnung, so folgt dafür

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} J_1^2 - 2\mu J_2 + l_1 J_1^3 + l_2 J_1 J_2 + l_3 J_3 + m_1 J_1^4 + m_2 J_1^2 J_2 + m_3 J_2^2 + m_4 J_1 J_3. \quad \dots \quad (2.27)$$

Damit werden die Koeffizienten k_0 , k_1 und k_2 (siehe (2.22))

$$\begin{aligned} k_0 &= \lambda J_1 + (3l_1 + l_3) J_1^2 + (4m_1 + m_2) J_1^3 + (l_2 + l_3) J_2 \\ &\quad + (2m_2 + 2m_3 + m_4) J_1 J_2 + m_4 J_3, \\ k_1 &= 2\mu - (l_2 + l_3) J_1 - (m_2 + m_4) J_1^2 - 2m_3 J_2, \\ k_2 &= l_3 + m_4 J_1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

c) Die hier auftretenden Invarianten des Verzerrungstensors der Gesamtverzerrung sind Funktionen der Einzelverzerrungen und der Komponenten des Tensors \mathbf{u} . Die Tensorinvarianten sind in eine Summe zu zerlegen, in der jedes Glied höchstens linear von den zweiten Verzerrungen bzw. Verschiebungsableitungen (wegen des Tensors \mathbf{u}) abhängt.

Es folgt mit der Abkürzung

$$w_j^i = e_j^i + u_j^i \quad (2.29)$$

für

$$J_1 = {}^{(1)}J_1 + \delta_i^i w_j^i, \quad (2.30)$$

$$J_2 = {}^{(1)}J_2 + M_j^i w_i^j, \quad (2.31)$$

$$J_3 = {}^{(1)}J_3 + A_j^i w_i^j. \quad (2.32)$$

Hier bedeuten

$${}^{(1)}J_1 = \sum_{i=1}^3 a_i^i = \text{Spur } (a_j^i), \quad (2.33)$$

$${}^{(1)}J_2 = \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_i^i, \quad (2.34)$$

$${}^{(1)}J_3 = \text{Det } (a_j^i) \quad (2.35)$$

und \tilde{A}_j^i sind die Adjunkten von (a_j^i) .

Ferner ist

$$(M_j^i) = \begin{pmatrix} (1)J_1 - a_1^1 & -a_2^1 & -a_3^1 \\ -a_1^2 & (1)J_1 - a_2^2 & -a_3^2 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & (1)J_1 - a_3^3 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

und

$$A_j^i = \tilde{A}_i^j. \quad (2.37)$$

Es ist zweckmäßig, einen weiteren Tensor zweiter Stufe zu definieren durch

$$c_n^i = \delta_n^i - (1)v_n \parallel^i. \quad (2.38)$$

c_n^i ist nicht symmetrisch. Mit ihm wird

$$w_j^i = \frac{1}{2} (c_m^i v^m \parallel_j + c_n^j v_n \parallel^i), \quad (2.39)$$

wo

$$c_n^j = g^{nm} c_{mj} = g^{nm} g_{ij} c_m^i$$

ist.

d) Aus (2.22) folgt mit (2.28) unter Beachtung von (2.24) sowie aller in c) angegebenen Beziehungen für den Spannungsanteil

$${}^{(2)}T_v^x = \frac{\varrho_1}{2\varrho_0} (C_v^x \cdot v^n \parallel_j + C_v^x \cdot v_n \parallel^j). \quad (2.40)$$

Es ist

$$\begin{aligned} C_{vn}^x \cdot j = & \delta_v^x \{ \lambda [c_n^j - (1)J_1 \delta_n^j] + (3l_1 + l_2)(1)J_1 [2c_n^j - (1)J_1 \delta_n^j] \\ & + (4m_1 + m_2)(1)J_1^2 [3c_n^j - (1)J_1 \delta_n^j] + (l_2 + l_3) [M_i^j c_n^i - (1)J_2 \delta_n^j] \\ & + (2m_2 + 2m_3 + m_4) [(1)J_1 M_i^j c_n^i + (1)J_2 c_n^j - (1)J_1 (1)J_2 \delta_n^j] \\ & + m_4 [A_i^j c_n^i - (1)J_3 \delta_n^j] \} + 2\mu [c_n^x \delta_v^j + a_v^x \delta_n^j] - (l_2 + l_3) [(1)J_1 c_n^x \delta_v^j \\ & + a_v^x c_n^j - (1)J_1 a_v^x \delta_n^j] - (m_2 + m_4)(1)J_1 [(1)J_1 c_n^x \delta_v^j + 2a_v^x c_n^j - (1)J_1 a_v^x \delta_n^j] \\ & - 2m_3 [(1)J_2 c_n^x \delta_v^j + M_i^j c_n^i a_v^x - (1)J_2 a_v^x \delta_n^j] + l_3 [a_v^x c_n^\sigma \delta_v^j + c_n^x \delta_v^j a_v^\sigma - a_v^x a_v^\sigma \delta_n^j] \\ & + m_4 \{ a_v^x a_v^\sigma c_n^j + (1)J_1 [a_v^x c_n^\sigma \delta_v^j + c_n^x \delta_v^j a_v^\sigma] + (1)J_1 a_v^x a_v^\sigma \delta_n^j \}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die Größen $C_{vn}^x \cdot j$ sind durch Produktbildungen aus zwei Tensoren zweiter Stufe und skalaren Vervielfältigungen entstanden. Für die $C_{vn}^x \cdot j$ gelten demnach die Transformationseigenschaften bezüglich linearer Koordinatentransformationen wie für

Tensoren vierter Stufe. Somit bildet das System der Zahlen $C_{\nu n}^{\kappa j}$ einen Tensor vierter Stufe in gemischter Darstellung.

Wie leicht zu sehen ist, zeigt der Tensor C keine Symmetrie bezüglich der ersten beiden Indizes κ und ν . Dazu betrachte man zum Beispiel das Glied mit dem Faktor 2μ in (2.41):

$$C_{\kappa \nu n j} = \dots + 2\mu [c_{n\kappa} \delta_{j\nu} - a_{\kappa\nu} \delta_{jn}] + \dots$$

$$C_{\nu \kappa n j} = \dots + 2\mu [c_{n\nu} \delta_{j\kappa} - a_{\nu\kappa} \delta_{jn}] + \dots$$

Für $\kappa \neq \nu$ sind die beiden Klammerausdrücke im allgemeinen verschieden voneinander.

(2.40) läßt sich weiter umformen zu

$${}^{(2)}T_{\nu}^{\kappa} = \frac{\varrho_1}{2\varrho_0} \{C_{\nu n}^{\kappa j} + C_{\nu n}^{\kappa j}\} v^n \parallel_j. \quad (2.42)$$

Wir definieren einen Tensor F durch die Gleichung

$$F_{\kappa \nu n}^j = \frac{1}{2} (C_{\kappa \nu n}^j + C_{\nu \kappa n}^j). \quad (2.43)$$

Damit folgt also (2.25).

Eine Bemerkung über die Berechnung der Komponenten des Tensors F ist noch wichtig:

Die Ableitung der Beziehung (2.25) wurde in der Metrik des verformten Endzustandes vorgenommen. Dadurch gehen in die Komponenten des Tensors F auch die Verschiebungsableitungen der zweiten Verformung ein. Nach (2.43) und (2.41) ist jede Komponente von F eine Funktion der Verschiebungsableitungen ${}^{(1)}v^{\kappa} \parallel_{\nu}$ der ersten Verformung, aber in der Metrik des Endzustandes. Falls die Anfangsverschiebung vorgegeben ist, berechnet man ${}^{(1)}v^{\kappa} \parallel_{\nu}$ zum Beispiel über ${}^{(1)}v^{\kappa} |_{\nu}$ und ${}^{(1)}v^{\kappa} |_{\nu}$. Während diese beiden letzten Komponenten nur durch ${}^{(1)}v$ und der willkürlichen Wahl des Basissystems im unverformten Ausgangszustand bestimmt ist, wird ${}^{(1)}v^{\kappa} \parallel_{\nu}$ auch noch zusätzlich durch die zweite Verformung, also die Komponenten $v^{\kappa} \parallel_{\nu}$, bedingt. Wir wollen den Zusammenhang zwischen ${}^{(1)}v^{\kappa} \parallel_{\nu}$ und ${}^{(1)}v^{\kappa} |_{\nu}$ herleiten.

Es gilt

$${}^{(g)}\delta^{\kappa} |_{\nu} = {}^{(1)}\delta^{\kappa} |_{\nu} + \delta^{\kappa} |_{\nu}$$

$${}^{(g)}\delta^{\kappa} \parallel_{\nu} = {}^{(1)}\delta^{\kappa} \parallel_{\nu} + \delta^{\kappa} \parallel_{\nu}$$

$${}^{(g)}\delta^{\kappa} \parallel_{\nu} = {}^{(1)}\delta^{\kappa} \parallel_{\nu} + \delta^{\kappa} \parallel_{\nu}.$$

Aus (2.11) folgt damit

$$[{}^{(1)}\delta^{\kappa} \parallel_{\nu} + v^{\kappa} \parallel_{\nu}] [\delta_{\kappa}^{\mu} + {}^{(1)}\delta^{\mu} |_{\kappa}] = {}^{(g)}\delta^{\mu} |_{\nu} - \delta^{\mu} |_{\kappa} [{}^{(1)}\delta^{\kappa} \parallel_{\nu} + v^{\kappa} \parallel_{\nu}].$$

Überschieben wir mit

$$[\delta_{\mu}^{\lambda} + (1)\hat{v}^{\lambda}|_{\mu}]^{-1},$$

so folgt mit (2.13)

$$(1)v^{\lambda} \parallel_v = (1)\hat{v}^{\lambda} \parallel_v - v^{\lambda} \parallel_v + \hat{v}^{\mu}|_v [\delta_{\mu}^{\lambda} + (1)\hat{v}^{\lambda}|_{\mu}]^{-1} - \hat{v}^{\mu}|_x [(1)v^{\lambda} \parallel_v + v^{\lambda} \parallel_v]. \quad (2.44)$$

Für $v = 0$ (verschwindende zweite Verformung) wird selbstverständlich

$$(1)v^{\lambda} \parallel_v = (1)\hat{v}^{\lambda} \parallel_v.$$

Sind die Verschiebungsableitungen der zweiten Verschiebung klein gegenüber der ersten, dann kann man allgemein

$$(1)v^{\lambda} \parallel_v \approx (1)\hat{v}^{\lambda} \parallel_v$$

setzen (analog (2.15)). Bei den hier gemachten Voraussetzungen — $(2)T$ lineare Funktion der zweiten Verschiebungen bei beliebigen ersten — muß

$$(1)v^{\lambda} \parallel_v = (1)\hat{v}^{\lambda} \parallel_v \quad (2.45)$$

gesetzt werden. Der Tensor F ist in der *Metrik des Körpers nach der ersten Verformung*, also in dem mit dem oberen Index „1“ gekennzeichneten System zu berechnen. Dasselbe betrifft das Dichteverhältnis ϱ_1/ϱ_0 . Erst jetzt ist die Aussage berechtigt, daß ϱ_1/ϱ_0 und F nur von der Anfangsverformung abhängig sind. Außerdem folgt aus (2.15)

$$(2)T_v^{\lambda} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} F_{\nu n}^{\lambda} \hat{v}^n \parallel_j. \quad (2.25 a)$$

In (2.25) oder (2.25a) hängen die Spannungen von den *Verschiebungsableitungen* ab. Es ist naheliegend, eine Beziehung zwischen Spannungen und *Verzerrungen* herzuleiten. Dazu wäre notwendig, daß in (2.29) u_j^i durch e_j^i ersetzt wird. Um die u_j^i zu eliminieren, müßte wegen der linearen Abhängigkeit der e_j^i und u_j^i von den Verschiebungsableitungen der zweiten Verformung und der ebenfalls linearen Abhängigkeit der Spannungskomponenten von e_j^i und u_j^i eine Relation der Art

$$u_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}^{\lambda\lambda} e_{\lambda\lambda} \quad (2.46)$$

existieren, wobei die 81 Größen $K_{\mu\nu}^{\lambda\lambda}$ nur von den ersten Verschiebungsableitungen abhängen dürfen. Wir wollen zeigen, daß eine solche Beziehung allgemein nicht existiert.

Wäre (2.46) richtig, dann müßten die Koeffizienten eindeutig aus den Verschiebungsableitungen der Anfangsverformung — unabhängig von der speziellen Wahl der zweiten Verzerrung bzw. Verschiebung — berechenbar sein.

Aus (2.46) und (2.17) folgt zunächst

$$-(^{(1)}v^\sigma \parallel_\mu v_\sigma \parallel_\nu - (^{(1)}v^\sigma \parallel_\nu v_\sigma \parallel_\mu) = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\lambda} (v_x \parallel_\lambda + v_\lambda \parallel_x).$$

Für $\mu = 1$ und $\nu = 1$ lautet eine Gleichung des linearen und homogenen Systems

$$\begin{aligned} & 2(^{(1)}v^1 \parallel_1 + K_{11}{}^{11}) v_1 \parallel_1 + (K_{11}{}^{12} + K_{11}{}^{21}) v_1 \parallel_2 + (K_{11}{}^{13} + K_{11}{}^{31}) v_1 \parallel_3 \\ & + (2(^{(1)}v^2 \parallel_1 + K_{11}{}^{12} + K_{11}{}^{21}) v_2 \parallel_1 + 2 K_{11}{}^{22} v_2 \parallel_2 + (K_{11}{}^{23} + K_{11}{}^{32}) v_2 \parallel_3 \\ & + (2(^{(1)}v^3 \parallel_1 + K_{11}{}^{13} + K_{11}{}^{31}) v_3 \parallel_1 + (K_{11}{}^{32} + K_{11}{}^{23}) v_3 \parallel_2 + 2 K_{11}{}^{33} v_3 \parallel_3 = 0. \end{aligned}$$

... (2.47)

Da die Komponenten des Tensors \mathbf{K} nicht von der Wahl der zweiten Verformung abhängen dürfen, wählen wir zwei spezielle zweite Verformungen:

- a) $v_1 \parallel_1 \neq 0, v_2 \parallel_1 \neq 0, v_3 \parallel_1 \neq 0,$
sämtliche anderen $v_i \parallel_j = 0,$
- b) $v_1 \parallel_2 \neq 0, v_2 \parallel_2 \neq 0, v_3 \parallel_2 \neq 0,$
sämtliche übrigen $v_i \parallel_j = 0.$

Da außerdem die Komponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{v} sowie deren kovariante Ableitungen voneinander unabhängig sind, kann (2.47) in den beiden Fällen nur dann erfüllt werden, wenn sämtliche Koeffizienten verschwinden:

$$\begin{aligned} & 2(^{(1)}v^1 \parallel_1 + K_{11}{}^{11}) = 0 \\ & K_{11}{}^{12} + K_{11}{}^{21} = 0* \\ & K_{11}{}^{13} + K_{11}{}^{31} = 0 \\ & 2(^{(1)}v^2 \parallel_1 + K_{11}{}^{12} + K_{11}{}^{21}) = 0* \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Betrachten wir die mit * bezeichneten Gleichungen, so sehen wir, daß die Annahme beliebiger Anfangsverzerrungen, die erfüllt sein muß, auf einen Widerspruch führt. Eine lineare Beziehung zwischen \mathbf{u} und \mathbf{e} , so daß die Koeffizienten \mathbf{K} nur von der Anfangsverformung abhängen, existiert also nicht für beliebige erste und zweite Verformungen. Deshalb ist es auch nicht — unter Beibehaltung der Allgemeinheit — möglich, (2.25) in eine Spannungs-Verzerrungs-Relation umzuschreiben. (2.25) nennen wir daher *Spannungs-Dehnungs-Relation*. Lediglich in dem Spezialfall eines hydro-

statischen Anfangsdruckes kann die Spannungs-Dehnungs-Relation in eine Spannungs-Verzerrungs-Relation übergeführt werden. Es ist daher allgemein nicht möglich, die aus der klassischen Elastizitätstheorie für Kristalle stammende Spannungs-Dehnungs-Relation auf Körper mit nichtspannungsfreien Ausgangszuständen zu übertragen, auch wenn man die Koeffizienten als Funktionen der Anfangsverzerrungen ansieht.

(2.25) zeigt weiter, daß der ursprünglich isotrope Körper infolge der Anfangsverchiebung im allgemeinen keine isotrope Funktion zwischen den Spannungen und Verschiebungsableitungen aufweist. Die Isotropie wird durch die Anfangsverzerrung zerstört. Hierbei ist der Sonderfall der gegenseitig unbeeinflußten Superposition der Spannungen bei infinitesimalen ersten und zweiten Verzerrungen (siehe Abschnitt II, 3) ausgeschlossen.

In der (klassischen) Theorie der Kristallelastizität wird zwischen den Spannungen und Verzerrungen eine Beziehung der Form

$$\tau^{xv} = E^{xvni} e_{ni} \quad (2.48)$$

angenommen. Wegen der Symmetrie der Tensoren τ und e gelten für den Tensor E die Symmetrieeigenschaften

$$E^{xvni} = E^{vxni} = E^{xvni}.$$

Aus der Existenz des elastischen Potentials

$$W = \frac{1}{2} E^{xvni} e_{xv} e_{ni},$$

das die Gültigkeit des Energiesatzes beinhaltet, folgt außerdem noch die Symmetrieeigenschaft

$$E^{xvni} = E^{nixv}.$$

Daher reduziert sich der Tensor E auf 21 voneinander unabhängige Komponenten. Dieser Ansatz erfaßt also die allgemeinste Kristallklasse bezüglich kleiner Deformationen. Für Kristalle mit einer größeren Zahl von Symmetrien nimmt die Zahl der unabhängigen Komponenten von E weiter ab, und der Spezialfall des isotropen Körpers wird durch zwei Komponenten bestimmt.

Der Vergleich von (2.25) mit (2.48) zeigt wegen

$$v_n \parallel_j \neq v_j \parallel_n$$

für $n \neq j$, daß der Tensor F bezüglich der Indizes n und j nicht symmetrisch ist. (2.48) ist ein Sonderfall von (2.25), aber nicht umgekehrt. (2.25) ist also eine echte Verallgemeinerung von (2.48).

Um zu zeigen, daß (2.48) aus (2.25) folgt, müssen zwei zusätzliche, sehr einschränkende Annahmen gemacht werden:

a) Der Tensor F soll der Symmetriebeziehung

$$F^{xvni} = F^{xvijn}$$

genügen und

b) Das Dichteverhältnis ρ_1/ρ_0 ist näherungsweise gleichs eins zu setzen.

Mit diesen beiden Annahmen folgt aus (2.25)

$${}^{(2)}T^{xy} = F^{xvni} e_{nj}.$$

Die Voraussetzung b) hat zur Folge, daß die Anfangsdeformation nicht beliebig groß sein kann, sondern infinitesimal angenommen werden muß.

Wenn F bezüglich der letzten beiden Indizes symmetrisch sein soll, wie es Bedingung a) fordert, dann muß nach (2.41) c_{nj} ein symmetrischer Tensor sein. Das bedeutet nach (2.38)

$${}^{(1)}v_n \parallel_j = {}^{(1)}v_j \parallel_n.$$

Damit wären beispielsweise bereits einfache Anfangsscherungen ausgeschlossen. Die einfachste Anfangsverformung, die dieser Bedingung genügen würde, ist

$${}^{(1)}v_n \parallel_j = k_n \delta_{nj}, \quad (2.49)$$

(nicht über n summieren!)

also eine Stauchung oder Dilation in den drei Hauptrichtungen. Daß aber diese Anfangsdeformation die Symmetriebeziehung für F auch noch nicht befriedigt, läßt sich beispielsweise aus dem Glied

$$2\mu \{c_{nx}\delta_{jv} - a_{xv}\delta_{jn} + c_{nv}\delta_{jx} - a_{xv}\delta_{jn}\} \quad (2.50)$$

in (2.41) nachweisen. Mit der speziellen Anfangsverformung (2.49) wird c_{nj} nach (2.38)

$$c_{nj} = (1 - k_n) \delta_{nj} = \bar{k}_n \delta_{nj}.$$

Setzt man das in (2.50) ein, so sieht man, daß Symmetrie in n und j nur dann erfüllt ist, wenn sämtliche \bar{k}_n gleich sind. Das ist nur bei hydrostatischem Druck der Fall. Wir bemerken, daß dafür zwar F , aber nicht C dieser Symmetriebeziehung (bezüglich n und j) genügt, was aber für diese Untersuchung bedeutungslos ist. Die Spezialisierung der Gl. (2.25) auf (2.48) setzt demnach voraus, daß die Anfangsdeformation von der besonderen Art eines allseitig gleichmäßigen Druckes ist. Setzt man außerdem den

Faktor $\varrho_1/\varrho_0 = 1$, so beschränkt man sich zusätzlich auf einen infinitesimalen Anfangsdruck. Wie im Abschnitt II,3 gezeigt wurde, ist dann aber auch keine Beeinflussung der zweiten Deformation durch die Anfangsverzerrung vorhanden. Wir können demnach schlußfolgern, daß man für das elastische Verhalten eines Körpers, dessen Ausgangszustand nicht spannungsfrei ist, auch in dem Falle einer infinitesimalen zweiten Verformung allgemein die Ergebnisse der Kristallelastizität bezüglich der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (auch bei entsprechender Interpretation der Koeffizienten) nicht verwenden darf.

Weiter läßt sich zeigen, daß die aus dem Energiesatz folgende Beziehung

$$E^{xvni} = E^{nixv}$$

bei den Tensorkomponenten F^{xvni} ebenfalls nicht gilt, wie sofort aus der Definitionsgleichung (2.43) abzulesen ist. Daraus darf man aber nicht auf eine Verletzung des Energieerhaltungssatzes schließen. Die Gültigkeit dieses Satzes wurde gerade durch die Benutzung des elastischen Potentials in den Rechengang einbezogen. Das gilt für die energetische Betrachtung der Gesamtverschiebung.

Für die vorliegende Spannungs-Dehnungs-Beziehung (2.25) findet man leicht das elastische Potential in der Form

$$W_2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \{ C^{xvni} v_x \parallel v_n \parallel_j + C^{vxnj} v_v \parallel_x v_n \parallel_j \}.$$

Bei Kenntnis dieses Potentials werden die Spannungen aus der Beziehung

$${}^{(2)}T^{xv} = \frac{\partial W_2}{\partial v_x \parallel_v} + \frac{\partial W_2}{\partial v_v \parallel_x}$$

berechnet.

Der Tensor F enthält wegen des Bestehens der einzigen Symmetrieeigenschaft

$$F^{xvni} = F^{vxnj} \quad (2.51)$$

im allgemeinen 54 voneinander unabhängige Komponenten.

Abschließend sei eine Bemerkung über Näherungsformeln bezüglich des Tensors F angeschlossen. Dazu erinnern wir daran, daß ${}^{(1)}J_1$ linear von den ersten Verzerrungen a_j^i abhängt, ${}^{(1)}J_2$ ist eine rationale ganze Funktion zweiten Grades und ${}^{(1)}J_3$ eine solche dritten Grades der a_j^i . Die Tensorkomponenten M_j^i hängen linear von den a_j^i ab, und A_j^i ist eine rationale ganze Funktion zweiten Grades der a_j^i . Das Dichteverhältnis ϱ_1/ϱ_2 wird ebenfalls nur von den Anfangsverzerrungen bestimmt.

Sieht man in (2.42) unter Beachtung von (2.41) von diesem gemeinsamen Faktor ϱ_1/ϱ_0 ab, so läßt sich feststellen, daß die elastischen Konstanten zweiter Ordnung (λ und μ) nur mit Größen verknüpft sind, die höchstens von der ersten Potenz der a_j^i

abhängen. Es treten aber die elastischen Konstanten dritter Ordnung (l_1, l_2 und l_3) gemeinsam mit ersten und zweiten Potenzen der a^i_j und die elastischen Konstanten vierter Ordnung (m_1 bis m_4) zusammen mit den zweiten und dritten Potenzen der a^i_j auf.

Diese Feststellung ist insofern von Bedeutung, da sie eine Präzisierung über die Art der Näherungen gestattet. In Anlehnung an die Naturzustandstheorie ist man geneigt, bei einer linearen Näherung, das heißt also bei Beschränkung auf erste Potenzen der Verzerrung, auch hier im elastischen Potential nur die Glieder zweiter Ordnung anzusetzen. Das ist aber inkonsequent, denn es gibt in (2.42) auch Glieder, in denen die ersten Potenzen der Anfangsverzerrungen mit den elastischen Konstanten dritter Ordnung verknüpft sind. Will man also die Abhängigkeit der zweiten Verformung von den ersten Potenzen der Anfangsverzerrung untersuchen, dann muß man im elastischen Potential bis zu den Gliedern dritter Ordnung gehen. Alle weiteren Glieder im elastischen Potential mit höheren als dritten Potenzen sind dann vernachlässigbar, da sie in der Spannungs-Dehnungs-Relation keine Beiträge ergeben, in denen lineare Anfangsverzerrungen auftreten. Wir erhalten so für diese Näherung

$$\begin{aligned} {}^{(2)}T_v^x(\text{lin}) &= \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \{ [\lambda (\delta_i^j w_j^i - {}^{(1)}J_1 \delta_i^j w_j^i) + 2(3l_1 + l_2) {}^{(1)}J_1 \delta_i^j w_j^i + (l_2 + l_3) M_i^j w_j^i] \delta_v^x \\ &+ 2\mu (w_v^x - a_v^x \delta_i^j e_j^i) + (l_2 + l_3) [{}^{(1)}J_1 w_v^x + \delta_i^j a_v^x w_j^i] + l_3 (a_v^x w_v^x + a_v^x w_v^x) \} \quad (2.52) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = [1 - 2{}^{(1)}J_1 + 4{}^{(1)}J_2 - 8{}^{(1)}J_3]^{\frac{1}{2}} \approx 1 - {}^{(1)}J_1. \quad (2.53)$$

(2.52) ist die Spannungs-Dehnungs-Relation eines Materials unter Vorbelastung bei Beschränkung auf lineare erste Verzerrungen. Gegenüber der im Abschnitt II,3 behandelten infinitesimalen Theorie werden hier aber Produkte von ersten und zweiten Verzerrungen zugelassen.

3. Spezielle Anfangsverzerrungen

Als Beispiel wird im folgenden die Anfangsverzerrung

$${}^{(1)}v = {}^{(1)}v_i^0 e_i \quad \text{mit} \quad {}^{(1)}v^0 = \alpha^i q^i, \quad \alpha^i = \text{const} \quad (3.1)$$

als Spezialfall a) gewählt. Das Basissystem des unverformten Ausgangszustandes sei kartesisch ($\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}$).

Für die metrischen Fundamentalgrößen des verformten Zustandes erhält man

$$\hat{g}_{ij} = (1 + \alpha_i)^2 \delta_{ij}, \quad \hat{g}^{ij} = \frac{1}{(1 + \alpha_i)^2} \delta^{ij}. \quad (3.2)$$

Der Verzerrungstensor in gemischter Darstellung wird

$$\overset{1}{a}_j^i = b_j \delta_j^i, \quad b_j = \frac{1}{2} \frac{\alpha_j(2 + \alpha_j)}{(1 + \alpha^j)^2}, \quad (3.3)$$

weiter folgt

$${}^{(1)}J_1 \equiv J_1 = \sum_{i=1}^3 b^i, \quad (3.4)$$

$${}^{(1)}J_2 \equiv J_2 = b^1 b^2 + b^1 b^3 + b^2 b^3, \quad (3.4)$$

$${}^{(1)}J_3 \equiv J_3 = b^1 b^2 b^3,$$

$$C_n^i = \sqrt{1 - 2\bar{b}^i} \delta_n^i. \quad (3.5)$$

Wir weisen darauf hin, daß bei Produkten mit gleichen Indizes in gleicher Stellung nicht zu summieren ist.

Schließlich folgt für die Komponenten des Tensors F

$$F_{\kappa\nu n}^j = \frac{1}{1 - 2b^\kappa} H_\kappa^j \delta_{\kappa\nu} \delta_n^j + \frac{1}{2} N_{\kappa\nu} \left[\frac{\delta_{\kappa n} \delta_n^j}{\sqrt{1 - 2b^\kappa}} + \frac{\delta_{\nu n} \delta_\kappa^j}{\sqrt{1 - 2b^\nu}} \right], \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} H_\kappa^j &= \lambda(\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_1) + (3l_1 + l_2)J_1(2\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_1) \\ &+ (4m_1 + m_2)J_1^2(3\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_1) + (l_2 + l_3)[(J_1 - b^j)\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_2] \\ &+ (2m_2 + 2m_3 + m_4)[J_1(J_1 - b^j)\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} + J_2\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_1J_2] \\ &+ m_4 \cdot \frac{1}{b^j} \cdot J_3(\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - b^j) - 2\mu b_\kappa - (l_2 + l_3)b_\kappa \cdot (\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_1) \\ &- (m_2 + m_4)b_\kappa J_1[2\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_1] - 2m_3 b_\kappa[\sqrt{1 - 2\bar{b}^j}(J_1 - b^j) + J_2] \\ &- l_3(b_\kappa)^2 + m_4(b_\kappa)^2[\sqrt{1 - 2\bar{b}^j} - J_1] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$N_{\kappa\nu} = N_{\nu\kappa} = 2\mu - (l_2 + l_3)J_1 - (m_2 + m_4)J_1^2 - 2m_3J_2 + (l_3 + m_4J_1)(b_\kappa + b_\nu). \quad (3.8)$$

Die Elemente des Tensors F werden wesentlich durch die KRONECKER-Symbole bestimmt. Wir setzen voraus, daß $b^1 + b^2 + b^3 + b^1 + 0$ ist. Man findet dann 15 voneinander verschiedene Komponenten bei insgesamt 21 von Null verschiedenen Komponenten. Wir ordnen sie in einem quadratischen Schema. Es wird so festgelegt, daß zuerst die Indizes κ und ν und anschließend die Indizes n und j unabhängig voneinander die Zahlen von 1 bis 3 durchlaufen. Dieses Schema ist natürlich nicht als Matrix zu behandeln.

$$|F_{xvn}^j| = \begin{vmatrix} F_{11n}^j & F_{12n}^j & F_{13n}^j \\ F_{21n}^j & F_{22n}^j & F_{23n}^j \\ F_{31n}^j & F_{32n}^j & F_{33n}^j \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} F_{111}^1 & 0 & 0 & 0 & F_{121}^2 & 0 & 0 & 0 & F_{131}^3 \\ 0 & F_{112}^2 & 0 & F_{122}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{113}^3 & 0 & 0 & 0 & F_{133}^1 & 0 & 0 \\ 0 & F_{121}^2 & 0 & F_{221}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{122}^1 & 0 & 0 & 0 & F_{222}^2 & 0 & 0 & 0 & F_{232}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{223}^3 & 0 & F_{233}^2 & 0 \\ 0 & 0 & F_{13}^{13} & 0 & 0 & 0 & F_{331}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{232}^3 & 0 & F_{332}^2 & 0 \\ F_{133}^1 & 0 & 0 & 0 & F_{233}^2 & 0 & 0 & 0 & F_{33}^{33} \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Zwischen den 15 linear unabhängigen Komponenten von F bestehen noch folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2b^1} F_{121}^2 &= \sqrt{1-2b^2} F_{212}^1, \\ \sqrt{1-1b^1} F_{131}^3 &= \sqrt{1-2b^3} F_{313}^1, \\ \sqrt{1-2b^2} F_{232}^3 &= \sqrt{1-2b^3} F_{323}^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Es genügt demnach, 12 Komponenten des Tensors F nach (3.6) zu berechnen.

Mit diesen Beziehungen läßt sich die Spannungs-Dehnungs-Relation aus den allgemeinen Gleichungen des Abschnittes II,5 sofort hinschreiben:

Die Gesamtspannung ist

$$\tau_{ij} = {}^{(1)}T_{ij} + {}^{(2)}T_{ij}$$

mit

$${}^{(1)}T_j^i = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} p^i \delta_j^i,$$

$$\begin{aligned} P^i &= \lambda J_1 + (3l_1 + l_2) J_1^2 + (4m_1 + m_2) J_1^3 + (l_2 + l_3) J_2 + (2m_2 + 2m_3 + m_4) J_1 J_2 \\ &\quad + m_4 J_3 + [2\mu - (l_2 + l_3) J_1 - (m_2 + m_4) J_1^2 - 2m_3 J_2] b^i + (l_3 + m_4 J_1) (b^i)^2. \end{aligned} \quad \dots (3.11)$$

Für das Dichteverhältnis erhalten wir

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = [(1-2b^1)(1-2b^2)(1-2b^3)]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

Die Spannungs-Dehnungs-Relation für die zweite Verformung in Abhängigkeit von der Vorbelastung lautet ausführlich:

$$\begin{aligned}
 {}^{(2)}T_{11} &= \frac{\varrho_1}{\varrho_0} (F_{111}{}^1 v^1 \parallel_1 + F_{112}{}^2 v^2 \parallel_2 + F_{113}{}^3 v^3 \parallel_3) \\
 {}^{(2)}T_{22} &= \frac{\varrho_1}{\varrho_0} (F_{221}{}^1 v^1 \parallel_1 + F_{222}{}^2 v^2 \parallel_2 + F_{223}{}^3 v^3 \parallel_3) \\
 {}^{(2)}T_{33} &= \frac{\varrho_1}{\varrho_0} (F_{331}{}^1 v^1 \parallel_1 + F_{332}{}^2 v^2 \parallel_2 + F_{333}{}^3 v^3 \parallel_3) \\
 {}^{(2)}T_{12} &= {}^{(2)}T_{21} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} (F_{121}{}^2 v^1 \parallel_2 + F_{122}{}^1 v^2 \parallel_1) \\
 {}^{(2)}T_{12} &= {}^{(2)}T_{31} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} (F_{131}{}^3 v^1 \parallel_3 + F_{133}{}^1 v^3 \parallel_1) \\
 {}^{(2)}T_{23} &= {}^{(2)}T_{32} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} (F_{232}{}^3 v^2 \parallel_3 + F_{233}{}^2 v^3 \parallel_2).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Als nächstes behandeln wir den weiteren Spezialfall b), bei dem

$$\alpha^1 = \alpha^2 \neq \alpha^3 \quad \text{oder} \quad b^1 = b^2 \neq b^3 \tag{3.14}$$

sein soll. Aus (3.7) und (3.8) folgt dann

$$\begin{aligned}
 H_1^1 &= H_1^2 = H_2^1 = H_2^2, \\
 H_3^1 &= H_3^2, \quad H_1^3 = H_2^3, \\
 N_{11} &= N_{12} = N_{21} = N_{22}, \\
 N_{13} &= N_{31} = N_{23} = N_{32}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Für die 21 von Null verschiedenen Komponenten des Tensors \mathbf{F} vom Spezialfall a) folgen nun die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 F_{111}{}^1 &= F_{222}{}^2, \quad F_{112}{}^2 = F_{221}{}^1, \quad F_{113}{}^3 = F_{223}{}^3, \\
 F_{331}{}^1 &= F_{332}{}^2, \quad F_{121}{}^2 = F_{211}{}^2 = F_{212}{}^1 = F_{122}{}^1, \\
 F_{131}{}^3 &= F_{311}{}^3 = F_{232}{}^3 = F_{322}{}^3, \\
 F_{313}{}^1 &= F_{133}{}^1 = F_{323}{}^2 = F_{233}{}^2, \\
 F_{111}{}^1 - F_{112}{}^2 &= 2 F_{121}{}^1.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Insgesamt sind also *sieben* Elemente des Tensors F linear unabhängig. Die drei Relationen (3.10) reduzieren sich jetzt auf eine (nichtlineare) Beziehung der Form

$$\sqrt{1-2b^1} F_{131}{}^3 = \sqrt{1-2b^3} F_{313}{}^1.$$

Es genügt demnach, die sechs Elemente des Tensors F

$$\begin{aligned} F_{111}{}^1 &= \frac{1}{1-2b^1} H_1^1 + \frac{1}{\sqrt{1-2b^1}} N_{11} \\ F_{113}{}^3 &= \frac{1}{1-2b^1} H_1^3, \quad F_{331}{}^1 = \frac{1}{1-2b^3} H_3^1, \\ F_{333}{}^3 &= \frac{1}{1-2b^3} H_3^3 + \frac{1}{\sqrt{1-2b^3}} N_3^3, \\ F_{121}{}^1 &= \frac{1}{2\sqrt{1-2b^1}} N_{11}, \quad F_{131}{}^3 = \frac{1}{2\sqrt{1-2b^1}} N_{13}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

nach (3.7) und (3.8) zu berechnen.

Bei dem *dritten* Spezialfall c) soll gelten

$$\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = -\alpha \quad \text{oder} \quad b^1 = b^2 = b^3 = b. \tag{3.18}$$

Mit den Definitionen

$$H = \frac{1}{1-2b} H_1^1 \quad \text{und} \quad N = \frac{1}{2\sqrt{1-2b}} N_{11} \tag{3.19}$$

folgt

$$\begin{aligned} F_{111}{}^1 &= F_{222}{}^2 = F_{333}{}^3 = H + 2N, \\ F_{112}{}^2 &= F_{113}{}^3 = F_{223}{}^3 = F_{221}{}^1 = F_{331}{}^1 = F_{332}{}^2 = H, \\ F_{121}{}^2 &= F_{211}{}^2 = F_{131}{}^3 = F_{311}{}^3 = F_{212}{}^1 = F_{232}{}^3 \\ &= F_{322}{}^3 = F_{313}{}^1 = F_{133}{}^1 = F_{323}{}^2 = F_{233}{}^2 = N. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Drei Elemente sind verschieden voneinander, jedoch sind nur zwei linear unabhängig. Der Tensor F ist demnach durch zwei linear unabhängige Elemente eindeutig festgelegt. Als solche können zum Beispiel H und N selbst gewählt werden.

Das quadratische Schema (3.9) geht hier über in

$$|F_{x\alpha\nu}^j| = \begin{vmatrix} H+2N & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & H & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N & 0 & 0 & 0 & H+2N & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 & H & 0 \\ N & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & H+2N \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

Weiter wird

$${}^{(1)}T_j^i = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} P \delta_j^i,$$

wobei

$$P = (3\lambda + 2\mu)b + (27l_1 + 9l_2 + l_3)b^2 + (108m_1 + 36m_2 + 12m_3 + 4m_4)b^3 \quad (3.22)$$

ist. Für das Dichteverhältnis erhalten wir

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = (1-2b)^{3/2} = (1-\alpha)^{-3}. \quad (3.23)$$

Die anderen Darstellungen für die Anfangsspannung werden

$${}^{(1)}T^{ij} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} P (1-2b) \delta^{ij},$$

$${}^{(1)}T_{ij} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \frac{P}{1-2b} \delta_{ij}. \quad (3.24)$$

(3.24) sind die Komponenten des inneren Spannungsfeldes. Die Kräfte, die an der Oberfläche des Körpers angreifen müssen, damit ein solches inneres Spannungsfeld erzeugt wird, lauten ($\mathfrak{n} = n^i e_i$ ist der Normalenvektor der Oberfläche)

$$\mathfrak{P} = {}^{(1)}T_r^j n_j e^r = \bar{P} e, \quad \bar{P} = |\mathfrak{P}| = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} P. \quad (3.25)$$

Der die Verzerrung $a_j^i = b \delta_j^i$ hervorrufende *allseitig gleichmäßige Druck* \mathfrak{P} ist dem Betrage nach gleich dem Faktor \bar{P} der *gemischten* Darstellung des inneren Spannungsfeldes.

BIRCH und SHIMAZU definieren

$$P' = \bar{P}(1 - 2b)$$

als hydrostatischen Druck. P' erfüllt aber nicht die Randbedingungen. Der Unterschied macht sich allerdings erst in den nichtlinearen Gliedern der Verzerrung bemerkbar.

Für das innere Spannungsfeld ${}^{(2)}T_{ij}$ bei hydrostatischem Anfangsdruck erhält man

$$\begin{aligned} {}^{(2)}T_{11} &= \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \{ (H + 2N) v^1 \parallel_1 + H v^2 \parallel_2 + H v^3 \parallel_3 \} \\ {}^{(2)}T_{22} &= \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \{ H v^1 \parallel_1 + (H + 2N) v^2 \parallel_2 + H v^3 \parallel_3 \} \\ {}^{(2)}T_{33} &= \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \{ H v^1 \parallel_1 + H v^2 \parallel_2 + (H + 2N) v^3 \parallel_3 \} \\ {}^{(2)}T_{12} &= {}^{(2)}T_{21} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} N (v^1 \parallel_2 + v^2 \parallel_1) \\ {}^{(2)}T_{13} &= {}^{(2)}T_{31} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} N (v^1 \parallel_3 + v^3 \parallel_1) \\ {}^{(2)}T_{23} &= {}^{(2)}T_{32} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} N (v^2 \parallel_3 + v^3 \parallel_2). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Für H und N erhalten wir bei der gewählten Näherung

$$\begin{aligned} H &= \lambda + (-2\mu - 2\lambda + 18l_1 + 7l_2 + l_3)b \\ &+ \left(-\frac{9}{2}\lambda - 4\mu - 9l_1 - 2l_2 + 108m_1 + 39m_2 + 14m_3 + 5m_4 \right) b^2 \\ &+ \left(-\frac{19}{2}\lambda - 8\mu - 27l_1 - \frac{15}{2}l_2 - \frac{1}{2}l_3 + 3m_2 + 2m_3 + m_4 \right) b^3. \\ N &= \mu + \left(\mu - \frac{3}{2}l_2 - \frac{1}{2}l_3 \right) b \\ &+ \left(\frac{3}{2}\mu - \frac{3}{2}l_2 - \frac{1}{2}l_3 - \frac{9}{2}m_2 - 3m_3 - \frac{3}{2}m_4 \right) b^2 \\ &+ \left(\frac{5}{2}\mu - \frac{9}{4}l_2 - \frac{3}{4}l_3 - \frac{9}{2}m_2 - 3m_3 - \frac{3}{2}m_4 \right) b^3. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Hieraus sieht man, daß in den absoluten Gliedern nur die elastischen Konstanten zweiter Ordnung auftreten. Die Koeffizienten der linearen Glieder enthalten die elastischen Konstanten bis zur dritten Ordnung usw. Hätte man die Reihenentwicklung des elastischen Potentials bis zu höheren Ordnungen als vierter Ordnung betrieben, dann würden in dem Koeffizienten von b^3 bereits die elastischen Konstanten fünfter Ordnung auftreten. Bei einer solchen Rechnung würden sich aber die Faktoren bis zu den quadratischen Gliedern nicht verändern. Obige Rechnung ist also bis zu den Quadraten von b exakt. BIRCH ging in seinem Rechengang bis zu der ersten Potenz von b und vernachlässigte aber von vornherein die elastischen Konstanten dritter Ordnung. In derselben Weise geht SHIMAZU bei dem hydrostatischen Anfangsdruck bis zu den Gliedern zweiter Ordnung von b , jedoch ohne Berücksichtigung der Konstanten vierter Ordnung. Die hier angegebenen Beziehungen ermöglichen in jedem Falle eine Abschätzung der Fehler der in der Literatur gemachten Näherungen. Für die Praxis setzt dies allerdings voraus, daß die Konstanten höherer Ordnung bekannt sind.

Wir untersuchen nun die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (3.13) näher. Dazu wählen wir eine einfache zweite Verformung in einer der Richtungen q^i . Mit Ausnahme von $v^1 \parallel_1 (\neq 0)$ sollen sämtliche $v^i \parallel_j = 0$ sein. Nach (3.13) sind die Schubspannungen ${}^{(2)}T_{ij} = 0$ ($i \neq j$), und die Normalspannungen ${}^{(2)}T_{ii}$ werden voneinander verschieden.

Zeichnet man nun entsprechend die q^2 -Richtung aus ($v^2 \parallel_2 \neq 0$), dann gilt zunächst die gleiche Aussage wie vorher. Da aber $F_{222}^2 \neq F_{111}^1$ ist, werden bei gleichen Beanspruchungen einmal in der q -Richtung und zum anderen in der q^2 -Richtung die dadurch ausgezeichneten Normalspannungen unterschiedlich. Entsprechendes würde auch der Vergleich mit der q^3 -Richtung ergeben. Bei gleichen Beanspruchungen in den Richtungen q^1 , q^2 und q^3 des unter der Anfangsdeformation (3.1) stehenden Körpers erhalten wir unterschiedliche zugehörige Normalspannungen. Der Körper zeigt bezüglich der zweiten Deformation ein anisotropes Verhalten, das durch die Anfangsdeformation hervorgerufen wird. In diesem Falle a) sind relativ wenig Symmetrien vorhanden.

Die gleichen Überlegungen führen im Sonderfall b) zu der Aussage, daß die Richtungen q^1 und q^2 bezüglich des elastischen Verhaltens gleichwertig sind. Die q^3 -Richtung wird eine ausgezeichnete Symmetrierichtung.

Beim Übergang zu c) sehen wir, daß keine Richtung ausgezeichnet wird. Hier liegt isotropes Verhalten vor. Die Zahl der unabhängigen Koeffizienten ist zwei. Nur in diesem Falle c) bleibt der ursprünglich isotrope Körper auch bezüglich der zweiten Deformation isotrop.

4. Die elastischen Konstanten für beliebige und spezielle Anfangsverzerrungen

Wir unterwerfen den vorbelasteten Körper besonderen Beanspruchungen bezüglich der zweiten Deformation.

a) *Der Kompressionsmodul*

Bezeichnet man das Volumen des Körpers nach der ersten Verzerrung mit V und unterliegt dieser Körper einem allseitig gleichmäßigen Druck $-\Delta p$ (zweite Deformation), dann möge sich sein Volumen um ΔV ändern. Als Kompressionsmodul definiert man

$$k = -V \frac{\Delta p}{\Delta V}. \quad (4.1)$$

Zur Berechnung von k setzen wir

$${}^{(2)}T_{ij} = -\Delta p \delta_{ij}. \quad (4.2)$$

Mit (2.25) erhalten wir daraus ein System von sechs Gleichungen für die neun Unbekannten $v^n \parallel_j$. Zur eindeutigen Lösbarkeit sind die Kompatibilitätsbedingungen zu berücksichtigen. Man erhält für die Kompressibilität im Hauptachsensystem als Funktion der Anfangsverformung

$$k^{-1} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \frac{1}{|F_{mj}^j|} \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 1 & F_{112}^2 & F_{113}^3 \\ 1 & F_{222}^2 & F_{223}^3 \\ 1 & F_{332}^2 & F_{333}^3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} F_{111}^1 & 1 & F_{113}^3 \\ F_{221}^1 & 1 & F_{223}^3 \\ F_{331}^1 & 1 & F_{333}^3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} F_{111}^1 & F_{112}^2 & 1 \\ F_{221}^1 & F_{222}^2 & 1 \\ F_{331}^1 & F_{332}^2 & 1 \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

b) *Der YOUNG'sche Elastizitätsmodul*

Wir unterwerfen den Körper folgender Druckbeanspruchung:

$${}^{(2)}T_{11} = T,$$

sämtliche anderen

$${}^{(2)}T_{ij} = 0. \quad (4.4)$$

In einem der Berechnung der Kompressibilität ähnlichen Gang erhalten wir im Hauptachsensystem für den YOUNG'schen Elastizitätsmodul E , der durch das Verhältnis $T/v^1 \parallel_1$ definiert ist,

$$E_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \frac{|F_{mj}^j|}{\begin{vmatrix} F_{222}^2 & F_{223}^3 \\ F_{332}^2 & F_{333}^3 \end{vmatrix}}. \quad (4.5)$$

Analoge Formeln gelten für E_2 und E_3 .

c) Die Querkontraktion (POISSONSches Verhältnis)

Der Körper unterliege der Belastung (4.4). Man erhält für die Querkontraktionen

$$\pi_{11} = -\frac{v^2 \parallel_2}{v^1 \parallel_1} = \frac{\begin{vmatrix} F_{221}^1 & F_{223}^3 \\ F_{331}^1 & F_{333}^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{222}^2 & F_{223}^3 \\ F_{332}^2 & F_{333}^3 \end{vmatrix}}, \quad (4.6)$$

$$\pi_{12} = -\frac{v^3 \parallel_3}{v^1 \parallel_1} = -\frac{\begin{vmatrix} F_{221}^1 & F_{222}^2 \\ F_{331}^1 & F_{332}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{222}^2 & F_{223}^3 \\ F_{332}^2 & F_{333}^3 \end{vmatrix}}. \quad (4.7)$$

Entsprechende Formeln ergeben sich für andere Belastungen.

d) Der Gleitmodul

Wir unterwerfen nun den unter einer Anfangsdeformation stehenden Körper einer einfachen Scherung, die durch die Verschiebungsableitungen

$$v^1 \parallel_2 = s, \quad \text{sämtliche übrigen } v^i \parallel_j = 0 \quad (4.8)$$

gegeben ist.

Wir definieren die zu der gegebenen Belastung gehörenden Gleitmoduli durch das Verhältnis

$$G_{ij} = \frac{^{(2)}T_{ij}}{s} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} F_{ij1}^2. \quad (4.9)$$

Wegen der Symmetrie des Tensors \mathbf{F} bezüglich der Indizes i und j gibt es zu dieser Scherung sechs Gleitmoduli.

Abschließend geben wir noch die elastischen Konstanten für den Spezialfall c) des vorigen Abschnittes (hydrostatischer Druck) an.

Mit

$$|F_{mnj}^j| = 4 N^2 (3H + 2N)$$

erhält man für die Kompressibilität

$$k^{-1} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \frac{3}{3H + 2N}. \quad (4.10)$$

Die YOUNG'schen Elastizitätsmoduli werden untereinander gleich:

$$E = E_1 = E_2 = E_3 = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \frac{N(3H + 2N)}{H + N}. \quad (4.11)$$

Für die Querkontraktionszahlen π_{ij} folgt

$$\pi = \pi_{ij} = \frac{H}{2(H + N)}. \quad (4.11a)$$

Bei hydrostatischem Anfangsdruck werden die Gleitmoduli

$$\begin{aligned} G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{13} = G_{23} = 0, \\ G = G_{12} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} N. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Im Falle des hydrostatischen Anfangsdruckes bestehen zwischen den elastischen Konstanten die gleichen Beziehungen wie bei unverformten Ausgangszuständen. Es ist

$$\frac{E}{G} = \frac{3H + 2N}{H + N}. \quad (4.13)$$

Außerdem gilt

$$2 + 2\pi = \frac{3H + 2N}{H + N}.$$

Unabhängig von der Art der Näherung wird bei hydrostatischem Anfangsdruck

$$\frac{E}{G} = 2 + 2\pi. \quad (4.14)$$

Den Herren Professor Dr. O. LUCKE und Professor Dr. G. FANSELAU danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Diskussionen.

Literatur

[1] BRIDGMAN, P. W.: The physics of high pressure. London 1949, Proc. Amer. Acad. Arts a. Sci. 76, 3, 50, 1948, Rev. Mod. Phys. 18, 1946, S. 1.

BIRCH, F.: J. Geophys. Res. 57, 2, 1952.

- BANKROFT, D. und W. GORANSON: J. Appl. Phys. 26, 1955, S. 1472.
- WALSH, J. M. und R. H. CHRISTIAN: Phys. Rev. 97 (1955), S. 1544.
- ALTSCHULER, L. W., K. K. KRUPNIKOW, B. N. LEDENEW, W. I. SHUTSCHICHIN und M. I. BRASHNIK: J. der experimentellen und theoretischen Physik (UdSSR), 4, 1958, 874. — J. der experimentellen und theoretischen Physik (UdSSR), 34, 1958. — J. der experimentellen und theoretischen Physik (UdSSR), 38, 1960.
- SHARKOW, W. N. und W. A. KALININ: Veröffentlichungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Serie der Geophysik, Nr. 3, 1962.
- [2] SHIMAZU, Y.: State of material komposing earth interior. The J. of Earth-Science Nagoya University 2, 15, 95, 1954.
- [3] Siehe z. B. GREEN, A. E. und W. ZERNA: Theoretical elasticity, Oxford University Press 1954.
- FLÜGGE, S.: Handbuch der Physik, Bd. VI. Springer-Verlag, 1958, Berlin.
- [4] OLLENDORF, F.: Die Welt der Vektoren. Springer-Verlag, Wien, 1950.
- SOKOLNIKOFF, I. S.: Tensoranalysis, theory and applications. New York, John Wiley and Sons, Inc. London, Chapman & Hall, Limited, 1951.
- SCHOUTEN, J. A.: Ricci-calculus. Springer-Verlag, Berlin 1954.
- [5] TRUESDELL, C.: The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. The J. Rat. Mech. Anal. 1, 1952, 2, 1953.
- [6] ZERNA, W.: Ing.-Arch. 18 (1950), S. 211—220.
- [7] KOPPE, E.: Z. angew. Mathem. Mech., Bd. 36, Nr. 11/12, 1952.

Das Auftreten von pc-Pulsationen des erdmagnetischen Feldes in Abhängigkeit von der erdmagnetischen Aktivität

Von J. MÜNCH, Göttingen¹⁾

Eingegangen am 8. September 1964

Zusammenfassung: In den Pulsationsregistrierungen der Stationen Wingst, Göttingen und Fürstenfeldbruck wurde das Auftreten der pc's in Abhängigkeit von der erdmagnetischen Aktivität — gemessen in K_p — untersucht.

Dabei wurden für die H-Komponente der pc's folgende Eigenschaften gefunden: Die pc's zeigen an einem Beobachtungsort bei verschiedenen K_p-Werten ein systematisch unterschiedliches Verhalten; für einen festen K_p-Wert ändert sich dieses auch mit der geomagnetischen Breite. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von sinusförmigen pc's nimmt an allen drei Beobachtungsstationen mit höheren K_p-Werten zu, an den südlicheren stärker als an den nördlicheren.

Eine Analyse der pc-Perioden ergibt an allen drei Stationen ein ziemlich breites Spektrum; dabei hängt die Lage der Maxima in den Spektren von der geomagnetischen Breite und von K_p ab. Die Perioden werden mit zunehmendem K_p kürzer, jedoch geht diese Verkürzung anscheinend nicht stetig vor sich und vor allem auch nicht gleichzeitig an allen drei Stationen.

Die Amplituden der pc's zeigen eine starke Periodenabhängigkeit. Für die drei Beobachtungsorte ist die Änderung der Amplitude mit der Periode und mit K_p größer als mit der Breite.

Summary: In the pulsation-records of the geomagnetic observatories Wingst, Göttingen, and Fürstenfeldbruck the appearance of pc-type pulsations was studied with regard to intervals of different geomagnetic activity measured in K_p.

The following results were obtained as far as the H-component of pc's is concerned: at a given station the behavior of pc's systematically varies with different K_p's, and it also varies with geomagnetic latitude for a distinct K_p-value. The probability of appearance of sinusoidal pc's increases with increasing K_p, at the southern stations more than at the northern ones.

The analysis of pc-periods yields a rather broad spectrum at all stations under consideration. The position of the maxima in the three spectra is dependent on geomagnetic latitude and K_p. The periods decrease with increasing K_p, however, this shift does not seem to happen continuously and above all not simultaneously at the three stations.

The amplitudes of pc's strongly depend on the periods belonging to them. Comparing the amplitudes of the three stations, they rather vary with period and K_p than with latitude.

1 Einleitung

Die erdmagnetischen Pulsationen vom Typ pc mit Perioden zwischen etwa 5 und 500 sec treten von den frühen Morgen- bis in die Nachmittagsstunden hinein häufig mit einer gewissen Kontinuität über mehrere Stunden auf. Die pc's sind vor allem in der

¹⁾ Dipl.-Geophys. JOCHEN MÜNCH, Göttingen, Geophysikalisches Institut der Universität, Herzberger Landstraße 180.

H-Komponente des erdmagnetischen Feldes gut ausgeprägt und haben oft einen sinusförmigen Verlauf. Nach theoretischen Arbeiten von DUNGEY [2], SIEBERT [3] und anderen kann man als Ursache zumindest eines Teiles dieser Pulsationen hydro-magnetische Eigenschwingungen in der Exosphäre annehmen, die letzten Endes von Schwankungen des solaren Windes (= solare Partikelstrahlung) veranlaßt werden. Ein Maß für die durch die solare Partikelstrahlung bewirkte erdmagnetische Unruhe sind nach BARTELS [1] die Kennziffern K_p .

Im folgenden wird untersucht, welchen Einfluß eine Zunahme der erdmagnetischen Unruhe, ausgedrückt durch K_p , auf die Pulsationen vom pc-Typ hat. Für diese Untersuchungen standen die Registrierungen von drei Beobachtungsstationen unterschiedlicher geomagnetischer Breite zur Verfügung. VOELKER [4] hat für diese Stationen bereits eine Breitenabhängigkeit der pc-Perioden für magnetisch ruhige Zeiten nachgewiesen. Es ist daher auch ein Ziel dieser Untersuchungen, die Veränderung der Pulsationsperioden in diesen geomagnetischen Breiten bei verschieden starker erdmagnetischer Aktivität zu analysieren.

Die bisher vorliegenden Arbeiten anderer Autoren zeigen in den Angaben über Häufigkeit, Amplitude und Periode der pc's in Abhängigkeit von der Beobachtungszeit und der geomagnetischen Breite unterschiedliche Ergebnisse.

Ein Teil dieser Unterschiede könnte darauf zurückzuführen sein, daß die Stärke der magnetischen Unruhe auch in den charakteristischen Größen der Pulsationen zum Ausdruck kommt und bei manchen Untersuchungen nicht genügend berücksichtigt wurde.

Die Pulsationsregistrierungen zeigen an magnetisch gestörten Tagen erwartungsgemäß einen wesentlich unruhigeren Verlauf als in magnetisch ruhigen Zeiten. Dadurch wird einerseits ihre Auswertung erschwert, zum anderen interessieren gerade diese Veränderungen in Periode und Amplitude.

2 Die Auswertemethoden

Für diese Untersuchungen wurden Registrierungen der Stationen Wingst (geomagnetische Koordinaten: $\Phi = 54,5^\circ$; $\Lambda = 94,0^\circ$), Göttingen ($\Phi = 52,3^\circ$; $\Lambda = 93,7^\circ$) und Fürstfeldbruck ($\Phi = 48,9^\circ$; $\Lambda = 92,4^\circ$) benutzt. An allen drei Observatorien erfolgt die Aufzeichnung mit gleichartigen Induktionsvariometern nach dem Grenetschen Prinzip (Göttinger Bauart), deren Aufbau und Arbeitsweise bei VOELKER [4] beschrieben ist. Ausgewertet wurden die Monate Juni bis November 1961 und Februar 1963.

Wie schon erwähnt, erscheinen die pc's in der H-Komponente häufig als sinusförmige Schwingungen mit einer gewissen Kontinuität über mehrere Stunden, während sie in der D-Komponente im allgemeinen einen wesentlich unruhigeren Verlauf und kleinere Amplituden aufweisen. Die Z-Komponente wird stark von der Leitfähigkeit des Untergrundes an der jeweiligen Station beeinflusst. Die Auswertung beschränkte sich daher auf die H-Komponente.

Für die Auswahl der verwendeten pc's galten die folgenden Kriterien: Es werden solche 3-Minuten-Intervalle ausgewählt, die mindestens drei sinusförmige Schwingungen aufweisen. Damit die Pulsationen genügend genau identifiziert und ausgemessen werden können, müssen sie in der Registrierung mit Amplituden von mindestens 1 mm (entsprechend etwa $0,3 \gamma$) auftreten. Außerdem soll sich bei den drei oder mehr Schwingungen die kürzeste Periode nicht um mehr als 10% dieser Periode von der längsten der drei oder mehr Perioden unterscheiden. Der Sinn der Beschränkung auf gleichförmige Schwingungen liegt darin, für die verschiedenen Stationen und Störungsgrade möglicherweise charakteristische Pulsationsperioden zu finden. Es wurden Schwingungen bis zu einer unteren Periode von 6 sec ausgewertet, da bei 6 mm/min Filmvorschub 6 sec gerade noch ausreichend aufzulösen sind.

Von den in einem 3-Minuten-Intervall vorhandenen Schwingungen wurde jeweils das Amplituden- und das Periodenmittel gebildet.

3 Die Ergebnisse der Auswertung

Den Untersuchungen lagen folgende Fragestellungen zugrunde:

- Wie ändert sich die Häufigkeit der pc's für eine bestimmte Tageszeit und eine bestimmte geomagnetische Breite mit K_p ?
- Welche Abhängigkeit zeigen die Perioden der pc's von der Größe der K_p 's für eine bestimmte geomagnetische Breite?
- Wie ändern sich die Amplituden der pc's in Abhängigkeit von K_p für eine bestimmte Breite und eine bestimmte Pulsationsperiode?

3.1 Die Häufigkeit der pc's als Funktion von K_p und UT

Zunächst wurde die Häufigkeit der pc's an den drei Stationen in Abhängigkeit von der Tageszeit nach UT für die 4 K_p -Klassen 0 o bis 1 +, 2 — bis 3 —, 3 o bis 4 o, 4 + bis 7 — untersucht. Die Anzahl der 3-Stunden-Intervalle einer K_p -Klasse, die in einem bestimmten Zeitabschnitt auftreten, hängt stark davon ab, zu welcher Phase des Sonnenfleckenzyklus dieser Zeitabschnitt gehört. Um möglichst vom Einfluß der Lage der hier ausgewerteten sieben Monate bezüglich der Phase des Sonnenfleckenzyklus unabhängig zu werden, wurde folgende Normierung durchgeführt: Die Anzahl der in einem bestimmten 2-Stunden-Intervall und in einer bestimmten K_p -Klasse während der sieben Monate aufgetretenen pc's wird ausgezählt. Andererseits werden alle 1-Stunden-Intervalle dieser K_p -Klasse, die in den sieben Monaten vorkommen, aufsummiert, und daraus wird eine Häufigkeitsverteilung für die hier betrachteten 2-Stunden-Intervalle aufgestellt. Der Quotient aus der Anzahl der oben gefundenen pc's und der K_p -Häufigkeit ergibt für jedes 2-Stunden-Intervall eine Art Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der pc's, normiert auf eine Gleichverteilung der magnetischen Aktivität.

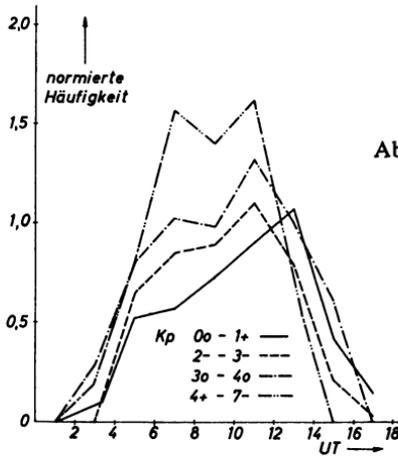


Abb. 1: Wingst.

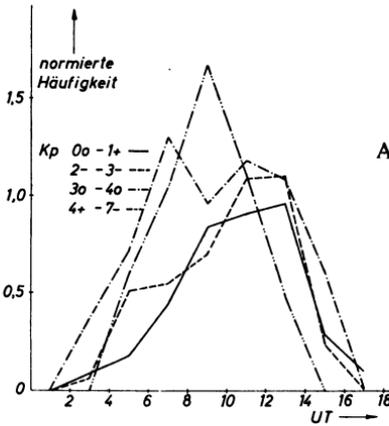


Abb. 2: Göttingen.

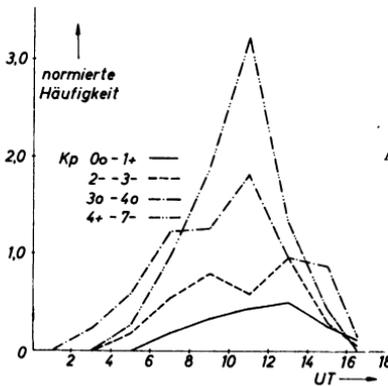


Abb. 3: Fürstfeldbruck.

Die normierte Häufigkeit der pc's an den drei Stationen für verschiedene Kp-Intervalle aufgetragen über UT.

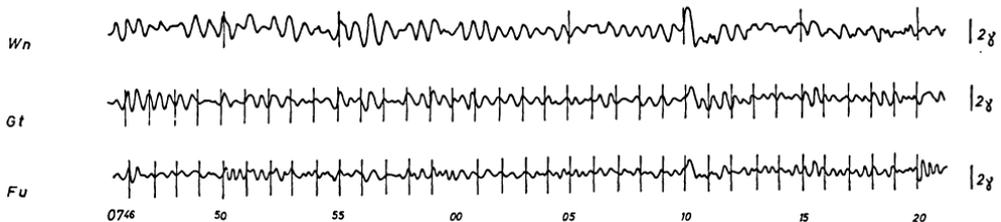
Die Ergebnisse dieser Auswertung zeigen die Abb. 1 bis 3. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten sinusförmiger pc's hängt demnach von UT, K_p und Φ ab. Mit höheren K_p -Werten nimmt sie gleichzeitig an allen drei Beobachtungsstationen zu. Das Verhältnis der Häufigkeitsmaxima der Klasse $K_p 0$ bis $1+$ zu derjenigen mit $4+$ bis $7-$ beträgt ungefähr in

Wingst (W_n)	1:1,5,
Göttingen (G_t)	1:4,
Fürstfeldbruck (F_u)	1:6.

Nicht nur für eine bestimmte Station verschiebt sich also die größere Häufigkeit zu höheren K_p -Werten, sondern es wird auch das Verhältnis zwischen den Häufigkeiten der niedrigsten und der höchsten K_p -Klasse zu dem südlicheren Beobachtungsort hin größer. In Wingst ist bei hohen Kennziffern die Registrierung schon so gestört, daß weniger sinusförmige pc's zu finden sind als in Fürstfeldbruck. Andererseits treten in Fürstfeldbruck bei $K_p 0$ überhaupt noch keine solchen pc's auf. Für die beiden niedrigen K_p -Klassen ist an allen drei Stationen der Abfall der Häufigkeitskurve nach 14.00 UT wesentlich steiler als der Anstieg zum Maximum am Vormittag.

3.2 Die Perioden der pc's

Die an allen drei Stationen gleichzeitig auftretenden pc's weisen in der H-Komponente zum Teil sehr unterschiedliche Perioden auf (siehe Abb. 4). Aber auch in den Registrierungen an einer und derselben Station können sich für verschiedene K_p -Klassen die Perioden der pc's stark unterscheiden. Die Aussagen über diese Perioden können, solange keine harmonischen Analysen über längere Zeitabschnitte durchgeführt werden, so gewonnen werden, daß man sinusförmige Schwingungen auswertet, wie sie unter Abschnitt 2 beschrieben worden sind.



23.7.1961

H-Komponente der pc's

Abb. 4: Ein Registrierbeispiel.

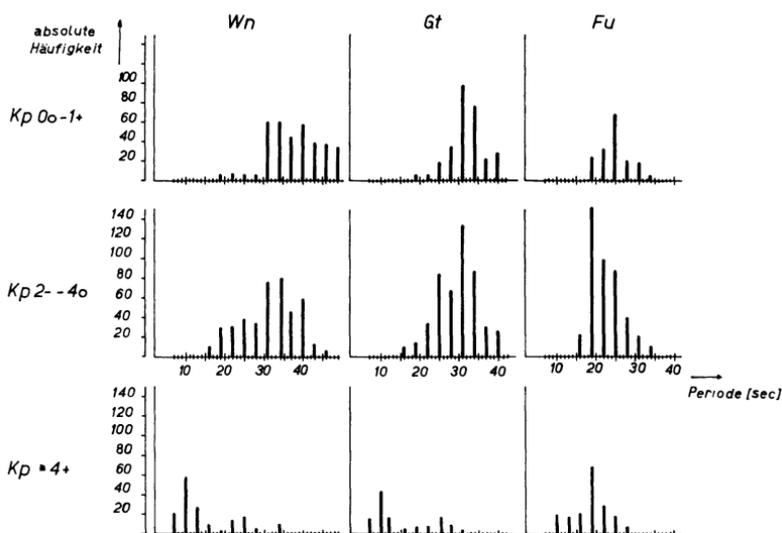


Abb. 5: Die absolute Häufigkeit der pc-Perioden an den drei Stationen für verschiedene Kp-Intervalle.

In Abbildung 5 sind die absoluten Häufigkeiten der auf diese Weise in dem siebenmonatigen Material gefundenen pc-Perioden aufgetragen, und zwar in Abhängigkeit von Kp und der geomagnetischen Breite Φ . Dabei wurde jeweils ein Periodenbereich von 3 sec zu einer Gruppe zusammengefaßt. Man erkennt die Periodenverschiebung sowohl mit Φ als auch mit Kp. Liest man die drei Spalten der Abbildung 5 jeweils von oben nach unten, so sieht man, daß sich die Häufigkeitsmaxima nach links verschieben, d. h. abnehmende Schwingungsdauern mit zunehmender Unruhe. Betrachtet man die oberen Reihen von links nach rechts, so verschieben sich die vorkommenden Perioden ebenfalls nach links; das bedeutet Abnahme der Periode nach Süden. Eine Ausnahme bildet die untere Reihe, die für magnetisch stärker gestörte Zeiten gilt. Hier treten in Wingst und Göttingen vorwiegend Perioden um 10 sec auf; in Fürstentfeldbruck liegt das Maximum der Häufigkeit dagegen immer noch bei 20 sec. Während sich die Periodenspektren von Wingst und Göttingen für alle drei Kp-Intervalle ziemlich überschneiden, überlappt das Periodenspektrum von Fürstentfeldbruck für Kp 0o bis 1+ und $\geq 4+$ diejenigen der beiden anderen Stationen wesentlich weniger. Nur für Kp 2o bis 4o treten an den drei Stationen Perioden aus etwa gleichen Bereichen auf, jedoch mit unterschiedlicher Lage der Häufigkeitsmaxima.

3.3 Die Amplituden der pc's

Die Abbildung 6 zeigt für je eine Station eine bestimmte Kp-Klasse und für alle darin auftretenden Perioden (wobei wieder Mittelwerte für 3-Sekunden-Intervalle gebildet wurden) den über alle Fälle gemittelten Amplitudenverlauf. Die Kurven stellen

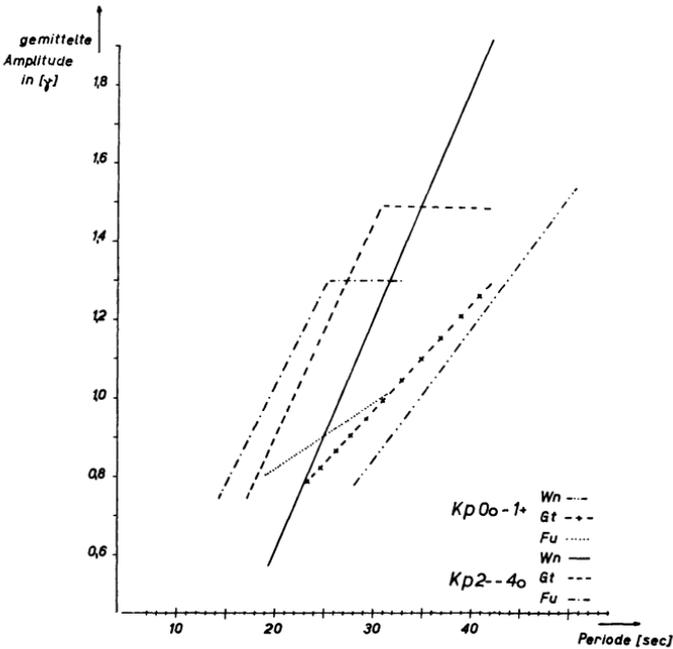


Abb. 6: Die gemittelte Amplitude der pc's an den drei Stationen aufgetragen über der Periode.

also eine Art „Amplitudenresonanzkurve“ dar. Für die Kp-Klasse $\geq 4 +$ wurde kein Amplitudenverlauf eingezeichnet, da nach Abbildung 5 die absolute Häufigkeit der pc's mit Perioden ≥ 15 sec in Wingst und Göttingen zu gering ist, um zuverlässige Aussagen machen zu können. Für diese Kp-Klasse beträgt die gemittelte Amplitude für den Bereich um 10 sec in Wingst 1,16 γ , Göttingen 0,95 γ und Fürstfeldbruck 0,63 γ .

Aus Abbildung 6 geht ferner hervor, daß für die hier betrachteten Stationen die Amplitude stärker mit der Periode und dem Kp-Wert variiert als mit der geomagnetischen Breite. Da die Amplitude der pc's von der Periode abhängt und die Periode sich mit der Breite ändert, wie oben beschrieben wurde, ist das Verhalten der Amplitude äußerst kompliziert.

Für eine bestimmte Periode und eine bestimmte Kp-Klasse ändert sich die Amplitude außerdem unterschiedlich mit der Breite.

4 Schluß

Aus den gefundenen Ergebnissen folgt, daß die Aussagen über Häufigkeit, Amplitude und Periode der pc's für verschiedene Stationen ohne Berücksichtigung des Einflusses der magnetischen Aktivität sehr stark vom Beobachtungsintervall abhängen. Die in der Literatur für verschiedene Beobachtungszeiten angegebenen unterschied-

lichen Aussagen über Auftreten und Erscheinungsbild der pc's können sich, auch wenn die Voraussetzungen gleichartiger Instrumente und Auswertemethoden erfüllt sind, aus einer Nichtbeachtung des Einflusses der magnetischen Aktivität ergeben.

Um diesen Einfluß noch besser erkennen zu können, ist eine weitergehende Unterteilung der Kp-Klassen notwendig. Erst dann kann man auch die wichtige Abhängigkeit der Perioden und Amplituden von der Tageszeit genauer angeben.

Literatur

- [1] BARTELS, J.: Drei Aufsätze in: *Annals of the International Geophysical Year*, Vol. 4, 209—236, London 1957, Pergamon Press; „General Remarks on Geomagnetic Observatories; The Technique of Scaling Indices K and Q of Geomagnetic Observatories; The Geomagnetic Measures for the Time-Variations of Solar Corpuscular Radiation, Described for Use in Correlation Studies in Other Geophysical Fields.“
- [2] DUNGEY, J. W.: *Electrodynamics of the Outer Atmosphere* Penn. State Univ. Ionos. Res. Lab. Sci. Rep., No. 69, 1954.
- [3] SIEBERT, M.: *Geomagnetic Pulsations with Latitude-Dependent Periods and their Relation to the Structure of the Magnetosphere*. *Planet. Space Science*, Vol. 12, 137—147, 1964.
- [4] VOELKER, H.: *Zur Breitenabhängigkeit erdmagnetischer Pulsationen*. *Mitt. Max-Planck-Institut für Aeronomie*, Nr. 11, 1963.

Note on the Propagation of Love-Waves in a Two-Layer Heterogeneous Medium

By S. DUTTA, Calcutta¹⁾

Eingegangen am 8. Januar 1964

Zusammenfassung: Es wird die Ausbreitung von Love-Wellen in einem inhomogenen elastischen Halbraum betrachtet, dem eine ebenfalls inhomogene Deckschicht endlicher Mächtigkeit aufliegt. Es wird angenommen, daß die Rieghheit und Dichte der Deckschicht mit der Funktion $(1 + \beta z)^2$ und des darunterliegenden Mediums mit $(1 + \alpha z)^2$ variiert, wobei α und β Konstanten sind und z den vertikalen Abstand von der Grenzfläche beider Medien bedeutet. Die Periodengleichung wurde numerisch gelöst und die Ergebnisse mit jenen von JEFFREYS [1] und MITRA [2] verglichen.

Abstract

The propagation of Love-Waves in a non-homogeneous semi-infinite medium with a single surface layer of finite depth, which is also assumed to be non-homogeneous has been considered in this problem. The rigidity and density for the upper layer are assumed to vary as $(1 + \beta z)^2$ and those for the lower medium as $(1 + \alpha z)^2$, α, β being constants and Z is the vertical distance measured from the common interface. The periode equation has been solved numerically and the results have been compared with those of JEFFREYS [1] and MITRA [2].

Introduction

SEZAWA [3] (1931) studied the problem of propagation of certain types of elastic waves in a non-homogeneous semi-infinite solid, for which the dilatation Δ and the vertical displacement w was chosen zero and the rigidity was taken to vary linearly with depth. MITRA [2] (1958) considered the problem of propagation of Love waves in a homogeneous semi-infinite medium and density vary exponentially with depth. In this paper we have considered both the lower semi-infinite medium and the upper crust non-homogeneous. In the upper layer we have assumed

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = (1 + \beta z)^2$$

and in the lower medium

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = (1 + \alpha z)^2, \quad \alpha \neq \beta.$$

¹⁾ SUBHAS DUTTA, Department of Mathematics, Bangabasi College. Calcutta (INDIA).

With the origin at the common interface, x -axis is taken in the direction of propagation of waves and z -axis vertically downwards.

The equation of motion is

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{1}$$

The non-zero stress strain relations are

$$\left. \begin{aligned} xy &= \mu e_{xy}, \\ yz &= \mu e_{yz}. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Putting equation (2) in equation (1) we get

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{3}$$

where μ is a function of z .

Putting

$$v = V(z) e^{ik(x-ct)}$$

in equation (3) we get

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{dV}{dz} - k^2 \left(1 - \frac{\rho}{\mu} c^2\right) V = 0. \tag{4}$$

We now transform equation (4) by putting

$$V = \frac{V'}{\sqrt{\mu}}$$

and get thereby

$$\frac{d^2 V'}{dz^2} - \frac{1}{2\mu} V' \frac{d^2 \mu}{dz^2} + \frac{1}{4\mu^2} V' \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 - k^2 \left(1 - \frac{\rho}{\mu} c^2\right) V' = 0. \tag{5}$$

Substituting

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = (1 + \beta z)^2$$

and

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = (1 + \alpha z)^2$$

in succession, in equation (5) we get the corresponding equations for the upper and lower medium as

$$\frac{d^2 V_1'}{dz^2} + m^2 V_1' = 0, \quad (6)$$

and

$$\frac{d^2 V_2'}{dz^2} - n^2 V_2' = 0, \quad (7)$$

where

$$m^2 = k^2 \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right), \quad c_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}},$$

$$n^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right), \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}.$$

Suffixes 1 and 2 stand for the upper and lower medium.

The solutions of equations (6) and (7) suitable for the problem are

$$\text{and} \quad \left. \begin{aligned} V_1' &= A \cos mz + B \sin mz, \\ V_2' &= D e^{-nz}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Hence

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{A \cos mz + B \sin mz}{\sqrt{\mu_0} (1 + \beta z)}; \\ V_2 &= \frac{D e^{-nz}}{\sqrt{\mu_1} (1 + \alpha z)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Now the boundary conditions, viz. the continuity of stresses and displacements at $z = 0$ and the vanishing of the stresses at $z = -H$, give

$$\left. \begin{aligned} A \sqrt{\mu_1} &= D \sqrt{\mu_0}, \\ \sqrt{\mu_0} [Bm - A\beta] &= -\sqrt{\mu_1} D (n + \alpha), \\ A [\cos mH - l_2 \sin mH] &= B [\sin mH + l_2 \cos mH], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

where

$$l_2 = mH \left(\frac{1 - \beta H}{\beta H} \right).$$

Eliminating A, B, D , we obtain the frequency equation

$$\left. \begin{aligned} \tan mH &= \frac{mH - l_1 l_2}{l_1 + mH l_2}, \\ l_1 &= \left(H\beta - \frac{\mu_1}{\mu_0} H\alpha \right) - \frac{\mu_1}{\mu_0} nH. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

where

Putting $kH = x$ and $y = c/c_1$ equation (11) can be written as

$$\frac{x\sqrt{y^2-1}}{\tan x\sqrt{y^2-1}} = \frac{l_1 + x^2(y^2-1)\left(\frac{1-\beta H}{\beta H}\right)}{1 - \left(\frac{1-\beta H}{\beta H}\right)l_1} \tag{12}$$

If $0 < y < 1$, equation (12) can be written as

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}}{\tanh x\sqrt{1-y^2}} = \frac{l_1 + x^2(y^2-1)\left(\frac{1-\beta H}{\beta H}\right)}{1 - \left(\frac{1-\beta H}{\beta H}\right)l_1} \tag{12.1}$$

Now the left hand side of equation (12) is a monotonic decreasing function of y and decreases from $\frac{x}{\tanh x}$ when $y = 0$ to $-\infty$ when $y = \sqrt{1 + \pi^2/x^2}$, whereas the right hand side steadily increases with y . Hence the equation (12) must have a root lying between 0 and $\sqrt{1 + \pi^2/x^2}$ for $c_1 < c < c_2$.

To calculate numerically the dependence of c on k we assume $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{6.47}{4.53}$, JEFFREYS' and MITRA took the corresponding value as $\frac{20}{9}$ and $\frac{20.02986}{9}$ respectively. It is further assumed here that $c_2/c_1 = 4/3$, $c_1 = 3 \cdot 1$ km/sec (as considered by JEFF-

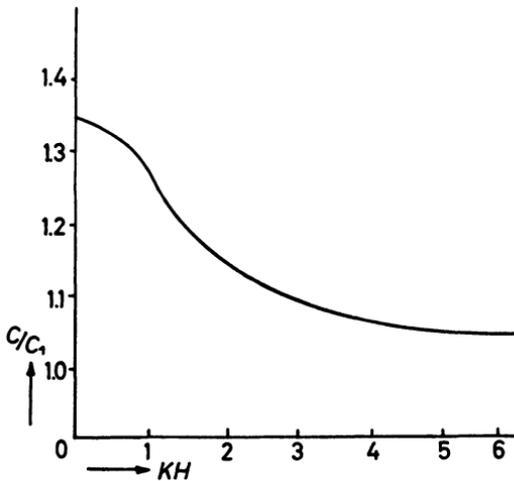


Fig. 1: Dispersion curve calculated from equation (12).

Table 1

c/c_1	kH	c/c_1	kH
1.00	∞	1.20	1.59
1.05	4.62	1.25	1.19
1.10	3.01	1.30	0.84
1.15	2.10	1.333	0.0

REYS') $\beta H = 0.3$ and $\alpha H = 0.1$. Values of kH corresponding to number of different values of c/c_1 have been calculated from equation (12) and are given in Table 1 and in Fig. 1, while JEFFREYS' and MITRA'S values are shown in Table 2 and Table 3, and in Figures 2 and 3 respectively.

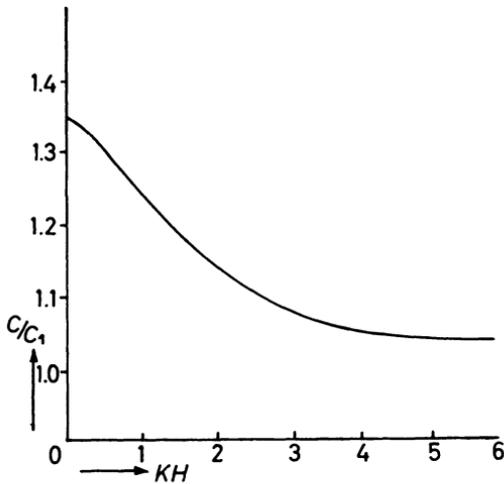


Fig. 2: Dispersion curve from JEFFREY'S model.

Table 2

c/c_1	kH	c/c_1	kH
1.00	∞	1.20	1.463
1.05	4.188	1.25	1.067
1.10	2.664	1.30	0.646
1.15	1.943	1.333	0.0

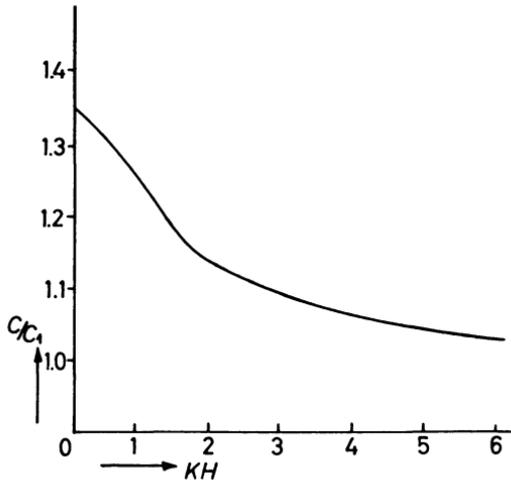


Fig. 3: Dispersion curve from MITRA's model.

Table 3

c/c_1	kH	c/c_1	kH
1.00	∞	1.17	1.5103
1.01	11.7990	1.19	1.3097
1.03	6.0757	1.21	1.1319
1.05	4.3474	1.23	0.9764
1.07	3.4145	1.25	0.8203
1.09	2.8044	1.27	0.6766
1.11	2.3621	1.31	0.3695
1.13	2.0199	1.3333	0.0
1.15	1.7428		

References

- [1] JEFFREYS, H.: Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl. Vol. 1, pp. 282—292 (1935).
- [2] MITRA, M.: Bull. Seism. Soc. of America, Vol. 48, pp. 399—402 (1958).
- [3] SEZAWA, K.: Bull. Earthq. Res. Inst. Imp. Univ. Tokyo, Vol. 9, pp. 310—315 (1931).

Der Zuwachs des Erdradius

Von G. EDER, Gießen¹⁾

Eingegangen am 2. September 1964

Zusammenfassung: Aus der Verlangsamung der Erdrotation und der Häufigkeit radioaktiver Elemente in der Erde kann auf eine gegenwärtige Zunahme des Erdradius von ca. 0,07 cm im Jahr geschlossen werden. In einem einfachen Modell ergibt sich eine Zunahme der Erdoberfläche von 213 auf 510 Millionen km² seit dem Erstarren der Erdkruste. Dies hat weitreichende Folgen für die Kontinentalverschiebung und die Ozeanverteilung auf der Erde im Laufe der Erdgeschichte.

Summary: The increase of the length of the day and the frequency of radioactive elements within the earth can be used to estimate an increase of about 0,07 cm per year for the radius of the earth. A simple model yields an increase of the surface of the earth from 213 to 510 Mill. km² since the stiffening of the earth-crust. This has far-reaching consequences for the continental drift and for the distribution of the oceans during the history of the earth.

Der Paläomagnetismus gibt uns Hinweise auf eine Vergrößerung des Erdradius im Laufe der Erdgeschichte [1]. CAREY, HEEZEN, HILGENBERG und VAN HILTEN geben für die mittlere zeitliche Änderung von R in den letzten $4 \cdot 10^8$ a Werte im Bereich von

$$\dot{R} \equiv \frac{dR}{dt} = (0,34 \pm 0,19) \text{ cm/a} \quad (1)$$

an ($1 \text{ Jahr} = 1 \text{ a} = 3,1557 \cdot 10^7 \text{ s}$; $1 \text{ ae} = 1 \text{ aeon} = 10^9 \text{ a}$). Eine so rasche Zunahme von R dürfte sich aber nur auf Verschiebungen von lokaler und zeitlich begrenzter Bedeutung beziehen, während der Erdradius R , gemittelt über die gesamte Erdoberfläche, wesentlich kleinere Zuwachsraten aufweisen muß. Dies aus den folgenden Gründen:

1. Beim Erstarren der Erdkruste von ca. 3,4 ae war die Erdoberfläche gewiß nicht kleiner als die gegenwärtige Flächenausdehnung der Kontinentalblöcke ($\approx 1,6 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2$). Daraus folgt für die mittlere Zunahme von R die Ungleichung

$$\dot{R} \lesssim 0,082 \text{ cm/a} . \quad (2)$$

2. Die Rotationsdauer d der Erde wird einerseits durch die Gezeitenkräfte, andererseits durch ein Anwachsen von R vergrößert. Ist I das Trägheitsmoment der Erde und

¹⁾ G. EDER, Institut für Theoretische Physik der Universität Gießen.

$$E_R(t) = \frac{2\pi^2 I(t)}{d^2(t)} = I(0) \left(\frac{d(0) R(t)}{R(0) d(t)} \right)^2$$

die Rotationsenergie der Erde, so folgt

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \frac{\dot{E}_R(t)}{2E_R(t)} + \frac{\dot{d}(t)}{d(t)}. \quad (3)$$

Nähern wir die Dichteverteilung im Erdinnern durch

$$\rho(r) = (13,5 - 0,846 \cdot 10^{-8} r/\text{cm}) \text{ g/cm}^3 \quad \text{für } 0 \leq r < 3,47 \cdot 10^8 \text{ cm} \quad (4)$$

$$\rho(r) = (9,76 - 1,03 \cdot 10^{-8} r/\text{cm}) \text{ g/cm}^3 \quad \text{für } 3,47 \cdot 10^8 \text{ cm} < r \leq 6,371 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

an, so folgt für das gegenwärtige Trägheitsmoment $I(0)$, für den Drehimpuls $J(0)$ und die Rotationsenergie $E_R(0)$:

$$I(0) = 0,791 \cdot 10^{45} \text{ gcm}^2; \quad J(0) = 2\pi I(0)/d(0) = 0,577 \cdot 10^{41} \text{ erg/s}, \quad (5)$$

$$E_R(0) = 2\pi^2 \frac{I(0)}{d^2(0)} = 2,10 \cdot 10^{36} \text{ erg}.$$

$d(0)$ ist die gegenwärtige Rotationsdauer der Erde:

$$d(0) = 0,8616409 \cdot 10^5 \text{ s}. \quad (6)$$

Die Rotationsenergie der Erde wird durch die Gezeitenreibung verringert. Die Änderung von E_R beträgt rund [2].

$$\dot{E}_R(0) = (-1,7 \pm 0,3) 10^{19} \text{ erg/s}. \quad (7)$$

Vor 65 Millionen Jahren umfaßte das Jahr 371 mittlere Sonnentage [3], woraus sich eine Rotationsdauer von

$$d(-0,065 \text{ ae}) = 84.830 \text{ s}$$

und eine mittlere Zunahme der Rotationsdauer um

$$d(0) = 2,05 \frac{\text{ms}}{100 \text{ a}} \quad (8)$$

ergibt.

Mit den numerischen Werten (5), (6), (7) und (8) folgt aus (3):

$$\frac{\dot{R}(0)}{R(0)} = (0,11 \pm 0,02) \frac{1}{\text{ae}}, \quad \dot{R}(0) = (0,070 \pm 0,014) \frac{\text{cm}}{\text{a}}. \quad (9)$$

3. Führen wir die Zunahme von R auf die Erwärmung des Erdinneren durch den Zerfall radioaktiver Stoffe zurück, so kann aus der Häufigkeit dieser Stoffe eine obere Schranke für \dot{R} hergeleitet werden. Für die Erwärmung des Erdinneren kommen nur die Isotope U^{238} , Th^{232} (mit ihren radioaktiven Folgeprodukten) und K^{40} in Frage. Stehen Uran und Thorium in radioaktivem Gleichgewicht mit ihren Tochterkernen, so beträgt die Energieerzeugung für die Masseneinheit der drei Elemente [4]

$$27 \mu\text{cal/a} \cdot \text{gK}; \quad 0,71 \text{ cal/a} \cdot \text{gU}; \quad 0,20 \text{ cal/a} \cdot \text{gTh}. \quad (10)$$

Die Häufigkeit dieser Elemente nimmt von der Erdoberfläche zum Erdinnern hin ab, so daß das Vorkommen von K, U und Th in Basalten [5] eine obere Grenze für ihre Häufigkeit in der gesamten Erde bildet:

$$8,4 \text{ mg K/g}; \quad 0,6 \mu\text{gU/g}; \quad 2,7 \mu\text{g Th/g}. \quad (11)$$

Bezeichnen wir mit $\dot{Q}(t)$ die potentielle radioaktive Energie, die zur Zeit t in einem Gramm Basalt enthalten ist, so gilt nach (10) und (11):

$$\dot{Q}(t) = -(0,23 e^{-0,546 t/ae} + 0,43 e^{-0,154 t/ae} + 0,54 e^{-0,050 t/ae}) \text{ (kcal/g} \cdot \text{ae)} \quad (12)$$

und speziell

$$\dot{Q}(0) = -1,19 \mu\text{cal/ga} = -1,19 \text{ kcal/g} \cdot \text{ae}. \quad (13)$$

Durch den radioaktiven Zerfall werden einerseits die innere Energie cT und andererseits die Gravitationsenergie G — beide bezogen auf die Masseneinheit — erhöht (c ist die mittlere spezifische Wärme und T ist die mittlere Temperatur der Masseneinheit).

Vernachlässigen wir die Wärmeableitung vom Erdinnern (ohne Erdkruste) an die Erdoberfläche, so folgt für die mittlere Energie E der Masseneinheit

$$E = G + cT, \quad \dot{E} = \dot{G} + c\dot{T}. \quad (14)$$

Ist $M = 5,98 \cdot 10^{27}$ g die Gesamtmasse der Erde, so folgt für die Dichteverteilung (4) eine gesamte Gravitationsenergie MG :

$$MG(0) = -2,51 \cdot 10^{39} \text{ erg} = -0,601 \cdot 10^{32} \text{ cal}; \quad G(0) = -10,0 \text{ kcal/g}. \quad (15)$$

Wegen $G(t) \sim 1/R(t)$ wird

$$\dot{G} = -G\dot{R}/R; \quad \dot{G}(0) = +10,0 \text{ (kcal/g)} \dot{R}(0)/R(0). \quad (16)$$

Ist α der mittlere kubische Ausdehnungskoeffizient für das Erdinnere, so gilt ferner

$$c\dot{T} = (3c/\alpha)(\dot{R}/R).$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\dot{E} = (-G + 3c/\alpha)(\dot{R}/R), \quad (17)$$

$$0 \gtrsim \dot{E}(0) + \dot{Q}(0) = \{-G(0) + 3c/\alpha\} \dot{R}(0)/R(0) + \dot{Q}(0)$$

oder

$$\dot{R}(0) \lesssim R(0) \frac{-\dot{Q}(0)}{-G(0) + 3c/\alpha} \quad (18)$$

c und α sind nicht bekannt; sie dürften aber in folgenden Bereichen variieren:

$$c = (0,15 \dots 0,25) \text{ cal/g } ^\circ\text{K}; \quad \alpha = (3 \dots 9) 10^{-4}/^\circ\text{K}.$$

Damit wird

$$3c/\alpha = (1,5 \pm 1,0) \text{ kcal/g}. \quad (19)$$

Setzen wir aus (13), (15) und (19) in die Ungleichung (18) ein, so lautet diese numerisch:

$$\dot{R}(0)/R(0) \lesssim (0,10 \pm 0,01) / \text{ae}; \quad (20)$$

$$\dot{R}(0) \lesssim (0,066 \pm 0,006) \text{ cm/a}.$$

Die numerischen Werte in (2), (9) und (20) liegen sehr eng beisammen. Sie schließen jedenfalls die hohen Werte von (1) für die Erdoberfläche als Gesamtheit aus. Sehr wohl ist aber die von EGYED [6] angegebene Variationsbreite

$$\dot{R} = (0,075 \pm 0,025) \text{ cm/a} \quad (21)$$

mit den Bedingungen (2), (9) und (20) vereinbar. Ein Vergleich von (9) und (20) zeigt uns auch, daß die Häufigkeit der radioaktiven Elemente jener in Basalten sehr nahe kommen muß. (11) bedeutet aber einen sehr hohen Anteil von K, U und Th an der Zusammensetzung der gesamten Erde.

Wir wollen im folgenden ein Modell der Erde voraussetzen, bei dem die über die Gesamtmasse der Erde gemittelte Häufigkeit von Kalium, Uran und Thorium gleich der Häufigkeit dieser Elemente in Basalten ist.

Die Zunahme von R führen wir auf die Erwärmung des Erdinnern durch radioaktiven Zerfall zurück. Mit diesen Annahmen wird

$$\dot{E}(t) = -\dot{Q}(t) \quad (22)$$

und

$$\begin{aligned} Q(t) - Q(0) &= E(0) - E(t) = G(0) - G(t) + \frac{3c}{\alpha} \ln \frac{R(0)}{R(t)} \\ &= -G(0) \left\{ \frac{R(0)}{R(t)} - 1 \right\} + \frac{3c}{\alpha} \ln \frac{R(0)}{R(t)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Verwenden wir (12), (15) und (19), so lautet (23) numerisch:

$$0,041 e^{-0,546 t/ae} + 0,28 e^{-0,154 t/ae} + 1,08 e^{-0,050 t/ae} - 0,395 = \frac{R(0)}{R(t)} + 0,344 \log \frac{R(0)}{R(t)}. \quad (24)$$

Der Erdradius als Funktion von t , wie er sich aus (24) ergibt, ist in der Tabelle 1 zusammengefaßt.

Tabelle 1

$\frac{t}{ae}$	$\frac{R(t)}{10^8 \text{ cm}}$	$\frac{F}{10^{16} \text{ cm}^2}$	$\frac{H}{\text{km}}$	$\frac{h}{\text{m}}$
0	637	510	—	875
0,2	624	489	—	677
0,4	611	469	—	454
0,6	598	449	—	204
0,8	585	430	0,82	— 64
1,0	572	411	1,07	
1,2	558	392	1,35	
1,4	545	373	1,65	
1,6	532	356	1,96	
1,8	519	339	2,30	
2,0	506	321	2,67	
2,2	492	305	3,08	
2,4	479	289	3,51	
2,6	466	273	3,99	
2,8	452	257	4,51	
3,0	439	242	5,09	
3,2	426	228	5,72	
3,4	412	213	6,42	

Für die Gegenwart erhalten wir

$$\dot{R}(0) = 0,0657 \text{ cm/a}, \quad (25)$$

einen Wert, der mit (2), (9) und (20) vereinbar ist. Für die gegenwärtige Änderung der Rotationsenergie der Erde folgt

$$\dot{E}_R(0) = -1,845 \cdot 10^{19} \text{ erg/s}. \quad (26)$$

Die Anwendbarkeit unseres Modells bedeutet, daß die Erdoberfläche F in den letzten 3,4 Milliarden Jahren von 213 auf 510 Millionen km^2 gestiegen ist. Zählen wir zum gegenwärtigen Festland (149 Millionen km^2) noch das unterseeische Krustenmaterial hinzu, so könnten wir uns die gegenwärtige Erdoberfläche so umgeschichtet denken, daß wir ein Festland von 213 Millionen km^2 erhalten sowie einen Ozean

mit einer Fläche von 297 Millionen km^2 und einer mittleren Tiefe von 4,61 km. Es liegt daher die Annahme nahe, daß die Erdoberfläche ursprünglich homogen mit Krustenmaterial bedeckt war. Durch die Vergrößerung der Erdoberfläche wurde die Erdkruste aufgebrochen und in Kontinentalschollen geteilt. Dabei wurde etwa ein Drittel des Krustenmaterials in Festlandsockel und Sedimente umgeformt.

Die Vergrößerung der Erdoberfläche hat auch zur Folge, daß die mittlere Tiefe der Ozeane im Laufe der Zeit abnimmt. Da die tatsächliche Höhenverteilung der Kontinentalschollen nicht bekannt ist, müssen wir uns grober Modellvorstellungen bedienen, um die Wasser—Land-Verteilung abzuschätzen. Nehmen wir an, daß $1,37 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3$ Wasser bereits während der ganzen Erdgeschichte in flüssiger Form vorhanden waren, dann ergeben sich die in der Tabelle 1 angegebenen Werte: H ist die Mindesthöhe von Gebirgen, die aus der Wasserfläche hervorragen; h ist die mittlere Höhe des Festlandes über dem Meeresniveau. Die beiden Höhen sind zwar für eine sehr schematische Erdoberfläche berechnet worden, aber sie zeigen doch, daß erst vor 750 bis 850 Millionen Jahren ein wesentlicher Teil des Festlandes aus dem Ozean emporgestiegen ist. Damit mag wohl auch zusammenhängen, daß in den Gesteinen der Erdkruste seit 700 bis 800 Millionen Jahren die sauerstoffreichen gegenüber den sauerstoffarmen Verbindungen überwiegen [7]. Diese Tatsache bedeutet also nicht unmittelbar, daß in jenem Zeitraum eine reduktive Atmosphäre in eine oxydative Atmosphäre übergegangen ist, sondern sie könnte auch bedeuten, daß vor 700 bis 800 Millionen Jahren die Gesteine der Erdkruste erstmalig in großem Ausmaß mit der Atmosphäre in Berührung kamen. Allerdings ist die Entstehung des Wassers im Laufe der Erdgeschichte wahrscheinlicher.

Wegen der Unsicherheit von α läßt sich die Zunahme ΔT der mittleren Temperatur im Erdinnern während der letzten 3,4 ae nur grob abschätzen.

Für

$$\alpha = 6 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{K} \quad \text{erhalten wir} \quad \Delta T = 2.180^\circ\text{K}. \quad (27)$$

Literatur

- [1] VAN HILTEN, D.: Nature 200 (1963) 1277; dort weitere Literaturhinweise.
- [2] DEFANT, A.: Handbuch der Physik 48 (1957) 926; Springer, Berlin 1957.
- [3] WELLS, J. W.: Nature 197 (1963) 948.
- [4] WEDEPOHL, K. H.: In Geophysik, hrsg. von J. Bartels, Fischer-Lexikon 20 (1960) 136; S. Fischer, Frankfurt 1960.
- [5] HEIER, S. und J. J. ROGERS: Geochim. Cosmochim. Acta 27 (1963) 137.
- [6] EGYED, L.: Nature 197 (1963) 1059.
- [7] SCABO, A., A. TUDGE, A. MACNAMURA und H. THODE: Science 111 (1950) 464.

Bestimmung ferri- und antiferromagnetischer CURIE-Temperaturen mittels Differentialthermoanalyse^{1) 2)}

Von H. STILLER und H. VOLLSTÄDT, Potsdam³⁾

Eingegangen am 21. September 1964

Zusammenfassung: Auf der Grundlage von experimentellen und theoretischen Untersuchungen wird gezeigt, daß ferri- und antiferromagnetische CURIEtemperaturen durch endotherme Anomalien der differentialthermoanalytischen Kurven gekennzeichnet sind.

Summary: Experimental and theoretical results show, that ferrimagnetic and antiferromagnetic CURIE-temperatures are characterized by endothermic anomalies of the differential thermo-analytic diagrams.

1. Einleitung

Die CURIE-Punktbestimmung ist eine gebräuchliche Methode, um Informationen über den Charakter der magnetischen Komponenten von Gesteinen zu erhalten. Die Höhe der CURIE-Temperatur des untersuchten Ferri- oder Antiferromagnetikums gibt Auskunft über die Wirksamkeit von Beimengungen wie Titan oder Magnesium im Kristallgitter. Durch derartige Beimengungen wird bekanntlich die CURIE-Temperatur verringert, da die Stärke der magnetischen Austauschwechselwirkungen vom Beimengungsgehalt abhängt (siehe z. B. STILLER und FRÖLICH 1963, 1964). Auch Entmischungsvorgänge in Eisenoxiden kann man durch Messungen der CURIE-Temperatur nachweisen.

Im Geomagnetischen Institut steht für solche CURIE-Punktbestimmungen eine Präzisionsmagnetwaage zur Verfügung. Die CURIE-Temperatur T_c des untersuchten Ferrimagnetikums (gewöhnlich Magnetit) wird dabei aus der Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung erhalten (siehe z. B. STILLER u. a. 1961). Die Bearbeitung großer Meßreihen wird dadurch erleichtert, daß nur geringe Mengen an Magnetit (wenige Milligramm) benötigt werden. Man braucht deshalb nur wenig magnetisches Material durch Separation aus dem Gestein zu gewinnen und kann schneller aufheizen als bei großen Proben.

¹⁾ Herrn Professor Dr. FANSELAU zur Vollendung des 60. Lebensjahres am 30. 4. 1964 gewidmet.

²⁾ Mitteilung aus dem Geomagnetischen Institut der DAW, Nr. 175.

³⁾ Geomagnetisches Institut, Potsdam, Telegrafenberg.

Die geringe Menge an Probenmaterial hat jedoch zur Folge, daß man mit dem Gerät die antiferromagnetische CURIE-Temperatur (NÉEL-Temperatur) T_N von Hämatit wegen des sehr schwachen parasitären Ferromagnetismus nicht bestimmen kann. Da apparative Veränderungen zwecks Messung großer Proben zum Verlust der obengenannten Vorteile des jetzigen Meßvorganges führen würden, erhebt sich die Frage nach einer anderen Methode der CURIE-Punktbestimmung, mit der man auch die NÉEL-Temperatur des Antiferromagnetikums Hämatit erfassen kann. Das bedeutet, daß man die Temperaturabhängigkeit eines anderen physikalischen Parameters, der beim Durchgang durch die CURIE- bzw. NÉEL-Temperatur eine Besonderheit zeigt, für die gewünschten Zwecke auszunutzen versucht. Auf Grund der bekannten Feststellung, daß die CURIE- bzw. NÉEL-Temperatur als Phasenübergang zweiter Art in Erscheinung tritt (siehe z. B. WONSOWSKI 1956, S. 179), verändern sich die zweiten Ableitungen des thermodynamischen Potentials Φ , das heißt, die Wärmekapazität, die Kompressibilität, die Ausdehnungskoeffizienten usw., beim Durchgang durch T_c bzw. T_N sprunghaft. Das bedeutet, daß die Wärmekapazität (bzw. die spezifische Wärme bzw. die Molwärme) offenbar als Bestimmungsparameter für die Übergangstemperaturen geeignet ist.

Eine Veränderung der Wärmekapazität beim Phasenübergang hat eine Wärmetönung am Übergangsbereich zur Folge. Da Wärmetönungen mit der Differentialthermoanalyse feststellbar sind (siehe z. B. SAUERWALD u. a. 1962), erhebt sich die Frage, ob die CURIE- bzw. NÉEL-Temperatur durch differentialthermoanalytische Messungen an Eisenoxiden nachweisbar ist. Über die Ergebnisse derartiger Untersuchungen wird anschließend berichtet.

2. Ergebnisse differentialthermoanalytischer Untersuchungen

a) Methodische Hinweise und Ergebnisse

Das Meßprinzip bei der Differentialthermoanalyse (DTA) kann folgendermaßen gekennzeichnet werden:

In einem Ofen werden die zu untersuchende Probe P^* und die Vergleichsprobe V^* mit konstanter Geschwindigkeit aufgeheizt.¹⁾ Im Falle der Abb. 1 und 2 beträgt die Aufheizgeschwindigkeit $A = 10^0\text{C}/\text{min}$. Die höchste Empfindlichkeitsstufe des Gerätes beträgt $E = 1$. Als Vergleichsprobe wird Al_2O_3 verwendet, das in dem interessierenden Temperaturintervall keine Phasenänderungen zeigt. Registriert wird die Temperaturdifferenz

$$\Delta T = |T_{P^*} - T_{V^*}|, \quad (1)$$

wo T_{P^*} und T_{V^*} die Temperaturen der zu untersuchenden Probe und der Vergleichsprobe sind.

Phasenänderungen in der Probe P^* führen, da sie entweder Wärmeenergie verbrauchen bzw. freisetzen zu unterschiedlichen Zuwachsraten δT_{P^*} der Temperatur

¹⁾ P^* und V^* wird damit pro Zeiteinheit die gleiche Wärmemenge $\delta\theta$ zugeführt.

des Probenkörpers pro Zeiteinheit verglichen mit dem Temperaturzuwachs δT_{V^*} des Vergleichskörpers.¹⁾ Somit zeigt die gemessene Differenz ΔT als Funktion der Temperatur Variationen, die mit den Phasenänderungen in der Probe P^* korreliert werden können. Verbraucht eine Phasenänderung Wärme, so wird die Differenz ΔT notwendigerweise kleiner, da die pro Zeiteinheit beiden Proben zugeführte gleiche

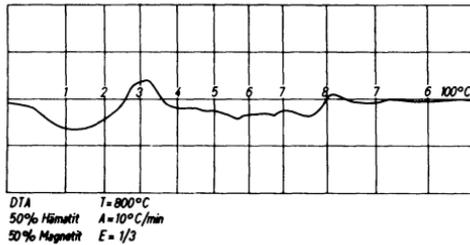


Abb. 1.

Wärmemenge in der Probe P^* eine geringere Temperaturerhöhung verursacht als bei der Probe V^* , und die Kurve $\Delta T = f(T_{V^*})$ zeigt eine Abnahme (endothermer Vorgang). Im Falle eines Wärme abgebenden Vorganges (exothermer Prozeß) ist das Umgekehrte der Fall.

Auf den Abb. 1 und 2 sind zwischen 500 und 600°C und 600 und 700°C die CURIE- bzw. NÉEL-Temperaturen von Magnetit (585°C) und Hämatit (675°C) deutlich als

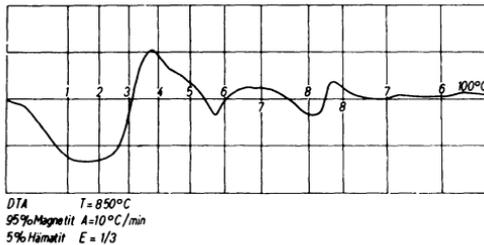


Abb. 2.

endotherme Spitzen auf den DTA-Kurven erkennbar. Durch die Ergebnisse der Abb. 2 wird klar nachgewiesen, daß sogar noch die NÉEL-Temperatur von 5% Hämatit im Gemisch mit 95% Magnetit erkennbar ist. Die Festlegung der CURIE- bzw. NÉEL-Temperatur ist dabei bis auf $\pm 2^{\circ}\text{C}$ genau möglich. Die erforderliche Substanzmenge ist wesentlich größer als bei den thermomagnetischen Untersuchungen.

¹⁾ $\frac{\delta \theta}{\delta T_{P^*}}$ ist die Wärmekapazität des magnetischen Materials. Die Theorie der Wärmekapazität magnetischer Materialien wird deshalb zur Deutung der DTA-Kurven herangezogen, wobei hier nur der magnetische Anteil der Wärmekapazität interessiert.

b) Deutung der endothermen Spitze bei der Übergangstemperatur T_c bzw. T_N auf den DTA-Kurven

Bei fehlendem Magnetfeld unterscheidet man bekanntlich die zwei Wärmekapazitäten C_v (Wärmekapazität bei konstantem Volumen) und C_p (Wärmekapazität bei konstantem Druck). C_p ist praktisch immer größer als C_v , da bei einer Erwärmung bei konstantem Druck Wärme zur Erhöhung der inneren Energie und für die Arbeit gegen die äußeren, auf den Körper wirkenden Kräfte aufgewendet werden muß.

Wird ein magnetisches Feld H angelegt, so muß man H und die Magnetisierung M als neue Parameter berücksichtigen. Deshalb hat man (beispielsweise bei konstantem Druck) zwischen der Wärmekapazität bei konstanter Magnetisierung C_{pM} und der Wärmekapazität bei konstantem Feld C_{pH} zu unterscheiden, wobei folgende Definitionen gelten:

$$C_{pM} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta T} \right)_{pM} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{pM} \quad (2)$$

und

$$C_{pH} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta T} \right)_{pH} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{pH} . \quad (3)$$

θ und S sind die Wärmemenge und die Entropie. Gleichermaßen hat man zwischen den Wärmekapazitäten C_{vM} und C_{vH} bei konstantem Volumen zu unterscheiden. Die Differenz ($C_{pH} - C_{pM}$) ist für die meisten Substanzen größer als Null.

Bei der Differentialthermoanalyse wird mit fehlendem Feld ($H = 0$) gearbeitet. Im Falle eines Ferromagnetikums hat man es also nur mit der Spontanmagnetisierung zu tun. Führt man die relative Magnetisierung $J = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}$ ein, wo σ_s und σ_0 die Spontanmagnetisierungen pro $1 p$ bei der Temperatur T und bei $0 \text{ } ^\circ\text{K}$ sind, so kann man nach BELOW 1959 das thermodynamische Potential Φ in der Nähe der CURIE-Temperatur (wegen der Kleinheit von J) als Reihe in J darstellen:

$$\Phi = \Phi_0 + a'(T - T_c)J^2 + bJ^4 + \dots \quad (4)$$

Der Gleichgewichtszustand ist durch $\frac{\partial \Phi}{\partial J} = 0$ gegeben. Aus der Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J} = 2 a'(T - T_c)J + 4 bJ^3 = 0 \quad (5)$$

folgt für die Temperaturabhängigkeit der relativen Magnetisierung nahe am CURIE-Punkt aus (5):

$$J^2 = \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{a'}{2b} (T_c - T). \quad (6)$$

Für die Entropie S des Ferromagnetikums gilt unter Verwendung von (6):

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial T} - 2a'J^2. \quad (7)$$

$\frac{\partial \Phi_0}{\partial T} = S_0 = S_{T > T_c}$ ist die Entropie des paramagnetischen Zustandes, da bei $T > T_c$ die relative Magnetisierung gleich Null ist. Aus der Entropie S erhält man gemäß (3) bei konstantem Feld $H = 0$ für die Wärmekapazität bei gegebenem Druck die Beziehung

$$C_p = T \frac{\partial S}{\partial T} = C_0 - 2a'T \frac{\partial}{\partial T}(J^2). \quad (8)$$

C_0 ist die Wärmekapazität bei $T > T_c$.

Die Größe $\frac{\partial(J^2)}{\partial T}$ nimmt bis zur CURIE-Temperatur monoton zu, wie aus dem Temperaturverlauf der relativen Magnetisierung folgt, und springt unmittelbar oberhalb T_c auf den Wert Null. Die Anomalie der Wärmekapazität hat somit am CURIE-Punkt einen Maximalwert und verschwindet dann unstetig. Oberhalb T_c gilt $C_p = C_0$. Den Sprung der Wärmekapazität kann man nach BELOW 1959 folgendermaßen bestimmen. Aus der Beziehung (6) folgt

$$\frac{\partial}{\partial T}(J^2) = -\frac{a'}{2b}. \quad (9)$$

Setzt man (9) in (8) ein, so erhält man bei der CURIE-Temperatur mit $T = T_c$

$$C_p - C_0 = T_c \frac{a'^2}{b} = \Delta C_p. \quad (10)$$

ΔC_p stellt also den Sprung der Wärmekapazität bei der CURIE-Temperatur dar, das heißt den beim Durchgang durch T_c verschwindenden ferromagnetischen Teil der Wärmekapazität. BELOW weist darauf hin, daß man die Parameter T_c , a' , b und damit ΔC_p aus Magnetisierungskurven bestimmen kann.

Der Einfluß eines äußeren Feldes kann dadurch berücksichtigt werden, daß man in der Gl. (4) auf der rechten Seite das Energieglied ($-JH$) hinzufügt. Der beschriebene Temperaturverlauf der Wärmekapazität beim Durchgang durch T_c bleibt auch im Fall $H \neq 0$ erhalten, nur daß es sich nicht mehr um die Spontanmagnetisierung, sondern um eine vom Feld abhängige Magnetisierung handelt.

Bei Ferrimagnetika muß man nach BELOW das thermodynamische Potential nach der Resultierenden der Untergittermagnetisierungen entwickeln. Die obigen Beziehungen bleiben dabei erhalten. Bei antiferromagnetischen Materialien wird das thermo-

dynamische Potential Φ nach Parametern entwickelt, die die Untergittermagnetisierungen kennzeichnen. Der Sprung der Wärmekapazität ist durch diese Parameter in einer der Gl. (10) entsprechenden Form darstellbar.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß in die Größe C_0 Beiträge der Gitterschwingungen, der thermischen Ausdehnung und der Elektronen eingehen.

Die oben beschriebene Anomalie der Wärmekapazität hat auf den Verlauf der DTA-Kurven beim Durchgang durch die Übergangstemperatur folgenden Einfluß. Die anomale Zunahme von C_p ist durch diejenige Wärmemenge bedingt, die zum Aufbrechen der Austauschkopplung bei T_c aufgewendet werden muß. Aus diesem Grunde wird durch die ferri- oder antiferromagnetische Probe P^* ein Teil der zugeführten konstanten Wärmemenge $\delta\Theta$ pro Zeiteinheit bei Annäherung an T_c oder T_N zum Zerstören der Austauschwechselwirkung aufgewendet. $\delta\Theta$ kann also nicht in dem Maße wie bei der Vergleichsprobe V^* in eine Temperaturerhöhung der Probe umgesetzt werden. ΔT wird also mit zunehmender Temperatur zum CURIE- bzw. NÉEL-Punkt hin geringer. Bei Erreichen der Übergangstemperatur nimmt die Wärmekapazität sprunghaft ab. Der Temperaturzuwachs δT_{P^*} der ferri- bzw. antiferromagnetischen Probe wird dadurch wieder größer, so daß ΔT mit zunehmender Temperatur wieder größer werden muß. Die beobachteten endothermen Spitzen bei den magnetischen Übergangstemperaturen lassen sich also mit Hilfe des Temperaturverlaufes der Wärmekapazität interpretieren. Die DTA-Kurven sind für die in der Einleitung genannten Meßzwecke geeignet.

3. Schlußbemerkungen

Die hier durchgeführte Interpretation einer Anomalie der DTA-Kurve mit Hilfe der Wärmekapazität ist grundsätzlich auch auf andere peaks anwendbar. Durch die Gl. (8) ist ein Zusammenhang zwischen den Temperaturabhängigkeiten der Wärmekapazität und der Spontanmagnetisierung eines Ferro- oder Ferrimagnetikums gegeben. Die DTA-Kurve wird von der Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität wesentlich beeinflußt. Da man mit der Thermomagnetwaage die Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung von Magnetiten, die derjenigen der Spontanmagnetisierung entspricht, messen kann, bietet sich ein unmittelbarer Vergleich der Aussagefähigkeit der thermomagnetischen und der differentialthermoanalytischen Methode an. Ein solcher Vergleich wird in einer anderen Arbeit (VOLLSTÄDT und STILLER 1964) durchgeführt.

4. Danksagung

Für die Bereitstellung der DTA-Apparatur und die Durchführung der Messungen danken wir Herrn Professor Dr. SCHWARZ, Herrn Dipl.-Ing. BUTSCHKE und Herrn Dipl.-Ing. STORM vom Institut für Baustoffkunde an der Hochschule für Architektur Weimar.

Literatur

- BELOW, K. P.: Magnitnye prewrascchtschenija, 1959, Moskwa, Gosisdat.
- SAUERWALD, F., S. HÖSEL und M. WOBST: Wiss. Z. d. M.-Luther-Univ. Halle, XI (1962), 879.
- STILLER, H. und F. FRÖLICH: Phys. stat. sol. 3 (1963), K 228.
- STILLER, H. und F. FRÖLICH: Z. Geophysik 30 (1964), 13.
- STILLER, H., F. CH. WAGNER und F. FRÖLICH: Geofisica pura e appl. 49 (1961/II), 129.
- VOLLSTÄDT, H. und H. STILLER: Wiss. Z. d. Humboldt-Univ. Berlin, im Druck.
- WONSOWSKI, S. W.: Moderne Lehre vom Magnetismus, 1956, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Anmerkung bei der Korrektur:

Die Anwendung der Differential-Thermoanalyse auf Titano-Magnetite aus sächsischen Basalten (VOLLSTÄDT, H., Dissertation 1965) ergibt, daß für diese natürlichen Substanzen ein ganzer Curietemperaturbereich charakteristisch ist, der durch eine entsprechend breite Anomalie auf den DTA-Kurven gekennzeichnet wird. VOLLSTÄDT zeigt, daß man bei geeigneter Auswertung einen Curietemperaturwert bestimmen kann, der mit dem aus den Temperaturabhängigkeiten der Sättigungsmagnetisierung erhaltenen Wert übereinstimmt, wobei die Festlegung von T_c bei beiden Methoden auf etwa $\pm 3-4^\circ\text{C}$ genau möglich ist, was für gesteinsmagnetische Anwendungen noch einen erträglichen Fehler bedeutet.

Der Informationsgehalt des DTA-Verfahrens für gesteinsmagnetische Zwecke kann sinnvoll erweitert werden, wenn man neben unmagnetischem auch magnetisches Vergleichsmaterial verwendet (STILLER, H., Acta Technica, Series Geodätica et Geofisica, 1965, Heft 3/4, Ungarn). In dieser Arbeit wird auch die theoretische Deutung der DTA-Kurven von antiferromagnetischen Substanzen behandelt.

Für eine physikalische Festlegung der Curietemperatur ist gemäß einer Arbeit von HOFMANN und STILLER (in Vorbereitung) die Methode der thermodynamischen Koeffizienten, wie sie von BELOW 1959 beschrieben wird, gegenwärtig offenbar am günstigsten.

Briefe an den Herausgeber

Eine gravimetrische Untersuchungsmethode für oberflächennahe Dichtestörungen

Von S. THYSSEN-BORNEMISZA, New York¹⁾

Untersuchungen von Dichtestörungen nahe der Erdoberfläche sind öfters mit engen Schweremessungen versucht worden. So berichtet COLEY [1, 2] über Schweremessungen auf Sanddünen sowie über die mögliche Feststellung unterirdischer Hohlräume oder Höhlen durch Engmessungen an der Oberfläche. Ähnliche Untersuchungen betreffen verschüttete voreiszeitliche Täler (D. H. HALL und Z. HAJNAL [3]) und alluviale Bedeckungen von geologischen Strukturen (S. THYSSEN-BORNEMISZA und W. F. STACKLER [4]).

Im australischen Minengebiet von Tennat Creek sind kürzlich ausgedehnte Schweremessungen mit sehr kleinen Stationsabständen vorgenommen worden, um etwa vorhandene Haematitkörper in geringen Tiefen zu lokalisieren. Diese Schwerewerte lieferten nach dem bekannten Verfahren Horizontalgradienten der Schwerkraft (S. THYSSEN-BORNEMISZA und W. F. STACKLER [5, 6]), die eine ausgezeichnete Abgrenzung der vorhandenen Schwereanomalien ermöglichten. Die Abb. 1 zeigt ein Teilprofil, aus einer Gruppe von Parallelprofilen entnommen, bestehend aus zwei Schwereprofilen und dem daraus berechneten Gradientenprofil von 41 Horizontalgradienten. Abb. 2 bringt das eigentliche Meßschema, das stets benutzt wurde..

Der Gradient G_2 kann beispielsweise aus den Schweredifferenzen von vier Stationen nach $(a_3 - b_1)$ und $(b_3 - a_1)$ bequem bestimmt werden. Horizontalgradienten sind bereits mehrfach bei der Untersuchung von schwer zugänglichen Gebieten benutzt und die damit verbundenen technischen Einzelheiten veröffentlicht worden (S. THYSSEN-BORNEMISZA und W. F. STACKLER [7, 8]). Neu ist hier die Anwendung der Gradiententechnik auf sehr eng vermessene Schwerewerte, um eine bessere Analyse von Schwereanomalien in bodennahen Schichten zu ermöglichen.

Zur Zeit werden vom „Department of Sanitary Engineering and Water Resources“ auf der JOHN-HOPKINS-Universität in Baltimore (USA) unter Mitwirkung des Verfassers Untersuchungen vorgenommen, um die hier beschriebene Gradientenmethode auch der Grundwasserforschung (S. THYSSEN-BORNEMISZA [9, 10]) nutzbar zu machen.

¹⁾ S. THYSSEN-BORNEMISZA, The Plaza, New York City (USA).

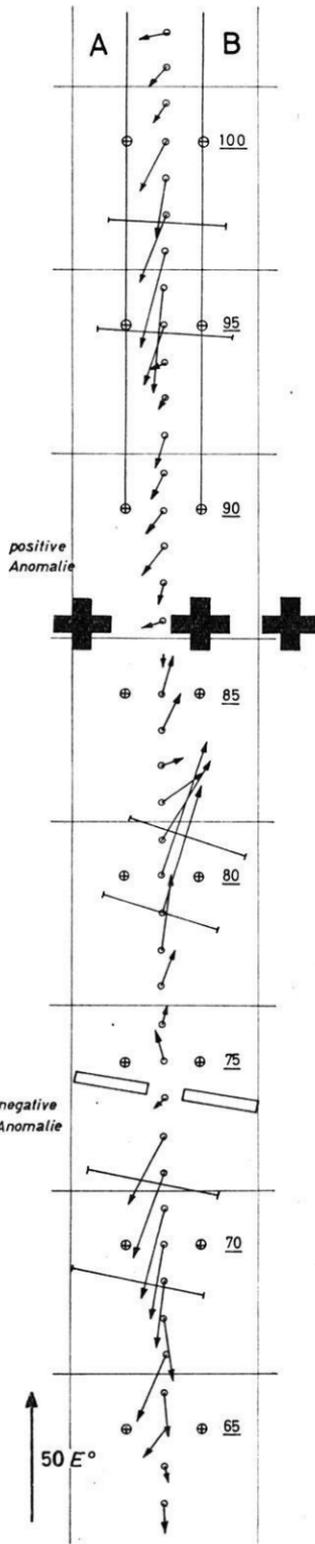


Abb. 1:

Ein Teilprofil 41 Horizontalgradienten umfassend, die aus Schwerewerten der Profile A und B bestimmt sind.

Die Ziffern rechts kennzeichnen jeden fünften Schwerwert auf Profilen A und B.

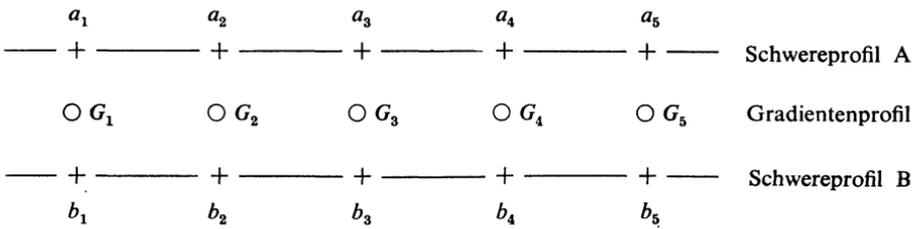


Abb. 2: Das Meßschema des Profils von Abb. 1. Sämtliche Punktabstände betragen rund 15 m oder genau 50 Fuß. Die Meßgenauigkeit war besser wie 0,01 mgal und ermöglicht die Gradienten mit $\pm 5 E^\circ$ Genauigkeit anzugeben.

Besonderer Dank gebührt dem Chefgeophysiker Dr. W. F. STACKLER von Geosurveys (Australia) Ltd. in Adelaide, unter dessen Leitung die Messungen entstanden sind. Mein Dank geht ebenfalls an den Direktor und Chefgeologen R. C. SPRIGG von Geosurveys und an die Australian-Development-Gesellschaft für die Zurverfügungstellung des Materials für wissenschaftliche Zwecke.

Literatur

- [1] COLLEY, G. C.: Gravity surveys in heavy sand dunes. *Geophysics (USA)*, 26 (1961), 4, S. 490—498.
- [2] —, The detection of caves by gravity measurements. *Geophysical Prospecting* 11 (1963), 1, S. 1—9.
- [3] HALL, D. H. und Z. HAJNAL: The gravimeter in studies of buried valleys. *Geophysics (Supplement)*, 27 (1962), 6, Teil II, S. 939—961.
- [4] THYSSEN-BORNEMISZA, S., und W. F. STACKLER: Micro-Gravimetric measurements over known geologic structure. *J. Alberta Soc. of Petroleum Geologists (Canada)*, 8 (1962), 2, S. 57—61.
- [5] —, Determination of the horizontal gravity gradient with the gravimeter. *J. of the Alberta Soc. of Petroleum Geolog. (Canada)*, 8 (1960), 10, S. 262—270.
- [6] —, The average horizontal gravity gradient. *Geophysics (USA)*, 27 (1962), 5, S. 714.
- [7] —, A possible application to geophysical exploration of the average horizontal gravity gradient using the gravity meter. *J. of the APEA (Australien) für das Jahr 1963*, S. 52—57.
- [8] —, Average gravity gradients in geophysical exploration. Vortrag auf der 25. Jahrestagung der E.A.E.G. (1964); Abstracts in *Geophysics (USA)*, 29 (1964), 5, S. 898 bis 899.
- [9] THYSSEN-BORNEMISZA, S.: Über die mögliche Beeinflußbarkeit der Drehwaage durch Grundwasserschwankungen. *Zeitschr. f. Geophysik* 17 (1942), 7/8, S. 279—281.
- [10] —, Über den Einfluß der durch den Wasserhaushalt hervorgerufenen Inhomogenität des Erdbodens auf Schwermessungen. *Beitr. angew. Geophys.* 10 (1943), 2, S. 185—202.

Mitteilungen

Montanwissenschaftliche Festtage der Bergakademie Freiberg

Aus Anlaß der 200. Wiederkehr des Gründungstages der Bergakademie Freiberg werden vom 9. bis 14. November 1965 die Montanwissenschaftlichen Festtage in Freiberg abgehalten. Umrahmt von zahlreichen Festakten und kulturellen Veranstaltungen finden vom 9. bis 11. November wissenschaftliche Vortragsveranstaltungen über folgende Themen statt:

Grundlagenwissenschaften,
Geowissenschaften,
Bergbau,
Hüttenwesen,
Planung und Leitung der Volkswirtschaft,
Geschichte des Bergbaus und Hüttenwesens.

Am 15., 16. und 17. 11. schließen sich Exkursionen, Kolloquien und Absolvententreffen an.

Neben einer Reihe von Festvorträgen stehen insgesamt 56 Fachvorträge auf dem Programm.

Inter-Union Symposium on Solar Terrestrial Physics

Ende August 1966 wird in Belgrad ein Symposium über Solar-terrestrische Physik stattfinden, das von der Union International Radio Scientific gemeinsam mit der International Astronomical Union (IAU) und der International Association of Geomagnetismus and Aeronomy (IAGA) veranstaltet wird.

Das wissenschaftliche Programm sieht folgende Themen vor:

1. Solare Partikel-Emission und interplanetare Magnetfelder,
2. Wechselwirkung zwischen Sonnen-Plasma und Geomagnetischem Feld unter ruhigen Bedingungen,
3. Desgl. unter gestörten Bedingungen,
4. Energiereiche geladene Teilchen in der Magnetosphäre,
5. Temperatur neutraler und geladener Teilchen in der Ionosphäre und Magnetosphäre.

Verhandlungssprachen sind Englisch und Französisch.

Nähere Einzelheiten durch:

Yugoslav National Committee of URSI, Belgrade P.O.B. 356.

Buchbesprechungen

K. E. BULLEN: *An Introduction to the Theory of Seismology*. 3. Auflage, 381 Seiten. Cambridge University Press, 1963. Preis: \$ 9,50.

Seit seinem Erscheinen im Jahre 1947 hat sich das Lehrbuch von K. E. BULLEN einen festen Platz innerhalb der zur Zeit erhältlichen Lehrbücher der Geophysik erobert. Nachdem die 2. Auflage (1953) nur geringfügige Änderungen enthielt, ist es angesichts des Mangels an guten Lehrbüchern sehr zu begrüßen, daß bei der jetzt vorliegenden 3. Auflage der ständig weiterschreitenden wissenschaftlichen Entwicklung Rechnung getragen und der Stoff dem neuesten Erkenntnisstand angepaßt wurde.

Die Änderungen in den einleitenden Kapiteln 1 bis 8, in denen die Grundlagen der Mechanik deformierbarer Medien und der Wellenausbreitung bei verschiedenen Randbedingungen behandelt werden, sind gering und betreffen im wesentlichen nur Verbesserungen didaktischer Art. Besonders hervorzuheben ist die Tatsache, daß im Gegensatz zu vielen anderen Lehrbüchern bei der Behandlung der Elastizitätstheorie konsequent die elegante und platzsparende Tensorrechnung verwendet wurde.

Im Kapitel 9, welches die Theorie der Seismographen enthält, im Kapitel 10 über die allgemeinen Auswertemethoden und im Kapitel 11 über die seismologischen Observatorien wurden in einigen hinzugefügten Abschnitten neuere Entwicklungen und Verfahren berücksichtigt.

In den folgenden Kapiteln 12 bis 18, in welchen die Anwendungen der in den Eingangskapiteln beschriebenen Methoden dargestellt werden, sind die Änderungen und Erweiterungen beträchtlich und haben zu einer weitgehenden Neufassung geführt.

In diesen Kapiteln werden folgende Themen behandelt:

Kap. 12: *Seismology and the Earth's Upper Layers* (24 S.)

Es befaßt sich mit Auswerteverfahren zur Untersuchung der Erdkruste mittels Erdbeben und Explosionen und enthält einen kurzen Überblick über die derzeitige Kenntnis der Krustenstruktur unter Ozeanen und Kontinenten, der physikalischen Eigenschaften des Krustenmaterials. Es schließt mit einem Hinweis auf das Mohole-Projekt und ähnliche Vorhaben.

Kap. 13: *Seismology and the Earth's Deep Interior* (33 S.)

Ausgehend von den seismischen Ergebnissen werden verschiedene Modelle der Beschaffenheit des Erdinnern beschrieben und diskutiert.

Kap. 14: *Long-Period Oscillations of the Earth* (16 S.)

Dieses Kapitel wurde völlig neu geschrieben und enthält neben den theoretischen Grundlagen auch numerische Ergebnisse neuerer Messungen.

Kap. 15: *Earthquake Occurrence* (25 S.)

Nach einer allgemeinen Betrachtung von Energie und Magnitude werden die Ursachen von Erdbeben behandelt. Eine Übersicht über die geographische Verteilung der Bebenherde leitet über zu einer eingehenden Darstellung möglicher Herdmechanismen. Abschließend wird auf Fragen der Bebenvorhersage eingegangen.

Kap. 16: *Seismology and Nuclear Explosions* (13 S.)

Dieses Kapitel wurde, ebenso wie das folgende 17., neu hinzugefügt.

Die große Bedeutung von Nuklearsprengungen für die Untersuchung tieferer Erdschichten wird ausführlich dargelegt. Ein Abschnitt über das Problem der Entdeckung unterirdischer Nuklearsprengungen durch seismische Messungen schließt sich an,

Kap. 17: *Extra-Terrestrial Seismology* (11 S.)

In einer knappen Übersicht werden die Möglichkeiten zur Untersuchung der Beschaffenheit des Inneren von Mond, Venus, Mars und anderen Planeten mit Hilfe seismischer Instrumente dargestellt, die mit Raketen zu den Himmelskörpern transportiert werden.

Kap. 18: *Further Topics* (14 S.)

Dieses Schlußkapitel gibt eine Zusammenstellung weiterer seismischer Teilgebiete, wie z. B. Wirkung von Erdbeben; Tsunamis; Mikroseismik; Modellseismik.

Die bisher so außerordentlich klare und straffe Gliederung seines Aufbaues, welcher der Band zusammen mit der didaktisch sehr geschickten Darstellung des Stoffes seine Beliebtheit und weite Verbreitung verdankt, ist auch in dieser neuen erweiterten Auflage erhalten geblieben.

Als Standardlehrbuch für Studierende der Geophysik und ihrer Nachbarwissenschaften bedarf es wohl keiner weiteren Empfehlung mehr. Dank seines überaus reichhaltigen Literaturverzeichnisses, welches die vertiefte Beschäftigung mit Einzelfragen erleichtert, ist der Band darüber hinaus für alle an der Seismologie Interessierten bestens als Einführung geeignet.

H. BURKHARDT

S. F. MASON: *Geschichte der Naturwissenschaft*. Alfred Kröner Verlag, Stuttgart 1961. KTA 307; 724 S., DM 17,50.

Diese aus dem Englischen übersetzte „Geschichte der Naturwissenschaft in der Entwicklung ihrer Denkweise“ wurde von dem jetzigen Lehrstuhlinhaber für Chemie an der Universität Exeter geschrieben; S. F. MASON war jedoch davor 6 Jahre lang Lektor für Geschichte der Naturwissenschaft an der Universität Oxford.

Die Aufgabenstellung charakterisiert der deutsche Herausgeber: „Was aber wissen wir davon, auf welche Weise sich naturwissenschaftliches Denken geformt und entwickelt hat?“ „Unsere heutige Naturwissenschaft und die daraus hervorgegangene Technik sind das eigene und erst später von anderen Kulturen übernommene Werk des Abendlandes. Sollte es nicht darum die besten Kräfte unserer Geschichtsforscher reizen, ihren Entwicklungsgang aufzuheben und in das allgemeine Bewußtsein zu heben?“

MASON versucht durch eine Zusammenschau aller naturwissenschaftlichen Gebiete, von der antiken Astronomie bis zur modernen Genetik und Kosmologie, die Entwicklung der wissenschaftlichen Denkweise darzustellen, und zwar im Zusammenhang mit den Strömungen der jeweiligen Zeit, den religiösen und den philosophischen. Das umfangreiche Gebiet ist in 6 Abschnitten dargestellt, von denen die ersten beiden relativ kurz (140 S.) die Entwicklung vom Altertum bis zur kopernikanischen Wende schildern; dem eigentlichen Zeitalter der Naturwissenschaft sind dagegen 550 Seiten gewidmet. Während im Altertum nur zahlreiche Einzelentdeckungen in den verschiedensten Erdteilen gemacht worden sind, so in China, Indien, Babylonien, Griechenland, wird die im 16. Jahrhundert einsetzende moderne, systematische Naturforschung ausschließlich von den europäischen Völkern getragen. Die Entwicklung auf den verschiedensten Gebieten wird geschildert, so bezüglich der Mathematik, der Astronomie, der Mechanik, der Optik, der Chemie und Medizin, der Biologie.

Hervorzuheben sind die zahlreich eingestreuten Zitate, die dem Leser einen kurzen Eindruck vom Ursprünglichen vermitteln, wie auch das vom Herausgeber hinzugefügte Quellenverzeichnis. Eine ausgedehnte Bibliographie und ein Register fehlen nicht. — Als Anstoß, sich mit der Geschichte der Naturwissenschaft zu beschäftigen, hat das Buch seine Bedeutung; es enthält viel Interessantes.

Seine prinzipielle Schwäche ist allerdings, daß die *gesamte* Entwicklung der Naturwissenschaft mit der heutigen Denkweise betrachtet wird, die aber ja erst mit der Ausbildung der modernen Naturwissenschaft seit dem 16. Jahrhundert entstanden ist. Daß die menschliche Geschichte primär eine Geschichte der Entwicklung des menschlichen Bewußtseins ist, kommt nicht zum Ausdruck. So ist die eigentümliche Anschauung des PARACELSUS offenbar gar nicht verstanden. Und z. B. die Naturbetrachtung GOETHES im Verhältnis zu der NEWTONS, diese fundamentale Differenz, die immer noch, ja mehr und mehr die Naturforscher bewegt, ist nicht dargestellt. Gerade da liegen aber die Schlüssel, die man braucht, wenn man zu dem so dringend notwendigen Selbstverständnis der Naturwissenschaft wirklich kommen will.

HEINRICH SCHWENTEK

W. R. JUDD (editor): *State of Stress in the Earth's Crust*. An international conference held at Santa Monica, California, June 1963. — A Rand corporation study. American Elsevier Publ. Comp. Inc. New York 1964, 732 S., DM 63,50.

Es handelt sich bei dieser Veröffentlichung um eine Zusammenfassung von Vorträgen und Diskussionsbeiträgen, die zum Thema *Felsmechanik* auf einer Tagung im Jahre 1963 gehalten worden sind. Die Probleme der Felsmechanik werden im allgemeinen von der Technik gestellt. Es handelt sich vor allem um die Änderung des mechanischen Spannungszustandes im anstehenden Gestein durch Tunnelbauten, Bergwerke, Kraftwerksanlagen und Bohrlöcher. Ebenso werden die Fragen der statischen und dynamischen Belastung des geologischen Untergrundes ausführlich diskutiert. Das gilt besonders für die Verwendung nuklearer Explosionen zur Bewegung von Gesteinsmassen. Die Erörterung der Grundlagen der Felsmechanik eröffnet einen Einblick in die prinzipiellen Schwierigkeiten bei der theoretischen Behandlung felsmechanischer Probleme. Die von der Elastizitätstheorie zur Verfügung gestellten Ansätze setzen homogenes Material voraus. Gesteine sind durch ihr kristallines Gefüge jedoch inhomogen und anisotrop. Ihr Verhalten gegenüber Spannungsfeldern wird daneben durch Schichtung, Schieferung und Verwerfungen sehr wesentlich bestimmt.

Um Anhaltspunkte über die Festigkeit eines Gesteins zu erhalten, werden Bruchversuche im Laboratorium vorgenommen. Die Deutung der Brüche vor allem durch die Theorie der „spontanen“ Mikrorisse von Griffith wird gründlich diskutiert. Durch Einführung der von der Rheologie entwickelten Vorstellungen kann heute eine bessere Übereinstimmung zwischen theoretischen Untersuchungen und Laboruntersuchungen einerseits und dem Verhalten des Gesteins in der Natur andererseits hergestellt werden. Neben Elastizitätstheorie und Rheologie bildet die spannungsoptische Untersuchung an deformiertem Material wie auch die mikroskopisch feststellbare Veränderung im Gefüge und innerhalb einzelner Kristalle eine wichtige Basis für die Grundlagenforschung der Felsmechanik. Für die laufende Kontrolle des Spannungszustandes im Gestein bei Tunnel- und Kraftwerksanlagen dienen kontinuierliche Beobachtungen der Deformation im Gestein, Änderungen im Verhalten des Untergrundes beim Durchgang seismischer Wellen und Gefügeanalysen an Gesteinsproben. Durch eine größere Anzahl von Meßpunkten kann das Spannungsfeld und seine Störungen durch künstliche Eingriffe in einem Gesteinskomplex festgelegt werden. Im abschließenden Teil werden die aus wissenschaftlichen Untersuchungen gewonnenen Ergebnisse auf praktische Probleme im Bergbau, bei der Errichtung von Staudämmen und bei der Konstruktion von Schutzräumen im anstehenden Gestein für den Fall von Angriffen mit nuklearen Waffen angewandt.

Die Einbeziehung der Diskussionsbeiträge läßt nicht nur die Fortschritte auf dem Gebiet der Felsmechanik erkennen, sondern auch die offenstehenden Fragen deutlich hervortreten. Das dürfte bei gleichzeitiger Beachtung der sehr umfangreichen Literaturnachweise zu einem objektiven Bild des Standes der Forschung verhelfen.

Der Tagungsbericht ist innerhalb der Geophysik besonders für Seismologen und Tektoniker von Interesse.

G. SCHNEIDER

V. A. MAGNITSKII (General Editor): *Problems of Theoretical Seismology and Physics of the Earth's Interior*. Published by the Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem 1963, 148 S., \$ 6,50.

Das Buch ist eine Sammlung von 13 Aufsätzen bekannter russischer Wissenschaftler und behandelt Probleme der physikalischen Eigenschaften des Erdinnern und der Ausbreitung seismischer Wellen mit modernen Methoden der Mathematik und Physik. Eingehend wird das Verhalten von Materie bei Drucken und Temperaturen untersucht, wie sie im oberen Erdmantel angenommen werden. Die Verfasser gehen von den Erkenntnissen der Festkörperphysik und experimentell gewonnener Daten aus und berechnen die Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten fester Körper vom Druck und die Abhängigkeit der Viskosität und des Schermoduls von der Temperatur. Ferner wird aus Messungen an Stoßwellen eine Zustandsgleichung für Kupfer, Silber und Gold bei Drucken von $10\text{--}10^3$ Kilobar erhalten. In einem weiteren Kapitel wird eine Näherungslösung gegeben, mit der die Umwandlung fester Materie bei hohen Drucken in eine Metallphase gegeben wird. Mit festem Helium als Beispiel wird der Lösungsweg vorgeführt.

Eine andere Arbeit gibt einen Zusammenhang zwischen Wärmeleitfähigkeit und Temperatur, bzw. zwischen der Wärmeleitfähigkeit und der Tiefe in der Erde. Es wird gezeigt, daß bei hohen Temperaturen die Wärmeleitfähigkeit fast ausschließlich auf der Diffusion von Excitonen beruht und exponentiell mit der Temperatur zunimmt. Da bei niederen Temperaturen die Wärmeleitfähigkeit mit zunehmender Temperatur abnimmt, bekommt man ein Minimum des Koeffizienten der Wärmeleitung bei etwa 100 km Tiefe. Ebenfalls dem Wärme- fluß ist ein Artikel mit der Überschrift „Über die statistische Theorie der nichthomogenen Turbulenz“ gewidmet.

Die Kapitel über Wellenausbreitung behandeln besonders die Ausbreitung seismischer Wellen in heterogenen und nicht voll-elastischen Medien. Beispiele dafür sind die Ausbreitung von Kugelwellen in Flüssigkeiten mit veränderlicher Kompressibilität und die Ausbreitung von Longitudinal- und Transversalwellen in einem unendlich ausgedehnten MAXWELLSchen Medium. Im 2. Beispiel wird besonders die Verformung einer Sprungfunktion und von einfachen und zusammengesetzten Rechteckimpulsen ausführlich dargestellt.

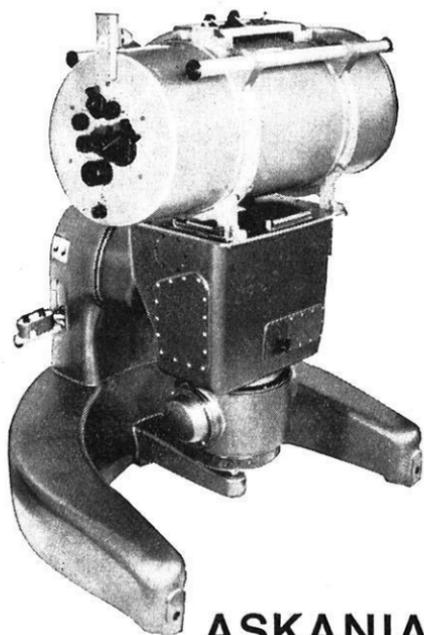
Dem Herdmechanismus von Erdbeben sind zwei Kapitel gewidmet. In einem Kapitel wird eine, allerdings etwas komplizierte, Methode angegeben, um mit einem Netzwerk von Nahbebeneseismographen die Richtung der im Herd auftretenden Verschiebungen zu bestimmen. Das andere Kapitel beschreibt die Änderung des statischen Spannungsfeldes um einen ellipsenförmig gedachten Erdbebenherd.

Ein Aufsatz ist der Deutung der großräumigen Schwereanomalien auf der Erde gewidmet. Der Verfasser führt diese Anomalien auf die unregelmäßige Verteilung der radioaktiven Elemente und die daraus resultierenden Temperaturinhomogenitäten im oberen Bereich des Erdmantels zurück.

R. SCHICK



CONTI ELEKTRO ASKANIA-WERKE



ASKANIA- SEEGRAVIMETER nach Graf

in Verbindung mit dem bewährten Kreiseltisch

Schweremessungen auf allen Weltmeeren
Hohe Genauigkeit, auch bei sehr rauher See:
 ± 1 mgal in ruhigen Schelfgebieten
 ± 5 mgal bei Vertikalbeschleunigungen
von $\pm 200\,000$ mgal

Nähere Informationen durch
CONTI ELEKTRO ASKANIA-WERKE, Berlin 42

4504 Sd

CONTINENTAL ELEKTROINDUSTRIE AKTIENGESELLSCHAFT · DUSSELDORF

CONTI ELEKTRO



SCHORCH



VOIGT & HAEFFNER · SCHORCH-WERKE · ASKANIA-WERKE · KABELWERK VOHWINKEL

Demnächst erscheint

GEOPHYSIKALISCHE MONOGRAPHIEN, BAND 4

Geophysikalische Meßverfahren in Bohrungen

Von Dr. R. Meinhold, Freiberg i. Sa.

1965. 237 Seiten mit 125 Abbildungen und 13 Tabellen.
Gr.-8°. Ganzleinen etwa 77,— MDN

In dem Buch werden die Methoden der geophysikalischen Bohrlochmessungen und die Interpretation der durch sie erzielten Ergebnisse umfassend dargestellt. Der Verfasser, der als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Bergakademie Freiberg tätig ist, hat sich das Ziel gesetzt, vor allem den in der Praxis arbeitenden Geophysikern ein verlässliches Hilfsmittel in die Hand zu geben und den Anfängern unter ihnen den Übergang vom Studium zur beruflichen Tätigkeit zu erleichtern. Er stellt in seinen Ausführungen die modernen und in Zukunft für den Bergbau besonders wichtigen Verfahren bewußt in den Vordergrund, denen gegenüber die älteren Methoden etwas zurücktreten.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung



**Akademische Verlagsgesellschaft
Geest & Portig K.-G., Leipzig**



Seismik

Seeseismik

Gravimetrie

Aero-Magnetik

Geo-Elektrik

Sondermessungen

Das führende Unternehmen für geophysikalische Untersuchungen

Wollen Sie mitarbeiten?

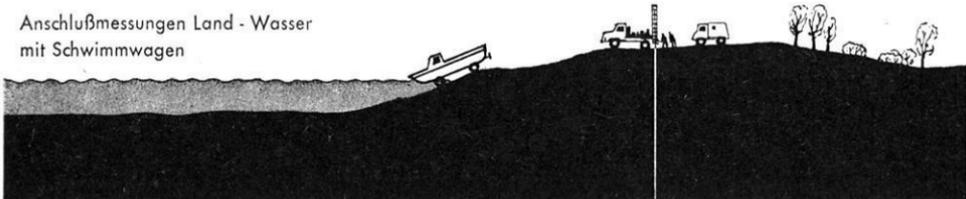
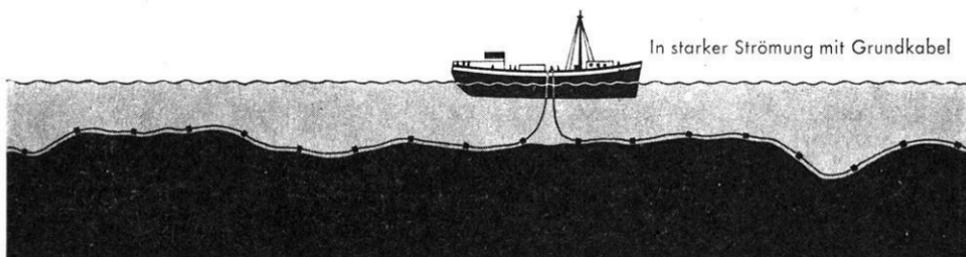
Geophysiker, Geologen, Physiker,
Mathematiker, Akademiker und Ingenieure verwandter
Fachrichtungen finden interessante Aufgaben



Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung GmbH
3 Hannover 1 · Postfach 4767 · Ruf: 8 07 21 · Telex: 0922847

FLACHWASSERSEISMIK

jetzt schon weitgehend saison-unabhängig



SEISMOS

3 HANNOVER · Wilhelm-Busch-Str. 4 · Tel.: 71 08 31 · Fernschr.: 09 22419 · Telegr.-Adresse: Seismos Hannover