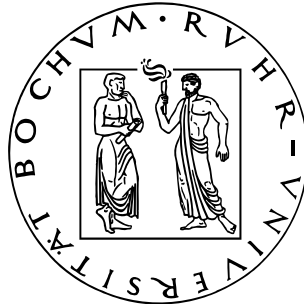


Lineare und nichtlineare Moden in stoßfreien unmagnetischen Plasmen



DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

in der

Fakultät für Physik und Astronomie
der Ruhr-Universität Bochum

von

URS SCHAEFER-ROLFFS
Institut für Theoretische Physik IV
Ruhr-Universität Bochum

Bochum, 2007

*Für meine Eltern
und meine Anne*

- Gutachter:
 1. Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser
 2. Priv.-Doz. Dr. Horst Fichtner
- Disputation: 08.01.2008

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	v
1 Einführung	1
1.1 Plasmaphysik – gut bekannt und (un)verstanden?	2
1.2 Aufbau der Arbeit	4
2 Grundlagen der linearen kinetischen Theorie	7
2.1 Der allgemeine Weg zu den Dispersionsrelationen	7
2.1.1 Maxwellgleichungen und Vlasovgleichung	8
2.1.2 Linearisierung der gekoppelten Gleichungen	9
2.1.3 Fourier-Laplace-Transformation	10
2.1.4 Rücktransformation und analytische Fortsetzung	11
2.2 Bestimmung des Leitfähigkeitstensors	13
2.2.1 Formale Lösung der fluktuierenden Verteilungsfunktion	13
2.2.2 Berechnung des Leitfähigkeitstensors	15
2.2.3 Parallele Wellen	17
2.3 Bestimmung des Maxwelloperators und der Dispersionsrelationen	18
2.3.1 Der Maxwelloperator	18
2.3.2 Herleitung der Dispersionsrelationen	19
2.3.3 Analytische Fortsetzung für gedämpfte Wellen ($\Gamma < 0$)	21
3 Allgemeine Eigenschaften der relativistischen Weibelinstabilität	23
3.1 Umformung der relativistischen elektromagnetischen Dispersionsrelation	24
3.2 Bedingungen für eine Weibelinstabilität bei symmetrischen Verteilungen	25
3.2.1 Integralungleichungen	26
3.2.2 Der Fall $M \rightarrow \infty$	28
3.3 Schwach anisotrope Verteilungen	31
3.4 Verteilungen mit hoher Anisotropie	34
3.5 Ultrarelativistische Verteilungen	35
3.6 Asymmetrische Verteilungen und isolierte Weibelmoden	38
4 Vergleich einiger Verteilungsfunktionen im Formalismus von Kapitel 3	41
4.1 Vergleich verschiedener Verteilungen für die Szenarien aus Kapitel 3	41
4.1.1 Transformation der Verteilungsfunktionen	43
4.2 Vergleich relativistischer Bi-Maxwell-Verteilungen	44
4.2.1 Zwei Beispiele gegebener Verteilungsfunktionen f_{a0}	45
4.2.2 Verallgemeinerung für schwache Anisotropie	46
4.3 Allgemeine Lösungen für die Weibelinstabilität	46

4.3.1	Lösung des Instabilitätskriteriums (3.12)	46
4.3.2	Allgemeine Lösung für $M \rightarrow \infty$	47
4.3.3	Schwach anisotrope Verteilungen	48
4.3.4	Verteilungen mit hoher Anisotropie	51
4.3.5	Ultrarelativistische Verteilungen	54
4.4	Isolierte Moden in der Literatur und in Simulationen	55
5	Die nichtlineare Theorie von Plasmawellen mit solitärer Lösung	59
5.1	Entwicklung der selbstkonsistenten Wellengleichung	60
5.1.1	Die Verteilungsfunktionen	60
5.1.2	Die Maxwellgleichungen in neuen Variablen	62
5.1.3	Eine selbstkonsistente Lösung	64
5.2	Exakte Lösung	65
5.2.1	Bewegliche Elektronen und unbewegliche Ionen	66
5.2.2	Elektronen und Positronen	68
5.2.3	Elektronen und Ionen	69
5.2.4	Schlussfolgerung	69
5.3	Asymptotische Lösungen	70
5.3.1	A_{max} und A beide groß	71
5.3.2	Numerische Darstellung des nichtlinearen Verhaltens	73
5.3.3	A_{max} groß, aber A klein	76
5.3.4	A_{max} und A klein	79
5.3.5	Abschätzung physikalischer Skalen der Solitonen	80
5.4	Beschränkung der Wellenamplitude	84
5.4.1	Verfügbare Energiedichte	84
5.4.2	Intensität und Strahlung von Elektronen	85
5.4.3	Begrenzung der Wellenamplitude durch Strahlung	86
5.4.4	Begrenzung der Wellenamplitude durch Kollisionen	88
5.4.5	Begrenzung der Wellenamplitude durch den Elektronenentartungsdruck	89
6	Anwendung: Strahlung von Elektronen im Soliton	90
6.1	Die Solitonstruktur	90
6.2	Entwicklung des Strahlungsfeldes	91
6.2.1	Die gesamte abgestrahlte Leistung	91
6.2.2	Strahlung eines Elektrons	92
6.2.3	Wechselwirkung mit dem Soliton	93
6.2.4	Das differentielle Intensitätsspektrum für niedrige und hohe Frequenzen	97
6.2.5	Zwischenwerte	100
6.3	Sichtwinkeleffekt	102
6.4	Integration über ein Ensemble von Teilchen	105
7	Zusammenfassung und Bedeutung der Arbeit	109
A	Kurze mathematische Erläuterung der Weibelinstabilität	115

B	Anhang zur allgemeinen Herleitung der Dispersionsrelation	117
B.1	Fourier-Laplace-Transformation von Ableitungen	117
B.2	Gleichgewichtsverteilungsfunktion	117
B.3	Variation der Konstanten	118
B.4	Auswertung der Winkelintegrale	119
C	Mathematische Anmerkungen zur Weibelinstabilität und Solitontheorie	122
C.1	Betrachtung von Gleichung (3.18)	122
C.2	Berechnung der Gleichung (3.60)	123
C.3	Bestimmung der Jacobideterminante (5.24)	124
C.4	Lösung von Gleichung (5.44) mit Hilfe Elliptischer Integrale	124
D	Mathematischer Formalismus für Kapitel 6	126
D.1	Bestimmung der Integrale \hat{J}	126
D.1.1	Allgemeine Vereinfachungen	126
D.1.2	Betrachtung von $ \vec{n} \cdot \vec{j} ^2$ und $\vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^*$	127
D.2	Die Bewegung der Elektronen	128
E	Näherungen für die Integrale $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$	132
E.1	Näherung für niedrige Frequenzen ($\psi_1, \psi_3 \rightarrow 0$)	132
E.2	Näherung für hohe Frequenzen ($\psi_1, \psi_3 \rightarrow \infty$)	133
E.2.1	$1 + 3w_{sp}^2 = (in/kw_{sp})$	133
E.2.2	$1 - 3w_{sp}^2 = (in/kw_{sp})$	135
E.3	$\psi_1 \rightarrow \infty, \psi_3 \rightarrow 0$	136
F	Die Eigenschaften der Winkelfunktionen S_1 und S_2	137
F.1	Die Winkelfunktion $S_1[\theta, \phi, \Gamma_b]$	137
F.2	Die Winkelfunktion $S_2[\theta, \phi, \Gamma_b]$	138
F.3	Das Verhältnis $S_r \equiv S_1/S_2$	138
G	Das differentielle Intensitätsspektrum für niedrige Frequenzen $\omega \rightarrow 0$	141
G.1	Näherung der Funktionen $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$	141
G.2	Berechnung der Grenzfrequenz ω_{low}	142
H	Das differentielle Intensitätsspektrum für hohe Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$	145
H.1	Näherung der Funktionen $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$ für $ \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2} > 0$	145
H.2	Berechnung der Grenzfrequenz ω_{high}	149
H.3	Näherung für $ \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2} \simeq 0$	149
I	Index	151
	Abbildungsverzeichnis	153
	Literaturverzeichnis	154
	Publikationsliste	156
	Lebenslauf	157

Danksagung

Zunächst will ich an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Schlickeiser für die Möglichkeit danken, am Lehrstuhl Theoretische Physik IV der Ruhr-Universität Bochum meine Promotion durchzuführen. In der Wahl meines Arbeitsgebietes genoss ich große Freiheiten, und so ergab sich die Gelegenheit zur freien Entfaltung und Gestaltung meines Interesses.

Herzlich danken will ich an dieser Stelle dann vor allem Prof. Dr. Ian Lerche für seine konstruktive Mitarbeit und die unzähligen Diskussionen und Motivationschübe („Arbeit, Arbeit“, „Morgen, sechs Uhr auf meinem Schreibtisch“) bei der Entwicklung unserer Berechnungen. Ohne sein ständiges Drängen wäre meine Arbeit sicherlich nicht so weit fortgeschritten, wie sie jetzt ist.

Ebenso gebührt mein Dank Dr. Robert C. (!) Tautz zum Einen für die vielen kleinen Fragen-und-Antworten, wenn wieder einmal das Offensichtliche unerkannt geblieben war. Zum Anderen genauso für die Bereitstellung des Trainingsplatzes zwecks Verbesserung unserer Tischsportfähigkeiten sowie alle Gespräche über Fußball und die Welt.

Auch den anderen Mitgliedern des Lehrstuhls, insbesondere den Diplomanden und Doktoranden, sei gedankt für die Schaffung der überaus angenehmen Arbeitsatmosphäre. Dies gilt sowohl für die Diskussionsrunden durch die ganze Welt der Physik von Campingflaschen bis hin zu den Einsteingleichungen als auch für die gemeinsamen Sport- und Mahlzeiten.

Natürlich gehören zu den Personen, die hier aufgeführt werden müssen, meine Eltern. Ihnen danke ich herzlich für die ganze Unterstützung, welche auch nach dem Abschluss als Diplom-Physiker nicht nachgelassen hat. So war es mir möglich, meinen universitären und außeruniversitären Aufgaben stets nachzukommen, auch wenn es manchmal Verzicht für sie bedeutete.

Der letzte, aber gewiss nicht geringste Dank gehört meinem änecken, das mich stets liebevoll daran erinnerte, mich meiner Arbeit zu widmen und nicht mich ablenken zu lassen.

1 Einführung

We present full sky microwave maps in five bands (23 to 94 GHz) from the WMAP first year sky survey. [...] The age of the best-fit universe is 13.7 ± 0.2 Gyr old. [...] This flat universe model is composed of 4.4% baryons, 22% dark matter and 73% dark energy.

Aus dem *Abstract* des ersten Artikels über die WMAP-Daten [3].

Vor 50 Jahren schien das Weltall noch einfach zu sein. Die meisten Astrophysiker und Kosmologen gingen davon aus, dass der größte Teil unseres Universums aus Plasma, also einer wie auch immer gearteten sichtbaren Materie besteht. Theorien einer „Dunklen Materie“, wie sie z.B. Fritz Zwicky 1933 [51] aufgrund der Geschwindigkeitsverteilung im *Coma*-Haufen aufstellte, fanden keine Beachtung. Erst durch immer detailliertere Untersuchungen von Galaxien und Galaxienhaufen setzte sich ab den 1960er Jahren die Erkenntnis durch, dass die sichtbare Materie – d.h. Sterne, Gas und Staub – offensichtlich nicht die erforderliche Masse besitzt, um die neueren Erkenntnisse erklären zu können; es musste eine zusätzliche gravitativ wirkende Materie postuliert werden, die aber nicht auf anderem Wege wechselwirkt. Schließlich schlossen 1998 eine Arbeitsgruppe des *Lawrence Berkeley National Laboratory* [26] und eine internationale Arbeitsgruppe [28] aus Messungen von Supernovaexplosionen, dass sich das Weltall in der jüngeren Vergangenheit *beschleunigt* ausdehnt, und man war gezwungen, eine Art „negativer“ Gravitation in Form einer „Dunklen Energie“ einzuführen.

Der zu Beginn des Kapitels zitierte Artikel aus dem Jahre 2003 stellt daher wohl einen Meilenstein in der Geschichte der Kosmologie, ja der ganzen Physik dar. Ausgehend von der Messung der kosmischen Hintergrundstrahlung war es zum ersten Mal möglich, Parameter des Universums mit einer Genauigkeit von wenigen Prozent anzugeben und so einen Standard festzulegen, an dem sich zukünftige Forschungsarbeiten messen lassen müssen. Aber zugleich sollten uns diese Zahlen eines deutlich machen: Wir verstehen von der Natur des Universums eigentlich nur einen Bruchteil; der Großteil liegt jenseits der Erkenntnisse heutiger Wissenschaftler. Woraus besteht die Dunkle Materie, die sich nur durch ihre Gravitation bemerkbar macht? Sind es Neutrinos, WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*) oder Axionen? Dazu muss auf Konzepte der Supersymmetrie oder anderer Erweiterungen des Standardmodells zurückgegriffen werden. Oder sind unsere physikalischen Gesetze unzureichend und müssen sie modifiziert werden?

Noch viel rätselhafter ist die „Dunkle Energie“, welche zunächst von Albert Einstein in Form seiner *Kosmologischen Konstanten* in die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie eingeführt wurde, um ein statisches Universum zu ermöglichen. Bekanntermaßen formulierten Georges Lemaître und Edwin Hubble das Modell eines sich ausdeh-

nenden Universums, woraufhin Einstein seine Konstante wieder verwarf. Jedoch, welche feine Ironie der Natur, dass ausgerechnet die Messung einer beschleunigten Expansion diese Größe wieder in die Überlegungen der Wissenschaftler brachte – ja, mit 73% stellt die Dunkle Energie sogar den größten Beitrag zur kritischen Dichte des Universums dar; die Dunkle Materie trägt etwa 22% bei. Die restlichen 5% wirken daher nur wie ein kleiner Zusatz, der (zumindest in der Kosmologie) vernachlässigbar scheint – auch wenn wir alle daraus aufgebaut sind. Sicher gebe es noch einige Unklarheiten der „sichtbaren Materie“, doch sollten diese ja verglichen mit den Problemen der Dunklen Materie und Energie unbedeutend sein.

Und doch beschäftigen sich die meisten Physiker (sowohl theoretisch als auch numerisch und experimentell) mit diesem kleinen Anteil – sei es in der Festkörperphysik, um eine endgültige Theorie der Supraleitung zu erstellen; in der Teilchenphysik, um die Elementarteilchen zu verstehen; in der Astrophysik, wo immer neue Teleskope und Raumsonden konstruiert werden, um die Entstehung der Sonne und des Planetensystems nachzuvollziehen; oder in der Plasmaphysik, um vielleicht in 40 Jahren doch mittels der Fusion eine neue Form der Energie „gewinnung“ zu erhalten.

Dieses mag mit dem einfacheren Zugang zu tun haben – aber genauso mit dem Wissen (oder besser Nicht-Wissen), dass es noch viele ungelöste Rätsel auch in der sichtbaren Natur gibt.

1.1 Plasmaphysik – gut bekannt und (un)verstanden?

Was ist eigentlich ein Plasma? In der Allgemeinheit ist die Bedeutung dieses Begriffs überraschend unbekannt. Nach einiger Überlegung erhält man vielleicht eine Bezeichnung als vierten Aggregatzustand oder als ionisiertes Gas. Es ist häufig unbekannt, dass im Universum der überwiegende Anteil, mehr als 99% der Materie, in Form von Plasma existiert. Und auch wenn das Wort „Plasma“ in seiner physikalischen Bedeutung erst im Jahre 1928 von Irving Langmuir [22] eingeführt wurde, waren auch auf der Erde schon immer Plasmen zu sehen, man denke nur an Blitze, Polarlichter oder Flammen. Auch in der Technik sind Plasmen weit vertreten: Das Licht in Leuchtstoffröhren oder Entladungslampen (darunter auch Straßenlaternen) wird durch Niederdruckplasmen erzeugt. In neuerer Zeit findet der Begriff „Plasma“ durch die Verwendung von Plasmabildschirmen größere Verbreitung.

Alle diese Beispiele haben als hervorstechendstes Merkmal die Abgabe von Licht. Berücksichtigt man zudem den weiteren Anwendungsbereich von Plasmen in der Technik als reaktives Medium (Schweißen, Ätzen, Oberflächenmodifizierung oder zur Energieerzeugung durch Fusion), so wird deutlich, dass ein Plasma ein energiereiches Medium ist, dessen Bestandteile – wie die Erfahrung zeigt – auf der Erde rasch durch vielfältige Reaktionen ihren Aggregatzustand ändern, so lange dieser nicht künstlich (durch Energiezufuhr) aufrechterhalten wird¹.

Verlässt man jedoch die Erde, so stellt man fest, dass fast alle sichtbare Materie als Plasma vorliegt: Sterne, Gasnebel, Sonnen- bzw. Sternwinde, Interstellares Medium (ISM) usw. Auf der Erde befinden wir uns also quasi in einem „Plasma-Loch“, denn hier müssen wir den häufigsten Aggregatzustand des Universums mit technisch mühsam

¹Dies ist mit Sicherheit ein Grund, warum unter Nichtwissenschaftlern Plasmen relativ unbekannt sind.

erzeugen. Aus dieser Tatsache kann man schon ableiten, welche physikalischen Eigenschaften der Existenz eines Plasmas entgegenwirken: niedrige *Temperaturen* und hohe *Dichten*. Wie eingangs erwähnt, stellt ein Plasma ein System eines Gases aus geladenen Teilchen, meist Elektronen und Ionen, dar². Prinzipiell ist dieser Zustand jedoch nicht der energetisch günstigste, denn die entgegengesetzt geladenen Elektronen und Ionen ziehen sich aufgrund der Coulombwechselwirkung an, und bei der Rekombination wird Energie in Form elektromagnetischer Strahlung frei³. Daher ist für die Stabilität eines Plasmas von entscheidender Bedeutung, wie häufig sich die Plasmabestandteile begegnen und rekombinieren; es leuchtet ein, dass ein dünnes Plasma länger existieren kann.

Dieser Schwund an geladenen Teilchen ist jedoch nicht vollständig vermeidbar, somit ist es für das Plasma von genauso großer Wichtigkeit, mit welcher Rate diese geladenen Teilchen entstehen. Dieses kann nur durch Energiezufuhr geschehen, unabhängig davon, ob es eine äußere Energie„quelle“ gibt oder sie im Plasma selbst erzeugt wird. Häufig genug bedeutet eine solche Energiezufuhr eine erhöhte Temperatur des Plasmas im Vergleich zu seiner Umgebung.

Die Auswirkungen der beiden Effekte lassen die Existenz von Plasmen außerhalb der Erde natürlich erscheinen: Sterne besitzen eine sehr hohe Temperatur, da sie im Inneren durch Fusion Energie freisetzen, während die Plasmen im interplanetaren/-stellaren Raum von sehr geringer Dichte geprägt sind.

Man kann jetzt dazu übergehen, die verschiedenen Plasma in bestimmte Kategorien einzuteilen: Niedertemperatur- und Hochtemperaturplasmen, Niederdruck- und Hochdruckplasmen, astrophysikalische und technische Plasmen, Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsplasmen usw. Je nach Herangehensweise führt dieses auf verschiedene Arten der physikalischen Beschreibung:

- Ausgehend von den einzelnen geladenen Teilchen erhält man ihre Eigenschaften aufgrund der Gesetze der Elektrodynamik. Hierbei wird vor allem die Auswirkung des Plasmas (gegeben durch die elektromagnetischen Felder) auf ein Teilchen untersucht, man kann auf diese Weise z.B. Driften beschreiben.
- Man beschreibt das Plasma als ein elektrisch leitendes Fluid mit Hilfe der Magnetohydrodynamik (MHD) als Kombination aus der Navier-Stokes-Gleichung der Hydrodynamik und den Maxwellgleichungen der Elektrodynamik.
- Eine Verallgemeinerung der MHD stellt die Zweikomponententheorie dar, in der die verschiedenen Teilchensorten getrennt betrachtet werden können. Aufgrund der unterschiedlichen Massen von Elektronen und Ionen ist es vorstellbar, dass z.B. die Geschwindigkeitsfelder beider Komponenten unterschiedlich sind.
- Eine weitere Möglichkeit ist die Beschreibung des Plasmas als Vielteilchensystem mit Hilfe der statistischen Theorie. Dazu wird neben den Maxwellgleichungen die Boltzmann-Gleichung als Grundgleichung zur Beschreibung verwendet. Die Plasmateilchen treten also nicht mehr als einzelne Partikel auf, stattdessen werden ihre

²Da wir von geladenen Teilchen ausgehen, spielen prinzipiell elektromagnetische Felder ebenfalls eine Rolle in der Beschreibung eines Plasmas. Häufig wird eine hohe Leitfähigkeit des Plasmas angenommen, dann verschwinden elektrische Felder praktisch sofort und es müssen im Wesentlichen nur Magnetfelder in der weiteren Betrachtung berücksichtigt werden. Dieses hängt jedoch von der Art des Plasmas ab.

³Dieser Prozess ist bei allen irdischen Plasmen gut zu beobachten.

Eigenschaften mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten für Eigenschaften, den *Verteilungsfunktionen*, beschrieben.

Es gibt somit eine große Anzahl von Zugängen zur theoretischen Beschreibung von Plasmen. Es ist jedoch allen gemein, dass die Grundgleichungen in ihrer allgemeinen Form (z.B. Navier-Stokes- oder Boltzmann-Gleichung) nicht lösbar sind. Man ist immer auf gewisse Näherungen und Annahmen angewiesen, um für die auftretenden Gleichungen wenigstens eine approximative Lösung finden oder in annehmbarer Zeit Simulationen durchführen zu können. In diesem Sinne könnte man die Plasmaphysik als exakt unverstanden bezeichnen – aber in den einzelnen Bereichen lassen sich genügend Lösungen finden, die in ihrem jeweiligen Rahmen korrekt sind.

1.2 Aufbau der Arbeit

Diese Dissertation beschäftigt sich mit einem bestimmten Bereich der Plasmatheorie, der Plasmainstabilität. Falls man nicht gerade Kurzzeitplasmen wie Blitze oder Entladungen betrachtet, muss sich bei einem Plasma ein stationärer Zustand einstellen, der eine gewisse Stabilität gegenüber Störungen besitzt. Prinzipiell lassen sich die Instabilitäten in zwei Kategorien einteilen, abhängig davon, ob die Instabilität aus der hydrodynamischen oder der kinetischen Betrachtungsweise herrührt. In letzterer führt man die Instabilitäten auf eine Anisotropie in der Verteilungsfunktion zurück, welche z.B. durch das Ineinanderströmen zweier Gase oder durch Hintergrundmagnetfelder erzeugt werden können. Es gibt jedoch eine Vielzahl an einzelnen Instabilitätstypen; dieses ist eine Folge der nur näherungsweise möglichen Beschreibung des Plasmas. Denn schon eine geringfügige Modifikation der Annahmen und Randbedingungen kann u.U. eine völlig neue instabile Mode erzeugen. Nichtsdestotrotz ist eine genaue Kenntnis *jeder* Instabilität von Bedeutung, um die Plasmen in der Natur oder Technik beschreiben zu können, denn die Natur hält sich nicht an einige bestimmte Näherungen.

Diese Arbeit handelt nun von einer solchen Instabilität, der sogenannten Weibelinstabilität. Benannt wurde sie nach ihrem Entdecker, dem Physiker Erich S. Weibel, der sie 1959 [45] als Erster beschrieben hatte. Er betrachtete ein Stromsystem von Elektronen, welche sich unter der Voraussetzung, dass die Ladung stets neutralisiert wird⁴ „genügend anisotrop“ in einem Plasma bewegen, z.B. in einem Bereich in $+x$ -Richtung und in einem gewissen Abstand davon in $-x$ -Richtung. Aus diesen einfachen Annahmen lassen sich transversale elektromagnetische Moden finden, wie es Burton D. Fried kurze Zeit später [13] herausarbeitete. Das Prinzip der Weibelinstabilität lässt sich in diesem Modell erklären, auch wenn im Laufe der Zeit die Szenarien immer detaillierter und immer mehr der Wirklichkeit angepasst wurden. Verkürzt handelt es sich dabei um folgenden Effekt: Man betrachte Abbildung 1.1. Es gebe zwei Arten von Elektronen, die roten fließen in positive z -Richtung, die blauen in negative z -Richtung. Zusätzlich gebe es eine infinitesimale Magnetfeldfluktuation entlang der y -Achse mit Amplitude in $\pm x$ -Richtung, so dass die Elektronen durch die Lorentzkraft leicht abgelenkt werden. In der dargestellten Konfiguration streben die roten Elektronen im positiven y -Bereich in Richtung der roten Stromröhre, welche sich am Ort mit $\delta B = 0$ und $d(\delta B)/dz > 0$ befindet. Hier

⁴E. Weibel nahm zwar in seinem Artikel ein konstantes Hintergrundmagnetfeld B_0 an, bemerkte aber gleichzeitig, dass dieses nicht notwendig sei. Aber weil es nicht störte, behielt er es bei.

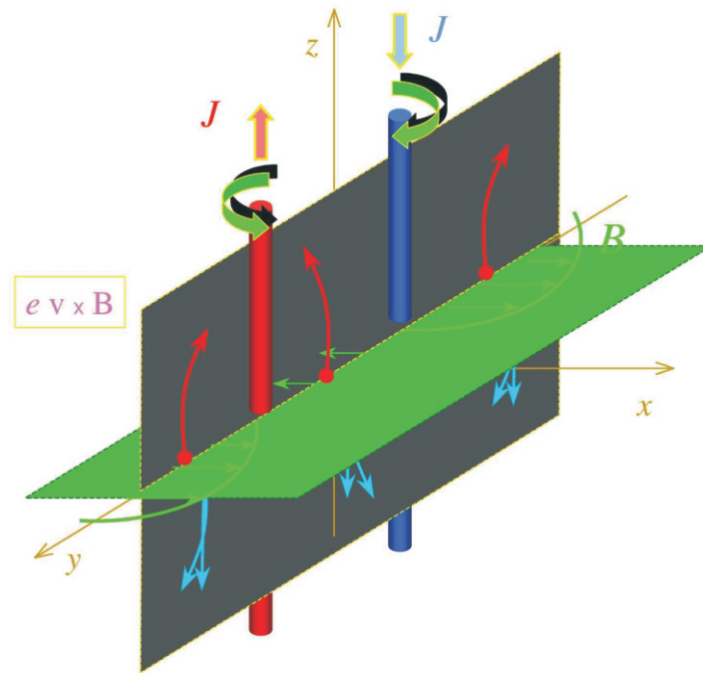


Abbildung 1.1: Prinzip der Weibelinstabilität: Gegenläufige Elektronenströme sind in der Lage, mikroskopische Magnetfeldfluktuationen auf mesoskopische Größenordnungen zu verstärken. Weitere Erläuterungen siehe Text.

konzentrieren sich also Elektronen mit positiver Geschwindigkeit in z -Richtung. Analog sammeln sich die blauen Elektronen in einem davon getrennten Bereich, für den $\delta B = 0$ und $d(\delta B)/dz < 0$ gilt. Dieser Strom hat eine Richtung in die negative z -Ebene. Diese Abfolge von Stromröhren kann man sich jetzt fortgesetzt denken. Nun bedeutet ein fließender Strom die Induzierung eines Magnetfeldes, und mit der „Rechte-Hand-Regel“ wird klar, dass die infinitesimalen Magnetfeldschwankungen verstärkt werden. Eine einfache mathematische Erläuterung wird in Anhang A gegeben.

Diesen Überlegungen verdeutlichen, dass man mit Hilfe dieser Instabilität Magnetfelder erzeugen kann. Überall dort, wo die Entstehung von Magnetfeldern bisher ungeklärt ist (und Plasmen auftreten), muss folglich untersucht werden, ob die Weibelinstabilität einen möglichen Mechanismus darstellt. Dazu ist es erforderlich, die Dispersionsrelationen und Wachstumsraten der Weibelmoden zu kennen. Diese Größen sind jedoch mit der Verteilung der Plasmateilchen eng verknüpft, so dass man gewisse mikroskopische Plasmaeigenschaften kennen sollte. Gerade bei astrophysikalischen Plasmen wie Sternwinden, dem ISM, aktiven galaktischen Kernen (*active galactic nuclei*, AGN), Gammastrahlenausbrüchen, (*gamma-ray bursts*, GRBs) ist dieses jedoch etwas kompliziert – man kann nur in den seltensten Fällen zu einem solchen Plasma hinfliegen und die Verteilungsfunktion messen.

Daher wäre es von großem Vorteil – und hierin liegt die Motivation für diese Dissertation –, könnte man einige Aussagen über die Instabilität *ohne* Kenntnis der Verteilungsfunktion erstellen. Diese Arbeit besteht im Grunde aus zwei Teilen, die streng genommen auch einzeln für sich stehen können. Nach einer Einführung in die Grundlagen der linearen statistischen Theorie (Kapitel 2) werden im ersten Teil allgemeine Darstel-

lungen und Aussagen der Weibelinstabilität hergeleitet, die – im Gegensatz zu früher erschienenen Veröffentlichungen – nicht mehr eine bestimmte Verteilungsfunktion voraussetzen (siehe Kapitel 3). Im Gegenteil, mit den hier beschriebenen Gleichungen sind generelle Aussagen über die Eigenschaften der Weibelinstabilität unter sehr allgemeinen Voraussetzungen möglich, z.B. ob starke oder schwache Anisotropie vorliegt. Dieses wird anhand einiger beispielhafter Verteilungsfunktionen in Kapitel 4 vorgeführt.

Aus den Ergebnissen der allgemeinen Weibeltheorie in Kapitel 3 sticht besonders die Existenz isolierter Moden heraus. Deren Verhalten erinnert stark an jenes nichtlinearer solitärer Wellen, sogenannter Solitonen⁵. Aus der physikalischen Intuition heraus werden dann im zweiten Teil der Arbeit mögliche nichtlineare Lösungen der Vlasovgleichung in unmagnetischen Plasmen gesucht (Kapitel 5). In weiteren Verlauf des Kapitels werden eine exakte δ -Lösung und eine Näherungslösung hergeleitet. Letztere findet eine mögliche Anwendung in den Jets von AGN; dazu wird im Kapitel 6 die Strahlung von Elektronen betrachtet, die in Wechselwirkung mit solchen Solitonen treten.

Der Hauptteil dieser Arbeit wird durch eine Zusammenfassung in Kapitel 7 abgeschlossen. Die Ergebnisse der vorherigen Kapitel werden hier ausführlich diskutiert und ein kurzer Ausblick in eine tiefergehende Betrachtung gegeben. Es folgt ein Anhang, in dem wesentliche Rechnungen durchgeführt werden, welche entweder zum Verstehen der Physik nicht unbedingt erforderlich sind oder eine solche Komplexität erreichen, dass sie sich über mehrere Seiten erstrecken.

⁵Hierbei handelt es sich um Wellen beschrieben durch bestimmte nichtlineare Gleichungen, z.B. der Korteweg-de-Vries-Gleichung. Die herausragende Eigenschaft eines Solitons ist die Erhaltung seiner Form über einen längeren (im theoretischen Idealfall unbegrenzten) Zeitraum hinweg.

2 Grundlagen der linearen kinetischen Theorie

Except near the electrodes, where there are sheaths containing very few electrons, the ionized gas contains ions and electrons in about equal numbers so that the resultant space charge is very small. We shall use the name plasma to describe this region containing balanced charges of ions and electrons.

Irving Langmuir führt den Begriff *Plasma* für ein ionisiertes Gas ein [22].

In diesem Kapitel werden zunächst grundlegende Eigenschaften der linearen Weibelinstabilität hergeleitet. Den geeigneten Ausgangspunkt hierbei stellen die Grundgleichungen der kinetischen Theorie des Plasmas, nämlich die stoßfreie Boltzmann-Gleichung, auch Vlasov-Gleichung genannt, und die Maxwell-Gleichungen dar. Aus diesem Fundament kann man die bedeutendste Gleichung zur Beschreibung von Plasmainstabilitäten, die Dispersionsrelation, gewinnen. Sie gibt die Abhängigkeit der Wellenfrequenz $\omega(\vec{k})$ vom Wellenvektor \vec{k} an. Naturgemäß findet der interessierte Leser in der Literatur die verschiedensten Zugänge zu den Dispersionsrelationen in Plasmen; hier soll im wesentlichen einer Darstellung gefolgt werden, wie sie bei D.G. Swanson [37], A. Galeev & R.N. Sudan [14] und R. Schlickeiser [34] zu finden ist.

2.1 Der allgemeine Weg zu den Dispersionsrelationen

Ein Plasma ist, wie bereits im vorherigen Kapitel erläutert, ein Vielteilchensystem geladener Teilchen, welche untereinander und mit den auftretenden elektromagnetischen Feldern wechselwirken. Wollte man diese Wechselwirkungen exakt beschreiben, so führt dies im Allgemeinen auf etwa 10^{23} gekoppelte Differentialgleichungen, entsprechend der Summe der Freiheitsgrade aller Teilchen. Es ist einleuchtend, dass dieses kein gangbarer Weg zur Beschreibung eines Plasmas ist. Zur Vereinfachung kann man sich auf die Frage beschränken, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen einen bestimmten Ort \vec{x} und Impuls \vec{p} – oder zusammenfassend: welchen Ort (\vec{x}, \vec{p}) im Phasenraum – zu einem bestimmten Zeitpunkt t einnimmt. Dann lassen sich die Freiheitsgrade aller Teilchen auf sechs reduzieren, indem man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Phasenraumdichte $f_a(\vec{x}, \vec{p}, t)$ für jede Teilchensorte a einführt. Durch geeignete Mittelungen (sprich: Integrationen) kann man aus solchen Verteilungsfunktionen viele physikalische Messgrößen

berechnen; auf diese elegante Art lassen sich also die meisten Phänomene der Plasma-physik beschreiben.

2.1.1 Maxwellgleichungen und Vlasovgleichung

Im Folgenden werden außer bei der Definition grundsätzlich alle Größen ohne abhängige Variablen dargestellt, d.h. $f_a(\vec{x}, \vec{p}, t) \equiv f_a$, $\vec{E}(\vec{x}, t) \equiv \vec{E}$ usw. Dies erfolgt hauptsächlich zur besseren Lesbarkeit der häufig langen Gleichungen. In Ausnahmefällen werden diese Variablen dennoch angezeigt, um etwaige Unklarheiten zu verhindern. Des Weiteren werden alle Rechnungen im cgs-Einheitensystem durchgeführt. Die Grundlage bilden aus der Elektrodynamik die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j},\end{aligned}\tag{2.1}$$

und aus der statistischen Theorie die Ladungs- und Stromdichte

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) &\equiv \rho_{ext} + \sum_a n_a q_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p f_a, \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &\equiv \vec{j}_{ext} + \sum_a n_a q_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{\vec{p}}{m_a \gamma_a} f_a,\end{aligned}\tag{2.2}$$

die Teilchenzahl- und Phasenraumdichte

$$n_a(t) \equiv \int_V d^3p \int_{\mathbb{R}^3} d^3x f_a\tag{2.3}$$

sowie die relativistische Boltzmann-Gleichung

$$\frac{dn_a}{dt} = \int_V d^3p \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_a \gamma_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{x}} + q_a \left(\vec{E} + \frac{1}{m_a c \gamma_a} \vec{p} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} \right],\tag{2.4}$$

die die Kollision von Teilchen sowie deren Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse beschreibt. Das können z.B. Ionisation der Atome oder Rekombination von Ionen und Elektronen sein; im weiteren Verlauf in dieser Arbeit werden jedoch stoßfreie Plasmen betrachtet, d.h. $(dn_a/dt) = 0$. Somit wird auch der Integrand in Gleichung (2.4) Null, und man erhält die stoßfreie Boltzmann-Gleichung oder *Vlasovgleichung*

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_a \gamma_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{x}} + q_a \left(\vec{E} + \frac{1}{m_a c \gamma_a} \vec{p} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} = 0.\tag{2.5}$$

Kovariant ist der allgemeine Ansatz der Phasenraumdichte bzw. Verteilungsfunktion f_a durch die Annahme eines relativistischen Impulses, $\vec{p} = m\vec{v}\gamma$ der Teilchen mit der Masse m , der Geschwindigkeit \vec{v} sowie dem Lorentzfaktor

$$\gamma = \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2}.\tag{2.6}$$

Dieser zusätzliche Faktor wird in Hinblick auf mögliche Anwendungen in der Astrophysik mit berücksichtigt. Dort können in vielen Bereichen die Teilchen relativistische Geschwindigkeiten haben, man denke nur an Jets von AGN oder Stoßfronten bei Supernovae.

2.1.2 Linearisierung der gekoppelten Gleichungen

Obwohl man das Plasma schon von der ungeheuren Anzahl von 10^{23} Gleichungen auf ein System weniger Gleichungen vereinfacht hat, lässt sich dieses gekoppelte System aus der Vlasovgleichung (2.5) und den Maxwellgleichungen (2.1) analytisch nicht lösen. Die nichtlinearen Zusammenhänge verhindern eine exakte mathematische Lösung, so dass man auf Näherungen angewiesen ist. Eine der gebräuchlichsten Methoden ist die sogenannte Linearisierung, bei der davon ausgegangen wird, dass das Plasma einen Gleichgewichtszustand angenommen hat, welcher das Gleichungssystem automatisch erfüllt. Es interessieren dann in erster Linie geringe Abweichungen von diesem Gleichgewicht, d.h. kleine Störungen. Für diese Störungen jedoch kann man die einzelnen Größen um den Gleichgewichtszustand in erster Ordnung entwickeln,

$$\begin{aligned} f_a &= f_{a0} + f_{a1}, \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1, \\ \vec{j} &= \vec{j}_0 + \vec{j}_1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei für alle Terme in den Entwicklungen $f_{a0} \ll f_{a1}$, $|\vec{E}_1| \ll |\vec{E}_0|$ usw. gilt. Außerdem hat man im zeitlichen Mittel

$$\langle f_{a1} \rangle = \langle \vec{E}_1 \rangle = \langle \vec{B}_1 \rangle = \langle \rho_1 \rangle = \langle \vec{j}_1 \rangle = 0. \quad (2.8)$$

Durch die hohe Leitfähigkeit wird die Entstehung signifikanter Ladungstrennungen verhindert. Es treten also keine großräumigen elektrischen Felder auf, d.h. man kann für den Gleichgewichtszustand des elektrischen Feldes $\vec{E}_0 = 0$ ansetzen. Man spricht im Allgemeinen auch von der Quasineutralität des Plasmas. Das großräumige Magnetfeld \vec{B}_0 (welches im Folgenden stets als Hintergrundmagnetfeld bezeichnet wird) kann zunächst als verschieden von Null angenommen werden; erst nach der Herleitung der Dispersionsgleichungen wird der Übergang $|\vec{B}_0| \rightarrow 0$ durchgeführt.

Mit dem Ansatz, dass die Gleichgewichtsverteilungsfunktion f_{a0} und das Hintergrundmagnetfeld \vec{B}_0 das System aus Vlasov- und Maxwellgleichungen erfüllen und dass es keine äußeren Ladungs- und Stromdichten gibt, erhält man die Maxwell-Vlasov-Gleichungen in erster Ordnung unter Weglassung von Termen höherer Ordnung

$$\frac{\partial f_{a1}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_a \gamma_a} \cdot \frac{\partial f_{a1}}{\partial \vec{x}} + \frac{q_a}{m_a c \gamma_a} \vec{p} \times \vec{B}_0 \cdot \frac{\partial f_{a1}}{\partial \vec{p}} = -q_a \left(\vec{E}_1 + \frac{1}{m_a c \gamma_a} \vec{p} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{p}} \quad (2.9)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_1 &= 4\pi \sum_a n_a q_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p f_{a1} = 4\pi \rho_1 \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B}_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a n_a q_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{\vec{p}}{m_a \gamma_a} f_{a1} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1.3 Fourier-Laplace-Transformation

Im Bereich kleiner Störungen ist es möglich, diese in Form von Wellen zu beschreiben. Man erwartet also eine Abhängigkeit in Gestalt einer komplexen Exponentialfunktion; daher ist es geschickt, auf das Differentialgleichungssystem (2.9), (2.10) in Form eines Anfangswertproblems eine Fourier-Laplace-Transformation anzuwenden,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta f_a(\vec{k}, \vec{p}, \omega) \\ \delta \vec{E}(\vec{k}, \omega) \\ \delta \vec{B}(\vec{k}, \omega) \\ \delta \vec{j}(\vec{k}, \omega) \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_0^\infty dt \left\{ \begin{array}{l} f_{a1}(\vec{x}, \vec{p}, t) \\ \vec{E}_1(\vec{x}, t) \\ \vec{B}_1(\vec{x}, t) \\ \vec{j}_1(\vec{x}, t) \end{array} \right\} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (2.11)$$

Diese Transformation hat die angenehme Eigenschaft, dass die Ableitungen nach der Zeit und nach dem Ort in algebraische Produkte übergehen. Die Maxwellgleichungen (2.10) sind im Fourier-Laplace-Raum also vollständig algebraische Gleichungen, und die Vlasovgleichung (2.9) enthält nur noch Ableitungen bzgl. des Impulses. Zur Durchführung der Laplacetransformation benötigt man allerdings die Annahme, dass der Imaginärteil Γ der Frequenz $\omega = \omega_R + i\Gamma$ positiv und hinreichend groß ist, damit die Laplaceintegrale

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta f_a(\vec{k}, \vec{p}, \omega) \\ \delta \vec{E}(\vec{k}, \omega) \\ \delta \vec{B}(\vec{k}, \omega) \\ \delta \vec{j}(\vec{k}, \omega) \end{array} \right\} = \int_0^\infty dt \left\{ \begin{array}{l} f_{a1}(\vec{k}, \vec{p}, t) \\ \vec{E}_1(\vec{k}, t) \\ \vec{B}_1(\vec{k}, t) \\ \vec{j}_1(\vec{k}, t) \end{array} \right\} e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

konvergieren. (Auch hier gilt die Vereinbarung, dass die transformierten Größen ohne abhängige Variablen geschrieben werden, also $\delta f_a(\vec{k}, \vec{p}, \omega) \equiv \delta f_a$, $\delta \vec{E}(\vec{k}, \omega) \equiv \delta \vec{E}$ usw.)

Mit den transformierten Anfangsbedingungen für $t = 0$, nämlich $\vec{B}_{\vec{k}}(t = 0) \equiv \vec{B}_{\vec{k}}$ und $\vec{E}_{\vec{k}}(t = 0) \equiv \vec{E}_{\vec{k}}$ gelangt man zu der Transformation der Maxwellgleichungen (vgl. Anhang B.1)

$$\begin{aligned} i\vec{k} \times \delta \vec{E} &= i\omega \delta \vec{B} + \vec{B}_{\vec{k}} \\ i\vec{k} \times \delta \vec{B} &= 4\pi \delta \vec{j} - i\omega \delta \vec{E} - \vec{E}_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Unter der Annahme, dass nur Terme erster Ordnung in den Gleichungen auftreten (was durch die Kleinheit der Störung begründet ist), lässt sich der Zusammenhang zwischen der Stromdichte \vec{j} und der elektrischen Feldstärke als ein Ohmsches Gesetz mit einem Leitfähigkeitstensor $\bar{\sigma}$ beschreiben. Dann lautet das Ohmsche Gesetz mit Einsteinscher Summenkonvention formal

$$\delta j_i = \sigma_{ij} \delta E_j. \quad (2.14)$$

Drückt man zudem die magnetischen Fluktuationen mit Hilfe der Maxwellgleichung (2.13a) durch die elektrischen Fluktuationen aus,

$$\delta \vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \delta \vec{E} + \frac{i}{\omega} \vec{B}_{\vec{k}}, \quad (2.15)$$

erhält man eine Gleichung, in der nur noch die elektrischen Fluktuationen und die Anfangsbedingungen enthalten sind,

$$(-\omega^2 + c^2 k^2 - 4\pi i \omega \bar{\sigma}) \delta \vec{E} - c^2 (\vec{k} \cdot \delta \vec{E}) \vec{k} = i\vec{k} \times \vec{B}_{\vec{k}} - i\omega \vec{E}_{\vec{k}}. \quad (2.16)$$

Die Einführung des normierten Wellenzahlvektors $\vec{\kappa}$, des Dielektrizitätstensors $\bar{\epsilon}$, des Maxwelloperators $\bar{\Lambda}$ und der Anfangsbedingungen \vec{A} ,

$$\begin{aligned}\vec{\kappa} &\equiv \vec{k}/|k| \\ \epsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} \\ \Lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) &\equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\kappa_i \kappa_j - \delta_{ij}) + \epsilon_{ij} \\ \vec{A}(\vec{k}, \omega) &\equiv \frac{i}{\omega} \vec{E}_{\vec{k}} - \frac{ick}{\omega^2} \vec{\kappa} \times \vec{B}_{\vec{k}},\end{aligned}\tag{2.17}$$

führt sodann zur Gleichung

$$\bar{\Lambda} \delta \vec{E} = \vec{A},\tag{2.18}$$

aus der man die elektrischen Fluktuationen berechnen kann, falls der Maxwelloperator (gegeben durch den Dielektrizitätstensor $\bar{\epsilon}$ bzw. Leitfähigkeitstensor $\bar{\sigma}$) bekannt ist:

$$\delta \vec{E} = \bar{\Lambda}^{-1} \vec{A}.\tag{2.19}$$

Die dazu benötigte Inverse des Maxwelloperators ist bestimmt durch die Adjunkte und die Determinante $\Lambda = \det \bar{\Lambda}$ des Operators

$$\bar{\Lambda}^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}^A}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} \Lambda_{22}\Lambda_{33} - \Lambda_{32}\Lambda_{23} & \Lambda_{23}\Lambda_{31} - \Lambda_{33}\Lambda_{21} & \Lambda_{21}\Lambda_{32} - \Lambda_{31}\Lambda_{22} \\ \Lambda_{32}\Lambda_{13} - \Lambda_{12}\Lambda_{33} & \Lambda_{33}\Lambda_{11} - \Lambda_{13}\Lambda_{31} & \Lambda_{31}\Lambda_{12} - \Lambda_{11}\Lambda_{32} \\ \Lambda_{12}\Lambda_{23} - \Lambda_{22}\Lambda_{13} & \Lambda_{13}\Lambda_{21} - \Lambda_{23}\Lambda_{11} & \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{21}\Lambda_{12} \end{pmatrix}.\tag{2.20}$$

2.1.4 Rücktransformation und analytische Fortsetzung

Um aus der formalen Lösung (2.19) auf das Verhalten der fluktuierenden Größen schließen zu können, so muss zunächst eine Rücktransformation erfolgen,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{a1}(\vec{x}, \vec{p}, t) \\ \vec{E}_1(\vec{x}, t) \\ \vec{B}_1(\vec{x}, t) \\ \vec{j}_1(\vec{x}, t) \end{array} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_L d\omega \left\{ \begin{array}{l} \delta f_a(\vec{k}, \vec{p}, \omega) \\ \delta \vec{E}(\vec{k}, \omega) \\ \delta \vec{B}(\vec{k}, \omega) \\ \delta \vec{j}(\vec{k}, \omega) \end{array} \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}.\tag{2.21}$$

Die Rücktransformationen der Fouriertransformation lassen sich ohne Probleme durchführen; jedoch muss man bei der Umkehrung der Laplacetransformation sorgfältiger zu Werke gehen. Denn es ist zu beachten, dass diese Rücktransformation entlang eines Weges L in der komplexen ω -Ebene verlaufen muss, der parallel zur Abzisse liegt und um Γ verschoben ist. Wäre $\delta \vec{E}$ analytisch in der ganzen ω -Ebene, so folgte aus der Funktionentheorie, dass der Integrationsweg jedes Integrals dieser Funktion beliebig verformt werden könnte, und man wäre in der Lage, sich den geeignetsten Pfad herauszusuchen. Jedoch folgt aus

$$\delta \vec{E} = \frac{\bar{\Lambda}^A}{\Lambda} \vec{A},\tag{2.22}$$

dass es Pole in der komplexen ω -Ebene gibt, wenn $\Lambda = 0$. (Es zeigt sich, dass alle diese Pole einfache Polstellen sind.) Diese Polstellen dürfen nun nicht bei der Verformung des

Integrationsweges überschritten werden, man muss den Weg also um die Pole herum legen.

Zudem ergibt sich ein zweites Problem: Für die weitere Betrachtung ist es erforderlich, dass $\delta\vec{E}$ bzw. $\bar{\Lambda}$ auch in der negativen Halbebene ($\Gamma < 0$) definiert sind, obwohl ursprünglich ja $\Gamma > 0$ für die Laplacetransformation gefordert wurde. Denn wegen $\exp[i\omega t] \propto \exp[\Gamma t]$ konvergieren die Integrale (2.21) besser in der negativen Halbebene $\Gamma < 0$. Glücklicherweise sind die hier betrachteten Funktionen für $\Gamma < 0$ analytisch fortsetzbar, siehe auch die Überlegungen in Abschnitt 2.3.3. Diese analytische Fortsetzung erreicht man durch die Forderung

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} \bar{\Lambda}^+ = \lim_{\Gamma \rightarrow 0^-} \bar{\Lambda}^-, \quad (2.23)$$

wobei „+“ die positive und „-“ die negative Halbebene bezeichnen.

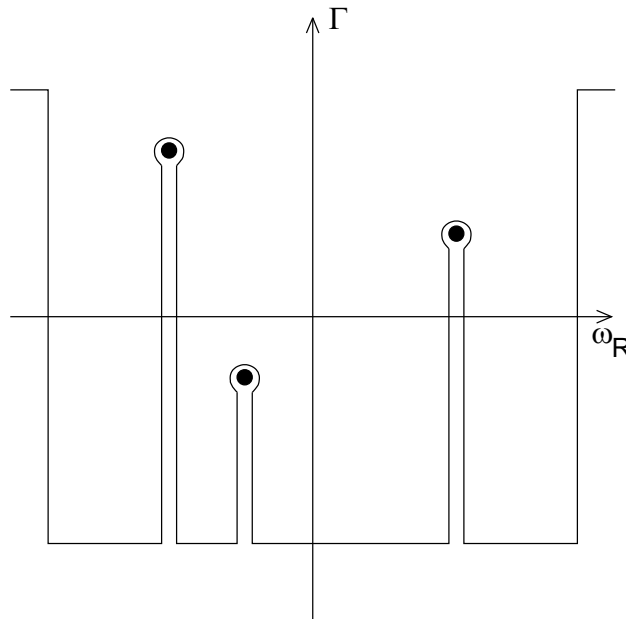


Abbildung 2.1: Der Integrationsweg einer auf fast der ganzen komplexen Ebene analytischen Funktion kann beliebig verformt werden, solange er oberhalb aller Pole • verläuft.

Da die Funktion nun in der ganzen komplexen ω -Ebene bis auf endlich viele Pole analytisch ist, verformt man den Integrationspfad wie in Bild 2.1 dargestellt dergestalt, dass ein Großteil des Weges bei sehr großen negativen Γ verläuft, aber immer noch oberhalb aller Pole liegt. (In der Plasmaphysik wird der Weg in dieser speziellen Form auch Landaukontur genannt.) Die Wegstücke mit $\Gamma < 0$ verschwinden unter bestimmten einfachen Integrabilitätsbedingungen für $t \rightarrow \infty$, die Wege zu und von den Polen heben sich gegenseitig auf und die Wege mit $|\omega_R| \gg 0$ kann man wegen der hohen Oszillationen vernachlässigen. Zum Betrag des Integrals tragen daher allein die Residuen R_n der Funktion $1/\Lambda$ bei,

$$\delta\vec{E} \simeq \sum_{j=1}^n e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_j t)} R_j. \quad (2.24)$$

Die Residuen der Laplacerücktransformation beschreiben also das Verhalten der gesuchten Lösung in Form von Dispersionsrelationen $\omega(\vec{k})$ für die Fluktuationen. Im Folgenden müssen folglich der Maxwelloperator und dessen Determinante bestimmt werden. Aus der Gleichung

$$\det \bar{\Lambda} = \Lambda = 0 \quad (2.25)$$

lassen sich dann die Dispersionsrelationen gewinnen. Dazu ist es zunächst nötig, den Leitfähigkeitstensor in Gleichung (2.14) zu beschreiben. Dieses geschieht durch eine formale Lösung der Verteilungsfunktion δf_a aus der Vlasovgleichung (2.5) bzw. (2.9). Diese Lösung soll im folgenden Abschnitt hergeleitet werden.

2.2 Bestimmung des Leitfähigkeitstensors

In diesem Kapitel soll der Maxwelloperator $\bar{\Lambda}$ hergeleitet werden. In der Literatur kann man verschiedene Lösungswege finden, hier soll nach dem sogenannten Standardansatz verfahren werden (vgl. auch [2, 33]). Als Zwischenschritt wird dabei der Leitfähigkeitstensor $\bar{\sigma}$ bestimmt.

2.2.1 Formale Lösung der fluktuierenden Verteilungsfunktion

Zur Bestimmung der fluktuierenden Stromdichte $\delta \vec{j}$ und weitergehend des Ohmschen Gesetzes (2.14) ist es erforderlich, auch die linearisierte Vlasovgleichung (2.9) einer Fourier- und Laplacetransformation zu unterziehen. Aus dieser transformierten Gleichung kann man dann mit einiger langwieriger mathematischer Arbeit eine Lösung für die Verteilungsfunktion herleiten.

Mit den transformierten Anfangsbedingungen für $t = 0$, $f_{\vec{k},a}(t = 0) \equiv f_{\vec{k},a}$ (siehe Anhang B.1) und Gleichung (2.15) erhält man

$$\begin{aligned} & \left(-i\omega + i \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{m_a \gamma_a} \right) \delta f_a + q_a \frac{\vec{p} \times \vec{B}_0}{m_a \gamma_a c} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \vec{p}} \\ &= -q_a \left(\delta \vec{E} + \frac{\vec{p} \times (\vec{k} \times \delta \vec{E})}{m_a \gamma_a \omega} \right) \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{p}} - i q_a \frac{\vec{p} \times \vec{B}_{\vec{k}}}{m_a \gamma_a \omega c} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{p}} + f_{\vec{k},a}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Auf dem Weg zu einer Lösung gelangt man durch eine geschickte Transformation in ein geeignetes Koordinatensystem. Da die Ausrichtung des Systems frei wählbar ist, legt man das Hintergrundmagnetfeld zweckmäßigerweise in z -Richtung, d.h. $\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$. Zudem vereinfacht sich Gleichung (2.26) durch die Einführung von Zylinderkoordinaten,

$$\begin{aligned} p_x &= p_{\perp} \cos \phi \\ p_y &= p_{\perp} \sin \phi \\ p_z &= p_{\parallel}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Durch diese Transformationen und mit der Larmorfrequenz $\Omega_{B,a} \equiv (q_a B_0 / m_a \gamma_a c)$ vereinfacht sich folgender Term in der Vlasovgleichung (vgl. Anhang B.2),

$$q_a \frac{\vec{p} \times \vec{B}_0}{m_a \gamma_a c} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \vec{p}} = - \frac{q_a B_0}{m_a \gamma_a c} \frac{\partial \delta f_a}{\partial \phi} = - \Omega_{B,a} \frac{\partial \delta f_a}{\partial \phi}. \quad (2.28)$$

So erhält man die Vlasovgleichung in den neuen Koordinaten,

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial \phi} - \frac{i\vec{k} \cdot \vec{v} - i\omega}{\Omega_{B,a}} \delta f_a = \frac{\Phi(\phi)}{\Omega_{B,a}} \quad (2.29)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Phi(\phi) &\equiv q_a Q(\phi) + iq_a \frac{\vec{p} \times \vec{B}_0}{m_a \gamma_a \omega c} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{p}} - f_{\vec{k},a}, \\ Q(\phi) &\equiv \left(\delta \vec{E} + \frac{\vec{p} \times (\vec{k} \times \delta \vec{E})}{m_a \gamma_a \omega} \right) \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{p}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$Q(\phi)$ lässt sich nun mit $\delta \vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ und der Transformation der Ableitungen (vgl. Anhang B.2) berechnen,

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= \left(\delta \vec{E} + \frac{\vec{k}(\vec{p} \cdot \delta \vec{E}) - \delta \vec{E}(\vec{p} \cdot \vec{k})}{m_a \gamma_a \omega} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{p_x}{p_\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} - \frac{p_y}{p_\perp^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \\ \frac{p_y}{p_\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} + \frac{p_x}{p_\perp^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\parallel} \end{pmatrix} \\ &= \left(E_x + \frac{k_x(p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) - E_x(p_x k_x + p_y k_y + p_z k_z)}{m_a \gamma_a \omega} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{p_x}{p_\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} - \frac{p_y}{p_\perp^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \left(E_y + \frac{k_y(p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) - E_y(p_x k_x + p_y k_y + p_z k_z)}{m_a \gamma_a \omega} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{p_y}{p_\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} + \frac{p_x}{p_\perp^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \left(E_z + \frac{k_z(p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) - E_z(p_x k_x + p_y k_y + p_z k_z)}{m_a \gamma_a \omega} \right) \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\parallel} \\ &= (E_x p_x + E_y p_y) \left(\frac{1}{p_\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} \frac{k_z}{m_a \gamma_a \omega} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\parallel} - \frac{p_z}{p_\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} \right) \right) \\ &\quad + E_z \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\parallel} + E_z \left(\frac{p_x k_x + p_y k_y}{m_a \gamma_a \omega} \right) \left(\frac{p_z}{p_\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} - \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\parallel} \right) \\ &\quad + E_x \left(-p_y + \frac{k_y p_\perp^2 + k_z p_z p_y}{m_a \gamma_a \omega} \right) \frac{1}{p_\perp^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \\ &\quad + E_y \left(p_x - \frac{k_x p_\perp^2 + k_z p_z p_x}{m_a \gamma_a \omega} \right) \frac{1}{p_\perp^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \\ &\quad + E_z \left(\frac{p_z(p_x k_y - p_y k_x)}{m_a \gamma_a \omega} \right) \frac{1}{p_\perp^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Zusammen mit den Zylinderkoordinaten für den Impuls (2.27) ergibt sich dann

$$Q(\phi) = (E_x \cos \phi + E_y \sin \phi) \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} + \frac{k_z}{m_a \gamma_a \omega} \left(p_\perp \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\parallel} - p_\parallel \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_\perp} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + E_z \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + E_z \left(\frac{k_x \cos \phi + k_y \sin \phi}{m_a \gamma_a \omega} \right) \left(p_{\parallel} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} - p_{\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \\
& + E_x \left(-\sin \phi + \frac{k_y p_{\perp} + k_z p_{\parallel} \sin \phi}{m_a \gamma_a \omega} \right) \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \\
& + E_y \left(\cos \phi - \frac{k_x p_{\perp} + k_z p_{\parallel} \cos \phi}{m_a \gamma_a \omega} \right) \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} \\
& + E_z \left(\frac{p_{\parallel} (k_y \cos \phi - k_x \sin \phi)}{m_a \gamma_a \omega} \right) \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi}. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Im Folgenden wird Gyrotropie angenommen, d.h. die Verteilungsfunktion hängt nicht vom Azimut ϕ ab, $(\partial f_{a0}/\partial \phi) = 0$. Dies hat zur Folge, dass die letzten drei Summanden in Gleichung (2.32) wegfallen. Außerdem lassen sich x - und y -Achse so ausrichten, dass der Wellenvektor nur Komponenten in x - und z -Richtung besitzt, d.h. $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$. Mit Hilfe der Variation der Konstanten (siehe Anhang B.3) kann man nun eine formale Lösung der Verteilungsfunktion δf_a aus der Vlasovgleichung (2.29) bestimmen

$$\delta f_a = \frac{1}{\Omega_{B,a}} \int_{\text{sign}(q_a \Gamma) \infty}^{\phi} d\phi' \Phi(\phi') \exp \left[\frac{i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega)(\phi - \phi') + i k_{\perp} v_{\perp} (\sin \phi - \sin \phi')}{\Omega_{B,a}} \right]. \tag{2.33}$$

Man beachte, dass in dieser Lösung die Ableitung $(\partial f_{a0}/\partial \vec{p})$ enthalten ist, welche nach Annahme bereits bekannt ist.

2.2.2 Berechnung des Leitfähigkeitstensors

Im weiteren Verlauf wird nun der konstante Term, welcher die Anfangsbedingungen enthält, weggelassen. Er trägt nur zu einer Integrationskonstante bei, die für die Berechnung des Maxwelloperators und dessen Determinante keine Bedeutung hat. Aus den Gleichungen (2.28), (2.32) und der Annahme der Gyrotropie folgt

$$\Phi(\phi) = q_a Q(\phi) = q_a \left[(E_x \cos \phi + E_y \sin \phi) \hat{U} + E_z \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \cos \phi}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \right) \right] \tag{2.34}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\hat{U} &= \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{m_a \gamma_a \omega} \left(p_{\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} \right) \\
\hat{V} &= p_{\parallel} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} - p_{\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}}. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

So lautet jetzt die formale allgemeine Lösung (2.33)

$$\begin{aligned}
\delta f_a &= \frac{q_a}{\Omega_{B,a}} \int_{\text{sign}(q_a \Gamma) \infty}^{\phi} d\phi' \left[(E_x \cos \phi' + E_y \sin \phi') \hat{U} + E_z \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \cos \phi'}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \right) \right] \\
&\times \exp \left[\frac{i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega)(\phi - \phi') + i k_{\perp} v_{\perp} (\sin \phi - \sin \phi')}{\Omega_{B,a}} \right] \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Mit dieser Lösung der fluktuierenden Verteilungsfunktion bestimmt man nun die Fourier-Laplace-transformierte Stromdichte $\delta\vec{j}$

$$\begin{aligned}
\delta\vec{j} &= \sum_a n_a q_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \frac{\vec{p}}{m_a \gamma_a} \delta f_a \\
&= \sum_a \frac{n_a q_a^2}{m_a} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\gamma_a \Omega_{B,a}} \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} p_{\perp} \cos \phi \\ p_{\perp} \sin \phi \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \int_{\text{sign}(q_a \Gamma)\infty}^{\phi} d\phi' \left[(E_x \cos \phi' + E_y \sin \phi') \hat{U} + E_z \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \cos \phi'}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \right) \right] \\
&\quad \times \exp \left[\frac{i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega)(\phi - \phi') + i k_{\perp} v_{\perp} (\sin \phi - \sin \phi')}{\Omega_{B,a}} \right] \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass in dieser Gleichung für die Stromdichte die Komponenten des elektrischen Feldes nur in linearer Form enthalten sind. Mit Gleichung (2.37) verifiziert man also den Ansatz, den Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischem Feld formal in Form eines Ohmschen Gesetzes zu formulieren, d.h. $\delta\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$. Daher ist mit dem Ansatz (2.14) der Maxwelloperator (2.17) prinzipiell berechenbar, indem sukzessive die vier Integrationen gelöst werden.

In dieser Arbeit sollen diese in der Reihenfolge des Standardansatzes erfolgen, bei dem zunächst die Winkelintegrationen (über ϕ und ϕ') durchgeführt werden. Eine alternative Lösungsmöglichkeit stellt der Ansatz nach Trubnikov dar (vgl. [44]), der in dieser Arbeit aber nicht weiter verfolgt wird.

Mit den Abkürzungen $\alpha = (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega)/\Omega_{B,a}$, $\beta = k_{\perp} v_{\perp}/\Omega_{B,a}$ und der Erzeugenden der Besselfunktion,

$$e^{iz \sin \phi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}[z] e^{i\nu\phi}, \tag{2.38}$$

erhält man aus Gleichung (2.37) für die Stromdichte

$$\begin{aligned}
\delta\vec{j} &= \sum_a \frac{n_a q_a^2}{m_a} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\gamma_a \Omega_{B,a}} \sum_{\mu, \nu} J_{\mu}[\beta] J_{\nu}[\beta] \\
&\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} p_{\perp} \cos \phi \\ p_{\perp} \sin \phi \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} e^{i(\alpha+\nu)\phi} \int_{\text{sign}(q_a \Gamma)\infty}^{\phi} d\phi' e^{-i(\alpha+\mu)\phi'} \\
&\quad \times \left[(E_x \cos \phi' + E_y \sin \phi') \hat{U} + E_z \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \cos \phi'}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \right) \right] \\
&= \sum_a \frac{n_a q_a^2}{m_a} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\gamma_a \Omega_{B,a}} \sum_{\mu, \nu} J_{\mu}[\beta] J_{\nu}[\beta] \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(\alpha+\nu)\phi} \int_{\text{sign}(q_a \Gamma)\infty}^{\phi} d\phi' e^{-i(\alpha+\mu)\phi'} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} p_{\perp} \cos \phi \cos \phi' \hat{U} & p_{\perp} \cos \phi \sin \phi' \hat{U} & p_{\perp} \cos \phi \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \cos \phi'}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \right) \\ p_{\perp} \sin \phi \cos \phi' \hat{U} & p_{\perp} \sin \phi \sin \phi' \hat{U} & p_{\perp} \sin \phi \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \cos \phi'}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \right) \\ p_{\parallel} \cos \phi' \hat{U} & p_{\parallel} \sin \phi' \hat{U} & p_{\parallel} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \cos \phi'}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Gleichung (2.39) hat nun die gewünschte Form eines Ohmschen Gesetzes im Fourier-Laplace-Raum,

$$\delta \vec{j} = \bar{\sigma} \cdot \delta \vec{E}. \quad (2.40)$$

Zur Berechnung des Leitfähigkeitstensors müssen die Winkelintegrale und Summationen gelöst werden. Die genaue Rechnung ist, da rein mathematisch, in Anhang B.4 dargestellt. Mit den Ergebnissen (B.18) und (B.22) aus Anhang B.4 und mit der Plasmafrequenz $\omega_{p,a}^2 = 4\pi n_a q_a^2 / m_a$ kann man nun den über die Phase gemittelten Leitfähigkeitstensor angeben,

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\gamma_a \Omega_{B,a}} S_{ij}, \quad (2.41)$$

wobei

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} p_{\perp} \hat{U} \Psi_{11} & p_{\perp} \hat{U} \Psi_{12} & p_{\perp} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} \Psi_{13} + \frac{k_{\perp}}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \Psi_{11} \right) \\ p_{\perp} \hat{U} \Psi_{21} & p_{\perp} \hat{U} \Psi_{22} & p_{\perp} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} \Psi_{23} + \frac{k_{\perp}}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \Psi_{21} \right) \\ p_{\parallel} \hat{U} \Psi_{31} & p_{\parallel} \hat{U} \Psi_{32} & p_{\parallel} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} \Psi_{33} + \frac{k_{\perp}}{m_a \gamma_a \omega} \hat{V} \Psi_{31} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Gleichung (2.41) lässt sich noch etwas umformen zu dem Resultat

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{i}{2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\gamma_a \Omega_{B,a}} \sum_{\mu} \frac{1}{\alpha + \mu} T_{ij} = \\ &= \frac{1}{2i} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \sum_{\mu} \frac{\gamma_a^{-1} T_{ij}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \mu \Omega_{B,a}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \bar{T} &\equiv \begin{pmatrix} p_{\perp} \hat{U} \frac{\mu^2}{\beta^2} J_{\mu}^2 & ip_{\perp} \hat{U} \frac{\mu}{\beta} J_{\mu} J'_{\mu} & p_{\perp} \hat{W} \frac{\mu}{\beta} J_{\mu}^2 \\ -ip_{\perp} \hat{U} \frac{\mu}{\beta} J_{\mu} J'_{\mu} & p_{\perp} \hat{U} J_{\mu}^2 & -ip_{\perp} \hat{W} J_{\mu} J'_{\mu} \\ p_{\parallel} \hat{U} \frac{\mu}{\beta} J_{\mu}^2 & ip_{\parallel} \hat{U} J_{\mu} J'_{\mu} & p_{\parallel} \hat{W} J_{\mu}^2 \end{pmatrix}, \\ \hat{U} &= \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{m_a \gamma_a \omega} \left(p_{\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} \right), \\ \hat{W} &\equiv \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} \mu}{m_a \gamma_a \omega \beta} \left(p_{\parallel} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} - p_{\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dieses entspricht exakt der Darstellung, wie sie bei Schlickeiser und Lesch [33] oder Bekefi [2] zu finden ist.

2.2.3 Parallele Wellen

An dieser Stelle soll eine weitere Vereinfachung eingeführt werden. Es wird angenommen, dass nur Wellen mit Ausbreitungsrichtung parallel zum Magnetfeld auftreten; m.a.W., der senkrechte Anteil des Wellenvektors, k_{\perp} , ist Null. Diese Annahme scheint zunächst eine starke Einschränkung zu sein, erhält im nächsten Abschnitt aber ihre Berechtigung. Wegen $k_{\perp} = 0$ folgt $\beta = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_{B,a} = 0$, und auf diese Weise vereinfachen sich nochmals die Summen über die Besselfunktionen. Infolgedessen erhält der Leitfähigkeitstensor eine

einfachere Gestalt. Aus der Reihendarstellung der Besselfunktionen und der Symmetriemrelation,

$$\begin{aligned} J_\mu[\beta] &= \left(\frac{1}{2}\beta\right)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}\beta^2)^k}{k! \Gamma[\mu + k + 1]} \approx \frac{(\frac{\beta}{2})^\mu}{\Gamma[\mu + 1]} \quad \text{für } \beta \rightarrow 0, \\ J_{-\mu}[\beta] &= (-1)^\mu J_\mu[\beta], \end{aligned} \quad (2.45)$$

lassen sich die auftretenden Limes leicht berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mu}{\beta} J_\mu &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } \mu = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mu}{\beta} J_\mu J'_\mu &= \begin{cases} \pm \frac{1}{4} & \text{für } \mu = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mu}{\beta} J_\mu^2 &= 0 \quad \forall \mu, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} J'_\mu &= \begin{cases} \pm \frac{1}{2} & \text{für } \mu = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} J_\mu J'_\mu &= 0 \quad \forall \mu, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} J_\mu &= \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Damit erhält man aus Gleichung (2.43) den Leitfähigkeitstensor in kompakter Form,

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2i} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\gamma_a} \begin{pmatrix} \frac{p_{\perp} \hat{U}(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})}{2((\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{B,a}^2)} & i \frac{p_{\perp} \hat{U} \Omega_{B,a}}{2((\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{B,a}^2)} & 0 \\ -i \frac{p_{\perp} \hat{U} \Omega_{B,a}}{2((\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{B,a}^2)} & \frac{p_{\perp} \hat{U}(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})}{2((\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{B,a}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_{\parallel} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

In dieser Darstellung lässt sich $\bar{\sigma}$ für die weitere Berechnung des Maxwelloperators $\bar{\Lambda}$ nutzen.

2.3 Bestimmung des Maxwelloperators und der Dispersionsrelationen

2.3.1 Der Maxwelloperator

Aus dem Leitfähigkeitstensor (2.47) resultieren nun nach den Gleichungen (2.17) der Dielektrizitätstensor $\bar{\epsilon}$ und der Maxwelloperator $\bar{\Lambda}$. Diese besitzen für parallele Wellen, wie eben hergeleitet, eine vereinfachte Blockdiagonalgestalt (mit dem Brechungsindex $N^2 = \vec{k}^2 c^2 / \omega^2$),

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(\vec{k}, \omega) &= \bar{\delta} + \frac{4\pi i}{\omega} \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 + A & iB & 0 \\ -iB & 1 + A & 0 \\ 0 & 0 & 1 + C \end{pmatrix}, \\ \Lambda_{ij} &= N^2 (\delta_{3i} \delta_{3j} - \delta_{ij}) + \epsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

wobei die folgenden Definitionen eingeführt wurden,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}^2 \hat{U}(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})}{\gamma_a ((\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{B,a}^2)}, \\
B &= \frac{\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}^2 \hat{U} \Omega_{B,a}}{\gamma_a ((\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{B,a}^2)}, \\
C &= \frac{2\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp} p_{\parallel}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Daraus berechnet man die Determinante Λ , welche sich als Produkt darstellen lässt,

$$\begin{aligned}
\Lambda &= [(1 - N^2 + A)^2 - B^2] (1 + C) = \\
&= (1 - N^2 + A + B)(1 - N^2 + A - B)(1 + C) \\
&= \eta_{T,+} \eta_{T,-} \eta_L.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Die Determinante lässt sich also in zwei transversale Anteile aufspalten, die sich nur im Vorzeichen der Larmorfrequenz $\Omega_{B,a}$ unterscheiden,

$$\begin{aligned}
\eta_{T,\pm}(\vec{k}, \omega) &= 1 - N^2 + \frac{\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}^2}{\gamma_a (\omega \pm \Omega_{B,a} - k_{\parallel} v_{\parallel})} \\
&\quad \times \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{m_a \gamma_a \omega} \left(p_{\perp} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} \right) \right),
\end{aligned} \tag{2.51}$$

und einen longitudinalen Anteil,

$$\eta_L(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{2\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\parallel} p_{\perp}}{\gamma_a (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}}. \tag{2.52}$$

Die Dispersionsrelation des Plasmas ergibt sich nun aus der Forderung, dass die Determinante des Maxwelloperators, die als Produkt eines transversalen und eines longitudinalen Anteils darstellbar ist, verschwinden muss,

$$\Lambda = \Lambda_L (\Lambda_T)^2 = 0. \tag{2.53}$$

So folgen die Lösungen der longitudinalen Mode bzw. der transversalen Moden direkt aus den Bedingungen

$$\Lambda_L = \eta_L = 0 \quad \vee \quad (\Lambda_T)^2 = \eta_{T,+} \eta_{T,-} = 0. \tag{2.54}$$

2.3.2 Herleitung der Dispersionsrelationen

Der Schwerpunkt der ersten Hälfte dieser Arbeit besteht darin, allgemeine Aussagen für die Weibelinstabilität (d.h. in einem unmagnetisierten Plasma) herzuleiten, ohne eine spezielle Verteilungsfunktion vorauszusetzen. Der Begriff „unmagnetisch“ bezieht sich hierbei auf den Gleichgewichtszustand des Plasmas, d.h. man lässt das Hintergrundmagnetfeld verschwinden¹, $B_0 \rightarrow 0$.

¹E. Weibel machte diesen Schritt zwar nicht, aber er betonte, dass das Magnetfeld B_0 nicht essentiell für das Verhalten der Instabilität wäre. Er beließ das Feld in seinen Gleichungen, weil es die Rechnungen

Jetzt zeigt es sich, dass die Beschränkung auf parallele Wellen, die im vorigen Abschnitt eingeführt wurde, gar keine Einschränkung ist. Denn der Wellenvektor \vec{k} ist nun neben der Richtung der Anisotropie die einzig zur Verfügung stehende Orientierungsmöglichkeit² für das Koordinatensystem! Man kann also die Ausbreitungsrichtung der Wellen mit der z -Achse des Koordinatensystems identifizieren, was genau Wellen entspricht, die parallel zu einem Hintergrundmagnetfeld in z -Richtung laufen.

Daher gilt nun $k \equiv k_{\parallel}$ und wegen $B_0 = 0$ ist auch die Larmorfrequenz $\Omega_{B,a}$ gleich Null. So fallen die transversalen Moden $\eta_{T,+} = \eta_{T,-} \equiv \eta_T \equiv \Lambda_T = 0$ zusammen und man erhält die longitudinalen (bzw. elektrostatischen) und transversalen (bzw. elektromagnetischen) Dispersionsbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda_L \equiv 1 + \frac{2\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\parallel} p_{\perp}}{\gamma_a (\omega - kv_{\parallel})} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}}, \\ 0 &= \Lambda_T \equiv 1 - N^2 + \frac{\pi}{\omega^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}^2}{\gamma_a} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega - kv_{\parallel}} \frac{\partial f_{a0}}{\partial p_{\parallel}} \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dabei beziehen sich die Begriffe „longitudinal“ und „transversal“ auf die Richtung der elektrischen Fluktuation $\delta\vec{E}$, d.h. bei einer longitudinalen Mode gilt $\delta\vec{E} \parallel \vec{k}$ und bei einer transversalen Mode $\delta\vec{E} \perp \vec{k}$. Wegen $\nabla \cdot \delta\vec{B} = 0$ stehen die magnetischen Fluktuationen stets senkrecht auf \vec{k} .

Aus Symmetriegründen folgt

$$\Lambda_L(-k, \omega) = \Lambda_L(k, \omega), \quad \Lambda_T(-k, \omega) = \Lambda_T(k, \omega), \quad (2.56)$$

daher sind die Eigenschaften der Moden identisch, ungeachtet der Ausbreitungsrichtung. Es gilt also o.B.d.A. $k > 0$.

Im allgemeinen kovarianten Fall ist es nun geschickt, neue Variablen einzuführen (vgl. Lerche [23]): den dimensionslosen Parallelimpuls der Teilchen y und die relativistische dimensionslose Energie E , welche dem Lorentzfaktor γ entspricht,

$$\begin{aligned} y &\equiv \frac{p_{\parallel}}{m_a c}, \\ E &\equiv \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{m_a^2 c^2}} = \gamma_a \end{aligned} \quad (2.57)$$

nicht sonderlich verkomplizierte [45]. Bei den hier folgenden Rechnungen stellt es jedoch eine große Erleichterung dar, wenn man das Feld $B_0 = 0$ setzt.

Strenggenommen widerspricht dieses zwei Schritten in der Herleitung der Dispersionsrelationen: Einerseits wurde in Gleichung (2.29) durch die Larmorfrequenz $\Omega_{B,a} (\propto B_0)$ geteilt, was für ein verschwindendes Feld einer Division durch Null entspräche. Zum Anderen entfällt die Begründung der Gyrotropie in Gleichung (2.34), welche für magnetische Plasmen eine geeignete Annahme ist. (Der magnetfeldfreie Fall kann jedoch als stetiger Übergang eines verschwindenden Magnetfeldes angesehen werden, in dem die Gyrotropie gilt.) Gerechtfertigt wird die Herleitung durch die Tatsache, dass man die Dispersionsrelationen für unmagnetische Plasmen alternativ auch direkt hätte herleiten können, indem man in Gleichung (2.26) $|\vec{B}_0| = 0$ setzt (vgl. z.B. R.C. Tautz [38]). Allerdings wäre dann die große Ähnlichkeit zwischen Plasmen mit und ohne Magnetfeld untergegangen.

²Jedoch kann die Anisotropie erst mit der Spezifikation der Verteilungsfunktion genauer beschrieben werden. Es ist daher sinnvoller, den Wellenvektor \vec{k} als Orientierung zu nutzen.

Mit der Einführung der Phasengeschwindigkeit bzw. des inversen Brechungsindex' $\mathcal{Z} \equiv 1/N \equiv (\omega/kc)$ führt diese Lerchettransformation (2.57), wobei sich die Verteilungsfunktion gemäß $(m_a c)^3 f_{a0}(k, p_{\parallel}, p_{\perp}, \omega) \Leftrightarrow f_{a0}(k, \omega, E, y)$ transformiert (vgl. auch Kapitel 4.1.1), zu den Dispersionsrelationen

$$0 = \Lambda_L = 1 - \frac{2\pi}{k^2 c^2 \mathcal{Z}} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{y}{y - E\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + \frac{y}{E} \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right) \quad (2.58)$$

und

$$0 = \Lambda_T = 1 - \frac{1}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\pi}{k^2 c^2 \mathcal{Z}^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E \times \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y - E\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + \mathcal{Z} \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right). \quad (2.59)$$

2.3.3 Analytische Fortsetzung für gedämpfte Wellen ($\Gamma < 0$)

Strenggenommen gelten die Gleichungen (2.58) und (2.59) nur für $\Gamma > 0$, d.h. für anwachsende Wellen; man sollte daher die einzelnen Moden mit „+“ indizieren,

$$\Lambda_{L,T} \Rightarrow \Lambda_{L,T}^+. \quad (2.60)$$

Nun stellt sich die (akademische) Frage, inwieweit man diese Ergebnisse im Bereich der Dämpfung, $\Gamma < 0$, benutzen kann. Dazu ist eine analytische Fortsetzung von Integralen folgender Form

$$J = \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{g[E, y]}{y - E\mathcal{Z}} \quad (2.61)$$

mit beliebiger Funktion $g[E, y]$ in die negative komplexe \mathcal{Z} -Halbebene nötig. Dabei ist das Verhalten der Integrale abhängig vom Ort des Pols $E\mathcal{Z}$ bezüglich des Integrationsintervalls $[-\sqrt{E^2-1}, \sqrt{E^2-1}]$. Für superluminale Wellen ($|\Re[\mathcal{Z}]| > 1$) liegt der Pol außerhalb des Integrationsintervalls, d.h. man kann einfach ansetzen

$$J_{\text{superluminal}}^- = J_{\text{superluminal}}^+ \quad (2.62)$$

und die Relationen (2.58), (2.59) gelten in der ganzen Ebene

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{superluminal,L}} &= \Lambda_L^+ \\ \Lambda_{\text{superluminal,T}} &= \Lambda_T^+. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Bei subluminale Wellen ($|\Re[\mathcal{Z}]| < 1$) befindet sich der Pol innerhalb des Intervalls für Werte $E > E_c = (1 - \mathcal{Z}^2)^{-1/2}$. Die geeignete Fortsetzung wird durch die Differenz der Integrale J^- und J^+ bei der Annäherung an die reelle Achse von beiden Seiten beschrieben

$$\lim_{\Im[\mathcal{Z}] \rightarrow 0^-} J^- = \lim_{\Im[\mathcal{Z}] \rightarrow 0^+} J^+ + 2\pi i g[E, y = E\mathcal{Z}] H[E - E_c], \quad (2.64)$$

wobei $H[x]$ die Heaviside- oder Stufenfunktion bezeichnet. Daraus ergeben sich die Dispersionsrelationen für die negative komplexe Frequenzhalbebene³

$$\begin{aligned}
0 &= \Lambda_{\text{subluminal,L}}^- \\
&= 1 - \frac{2\pi}{k^2 c^2 \mathcal{Z}} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{y}{y - E\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + \frac{y}{E} \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right) \\
&\quad - i \frac{4\pi^2}{k^2 c^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 (m_a c)^3 \int_{E_c}^\infty dE E^2 \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + \frac{y}{E} \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right) \Big|_{y=E_c}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

sowie

$$\begin{aligned}
0 &= \Lambda_{\text{subluminal,T}}^- = 1 - \frac{1}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\pi}{k^2 c^2 \mathcal{Z}^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \\
&\quad \times \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y - E\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + \mathcal{Z} \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right) \\
&\quad - i \frac{2\pi^2}{k^2 c^2 \mathcal{Z}^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 (m_a c)^3 \int_{E_c}^\infty dE \left((1 - \mathcal{Z}^2) E^2 - 1 \right) \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + z \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right) \Big|_{y=E_c}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Jedoch beschäftigt sich diese Arbeit, wie bereits erwähnt, im Weiteren mit *anwachsenden* Moden der Weibelinstabilität. Es sollte in diesem Abschnitt nur die prinzipielle Erweiterung der Relationen (2.58), (2.59) auf die ganze komplexe Ebene vorgestellt werden. Dass dieses von Bedeutung ist, wurde bereits in Abschnitt 2.1.4 dargelegt.

³Der Vollständigkeit halber sei gesagt, dass die subluminalen Dispersionsrelationen für die positive komplexe Frequenzebene natürlich durch die Relationen (2.58), (2.59) gegeben sind,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\text{subluminal,L}}^+ &= \Lambda_L^+ \\
\Lambda_{\text{subluminal,T}}^+ &= \Lambda_T^+.
\end{aligned}$$

3 Allgemeine Eigenschaften der relativistischen Weibelinstabilität

Upon examining the theories of these phenomena it was found that there exist also self-excited transverse electromagnetic waves, which involve only the electrons of a plasma, provided that their velocity distribution is sufficiently anisotropic.

Erich S. Weibel [45] beschreibt seine Entdeckung einer neuen Klasse von Plasmainstabilitäten.

Wie bereits in der Einführung erwähnt, soll in diesem Teil der Arbeit untersucht werden, unter welchen allgemeinen Voraussetzungen die relativistische Weibelinstabilität existieren kann. Die bisherigen Untersuchungen in der Literatur (siehe z.B. [20], [31], [49], [50]) setzten verschiedene Verteilungsfunktionen an, sei es eine Bi-Maxwell- oder eine sogenannte *Waterbag*-Verteilung. Es ist jedoch zu erwarten, dass einige dieser Erkenntnisse allgemeingültig für die relativistische Weibelinstabilität sind, d.h. unabhängig von der Wahl der Verteilungsfunktion. Geeignete Fragestellungen sind beispielsweise:

- Lassen sich Einschränkungen für den erlaubten Wellenzahlbereich und die Wachstumsrate finden?
- Wie wirkt sich z.B. die Annahme einer extrem relativistischen Verteilungsfunktion auf die Näherungslösung aus?
- Macht es einen Unterschied, ob die anisotrope Verteilungsfunktion „symmetrisch“ oder „asymmetrisch“ ist, d.h. ob nur gerade, oder auch ungerade Potenzen des Impulses in der Verteilungsfunktion auftauchen?

Könnte man solche und ähnliche Fragen allgemein für die Weibelinstabilität beantworten, so hätte man die Möglichkeit, auch die Weibelinstabilität mit komplizierteren (und damit realistischeren) Verteilungsfunktionen beschreiben zu können. Um diese Ziele zu erreichen, werden im weiteren Verlauf die transversalen Moden unter der Annahme wachsender Moden, d.h. $\Gamma > 0$, betrachtet.

3.1 Umformung der relativistischen elektromagnetischen Dispersionsrelation

Die Grundgleichung dieses Kapitels ist daher die Dispersionsrelation (2.59) für anwachsende lineare transversale Wellen in einem unmagnetisierten Vielteilchenplasma¹,

$$0 = 1 - \frac{1}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\pi}{c^2 k^2 \mathcal{Z}^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y - E\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + \mathcal{Z} \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right). \quad (3.1)$$

Die Moden sollen hierbei dem Wellenansatz $\exp[ik(z - \mathcal{Z}t)]$ genügen und die Verteilungsfunktion gemäß

$$1 = 2\pi \int_1^\infty dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy f_{a0} \quad (3.2)$$

normiert sein. Für die weitere Rechnung ist es günstig, Gleichung (3.1) in folgende Form zu bringen,

$$c^2 k^2 = -\frac{\pi}{1 - \mathcal{Z}^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y - E\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + \mathcal{Z} \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right). \quad (3.3)$$

Hier gilt der Ansatz, dass k reell ist, wohingegen die Phasengeschwindigkeit $\mathcal{Z} = \omega/(ck)$ u.A. von der Frequenz ω abhängt und somit im Allgemeinen komplexwertig ist.

Diese Phasengeschwindigkeit \mathcal{Z} nun kann als Parameter zur Beschreibung der Weibelinstabilität dienen. Um sich auf die wesentlichen Aussagen zu konzentrieren und die Rechnungen zu vereinfachen, setzt man \mathcal{Z} zweckmäßigerweise in der Form iM an. Dieses entspricht einer rein imaginären Frequenz $\omega = i\Gamma$ (wobei Γ nur reelle Werte annimmt), und so hat die Welle eine exponentielle Zeitabhängigkeit $\exp[kMt]$, mit $M = \Gamma/(ck)$. Für das Wachstumsverhalten ist es zunächst uninteressant, ob die Welle propagiert, $\Re[\omega] \neq 0$, oder stationär bleibt, $\Re[\omega] = 0$. Unabhängig davon entscheidet das Vorzeichen von M bzw. Γ über Wachstum oder Dämpfung.

Es ist allerdings zu beachten, dass die Annahme $\mathcal{Z} = iM$ nicht sicherstellt, dass – falls eine Weibelinstabilität auftritt – auf diese Weise die schnellstwachsende Instabilität beschrieben wird. Es ist durchaus möglich, dass eine komplexe Phasengeschwindigkeit ($\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_R + iM$) schneller wachsende Instabilitäten liefert, man vergleiche mit den Arbeiten von Bret *et al.* [5, 6].

Trotz dieses Einwandes ist das angegebene Vorgehen in der Stabilitätsanalyse weit verbreitet und wurde bereits von E. Weibel [45] benutzt (siehe auch Schaefer-Rolffs und Schlickeiser [31]). Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die Dispersionsrelation (3.3) separierbar ist in ihren Realteil,

$$c^2 k^2 = -\frac{\pi}{1 + M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y^2 + E^2 M^2} \left(y \frac{\partial f_{a0}}{\partial y} - M^2 E \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right), \quad (3.4)$$

und Imaginärteil,

$$0 = \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y^2 + E^2 M^2} \left(E \frac{\partial f_{a0}}{\partial y} + y \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right). \quad (3.5)$$

¹Die Relation (2.59) findet sich auch bei Schlickeiser [35]; die entsprechende Relation bei Yoon [50] kann ebenfalls in diese Form gebracht werden

Nun könnte man diese Gleichungen so verstehen, dass M nur eine Hilfsgröße ist und lediglich als Abkürzung von $\Gamma/(ck)$ gebraucht wird. Jedoch bietet es sich an, in dieser Phase zunächst M als unabhängige Variable zu betrachten, *mit deren Hilfe* man Wellenzahlen für die Weibelinstabilität bestimmen kann. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die abhängige Größe – in diesem Fall die Wellenzahl k – nicht im Integral auftaucht und somit die ursprünglich implizite Dispersionsrelation in einen expliziten Ausdruck für k übergegangen ist.

Die Betrachtung der Gleichungen (3.4) und (3.5) macht deutlich, dass sie Funktionen von gerader Ordnung in M , d.h. Funktionen von M^2 sind. So hat man automatisch paarweise Lösungen: Zu jeder Mode mit einem positiven Wert von M gibt es ebenso eine mit negativem M . Allerdings darf man für negative M (dies entspricht $\Gamma < 0$) die Dispersionsrelation nicht in der Form (2.59) anzusetzen. Man müsste auf die Relation (2.66) ausweichen, wie aus Kapitel 2.3.3 folgt. Da in dieser Arbeit aber nur die anwachsenden Moden ($\Gamma > 0$) betrachtet werden, wird die Fragestellung nach den Moden mit $M < 0$ nicht weiter verfolgt.

Nun lohnt es sich, den „imaginären“ Teil der Dispersionsrelation (3.5) zu betrachten. Falls nämlich f_{a0} eine symmetrische Funktion in y ist (d.h. nur gerade Potenzen in y treten auf), so ist Gleichung (3.5) automatisch erfüllt. Wie später in Abschnitt 3.6 gezeigt wird, erhält man andernfalls (für im Folgenden „asymmetrische“ genannte Verteilungsfunktionen) aus dieser Gleichung diskrete Werte² für M^2 .

Für die weiteren Abschnitte dieses Kapitels werden daher zunächst in y symmetrische Verteilungsfunktionen angenommen, bei denen Gleichung (3.5) automatisch erfüllt ist; erst am Ende werden die Auswirkungen asymmetrischer Verteilungsfunktionen diskutiert. Gleichung (3.4) kann daher für symmetrische Verteilungen in die folgende Form gebracht werden,

$$c^2 k^2 = -\frac{2\pi}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2-1-y^2}{y^2+E^2M^2} \left(y \frac{\partial f_{a0}}{\partial y} - M^2 E \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right). \quad (3.6)$$

Im Folgenden wird also untersucht, welche allgemeine Struktur $f_{a0}(E, y^2)$ besitzen muss, damit Gleichung (3.6) für reelle und positive k^2 erfüllt ist, m.a.W., die rechte Seite der Gleichung (3.6) muss positiv sein.

3.2 Bedingungen für eine Weibelinstabilität bei symmetrischen Verteilungen

Das Ziel dieses Abschnittes ist, aus der Gleichung (3.6) eine Beziehung zwischen k^2 und M^2 herzuleiten und somit Aussagen über die Existenz einer Instabilität zu gewinnen. Störend hierbei sind vor allem die partiellen Ableitungen der Verteilungsfunktion f_{a0} . Man ist daher bestrebt, nach Möglichkeit diese partiellen Ableitungen mittels partieller Integration in solche Terme umzuwandeln, in denen die Verteilungsfunktion selbst auftaucht. Diese haben den Vorteil, dass sie stets größer als Null sind, was bei ihrer Ableitung

²Diese Werte, in die „reelle“ Gleichung (3.4) eingesetzt, liefern dann ebenfalls diskrete Werte für k^2 . Es gibt also für asymmetrische Verteilungen die Möglichkeit isolierter Weibelmoden, welche im symmetrischen Fall nicht auftreten können.

nicht der Fall sein muss. Da in diesem Abschnitt keine bestimmte Verteilungsfunktion eingesetzt wird, werden die Resultate in Form von Integralgleichungen angegeben.

Zunächst könnte man versucht sein, den Wellenzahlbereich, für den $M^2 = 0$ gilt, direkt aus Gleichung (3.6) zu gewinnen. Denn wegen $M^2 = \Gamma^2/(ck)^2$ gehen aus den Nullstellen von M^2 genau die Wellenzahlen k hervor, bei denen die Mode instabil wird (außer im Falle $k = 0$, dieses wird im Abschnitt 3.2.2 besonders betrachtet).

Jedoch ergibt sich mit diesem Ansatz das Problem, dass bei der Integration über y an der Stelle $y = 0$ eine Singularität von Ordnung y^{-2} aufgrund des Terms $(y^2 + E^2M^2)^{-1}$ auftritt. Diese Singularität kann vermieden werden, wenn zunächst $M > 0$ fest gehalten und erst nach der Integration der Grenzübergang $M \rightarrow 0$ durchgeführt wird. Man ist allerdings schon vorher in der Lage, einige allgemeine Aussagen über die Stabilitätsbedingungen treffen zu können. Dieses soll nun geschehen.

Führt man nun, wie bereits angedeutet, die partiellen Integrationen durch, erhält man aus Gleichung (3.6) unter der Annahme, dass die Verteilungsfunktion im Unendlichen Null ist,

$$c^2k^2 = + \frac{2\pi}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy f_{a0} \times \left(E \frac{\partial}{\partial y} \frac{y(E^2-1-y^2)}{y^2+E^2M^2} - M^2 \frac{\partial}{\partial E} \frac{E^2(E^2-1-y^2)}{y^2+E^2M^2} \right). \quad (3.7)$$

Die Ableitungen in Gleichung (3.7) lassen sich schnell durchführen und ergeben

$$c^2k^2 = \frac{2\pi}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{f_{a0}}{(y^2+E^2M^2)^2} \times \left([(y^2+E^2M^2)(E^2-1-3y^2) - 2y^2(E^2-1-y^2)] - M^2 [(y^2+E^2M^2)(4E^2-2-2y^2) - 2E^2M^2(E^2-1-y^2)] \right). \quad (3.8)$$

3.2.1 Integralgleichungen

Die Terme im Integral (3.8) können ausmultipliziert und nach dem Vorzeichen geordnet werden. Man erhält auf der rechten Seite der Gleichung die Differenz zweier Integrale,

$$c^2k^2 = \frac{2\pi}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \left(I_1[M^2, a] - I_2[M^2, a] \right), \quad (3.9)$$

mit den Definitionen

$$I_1[M^2, a] \equiv M^2 \int_1^\infty dE E \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2(E^2-1) + 2y^4}{(y^2+E^2M^2)^2} f_{a0} \quad (3.10)$$

und

$$I_2[M^2, a] \equiv \int_1^\infty dE E \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{2E^4M^4 + y^2[(E^2-1) + M^2(7E^2-2)] + y^4}{(y^2+E^2M^2)^2} f_{a0} \quad (3.11)$$

Daher ist es für die Existenz der Weibelinstabilität notwendig und hinreichend, dass

$$\sum_a \omega_{p,a}^2 \left(I_1[M^2, a] - I_2[M^2, a] \right) > 0. \quad (3.12)$$

Somit stellt Gleichung (3.12) eine Bedingung an M^2 für *beliebige* symmetrische Verteilungsfunktionen f_{a0} dar, damit die Weibelinstabilität auftreten kann. Man muss „nur“ die gewünschte Verteilung einsetzen und die Integralgleichung lösen. Für eine gewählte Verteilungsfunktion kann man die Integrale auch numerisch lösen und anschließend graphisch darstellen. Dieses wird exemplarisch in Abbildung 3.1 für eine Bi-Maxwell-Verteilung der Form $f_{a0} = \exp[-E - y^2]$ dargestellt. Im Falle einer δ -Verteilung lassen sich die Integrale auch analytisch recht einfach angeben; dieses wird in Kapitel 4.3.1 durchgeführt.

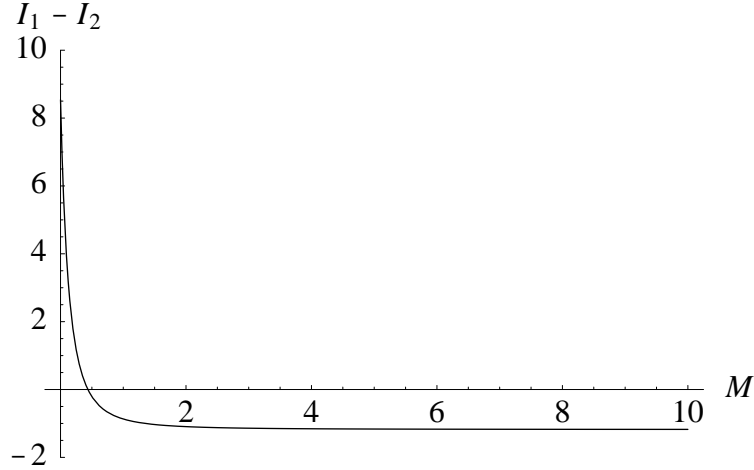


Abbildung 3.1: Numerische Darstellung des Instabilitätskriteriums (3.12) für die Weibelinstabilität für eine Bi-Maxwell-Verteilung der Form $f_{a0} = \exp[-E - y^2]$. Nur für $M < 0.437$ können Weibelmoden auftreten.

Eine alternative Version dieser Bedingung hat einen praktischen Nutzen für den Fall, dass $(\partial f_{a0}/\partial E) < 0$. Falls dann f_{a0} unabhängig von y , d.h. nur eine Funktion der Energie E ist und somit isotrop, kann man sofort die Nichtexistenz der Weibelinstabilität zeigen. Somit wird das wichtige Resultat bestätigt, dass in isotropen Verteilungen *keine* Weibelinstabilität auftritt, für beliebige Verteilungsfunktionen. Diese Aussage entspricht dem Newcomb-Gardner-Theorem (vgl. [4, 15, 21]), dass in isotropen Plasmen *ohne* Hintergrundmagnetfeld B_0 stets $\Gamma < 0$ gilt. Es gibt also grundsätzlich keine instabilen Moden in diesem Fall.

Dazu bezeichne man die Region im y -Raum mit $(\partial f_{a0}/\partial y) > 0$ als R_+ und entsprechend die komplementäre Region (mit $\partial f_{a0}/\partial y < 0$) als R_- . Es gelte auch stets $(\partial f_{a0}/\partial E) < 0$. Dann folgt für die Existenz der Weibelinstabilität aus Gleichung (3.6) die Bedingung

$$J_-[M^2] > J_+[M^2] + K[M^2]. \quad (3.13)$$

Dabei werden folgende Bezeichnungen eingeführt,

$$J_-[M^2] \equiv \frac{2\pi}{1 + M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{R_-} dy \frac{y(E^2 - 1 - y^2)}{y^2 + E^2 M^2} \left| \frac{\partial f_{a0}}{\partial y} \right| > 0, \quad (3.14)$$

$$J_+[M^2] \equiv \frac{2\pi}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{R_+} dy \frac{y(E^2 - 1 - y^2)}{y^2 + E^2 M^2} \frac{\partial f_{a0}}{\partial y} > 0, \quad (3.15)$$

und

$$K[M^2] \equiv \frac{2\pi M^2}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y^2 + E^2 M^2} \left(-E \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} \right) > 0. \quad (3.16)$$

Bedeutender ist aber diese Bedingung für isotrope Verteilungsfunktionen $f_{a0}(E)$, d.h. $(\partial f_{a0}/\partial y) = 0$. Es gilt dann $J_-[M^2] = J_+[M^2] = 0$, und wegen $-K[M^2] < 0$ ist die rechte Seite von Gleichung (3.6) negativ. Jedoch sind c und k reelle Größen, somit $c^2 k^2 \geq 0$. Es ergibt sich also ein Widerspruch, und es existieren keine anwachsenden Moden. Dieses Resultat lässt sich sogar weiter verallgemeinern und gilt dann auch für Verteilungsfunktionen mit $(\partial f_{a0}/\partial E) > 0$ in bestimmten Bereichen. Man kann nämlich für $(\partial f_{a0}/\partial y) = 0$ Gleichung (3.6) mit partieller Integration umformen,

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= \frac{2\pi M^2}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE f_{a0} \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy (y^2 + E^2 M^2)^{-2} \\ &\times \left(2E(1+y^2)(y^2 + E^2 M^2) + 2E^3(E^2 - 1)M^2 - 4E^3(y^2 + E^2 M^2) - 2E^3 M^2 y^2 \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Das Integral über y kann analytisch gelöst werden,

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= \frac{2\pi M^2}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE f_{a0} \\ &\times \left(3E\sqrt{E^2-1} - \frac{3E^2(1+M^2) - 1}{M} \arctan \frac{\sqrt{E^2-1}}{EM} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

In Anhang C.1 wird gezeigt, dass der Faktor in Klammern in Gleichung (3.18) intrinsisch negativ für alle Werte E in $1 \leq E \leq \infty$ ist, für beliebige M^2 . Auch hier ist die rechte Seite von Gleichung (3.18) stets negativ, so dass keine Weibelinstabilität für isotrope Verteilungen $f_{a0} = f_{a0}(E)$ existiert. Der Umkehrschluss lautet, dass eine Anisotropie, d.h. $f_{a0} = f_{a0}(E, y)$, zwingend erforderlich für instabile Moden ist.

Des Weiteren ist aus den Ungleichungen (3.12, 3.13) ersichtlich, dass für die Existenz einer Instabilität eine anisotrope Verteilungsfunktion zwar notwendig ist (also f_{a0} auch von y abhängen muss), dieses ist jedoch nicht hinreichend. Die Anisotropie von f_{a0} muss sowohl groß genug sein und sich über einen ausreichenden Bereich in y erstrecken, damit die Ungleichungen (3.12, 3.13) erfüllt werden können: Es müssen zunächst die negativen Terme „ausgeglichen“ werden³.

3.2.2 Der Fall $M \rightarrow \infty$

Abschließend kann man nun den Fall $M \rightarrow \infty$ betrachten. Unter dieser Bedingung führt Gleichung (3.6) auf

$$c^2 k^2 \simeq \frac{2\pi}{M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy (E^2 - 1 - y^2) \frac{\partial f_{a0}}{\partial E}$$

³Eine ähnliche Aussage von E. Weibel findet sich im Zitat am Anfang dieses Kapitels.

$$-\frac{2\pi}{M^4} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{E^2} \left((E^2 + y^2) \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} + Ey \frac{\partial f_{a0}}{\partial y} \right). \quad (3.19)$$

Vertauscht man zunächst die Integrationsreihenfolge im Term erster Ordnung und integriert anschließend partiell, so erhält man

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &\simeq \frac{2\pi}{M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^\infty dy \int_{\sqrt{1+y^2}}^\infty dE (E^2 - 1 - y^2) \frac{\partial f_{a0}}{\partial E} + \mathcal{O}[M^{-4}] \\ &= -\frac{4\pi}{M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^\infty dy \int_{\sqrt{1+y^2}}^\infty dE E f_{a0} + \mathcal{O}[M^{-4}] \\ &= -\frac{\sum_a \omega_{p,a}^2}{M^2} + \mathcal{O}[M^{-4}], \end{aligned} \quad (3.20)$$

wobei im letzten Schritt die Reihenfolge der Integration wiederum getauscht und die Normierung (3.2) benutzt wurde. Somit wird die rechte Seite von Gleichung (3.20) im Grenzfall $M \rightarrow \infty$ stets negativ. Es muss also einen Maximalwert für M geben, für den noch die Weibelinstabilität existieren kann.

Allerdings erlauben (3.12, 3.13) unter bestimmten Voraussetzungen positive Wachstumsraten, d.h. Weibelmoden. Die Integrale in den Gleichungen (3.6) bzw. (3.8) – und damit auch $c^2 k^2$ – besitzen jedoch wegen der Normierbarkeit der Verteilungsfunktion eine obere Schranke, solange nicht $M = 0$ gilt. So kann man als Folgerung aus diesen Untersuchungen sagen, dass es für eine instabile Mode eine obere Schranke k_0 in der Wellenzahl gibt, für die die Weibelinstabilität überhaupt auftritt. Dieses Verhalten ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Für kleinere Wellenzahlen $0 \leq k \leq k_0$ werden die Moden dementsprechend stets instabil; diese allgemeine Erkenntnis wird im nächsten Abschnitt verwendet.

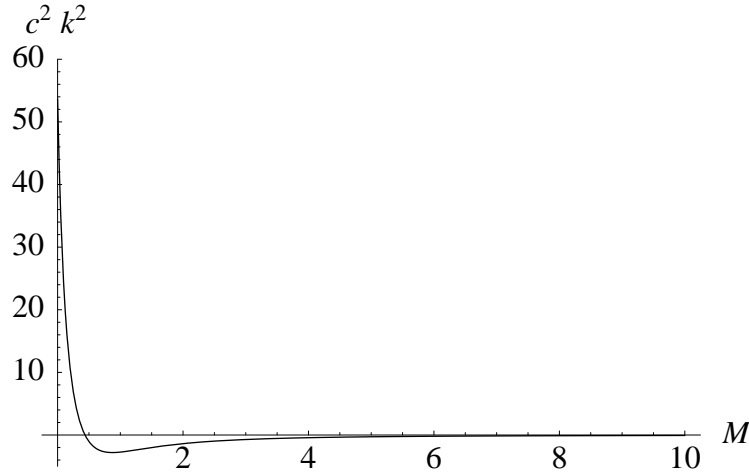


Abbildung 3.2: Verlauf der Gleichung (3.8) in Einheiten von M^2 und $c^2 k^2$ für eine Verteilung der Form $f_{a0} = \exp[-E - y^2]$ mit $\sum_a \omega_{p,a}^2 = 1$. Für $M \rightarrow \infty$ streben die Integrale den Wert Null an, wie es auch aus der Näherung (3.20) folgt. Man beachte, dass der Wellenzahlbereich, der Weibelmoden gestattet, auf der Ordinate im Intervall $[0, c^2 k_0^2 = 53.8]$ liegt.

Zudem lässt sich ganz allgemein aus Gleichung (3.19) und $M = \Gamma/(ck)$ die Form der Dispersionsrelation für sehr kleine Werte von k ableiten. Nun gilt es zunächst zu berücksichtigen, dass der Fall $M \rightarrow \infty$ durch $\Gamma \rightarrow \infty$ (bei beliebigen k) erreicht werden könnte. Dieser Fall ist jedoch physikalisch unsinnig, da bei anwachsenden Systemen stets eine Sättigungsphase erreicht werden muss. Ansonsten würde unendlich Energie in das System übertragen werden. Also wird durch diese Näherung das Verhalten der Wellenzahl $k \rightarrow 0$ beschrieben, welches auch zur Bedingung $M \rightarrow \infty$ führt. In diesem Fall findet man aus Gleichung (3.19) mit der Definition

$$\Omega_M^2 \equiv 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{2E^4 + (E^2 - 2y^2)(E^2 - 1 - y^2)}{E^3} f_{a0} \quad (3.21)$$

die biquadratische Gleichung

$$\Gamma^4 + \sum_a \omega_{p,a}^2 \Gamma^2 - \Omega_M^2 c^2 k^2 = 0 \quad (3.22)$$

mit den Lösungen

$$\Gamma^2 = \frac{\sum_a \omega_{p,a}^2}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Omega_M^2 c^2 k^2}{(\sum_a \omega_{p,a}^2)^2}} \right). \quad (3.23)$$

Diese beiden Lösungen sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Man erkennt sofort, dass für

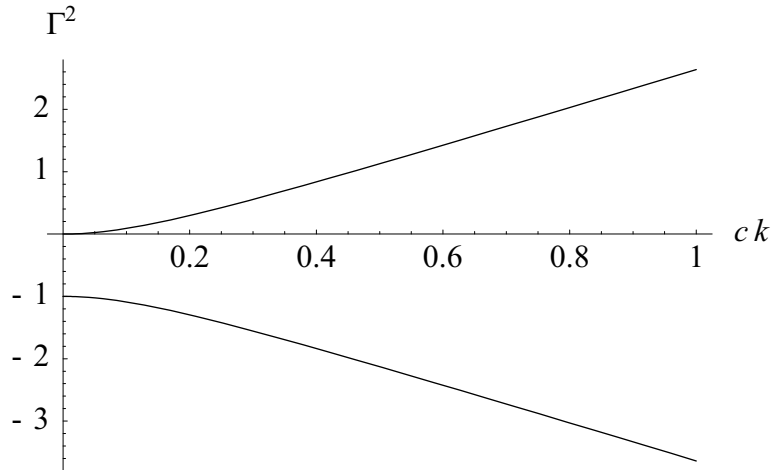


Abbildung 3.3: Lösung der biquadratischen Gleichung (3.22) für die Verteilung $f_{a0} = \exp[-E - y^2]$ mit $\sum_a \omega_{p,a}^2 = 1$. Die obere Kurve beschreibt die Wachstumsrate der stationären Weibelinstabilität, während man für die untere Kurve propagierende Wellen ohne Dämpfung oder Verstärkung hat.

das untere Vorzeichen rein propagierende Wellen vorliegen, die sich mit der Frequenz

$$\omega = \left[\frac{\sum_a \omega_{p,a}^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\Omega_M^2 c^2 k^2}{(\sum_a \omega_{p,a}^2)^2}} \right) \right]^{1/2} \quad (3.24)$$

ausbreiten.

Für das obere Vorzeichen hingegen gibt es Moden mit $\Gamma^2 > 0$, d.h. instabile Wellen. Ihre Wachstumsraten sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left[\frac{\sum_a \omega_{p,a}^2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\Omega_M^2 c^2 k^2}{(\sum_a \omega_{p,a}^2)^2}} \right) \right]^{1/2} \\ &\simeq \sqrt{\frac{\Omega_M^2}{\sum_a \omega_{p,a}^2}} ck, \end{aligned} \quad (3.25)$$

wobei der zweite Schritt für sehr kleine Wellenzahlen k gilt⁴. Diese Wachstumsrate ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

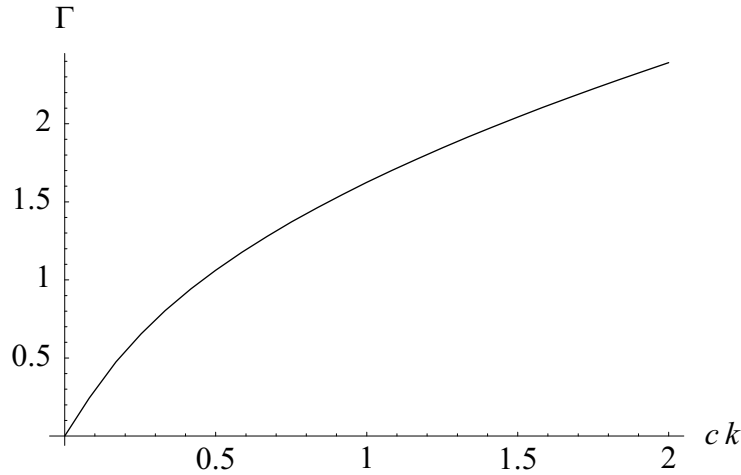


Abbildung 3.4: Verlauf der Wachstumsrate (3.25) für die Verteilung $f_{a0} = \exp[-E - y^2]$ mit $\sum_a \omega_{p,a}^2 = 1$.

3.3 Schwach anisotrope Verteilungen

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass es bestimmte Kriterien für das Einsetzen einer Instabilität gibt. Nun wäre es wünschenswert, könnte man solche Bedingungen und darüber hinaus vielleicht sogar explizite Dispersionsrelationen allgemeiner Natur (und in geschlossener Form) für beliebige Verteilungsfunktionen angeben, wie es E. Weibel in seinem klassischen Artikel für nichtrelativistische anisotrope Plasmen getan [45] hat. Jedoch verhindert die Komplexität des Doppelintegrals in Gleichung (3.8) eine Verwirklichung. Der größte Anteil daran ist dem Nenner $(y^2 + E^2 M^2)^{-2}$ geschuldet, welcher bei $y = 0$ singulär wird, wenn man vorher $M \rightarrow 0$ laufen lässt; und ebenso gestattet er keine einfache Entwicklung nahe $y = 0$ für $M \rightarrow 0$.

⁴Dieses Verhalten ist auch zwingend erforderlich, denn für $M \rightarrow \infty$ sollte ja keine Mode möglich sein. In der hier gegebenen Situation folgt jedoch

$$M^2 = \Gamma^2 / (ck)^2 \simeq \Omega_M^2 / \sum_a \omega_{p,a}^2 = \text{const.} < \infty$$

Es liegt also ein *endlicher* Wert für M vor.

Es scheint daher, dass eine allgemeine Auswertung des Doppelintegrals⁵ für beliebige f_{a0} (zu) kompliziert sei. Eine zusätzliche Erschwernis stellt die Größe M^2 dar, welche auf nichttriviale Weise mit dem Doppelintegral verflochten ist; sie kann daher nicht leicht extrahiert werden. Nichtsdestotrotz kann man eine Reihe von zufriedenstellenden Ergebnissen erzielen, wenn man sich auf bestimmte Grundschemaschemata von Verteilungsfunktionen konzentriert (z.B. solche mit starker oder schwacher Anisotropie). Selbstverständlich kann eine gegebene Verteilungsfunktion je nach Wahl ihres Ansatzes und bestimmter Parameter einmal zu der einen Klasse gehören, ein anderes Mal zu einer zweiten. Dies ist dann der Preis, den man für allgemeinere Aussagen zu zahlen hat.

Wie bereits in der Überschrift angegeben, werden in diesem Abschnitt als erste weitgefasste Klasse von Verteilungsfunktionen, die einen beträchtlichen Einblick in die Weibelinstabilität erlauben, diejenigen mit verhältnismäßig schwacher Anisotropie untersucht. In allgemeiner Form lassen sie sich folgendermaßen entwickeln,

$$f_{a0}(E, y^2) \simeq F_a(E) - y^2 G_a(E) \quad (3.26)$$

mit $|y^2 G_a| \ll |F_a|$. Man beachte, dass die Verteilungen symmetrisch in y sind. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass die Abhängigkeit von y nicht mehr in den Entwicklungskoeffizienten der Verteilungsfunktionen auftauchen. Man kann daher die Integration über y in geschlossener Form für beliebige Werte von M^2 ausführen. Aus dem Integrationsintervall $[0, (E^2 - 1)^{1/2}]$ der Integration folgt, dass die Bedingung für schwache Anisotropie durch

$$(E^2 - 1)|G_a| \ll |F_a| \quad (3.27)$$

nach oben beschränkt ist.

Mit dem Ansatz (3.26) in Gleichung (3.8) ist die Integration zwar langwierig, aber nicht besonders kompliziert. Sie führt zu der exakten Form der Dispersionsrelation (mit M positiv, vgl. Abschnitt 3.2)

$$\begin{aligned} c^2 k^2 = & \frac{2\pi}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE \left(\left[3M^2 \sqrt{E^2 - 1} E \right. \right. \\ & + M \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{EM}{\sqrt{E^2 - 1}} \right) (1 - 3E^2(1 + M^2)) \left. \right] F_a \\ & - \left[\frac{1}{3} \sqrt{E^2 - 1} E (4(1 + M^2) - E^2(2 + 3M^2)(2 + 5M^2)) \right. \\ & \left. \left. + ME^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{EM}{\sqrt{E^2 - 1}} \right) (-2 - 3M^2 + E^2(1 + M^2)(2 + 5M^2)) \right] G_a \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hier fällt auf, dass alle Terme des Faktors vor F_a proportional zu Potenzen von M sind, während derjenige vor G_a auch von M unabhängige Komponenten enthält. Für kleine Werte von M gewinnt der anisotrope Anteil G_a an Bedeutung. Dieses legt zusammen mit dem Wissen, dass nach Abschnitt 3.2 für $M \rightarrow \infty$ keine Weibelinstabilität existiert,

⁵Man könnte auf die Idee kommen, an dieser Stelle eine bestimmte Verteilungsfunktion einzusetzen und somit die Integrale explizit zu lösen. Allerdings widerspricht dies gerade dem Ansinnen, allgemeingültige Erkenntnisse für *beliebige* Verteilungsfunktionen zu gewinnen.

nahe, dass man in der Nachbarschaft von $M = 0$ nach Weibelmoden suchen sollte. Eine Taylorentwicklung von Gleichung (3.28) in niedrigster Ordnung von M führt zu

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{4}{3} \int_1^\infty dE (E^2 - 1)^{3/2} E G_a \\ &\quad - 2\pi M \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{\pi}{2} \int_1^\infty dE \left((3E^2 - 1) F_a - 2E^2 (E^2 - 1) G_a \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die Bedingung (3.27) für schwache Anisotropie bedeutet nun, dass der Term $2E^2(E^2 - 1)G_a$ im Vergleich mit $(3E^2 - 1)F_a$ im zweiten Integral von Gleichung (3.29) vernachlässigt werden kann. So ergibt sich

$$c^2 k^2 = 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{4}{3} \int_1^\infty dE (E^2 - 1)^{3/2} E G_a - 2\pi M \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{\pi}{2} \int_1^\infty dE (3E^2 - 1) F_a. \quad (3.30)$$

Man definiert nun

$$\begin{aligned} c^2 k_{sA}^2 &\equiv 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{4}{3} \int_1^\infty dE (E^2 - 1)^{3/2} E G_a, \\ \Omega_{sA}^2 &\equiv 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{\pi}{2} \int_1^\infty dE (3E^2 - 1) F_a > 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dann führt Gleichung (3.30) auf

$$M = c^2 (k_{sA}^2 - k^2) / \Omega_{sA}^2. \quad (3.32)$$

Sollte Gleichung (3.31a) einen negativen Wert für $c^2 k_{sA}^2$ ergeben, so existiert keine anwachsende Weibelmode.

Aus Gleichung (3.32) folgt sofort

$$\Gamma = ck \, c^2 (k_{sA}^2 - k^2) / \Omega_{sA}^2; \quad (3.33)$$

diese Gleichung beschreibt für $k < k_{sA}$ instabile Moden mit der gegebenen Wachstumsrate. Exakt diese Form ist bereits früher in der Literatur (z.B. Yoon [50]) zu finden, allerdings stets für eine bestimmte Verteilungsfunktion. Hier wurde gezeigt, dass *alle* Verteilungsfunktionen mit einer verhältnismäßig schwachen Anisotropie dieses Verhalten zeigen. Das Maximum der Wachstumsrate Γ liegt bei $k_{max} = k_{sA}/3^{1/2}$ und nimmt den Wert

$$\Gamma_{max} = \frac{2c^3 k_{sA}^3}{3^{3/2} \Omega_{sA}^2} \quad (3.34)$$

an.

Einige Anmerkungen zur Gültigkeit seien noch angefügt. Die Bedingung $|M| \ll 1$ erfordert $c^2 (k_{sA}^2 - k^2) \ll \Omega_{sA}^2$, d.h. $k^2 \gg -(\Omega_{sA}^2/c^2) + k_{sA}^2$. Dieses gilt automatisch, falls $\Omega_{sA}^2 \gg c^2 k_{sA}^2$; wegen $|F_a| \gg (E^2 - 1)|G_a|$ ist letzteres jedoch stets erfüllt. Man beachte weiterhin, dass G_a in bestimmten Regionen im E -Raum durchaus *negativ* sein kann, solange das Integral in Gleichung (3.31a) positiv bleibt. Diese Feststellung erweitert die erlaubten Gattungen von Verteilungsfunktionen für eine Weibelinstabilität beträchtlich.

3.4 Verteilungen mit hoher Anisotropie

Eine zweite Klasse von „interessanten“ Verteilungsfunktionen sind solche mit hoher Anisotropie. Die Verteilungen ändern sich nur wenig mit E , d.h. die Ableitung $(\partial f_{a0}/\partial E) \simeq 0$. Daher ist man in der Lage, die Integration über die Variable E durchzuführen, ohne eine Verteilungsfunktion anzugeben. Dennoch, wie eine nähere Betrachtung zeigt, ist die Ableitung nach E nicht ganz zu vernachlässigen. Um jedoch den Ansatz $f = f_{a0}(y)$ machen und somit die Integration über E ausführen zu können, muss zunächst partiell integriert werden, und man erhält die Integralgleichung (3.9).

Da nun die Variable E nicht mehr in der Verteilungsfunktion auftaucht, ist es günstig, die Integrationsreihenfolge zu ändern. Es wird also zunächst in den Gleichungen (3.10) und (3.11) über E und anschließend über y integriert. Es ergeben sich die Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= M^2 \int_0^\infty dy f_{a0} \int_{\sqrt{1+y^2}}^\infty dE E \frac{E^2(E^2 - 1) + 2y^4}{(y^2 + E^2 M^2)^2}, \\ I_2 &= \int_0^\infty dy f_{a0} \int_{\sqrt{1+y^2}}^\infty dE E \frac{2E^4 M^4 + y^2[(E^2 - 1) + M^2(7E^2 - 2)] + y^4}{(y^2 + E^2 M^2)^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nun ist es so, dass eine Integration über E von $(1 + y^2)^{1/2}$ bis ∞ den Wert Unendlich ergäbe. Hierbei wird allerdings nicht beachtet, dass für die Verteilung trotz der nur sehr geringen Abhängigkeit von E dennoch (wegen der Normierbarkeit) $f_{a0} \rightarrow 0$ für $E \rightarrow \infty$ gelten muss. Es ist daher erforderlich, einen *Cut-off* bei einem bestimmten E_{max} einzuführen⁶. So erhält man

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= \frac{2\pi}{1 + M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^{y_{max}} dy f_{a0} \int_{\sqrt{1+y^2}}^{E_{max}} dE E \left(M^2 \frac{E^2(E^2 - 1) + 2y^4}{(y^2 + E^2 M^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2E^4 M^4 + y^2[(E^2 - 1) + M^2(7E^2 - 2)] + y^4}{(y^2 + E^2 M^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ausführen der E -Integration im Intervall $[\sqrt{1 + y^2}, E_{max} = \sqrt{1 + y_{max}^2}]$ führt auf

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= \frac{2\pi}{1 + M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^{y_{max}} dy f_{a0} \\ &\times \left((y_{max}^2 - y^2) \left(\frac{1}{2M^2} - 1 \right) + \frac{y^2(1 + M^2)}{M^4} \left(1 - \frac{(1 + y^2)M^2 + y^2}{(1 + y_{max}^2)M^2 + y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3y^2 + (1 + 3y^2)M^2}{2M^4} \ln \left[\frac{(1 + y^2)M^2 + y^2}{(1 + y_{max}^2)M^2 + y^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Zur weiteren Untersuchung ist es hilfreich, Annahmen über die imaginäre Phasengeschwindigkeit M zu machen. Dieses liefert verschiedene Lösungsansätze für die Integration in Gleichung (3.37). Im Falle $M \gg 1$ erhält man exakt die gleichen Ergebnisse wie in Abschnitt 3.2.2; dieses soll hier kurz bewiesen werden. In niedrigster Ordnung wird Gleichung (3.37) zu⁷

$$c^2 k^2 \simeq -\frac{2\pi}{M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^{y_{max}} dy f_{a0} (y_{max}^2 - y^2) \leq 0$$

⁶Diese obere Grenze kann natürlich erst mit der Angabe einer Verteilungsfunktion f_{a0} spezifiziert werden.

⁷Man vergleiche mit Gleichung (3.20).

$$\simeq -\frac{\sum_a \omega_{p,a}^2}{M^2}. \quad (3.38)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass man für die Normierung (3.2) bei Anwendung der gleichen Schritte (des gleichen „Formalismus“) wie in diesem Abschnitt

$$\begin{aligned} 1 &= 4\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_0^{\sqrt{E^2-1}} dy f_{a0}(y) \\ &\simeq 4\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^{y_{max}} dy f_{a0} \int_{\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y_{max}^2}} dE E \\ &= 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^{y_{max}} dy f_{a0} (y_{max}^2 - y^2) \end{aligned} \quad (3.39)$$

erhält, d.h. für $M \rightarrow \infty$ treten keine Moden auf. Berücksichtigt man den Term nächsthöherer Ordnung⁸,

$$\Omega_{hA}^2 \equiv 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_0^{y_{max}} dy f_{a0} \left(\left(\frac{3}{2} + \frac{y^2}{1+y_{max}^2} \right) (y_{max}^2 - y^2) - \frac{1+3y^2}{2} \ln \left[\frac{1+y_{max}^2}{1+y^2} \right] \right), \quad (3.40)$$

so lassen sich dieselbe Gleichung (3.22),

$$\Gamma^4 + \sum_a \omega_{p,a}^2 \Gamma^2 - \Omega_{hA}^2 c^2 k^2 = 0, \quad (3.41)$$

und die Wachstumsraten (3.25),

$$\Gamma \simeq \sqrt{\frac{\Omega_{hA}^2}{\sum_a \omega_{p,a}^2}} ck, \quad (3.42)$$

für kleine Wellenzahlen k herleiten. Man bemerke, dass man Gleichung (3.40) genauso auch durch die Anwendung des Formalismus' dieses Abschnitts auf Gleichung (3.19) erhalten kann.

Wollte man den Fall $M \ll 1$ betrachten, so führt dies, wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt, zu dem Problem, dass in den einzelnen Termen der Entwicklung Potenzen y^{-k} mit $k > 1$ auftauchen, die Funktion für $y \rightarrow 0$ also eine Polstelle aufweist.

3.5 Ultrarelativistische Verteilungen

Eine weitere Gruppe von Verteilungsfunktionen, die nun untersucht werden sollen, sind die sogenannten ultrarelativistischen Verteilungen. In diesem Fall ist es zweckmäßig, $E \gg 1$ in den Verteilungsfunktionen f_{a0} anzunehmen, somit vereinfacht sich der Term $E^2 - 1 \simeq E^2$. Davon unberücksichtigt bleibt der Faktor M ; er wird als beliebiger Parameter angesehen.

Somit erhält man aus den Definitionen (3.9)-(3.11) die Gleichung

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= \frac{2\pi}{1+M^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_0^E dy \frac{f_{a0}}{(y^2 + E^2 M^2)^2} \\ &\times \left(M^2 (E^4 + 2y^4) - (2E^4 M^4 + y^2 [E^2 + 7M^2 E^2] + y^4) \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

⁸Hierbei ist auch die Entwicklung des Terms vor der Summation, $(1+M^2)^{-1} \simeq 1 - M^{-2}$, zu berücksichtigen.

Nun setzt man $y \equiv EM x$ und sortiert nach Potenzen von x ,

$$\begin{aligned}
c^2 k^2 &= \frac{2\pi}{M(1+M^2)} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E^2 \int_0^{1/M} dx \frac{f_{a0}(E, EM x)}{(x^2+1)^2} \\
&\quad \times \left((1-2M^2) - x^2(1+7M^2) - x^4 M^2(1-2M^2) \right) \\
&= \frac{2\pi}{M(1+M^2)} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E^2 \left[(1-2M^2) \int_0^{1/M} \frac{dx}{(x^2+1)^2} f_{a0}(E, EM x) \right. \\
&\quad \left. - (1+7M^2) \int_0^{1/M} dx \frac{x^2}{(x^2+1)^2} f_{a0}(E, EM x) \right. \\
&\quad \left. - M^2(1-2M^2) \int_0^{1/M} dx \frac{x^4}{(x^2+1)^2} f_{a0}(E, EM x) \right]. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Schaut man sich die Integranden in Gleichung (3.44) an, so haben sie eine bestimmte Form, $x^{2n} f_{a0}(E, EM x)/(x^2+1)^2$. Es lassen sich Funktionen $\Theta_n[M]$ mit $n \in \{0, 1, 2\}$ definieren, die nur von der imaginären Phasengeschwindigkeit M abhängen und im Prinzip eine Mittelung des rationalen Ausdrucks bzgl. der Verteilungsfunktion darstellen. Diese Funktionen sind für $n = 0, 1, 2$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Theta_n[M] &\equiv \frac{\int_1^\infty dE E^2 \int_0^{1/M} dx \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^2} f_{a0}(E, EM x)}{\int_1^\infty dE E^2 \int_0^{1/M} dx f_{a0}(E, EM x)} \\
&\simeq 4\pi M \int_1^\infty dE E^2 \int_0^{1/M} dx \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^2} f_{a0}(E, EM x). \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Dabei gilt wegen der Normierung (3.2)

$$M \int_1^\infty dE E^2 \int_0^{1/M} dx f_{a0}(E, EM x) = \int_1^\infty dE E \int_0^E dy f_{a0} \simeq \frac{1}{4\pi}. \tag{3.46}$$

Wegen $x^{2n}/(1+x^2)^2 \leq 1$ für $n = 0, 2$ und $x^2/(1+x^2)^2 \leq 1/4$ (für $n = 1$) hat man die Abschätzung $\Theta_n[M] \leq 1$ für $n = 0, 1, 2$.

Die Definitionen (3.45) zusammen mit der Rücktransformation $y = EM x$ erlauben es, die Integrale zusammenzufassen,

$$\begin{aligned}
c^2 k^2 &= \frac{2\pi}{M^2(1+M^2)} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_0^E dy f_{a0} \\
&\quad \times \left(\Theta_0[M] - \Theta_1[M] - M^2(2\Theta_0[M] + 7\Theta_1[M] + \Theta_2[M]) + 2M^4\Theta_2[M] \right). \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Wiederum gilt, dass mit Gleichung (3.47) der Bereich erlaubter Wellenzahlen für die Weibelinstabilität beschrieben wird.

An dieser Stelle soll erneut die Unterscheidung zwischen sehr großen ($M \gg 1$) und sehr kleinen ($M \ll 1$) Phasengeschwindigkeiten gemacht werden. Zu den Verteilungsfunktionen ist zunächst zu bemerken, dass ihre relative Form sich entlang des Integrationsintervalls $[0, 1/M]$ wegen der Transformation $y = EM x$ nicht ändert⁹.

⁹Zur Verdeutlichung: Die Verteilungsfunktion besitzt bei $x = 0$ stets den Wert $f_{a0}(E, 0)$, bei $x = 1/(2M)$ immer $f_{a0}(E, E/2)$ und bei $x = 1/M$ stets $f_{a0}(E, E)$.

Im Falle $M \gg 1$ wird die obere Integrationsgrenze $1/M \ll 1$. Somit kann man wegen $x \leq 1/M \ll 1$ in den x -Integrationen den Faktor $(1+x^2)^{-2}$ durch 1 nähern, und man hat nur noch die Integration

$$\int_0^{1/M} dx x^{2n} f_{a0}(E, EM x) \quad (3.48)$$

durchzuführen; im Falle $n = 0$ entspricht dies exakt der Normierung (3.46), d.h. $\Theta_0[M \gg 1] \simeq 1$. Eine grobe Abschätzung des Verhaltens der Funktionen Θ_n für die beiden anderen Fälle erhält man unter der Annahme, dass die Verteilungsfunktion nur wenig von x abhängt. Dann ergibt sich

$$\Theta_n[M \gg 1] \propto M^{-2n}. \quad (3.49)$$

Hieraus folgt für Gleichung (3.47) in erster Näherung

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &\simeq \frac{2\pi}{M^4} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_0^E dy f_{a0}(-2M^2 \Theta_0[M \gg 1]) \\ &\simeq -\frac{\sum_a \omega_{p,a}^2}{M^2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

und wiederum zeigt sich, dass für $M \gg 1$ keine instabilen Moden existieren – wie bereits allgemein durch Gleichung (3.20) und im Falle hoher Anisotropie durch Gleichung (3.38) beschrieben.

Der Fall $M \ll 1$ lässt sich ebenso einfach untersuchen. Zunächst impliziert $M \ll 1$ die Verschiebung der äußeren Integrationsgrenze $1/M \rightarrow \infty$. Weiterhin gilt für $n = 0, 1$ und große x die Näherung $x^{2n}/(x^2+1)^2 \simeq x^{2n-4} \rightarrow 0$, daher lässt sich die Annahme

$$\int_0^{1/M} dx \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^2} f_{a0}(E, EM x) \simeq f_{a0}(E, 0) \int_0^{1/M} dx \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^2}, \quad n = 0; 1 \quad (3.51)$$

ansetzen. Für $n = 2$ gilt annähernd $x^4/(x^2+1)^2 \simeq 1$. Hieraus und mit der Normierung (3.46) ergeben sich dann die Lösungen für die Funktionen $\Theta_n[M \ll 1]$,

$$\begin{aligned} \Theta_0[M \ll 1] &\simeq \frac{\pi}{4} \vartheta_a M, \\ \Theta_1[M \ll 1] &\simeq \frac{\pi}{4} \vartheta_a M, \\ \Theta_2[M \ll 1] &\simeq 1, \end{aligned} \quad (3.52)$$

wobei

$$\vartheta_a \equiv 4\pi \int_1^\infty dE E^2 f_{a0}(E, 0) \quad (3.53)$$

Man bemerke, dass auch die Differenz $\Theta_0[M] - \Theta_1[M]$ in Gleichung (3.47) von Bedeutung ist; dazu muss die nächste Ordnung der Entwicklung berücksichtigt werden, und man hat

$$\Theta_0[M \ll 1] - \Theta_1[M \ll 1] \simeq \vartheta_a M^2 \quad (3.54)$$

Mit diesen Näherungen erhält man somit für Gleichung (3.47)

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &\simeq 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 (\vartheta_a - 1) - \frac{9\pi^2}{2} M \sum_a \omega_{p,a}^2 \vartheta_a + 4\pi M^2 \sum_a \omega_{p,a}^2 \\ &\simeq 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 (\vartheta_a - 1) - \frac{9\pi^2}{2} M \sum_a \omega_{p,a}^2 \vartheta_a \end{aligned} \quad (3.55)$$

wegen $M \ll 1$. Die Bedingung $\vartheta_a > 1$ ist also ausreichend, um instabile Weibelmoden zuzulassen. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} c^2 k_{ur}^2 &\equiv 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 (\vartheta_a - 1) \\ \Omega_{ur}^2 &\equiv 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{9\pi}{4} \vartheta_a \end{aligned} \quad (3.56)$$

findet sich schnell die Bedingung – man beachte die Analogie zu Gleichung (3.32) –

$$M = c^2 (k_{ur}^2 - k^2) / \Omega_{ur}^2 \quad (3.57)$$

und weiter die Wachstumsrate (vgl. mit der Rate (3.33))

$$\Gamma = ck c^2 (k_{ur}^2 - k^2) / \Omega_{ur}^2. \quad (3.58)$$

Alle weiteren Aussagen, die im Abschnitt 3.3 gemacht wurden, lassen sich daher übertragen.

3.6 Asymmetrische Verteilungen und isolierte Weibelmoden

In diesem Kapitel hatten bisher alle durchgeführten Rechnungen und die sich ergebenden Dispersionsrelationen eines gemein: die Annahme einer in der Variablen y symmetrischen Verteilungsfunktion. Dieses ermöglichte die allgemeine Beschreibung einer großen Klasse von Moden der Weibelinstabilität. Jedoch kann diese Beschreibung eine gänzlich andere Form annehmen, falls man nur eine kleine Modifizierung an der ursprünglich Ausgangsgleichung zulässt. Die Rede ist von der ursprünglichen Annahme, dass die Verteilung „symmetrisch“ in der Parallelkomponente y des Impulses ist. Ist dieses nicht der Fall, d.h. setzt man also eine schwach anisotrope Verteilung statt nach Gleichung (3.26) in der Form

$$f_{a0} \simeq F_a(E) + yH_a(E) - y^2G_a(E) - y^3K_a(E) \quad (3.59)$$

an¹⁰, werden die Moden eine andere Gestalt annehmen. Dies ist darin begründet, dass sie nun einem Paar von Gleichungen (3.4, 3.5) genügen müssen; bisher war Gleichung (3.5) automatisch erfüllt. Diese Asymmetrie der Verteilung f_{a0} führt, wie im weiteren Verlauf dieses Abschnitts gezeigt werden soll, zu isolierten Weibelmoden mit festen M und k . Es sei angemerkt, dass aus $f_{a0} > 0$ die Bedingung $|yH_a - y^3K_a| \ll F_a$ resultiert, dieses ist aber eine schwache Einschränkung, die im Gültigkeitsbereich der Reihenentwicklung (3.59) stets erfüllt ist.

Zunächst muss sichergestellt werden, dass es keinen elektrischen Strom nullter Ordnung gibt, d.h.

$$\vec{j}_0 = \sum_a q_a \int d^3p f_{a0} \frac{\vec{p}_a}{\gamma_a m_a} = 0.$$

Für asymmetrische Verteilungsfunktionen von der Gestalt (3.59) bedeutet diese Voraussetzung die (ebenfalls schwache) Bedingung

$$\sum_a q_a \int dp_{\parallel} \left(H_a p_{\parallel} - K_a p_{\parallel}^3 \right) \frac{p_{\parallel}}{\gamma_a m_a} = 0.$$

¹⁰Es zeigt sich später, dass die getroffene Wahl der Vorzeichen günstig ist.

Auf diese Weise gibt es Beziehungen unter den asymmetrischen Termen H_a und K_a zwischen den verschiedenen Teilchen, z.B. den Elektronen und Ionen. Aufgrund dessen kann keiner der „ungeraden“ Terme beliebig gewählt werden. Die Integrationen über p_{\parallel} bzw. y der „geraden“ Terme F_a und G_a der Verteilungsfunktion sind automatisch Null, weil bei diesen der Integrand eine ungerade Funktion in p_{\parallel} bzw. y ist.

Wertet man den Ansatz (3.59) aus, so ergeben im Imaginärteil der Dispersionsrelation (3.5) die Integrationen der Terme mit F_a und G_a sofort Null. So müssen nur die asymmetrischen Terme mit H_a und K_a betrachtet werden,

$$\sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y^2 + E^2 M^2} \left(E H_a - 3E y^2 K_a + y^2 \frac{\partial H_a}{\partial E} - y^4 \frac{\partial K_a}{\partial E} \right) = 0. \quad (3.60)$$

Die Berechnung des Integrals über y wird in Anhang C.2 durchgeführt und führt zur Gleichung

$$\begin{aligned} & \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E \left(E H_a - E^2 M^2 \left(-3E K_a + \frac{\partial H_a}{\partial E} \right) - E^4 M^4 \frac{\partial K_a}{\partial E} \right) \\ & \times \left(\frac{E^2(1+M^2) - 1}{EM} \arctan \frac{\sqrt{E^2-1}}{EM} - \sqrt{E^2-1} \right) \\ & = \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE \sqrt{E^2-1} \\ & \times \left(\frac{2}{3}(4E^2-1)H_a + E^2 M^2(2E^2-1)K_a + \frac{2}{15}(E^2-1)(9E^2+1)K_a \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Nun wurde bereits in Abschnitt 3.2 gezeigt, dass für $M \rightarrow \infty$ keine Weibelmoden auftreten. Ähnlich wie in Abschnitt 3.3 kann man sich daher auf die Annahme $M \ll 1$ konzentrieren; in diesem Fall lässt sich folgende Entwicklung durchführen,

$$\frac{E^2(1+M^2) - 1}{EM} \arctan \frac{\sqrt{E^2-1}}{EM} \simeq (E^2-1) \left(\frac{\pi}{2EM} - \frac{1}{\sqrt{E^2-1}} \right). \quad (3.62)$$

Diese Näherung kann in Gleichung (3.61) benutzt werden, um einen Ausdruck in niedrigster Ordnung von M zu erhalten,

$$M \simeq \frac{\frac{\pi}{2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E(E^2-1)H_a}{\frac{2}{15} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE \sqrt{E^2-1} [5(4E^2-1)H_a + (E^2-1)(9E^2+1)K_a]} \ll 1. \quad (3.63)$$

Man beachte, dass im Zähler nur der Ausdruck H_a auftaucht. Nun muss wegen $M \ll 1$ die Abschätzung

$$5 \sum_a \left| \int_1^{\infty} dE \sqrt{E^2-1} (4E^2-1) H_a \right| \ll \sum_a \left| \int_1^{\infty} dE (E^2-1)^{3/2} (9E^2+1) K_a \right| \quad (3.64)$$

gelten (ansonsten wäre die Annahme $M \ll 1$ nicht haltbar); und daher kann man M vereinfachen,

$$\begin{aligned} M & \simeq \frac{15\pi}{4} \frac{\sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E(E^2-1)H_a}{\sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE (E^2-1)^{3/2} (9E^2+1)K_a} \\ & \simeq \frac{5\pi}{12} \frac{\sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E^3 H_a}{\sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^{\infty} dE E^5 K_a} = \text{const.} \ll 1. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Es ist also M fixiert, und nach Gleichung (3.32) gilt dieses dann auch für k bei $k^2 = k_0^2 + \Omega M/c^2$. Es liegen also isolierte Weibelmoden vor.

Es ist zu beachten, dass H_a und K_a negativ sowohl in Teilen des oder auch im ganzen E -Raum(s) sein kann. Die Bedingung $M \geq 0$ bedeutet nur, dass das Verhältnis der Integrale in Gleichung (3.65) positiv sein muss. Somit ist nicht nur die Existenz der isolierten Weibelmoden gezeigt, sondern sie erstrecken sich zudem über eine große Klasse von Verteilungsfunktionen, die mit H_a und K_a beschrieben werden können. Dieser Ansatz ist sehr vielversprechend, und das ist mit ein Grund für eine vorzeitige Veröffentlichung [32]. Im nächsten Kapitel werden darauf aufbauende Resultate mit diesen Ergebnissen verglichen.

An diesem Punkt sollte man kurz innehalten und die hier gewonnenen Erkenntnisse überdenken. Sobald in der Verteilungsfunktion f_a ungerade Potenzen von y auftreten, fällt die aperiodische Instabilität auf diskrete Wellenzahlen zusammen. Es gibt also für eine beliebige Phasengeschwindigkeit M nur *bestimmte* erlaubte Wellen, die stationär anwachsen können! Diese isolierten Moden erinnern daher stark an eine andere Klasse von Wellen im nichtlinearen Bereich, die Solitonen. Es stellt sich somit die Frage, ob sich aus einer nichtlinearen Beschreibung der Weibelinstabilität eine Lösung für Solitonen finden lässt. Dieser Frage wird im zweiten Teil der Arbeit nachgegangen (ab Kapitel 5), vorher jedoch soll in einigen Anwendungen die Gültigkeit der hier entwickelten Gesetzmäßigkeiten mit Ergebnissen aus der Literatur für bestimmte Verteilungsfunktionen untersucht werden. In Ansätzen wurde dies bereit in den Abschnitten 3.3, 3.5 getan.

Eine Erweiterung dieser Theorie isolierter Moden besteht zudem darin, sich von der Annahme einer rein imaginären Frequenz $\omega = i\Gamma$ zu lösen und komplexe Werte zuzulassen. Im Gegensatz zur gebräuchlichen Vorgehensweise – welche auf die Resonanzinstabilität [10] führt – setzt man an, dass der Realteil $\omega_R \ll \Gamma$ ist. Dieses entspricht langsam propagierenden Wellen, welche jedoch aus Gründen der Stetigkeit ein ähnliches Wachstumsverhalten zeigen müssen wie die stationären isolierten Moden. Letztere sollten sich dann in der Grenzwertbildung $\omega_R \rightarrow 0$ ergeben. Für eine warme Gegenstrom- κ -Verteilung und eine kalte Zweistromverteilung ist dieses in jüngster Vergangenheit von Tautz und Lerche [42] untersucht worden.

4 Vergleich einiger Verteilungsfunktionen im Formalismus von Kapitel 3

Die neueren Spectralmessungen [...] haben gezeigt, dass das zuerst von W. Wien aus molecularkinetischen Betrachtungen und später von mir aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung abgeleitete Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum keine allgemeine Gültigkeit besitzt.

Die Theorie bedarf also in jedem Falle einer Verbesserung, und ich will im Folgenden den Versuch machen, eine solche auf der Grundlage der von mir entwickelten Theorie der elektromagnetischen Strahlung durchzuführen.

Max Planck, *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum* [27].

Bisherige Arbeiten über die Weibelinstabilität in der Literatur (siehe z.B. [31], [49], [50]) nutzten zur Auswertung stets diverse *gegebene* Teilchenverteilungsfunktionen. Hieraus wurden dann Dispersionsrelationen, Wachstumsraten o.ä. gewonnen, die allerdings nur für diese gegebene Verteilung gelten. Es ist daher von großem Vorteil, mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Kapitel gezeigt zu haben, dass bestimmte Gleichungen einen allgemeineren Hintergrund besitzen. Zur Verdeutlichung dieser Ergebnisse werden eine Reihe von Verteilungsfunktionen exemplarisch in den verschiedenen Szenarien durchgerechnet und verglichen, um die Nützlichkeit der Resultate aus Kapitel 3 zu belegen. Im Falle der isolierten Moden wird außerdem ein Vergleich mit kürzlich durchgeführten Simulationen durchgeführt.

4.1 Vergleich verschiedener Verteilungen für die Szenarien aus Kapitel 3

In diesem Abschnitt werden verschiedene Verteilungsfunktionen vorgestellt. Im Einzelnen handelt es sich dabei um folgende Ansätze, wobei stets isotrope Zylindersymmetrie angenommen wird:

1. Monochromatische Teilchen (vgl. Fried [13])

$$f_{a0} = \frac{P_{\parallel}}{2\pi P_{\perp}} \delta[p_{\perp} - P_{\perp}] \delta[p_{\parallel}^2 - P_{\parallel}^2] \quad (4.1)$$

2. *Waterbag*-Verteilung (vgl. Yoon und Davidson [49])¹

$$f_{a0} = \frac{1}{4\pi P_{\perp} P_{\parallel}} \delta[p_{\perp} - P_{\perp}] H[P_{\parallel}^2 - p_{\parallel}^2] \quad (4.2)$$

3. Relativistische Bi-Maxwell-Verteilung (Schaefer-Rolffs und Schlickeiser [31])

$$f_{a0} = \frac{1}{4\pi I(\mu_a, \alpha_a)} \exp[-\mu_a E - \alpha_a y^2] \quad (4.3)$$

mit dem dimensionslosen Parameter $\mu_a = (m_a c^2 / k_B T_{\perp})$ der senkrechten Plasmatemperatur, dem Anisotropieparameter² $\alpha_a = \mu_a \psi_a$ und

$$I_{\mu, \alpha} \equiv I(\mu_a, \alpha_a) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2} \mu_a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[n + \frac{1}{2}]}{\Gamma[n + 1]} K_{n+2}[\mu_a] (-2\psi_a)^n, \quad (4.4)$$

wobei $\Gamma[n]$ die Gammafunktion und $K_n[\mu]$ die modifizierte Besselfunktion zweiter Art bezeichnet.

4. Verallgemeinerte relativistische Lorentz- oder κ -Verteilung nach Summers, Thorne und Xiao [36, 48]

$$f_{a0} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\theta_{a,\parallel} \theta_{a,\perp}^2} \frac{\Gamma[\kappa + 1]}{\kappa^{3/2} \Gamma[\kappa - 1/2]} \left(1 + \frac{p_{\parallel}^2}{\kappa m_a \theta_{a,\parallel}^2} + \frac{p_{\perp}^2}{\kappa m_a \theta_{a,\perp}^2} \right)^{-(\kappa+1)} \quad (4.5)$$

mit der thermischen Geschwindigkeit der Teilchen

$$\theta_{a,i}^2 \equiv \frac{k_B T_{a,i}}{m_a} \frac{2\kappa - 3}{\kappa}, \quad (4.6)$$

wobei $\kappa > 3/2$.

Um die Verteilungsfunktionen im Formalismus der Resultate aus Kapitel 3 nutzen zu können, muss man diese zunächst in die geeigneten Koordinaten (2.57) transformieren³. Dieses soll im folgenden Abschnitt geschehen. Eine graphische Darstellung der vier Verteilungsfunktionen ist dann in Abbildung 4.1 zu sehen.

¹Man beachte, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} H[P_{\parallel}^2 - p_{\parallel}^2] = 2P_{\parallel}.$$

²Für $\alpha_a = 0$ reduziert sich Gleichung (4.3) zur isotropen Maxwell-Boltzmann-Jüttner-Verteilungsfunktion.

³Dieses gilt natürlich nicht für die Bi-Maxwell-Verteilung (4.3), da diese bereits in der Literatur in den transformierten Koordinaten Verwendung findet. Jedoch kann man verschiedene Formen dieser Verteilungen auf eine gemeinsame Struktur zurückführen; dieses wird in Abschnitt 4.2 getan.

4.1.1 Transformation der Verteilungsfunktionen

In diesem Abschnitt soll die Lerchettransformation der Verteilungsfunktionen f_{a0} betrachtet werden. Da die Normierung über Integrale definiert ist, wird die Jacobideterminante eine Rolle spielen. Sie ist wegen der Umkehrtransformationen

$$\begin{aligned} p_{\perp} &= m_a c \sqrt{E^2 - 1 - y^2} \\ p_{\parallel} &= m_a c y \end{aligned} \quad (4.7)$$

gegeben durch

$$\left| \frac{\partial(p_{\perp}, p_{\parallel})}{\partial(E, y)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial E} & \frac{\partial p_{\perp}}{\partial y} \\ \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial E} & \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial y} \end{array} \right| = (m_a c)^2 \frac{E}{\sqrt{E^2 - 1 - y^2}}. \quad (4.8)$$

Somit folgt aus der Normierbarkeit der Verteilungsfunktionen in beliebigen Koordinaten

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} f_{a0}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} dE \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \left| \frac{\partial(p_{\perp}, p_{\parallel})}{\partial(E, y)} \right| p_{\perp}(E, y) f_{a0}[p_{\perp}(E, y), p_{\parallel}(E, y)] \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} dE \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy (m_a c)^3 E f_{a0}[p_{\perp}(E, y), p_{\parallel}(E, y)] \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy f_{a0}(E, y). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Es gelten also die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} &\Leftrightarrow \int_1^{\infty} dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \\ (m_a c)^3 f_{a0}(p_{\perp}(E, y), p_{\parallel}(E, y)) &\Leftrightarrow f_{a0}(E, y), \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei die zweite Vorschrift besagt, dass man einfach in der Verteilungsfunktion die alten Koordinaten durch die neuen ausdrückt und gegebenenfalls umformt.

Zusammen mit der Regel

$$\delta[h(x)] = \frac{\sum_n \delta[x - x_n]}{\left| \frac{dh}{dx} \right|}, \quad (4.11)$$

wobei x_n die Nullstellen von $h(x)$ sind, sowie

$$\begin{aligned} E_0 &\equiv \sqrt{1 + \frac{P_{\perp}^2 + P_{\parallel}^2}{m_a^2 c^2}}, \\ y_0 &\equiv \frac{P_{\parallel}}{m_a c} \end{aligned} \quad (4.12)$$

kann man die Verteilungen (4.1), (4.2) nun in die gewünschte Form bringen. Für monochromatische Teilchen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} f_{a0} &= (m_a c)^3 \frac{P_{\parallel}}{2\pi P_{\perp}} \frac{\delta \left[E - \sqrt{1 + y^2 + (P_{\perp}/m_a c)^2} \right]}{m_a c E / \sqrt{E^2 - 1 - y^2}} \frac{\delta[y - P_{\parallel}/m_a c] + \delta[y + P_{\parallel}/m_a c]}{2m_a c P_{\parallel}} \\ &= \frac{\sqrt{E^2 - 1 - y^2}}{4\pi \sqrt{E_0^2 - 1 - y_0^2} E} \delta[E - \sqrt{E_0^2 - (y_0^2 - y^2)}] (\delta[y - y_0] + \delta[y + y_0]) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Im Falle der *Waterbag*-Verteilung findet man

$$\begin{aligned}
f_{a0} &= (m_a c)^3 \frac{1}{4\pi P_\perp P_\parallel} \frac{\delta \left[E - \sqrt{1 + y^2 + (P_\perp/m_a c)^2} \right]}{m_a c E / \sqrt{E^2 - 1 - y^2}} H[(P_\parallel/m_a c)^2 - y^2] \\
&= \frac{\sqrt{E^2 - 1 - y^2}}{4\pi y_0 \sqrt{E_0^2 - 1 - y_0^2} E} \delta[E - \sqrt{E_0^2 - (y_0^2 - y^2)}] H[y_0^2 - y^2]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Die κ -Verteilung nimmt mit den Definitionen der Teilchentemperatur μ_a und der Anisotropie α_a ,

$$\begin{aligned}
\mu_a &\equiv \frac{c^2}{\kappa \theta_{a,\perp}^2}, \\
\alpha_a &\equiv \frac{c^2}{\kappa} \left(\frac{1}{\theta_{a,\parallel}^2} - \frac{1}{\theta_{a,\perp}^2} \right),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

die Form

$$f_{a0} = \frac{\mu_a^{3/2}}{\pi^{3/2}} \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a} \frac{\Gamma[\kappa + 1]}{\Gamma[\kappa - 1/2]} \left(1 - \mu_a + \mu_a E^2 + \alpha_a y^2 \right)^{-(\kappa+1)} \tag{4.16}$$

an. Diese vier Verteilungsfunktionen sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Man beachte, dass die Bi-Maxwell-Verteilung (4.3) *nicht* die Grenzfunktion der κ -Verteilung (4.16) für $\kappa \rightarrow \infty$ darstellt. Dazu müsste sie die Abhängigkeit $\exp[-\mu_a E^2]$ anstatt $\exp[-\mu_a E]$ besitzen. Nur im Falle nichtrelativistischer Teilchen erhält man eine ähnliche Struktur beider Verteilungen in den Impulsen p_\parallel und p_\perp , wenn E in der Bi-Maxwell-Verteilung entwickelt werden kann. Dieser Unterschied zwischen Bi-Maxwell- und κ -Verteilung ist deutlich in Abbildung 4.1 zu erkennen und sollte sich auch besonders bei der Herleitung allgemeiner Aussagen für den ultrarelativistischen Fall bemerkbar machen.

Diese Verteilungen sowie der Ansatz (4.3) werden in den nächsten Abschnitten verwendet, um die Wachstumsraten in den einzelnen Näherungen nach Kapitel 3 zu bestimmen. Es werden allerdings nur solche Größen angegeben, die direkt in Dispersionsrelationen auftauchen, d.h. also nicht die Phasengeschwindigkeit M enthalten. Im Allgemeinen wurden diese Größen mit „ ck_0 “ oder „ Ω “ bezeichnet, vgl. Definitionen (3.21), (3.31), (3.40), (3.56). Jedoch sollen zunächst noch verschiedene Formen von Bi-Maxwell-Verteilungen aus der Literatur verglichen werden.

4.2 Vergleich relativistischer Bi-Maxwell-Verteilungen

In diesem Abschnitt wird dargelegt, dass sich verschiedene (in der Literatur gegebene) Verteilungsfunktionen f_{a0} in der Näherung der schwachen Anisotropie auf die gleiche Form bringen lassen. In diesem Fall der schwachen Anisotropie sollten sich die Verteilungen folgendermaßen schreiben lassen (man beachte, dass die Verteilung symmetrisch in y ist),

$$F_a(E) - y^2 G_a(E) \equiv f_{a0}(E, 0) + y^2 [(\partial f_{a0}(E, y)/\partial y^2)|_{y=0}]. \tag{4.17}$$

Befindet man sich mit der betrachteten Verteilungsfunktion *nicht* im Bereich schwacher Anisotropie, muss die vollständige Dispersionsrelation (3.8) (oder eine andere geeignete Näherung) gewählt werden, was eine recht mühsame Auswertung zur Folge hätte.

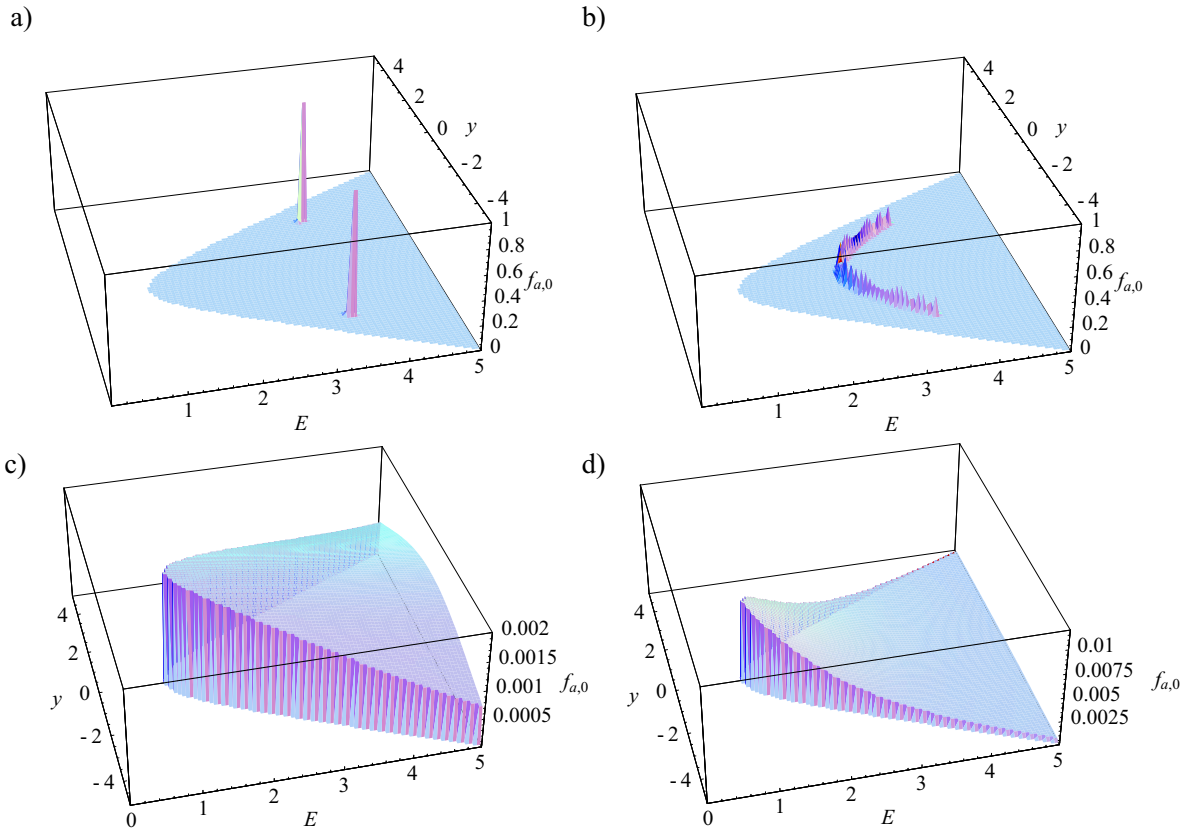


Abbildung 4.1: Dreidimensionale Darstellung der verwendeten Verteilungsfunktionen: a) die transformierte monochromatische Verteilung (4.13); b) die transformierte *Waterbag*-Verteilung (4.14); die Bi-Maxwell-Verteilung (4.3); d) die transformierte κ -Verteilung (4.16). Für alle Verteilungen gilt $\mu_a = 10^{-1}$ und $\psi_a = 0.3$, vgl. auch die Definitionen (4.30) und (4.31). Man beachte, dass der erlaubte Bereich durch die Bedingung $y^2 \leq E^2 - 1$ gegeben ist. Die δ -Distributionen sind zur besseren Sichtbarkeit durch Gaußkurven nach der Darstellung $\delta[x - x_0] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp[-(x - x_0)^2/\epsilon]/\sqrt{\pi\epsilon}$ genähert worden, wobei hier $\epsilon = 10^{-3}$ gesetzt wurde.

4.2.1 Zwei Beispiele gegebener Verteilungsfunktionen f_{a0}

Nun setzte Yoon 1989 [50] beispielsweise eine Verteilungsfunktion der Form

$$f_{a0} = Y_a \exp[-aE - 2b(1 + y^2)^{1/2}] \quad (4.18)$$

an, während Schaefer-Rolffs und Schlickeiser (SRS) 2005 [31] den Ansatz

$$f_{a0} = S_a \exp[-AE - By^2] \quad (4.19)$$

wählten. Dabei sind Y_a , S_a , a , A , b und B von E und y unabhängige Konstanten⁴, die sich jedoch aufgrund der Normierung von f_{a0} (vgl. Gleichung (3.2)) unterscheiden. Geht man nun davon aus, dass man sich im Bereich schwacher Anisotropie befindet, so erhält

⁴Die genaue Definition ist nicht von Bedeutung, da hier nur eine qualitative Betrachtung erfolgt.

man durch Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} F_a &= Y_a \exp[-aE], & (\text{Yoon}) \\ F_a &= S_a \exp[-AE], & (\text{SRS}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

sowie

$$\begin{aligned} G_a &= -Y_a \exp[-aE](-b) = bF_a, & (\text{Yoon}) \\ G_a &= -S_a \exp[-AE](-B) = BF_a. & (\text{SRS}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Es zeigt sich also, abgesehen von verschiedenen Konstanten, dass die grundsätzliche Form beider Verteilungsfunktionen im Falle schwacher Anisotropie identisch ist,

$$\begin{aligned} f_{a0} &\simeq F_a(1 - by^2), & (\text{Yoon}) \\ f_{a0} &\simeq F_a(1 - By^2). & (\text{SRS}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Somit verwundert es nicht, dass man in beiden Fällen die gleichen Instabilitätseigenschaften, z.B. die Wachstumsrate (3.33), $\Gamma = ck^2(k_0^2 - k^2)/\Omega^2$, erhält, wie sie in Abschnitt 3.3 ebenfalls hergeleitet sind.

4.2.2 Verallgemeinerung für schwache Anisotropie

Die Übereinstimmung in den genäherten Verteilungsfunktionen (4.22) überrascht allerdings kaum. Betrachtet man nämlich den Ansatz (4.17), so kann man leicht zeigen, dass beliebige Verteilungsfunktionen der Form⁵

$$f_{a0} = C_a \exp[-g(E) - h(y^2)] \quad (4.23)$$

nach diesem Ansatz die Näherungsform (mit $F_a = C_a \exp[-g(E)]$)

$$f_{a0} \simeq F_a[1 - y^2 h'(0)] \quad (4.24)$$

besitzen. Die Funktion $h(y^2)$ muss also nur die Bedingung $h'(0) \neq 0$ erfüllen, damit die Verteilungsfunktionen (4.23) ähnliche Gestalt wie die Näherungen (4.22) besitzen und man somit Wachstumsraten der Form (3.33) erhält.

4.3 Allgemeine Lösungen für die Weibelinstabilität

Nun werden in diesem Abschnitt die Wachstumsraten für verschiedene Verteilungsfunktionen durchgerechnet. Da die Gleichungen bereits alle in Kapitel 3 hergeleitet wurden, können die Ergebnisse hier in Kurzform dargestellt werden.

4.3.1 Lösung des Instabilitätskriteriums (3.12)

Für monochromatische Teilchen beschrieben durch die Verteilung (4.13) kann man die Integralgleichung (3.12) recht einfach lösen. Als Ergebnis erhält man die Differenz

$$\frac{1}{4\pi} \sum_a \omega_{p,a}^2 \left(\frac{E_0^2(E_0^2 - 1)M^2 + 2y_0^4}{(y_0^2 + E_0^2 M^2)^2} - \frac{2E_0^4 M^4 + y_0^2[(E_0^2 - 1) + M^2(7E_0^2 - 2)] + y_0^4}{(y_0^2 + E_0^2 M^2)^2} \right). \quad (4.25)$$

⁵Hier sind $g(E)$ und $h(y^2)$ beliebige Funktionen von E bzw. y^2 und C_a ist eine beliebige Konstante.

Setzt man für die Konstanten $E_0 = \mu_a^{-1}$ und $y_a = \alpha_a^{-1/2}$, wobei μ_a und ψ_a im Sinne von Definition (4.3) zu verstehen sind, kann man den nichtrelativistischen ($\mu_a \gg 1$) und hochrelativistischen ($\mu_a \ll 1$) Grenzfall betrachten. Es ergibt sich im ersten Fall

$$\sum_a \omega_{p,a}^2 (I_1 - I_2) \simeq \frac{1 + 2M^2}{4\pi} \mu_a \psi_a + \frac{1 - 3M^2 \psi_a^2 - 4M^4 \psi_a^4}{4\pi}. \quad (4.26)$$

Diese Differenz wird erst für Werte von $M^2 \simeq \mu_a$ negativ, d.h. Weibelmoden sind in einem weiten Bereich möglich. Der hochrelativistische Fall ergibt

$$\sum_a \omega_{p,a}^2 (I_1 - I_2) \simeq \frac{1 - 2M^2}{4\pi M^2} \quad (4.27)$$

mit einer Nullstelle bei $M = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$. Nur Moden mit $M < 0.707$ sind also instabil – ein Wert, der mit dem numerischen Ergebnis für eine Bi-Maxwell-Verteilung aus Abbildung 3.1, $M < 0.437$, recht gut übereinstimmt.

4.3.2 Allgemeine Lösung für $M \rightarrow \infty$

Im Falle $M \rightarrow \infty$ lässt sich prinzipiell eine allgemeine Lösung für kleine Wellenzahlen nach Gleichungen (3.21) und (3.25) bestimmen. In diesem Abschnitt soll dieses für die einfacheren Verteilungen, der monochromatischen und der *Waterbag*-Verteilung geschehen.

Monochromatische Verteilung

Hier erhält man mit Gleichung (3.21) als Lösung für die monochromatische Verteilung (4.13)

$$\Omega_M^2 = \sum_a \omega_{p,a}^2 \left(1 + \frac{(E_0^2 - 2y_0^2)(E_0^2 - 1 - y_0^2)}{2E_0^4} \right). \quad (4.28)$$

Waterbag-Verteilung

Für die *Waterbag*-Verteilung (4.14) ergibt sich analog

$$\Omega_M^2 = \sum_a \omega_{p,a}^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1 + y_0^2}{E_0^2} + \frac{1}{4y_0 E_0} \ln \left[\frac{E_0 + y_0}{E_0 - y_0} \right] \right) \quad (4.29)$$

Zur übersichtlichen Darstellung sind nachfolgend die Ergebnisse für geeignete Werte von E_0 und y_0 im Bereich hoher ($\mu_a \ll 1$) und niedriger ($\mu_a \gg 1$) Plasmatemperaturen in Form einer Tabelle dargestellt. Als Ansatz wird

$$\begin{aligned} \frac{P_\perp}{m^2 c^2} &\equiv \frac{1}{2\mu_a} \\ \frac{P_\parallel}{m^2 c^2} &\equiv \frac{1 + \psi}{2\mu_a} \end{aligned} \quad (4.30)$$

gewählt, in Analogie zu den Definitionen (4.15). Hieraus folgt sofort

$$\begin{aligned} E_0 &= \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu_a} + \frac{1 + \psi_a}{2\mu_a}} = \sqrt{1 + \frac{1 + \psi_a/2}{\mu_a}}, \\ y_0 &= \sqrt{\frac{1 + \psi_a}{2\mu_a}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

In der Tabelle wird die Summation $\sum_a \omega_{p,a}^2$ der besseren Lesbarkeit halber weggelassen.

	$\Omega_M^2(\mu_a \ll 1)$	$\Omega_M^2(\mu_a \gg 1)$
Monochromatisch	$1 - \frac{\psi_a}{8(1+\psi_a/2)^2}$	$1 + \frac{1}{4\mu_a}$
<i>Waterbag</i>	$1 - \frac{\psi_a}{4(1+\psi_a/2)}$	$1 + \frac{1-2\psi}{12\mu_a}$

Es zeigt sich, dass

1. die Verteilungen einen sehr ähnlichen Verlauf zeigen, in niedrigster Ordnung sind die Ergebnisse sogar gleich;
2. sowohl für $(\mu_a \ll 1)$ als auch $(\mu_a \gg 1)$ der Parameter Ω_M als Grenzwert stets ungefähr Eins hat. Man kann also in erster Näherung $\Omega_M \simeq 1$ für das Integral (3.21) wählen.

4.3.3 Schwach anisotrope Verteilungen

Zunächst ist klar, dass der Ansatz (4.13) für monochromatische Teilchen überhaupt nicht mit der Annahme schwacher Anisotropie in Einklang zu bringen ist, selbst wenn man die δ -Distributionen formal entwickeln wollte. Es sollten sich vielmehr die Ergebnisse für hohe Anisotropie reproduzieren lassen. Daher wird auf die monochromatische Verteilung in diesem Abschnitt nicht weiter eingegangen.

Waterbag-Verteilung

Für den Fall der *Waterbag*-Verteilung kann man hingegen eine Entwicklung nach Abschnitt 3.3 und Gleichung (4.17) angeben. Man könnte argumentieren, dass eine stufenförmige Funktion nicht besonders gut entwickelbar ist, aber hier soll vor allem die prinzipielle Durchführbarkeit des Verfahrens getestet werden.

Greift man Gleichung (3.26) auf, so findet man für die Verteilung (4.14) die Entwicklungen⁶

$$\begin{aligned} F_a &\equiv \frac{\sqrt{E^2 - 1}}{4\pi y_0 \sqrt{E_0^2 - 1 - y_0^2 E}} \delta \left[E - \sqrt{E_0^2 - y_0^2} \right], \\ G_a &\equiv \frac{1}{8\pi y_0 \sqrt{E_0^2 - 1 - y_0^2 \sqrt{E^2 - 1}} E} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{E_0^2 - y_0^2 E}} \right) \delta \left[E - \sqrt{E_0^2 - y_0^2} \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

⁶Man beachte, dass hier nach y^2 abgeleitet wird.

wobei folgende Regeln für die Ableitung der δ -Distribution und Stufenfunktion benutzt wurden ($c > 1$),

$$\begin{aligned} H'[f(x)] &= \delta[f(x)]f'(x) \\ \int_1^\infty dx f(x)\delta'[x-c] &= -f'(c). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Auf diese Weise lassen sich Ω^2 und $c^2k_0^2$ leicht berechnen⁷,

$$\begin{aligned} \Omega_{sA}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{\pi}{4} \frac{3(E_0^2 - 1 - y_0^2) + 2}{y_0 \sqrt{E_0^2 - y_0^2}} > 0, \\ c^2k_{sA}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{1}{3} \frac{(E_0^2 - 1 - y_0^2)^{3/2}}{y_0(E_0^2 - y_0^2)} > 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

und die Wachstumsrate (3.33) kann sofort gezeichnet werden, wenn man sich geeignete Werte $\omega_{p,a}$, E_0 und y_0 vorgibt.

Bi-Maxwell-Verteilung

Für die Bi-Maxwell-Verteilung wurde bereits in Abschnitt 4.2 die Reihenentwicklung angesprochen. Es ergeben sich

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{1}{4\pi I_{\mu,\alpha}} \exp[-\mu_a E], \\ G_a &= \alpha_a F_a = \frac{\alpha_a}{4\pi I_{\mu,\alpha}} \exp[-\mu_a E]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Löst man mit diesen Näherungen die Integrale (3.31), so erhält man

$$\begin{aligned} \Omega_{sA}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{\pi}{2} \frac{(3 + 3\mu_a + \mu_a^2) \exp[-\mu_a]}{I_{\mu,\alpha} \mu_a^3}, \\ c^2k_{sA}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{2\alpha_a K_3[\mu_a]}{I_{\mu,\alpha} \mu_a^2}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

wobei $K_n[z]$ die modifizierte Besselfunktion zweiter Art bezeichnet.

κ -Verteilung

Im Falle der κ -Verteilung (4.16) erhält man die Entwicklung

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{\mu_a^{3/2}}{\pi^{3/2}} \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a} \frac{\Gamma[\kappa + 1]}{\Gamma[\kappa - 1/2]} \left(1 - \mu_a + \mu_a E^2\right)^{-(\kappa+1)}, \\ G_a &= \frac{\mu_a^{3/2}}{\pi^{3/2}} \alpha_a \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a} \frac{\Gamma[\kappa + 2]}{\Gamma[\kappa - 1/2]} \left(1 - \mu_a + \mu_a E^2\right)^{-(\kappa+2)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

⁷Zumindest das Ergebnis für die Wellenzahl ck_0 dürfte nur eine grobe Näherung sein, da hierfür die Entwicklung der Stufenfunktion benötigt wird.

Hieraus ergeben sich für die Integrale (3.31)

$$\begin{aligned}
\Omega_{sA} &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{\pi^{1/2}}{2} \mu_a^{3/2} \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a} \frac{\Gamma[\kappa + 1]}{\Gamma[\kappa + 1/2]} \\
&\quad \times \left(3 {}_2F_1 \left[\kappa + 1, 1; \kappa + \frac{1}{2}; 1 - \mu_a \right] - \frac{\kappa - 1/2}{\kappa + 1/2} {}_2F_1 \left[\kappa + 1, 1; \kappa + \frac{3}{2}; 1 - \mu_a \right] \right), \\
c^2 k_{sA}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 (\alpha_a/\mu_a) \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a}, \tag{4.38}
\end{aligned}$$

wobei ${}_2F_1[a, b; c; z]$ die hypergeometrische Funktion ist.

Zum besseren Vergleich der Resultate aus diesem Abschnitt kann man die Lösungen für hoch- ($\mu_a \ll 1$) und nichtrelativistische ($\mu_a \gg 1$) Plasmatemperaturen betrachten. Die Anisotropie geht in diesem Abschnitt in der Form $\alpha_a = \mu_a \psi_a$ ein. Um auch die *Waterbag*-Verteilung vergleichen zu können, wird wiederum der Ansatz (4.31) gewählt. Entwickelt man nun nach sehr hohen bzw. niedrigen Temperaturen, so ergibt sich (der Übersicht halber unter Weglassen der Summe $\sum_a \omega_{p,a}^2$)

	$\Omega_{sA}^2(\mu \ll 1)$	$c^2 k_{sA}^2(\mu \ll 1)$	$\Omega_{sA}^2(\mu \gg 1)$	$c^2 k_{sA}^2(\mu \gg 1)$
<i>Waterbag</i>	$\frac{3\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{1+\psi_a}}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1+\psi_a}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\mu_a}}{\sqrt{1+\psi_a}}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{1+\psi_a \mu_a}}$
Bi – Maxwell	$3\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\psi_a}{\mu_a}}$	$\frac{32}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\psi_a}{\mu_a}\right)^{3/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 2\psi_a} \sqrt{\mu_a}$	$2\psi_a \sqrt{1 + 2\psi_a}$
κ	$\frac{3\pi}{4} \sqrt{1 + \psi_a}$	$\psi_a \sqrt{1 + \psi_a}$	$\frac{\Gamma[\kappa]}{\Gamma[\kappa-1/2]} \sqrt{\pi} \sqrt{1 + \psi_a} \sqrt{\mu_a}$	$\psi_a \sqrt{1 + \psi_a}$

Es ist festzustellen, dass

1. die *Waterbag*-Verteilung nur bedingt eine geeignete Näherung darstellt. Im Besonderen gilt dies für die Wellenzahl ck_{sA} , welche für $\psi_a \rightarrow 0$ verschwinden sollte;
2. gerade im hochrelativistischen Fall deutliche Unterschiede zwischen der Bi-Maxwell- und κ -Verteilung vorliegen, vor allem in der Abhängigkeit von der Plasmatemperatur. Dies war bereits in der Diskussion über die Verteilungsfunktionen im Abschnitt 4.1.1 erwartet worden;
3. im Falle von verschwindender Anisotropie $\psi_a \rightarrow 0$ auch die maximale Wellenzahl k_{sA} (außer bei der *Waterbag*-Verteilung) stets auf Null zurückgeht, $c^2 k_{sA}^2(\psi_a \rightarrow 0) \rightarrow 0$;
4. die Stärke der Instabilität (gegeben durch $1/\Omega_{sA}$) mit geringer werdenden Temperaturen $\mu_a \gg 1$ stets abnimmt; bei hohen Temperaturen hängt sie von der Verteilungsfunktion ab. Dies könnte eine Methode sein, um zwischen verschiedenen Verteilungen zu unterscheiden.

4.3.4 Verteilungen mit hoher Anisotropie

In diesem Abschnitt wird zur Bestimmung der Wachstumsrate (3.42) im Bereich kleiner Wellenzahlen der Parameter Ω_{hA} nach Gleichung (3.40) für die verschiedenen Verteilungen bestimmt. Die Forderung $f(y) = f_{a0}$ ist jedoch nicht ganz einfach umzusetzen, insbesondere bei der monochromatischen und bei der *Waterbag*-Verteilung. Denn eine δ -Distribution ist nur in Verbindung mit einer Integration definiert, und somit lässt sich nicht einfach $E = 1$ in den Verteilungsfunktionen ansetzen. Stattdessen integriert man die Verteilungsfunktion über E im Intervall $[1, \infty[$ und passt die Normierung gemäß der Formulierung (3.39) an.

Monochromatische Verteilung

Mit der Verteilung

$$f(y) = \frac{1}{2\pi(y_{max}^2 - y_0^2)} \delta[y - y_0] \quad (4.39)$$

erhält man mit $y_{max} > y_0$ das Ergebnis

$$\Omega_{hA}^2 = \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{1}{y_{max}^2 - y_0^2} \left(\left(\frac{3}{2} + \frac{y_0^2}{1 + y_{max}^2} \right) (y_{max}^2 - y_0^2) - \frac{1 + 3y_0^2}{2} \ln \left[\frac{1 + y_{max}^2}{1 + y_0^2} \right] \right). \quad (4.40)$$

Waterbag-Verteilung

Die *Waterbag*-Verteilung ist fast ebenso einfach zu behandeln. Mit

$$f(y) = \frac{1}{2\pi(y_{max}^2 y_0 - y_0^3/3)} H[y_0^2 - y^2] \quad (4.41)$$

ergibt sich

$$\Omega_{hA}^2 = \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{1}{y_{max}^2 y_0 - y_0^3/3} \left(\frac{3y_{max}^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} - \frac{3y_0^4 + 5y_0^2}{15(1 + y_{max}^2)} - \frac{1 + y_0^2}{2} \ln \left[\frac{1 + y_{max}^2}{1 + y_0^2} \right] \right), \quad (4.42)$$

wobei wiederum $y_{max} > y_0$ gilt.

Bi-Maxwell-Verteilung

Für eine Bi-Maxwell-Verteilung kann man den Ansatz

$$f(y) = C_{BM} \exp[-\psi_a \mu_a y^2] \quad (4.43)$$

mit

$$C_{BM} = \frac{2\psi^{3/2} \mu^{3/2}}{\pi(2\psi^{1/2} \mu^{1/2} y_{max} \exp[-\psi \mu y_{max}^2] + \pi^{1/2}(2\psi \mu y_{max}^2 - 1) \operatorname{erf}[\psi^{1/2} \mu^{1/2} y_{max}])} \quad (4.44)$$

wählen, wobei $\operatorname{erf}[z]$ die Fehlerfunktion ist. Bei der Integration über y im Intervall $[0, y_{max}]$ erfordert der Term $y^m \ln[1 + y^2] \exp[-\psi_a \mu_a y^2]$ ein wenig mehr Aufmerksamkeit;

für $\psi_a \mu_a y_{max}^2 \ll 1$ kann man die Exponentialfunktion entwickeln und für $\psi_a \mu_a y_{max}^2 \gg 1$ lässt sich die Integration bis Unendlich fortsetzen. Als allgemeine Lösung resultiert

$$\begin{aligned} \Omega_{hA}^2 = & \sum_a \omega_{p,a}^2 C_{BM} \left[\left(\frac{3y_{max}^2}{2} - \frac{1}{2} \ln[1 + y_{max}^2] \right) \frac{\gamma[1/2, \psi_a \mu_a y^2]}{2\psi_a^{1/2} \mu_a^{1/2}} \right. \\ & + \left(\frac{y_{max}^2}{1 + y_{max}^2} - \frac{3}{2}(1 + \ln[1 + y_{max}^2]) \right) \frac{\gamma[3/2, \psi_a \mu_a y^2]}{2\psi_a^{3/2} \mu_a^{3/2}} \\ & \left. - \frac{1}{1 + y_{max}^2} \frac{\gamma[5/2, \psi_a \mu_a y^2]}{2\psi_a^{5/2} \mu_a^{5/2}} + R_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Hierbei ist $\gamma[a, z]$ die unvollständige Gammafunktion. Der Rest R_1 kann nur näherungsweise berechnet werden und nimmt für $\psi_a \mu_a y_{max}^2 \ll 1$ den Wert

$$R_1 \simeq \int_0^{y_{max}} dy \frac{1 + 3y^2}{2} \ln[1 + y^2] = \frac{1 + y_{max}^2}{2} \ln[1 + y_{max}^2] - \frac{y_{max}^2}{3} \quad (4.46)$$

an und für $\psi_a \mu_a y_{max}^2 \gg 1$

$$\begin{aligned} R_1 & \simeq \int_0^\infty dy \frac{1 + 3y^2}{2} \ln[1 + y^2] \exp[-\psi_a \mu_a y^2] \\ & = \frac{\pi^{1/2}}{8\psi_a^{3/2} \mu_a^{3/2}} \left[6 - (3 + 2\psi_a \mu_a) (\ln[4\psi_a \mu_a] + \gamma - \pi \operatorname{erfi}[\psi_a^{1/2} \mu_a^{1/2}]) \right] - \frac{3\pi \exp[\psi_a \mu_a]}{4 \psi_a \mu_a} \\ & \quad + \frac{3\pi^{1/2}}{4\psi_a^{1/2} \mu_a^{1/2}} {}_2F_2[1, 1; 1/2, 2; \psi_a \mu_a] - \frac{\pi^{1/2}}{2\psi_a^{1/2} \mu_a^{1/2}} {}_2F_2[1, 1; 3/2, 2; \psi_a \mu_a]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$\gamma \simeq 0.577$ stellt darin die Eulersche Konstante und $\operatorname{erfi}[z]$ die Fehlerfunktion dar, während ${}_2F_2$ die entsprechende hypergeometrische Funktion bezeichnet.

κ -Verteilung

Im Falle der κ -Verteilung hat man

$$f(y) = C_\kappa \frac{1}{(1 + \psi_a \mu_a y^2)^\kappa} \quad (4.48)$$

mit

$$C_\kappa = \frac{3}{2\pi y_{max}^3 (3 {}_2F_1[1/2, \kappa; 3/2; -\psi_a \mu_a y_{max}^2] - {}_2F_1[3/2, \kappa; 5/2; -\psi_a \mu_a y_{max}^2])} \quad (4.49)$$

sowie $\kappa > 3/2$. Analog zur Bi-Maxwell-Verteilung lassen sich die Integrale berechnen mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \Omega_{hA}^2 = & \sum_a \omega_{p,a}^2 C_\kappa \left[\left(\frac{3y_{max}^2}{2} - \frac{1}{2} \ln[1 + y_{max}^2] \right) y_{max} {}_2F_1[1/2, \kappa; 3/2; -\psi_a \mu_a y_{max}^2] \right. \\ & + \left(\frac{y_{max}^2}{1 + y_{max}^2} - \frac{3}{2}(1 + \ln[1 + y_{max}^2]) \right) \frac{y_{max}^3}{3} {}_2F_1[3/2, \kappa; 5/2; -\psi_a \mu_a y_{max}^2] \\ & \left. - \frac{1}{1 + y_{max}^2} \frac{y_{max}^5}{5} {}_2F_1[5/2, \kappa; 7/2; -\psi_a \mu_a y_{max}^2] + R_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Für den Rest R_2 ergibt sich bei $\psi_a \mu_a y_{max}^2 \ll 1$ nach Entwicklung des κ -Terms wiederum

$$R_2 \simeq \int_0^{y_{max}} dy \frac{1+3y^2}{2} \ln[1+y^2] = \frac{1+y_{max}^2}{2} \ln[1+y_{max}^2] - \frac{y_{max}^2}{3}, \quad (4.51)$$

während man bei $\psi_a \mu_a y_{max}^2 \gg 1$

$$\begin{aligned} R_2 &\simeq \int_0^\infty dy \frac{1+3y^2}{2} \ln[1+y^2] \frac{1}{(1+\psi_a \mu_a y^2)^\kappa} \\ &= \frac{9\pi^{1/2} \Gamma[\kappa - 5/2]}{16\Gamma[\kappa] \psi_a^{5/2} \mu_a^{5/2}} {}_3F_2[1, 1, 5/2; 2, 7/2 - \kappa; 1/(\psi_a \mu_a)] \\ &\quad + \frac{\pi^{1/2} (\kappa(\kappa - 2)\Gamma[\kappa - 3/2] + 3\Gamma[\kappa + 1/2])}{2(4\kappa^2 - 8\kappa + 3)\Gamma[\kappa] \psi_a^{3/2} \mu_a^{3/2}} {}_3F_2[1, 1, 3/2; 2, 5/2 - \kappa; 1/(\psi_a \mu_a)] \\ &\quad + \frac{\pi \sec[\pi\kappa]}{2\psi_a^\kappa \mu_a^\kappa (4\kappa^2 - 8\kappa + 3)} \left((6\kappa - 3) {}_2F_1[\kappa - 3/2, \kappa; \kappa - 1/2; 1/(\psi_a \mu_a)] \right. \\ &\quad \left. - (2\kappa - 3) {}_2F_1[\kappa - 1/2, \kappa; \kappa + 1/2; 1/(\psi_a \mu_a)] \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

erhält.

Auch hier sollen im Folgenden in tabellarischer Form die Näherungen für hohe ($\mu_a \ll 1$) und niedrige ($\mu_a \gg 1$) Plasmatemperaturen dargestellt werden. Im Falle der monochromatischen und der *Waterbag*-Verteilung wird als Ansatz

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{\frac{1+\psi_a}{2\mu_a}}, \\ y_{max} &= m y_0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

gewählt, mit $m > 1$. Für die beiden anderen Verteilungen wird ebenfalls die Form (4.53b) benutzt⁸. Des Weiteren kann man bei den Ergebnissen $1 + \psi_a/2 \simeq \psi_a/2$ nähern, da man den Bereich hoher Anisotropie $\psi_a \gg 1$ betrachtet. Auch wird hier ebenfalls der Übersicht halber die Summe $\sum_a \omega_{p,a}^2$ fortgelassen.

	$\Omega_{hA}^2(\mu_a \ll 1)$	$\Omega_{hA}^2(\mu_a \gg 1)$
Monochromatisch	$\frac{3m^4 - m^2(1+3\ln[m^2]) - 2}{2m^2(m^2-1)}$	$1 + \frac{m^2-1}{8} \frac{\psi_a}{\mu_a}$
<i>Waterbag</i>	$\frac{45m^4 - 15m^2(1+\ln[m^2]) - 6}{10m^2(3m^2-1)}$	$1 + \frac{15m^4 - 10m^2 + 3}{40(3m^2-1)} \frac{\psi_a}{\mu_a}$
Bi - Maxwell	$\frac{3}{2} + \frac{1}{m^2} \ln \left[\frac{2}{m^2} \frac{\mu_a}{\psi_a} \right] \frac{\mu_a}{\psi_a}$	$1 - \frac{1}{2m^2} \frac{1}{\psi_a^2} + \frac{m^2}{8} \frac{\psi_a}{\mu_a}$
κ	$\frac{3}{2} + \frac{1}{m^2} \ln \left[\frac{2}{m^2} \frac{\mu_a}{\psi_a} \right] \frac{\mu_a}{\psi_a}$	$1 + \frac{m^2}{8} \frac{\psi_a}{\mu_a}$

⁸Dies hat zur Folge, dass bei der Bi-Maxwell- und bei der κ -Verteilung wegen $\psi_a \mu_a y_{max}^2 = m^2 \psi_a (1 + \psi_a)/2$ und $\psi_a \gg 1$ stets der Rest R_2 berücksichtigt werden muss.

Es ist deutlich, dass

1. alle Verteilungen in niedrigster Ordnung dasselbe Verhalten zeigen, und zwar $\Omega_{hA}^2 \simeq 3/2$ für $\mu_a \ll 1$, $m \gg 1$ und $\Omega_{hA}^2 \simeq 1$ für $\mu_a \gg 1$. Über den ganzen Temperaturbereich sollte der Parameter Ω_{hA} daher $\mathcal{O}[\Omega_{hA}] \simeq 1$ besitzen;
2. besonders im Falle niedriger Temperaturen das Verhalten aller Verteilungsfunktionen sich nur um Faktoren in erster Ordnung unterscheiden;
3. die Ergebnisse der beiden ersten Verteilungen mit denen aus der Tabelle in Abschnitt 4.3.2 vergleichbar sind. Dies alles legt für den Fall $M \gg 1$ den Schluss nahe, dass für beliebige Verteilungsfunktionen der Parameter $\Omega_{hA} \simeq 1$.

4.3.5 Ultrarelativistische Verteilungen

Für ultrarelativistische Verteilungen hat man die Integrale (3.45) bzw. (3.52) zu lösen. Man bemerkt jedoch sofort, dass man auch in diesem Fall mit dem monochromatischen Ansatz (4.13) keine sinnvollen Ergebnisse erhält, denn zur Lösung des Integrals (3.53) benötigt man $f_{a0}(E, y = 0)$, was für $y_0 \neq 0$ eine verschwindende Verteilungsfunktion zur Folge hätte⁹.

Waterbag-Verteilung

Hier folgt mit der *Waterbag*-Verteilung (4.14)

$$\vartheta_a = \sqrt{E_0^2/y_0^2 - 1} \quad (4.54)$$

und somit lassen sich Ω^2 und $c^2 k_0^2$ leicht berechnen,

$$\begin{aligned} \Omega_{ur}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{9\pi^2}{2} \sqrt{E_0^2/y_0^2 - 1}, \\ c^2 k_{ur}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 2\pi \left(\sqrt{E_0^2/y_0^2 - 1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Bi-Maxwell-Verteilung

Für die Bi-Maxwell-Verteilung lässt sich das Integral (3.53) ebenso einfach lösen; man erhält

$$\vartheta_a = \frac{(2 + 2\mu_a + \mu_a^2) \exp[-\mu]}{I_{\mu,\alpha} \mu_a^3}. \quad (4.56)$$

Analog zur *Waterbag*-Verteilung ergibt sich

$$\begin{aligned} \Omega_{ur}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{9\pi^2}{2} \frac{(2 + 2\mu_a + \mu_a^2) \exp[-\mu]}{I_{\mu,\alpha} \mu_a^3}, \\ c^2 k_{ur}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 2\pi \left(\frac{(2 + 2\mu_a + \mu_a^2) \exp[-\mu]}{I_{\mu,\alpha} \mu_a^3} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

⁹Der mögliche Ansatz $y_0 = 0$ hätte ein isotropes Plasma zur Folge und widerspricht somit der ursprünglichen Voraussetzung.

κ -Verteilung

Für die κ -Verteilung (4.16) hat man als Lösung

$$\vartheta_a = (1 - \mu_a)^{-\kappa+1/2} \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a}, \quad (4.58)$$

was dann in den Gleichungen (3.56) auf

$$\begin{aligned} \Omega_{ur}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{9\pi^2}{2} (1 - \mu_a)^{-\kappa+1/2} \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a}, \\ c^2 k_{ur}^2 &= \sum_a \omega_{p,a}^2 2\pi \left((1 - \mu_a)^{-\kappa+1/2} \sqrt{1 + \alpha_a/\mu_a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

führt.

Auch hier ist ein tabellarischer Vergleich der Resultate zum besseren Vergleich interessant. Im Gegensatz zur schwachen Anisotropie kann man hier natürlich nur ultrarelativistische ($\mu_a \ll 1$) Plasmatemperaturen betrachten. Jedoch kann man die hochrelativistischen Ergebnisse des Ansatzes schwacher Anisotropie den hier gewonnenen Ergebnissen gegenüberstellen. Die Anisotropie geht in diesem Abschnitt in der Form $\alpha_a = \mu_a \psi_a$ ein. Um auch hier die *Waterbag*-Verteilung verwenden zu können, wird wieder der Ansatz (4.31) gewählt. Zudem wird der Übersicht halber die Summe $\sum_a \omega_{p,a}^2$ fortgelassen.

	Ω_{ur}^2	$c^2 k_{ur}^2$	Ω_{sA}^2	$c^2 k_{sA}^2$
<i>Waterbag</i>	$\frac{9\pi^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\psi_a}}$	$2\pi \frac{\sqrt{1+\psi_a}-1}{\sqrt{1+\psi_a}}$	$\frac{3\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{1+\psi_a}}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1+\psi_a}}$
Bi – Maxwell	$18\pi^{3/2} \sqrt{\frac{\psi_a}{\mu_a}}$	$8\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\psi_a}{\mu_a}}$	$3\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\psi_a}{\mu_a}}$	$\frac{32}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\psi_a}{\mu_a}\right)^{3/2}$
κ	$\frac{9\pi^2}{2} \sqrt{1+\psi_a}$	$2\pi (\sqrt{1+\psi_a} - 1)$	$\frac{3\pi}{4} \sqrt{1+\psi_a}$	$\psi_a \sqrt{1+\psi_a}$

Hier ist klar zu erkennen, dass

1. bei ultrarelativistischen Plasmatemperaturen die *Waterbag*-Verteilung besser geeignet ist als im Falle schwacher Anisotropie. Deutlich wird diese besonders bei der Betrachtung der maximalen Wellenzahl $ck_{ur,sA}$ im Grenzwert $\psi_a \rightarrow 0$;
2. weiterhin die allgemeinen Aussagen 2 bis 4 zur Tabelle aus Abschnitt 4.3.3 auf die ultrarelativistische Lösung übertragbar sind. Besonders auffällig ist hier der Unterschied zwischen Bi-Maxwell- und κ -Verteilung.

4.4 Isolierte Moden in der Literatur und in Simulationen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage nach der realen Existenz isolierter Weibelmoden. In Kapitel 3.6 wurde gezeigt, dass für schwache Anisotropien die Wellenmoden

auf eine diskrete Wellenzahl zusammenfallen können, wenn man für die Verteilungsfunktion ungerade Potenzen der Impulskomponente y zulässt.

Dieses interessante Resultat stieß durch seine frühzeitige Veröffentlichung weitere Arbeiten auf diesem Gebiet an. Die Frage nach der Kopplung von transversalen (elektromagnetischen) mit longitudinalen (elektrostatischen) Moden und der Entartung elektromagnetischer Moden wird durch die Erkenntnisse von Tautz *et al.* [39, 40] beantwortet. Analog zum Kapitel 3.6 werden dort aus den Dispersionsrelationen in tensorieller Form Gleichungen der Wellenzahl k und der Phasengeschwindigkeit M hergeleitet,

$$\begin{aligned} 0 &= a(M)k^6 + b(M)k^4 + d(M)k^2 + f(M) \\ 0 &= \bar{b}(M)k^4 + \bar{d}(M)k^2 + \bar{f}(M) \end{aligned} \quad (4.60)$$

wobei die Funktionen $x(M)$ in [39] definiert werden. Hieraus lässt sich die Wellenzahl eliminieren, und man erhält die Gleichung

$$\bar{b}(M)\eta(M)^2 + \bar{d}(M)\eta(M)\zeta(M) + \bar{f}\zeta(M)^2 = 0. \quad (4.61)$$

Diese Gleichung führt auf diskrete Lösungen für M , und mit $k^2 = \eta(M)/\zeta(M)$ liegen isolierte Moden vor. Dieses Ergebnis ist für beliebige asymmetrische Verteilungsfunktionen bei Abwesenheit eines Hintergrundmagnetfeldes gültig. Es werden nicht explizit longitudinale oder transversale Wellen angenommen, so dass die hier beschriebenen Wellen durchaus miteinander gekoppelt sein können.

Zur Bestätigung dieser allgemeinen Aussage werden in [40] ähnlich wie in dieser Arbeit einfache Verteilungen, und zwar monochromatische Teilchenströme¹⁰ aus Elektronen und Positronen verwendet, um die Existenz sowie einschränkende Bedingungen und Wachstumsraten dieser isolierten Moden zu bestimmen. Im Falle der symmetrischen elektrostatischen Moden ergibt sich $M^2 < 1$ und

$$\Gamma^2 = 2c^2\xi_e^2 \frac{\gamma_{\perp}^2 (1-w^2)w^2}{\gamma^3 (1+w^2)^2}, \quad (4.62)$$

mit den Definitionen aus [40]. Für elektromagnetische Moden findet man¹¹ eine maximale Phasengeschwindigkeit M , für die instabile Moden erlaubt sind. Mit einer nicht-zylindersymmetrischen monochromatischen Verteilungsfunktion¹² ($\Pi_y \neq \Pi_z$) erhält man Lösungen für die Moden, deren Entartung aufgehoben ist, d.h. man findet verschiedene Typen. Als Wachstumsrate ergibt sich (wiederum mit den Definitionen aus [40])

$$\Gamma^2 = \frac{M^2}{1+M^2} \frac{2c^2\xi_e^2}{(p_x^2 + M^2\gamma^2)^2} (M_{max}^2 - M^2)(M^2 - M_{min}^2). \quad (4.63)$$

Will man nun für isolierte Moden eine asymmetrische Verteilung (gegeben durch zwei gegenläufige Elektronen- und Positronenströme) untersuchen,

$$\begin{aligned} F_e &= \delta[p_x - \varpi_x] \delta[p_y - \varpi_y] \delta[p_z - \varpi_z] \\ F_p &= \delta[p_x + \varpi_x] \delta[p_y + \varpi_y] \delta[p_z + \varpi_z], \end{aligned} \quad (4.64)$$

¹⁰Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um δ -Funktionen, z.B. im elektromagnetischen Fall

$$F_a = \frac{\Pi_y \Pi_z}{2} (\delta[p_x - \varpi] + \delta[p_x + \varpi]) \delta[p_y^2 - \Pi_y^2] \delta[p_z^2 - \Pi_z^2].$$

¹¹Vgl. Kapitel 3.2.2.

¹²Dennoch ist dies eine symmetrische Verteilungsfunktion im Sinne von Kapitel 3.

so zeigt sich schon bei dieser einfachen Struktur, dass eine analytische Lösung der Polynomgleichungen wie Gleichung (4.61) sehr schwierig ist. Mit dem Ansatz $\varpi_x = \varpi_y = \varpi_z \equiv \varpi = [(\gamma^2 - 1)/3]^{1/2}$ hängen die interessierenden Gleichungen nur noch vom Lorentzfaktor γ ab, die Lösungen sind in den Graphen 4.2, 4.3 dargestellt. Es zeigt sich, dass

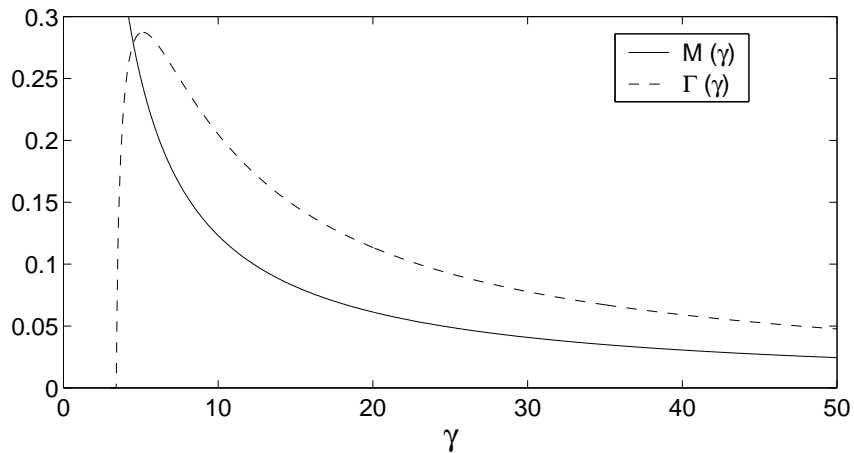


Abbildung 4.2: Phasengeschwindigkeit M und Wachstumsrate Γ für die isolierten Weibelmoden nach [40] in Abhängigkeit vom Lorentzfaktor γ . Mit freundlicher Genehmigung von R.C. Tautz.

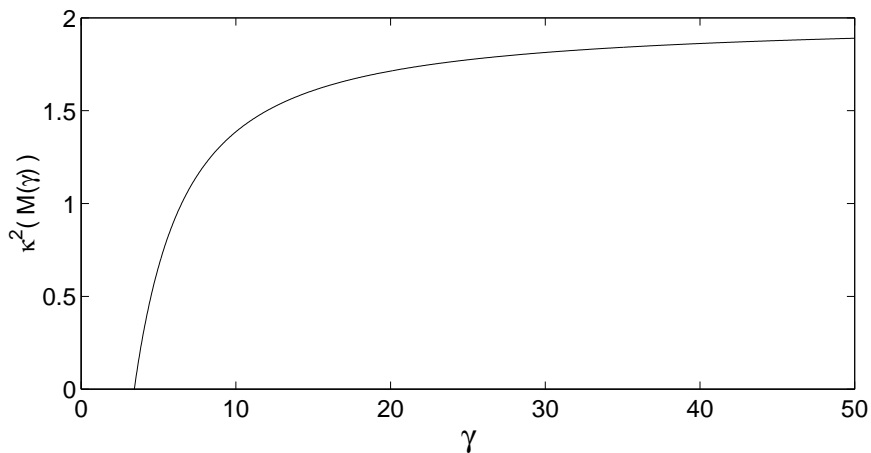


Abbildung 4.3: Wellenzahl κ für die isolierten Weibelmoden nach [40] in Abhängigkeit vom Lorentzfaktor γ . Mit freundlicher Genehmigung von R.C. Tautz.

diese instabilen Moden erst für $\gamma \geq 3.43$ auftreten. Daher sollten diese Untersuchungen besonders für relativistische Plasmen, wie sie auch in der astrophysikalischen Jets, z.B. in GRBs oder AGN auftreten, von Bedeutung sein. Ungeklärt ist jedoch die Frage, wie der Übergang zwischen den isolierten Moden der asymmetrischen Verteilungen und dem Wellenzahlbereich ausgedehnter Moden symmetrischer Verteilungen vonstatten geht.

Neben diesen theoretischen Überlegungen finden sich in der Literatur Simulationen solcher isolierter Moden [43]. In selbstkonsistenten Particle-in-Cell-Simulationen (PIC)

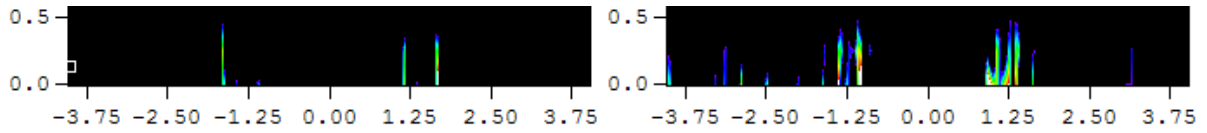


Abbildung 4.4: Simulation: Vergleich von asymmetrischer (links) und symmetrischer (rechts) Verteilungsfunktion im nichtrelativistischen Gegenstromplasma. Gezeigt ist die rauschgefilterte Dispersionsrelation für die B_y -Komponente vor dem Übergang in die Sättigungsphase. Aufgetragen ist der Realteil der Frequenz $\omega_r/\omega_{p,e}$ über der normierten Wellenzahl $kc/\omega_{p,e}$. Die Stärke des Magnetfeldes reicht in relativen logarithmischen Einheiten von 6 (schwarz) bis 6.5 (weiß). Mit freundlicher Genehmigung von R.C. Tautz.

zeigten sich deutliche Hinweise auf isolierte Moden. Betrachtet wurde ein Gegenstromplasma aus Elektronen und Positronen mit asymmetrischen Maxwellverteilungen¹³ mit verschiedenen relativen Intensitäten. Um eine größtmögliche Aussagekraft zu erhalten, wurde der Gegenstrom schief im Raum angenommen, während sich die Wellen parallel zur x -Achse ausbreiten. Filtert man ein gewisses Rauschen heraus, so zeigen sich z.B. in der B_y -Komponente einzelne isolierte Spitzen, siehe Abbildung 4.4.

¹³Diese wurde gewählt, weil sie realistischer als die monochromatische Verteilung (4.64) der theoretischen Betrachtung sind.

5 Die nichtlineare Theorie von Plasmawellen mit solitärer Lösung

[T]he mass of water [...] rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed.

John Scott Russel beschreibt seine Beobachtung eines Solitons [29].

Bis hierhin wurden in dieser Arbeit die allgemeine Eigenschaften der linearen Weibelinstabilität hergeleitet – ausgehend von der Vlasovgleichung (2.5) und den Maxwellgleichungen (2.1). Im zugrundeliegenden Prinzip zur Lösung dieses Gleichungssystems bestand der erste Schritt in der *Linearisierung* (2.7) der interessanten Größen, um die Gleichungen der Fluktuationen eines Gleichgewichtszustandes berechnen zu können.

Es liegt nun in der Natur der Linearisierung, dass auf diese Weise der erlaubte Bereich für die Fluktuationen erheblich eingeschränkt ist. Falls jedoch die Instabilität über eine bestimmte Größe hinaus anwächst, gilt die Linearisierung naturgemäß nicht mehr. Spätestens sobald die Instabilität in einen saturierten Bereich übergeht, kann die lineare Näherung nicht mehr korrekt sein. Zudem ist eine Reaktion der angeregten Mode auf die Verteilungsfunktion ebenfalls zu erwarten, somit kann der gewählte Ansatz möglicherweise nicht mehr gültig sein.

Des Weiteren wurde in Kapitel 3.6 gezeigt, dass sich beim Verhalten der Verteilungsfunktion ein markanter Wechsel der Weibelmoden zeigt, wenn man zusätzlich zu der Annahme der Anisotropie auch eine asymmetrische Funktion in der Variablen y annimmt. Es stellte sich heraus, dass die Erfüllung des Imaginärteils der Dispersionsrelation (3.5) zu *festen* Werten der imaginären Phasengeschwindigkeit M führt, welche im Realteil (3.4) eingesetzt ebenfalls feste, *eindeutige* Werte der Wellenzahl k in der Form $k^2 = k_0^2 - AM$ (wobei A eine Konstante ist) ergibt!

Somit gibt es kein breites Wellenzahlintervall mehr, in dem anwachsende Moden im „symmetrischen“ anisotropen Plasma existieren können. Stattdessen kollabiert dieser Bereich in „asymmetrischen“ anisotropen Plasmen auf eine einzelne feste Wellenzahl k mit einer definierten Wachstumsrate $\Gamma \equiv ckM = Mc(k_0^2 - AM)^{1/2}$. Es wird folglich nur noch eine einzelne Welle beschrieben.

Dieses etwas überraschende Ergebnis erinnert jedoch sehr an die bei der Behandlung nichtlinearer Wellen auftretenden Solitonen, deren allgemeines Verhalten z.B. bei Whitham [46] diskutiert ist: einzelne Wellen, die mit konstanter Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit propagieren. Diese Erkenntnis legt nahe, die nichtlinearen Effekte der

Störungen in einem selbstkonsistenten Bild zu untersuchen. Schon die leichteste Asymmetrie in der Impulskomponente $y \propto p_{\parallel}$ zwingt den Bereich der erlaubten Wellenzahlen, auf eine einzige Mode zu „kondensieren“ – dieses ist häufig ein deutlicher Hinweis auf von nichtlinearem Verhalten dominierte Wechselwirkungen.

Gelenkt durch diese semi-intuitiven Hinweise wird in diesem zweiten Teil dieser Arbeit das nichtlineare Verhalten solcher Wellen eines relativistischen Plasmas in einem selbstkonsistenten Bild entwickelt.

5.1 Entwicklung der selbstkonsistenten Wellengleichung

5.1.1 Die Verteilungsfunktionen

Im „klassischen“ linearen Fall der Weibelinstabilität manifestierten sich die Moden als elektromagnetische Transversalwellen. Als z -Achse des Koordinatensystems wird die Ausbreitungsrichtung der Welle angenommen, da keine andere Vorzugsrichtung im System vorliegt. Analog dazu wird postuliert, dass dieses Verhalten auch im nichtlinearen Fall auftritt, daher werden das elektrische und das magnetische Feld (\vec{E} , \vec{B}) folgendermaßen angesetzt,

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (5.1)$$

Das Vektorpotential \vec{A} besitze eine Komponente in x -Richtung, die nur von der Zeit t und z abhängt,

$$\vec{A} \equiv (1, 0, 0)A(z - \xi ct), \quad (5.2)$$

mit $(1, 0, 0)$ in kartesischen Koordinaten (x, y, z) , so dass $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ automatisch erfüllt ist. ξ ist eine zunächst willkürlich gewählte Konstante, welche im weiteren Verlauf mit der inversen Geschwindigkeit des Teilchenensembles identifiziert wird.

Nun sollen die Wellengleichungen hergeleitet werden. Dies soll in aller Ausführlichkeit geschehen, da hier ein neuer Zugang zur Theorie nichtlinearer Wellen aufgezeigt wird. Mit der Abkürzung $\zeta \equiv z - \xi ct$ erhält man nun für die Felder

$$\vec{E} = \vec{e}_x \frac{\partial A}{\partial \zeta} \xi, \quad \vec{B} = \vec{e}_y \frac{\partial A}{\partial \zeta}, \quad (5.3)$$

wobei \vec{e}_x und \vec{e}_y die Einheitsvektoren in Richtung der jeweiligen Achse kennzeichnen.

Für Teilchen mit der Ladung q_a und Ruhemasse m_a genügt die Verteilungsfunktion f_a der Gleichung

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial \zeta} + q_a \left(\xi \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial f_a}{\partial p_x} - \frac{v_z}{c} \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial f_a}{\partial p_x} + \frac{v_x}{c} \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial f_a}{\partial p_z} \right) = 0, \quad (5.4)$$

in der als weitere Größen der Teilchenimpuls \vec{p} und die Teilchengeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{p}/[m_a(1 + \vec{p}^2/(m_a c)^2)^{1/2}]$ auftauchen. Um die Rechnung im weiteren Verlauf zu vereinfachen, normiert man den Impuls gemäß $\vec{p} \equiv m_a c \vec{w}$. Zudem kann man wegen $(\partial f_a / \partial t) =$

$-\xi c(\partial f_a/\partial \zeta)$ die Verteilung f_a als nur von ζ abhängig betrachten anstatt einzeln von z und t . Dieses führt dann mit $z_a = q_a/(m_a c^2)$ und der Gleichung (5.4) auf

$$\frac{\partial f_a}{\partial \zeta}(\varpi_z - \xi\gamma) + z_a \frac{\partial A}{\partial \zeta} \left((\xi\gamma - \varpi_z) \frac{\partial f_a}{\partial \varpi_x} + \varpi_x \frac{\partial f_a}{\partial \varpi_z} \right) = 0 \quad (5.5)$$

mit $\gamma = (1 + \varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2)^{1/2}$. Anschließend wird die Methode der Charakteristiken auf diese Differentialgleichung angewendet¹. Sie hat den Vorteil, dass diese nichtlinearen Gleichungen auf lineare zurückgeführt werden; zudem stellt man fest, dass $\varpi_y = \text{const.}$ sich nicht entlang der Charakteristik ändert. Dieses lässt sich ausnutzen, um die Verteilungsfunktion f_a zu vereinfachen [30]. Man führt neue Variablen für ϖ_x und ϖ_z ein und fasst ϖ_y als Konstante auf, so dass die partielle Differentialgleichung für f_a in eine gewöhnliche Differentialgleichung übergeht.

Zunächst lässt sich Gleichung (5.5) umformen,

$$\frac{\partial f_a}{\partial \zeta} - z_a \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial f_a}{\partial \varpi_x} + z_a \frac{\varpi_x}{\varpi_z - \xi\gamma} \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial f_a}{\partial \varpi_z} = 0. \quad (5.6)$$

Die Charakteristiken von Gleichung (5.6) folgen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\varpi_x}{dA} &= -z_a \\ \frac{d\varpi_z}{dA} &= z_a \frac{\varpi_x}{\varpi_z - \xi\gamma} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Gleichung (5.7a) hat die Lösung

$$\varpi_x + z_a A = \Pi_x, \quad (5.8)$$

wobei Π_x eine Konstante bzgl. ϖ_x ist. Gleichung (5.7b) kann recht einfach gelöst werden, wenn man sie mit Hilfe von Gleichung (5.7a) folgendermaßen schreibt,

$$\frac{d\varpi_z}{d\varpi_x} = -\frac{\varpi_x}{\varpi_z - \xi\gamma}, \quad (5.9)$$

so dass

$$\varpi_z d\varpi_z + \varpi_x d\varpi_x = \xi\gamma d\varpi_z. \quad (5.10)$$

Nun gilt aber

$$\varpi_z d\varpi_z + \varpi_x d\varpi_x \equiv d(1 + \varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2)/2 \equiv \gamma d\gamma \quad (5.11)$$

und es folgt

$$\gamma - \xi\varpi_z = \Pi_z, \quad (5.12)$$

wobei Π_z eine Konstante bzgl. ϖ_x und ϖ_z ist. Jedoch ist eine Abhängigkeit von ϖ_y nicht ausgeschlossen.

In den neuen Variablen entlang der Charakteristiken lautet die allgemeine Lösung von Gleichung (5.6)

$$f_a \equiv f_a(\Pi_x, \varpi_y, \Pi_z) \quad (5.13)$$

¹Siehe z.B. Whitham [46], Seite 19ff.

Etwas Vorsicht ist geboten, wenn man die Charakteristik betrachtet, welche durch Gleichung (5.12) gegeben ist. γ enthält wegen $\gamma^2 = 1 + \varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2$ auch ϖ_z^2 . Daher erhält man

$$1 + \varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2 = \gamma^2 = \xi^2 \varpi_z^2 + 2\xi \varpi_z \Pi_z + \Pi_z^2 \quad (5.14)$$

mit einer Struktur, die vom Wert des Parameters ξ abhängt. Dieses soll im Folgenden genauer untersucht werden.

Für $\xi^2 = 1$ ergibt sich aus Gleichung (5.14) die eindeutige Darstellung

$$\varpi_z = \frac{1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2 - \Pi_z^2}{2\xi \Pi_z} = \pm \frac{1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2 - \Pi_z^2}{2\Pi_z} \quad (5.15)$$

für die beiden Möglichkeiten $\xi = 1, -1$. Für $\xi^2 > 1$ besitzt Gleichung (5.14) die beiden Wurzeln

$$\varpi_z = \frac{-\xi \Pi_z \pm \left[\Pi_z^2 + (\xi^2 - 1) \left(1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2 \right) \right]^{1/2}}{\xi^2 - 1}, \quad (5.16)$$

während sich für den Fall $\xi^2 < 1$ die Lösung

$$\varpi_z = \frac{\xi \Pi_z \pm \left[\Pi_z^2 - (1 - \xi^2) \left(1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2 \right) \right]^{1/2}}{1 - \xi^2} \quad (5.17)$$

ergibt. Zu erwähnen ist, dass in den Fällen $\xi^2 = 1$ und $\xi^2 > 1$ keinerlei Einschränkungen an die Konstanten Π_x und Π_z der Charakteristik auftreten. Im letzten Fall jedoch, $\xi^2 < 1$, ist ϖ_z genau dann eine reelle Zahl, falls

$$\varpi_{crit}^2 \equiv (1 - \xi^2) \left(1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2 \right) < \Pi_z^2 \quad (5.18)$$

gilt. Somit sind für diesen Fall die Konstanten beschränkt. Im Falle $\Pi_z = 0$ folgt hieraus sofort, dass nur die Möglichkeit $\xi^2 > 1$ reelle Werte für die Impulse ergibt, denn Gleichung (5.18) liefert einen Widerspruch.

Eine weitere Einschränkung hilft bei der Bestimmung des „richtigen“ Vorzeichens in den Gleichungen (5.16) und (5.17). Denn aus Gleichung (5.12) folgt

$$\gamma = \Pi_z + \xi \varpi_z \quad (5.19)$$

und es gilt zudem $\gamma \geq 1$. Also hat man die Bedingung $\Pi_z \geq 1 - \xi \varpi_z$, und in den Gleichungen (5.16) und (5.17) ist die Entscheidung festgelegt: In beiden Gleichungen hat man das obere Vorzeichen zu wählen.

Da nun f_a (gegeben durch Gleichung (5.13)) als Funktion der Konstanten der Charakteristiken geschrieben werden kann, liegt es nahe, auch die Maxwellgleichungen mit Hilfe dieser Konstanten als grundlegende Variablen zu nutzen. Dieses soll im nächsten Abschnitt geschehen.

5.1.2 Die Maxwellgleichungen in neuen Variablen

Es werden im Folgenden vier Beziehungen aus den Maxwellgleichungen hergeleitet, die für die weitere Untersuchung von Belang sind. Zunächst folgt aus den Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_a q_a n_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p f_a,$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\nabla \times \vec{B} &= +\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \sum_a q_a n_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \vec{v} f_a.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Mit $\vec{E} = \vec{e}_x \xi (\partial A / \partial \zeta)$ und $\vec{B} = \vec{e}_y (\partial A / \partial \zeta)$ ist Gleichung (5.20b) automatisch erfüllt. Gleichung (5.20c) lautet mit Hilfe des Vektorpotentials in Komponenten wie folgt,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} (1 - \xi^2) &= -4\pi \sum_a q_a n_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p v_x f_a, \\
0 &= 4\pi \sum_a q_a n_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p v_y f_a, \\
0 &= 4\pi \sum_a q_a n_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p v_z f_a,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

während Gleichung (5.20a) (zusammen mit $\nabla \cdot \vec{E} = 0$)

$$0 = 4\pi \sum_a q_a n_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3p f_a = 4\pi \sum_a q_a n_a, \tag{5.22}$$

erfordert. Hierbei ist n_a die Anzahldichte jeder Teilchensorte a , und die Verteilungsfunktion f_a ist auf

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3p f_a = 1 \tag{5.23}$$

normiert.

Will man das Differential der Dreifachintegrationen in den Gleichungen (5.21) mit Hilfe der charakteristischen Variablen (Π_x , ϖ_y und Π_z) ausdrücken, so erhält man

$$d^3p = d\Pi_x d\varpi_y d\Pi_z \begin{vmatrix} (\partial p_x / \partial \Pi_x) & (\partial p_x / \partial \varpi_y) & (\partial p_x / \partial \Pi_z) \\ (\partial p_y / \partial \Pi_x) & (\partial p_y / \partial \varpi_y) & (\partial p_y / \partial \Pi_z) \\ (\partial p_z / \partial \Pi_x) & (\partial p_z / \partial \varpi_y) & (\partial p_z / \partial \Pi_z) \end{vmatrix}. \tag{5.24}$$

Die Auswertung dieser Jacobideterminante (siehe Anhang C.3) ergibt

$$dp_x dp_y dp_z = (m_a c)^3 d\Pi_x d\varpi_y d\Pi_z C(\Pi_x, \varpi_y, \Pi_z), \tag{5.25}$$

wobei $C = |\xi| \gamma / |(1 - \xi^2) \gamma - \Pi_z|$. Dabei ist γ eine implizite Funktion von Π_x , ϖ_y , Π_z und A . Die erlaubten Wellenzahlbereiche sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
-\infty &\leq \Pi_x \leq \infty \\
-\infty &\leq \varpi_y \leq \infty \\
-\infty &\leq \Pi_z \leq \infty & \xi^2 \geq 1 \\
\left. \begin{aligned} -\infty &\leq \Pi_z \leq -|\varpi_{crit}| \\ |\varpi_{crit}| &\leq \Pi_z \leq \infty \end{aligned} \right\} & \xi^2 < 1.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Die Einschränkung für Π_z rührt von der Gleichung (5.18) her und führt bei $\Pi_z^2 = \varpi_{crit}^2$ zu einer Lücke zwischen den beiden Zweigen.

Die allgemeine Struktur der Maxwellgleichungen kann nun in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} (1 - \xi^2) &= -4\pi \sum_a \frac{q_a n_a}{m_a c} (m_a c)^3 \int d\Pi_x d\varpi_y d\Pi_z (\Pi_x - z_a A) \frac{|\xi|}{|(1 - \xi^2)\gamma - \Pi_z|} f_a, \\
0 &= 4\pi \sum_a \frac{q_a n_a}{m_a c} (m_a c)^3 \int d\Pi_x d\varpi_y d\Pi_z \frac{\varpi_y |\xi|}{|(1 - \xi^2)\gamma - \Pi_z|} f_a, \\
0 &= 4\pi \sum_a \frac{q_a n_a}{m_a c} (m_a c)^3 \int d\Pi_x d\varpi_y d\Pi_z \frac{\varpi_z |\xi|}{|(1 - \xi^2)\gamma - \Pi_z|} f_a, \\
0 &= 4\pi \sum_a q_a n_a (m_a c)^3 \int d\Pi_x d\varpi_y d\Pi_z \frac{|\xi| \gamma}{|(1 - \xi^2)\gamma - \Pi_z|} f_a,
\end{aligned} \tag{5.27}$$

geschrieben werden, wobei $f_a = f_a(\Pi_x, \varpi_y, \Pi_z)$.

5.1.3 Eine selbstkonsistente Lösung

Bis jetzt konnte für das Gleichungssystem (5.27) als einzige Lösung

$$f_a(\Pi_x, \varpi_y, \Pi_z) = \frac{F_a(\Pi_x, \varpi_y^2) \delta(\Pi_z)}{(m_a c)^2}, \tag{5.28}$$

gefunden werden. Diese Lösung hat die Eigenschaft, die Gleichungen (5.27b)–(5.27d) automatisch zu erfüllen. Durch diese Verteilungsfunktion werden Teilchen beschrieben, die sich mit einem festen konstanten Impuls, gegeben durch $\Pi_z = 0$, entlang der Ausbreitungsrichtung der Wellen (parallel zur z -Achse) bewegen. Man spricht auch von einem *Bulk* von Teilchen. Zudem darf der Impuls in Richtung der magnetischen Fluktuationen (y -Achse) nur eine „symmetrische“ Funktion sein. Wegen $\Pi_z = 0$ folgt sofort die Bedingung $\xi^2 > 1$. Aufgrund der speziellen Form (5.28) sind die entsprechenden ϖ_z und γ wegen der Gleichungen (5.12) und (5.16) bestimmt durch

$$\varpi_z = E_\perp (\xi^2 - 1)^{-1/2} \tag{5.29}$$

und

$$\gamma = |\xi| E_\perp (\xi^2 - 1)^{-1/2}, \tag{5.30}$$

mit der Definition der „zur z -Achse senkrechten“ Energie $E_\perp = [1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2]^{1/2}$. Wegen $\xi^2 > 1$ gilt $\varpi_z/\gamma = |\xi|^{-1} < 1$, und der Parameter ξ erhält eine physikalische Bedeutung. Der Kehrwert ξ^{-1} stellt die relative Bulkgeschwindigkeit $v_z \equiv V_b = c/|\xi| < c$ der Teilchen entlang der Wellenausbreitung dar.

Mit der Normierung

$$\int d\Pi_x d\varpi_y F_a(\Pi_x, \varpi_y^2) = 1 \tag{5.31}$$

besitzt Gleichung (5.27a) die Form

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} = +4\pi \sum_a q_a n_a \int d\Pi_x d\varpi_y \frac{\Pi_x - z_a A}{E_\perp} F_a. \tag{5.32}$$

Die rechte Seite von Gleichung (5.32) kann dann folgendermaßen geschrieben werden,

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} = -\frac{\partial}{\partial A} \left(4\pi \sum_a n_a m_a c^2 \int d\Pi_x d\varpi_y E_\perp F_a \right), \tag{5.33}$$

was einfach integriert werden kann, wenn man beide Seiten mit $(\partial A/\partial\zeta)$ multipliziert,

$$\begin{aligned} 0 &= (\xi^2 - 1)^{3/2} \frac{\partial^2 A}{\partial\zeta^2} \frac{\partial A}{\partial\zeta} + \frac{\partial A}{\partial\zeta} \frac{\partial}{\partial A} \left(4\pi \sum_a n_a m_a c^2 \int d\Pi_x d\varpi_y E_\perp F_a \right) \\ &= \frac{(\xi^2 - 1)^{3/2}}{2} \frac{\partial}{\partial\zeta} \left(\frac{\partial A}{\partial\zeta} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial\zeta} \left(4\pi \sum_a n_a m_a c^2 \int d\Pi_x d\varpi_y E_\perp F_a \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Dieses kann sofort integriert werden zu

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial\zeta} \right)^2 + 8\pi \sum_a n_a m_a c^2 \int d\Pi_x d\varpi_y E_\perp F_a = \text{const.} \quad (5.35)$$

Weil $\partial A/\partial\zeta$ nicht nach Unendlich streben kann (da die rechte Seite der Gleichung (5.35) konstant ist), muss es ein Maximum A_{max} des Vektorpotentials² geben, für welches $\partial A/\partial\zeta = 0$ gilt. Man kann also schreiben

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\zeta} \right)^2 = \frac{8\pi}{(\xi^2 - 1)^{3/2}} \sum_a n_a m_a c^2 \int d\Pi_x d\varpi_y (E_\perp(A_{max}, \varpi) - E_\perp(A, \varpi)) F_a. \quad (5.36)$$

5.2 Exakte Lösung

Die allgemeine Struktur der rechten Seite von Gleichung (5.36) als Funktion von $A(\zeta)$ erfordert die Kenntnis einer bestimmten Form der Verteilungsfunktion $F_a(\Pi_x, \varpi_y)$, um das Integral über $d\Pi_x d\varpi_y$ berechnen zu können. Für asymptotische Darstellungen (wenn wegen der Groß- und/oder Kleinheit von A_{max} und A die Möglichkeiten der Reihenentwicklung gegeben sind) lassen sich Näherungslösungen für Gleichung (5.36) finden, ohne für die Verteilung $F_a(\Pi_x, \varpi_y)$ bestimmte Annahmen zu machen. Dieser Ansatz wird später in der Arbeit verfolgt. Allerdings wäre es nicht ganz zufriedenstellend, wenn man nur asymptotische Näherungen besäße, ohne sie mit bestimmten exakten Lösungen vergleichen zu können.

Daher werden im folgenden Abschnitt drei solcher exakten Lösungen betrachtet, die das Verhalten des Vektorpotentials $A(\zeta)$ auf einfache Quadraturen zurückführen. Für jede Teilchensorte a setze man die Verteilung $F_a(\Pi_x, \varpi_y)$ wie folgt an

$$F_a = \frac{1}{2} \delta(\Pi_x - \Pi_1) [\delta(\varpi_y - \Pi_2) + \delta(\varpi_y + \Pi_2)]. \quad (5.37)$$

Dieser Ansatz erhält die Symmetrie von F_a unter der Transformation $\varpi_y \leftrightarrow -\varpi_y$. Π_1 und Π_2 sind Konstanten für jede Teilchensorte.

So hat Gleichung (5.36) die Form

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial\zeta} \right)^2 &= 8\pi \sum_a n_a m_a c^2 \left(\left[1 + (\Pi_{1,a} - z_a A_{max})^2 + \Pi_{2,a}^2 \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \left[1 + \Pi_{2,a}^2 + (\Pi_{1,a} - z_a A)^2 \right]^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

²Im Allgemeinen ist das Vektorpotential stets nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird A_{max} mit Hilfe des maximalen Magnetfeldes definiert. Da es sich bei A_{max} (und daher auch B_{max}) um eine Integrationskonstante handelt, muss sie entweder durch eine unabhängige Beschreibung auf analytische Weise oder als Parameter durch Messungen/Simulationen gewonnen werden.

Die Vereinfachung von Gleichung (5.38) in eine Form mit einfachen Quadraturen wird in den nächsten Abschnitten nacheinander für drei Fälle behandelt:

1. bewegliche Elektronen und unbewegliche Ionen,
2. bewegliche Elektronen und Positronen,
3. bewegliche Elektronen und Ionen.

5.2.1 Bewegliche Elektronen und unbewegliche Ionen

In diesem Fall reduziert sich Gleichung (5.38) auf die Elektronenkomponente. Die unbeweglichen Ionen dienen nur als positiv geladenes Hintergrundmedium, um auf großer Skala die Quasineutralität des Plasma zu gewährleisten. Es gilt also

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)^2 = 8\pi n_e m_e c^2 \left(\left[1 + (\Pi_{1,e} - z_e A_{max})^2 + \Pi_{2,e}^2 \right]^{1/2} - \left[1 + (\Pi_{1,e} - z_e A)^2 + \Pi_{2,e}^2 \right]^{1/2} \right). \quad (5.39)$$

Weitere Transparenz dieser Gleichung kann mithilfe der Transformation $z_e A \equiv y + \Pi_{1,e}$ erreicht werden,

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 = \frac{8\pi n_e e^2}{m_e c^2} \left([1 + \Pi_{2,e}^2 + y_{max}^2]^{1/2} - [1 + \Pi_{2,e}^2 + y^2]^{1/2} \right), \quad (5.40)$$

wobei $y_{max} = z_e A_{max} - \Pi_{1,e}$. Nun führt

$$1 + \Pi_{2,e}^2 + y^2 = u^2 (1 + \Pi_{2,e}^2 + y_{max}^2) \equiv u^2 \Phi^2 \quad (5.41)$$

mit $u = 1$ bei $y = y_{max}$ auf eine Differentialgleichung der Variablen $u > 0$,

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \frac{u^2}{(u^2 - \rho^2)(1 - u)} \left(\frac{du}{d\zeta} \right)^2 = \frac{8\pi n_e e^2}{m_e c^2 \Phi}. \quad (5.42)$$

Hierbei wurde die Abkürzung $\rho^2 = (1 + \Pi_{2,e}^2)/\Phi^2 \leq 1$ eingeführt. Das Intervall der Integration über u ist $0 < \rho \leq u \leq 1$.

Führt man nun die Skalenlänge L_e mittels

$$L_e^2 = \frac{m_e c^2 \Phi (\xi^2 - 1)^{3/2}}{8\pi n_e e^2} \quad (5.43)$$

ein, so erhält man mit Einführung der dimensionslosen Länge $x = \zeta/L_e$

$$\frac{u}{[(u^2 - \rho^2)(1 - u)]^{1/2}} \frac{du}{dx} = \pm 1. \quad (5.44)$$

So kann das Vektorpotential aus einer einfachen Quadratur bestimmt werden, welche nur von einem einzigen Parameter ρ abhängt. Der Koordinatenursprung ist so gewählt, dass $x = 0$ bei $(du/dx) = 0$. Man beachte zudem, dass Gleichung (5.44) neben $\rho \leq u \leq 1$

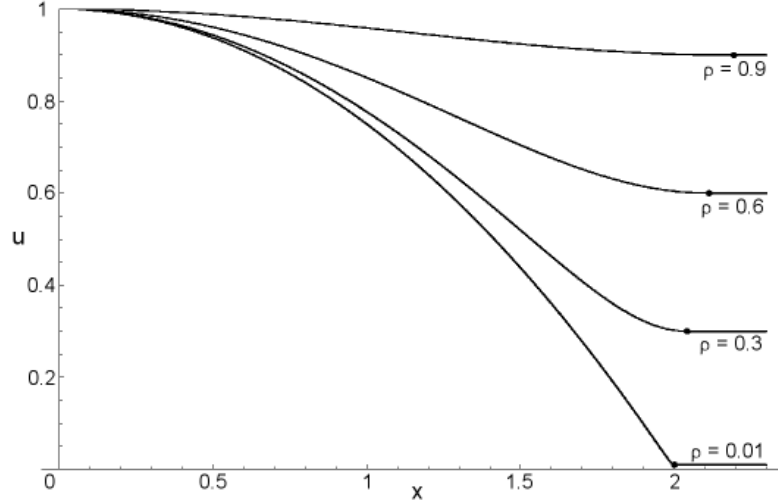


Abbildung 5.1: Verlauf des modifizierten Potentials $u(x)$ in Abhängigkeit vom Parameter ρ . Mit wachsendem ρ wird u flacher. Die Situation $\rho \rightarrow 0$ korrespondiert mit größer werdendem A_{max} und zeigt die Kompression des Potentials zu kleinen Bereichen des Ortes x . Die Punkte geben jeweils die Position an, wo $u = \rho$ gilt.

einen zweiten Lösungszweig $u \geq \rho \geq 1$ besitzen könnte. Wegen der Definition von ρ gilt jedoch die Einschränkung $\rho \leq 1$.

Sogar einfache Tabellenkalkulationsprogramme erlauben es, die Abhängigkeit der Variablen u von x für verschiedene Parameter $\rho < 1$ darzustellen, wie in Abbildung 5.1 gezeigt.

Analog zu der gerade benutzten Vorgehensweise kann auch das Magnetfeld $(\partial A/\partial \zeta) \equiv B$ normiert werden;

$$(z_e B)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 \equiv (1 - u)\Phi^2/L_e^2, \quad (5.45)$$

so dass das maximale Magnetfeld B_{max} bei $u = \rho$ auftaucht und gegeben ist durch

$$B_{max}^2 = (m_e c^2 / e_e)^2 (1 - \rho)\Phi^2 / L_e^2 = \frac{8\pi n_e m_e c^2 (1 - \rho)\Phi}{(\xi^2 - 1)^{3/2}} \quad (5.46)$$

Dann erhält man mit $b = B/B_{max}$ den einfachen Ausdruck für die magnetische Feldenergiedichte

$$b^2 = (1 - u)/(1 - \rho) \quad (5.47)$$

in $1 \geq u \geq \rho$. Diese normierte Energiedichte ist in Abbildung 5.2 zu sehen. Wegen der (Punkt-)Symmetrie der Kurve ist nur der Bereich $x \geq 0$ dargestellt, man beachte aber, dass B ungerade in ζ (oder x) ist.

Diese Ergebnisse sind wegen $E \equiv \xi(\partial A/\partial \zeta) = \xi B$ einfach auf das elektrische Feld übertragbar. Man erhält daher

$$E_{max}^2 = 8\pi n_e m_e c^2 (1 - \rho)\Phi^2 \xi^2 / (\xi^2 - 1)^{3/2} = \xi^2 B_{max}^2 \quad (5.48)$$

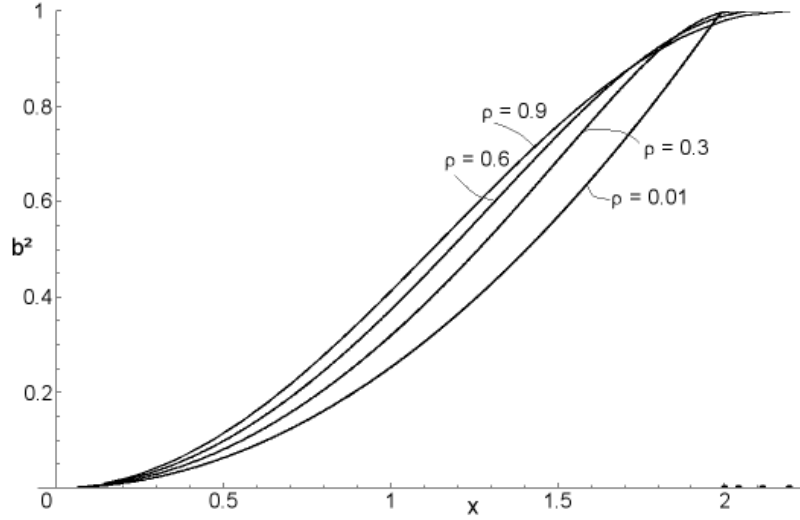


Abbildung 5.2: Die normierte magnetische Feldenergiedichte $b^2(x)$ in Abhängigkeit von ρ . Je höher ρ , desto breiter ist b^2 in x . Die Situation $\rho \rightarrow 0$ korrespondiert mit größer werdendem A_{max} und somit ist das Magnetfeld dann in x komprimiert.

und für das normierte Feld gilt $\epsilon \equiv E/E_{max} = (\xi B)/(\xi B_{max}) = b$. Also ist der relative Verlauf des elektrischen und magnetischen Feldes gleich, jedoch kann man einen Unterschied bei der Betrachtung der Maximalwerte sehen: Während B_{max} bei steigenden ξ proportional zu $\xi^{-3/2}$ kleiner wird, nimmt E_{max} dagegen nur mit $\xi^{-1/2}$ ab. Die weitere Diskussion der räumlichen und zeitlichen Skalierung wird später im Abschnitt 5.3.5 dieser Arbeit betrachtet.

Es sei erwähnt, dass Gleichung (5.44) analytisch als Summe elliptischer Integrale gelöst werden kann, siehe Anhang C.4. Die Lösung lautet

$$-\frac{2\rho}{\sqrt{1+\rho}}F(\arcsin X, k) + 2\sqrt{1+\rho}E(\arcsin X, k) = \mp x, \quad (5.49)$$

mit $k^2 = (1-\rho)/(1+\rho)$ und

$$X = \frac{\mu}{\sqrt{1-\rho}} = \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-\rho}} = |b| = |\epsilon|. \quad (5.50)$$

5.2.2 Elektronen und Positronen

Betrachtet man den Fall eines Elektron-Positron-Plasmas, so nimmt Gleichung (5.38) die Form

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 = 8\pi n m c^2 \left(\left[1 + \Pi_{2,p}^2 + (\Pi_{1,p} + z A_{max})^2 \right]^{1/2} \right. \\ \left. + \left[1 + \Pi_{2,e}^2 + (\Pi_{1,e} - z A_{max})^2 \right]^{1/2} \right. \\ \left. - \left[1 + \Pi_{2,p}^2 + (\Pi_{1,p} + z A)^2 \right]^{1/2} \right) \end{aligned}$$

$$- \left[1 + \Pi_{2,e}^2 + (\Pi_{1,e} - zA)^2 \right]^{1/2} \quad (5.51)$$

an, wobei angenommen wurde, dass die Teilchenzahldichten gleich sind, wie es in Gleichung (5.27d) gefordert wird. $\Pi_{1,p}(\Pi_{1,e})$ und $\Pi_{2,p}(\Pi_{2,e})$ beziehen sich jeweils auf Positronen und Elektronen, und es gilt $z = e/(mc^2)$.

Wählt man nun die Konstanten so, dass $\Pi_{1,p} = -\Pi_{1,e}$ und $\Pi_{2,p}^2 = \Pi_{2,e}^2$ gilt³, so besitzt Gleichung (5.51) exakt die gleiche Struktur wie Gleichung (5.39), wenn man 8π durch 16π ersetzt. Die Ergebnisse des vorherigen Kapitels sind also übertragbar, wenn man die Skalenlänge L_e um den Faktor $2^{1/2}$ auf $L_e/2^{1/2}$ verkleinert. Alle anderen Größen bleiben im Vergleich zu dem Fall, dass nur bewegliche Elektronen betrachtet wurden, unverändert. Die normierten Lösungen für ϵ , b und u ändern sich im x -Raum nicht. Die Größe des maximalen elektrischen und magnetischen Feldes erhöht sich um den Faktor $2^{1/2}$, während die physikalische Länge ζ dementsprechend um den Faktor $2^{1/2}$ verringert wird.

5.2.3 Elektronen und Ionen

Neben einem Elektron-Positron-Plasma wird nun auch der Fall eines Elektron-Ion-Plasmas betrachtet. In dieser Situation wird Gleichung (5.38) zu

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)^2 = & 8\pi n c^2 \left(m_i \left[1 + \Pi_{2,i}^2 + (\Pi_{1,i} + \mu |z_e| A_{max})^2 \right]^{1/2} \right. \\ & + m_e \left[1 + \Pi_{2,e}^2 + (\Pi_{1,e} - z_e A_{max})^2 \right]^{1/2} \\ & - m_i \left[1 + \Pi_{2,i}^2 + (\Pi_{1,i} + \mu |z_e| A)^2 \right]^{1/2} \\ & \left. - m_e \left[1 + \Pi_{2,e}^2 + (\Pi_{1,e} - z_e A)^2 \right]^{1/2} \right). \quad (5.52) \end{aligned}$$

Wiederum sind die Dichten für die Elektronen und Ionen gleich, wie es für Gleichung (5.27d) benötigt wird. Zudem führt man $\mu = m_e/m_i$ ein, und $\Pi_{1,i}(\Pi_{1,e})$ und $\Pi_{2,i}(\Pi_{2,e})$ beziehen sich jeweils auf die Ionen oder Elektronen.

Ähnlich wie im Falle des Elektron-Positron-Plasmas kann man die Konstanten geschickt wählen⁴, $\Pi_{1,i} = -\mu \Pi_{1,e}$ und $1 + \Pi_{2,i}^2 = \mu^2(1 + \Pi_{2,e}^2)$. Dann entspricht Gleichung (5.52) wiederum Gleichung (5.39), wenn man 8π durch 16π ersetzt. Die normierten Lösungen bleiben erhalten, L_e wird zu $L_e/2^{1/2}$ und die Maxima des elektrischen und magnetischen Feldes erhöhen sich um $2^{1/2}$.

5.2.4 Schlussfolgerung

Diese drei sehr einfachen Beispiele zeigen den exakten Verlauf des Potentials sowie der elektrischen und magnetischen Felder abhängig nur von einem „freien“ Parameter, ρ .

Jedoch wohnt diesen exakten Lösungen ein fundamentales Problem inne, welches von dem spezifischen Ansatz für die Verteilungsfunktion F_a stammt. Am deutlichsten ist dieses Problem anhand des Magnetfeldes (5.47) zu sehen. Die Schwierigkeit ist, dass das

³Dieses bedeutet, dass die Impulse entgegengesetzt gleich sind. Es ist intuitiv verständlich, dass dieses eine vernünftige Annahme ist.

⁴Auch hier kann man das als ungefähr entgegengesetzt gleiche Impulse pro Masse verstehen.

Feld von $u = 1$ nach $u = \rho$ ansteigt und dann bei $u = \rho$ sprunghaft auf Null zurückgeht. Dieses Verhalten ist unphysikalisch: Man sollte vermuten, dass das Feld am „Ende“ der nichtlinearen Wellenstruktur ($u = \rho$) stetig gegen Null strebt, dieses ist jedoch nicht der Fall. Die Ursache dieser Eigenheit der exakten Lösung liegt in der Annahme einer δ -förmigen Verteilung der Teilchen.

Das Fallenlassen dieses Ansatzes sollte ein physikalisch sinnvollerer Verhalten des Magnetfeldes gestatten; jedoch lassen sich in diesem Fall die Impulsintegrale im Allgemeinen nicht mehr so einfach lösen. Einen analytisch behandelbaren Zugang gestatten jedoch asymptotische Näherungen; dieses Lösungsschema soll im folgenden Abschnitt verfolgt werden.

5.3 Asymptotische Lösungen

Obwohl die exakten Lösungen, welche im vorherigen Abschnitt hergeleitet wurden, einige Informationen über die Struktur der selbstkonsistenten Wellen liefern, haben sie Nachteile. So ist ihre größte Beschränkung, dass die Lösungen an wenige spezifische und sehr einfache Verteilungsfunktionen gebunden sind. Um das Verhalten einer ganzen Klasse von Verteilungsfunktionen zu beschreiben, könnte man diese Verteilungen auf eine allgemeinere Form bringen und dann die Integrale über Π_x und ϖ_y in Gleichung (5.36) lösen. Jedoch stören hierbei die Wurzelterme $E_\perp(A_{max}, \varpi)$ und $E_\perp(A, \varpi)$ in Verbindung mit der Verteilungsfunktion F_a , denn diese Integrale sind analytisch nicht mehr lösbar.

Alternativ soll im Folgenden eine andere Technik verwendet werden. Sie beruht auf einer Reihenentwicklung dieser Wurzelausdrücke, so dass die einzelnen Ordnungen dieser Entwicklung weitaus einfacher berechenbar sind. Die entstehenden Integrale beinhalten nicht mehr die Wurzelausdrücke, sondern nur noch Impulsmomente der Verteilungsfunktion. Den Preis, den man für diese Näherung zahlt, ist freilich, dass man nur noch für bestimmte Bereiche des Vektorpotentials \vec{A} Lösungen hat⁵.

Dieses Kapitel behandelt im Weiteren die drei möglichen asymptotischen Fälle:

1. A_{max} und A jeweils groß;
2. A_{max} groß, aber A klein;
3. A_{max} und A beide klein,

wobei stets $0 \leq A \leq A_{max}$ angenommen wird. Die genaue Bedeutung von „groß“ und „klein“ wird ebenfalls mit Hilfe von Integralen über die Teilcheneigenschaften in den einzelnen Abschnitten erläutert.

Formal jedoch bedeutet „ A_{max} ist groß“, dass $|z_a A_{max}| \gg |p_j|$ in der „senkrechten“ Energie $E_\perp = \sqrt{1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A_{max})^2}$, wobei $p_j \in [\Pi_x, \varpi_y]$; und entsprechend gilt

⁵An dieser Stelle sollte der Leser innehalten und sich noch einmal die Kernaussage dieses Absatzes klarmachen: Die einzige mathematische Näherung, die durchgeführt wird, ist die Reihenentwicklung der Wurzeln $E_\perp(A_{max}, \varpi)$ und $E_\perp(A, \varpi)$. An die Verteilungsfunktion der Teilchen F_a , welche sich aus der Definition (5.28) ergibt, werden keinerlei Anforderungen gestellt! Es wird sich zeigen, dass die Eigenschaften der Solitonen dann aus den Momenten dieser Verteilungsfunktion allgemein angegeben werden können. Daher deckt die folgende Betrachtung eine sehr große Bandbreite an möglichen Wellen ab; wählt man sich eine Verteilungsfunktion, so sind die Eigenschaften des Solitons im Prinzip festgelegt und man kann diese einfach angeben. Beispielsweise hängt der in Abschnitt 5.3.1 eingeführte Parameter R (abgesehen von messbaren Größen) nur von der Verteilungsfunktion F_a ab.

$|z_a A_{max}| \ll |p_j|$ für „ A_{max} ist klein“. Der Einwand, dass die Impulse p_j über den gesamten Impulsraum integriert werden und dass daher diese Annahmen nicht überall gültig sein können, mag zunächst berechtigt erscheinen. Im Falle „ A_{max} klein“ können zwar die Impulse p_j betragsmäßig kleiner als ein beliebig kleines Potential $z_a A_{max}$ werden, jedoch gilt trotzdem $|z_a A_{max}| \ll 1$ und man darf E_\perp weiterhin für kleine $z_a A_{max}$ entwickeln. Im Falle „ A_{max} groß“ sorgt die Verteilungsfunktion dafür, dass für größere p_j die Reihenentwicklung von E_\perp kaum noch zum Integral beiträgt, und somit die Abweichung bei $|p_j| \geq |z_a A_{max}|$ vernachlässigt werden kann.

5.3.1 A_{max} und A beide groß

Man betrachte zunächst auf der rechten Seite von Gleichung (5.36) den Faktor

$$H(A_{max}) = 8\pi \sum_a n_a m_a c^2 \int d^2\varpi F_a(\Pi_x, \varpi_y) \left[1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A_{max})^2\right]^{1/2}. \quad (5.53)$$

Dieser lässt sich mit $y_a \equiv (z_a A_{max})^{-1}$ und $|z_a| m_a c^2 = |q_a|$ umschreiben,

$$G(A_{max}) = \frac{H(A_{max})}{A_{max}} = 8\pi \sum_a n_a |q_a| \int d^2\varpi F_a \left[y_a^2 (1 + \varpi_y^2) + (1 - y_a \Pi_x)^2\right]^{1/2}. \quad (5.54)$$

Eine Reihenentwicklung von $G(A_{max})$, sortiert nach Potenzen von y_a , liefert dann

$$G(A_{max}) = G_0 + \frac{G_1}{A_{max}} + \frac{G_2}{2A_{max}^2} + \frac{G_3}{6A_{max}^3} + \frac{G_4}{24A_{max}^4} + \dots \quad (5.55)$$

mit

$$\begin{aligned} G_0 &= 8\pi \sum_a n_a |q_a| \int d^2\varpi F_a = 8\pi \sum_a n_a |q_a| > 0 \\ G_1 &= -8\pi \sum_a n_a |q_a| z_a^{-1} \int d^2\varpi F_a \Pi_x \\ G_2 &= 8\pi \sum_a n_a |q_a| z_a^{-2} \int d^2\varpi F_a (1 + \varpi_y^2) > 0 \\ G_3 &= 24\pi \sum_a n_a |q_a| z_a^{-3} \int d^2\varpi F_a (1 + \varpi_y^2) \Pi_x \\ G_4 &= -24\pi \sum_a n_a |q_a| z_a^{-4} \int d^2\varpi F_a (1 + \varpi_y^2) (1 + \varpi_y^2 - 4\Pi_x^2) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Man beachte, dass $G_1 = G_3 = 0$, falls $F_a(\Pi_x, \varpi_y)$ gerade in Π_x . Für $H(A)$ führt eine ähnliche Argumentation *mutatis mutandis* zu einem zu Gleichung (5.57) identischen Ausdruck, in dem lediglich A_{max} durch A ersetzt wird.

Man hat zunächst

$$H(A) = AG_0 + G_1 + \frac{G_2}{2A} + \frac{G_3}{6A^2} + \frac{G_4}{24A^3} + \dots \quad (5.57)$$

und bringt Gleichung (5.36) anschließend in die Form

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta}\right)^2 &\simeq G_0(A_{max} - A) - \frac{1}{2}G_2 \left[\frac{1}{A} - \frac{1}{A_{max}}\right] \\ &= G_0(A_{max} - A) \left(A - \frac{G_2}{2G_0 A_{max}}\right) / A. \end{aligned} \quad (5.58)$$

An dieser Stelle stellt sich die Frage nach der Gültigkeit dieser Reihenentwicklung(en). Offenbar stellt Gleichung (5.55) nur dann eine gute Näherung von G dar, falls

$$G_0 \gg \max \left\{ \frac{G_1}{A_{max}}, \frac{G_2}{2A_{max}^2}, \frac{G_3}{6A_{max}^3}, \frac{G_4}{24A_{max}^4} \right\}. \quad (5.59)$$

Hätte man nur diese Entwicklung, so legte diese Ungleichung den Ausdruck „groß“ für A_{max} fest. Zum Beispiel benötigte man für eine symmetrische Teilchenverteilung mit $G_1 = G_3 = 0$

$$A_{max}^{-1} \ll \min \{ (2G_0/G_2)^{1/2}, (24G_0/|G_4|)^{1/4} \} \equiv \mathcal{M}, \quad (5.60)$$

wohingegen für eine asymmetrische Verteilungsfunktion ($G_1 \neq 0 \neq G_3$)

$$A_{max}^{-1} \ll \min \{ \mathcal{M}, G_0/|G_1|, (6G_0/|G_3|)^{1/3} \} \equiv \mathcal{N} \quad (5.61)$$

erforderlich würde. Man beachte jedoch, dass bei der Reihenentwicklung (5.58) die Ungleichung (5.59) nicht zwingend erfüllt sein muss, da es sich hierbei um eine Differenz zweier entwickelter Funktionen handelt. Es muss nur $G_0(A_{max} - A) \gg \frac{1}{2}G_2(A^{-1} - A_{max}^{-1})$ gelten, was wiederum die Bedingung

$$A_{max}^2 \geq AA_{max} \gg \frac{G_2}{2G_0} \quad (5.62)$$

zur Folge hat.

Mit der Skalierung des Potentials, $A = uA_{max}$, erhält man aus Gleichung (5.58) die dimensionslose quadratische Differentialgleichung⁶

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \frac{(1-u)(u-R^2)}{u} \quad (5.63)$$

mit

$$R^2 \equiv \frac{G_2}{2G_0A_{max}^2} = \left(\sum_a \frac{n_a|q_a|}{2z_a^2A_{max}^2} \int d^2\varpi F_a(1 + \varpi_y^2) \right) / \left(\sum_a n_a|q_a| \right) \quad (5.64)$$

und $\zeta = xL$, wobei

$$L^2 \equiv (\xi^2 - 1)^{3/2} A_{max}/G_0. \quad (5.65)$$

Gleichung (5.63) besitzt nun eine geeignete Form, um die gewünschten physikalischen Eigenschaften der nichtlinearen Wellenstrukturen beschreiben zu können.

Zunächst sei bemerkt, dass ähnlich zur Argumentation in Abschnitt 5.2.1 die rechte Seite von Gleichung (5.63) zwei Lösungszweige besitzt, da die linke Seite dieser Gleichung stets positiv ist. Deshalb gibt es nur Lösungen mit $u, R < 1$ oder $u, R > 1$. Wegen der Definition $u = A/A_{max} \leq 1$ gilt jedoch die Einschränkung $R \leq 1$, was ebenfalls durch die Reihenentwicklung (5.55) und der Definition (5.64) motiviert wurde.

Des Weiteren ist leicht zu sehen, dass die rechte Seite von Gleichung (5.63) ein Maximum bei $u = R$ hat. Wegen

$$(du/dx)_{max}^2 = (1-R)^2 \quad (5.66)$$

⁶Man vergleiche die auffallende Ähnlichkeit dieser Gleichung für die Näherungen mit der exakten Lösung 5.44.

erhält man sofort das Maximum des Magnetfeldes gemäß

$$B_{max}^2 = (dA/d\zeta)_{max}^2 = (1 - R)^2 A_{max}^2 / L^2. \quad (5.67)$$

Mit $b = B/B_{max}$ gilt also für das Feld

$$b^2 = \frac{(1 - u)(u - R^2)}{u(1 - R)^2}. \quad (5.68)$$

Der höchste Wert des Magnetfeldes tritt bei $u = R$ auf, was einem physikalischen Ort $x_{max} < x_{end}$ entspricht. x_{end} sei als derjenige Ort festgelegt, bei dem $u = R^2 < R$. Dieser ist dadurch ausgezeichnet, dass hier das Magnetfeld exakt den Wert Null erreicht. Man kann also vom Endpunkt der nichtlinearen Welle oder des Solitons reden, an dem das Magnetfeld physikalisch korrekt verschwindet, im Gegensatz zu der exakten Lösung in Kapitel 5.2

Es sei noch erwähnt, dass R durch die Verteilungsfunktion und die Dichte n_a der Teilchen im Plasma bereits eindeutig bestimmt ist. Wählt man sich eine bestimmte Verteilung, so legt man auf diese Weise den Solitonparameter R fest. R ist also keineswegs frei wählbar.

Es fällt außerdem auf, dass für $R \rightarrow 0$ die hier beschriebene Struktur für b^2 sich derjenigen für die exakte nichtlineare Welle, gegeben durch (5.47), annähert. Jedoch ist das Maximum des Magnetfeldes bei x_{max} stets kleiner als das Ende des Solitons bei x_{end} , auch wenn ersteres sich letzterem ebenfalls nähert: Wegen $R > 0$ bleibt der Punkt mit $u = R$ immer bei einem kleineren x als dem Endpunkt der nichtlinearen Welle mit $u = R^2$.

5.3.2 Numerische Darstellung des nichtlinearen Verhaltens

Nun soll in diesem Abschnitt die nichtlineare Lösung der Gleichung (5.63) grafisch dargestellt werden. Gleichung (5.63) kann in eine Quadratur überführt werden und hat dann die Form

$$\pm x + C = \int_{R^2}^u \frac{du' u'^{1/2}}{(1 - u')^{1/2}(u' - R^2)^{1/2}} \equiv I(u, R). \quad (5.69)$$

Wegen $u = 1$ bei $x = 0$ ist die Integrationskonstante C festgelegt durch

$$C = I(1, R) = \int_{R^2}^1 \frac{du' u'^{1/2}}{(1 - u')^{1/2}(u' - R^2)^{1/2}} \quad (5.70)$$

und so ergibt sich für $x > 0$ die Lösung

$$x = I(1, R) - I(u, R). \quad (5.71)$$

Es ist zu beachten, dass in dieser Form die Rollen der abhängigen und der unabhängigen Variablen vertauscht sind. Zu der Formulierung $x(u)$ aus Gleichung (5.71) muss die Umkehrfunktion $u(x)$ gebildet werden. Der Versuch, die Integrale analytisch zu lösen, führt auf äußerst lange und komplizierte Ausdrücke. An eine analytische Form der Umkehrfunktion ist somit gar nicht zu denken. Fasst man aber $x(u)$ als Parametrisierung auf, so können für die grafische Darstellung geeignete Wertepaare $(x(u), u)$ numerisch bestimmt

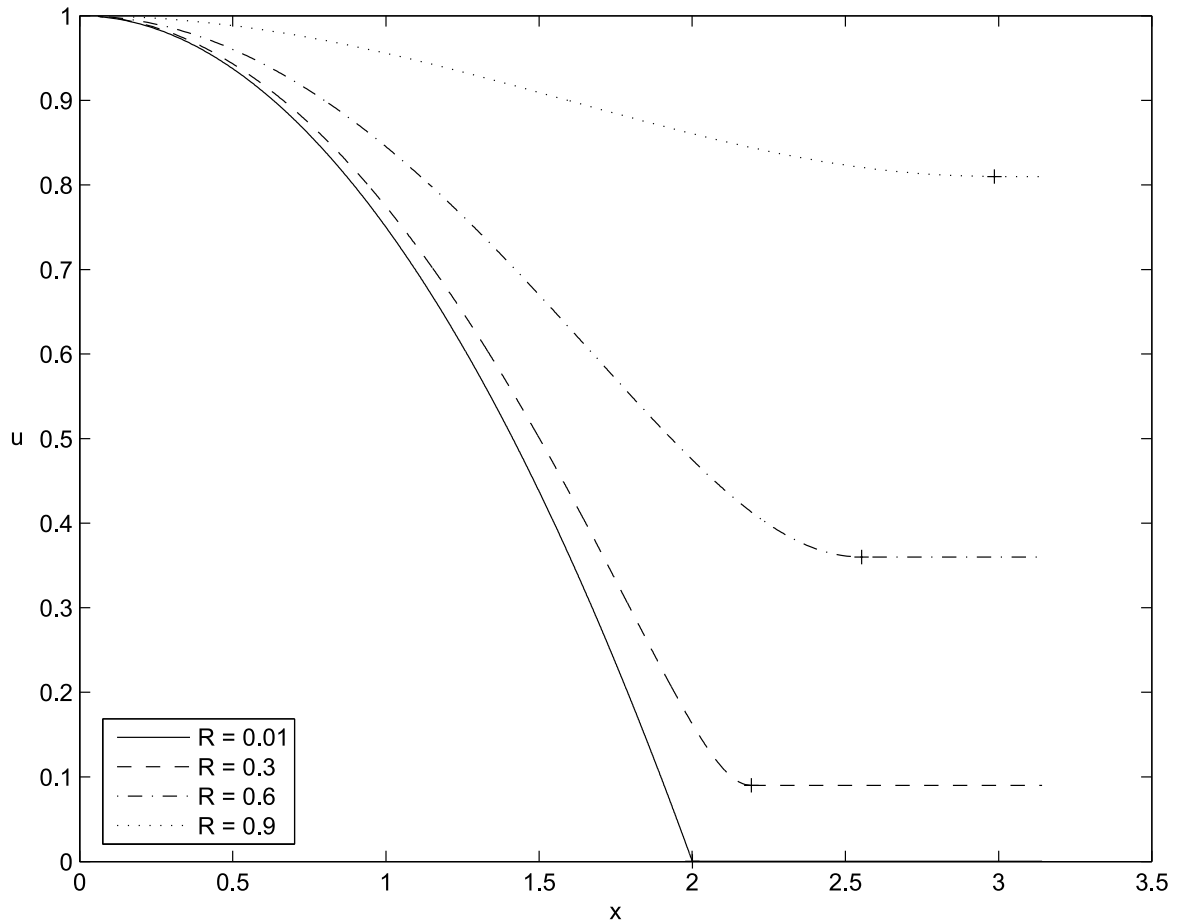


Abbildung 5.3: Verlauf des normierten Vektorpotentials $u(x)$ für verschiedene Werte des Parameters R . u nimmt bei x_{end} – angezeigt durch die Kreuze – einen konstanten Wert an. Des Weiteren steigt u mit wachsendem R . Die Situation $R \rightarrow 0$ entspricht mit großen Amplituden A_{max} und zeigt die Stauchung des Potentials zu kleinen Werten x .

und aufgetragen werden. Auf diese Weise erhält man Abbildung 5.3. Man beachte, dass u symmetrisch bezüglich des Austauschs $x \leftrightarrow -x$ ist.

Aus Gleichung (5.71) erhält man in Verbindung mit (5.68) den Verlauf der normierten Magnetfeldenergiedichte b^2 , siehe Abbildung 5.4. Das normierte Feld b lässt sich sehr leicht daraus ableiten und ist in Abbildung 5.5 zu sehen.

Es lohnt sich ebenfalls, das Verhalten der dimensionslosen Längen x_{max} und x_{end} zu betrachten. Es fällt auf, dass für $R \rightarrow 0$ diese beiden Größen von unterschiedlichen Seiten gegen $x = 2$ streben. Dieser Wert würde exakt für $R = 0$ erreicht, doch ist dies unphysikalisch, da es einerseits einer unendlich hohen Amplitude A_{max} entspräche. Andererseits würde dann der Ort der maximalen Feldstärke paradoxerweise mit dem der verschwindenden Feldstärke zusammenfallen.

Für numerische Berechnungen sind folgende Näherungen nützlich, welche rein empirisch gewonnen wurden,

$$x_{max} \simeq 2(1 - R) + \frac{\pi}{2}R^{8/7},$$

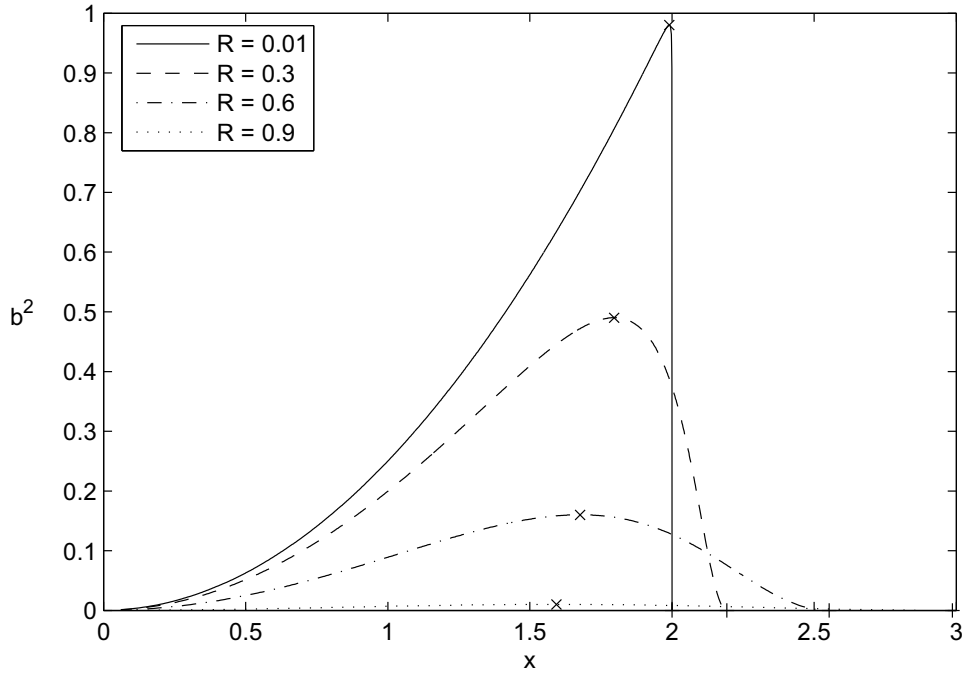


Abbildung 5.4: Die normierte Magnetfeldenergiedichte $b^2(x)$ für verschiedene Werte des Parameters R . Es ist deutlich zu sehen, dass das Maximum von b^2 umso niedriger ausfällt, je größer R ist und desto größer ist der Endpunkt x_{end} des Solitons, wo das Feld verschwindet. Mit $R \rightarrow 0$ (entsprechend einem ansteigenden Maximalwert der Amplitude A_{max}) wird die Kurve immer steiler, und das Maximum der nichtlinearen Welle x_{max} (dargestellt durch Kreuze) nähert sich dem Ende x_{end} , welches durch kleine senkrechte Striche bei $x = 2.00, 2.20, 2.55$ und 2.99 markiert ist, an. Weil b^2 achsensymmetrisch verläuft, ist der Graph nur für $x > 0$ dargestellt.

$$x_{end} \simeq 2(1 - R) + \pi R^{8/7} \quad (5.72)$$

Die Abhängigkeit dieser speziellen Werte von x , x_{max} und x_{end} , ist in Abbildung 5.6 zu sehen.

Das Verhältnis x_{max}/x_{end} (abgebildet in Abbildung 5.7) ist ebenfalls eine Betrachtung wert. Es fällt von 1 (für $R \rightarrow 0$) auf $1/2$ (für $R = 1$) und kennzeichnet die Form des Solitons. Für Parameter $R \simeq 1$ hat die Welle einen näherungsweise gaußförmigen Verlauf und nimmt für $R \ll 1$ immer mehr eine Art doppelter „Sägezahn“-Form an, mit je einem „Zahn“ in den Bereichen $x > 0$ und $x < 0$ und mit einem dramatischen Gradienten des magnetischen Feldes am Ende der Welle, d.h. zwischen $x = x_{max}$ und $x = x_{end}$. Gerade dieser starke Gradient kann bei bestimmten Anwendungen von Interesse sein, z.B. wenn Teilchen diesen Gradienten passieren. Dieser Ansatz wird in Kapitel 6 am Beispiel des Jets in einem aktiven galaktischen Kern untersucht.

Nach dieser grafischen Darstellung der gefundenen Solitonen für große Werte für A_{max} und A werden die noch ausstehenden Näherungen für das Vektorpotential durchgeführt. Zunächst wird in Gleichung (5.58) noch die Annahme eines großen Wertes für A_{max}

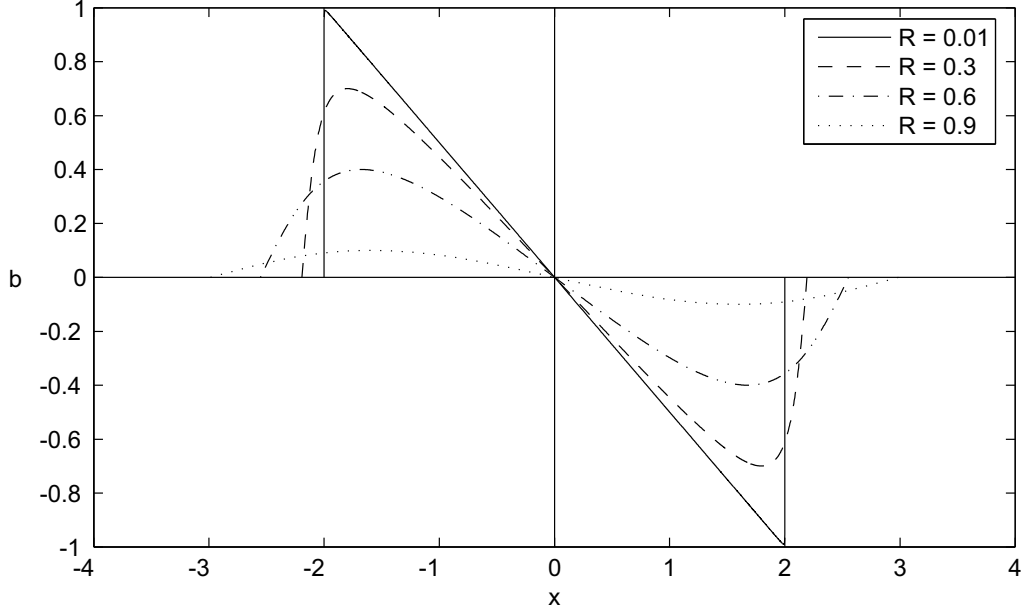


Abbildung 5.5: Das normierte Magnetfeld $b(x)$ für verschiedene Werte des Parameters R . Auch hier gilt wie in Abbildung 5.4, dass das Maximum von $|b|$ umso niedriger ausfällt, je größer R ist und desto größer ist der Endpunkt x_{end} . Mit $R \rightarrow 0$ wird die Kurve immer steiler, und das Maximum der nichtlinearen Welle x_{max} nähert sich dem Ende x_{end} . Man beachte, dass für sehr kleine Werte von R das Feld fast linear verläuft.

beibehalten, aber das Potential A selbst soll bereits als klein angesehen werden.

5.3.3 A_{max} groß, aber A klein

In dieser Situation kann die Entwicklung für $H(A_{max})$ aus dem vorherigen Abschnitt übernommen werden. Den Faktor

$$H(A) = 8\pi \sum_a n_a m_a c^2 \int d^2\varpi F_a(\Pi_x, \varpi_y) \left[1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2\right]^{1/2} \quad (5.73)$$

muss man jedoch neu entwickeln. Die Reihenentwicklung von $H(A)$ um $A = 0$ führt mit der Energie $\gamma^2 = 1 + \Pi_x^2 + \varpi_y^2$ (man bedenke, dass $\Pi_z = 0$) auf

$$H(A) = H_0 + H_1 A + H_2 A^2/2 + H_3 A^3/6 + H_4 A^4/24 + \dots \quad (5.74)$$

mit

$$\begin{aligned} H_0 &= 8\pi \sum_a n_a m_a c^2 \int d^2\varpi F_a \gamma > 0 \\ H_1 &= -8\pi \sum_a n_a m_a c^2 z_a \int d^2\varpi F_a \gamma^{-1} \Pi_x \\ H_2 &= 8\pi \sum_a n_a m_a c^2 z_a^2 \int d^2\varpi F_a \gamma^{-3} (1 + \varpi_y^2) > 0 \end{aligned}$$

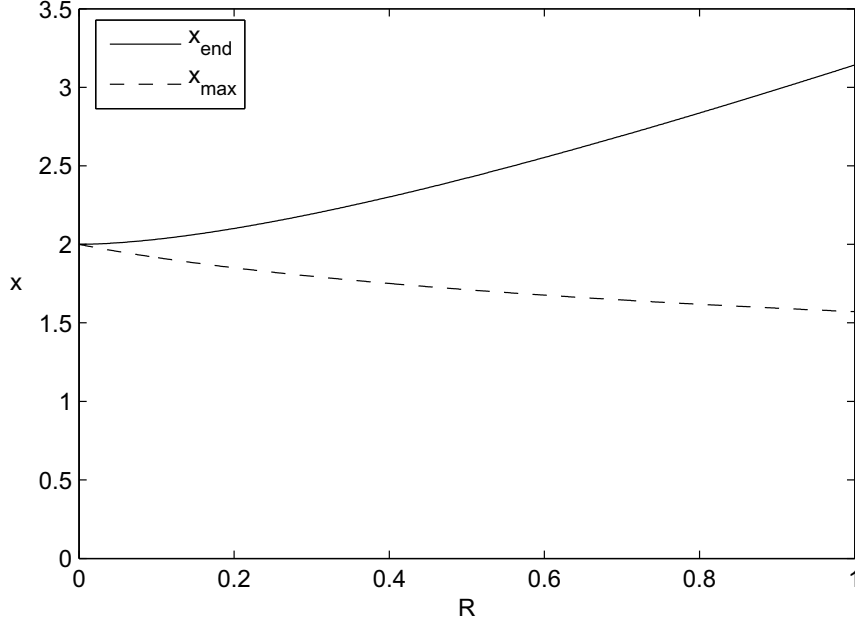


Abbildung 5.6: Die Abhängigkeit von $x_{max}(R)$ und $x_{end}(R)$ vom Parameter R . Für kleine Werte von R sind x_{max} und x_{end} annähernd gleich (auch wenn x_{max} stets kleiner als x_{end} sein muss, siehe Text); x_{end} wächst mit $R \rightarrow 1$ auf π , während x_{max} auf $\pi/2$ abfällt. Empirisch können diese Kurven annähernd durch die Formeln (5.72) beschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 H_3 &= 24\pi \sum_a n_a m_a c^2 z_a^3 \int d^2\varpi F_a \gamma^{-5} (1 + \varpi_y^2) \Pi_x \\
 H_4 &= -24\pi \sum_a n_a m_a c^2 z_a^4 \int d^2\varpi F_a \gamma^{-7} (1 + \varpi_y^2) (1 + \varpi_y^2 - 4\Pi_x^2) \quad (5.75)
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Gleichungen (5.75a)–(5.75e), mit Ausnahme der Potenzen von γ und z_a , die gleiche Struktur besitzen wie die Gleichungen (5.56a)–(5.56e). Daher gilt analog für eine in Π_x gerade Verteilungsfunktion F_a , dass $H_1 = 0 = H_3$. Und ähnlich ist die Reihenentwicklung dann eine geeignete Beschreibung, wenn gilt

$$H_0 \gg \max\{H_1 A, H_2 A^2/2, H_3 A^3/6, H_4 A^4/24\}. \quad (5.76)$$

Diese Ungleichung legt den Sinn des Ausdrucks „klein“ für A fest.

Für eine symmetrische Teilchenverteilung mit $H_1 = H_3 = 0$ benötigt man

$$A \ll \min\{(2H_0/H_2)^{1/2}, (24H_0/|H_4|)^{1/4}\} \equiv \mathcal{P}, \quad (5.77)$$

während für eine asymmetrische Verteilungsfunktion ($H_1 \neq 0 \neq H_3$)

$$A \ll \min\{\mathcal{P}, H_0/|H_1|, (6H_0/|H_3|)^{1/3}\} \equiv \mathcal{Q} \quad (5.78)$$

gelten muss. Wenn nun diese Kleinheit gegeben ist, lässt sich Gleichung (5.58) (mit A_{max} groß und A klein) wie folgt schreiben,

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)^2 = G_0 A_{max} + G_1 - H_0 - H_1 A + H_2 A^2/2 + H_3 A^3/6 + H_4 A^4/24 \quad (5.79)$$

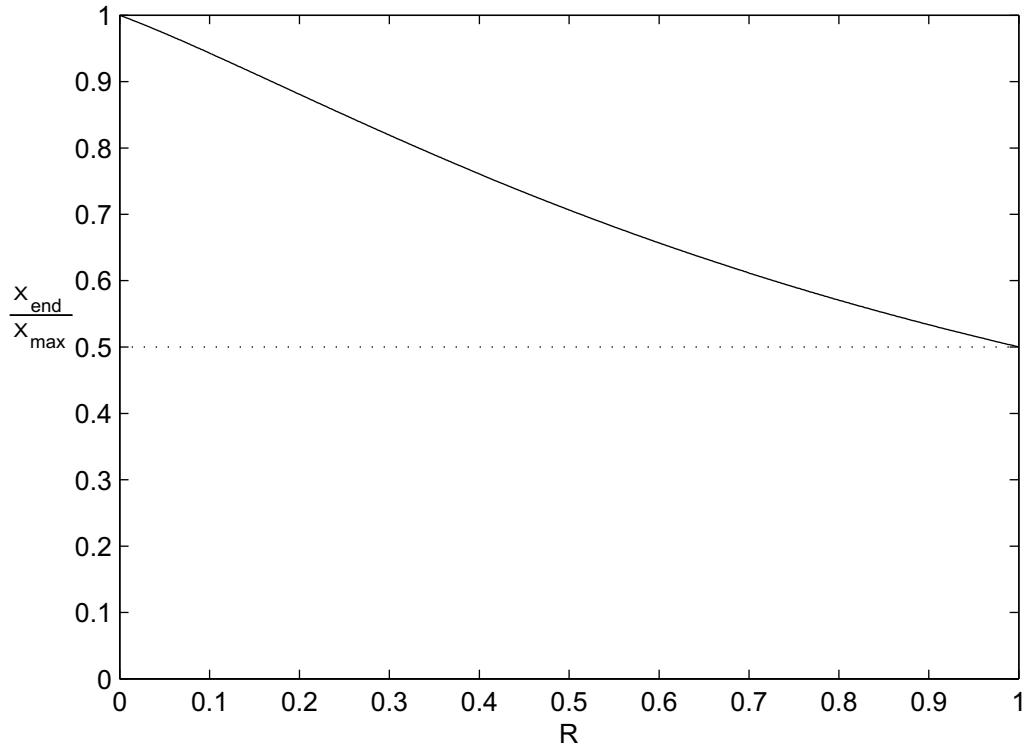


Abbildung 5.7: Das Verhältnis x_{max}/x_{end} als Funktion von R . Die Abnahme mit wachsendem R zeigt den Wechsel in der Wellengestalt von „Sägezahn“-Form zu annähernd Gaußverteilung, wie in den Abbildungen 5.4 und 5.5 gezeigt.

Zwei Fälle kann man nun unterscheiden:

- F_a ist symmetrisch in Π_x mit $G_1 = H_1 = H_3 = 0$;
- F_a ist asymmetrisch in Π_x mit $G_1 \neq 0, H_1 \neq 0 \neq H_3$.

F_a symmetrisch

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
 (\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)^2 &= G_0 A_{max} - H_0 - A^2 (H_2 + A^2 H_4 / 12) / 2 \\
 &\simeq G_0 A_{max} - H_0 - H_2 A^2 / 2,
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

falls $A^2 \leq 12H_2/H_4$, und man benötigt $A_{max} > H_0/G_0$ für eine Lösung. Diese lautet dann

$$A = A_* \cos(\zeta/l) \tag{5.81}$$

mit

$$A_*^2 = 2(G_0 A_{max} - H_0) / H_2 \tag{5.82}$$

und $l^2 = 2(\xi^2 - 1)^{3/2}H_2^{-1}$. Die Bedingung $A^2 \leq 12H_2/H_4$ erfordert also $A_*^2 \leq 12H_2/H_4$. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, muss der Term mit H_4A^4 in der Gleichung (5.80) berücksichtigt werden und formale Integration ergibt eine implizite Lösung mit einem elliptischen Integral,

$$\zeta = (\xi^2 - 1)^{3/4} \int \frac{dA}{\sqrt{G_0A_{max} - H_0 - H_2A^2/2 - H_4A^4/24}} + const. \quad (5.83)$$

F_a asymmetrisch

Für eine Verteilung F_a mit ungeraden Potenzen von Π_x hat man

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)^2 = G_0|A_{max}| + G_1 - H_0 - H_1A - H_2A^2/2 \quad (5.84)$$

in quadratischer Ordnung von A . Die Lösung lautet

$$A = A_0 + A_1 \cos(\zeta/l) \quad (5.85)$$

mit

$$\begin{aligned} A_0 &= -H_1/H_2, \\ A_1^2 &= 2(G_0A_{max} + G_1 - H_0)/H_2 + H_1^2/H_2^2 > A_0^2, \\ l^2 &= 2(\xi^2 - 1)^{3/2}H_2^{-1}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Die Bedingung, dass A der Kleinheitsbedingung $A \ll \mathcal{Q}$ aus Gleichung (5.78) genügt, bedeutet $|A_0| + |A_1| \ll \mathcal{Q}$.

Sowohl die symmetrische als auch die asymmetrische Situation liefern sinusoidale Moden ohne einen Abbruch und zeigen somit kein nichtlineares Verhalten. Sie sind daher für den weiteren Verlauf der Arbeit nicht von Belang.

5.3.4 A_{max} und A klein

Als letzte Möglichkeit wird in diesem Abschnitt der Fall kleiner A_{max} und A betrachtet. Wegen $A_{max} \geq A$ kann man Gleichung (5.58) auf folgende Weise schreiben,

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)^2 = H_1(A_{max} - A) + H_2(A_{max}^2 - A^2)/2 + \dots, \quad (5.87)$$

worin die Bedingungen für die Kleinheit, welche im vorherigen Kapitel für A entwickelt wurden, direkt auf A_{max} angewendet werden können. Die Lösung ist

$$A = A_2 + A_3 \cos(\zeta/l), \quad (5.88)$$

mit $A_2 = -H_1/H_2$, $A_3 = A_{max} + H_1/H_2$ und $l^2 = 2(\xi^2 - 1)^{3/2}H_2^{-1}$. Ein kleines A_{max} erfordert dann $|A_2| + |A_3| \ll \mathcal{Q}$. Gleichung (5.88) beschreibt wiederum eine sinusoidale Störung ohne Begrenzung in der ζ -Koordinate.

Betrachtet man zusätzlich in Gleichung (5.87) den nächsten Term der Reihenentwicklung, so erhält man eine kubische Differentialgleichung

$$(\xi^2 - 1)^{3/2} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \right)^2 = H_1(A_{max} - A) + H_2(A_{max}^2 - A^2)/2 + H_3(A_{max}^3 - A^3)/6. \quad (5.89)$$

Formale Integration führt auf

$$\zeta = (\xi^2 - 1)^{3/4} \int \frac{dA}{\sqrt{H_1(A_{max} - A) + H_2(A_{max}^2 - A^2)/2 + H_3(A_{max}^3 - A^3)/6}} + const., \quad (5.90)$$

was wie im vorherigen Abschnitt ein elliptisches Integral definiert. Man beachte, dass jede höhere Ordnung von A den Grad des Polynoms unter der Wurzel erhöht. Falls F_a nur gerade Potenzen von Π_x besitzt und man die vierte Ordnung betrachtet, so erhält man im Integral die Wurzel $[H_2(A_{max}^2 - A^2)/2 + H_4(A_{max}^4 - A^4)/24]^{-1/2}$ und daher wiederum ein elliptisches Integral.

Das bedeutet also: nichtlineares Verhalten kann durch diese Näherungen am einfachsten erreicht werden, wenn A_{max} und A beide als groß angesehen werden können. Ist im Gegensatz dazu die Amplitude A nicht groß genug, so ergeben sich auch in dieser nichtlinearen Beschreibung ebene Wellen mit einer festen Wellenzahl $k = 1/l$. Somit liegen wiederum isolierte Moden vor, wie in Abschnitt 3.6. Auf diese Weise wird im Nachhinein der zunächst intuitive Ansatz für die Solitonen bestätigt. Offen bleibt noch der Übergangsbereich zwischen isolierten Moden und Solitonen und die Frage, ob diese anwachsenden isolierten Moden selbst die Solitonen hervorbringen können, wenn die stationäre Welle den linearen Bereich verlassen hat.

5.3.5 Abschätzung physikalischer Skalen der Solitonen

Die theoretische Entwicklung der Solitonen hat sich bisher auf die mathematische Struktur der selbstkonsistenten nichtlinearen transversalen Wellen konzentriert, ohne in besonderer Weise eine physikalische Größenordnung zu diskutieren. In diesem Abschnitt sollen nun diese für eventuelle Anwendungen wichtigen Eigenschaften abgeschätzt werden, in einem für die Astrophysik interessanten Blickwinkel. Dieser zieht sich von relativistischen Jets in AGN bis zu dem Nachleuchten von GRBs und umfasst eine relativistische Bulkplasmabewegung in Verbindung mit intensiven Magnetfeldern. Man vergleiche dazu z.B. die Annahmen in [17, 18, 24, 25, 41, 47].

Man betrachte dazu ein Plasma mit der Bulkgeschwindigkeit $V_b = c/\xi$ in z -Richtung, mit einem Bulk-Lorentzfaktor $\Gamma_b = \xi/(\xi^2 - 1)^{1/2}$. Im Plasma befinden sich Ionen der Masse M und Ladung $+e$ und Elektronen der Masse $m = \mu M$ und Ladung $-e$ mit der gleichen Dichte, $n_e = n_i = n$. Die maximale Vektorpotentialamplitude A_{max} sei groß genug für eine selbstkonsistente Welle mit finiter Ausdehnung⁷.

Festlegung des Vektorpotentials A_{max}

Zunächst soll an dieser Stelle auch die Frage nach der eindeutigen Festlegung des Vektorpotentials A beantwortet werden. Eine erste Abschätzung für den minimalen Wert

⁷ Andernfalls erhielte man lediglich sinusoidale Wellen, welche einzelne isolierte Moden ohne Begrenzung repräsentieren.

des Potentials findet sich durch Betrachtung des Parameters R . Mit den oben genannten Größen besitzt der Faktor $G_2/(2G_0)$ aus Gleichung (5.64) die Form

$$\frac{G_2}{2G_0} = \frac{M^2 c^4}{4e^2} [1 + \langle \varpi_y^2 \rangle_i + \mu^2 (1 + \langle \varpi_y^2 \rangle_e)], \quad (5.91)$$

wobei

$$\langle \varpi_y^2 \rangle_a = \int d^2 \varpi F_a \varpi_y^2. \quad (5.92)$$

Der Faktor R kann dann mit $z_i = e/(Mc^2)$ durch

$$R^2 = \frac{1 + \langle \varpi_y^2 \rangle_i + \mu^2 (1 + \langle \varpi_y^2 \rangle_e)}{4(z_i A_{max})^2} \quad (5.93)$$

ausgedrückt werden. Wegen der Einschränkung $R < 1$ kann man als Bedingung an die Amplitude für ein selbstkonsistentes Soliton auch schreiben als

$$(z_i A_{max})^2 > [1 + \langle \varpi_y^2 \rangle_i + \mu^2 (1 + \langle \varpi_y^2 \rangle_e)]/4. \quad (5.94)$$

Für ein nichtrelativistisches Plasma (für das $\langle \varpi_y^2 \rangle_a \ll 1$ gilt) hat man

$$(z_i A_{max})^2 \geq (z_i A_{krit})^2 \equiv (1 + \mu^2)/4 \simeq 1/4, \quad (5.95)$$

oder⁸

$$A_{max} \geq A_{krit} \simeq \frac{Mc^2}{2e}. \quad (5.96)$$

Für relativistische Plasmen (für welche $\langle \varpi_y^2 \rangle_a \gg 1$) benötigt man hingegen eine größere Amplitude für eine selbstkonsistente Welle,

$$(z_i A_{max,rel})^2 \gg (z_i A_{krit})^2 \left(1 + \frac{\langle \varpi_y^2 \rangle_i}{1 + \mu^2} + \frac{\mu^2 \langle \varpi_y^2 \rangle_e}{1 + \mu^2} \right). \quad (5.97)$$

Dieses Ergebnis steht auch im Einklang mit der Herleitung der solitären Welle (5.63), bei der die Wurzelterme in Gleichung (5.36) für große Werte von $z_a A_{max}$ entwickelt wurde.

Ist man in der Lage, einen Wert für das maximale Magnetfeld B_{max} aus Simulationen oder Beobachtungen zu gewinnen, so erhält man aus der Gleichung (5.67) und den Definitionen (5.64) und (5.65)

$$A_{max} = \frac{(\xi^2 - 1)^{3/2}}{2G_0} B_{max}^2 + \left(\frac{G_2}{2G_0} \right)^{1/2} \pm \frac{(\xi^2 - 1)^{3/4}}{(2G_0)^{1/2}} B_{max} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)^{3/2}}{2G_0} B_{max}^2 + \left(\frac{2G_2}{G_0} \right)^{1/2}}, \quad (5.98)$$

wobei für den Soliton-Fall (d.h. A_{max} groß) das obere Vorzeichen Bedeutung erhält. Auf diese Weise hängt A_{max} von der Verteilungsfunktion der Teilchen sowie den Größen B_{max} , ξ und n_a (wegen Gleichung (5.56a,c)) ab, welche aus Modellen oder Beobachtungen entnommen werden müssen.

Ist jedoch anstatt der aufgelösten Messung der Eigenschaften der Solitonen im Jet nur eine integrierte Messung entlang des ganzen Jets möglich, so vermag man dennoch das

⁸Aufgrund dieses Zusammenhangs wird im Folgenden bei der Betrachtung des Solitons meist der Faktor z_i verwendet, auch wenn dann Elektronen im Soliton betrachtet werden.

Vektorpotential abzuschätzen. Ausgangspunkt hierfür ist die Annahme, dass bei einer solchen Messung k Solitonen mit einer Länge von $\Delta\zeta \equiv 2Lx_{end}$ und einem maximalen Feld B_{max} ungefähr das gesamte gemittelte Feld \bar{B} über der ganzen Jetlänge L_{jet} ausmachen, also

$$\bar{B}L_{Jet} \simeq \frac{k}{2}B_{max}\Delta\zeta, \quad (5.99)$$

wobei der Faktor $1/2$ in etwa die Mittelung des Magnetfeldes über die Solitonlänge darstellt. Dann folgt aus der Gleichungen (5.67)

$$B_{max}\Delta\zeta \simeq 2(1-R)x_{end}A_{max}. \quad (5.100)$$

Zwar hängt x_{end} über R und Definition (5.64) von A_{max} ab, jedoch beschränkt sich diese Abhängigkeit auf das Intervall $[2, \pi]$. Somit kann man in erster Näherung $x_{end} \simeq (\pi+2)/2$ setzen, und es ergibt sich mit der Abschätzung (5.99)

$$A_{max} \simeq \frac{2}{(\pi+2)k}\bar{B}L_{Jet} + \left(\frac{G_2}{2G_0}\right)^{1/2}, \quad (5.101)$$

wobei der Parameter k angibt, wie viele Solitonen im Jet vorhanden sind. Diese Zahl kann, wie auch n_a , aus Simulationen entnommen werden. Bei dieser Abschätzung genügt es also, Annahmen über die Teilchendichte n_a und -verteilung f_a sowie der Anzahl k der Solitonen zu machen.

Somit liegen nun zwei Möglichkeiten zur Bestimmung des maximalen Vektorpotentials mit Hilfe des maximalen Magnetfeldes vor; im Folgenden kann also A_{max} als festgelegte Größe angesehen werden.

Physikalische Skalen der Solitonen

Dieser Abschnitt legt den Schwerpunkt auf die Abschätzung physikalischer Skalen der Solitonen. Zunächst gilt, dass die Ausdehnung der Welle *per definitionem* auf $\zeta^2/L^2 \leq x_{end}^2$ begrenzt ist. Für die Gesamtlänge des Solitons $\Delta\zeta$ gilt

$$|\Delta\zeta| = 2Lx_{end} \equiv x_{end}(c/\omega_{p,i})(z_i A_{max})^{1/2}\Gamma_b^{-3/2}(c/V_b)^{3/2} \quad (5.102)$$

mit $\omega_{p,i}^2 = 4\pi ne^2/M$. Die relative Änderung der Länge beträgt maximal einen Faktor 0.57, somit ist die Solitonlänge als verhältnismäßig stabiler Parameter anzusehen. Das Aussehen der Welle in dem begrenzten Gebiet zeigt jedoch eine viel größere Veränderung, denn für R nahe bei Eins erhält man eine annähernd gaußförmige Kurve, während das Feld im anderen Extremfall ($R \rightarrow 0$) einen sägezahnartigen Verlauf besitzt (wie in Abbildung 5.5 gezeigt).

Das maximale Magnetfeld, B_{max} , ist dann durch

$$B_{max}^2/8\pi = 2(1-R)^2 nMc^2(z_i A_{max})(V_b/c)^3\Gamma_b^3 \quad (5.103)$$

gegeben und analog das maximale elektrische Feld, E_{max} , durch

$$E_{max}^2/8\pi = (B_{max}^2/8\pi)(c/V_b)^2 = 2(1-R)^2 nMc^2(z_i A_{max})(V_b/c)\Gamma_b^3. \quad (5.104)$$

Hier wird die starke Abhängigkeit von A_{max} und V_b sichtbar. Man beachte, dass wegen $B = \partial A/\partial\zeta$ das Magnetfeld *negativ* (*positiv*) in Richtung positiver (negativer) Werte

von ζ ist und für $\zeta = 0$, $\zeta = Lx_{end}$ und $\zeta = -Lx_{end}$ auf Null zurückgeht. So können die Bereiche positiver und negativer Magnetfelder als charakteristischer Indikator der Wellenrichtung dienen, indem man diese Bereiche zu identifizieren versucht. Die Ausbreitungsrichtung der Welle in ζ ist festgelegt durch ein voranschreitendes negatives Feld, gefolgt von einem nachlaufenden positiven Feld. Diese Eigenschaft könnte zur Richtungsmessung durch Messung der Faradayrotation nützlich sein.

Zum Vergleich betrachte man das Magnetfeld im interstellaren Medium, wo man mit $B_{interstellar} \simeq 3\mu\text{G}$ und $n_{interstellar} \simeq 0.1\text{cm}^{-3}$ findet, dass

$$B_{interstellar}^2 / (8\pi n_{interstellar} M c^2) \simeq 2 \times 10^{-9}. \quad (5.105)$$

In relativistischen Jets hingegen, mit $\Gamma_b \simeq 10^2$ und daraus folgend $V_b \simeq c$, hat man

$$B_{max}^2 / (8\pi n M c^2) \simeq 2 \times 10^6 (1 - R)^2 (z_i A_{max}) (\Gamma_b / 100)^3, \quad (5.106)$$

was in etwa Feldstärken der Größenordnung

$$B \simeq 90 (1 - R) (z_i A_{max})^{1/2} (\Gamma_b / 100)^{3/2} (n / 0.1\text{cm}^{-3})^{1/2} \text{ G} \quad (5.107)$$

entspricht, wobei n die Teilchendichte im Jet ist (von demjenigen Bezugssystem aus betrachtet, in dem der Jet die Bulkgeschwindigkeit V_b besitzt).

Aber auch im Ruhesystem des Bulks können wichtige Erkenntnisse gewonnen werden. Die Transformation zwischen den Koordinaten des Systems K (in welchem das Plasma sich mit der Bulkgeschwindigkeit V_b bewegt) und dem Koordinatensystem K_0 (in welchem es keine Bulkgeschwindigkeit gibt) lautet

$$z_0 = \Gamma_b (z - V_b t); \quad t_0 = \Gamma_b (t - z V_b / c^2) \equiv (\Gamma_b / c) (V_b / c) \zeta. \quad (5.108)$$

In diesem System K_0 sind die Plasmateilchen lediglich einem elektrischen Feld ausgesetzt⁹, welches ausschließlich eine Funktion der Zeit t_0 ist und zudem nur von zeitlich begrenzter Dauer,

$$-(\Gamma_b / c) (V_b / c) Lx_{end} \leq t_0 \leq (\Gamma_b / c) (V_b / c) Lx_{end}. \quad (5.109)$$

Also kann man im Koordinatensystem K_0 als Zeitskala für die nichtlineare Welle eine Zeit Δt_0 auffassen, welche durch

$$\Delta t_0 = 2(\Gamma_b / c) (V_b / c) Lx_{end} = (\Gamma_b / c) (V_b / c) |\Delta \zeta| \simeq x_{end} \omega_{p,i}^{-1} (z_i A_{max})^{1/2} \Gamma_b^{-1/2} (c / V_b)^{1/2} \quad (5.110)$$

gegeben ist.

Diese Eigenschaft wird im nächsten Abschnitt wichtig, wenn es darum geht, für die maximale Amplitude des Solitons theoretische obere Grenzen aufgrund von Strahlung und anderen physikalischen Prozesse zu formulieren. Bisher wurde die maximale Amplitude A_{max} pragmatisch aus dem größten beobachteten oder berechneten Magnetfeld hergeleitet.

⁹Hier sind die geladenen Teilchen in Ruhe und können demzufolge kein Magnetfeld induzieren.

5.4 Beschränkung der Wellenamplitude

Bis zu diesem Punkt widmete sich dieses Kapitel den Eigenschaften der selbstkonsistenten Welle, ohne physikalische Beschränkungen in der Größe der Amplitude o.Ä. zu berücksichtigen. Es ist jedoch klar, dass es Wechselwirkungen zwischen Welle und Plasma geben muss, da ein Soliton naturgemäß nicht ins Unendliche wachsen kann.

Zunächst ist aus der klassischen Elektrodynamik (siehe z.B. in [19]) bekannt, dass beschleunigte geladene Teilchen strahlen, und dieser Strahlungsprozess wandelt die Energiedichte der Welle in Strahlungsenergie um. Das gilt im Besonderen für Elektronen, da diese am einfachsten beschleunigt und abgebremst werden können¹⁰. Daher muss es eine obere Grenze der Wellenamplitude geben: wenn nämlich Elektronen während der Zeitskala Δt_0 beschleunigt werden, somit Energie vom Soliton aufnehmen und als beschleunigte geladene Teilchen in Form von Strahlung wieder abgeben. Auf diese Weise erhält man aufgrund der einfachen Annahme, dass das Elektron nicht mehr Energie abstrahlen kann, als es durch die Welle erhält, eine theoretische obere Schranke für die Amplitude A_{max} bzw. für das Magnetfeld B_{max} . Zur Vereinfachung werden im Folgenden nur die Strahlungsfelder von Elektronen mit der Ruhemasse m und der Teilchengeschwindigkeit $\vec{v} = c\vec{\beta}$ in der nichtlinearen Welle betrachtet.

Außerdem wurde bisher immer von einem stoßfreien Plasma ausgegangen, d.h. Stöße waren vernachlässigt. Da eine Erhöhung der Teilchendichte eine erhöhte Stoßwahrscheinlichkeit hervorruft, kann man also für die Gültigkeit aller Aussagen in dieser Arbeit eine Beschränkung bezüglich der Teilchenzahldichte geben. Sie muss kleiner als eine bestimmte Dichte $n_{Kollision}$ sein, bei der Kollisionen allmählich eine Rolle spielen.

Drittens wurden Quanteneffekte nicht berücksichtigt, obwohl in gewissen Bereichen der Astrophysik diese durchaus eine Rolle spielen. Man denke nur an Weiße Zwerge und Neutronensterne, bei denen diese Effekte sich erheblich auswirken. Für die hier gezeigten Rechnungen ist es daher wichtig, dass die Teilchenzahldichte unter der Dichte n_{qu} liegt, welche aus dem Elektronenentartungsdruck folgt.

Diese Effekte sollen in den folgenden Abschnitten behandelt werden. Zunächst jedoch muss bestimmt werden, welche Energie dem Soliton zur Verfügung steht¹¹.

5.4.1 Verfügbare Energiedichte

Diese Energiedichte setzt sich nun aus zwei Bestandteilen zusammen, der Energiefeldichte der elektromagnetischen Felder sowie der kinetischen Energie der Teilchen innerhalb der nichtlinearen Welle.

Die maximale Energiedichte der Welle wird eingegrenzt durch

$$E_{Soliton} = (E_{max}^2 + B_{max}^2)/8\pi + n(m + M)c^2 \int (\Gamma_b E_{\perp} - 1) F d^2\varpi. \quad (5.111)$$

Mit Gleichung (5.103) und $E = \xi B$ erhält man für die Energiedichten der Felder

$$(E_{max}^2 + B_{max}^2)/8\pi = 2(1 - R)^2 n M c^2 (z_i A_{max}) (1 + V_b^2/c^2) (V_b/c) \Gamma_b^3. \quad (5.112)$$

¹⁰Dieser Sachverhalt ist auch bei der Synchrotronstrahlung bekannt; Protonen spielen hierbei keine Rolle.

¹¹Zweckmäßigerweise wird hierbei anstatt der Energie die Energiedichte der Welle betrachtet.

Nun betrachtet man den Term für die kinetische Energie. Bei dem Wert x_{max} gilt $A < A_{max}$, so dass man mit Gleichung (5.53) als obere Grenze für den Integralterm aus Gleichung (5.111) schreiben kann

$$E_{kin} = n(m + M)c^2 \int (\Gamma_b E_{\perp} - 1) F d^2\varpi < \Gamma_b H(A_{max}) - n(m + M)c^2. \quad (5.113)$$

So folgt in Analogie zu dem Vorgehen in Abschnitt 5.3.1

$$E_{kin} < -(1 + \mu)nMc^2 + \Gamma_b A_{max} G_0 + \Gamma_b G_1 + \Gamma_b G_2 / (2A_{max}) + \dots \quad (5.114)$$

mit

$$\Gamma_b A_{max} G_0 = 16\pi n M c^2 \Gamma_b (z_i A_{max}). \quad (5.115)$$

Vernachlässigt man Terme höherer Ordnung (weil A_{max} als groß angesehen werden kann), so führt dieses zu

$$E_{kin} < 16\pi n M c^2 \Gamma_b (z_i A_{max}) - n M c^2 (1 + \mu) \simeq 16\pi n M c^2 \Gamma_b (z_i A_{max}) \quad (5.116)$$

Man findet also als obere Grenze für die Gesamtenergiedichte der nichtlinearen Welle

$$\begin{aligned} E_{Soliton} &< 2nMc^2(z_i A_{max})(1 + V_b^2/c^2)(V_b/c)\Gamma_b^3(1 - R^2) + 16\pi n M c^2 \Gamma_b (z_i A_{max}) \\ &= 2nMc^2(z_i A_{max})\Gamma_b^3[(1 + V_b^2/c^2)(V_b/c)(1 - R)^2 + 8\pi\Gamma_b^{-2}]. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Man sollte beachten, dass der letzte Term in Gleichung (5.117) im hochrelativistischen Bereich $\Gamma_b \gg 1$ nur eine kleine Korrektur zu der totalen Energiedichte darstellt und folglich vernachlässigt werden kann. Weil gerade dieses Szenario in der Astrophysik von Bedeutung ist, kann Gleichung (5.112) zumeist als Gesamtenergiedichte des Solitons angesehen werden. Diese Energiedichte – ob man nun Gleichung (5.112) oder doch Gleichung (5.117) mit der kinetischen Energie wählt – repräsentiert die Gesamtenergie der Welle. Wenn es keine weiteren Wechselwirkungen zwischen dem Soliton und den Plasmateilchen gäbe, könnte die Welle eine beliebige Amplitude A_{max} besitzen. Die Natur ist jedoch anders aufgebaut, so dass Strahlung von den durch die Welle beschleunigten Teilchen, im Besonderen von Elektronen, die Solitonamplitude begrenzen. Andererseits, aus dem Wissen, dass die in der Welle gespeicherte Energiedichte die Strahlungsleistung beschränkt, lassen sich Bedingungen für Wellen- und Plasmamaparameter finden. Dieser Prozess wird im folgenden Abschnitt behandelt.

5.4.2 Intensität und Strahlung von Elektronen

Die Strahlungsleistung eines einzelnen geladenen Teilchens (betrachtet wird hier ein Elektron mit $q = e$) ist durch

$$P = (2e^2/3c)\gamma^6(\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2) \quad (5.118)$$

gegeben (siehe z.B. [19]), mit $\vec{\beta} = \vec{v}/c$. Weil die elektromagnetischen Felder senkrecht zur Wellenausbreitung stehen, kann man die Beschleunigung schreiben als $\dot{\vec{\beta}} = (\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y, 0)$ und man erhält

$$P = \frac{2e^2}{3c}\gamma^6 \left((1 - \beta_z^2)(\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - \beta_y^4 \left(\frac{d}{dt}(\beta_x/\beta_y) \right)^2 \right). \quad (5.119)$$

Mit $\gamma = \Gamma_b E_\perp$ aus Gleichung (5.30), $\beta_x = (\Pi_x - z_i A)/\Gamma_b E_\perp$, $\beta_y = \varpi_y/\Gamma_b E_\perp$ und $1 - \beta_z^2 = \Gamma_b^{-2}$ vereinfacht sich Gleichung (5.119) zu

$$P = (2e^2/3c)\Gamma_b^2(1 + \varpi_y^2)(z_i \dot{A})^2 \quad (5.120)$$

als die ausgesandte Strahlungsleistung eines Elektrons.

Daraus erhält man die gesamte abgegebene Strahlungsenergie eines mit dem Soliton wechselwirkenden Elektrons durch Integration über die Wechselwirkungszeit mit dem Soliton, gegeben durch Gleichung (5.110). Mit $\xi c dt = d\zeta = L dx$, $A = A_{max} u$, $\mu = m/M$ und $V_b = c/\xi$ ergibt sich die Strahlungsenergie durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int dt P = \frac{L}{\xi c} \int_{-x_{end}}^{x_{end}} dx P \\ &= \frac{4e^2}{3\mu^2 L} (z_i A_{max})^2 \frac{c}{V_b} \Gamma_b^2 (1 + \varpi_y^2) \int_0^{x_{end}} dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ &= \frac{4e^2}{3\mu^2 L} (z_i A_{max})^2 \frac{c}{V_b} \Gamma_b^2 (1 + \varpi_y^2) \int_{R^2}^1 du \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \end{aligned} \quad (5.121)$$

Gleichung (5.63) führt auf

$$I_R \equiv \int_{R^2}^1 du \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \int_{R^2}^1 du \frac{(1-u)^{1/2} (u-R^2)^{1/2}}{u^{1/2}}, \quad (5.122)$$

so dass ein einzelnes Teilchen die Energie

$$\mathcal{E} = (4e^2/3\mu^2 L) (z_i A_{max})^2 (c/V_b) \Gamma_b^2 (1 + \varpi_y^2) I_R \quad (5.123)$$

abstrahlt.

Überträgt man dieses auf n mit der nichtlinearen Welle wechselwirkende Elektronen pro cm^3 , kann die gesamte Energiedichte geschrieben werden als

$$E_{Strahlung} = \frac{4ne^2}{3\mu^2 L} (z_i A_{max})^2 \frac{c}{V_b} \Gamma_b^2 I_R \int d\Pi_x d\varpi_y (1 + \varpi_y^2) F_e. \quad (5.124)$$

Die Einführung der Elektronenplasmafrequenz $\omega_{p,e}^2 = 4\pi n e^2/m$ und der Länge L , welche gegeben ist durch

$$L^2 = (\xi^2 - 1)^{3/2} A_{max}/G_0 = (c^2/4\omega_{p,e}^2 \mu) (z_i A_{max}) (c/V_b)^3 \Gamma_b^{-3} \quad (5.125)$$

erlaubt es, Gleichung Eq. (5.124) umzuformen,

$$E_{Strahlung} = \frac{2M\omega_{p,e}^3}{3\pi c\mu^{1/2}} (z_i A_{max})^{3/2} \left(\frac{V_b}{c} \right)^{1/2} \Gamma_b^{7/2} I_R \int d\Pi_x d\varpi_y (1 + \varpi_y^2) F_e. \quad (5.126)$$

5.4.3 Begrenzung der Wellenamplitude durch Strahlung

Nun ist man in der Lage, das Verhältnis zwischen der abgestrahlten Energiedichte und der Solitonenergiedichte zu bestimmen. Mit der Hilfsgröße

$$n_0 \equiv \frac{m^4 c^6}{M e^6} = 2.434 \times 10^{34} \text{ cm}^{-3} \quad (5.127)$$

ergibt sich

$$\frac{E_{Strahlung}}{E_{Soliton}} = \frac{8\pi^{1/2} n^{1/2}}{3} \frac{n_0^{1/2} (z_i A_{max})^{1/2}}{n_0^{1/2}} \frac{\Gamma_b^{1/2}}{(1 + V_b^2/c^2)(V_b/c)^{1/2}} \frac{I_R}{(1 - R)^2} \langle 1 + \varpi_y^2 \rangle_e \leq 1 \quad (5.128)$$

bzw. mit Einbeziehung der Teilchenenergiedichte (5.117)

$$\frac{E_{Strahlung}}{E_{Soliton}} = \frac{8\pi^{1/2} n^{1/2}}{3} \frac{n_0^{1/2} (z_i A_{max})^{1/2}}{n_0^{1/2}} \frac{(V_b/c)^{1/2} \Gamma_b^{1/2} I_R}{(1 + V_b^2/c^2)(V_b/c)(1 - R)^2 + 8\pi \Gamma_b^{-2}} \langle 1 + \varpi_y^2 \rangle_e \leq 1 \quad (5.129)$$

Im Folgenden wird wegen der Annahme relativistischer Geschwindigkeiten Gleichung (5.128) benutzt. Es wären geringe Modifizierungen für den Bereich der Plasmaparameter erforderlich, um ein Soliton zuzulassen, falls die Teilchenenergie (wie am Beispiel erläutert) mit berücksichtigt würde; die allgemeine Struktur bliebe jedoch erhalten.

Als obere Schranke für die Teilchendichte führt Gleichung (5.128) somit auf

$$n \leq \frac{9}{2^6 \pi} n_0 \frac{1}{z_i A_{max}} \frac{(1 + V_b^2/c^2)^2 (V_b/c)}{\Gamma_b} \left(\frac{(1 - R)^2}{I_R} \right)^2 \frac{1}{\langle 1 + \varpi_y^2 \rangle_e^2} \quad (5.130)$$

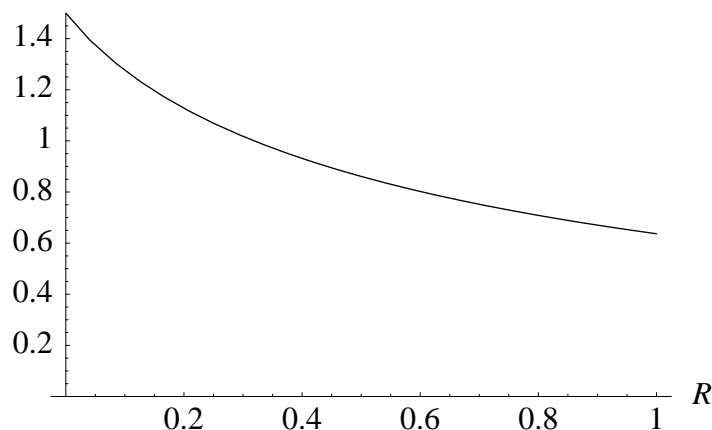


Abbildung 5.8: Numerische Darstellung des Verhältnisses $(1 - R)^2 / I_R$ in Abhängigkeit von R .

Für eine grobe Abschätzung lassen sich folgende Bedingungen nutzen:

1. Das Verhältnis $(1 - R)^2 / I_R$ ist von der Größenordnung Eins, wie in Abbildung 5.8 zu erkennen;
2. es gilt nach der Einschränkung (5.95) für beliebige Wellen $1 / (z_i A_{max}) \leq 2$;
3. mit $\Gamma_b^{-1} = (1 - V_b^2/c^2)^{1/2}$ kann man den Faktor $(1 + V_b^2/c^2)^2 (V_b^2/c^2)^{1/2} (1 - V_b^2/c^2)^{1/2}$ abschätzen; dieses ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Diese Funktion der Bulkgeschwindigkeit besitzt ein Maximum bei $V_b^2/c^2 = (3 + 33^{1/2})/12 = 0.729$ mit dem Wert 1.33.

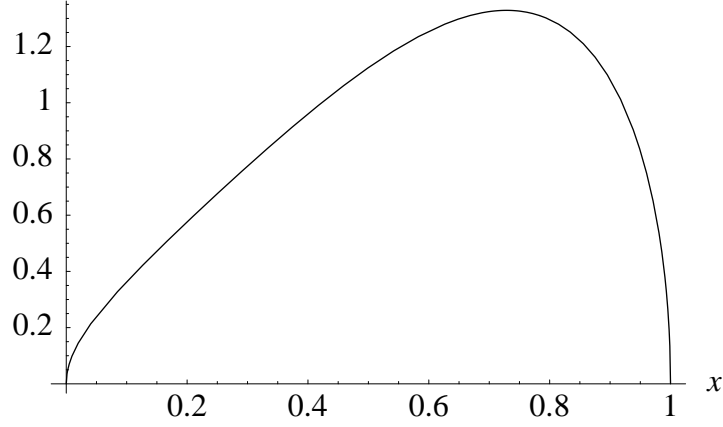


Abbildung 5.9: Verlauf von $(1+x)^2 x^{1/2} (1-x)^{1/2}$ für $x = V_b^2/c^2$. Das Maximum liegt bei $x = 0.729$ und nimmt den Wert 1.33 an.

Hieraus folgt, dass unter beliebigen Bedingungen die Teilchenzahldichte kleiner sein muss als

$$n_{max} \leq [2.90 \times 10^{33} / \langle 1 + \varpi_y^2 \rangle_e] \text{ cm}^{-3}. \quad (5.131)$$

Andererseits folgt mit Gleichung (5.130) für das maximale Magnetfeld (5.107) mit der Abschätzung $(1-R)^2/I_R \simeq 1$ und für relativistische Geschwindigkeiten $V_b/c \simeq 1$

$$\begin{aligned} B_{max} &\simeq 90(1-R)(z_i A_{max})^{1/2} (\Gamma_b/100)^{3/2} (n/0.1 \text{ cm}^{-3})^{1/2} \text{ G} \\ &\leq 1.33 \times 10^{18} (1-R) (\Gamma_b/100) / \langle 1 + \varpi_y^2 \rangle_e \text{ G}. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Diese Werte mögen dem Betrachter zunächst als viel zu groß erscheinen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass in diesem Abschnitt versucht wurde, die physikalisch mögliche Obergrenze für die entstehenden Magnetfelder abzuschätzen. Diese Ergebnisse sagen aus, dass die hier vorgestellten Prozesse denkbar sind; hätte sich z.B. für die Dichte (5.131) ein Zahlenwert der Größenordnung 10^{-3} ergeben, so wäre die Erzeugung von Solitonen undenkbar. Es wird auch deutlich, dass bei diesem Prozess nicht das maximale Vektorpotential A_{max} , sondern nur das maximale magnetische Feld B_{max} theoretisch begrenzt ist¹²; diese obere Grenze hängt zudem nicht vom Vektorpotential A_{max} ab.

5.4.4 Begrenzung der Wellenamplitude durch Kollisionen

Eine zweite Beschränkung für die maximale Amplitude A_{max} kann aus dem Ansatz hergeleitet werden, dass das Plasma als stoßfrei angenommen wurde. Alle Ergebnisse dieser Arbeit sind daher strenggenommen nur dann gültig, solange Kollisionen zwischen Elektronen unerheblich für das Plasma sind. Als Abschätzung kann man annehmen, dass Stöße keine Rolle spielen, solange die Frequenz des Solitons, gegeben durch $\nu_{Soliton} \simeq c/\Delta\zeta$, größer als die Kollisionsfrequenz der Elektronen $\nu_{Kollision} \simeq \Gamma_b n \sigma_{th} c$ ist, wobei $\sigma_{th} = (8\pi/3)r_e^2$

¹²Allerdings sind die hier gefundenen Obergrenzen für die Dichte und demzufolge auch für das Magnetfeld äußerst hoch. Verwendet man in Gleichung (5.107) realistischere Werte, z.B. $\Gamma_b \simeq 10^2$, $n \simeq 10^5 \text{ cm}^{-3}$ und ein Vektorpotential $z_i A_{max} = 10$, so erhält man als Spitzenwert $B_{max} = 2.8 \times 10^5 \text{ G}$.

den Thomsonwirkungsquerschnitt und $r_e = e^2/(mc^2)$ den klassischen Elektronenradius darstellt.

Mit Gleichung (5.102) erhält man für diese Betrachtung die Bedingung

$$\nu_{Soliton} \simeq \frac{c}{\Delta\zeta} = \frac{2\pi^{1/2} \Gamma_b^{3/2} (V_b/c)^{3/2}}{x_{end} (z_i A_{max})^{1/2}} \frac{e}{M^{1/2}} n^{1/2} \geq \nu_{Kollision} \simeq \frac{8\pi}{3} \Gamma_b \frac{e^4}{m^2 c^3} n, \quad (5.133)$$

und daraus folgend

$$n_{max} \leq \frac{9}{16\pi x_{end}} \frac{m^4 c^6}{M e^6} \frac{\Gamma_b (V_b/c)^3}{(z_i A_{max})} \leq 4.36 \times 10^{33} \Gamma_b (V_b/c)^3 \text{ cm}^{-3}. \quad (5.134)$$

Man beachte, dass genau wie schon beim Strahlungsprozess in dieser oberen Grenze für n der Faktor $n_0 = (m^4 c^6)/(M e^6)$ erscheint, obwohl die physikalischen Prozesse verschieden sind. Für $(V_b/c) \simeq 1$ liefert Ungleichung (5.134) als oberes Limit für das maximale Magnetfeld

$$B_{max} \leq 1.33 \times 10^{20} (1 - R) (\Gamma_b/100)^2 \text{ G}. \quad (5.135)$$

Beide Ergebnisse sind von vergleichbarer Größenordnung wie diejenigen des vorherigen Abschnitts.

5.4.5 Begrenzung der Wellenamplitude durch den Elektronentartungsdruck

Eine dritte Beschränkung der Elektronendichte ergibt sich aus der Tatsache, dass in einer klassischen Beschreibung Einflüsse aus dem Elektronentartungsdruck nicht gestattet sind. Daher benötigt man eine obere Grenze für den Elektronendruck von

$$n_{max} \leq (mc/\hbar)^3 = 1.74 \times 10^{31} \text{ cm}^{-3}. \quad (5.136)$$

Andernfalls müsste man das selbstkonsistente Wellenproblem von einer quantentheoretischen Betrachtungsweise aus untersuchen – was ein noch mühseliges Unterfangen wäre als die klassische Untersuchung, welche in dieser Arbeit gegeben wird¹³. Dann folgt als Grenze für das maximale Magnetfeld

$$B_{max} \leq 1.19 \times 10^{18} (1 - R) (z_i A_{max})^{1/2} (\Gamma_b/100)^{3/2} \text{ G} \quad (5.137)$$

Zusammenfassend: So lange sich die Elektronendichte *unterhalb* der niedrigsten der drei hier hergeleiteten beschränkenden Werte für Strahlung, Kollisionen und Entartung befindet, können in den hier angenommenen relativistischen Solitonen durchaus sehr große magnetische und elektrische Felder vorkommen. Man ist daher weiterhin auf die Abschätzung durch die maximalen Magnetfelder angewiesen – sei es durch Beobachtungen, sei es durch Simulationen.

¹³Diese Betrachtung des Limits für den Elektronentartungsdruck führt direkt zu der Massenobergrenze Weißer Zwerge, wie sie von Chandrasekhar [7, 8, 9] gefunden wurde.

6 Anwendung: Strahlung von Elektronen im Soliton

High energy electrons which are subjected to large accelerations normal to their velocity should radiate electromagnetic energy. The radiation from electrons in a betatron or synchrotron should be emitted in a narrow cone tangent to the electron orbit, and its spectrum should extend into the visible region. This radiation has now been observed visually in the General Electric 70-Mev synchrotron.

Die Synchrotronstrahlung wird 1947 bei einem Beschleuniger von *General Electric* zu ersten Mal beobachtet. [12].

6.1 Die Solitonstruktur

Im vorhergehenden Kapitel wurde die theoretische Grundlage für die Betrachtung solitärer Wellen in einem unmagnetischen Plasma (d.h. Hintergrundfeld $B_0 = 0$) mit Wellenpropagation in z -Richtung hergeleitet. Nach Definition (5.28) wird an die Teilchen im Plasma nur die Forderung gestellt, dass sie sich mit konstanter Geschwindigkeit in Propagationsrichtung der Welle bewegen müssen, senkrecht dazu ist die Bewegung beliebig.

Diese Voraussetzung mag zunächst recht willkürlich aussehen, jedoch ist dieses der einzige Ansatz, für den bisher Lösungen gefunden werden konnten. Es stellt sich natürlich die Frage, ob eine solche Konfiguration in der Natur vorkommt, denn die Annahme, dass die Plasmateilchen sich in eine Richtung quasi als „Block“ bewegen, mutet auf den ersten Blick seltsam an. Jedoch gibt es in der Astrophysik (zumindest näherungsweise) tatsächlich bestimmte Objekte, die Plasmen in dieser Gestalt erzeugen können. Die Rede ist von relativistischen Jets, wie man sie in GRBs oder in AGNs finden kann: Die Vorstellung, dass sogenannte *Blobs* entlang der Jetachsen ausgesandt werden, impliziert genau eine solche konstante Bewegung in Jetrichtung.

Nimmt man an, dass das Magnetfeld in einem gewissen Abstand zur Quelle vernachlässigbar ist, so könnte die Theorie der Plasmainstabilitäten die Entstehung von Solitonen erklären. Zunächst erzeugt die Bewegungsanisotropie anwachsende transversale Weibelmoden, wie in den Kapiteln 2 und 3 hergeleitet wurde. Diese Beschreibung ist jedoch nur in der linearen Näherung gültig. Wachsen diese Moden weiter an, so ist es vorstellbar, dass sie die Solitonbedingung aus Kapitel 5 erfüllen und daher in nichtlineare propagierende Wellen übergehen.

Somit besteht also die Möglichkeit, dass in astrophysikalischen Systemen Solitonen in Form von elektromagnetischen Wellen auftreten können. Sind diese nichtlinearen Wellen einmal entstanden, können sie mit weiteren Teilchen, z.B. Elektronen, im Plasma wechselwirken. Als Folge dieser Beschleunigung der geladenen Teilchen durch die Felder des Solitons entsteht elektromagnetische Strahlung; diese Strahlung soll nun betrachtet werden, insbesondere die Intensität.

6.2 Entwicklung des Strahlungsfeldes

Dazu muss natürlich zunächst das Strahlungsfeld betrachtet werden, m.a.W. wie sieht die Intensitätsverteilung der elektromagnetischen Strahlung der Elektronen aus, wenn sie durch ein Soliton beschleunigt werden? Es bietet sich an, dass man diese Fragestellung zunächst für ein einzelnes Elektron untersucht und dann über eine geeignete Verteilungsfunktion integriert, um die Strahlung des Elektronenensembles zu bestimmen.

6.2.1 Die gesamte abgestrahlte Leistung

Die Strahlungsleistung eines einzelnen geladenen Teilchens ist allgemein gegeben durch

$$P = (2e^2/3c)\gamma^6(\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2) \quad (6.1)$$

(siehe in Jackson [19]), mit der Geschwindigkeit $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ normiert auf die Lichtgeschwindigkeit. Wie im Abschnitt 5.4.2 gezeigt, erhält man für ein Elektron, welches beschleunigt wird durch die bisher betrachtete Solitonwelle, als Strahlungsleistung

$$P = (2e^2/3c)\Gamma_b^2(1 + \varpi_y^2)(\dot{W}/c)^2, \quad (6.2)$$

wobei wiederum $W = eA/mc$. Hieraus erhält man dann die totale abgestrahlte Energie eines Elektrons durch Integration über die Wechselwirkungszeit mit der nichtlinearen Welle oder – mit Hilfe der Substitution $\xi c dt = d\zeta = L dx$ – durch Integration über die Länge des Solitons und es ergibt sich (man erinnere sich, dass $z_i = e/(Mc)$ gilt)

$$\mathcal{E} = \int P dt = \frac{4e^2}{3\mu^2 L} (z_i A_{max})^2 \frac{c}{V_b} \Gamma_b^2 (1 + \varpi_y^2) \int_{R^2}^1 du \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (6.3)$$

Mit der Definition aus Gleichung (5.63),

$$I_R \equiv \int_{R^2}^1 du \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \int_{R^2}^1 du \frac{(1-u)^{1/2}(u-R^2)^{1/2}}{u^{1/2}}, \quad (6.4)$$

ist die abgestrahlte Energie beschrieben durch

$$\mathcal{E} = (4e^2/3\mu^2 L)(z_i A_{max})^2 (c/V_b) \Gamma_b^2 (1 + \varpi_y^2) I_R. \quad (6.5)$$

6.2.2 Strahlung eines Elektrons

Die differentielle Intensität im Frequenzintervall von ω bis $\omega + d\omega$ und im Raumwinkelbereich Ω bis $\Omega + d\Omega$ ist durch

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})) \exp[i\omega(t - \vec{n} \cdot \vec{r}(t)/c)] \right|^2 \quad (6.6)$$

gegeben [19] mit der normierten Geschwindigkeit $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ und dem Einheitsvektor $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ (wobei $|\vec{n}| = 1$) in Richtung der Sichtlinie. Die Teilchengeschwindigkeit kann formal aufgeteilt werden in einen konstanten Term (unabhängig vom Potential A) und in einen Differenzterm, in welchem das variierende Vektorpotential A vorkommt,

$$\begin{aligned} \beta_x &\equiv \beta_{0,x} + \Delta\beta_x, \\ \beta_y &\equiv \beta_{0,y} + \Delta\beta_y, \\ \beta_z &= V_b/c = \xi^{-1}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_{0,x} &= \frac{\Pi_x - z_a R^2 A_{max}}{\Gamma_b E_{\perp} [R^2 A_{max}]}, \\ \beta_{0,y} &= \frac{\varpi_y}{\Gamma_b E_{\perp} [R^2 A_{max}]} \end{aligned} \quad (6.8)$$

die konstanten Geschwindigkeiten außerhalb des Solitons (wo $A = R^2 A_{max}$) und

$$\begin{aligned} \Delta\beta_x &= \frac{1}{\Gamma_b} \left[\Pi_x \left(\frac{1}{E_{\perp} [A]} - \frac{1}{E_{\perp} [R^2 A_{max}]} \right) - z_a \left(\frac{A}{E_{\perp} [A]} - \frac{R^2 A_{max}}{E_{\perp} [R^2 A_{max}]} \right) \right], \\ \Delta\beta_y &= \frac{\varpi_y}{\Gamma_b} \left(\frac{1}{E_{\perp} [A]} - \frac{1}{E_{\perp} [R^2 A_{max}]} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

die Differenzen der Teilchengeschwindigkeit innerhalb des Solitons sind. Man beachte, dass sich $\Delta\beta_x$ und $\Delta\beta_y$ nur für $|\zeta| = |z_0 - (c^2 t / V_b \Gamma_b^2)| < \zeta_{end}$ von Null unterscheiden. So erhält man für die Teilchenbahn

$$x(t) = x_0 + \beta_{0,x} c t + c \int_{-\infty}^t \Delta\beta_x(t') dt', \quad (6.10)$$

$$y(t) = y_0 + \beta_{0,y} c t + c \int_{-\infty}^t \Delta\beta_y(t') dt', \quad (6.11)$$

$$z(t) = z_0 + V_b t. \quad (6.12)$$

Dann kann die Phase $\Phi(t) = \omega(t - \vec{n} \cdot \vec{r}(t)/c)$ in Gleichung (6.6) mit Hilfe der Teilchentrajektorien ausgedrückt werden,

$$\Phi(t) \equiv \Phi_0 - \Delta\Phi, \quad (6.13)$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \omega [t(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0) - \vec{n} \cdot \vec{r}_0/c], \\ \Delta\Phi &= \omega \int_{-\infty}^t dt' [n_x \Delta\beta_x(t') + n_y \Delta\beta_y(t')], \end{aligned} \quad (6.14)$$

wobei $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und $\vec{\beta}_0 = (\beta_{0,x}, \beta_{0,y}, V_b/c)$. Man beachte, dass zwar $\Delta\Phi(\zeta \leq -\zeta_{end}) = 0$, aber $\Delta\Phi(\zeta \geq \zeta_{end}) = \Delta\Phi(\zeta_{end}) \neq 0!$ Daher erhält man mit der Einführung der Definition

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{\beta}(t) \exp[i\Phi(t)] \equiv \hat{J}, \quad (6.15)$$

eine alternative Version von Gleichung (6.6),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \hat{J})|^2 = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} |\vec{n}(\vec{n} \cdot \hat{J}) - \hat{J}|^2 \\ &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} (\hat{J} \cdot \hat{J}^* - |\vec{n} \cdot \hat{J}|^2) = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \hat{J}_\perp \cdot \hat{J}_\perp^* > 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

mit dem senkrechten Anteil des Integrals

$$\hat{J}_\perp = \hat{J} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \hat{J}). \quad (6.17)$$

Die ausführlichere Berechnung der Integrale (6.15) ist in Anhang D.1 durchgeführt, indem sie auf zwei grundlegende Integrale zurückgeführt werden,

$$\Delta\Phi(\zeta) = \omega \Lambda \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta} d\zeta' [n_x \Delta\beta_x(\zeta') + n_y \Delta\beta_y(\zeta')], \quad (6.18)$$

$$j_y = \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l \zeta - i\Delta\Phi(\zeta)] \Delta\beta_y(\zeta) \quad (6.19)$$

mit $\Lambda = (V_b \Gamma_b^2 / c^2)$ und $l = (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0) \Lambda$. Man erhält als Ergebnis

$$\vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^* = |\vec{j}_2|^2 + \frac{(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{j}_2^*)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2) + (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{j}_2)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2^*)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)} - \frac{1 - (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0)}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^2} |\vec{n} \cdot \vec{j}_2|^2, \quad (6.20)$$

wobei $\vec{j}_2 = (j_x, j_y, 0)$. Es gilt weiter, dass die Komponente j_x aus j_y durch Vertauschung des Index' y mit x hervorgeht. Mit dem Zusammenhang $\hat{J} = \Lambda \varphi_0 \vec{j}$ ist somit ein Ausdruck für die differentielle Intensität ($d^2 I / d\omega d\Omega$) gegeben, wobei $\varphi_0 = \exp[-i\omega(\vec{n} \cdot \vec{r}_0 / c)]$ eine konstante Phase darstellt, welche bei der Bildung des Betragsquadrats in Gleichung (6.20) Eins ergibt und demzufolge weggelassen werden kann.

6.2.3 Wechselwirkung mit dem Soliton

Nun muss man die Teilchenbewegung eines einzelnen Elektrons unter dem Einfluss der solitären Welle betrachten. Innerhalb des Intervalls $-\zeta_{end} \leq \zeta \leq \zeta_{end}$ ist die Bewegung durch die Differenzgeschwindigkeiten $\Delta\beta_x$ und $\Delta\beta_y$ als eine Funktion des Ortes ζ bestimmt. Zudem tritt eine Phasenverschiebung $\Delta\Phi(\zeta)$ ein. Die Berechnung der Geschwindigkeiten bis zur zweiten Ordnung in ζ wird in Anhang D.2 durchgeführt und führt zu

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\beta} &\equiv \Delta\vec{\beta}_0(\zeta_{end} - |\zeta|)^2 && \text{in } \zeta_{max} \leq |\zeta| \leq \zeta_{end}, \quad \text{Regime (a),} \\ &\equiv \Delta\vec{\beta}_1 - \Delta\vec{\beta}_2 \zeta^2 && \text{in } 0 \leq |\zeta| \leq \zeta_{max}, \quad \text{Regime (b);} \end{aligned} \quad (6.21)$$

im Anhang finden sich auch die Definition der Größen $\Delta\vec{\beta}_0$, $\Delta\vec{\beta}_1$ und $\Delta\vec{\beta}_2$. Wie im Anhang nahegelegt wird, ist es erforderlich, die Wechselwirkung in mehrere räumlich

getrennte Gebiete oder Regimes aufzuteilen. Dabei entspricht Regime (a) den beiden äußeren Gebieten des Solitons, wo die Feldstärke vom Maximalwert bei ζ_{max} auf Null bei ζ_{end} abfällt. Dieses ist der kleinere Bereich, in dem die stärkeren Gradienten des Feldes auftreten, besonders für sehr kleine Parameter R . Das Regime (b) kennzeichnet den inneren Bereich der Welle von $-\zeta_{max}$ bis ζ_{max} , wo die Welle vom maximalen Wert b_{max} des Feldes über den Wert Null bei $\zeta = 0$ auf den negativsten Wert für $-b_{max}$ fällt, wie es auch Abbildung 5.5 zeigt.

Es folgt aus Kapitel 5.3, dass nur Teilchen mit $|p_j| \ll |z_a R^2 A_{max}| \leq |z_a A_{max}|$ zur Strahlung beitragen, da für solche mit höherem Impuls die Verteilungsfunktion rasch gegen Null strebt. Die obige Näherung beschreibt daher Teilchen, welche einen vergleichsweise geringen Impuls besitzen und somit lange mit dem Soliton wechselwirken (im Folgenden auch als „langsame“ Teilchen bezeichnet). Es ist diesen Teilchen also möglich, die Welle ihrerseits zu beeinflussen.

Hat man nun die Ausdrücke (6.21) für die Geschwindigkeiten, können die Integrale (6.18), $\Delta\Phi(\zeta)$, (6.19), j_y , und j_x (aus j_y durch Tausch der Indizes y und x) mit den Definitionen (6.21a, 6.21b) ausgeführt werden. Für $\Delta\Phi$ muss man die Welle wieder in drei Bereiche einteilen und erhält abschnittsweise gültige Lösungen,

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_1(\zeta) &\equiv \Delta\Phi(-\zeta_{end} \leq \zeta \leq -\zeta_{max}) \\
&= \omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)(\zeta_{end} + \zeta)^3/3, \\
\Delta\Phi_2(\zeta) &\equiv \Delta\Phi(-\zeta_{max} \leq \zeta \leq \zeta_{max}) \\
&= \Delta\Phi_1(\zeta = -\zeta_{max}) + \omega\Lambda[(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)(\zeta_{max} + \zeta) - (\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2)(\zeta_{max}^3 + \zeta^3)/3], \\
\Delta\Phi_3(\zeta) &\equiv \Delta\Phi(\zeta_{max} \leq \zeta \leq \zeta_{end}) \\
&= \Delta\Phi_2(\zeta = \zeta_{max}) - \omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)[(\zeta_{end} - \zeta)^3 - (\zeta_{end} - \zeta_{max})^3]/3. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Nun muss man noch den Außenbereich betrachten. Für $\zeta \leq -\zeta_{end}$ – also vor der Wechselwirkung – gilt trivialerweise $\Delta\Phi \equiv 0$, da die Größe $\Delta\Phi$ ja gerade den Phasenunterschied beschreiben soll, welcher durch die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Soliton entsteht. Allerdings ist i.A. $\Delta\Phi(\zeta \geq \zeta_{end}) \neq 0$; jedoch kann dieses mit Hilfe der obigen Lösungen (6.22a–c) für $\Delta\Phi$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(\zeta \geq \zeta_{end}) &= \Delta\Phi_3(\zeta_{end}) \\
&= 2\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3 \\
&\quad + 2\omega\Lambda\zeta_{max}[(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1) - (\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2)\zeta_{max}^2/3]. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Nach den Transformationen $\zeta + \zeta_{end} \equiv z$ in der Lösung (6.22a), $\zeta + \zeta_{max} \equiv z$ in der Lösung (6.22b) und $-\zeta + \zeta_{end} \equiv z$ in der Lösung (6.22c) erhält man abschließend

$$\begin{aligned}
j_y &= \int_{-\zeta_{end}}^{-\zeta_{max}} \Delta\beta_{0,y}(-\zeta_{end} - \zeta)^2 \exp[i\omega l\zeta - i\Delta\Phi_1(\zeta)]d\zeta \\
&\quad + \int_{-\zeta_{max}}^{\zeta_{max}} (\Delta\beta_{1,y} - \Delta\beta_{2,y}\zeta^2) \exp[i\omega l\zeta - i\Delta\Phi_2(\zeta)]d\zeta \\
&\quad + \int_{\zeta_{max}}^{\zeta_{end}} \Delta\beta_{0,y}(\zeta_{end} - \zeta)^2 \exp[i\omega l\zeta - i\Delta\Phi_3(\zeta)]d\zeta \\
&= \Delta\beta_{0,y} \left[\int_0^{\zeta_{end}-\zeta_{max}} dz z^2 \exp[i\omega l(z - \zeta_{end}) - i\Delta\Phi_1(z - \zeta_{end})] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\zeta_{end}-\zeta_{max}}^0 dz z^2 \exp[-i\omega l(z - \zeta_{end}) - i\Delta\Phi_3(-z + \zeta_{end})] \\
& + \int_0^{2\zeta_{max}} dz [\Delta\beta_{1,y} - \Delta\beta_{2,y}(\zeta_{max}^2 - 2\zeta_{max}z + z^2)] \\
& \times \exp[i\omega l(z - \zeta_{max}) - i\Delta\Phi_2(z - \zeta_{max})]
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Ersetzt man alle in Gleichung (6.24) explizit auftauchenden y -Indizes durch x -Indizes, so ergibt sich der entsprechende Ausdruck für j_x .

Man beachte, dass in jedem Integrand von j_y und j_x ein exponentieller Ausdruck der allgemeinen Form $\psi_0 + \psi_1 z + \psi_3 z^3$ vorliegt. Man kann also ein grundlegendes Integral in der Gestalt

$$\int_0^{\mathcal{A}_j} dz z^n \exp[i\psi_{1,j}z + i\psi_{3,j}z^3] \equiv M_n[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}] \tag{6.25}$$

definieren. Einige allgemeine Aussagen und Bemerkungen zu diesem Integral sollen zunächst erwähnt werden. So gilt erstens für die obere Integrationsgrenze $\mathcal{A}_j \in \{\zeta_{end} - \zeta_{max}, 2\zeta_{max}\} > 0$. Zweitens ist auch der erste Parameter stets größer als Null, $\psi_{1,j} \in \{\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0), \omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)\} > 0$, weil $\vec{n} \cdot \vec{\beta} \leq 1$. Daher kann also nur $\psi_{3,j} \in \{-\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)/3, \omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2)/3\}$ u.U. auch negativ sein, und man ist interessiert an den beiden Integralen

$$M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}] = \int_0^{\mathcal{A}_j} dz z^n \exp[i(\psi_{1,j}z \pm |\psi_{3,j}|z^3)]. \tag{6.26}$$

Als Nebenbemerkung sei erwähnt, dass $\psi_{1,j}, |\psi_{3,j}| \propto \omega$. Später in diesem Abschnitt und im Anhang G wird dieses noch von Bedeutung sein.

Für \vec{j}_\perp muss man also betrachten

$$\begin{aligned}
j_y & = \Delta\beta_{0,y} \left(M_2[\zeta_{end} - \zeta_{max}; \omega l, -\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)/3] \exp[-i\omega l \zeta_{end}] \right. \\
& + M_2[\zeta_{end} - \zeta_{max}; \omega l, -\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)/3]^* \exp[i\omega l \zeta_{end} - i\Delta\Phi(\zeta_{end})] \\
& + \left[\left(\Delta\beta_{1,y} - \Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}^2 \right) M_0[2\zeta_{max}; \omega(l - \Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)), \omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2)/3] \right. \\
& + 2\Delta\beta_{2,y}\zeta_{max} M_1[2\zeta_{max}; \omega(l - \Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)), \omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2)/3] \\
& \left. - \Delta\beta_{2,y} M_2[2\zeta_{max}; \omega(l - \Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)), \omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2)/3] \right] \\
& \times \exp[-i\omega l \zeta_{max} - i\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3]
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Analog dazu ergibt sich j_x , indem man die Indizes y und x vertauscht. Ist dieses getan, lässt sich hieraus folgend $\vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^*$ (aus Gleichung (D.6)) mit Hilfe der Integrale $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$ formulieren. Man muss abschließend „nur“ noch den kompletten Ausdruck für das differentielle Intensitätsspektrum formulieren, sobald die M_n -Integrale ausgerechnet sind.

Man beachte, dass man zur Berechnung der Integrale (6.26) auf Näherungen angewiesen ist; diese Näherungen werden in Anhang E hergeleitet. Daher hat man zwei Regimes mit den Definitionen (6.21a, 6.21b) und demnach je drei Variablen für die beiden verschiedenen Versionen $M_{n,a}$ und $M_{n,b}$, nämlich $\mathcal{A}_a, \psi_{1,a}, \psi_{3,a}, \mathcal{A}_b, \psi_{1,b}$ und $\psi_{3,a}$. Zur vollständigen Berechnung der solitären Welle muss man also die beiden Lösungen einzeln bestimmen und anschließend zusammenfügen.

Leider wird die weitere Berechnung durch eine weitere Eigenschaft der Funktionen M_n erschwert. Die in dem Integral auftretenden Skalarprodukte $\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_0$ und $\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_2$ (im Nachfolgenden durch $\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2}$ zusammengefasst) haben zur Folge, dass $|\psi_{3,j}|$ sein Vorzeichen wechseln kann, abhängig vom Winkel zwischen der Sichtlinie des Beobachters und den Geschwindigkeiten. Diese Vorzeichenwechsel erfordern eine unterschiedliche Behandlung der Funktionen M_n , welche nachfolgend als Fall (1) für $\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2} > 0$ und Fall (2) für $\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2} < 0$ bezeichnet werden. Dieses gilt es dann zu berücksichtigen, falls später das Spektrum über einen Raumwinkel integriert werden sollte; daher muss man beide Fälle betrachten und mitnehmen.

So kann man die Integrale $M_n[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$ für niedrige und hohe Frequenzen entwickeln, wie es in Anhang E durchgeführt ist. Es ist weiterhin von Nutzen, charakteristische (konstante) Längen

$$\zeta_{c,j} \equiv (\psi_{1,j}/3|\psi_{3,j}|)^{1/2} \quad (6.28)$$

und charakteristische Frequenzverhältnisse

$$\omega/\omega_{c,j} \equiv (\psi_{1,j}^3/3|\psi_{3,j}|)^{1/2} \quad (6.29)$$

einzuführen, mit $j \in \{a, b\}$. Für letzteres gilt wegen der Tatsache, dass alle $\psi_{1,j}$ und $\psi_{3,j}$ proportional zu ω sind, $\omega_{c,j} = const$. Man beachte, dass beide charakteristischen Größen Funktionen des Teilchenimpuls $\vec{\omega}$ und des Winkels zur Beobachtungsrichtung \vec{n} sind, und daher ist eine gewisse Sorgfalt bei den weiteren Berechnungen erforderlich, um das Frequenzspektrum ausrechnen zu können.

An dieser Stelle sollen noch einmal die letzten Schritte rekapituliert werden: es müssen vier verschiedene Annahmen für die Herleitung des differentiellen Frequenzspektrums betrachtet werden:

- die verschiedenen Regimes (a) und (b);
- der Einfluss des Beobachtungswinkels, was auf die Fälle (1) und (2) führt;
- die Unterscheidung in einen Niedrig- und Hochfrequenzbereich;
- und die „Stärke“ des Solitons, abhängig davon, ob $R \rightarrow 0$ oder $R \rightarrow 1$. Da R von der Verteilungsfunktion und A_{max} abhängt, muss man sich vor dem Ermitteln des Spektrums auf eine bestimmte Verteilung festlegen.

Es sind also insgesamt $2^4 = 16$ verschiedene Berechnungen nötig, um das Problem der Strahlung eines Ensembles von Elektronen aufgrund eines Solitons in seiner Gesamtheit erschöpfend zu behandeln. Man kann sich die Arbeit jedoch erleichtern, indem man diese vier Bedingungen in eine sinnvolle Reihenfolge bringt. Denn man kann zunächst die „äußere Rahmenbedingung“ festlegen – ob man nun eine starke oder schwache solitäre Welle betrachtet. Dies hängt in großem Maße von der Wahl der Verteilungsfunktion ab. Hat man sich in dieser Frage entschieden, so wird dieses für den Rest der Rechnungen beibehalten. Dann kann man zur Berechnung des Spektrums eines einzelnen Elektrons beide Regimes des Solitons betrachten und anschließend die Frequenznäherungen bestimmen. Ist man dann an der Winkelabhängigkeit oder am Spektrum einer Verteilung von Teilchen interessiert, muss man den Winkeleffekt berücksichtigen.

6.2.4 Das differentielle Intensitätsspektrum für niedrige und hohe Frequenzen

Die Näherungen, welche im letzten Abschnitt und in Anhang E hergeleitet wurden, können nun zur Berechnung des differentiellen Intensitätsspektrums benutzt werden. Diese stellen die ausführlichsten Berechnungen dieser Arbeit dar und werden aufgrund ihrer Länge in den Anhängen G und H durchgeführt. In diesem Abschnitt werden daher die Ergebnisse für die einzelnen Fälle dargestellt. Es sei angemerkt, dass alle Skalengrößen der Frequenz und Länge wie ω_0 , α , $\omega_{c,j}$, $\zeta_{c,j}$ usw. in den Anhängen definiert sind.

Es ist von Nutzen, wenn an dieser Stelle die nötigen Parameter noch einmal zusammengefasst werden:

Größe	Bedeutung
Π_x, ϖ_y	Teilchenimpuls in x, y -Richtung
$E_0 = \sqrt{1 + \Pi_x^2 + \varpi_y^2}$	senkrechter Anteil der Teilchenenergie senkrecht zum Bulk
θ, ϕ	sphärische Winkel zwischen Bulkbewegung und Sichtlinie
Γ_b	Lorentzfaktor des Bulks
$\xi^{-1} = V_b/c = \sqrt{1 - \Gamma_b^{-2}}$	Geschwindigkeit des Bulks, gegeben durch Lorentzfaktor
$\Lambda = V_b \Gamma_b^2 / c^2$	
A_{max}	maximal mögliches Vektorpotential
$z_a = q_a / (m_a c^2)$	
$G_0 = 8\pi \sum_a n_a q_a $	Koeffizient aus der Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion
$R = G_2 / (2G_0 A_{max}^2)$	Parameter für das Soliton, hängt von der Verteilungsfunktion ab, vgl. Gleichung (5.64)
$L = (\xi^2 - 1)^{3/2} A_{max} / G_0$	charakteristische Länge im Soliton
$\zeta_{max} = x_{max} L, \zeta_{end} = x_{end} L$	Koordinate des Maximums/Endpunkts des Solitons, x_{max}, x_{end} hängen von R ab, vgl. Formeln (5.72)

Hierbei sei noch anzumerken, dass über Impuls und Winkel gegebenenfalls integriert werden kann, will man ein Ensemble von Teilchen oder das Spektrum im ganzen Raum betrachten. Als äußere Parameter werden Γ_b und A_{max} behandelt; diese Größen muss man aus Beobachtungen und/oder Simulationen gewinnen, da sie den Bulk als Ganzes beschreiben.

Im weiteren Verlauf, jeweils am Ende eines Abschnitts, werden auch numerische Lösungen für das Spektrum berechnet. Es wird ein reines Elektronenplasma mit einer Potenzverteilung¹

$$F_a = \frac{\gamma - 2}{2\pi} \frac{\delta[\Pi_z]}{(1 + \Pi_x^2 + \varpi_y^2 + \Pi_z^2)^{\gamma/2}} \quad (6.30)$$

angenommen. Zur einfacheren Berechnung werden sowohl die Frequenz als auch die differentielle Intensität in dimensionslosen Einheiten angegeben; man hat also als Varia-

¹ Alternativ könnte man in Analogie zu einer κ -Verteilung als Exponent $\kappa + 1$ verwenden. Die Beziehung zwischen beiden Werten ist durch $\kappa = \gamma/2 - 1$ gegeben.

blen $(\Lambda L)\omega$ bzw. $(4\pi^2 c/e^2)(d^2 I/d\omega d\Omega)$. Die verwendeten Parameter besitzen die Werte $\Gamma_b = 10$, $z_a A_{max} = 10$ und (mit $\gamma = 5$ bzw. $\kappa = 3/2$) $R = 10^{-1}$; und für einzelne Teilchen gelten $\Pi_x = \varpi_y = 10^{-3}$ sowie ein Winkel gegeben durch $\theta = \phi = \pi/2$, soweit nicht anders angegeben.

Untersucht man nun diesen Fall, so erhält man im Laufe der Rechnungen zwei Funktionen (in sphärischen Koordinaten), welche nur von den Winkeln $\theta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ und der Bulkgeschwindigkeit (hier in Form des Lorentzfaktors Γ_b) abhängt. Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned} S_1[\theta, \phi, \Gamma_b] &\equiv 1 - \beta_0 n_z + n_x/\Gamma_b = 1 - \sqrt{1 - \Gamma_b^{-2}} \cos \theta + \sin \theta \cos \phi/\Gamma_b \\ S_2[\theta, \phi, \Gamma_b] &\equiv |n_y|/\Gamma_b = \sin \theta |\sin \phi|/\Gamma_b \end{aligned} \quad (6.31)$$

Die Eigenschaften dieser Funktionen und ihres Verhältnisses $S_r \equiv S_1/S_2$ werden detailliert in Anhang F diskutiert.

Im Falle niedriger Frequenzen sind die Rechnungen noch verhältnismäßig einfach, da die Näherung für die Integrale (6.26) auf ein simples Ergebnis gebracht werden kann. Im Anhang G wird gezeigt, dass das Spektrum die Form

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \quad (6.32)$$

besitzt und durch die Bedingung

$$\omega \ll \omega_{low} \equiv \min[(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j}, 3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^3\omega_{c,j}] \quad (6.33)$$

bis auf die Ausnahme $R \ll 1$ im Falle (a) eingegrenzt ist. Dieses quadratische Verhalten des Spektrums ist wohlbekannt, es liegt *Dipolstrahlung* vor.

Im Bereich hoher Frequenzen (siehe Anhang H) muss man etwas vorsichtiger vorgehen. Wie in Anhang E gezeigt, sind zwei verschiedene Näherungen möglich, abhängig davon, ob die Skalarprodukte $\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}$ nahe Null sind oder nicht. Es gilt auch zu beachten, dass man für $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| > 0$ zwei verschiedene Lösungen (dennoch mit gleicher Struktur) erhält. Diese unterschiedlichen Resultate hängen mit dem Winkel zwischen dem Soliton und der Sichtlinie zum Beobachter zusammen, je nachdem, ob die Skalarprodukte $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2})$ positiv oder negativ sind. Die Lösung (1) für beide Fälle ist mit Hilfe der Stufen- oder *Heavisidefunktion* $H[\mathcal{A}_j^2 - \zeta_{c,j}^2]$ gegeben durch

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{\pi}{\Gamma_b^2 S_2^2} \left(\frac{2\omega}{\omega_{c,a}} H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] + \frac{\omega}{\omega_{c,b}} \exp \left[-\frac{4\omega}{3\omega_{c,b}} \right] \right). \quad (6.34)$$

Die Lösung (2) lässt sich ähnlich finden und wird beschrieben durch

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{\pi}{\Gamma_b^2 S_2^2} \left(\frac{2\omega}{\omega_{c,b}} H[\mathcal{A}_b^2 - \zeta_{c,b}^2] + R^{12} \frac{\omega}{\omega_{c,a}} \exp \left[-\frac{4\omega}{3\omega_{c,a}} \right] \right). \quad (6.35)$$

Es gilt die Einschränkung

$$\omega \gg \omega_{high} \equiv \max[(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j}, 3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^3\omega_{c,j}], \quad (6.36)$$

welche in Anhang H spezifiziert ist.

Ist jedoch $\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2} \simeq 0$, d.h. $\theta = 0, \pi$ oder $\phi = 0, \pi, 2\pi$, so können wegen des Faktors S_2^{-2} Polstellen auftreten. Nach Anhang E muss jedoch in der Nähe dieser Winkel ein anderer Ansatz gewählt werden,

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2 \alpha^2}{4\pi^2 c} \quad (6.37)$$

mit einer unteren Beschränkung der Frequenz durch

$$\omega \gg \omega_{high}^* \equiv \max[(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j}] \quad (6.38)$$

Gleichung (6.37) hängt nicht von den Winkeln θ und ϕ ab, sondern nimmt immer einen konstanten Wert ($< \infty$) an. Als einfache Näherung wird im Folgenden die Vorschrift benutzt, dass stets die *kleinere* der Gleichungen (6.34/6.35) und (6.37) verwendet wird.

Numerisches Beispiel

In diesem Abschnitt wird eine mögliche Kombination für die Wechselwirkung des Solitons mit den Elektronen durchgerechnet. Soweit nicht anders angegeben, gelten immer folgende Werte²:

$$\begin{aligned} \Gamma_b &= 10, \\ z_a A_{max} &= 10 \\ R &= 10^{-1}, \quad \text{mit } \gamma = 5, \\ \Pi_x = \varpi_y &= 10^{-3}, \\ \theta = \phi &= \pi/2. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Im Niederfrequenzbereich ergeben sich aus Gleichung (6.32)

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq 3.79 \times 10^{-5} (\Lambda L)^2 \omega^2 \frac{e^2}{4\pi^2 c} \quad (6.40)$$

mit dem allgemeinen Grenzwert (6.33)

$$\omega \ll \omega_{low} \simeq \frac{2.61 \times 10^{-1}}{\Lambda L}. \quad (6.41)$$

Für hohe Frequenzen und $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| > 0$, so ergibt sich für die Differenz $\mathcal{A}_j^2 - \zeta_{c,j}^2 < 0$ und somit tragen in den Gleichungen (6.34, 6.35) nur die Exponentialfunktionen zum Ergebnis bei. Es folgt für den Fall (1), $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) > 0$, die Lösungen

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq 2.00 \times 10^3 (\Lambda L) \omega \exp[-8.43 \times 10^2 (\Lambda L) \omega] \frac{e^2}{4\pi^2 c}, \quad (6.42)$$

während sich analog für den Fall (2), $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) < 0$,

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq 2.00 \times 10^{-12} (\Lambda L) \omega \exp[-8.43 \times 10^{-1} (\Lambda L) \omega] \frac{e^2}{4\pi^2 c} \quad (6.43)$$

²Hierbei muss zwischen äußeren Parametern Γ_b , $z_a A_{max}$ und γ (und daraus folgend R) sowie den Teilchenparametern Π_x , ϖ_y , θ und ϕ unterschieden werden. Erstere gelten für den ganzen Jet und sind prinzipiell entweder aus Messungen/Simulationen oder aus plausiblen Annahmen zugänglich. Die Teilchenparameter sind hingegen so gewählt, dass sie die verwendeten Näherungen erfüllen und auch die Winkelfunktionen keine Nullstellen annehmen.

ergibt. Als Abschätzung für die Gültigkeit folgt

$$\omega \gg \omega_{high} \simeq \frac{1.91 \times 10^5}{\Lambda L}. \quad (6.44)$$

Hieraus folgt wegen der Exponentialfunktion in den Gleichungen (6.42) und (6.43), dass die Intensität in diesem Hochfrequenzbereichen sehr rasch gegen Null strebt. Die Strahlung wird daher hauptsächlich in der niederfrequenten Dipolform (6.40) abgegeben.

Ist jedoch der Winkel $\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2} \simeq 0$ muss man zu den Winkeln $\theta \simeq 0, \pi$ oder $\phi \simeq 0, \pi, 2\pi$ übergehen. Setzt man $\theta = \pi$, so erhält man

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq 5.34 \times 10^{-4} \frac{e^2}{4\pi^2 c} \quad (6.45)$$

mit

$$\omega \gg \omega_{high,*} \simeq \frac{4.43}{\Lambda L}. \quad (6.46)$$

Eine graphische Darstellung dieser Ergebnisse folgt nach der Bestimmung des Übergangsbereich mit der Übergangsfrequenz ω_* zwischen den einzelnen Näherungen. Ist der Übergangswert gegeben, könnte man zudem als Näherung für den gesamten Frequenzraum wegen der rasch abfallenden Exponentialfunktion die Form

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 H[\omega_* - \omega] \quad (6.47)$$

annehmen. Man beachte, dass hierbei das Hochfrequenzregime nicht bedeutungslos ist. Schließlich wird erst durch dieses die Übergangsfrequenz festgelegt. Näherung (6.47) wird im weiteren Verlauf dann anstatt der Näherungen (6.32), (6.34) und (6.35) verwendet, wenn letztere sich als nicht handhabbar erweisen.

6.2.5 Zwischenwerte

Bis hierher wurde der Verlauf des Spektrums für niedrige und hohe Frequenzen dargestellt. Es ist klar, dass in dem Bereich zwischen diesen Extremen das Spektrum einen kontinuierlichen, glatten Verlauf annehmen sollte. Dieser ist jedoch analytisch nicht berechenbar, so dass im weiteren Verlauf die simple Annäherung durch Bestimmung der Schnittpunkte ω_* der hoch- und niederfrequenten Lösungen gewählt wird, um das Spektrum zu „vervollständigen“. Dieses hängt natürlich wiederum von den im vorigen Abschnitt bestimmten Näherungen ab.

Man erhält als Lösung von ω_* die Gleichung

$$\omega_* = \frac{2\pi}{\Gamma_b^2} \frac{\omega_0^2}{S_2^2 \omega_{c,j}} \quad (6.48)$$

für $\mathcal{A}_j^2 \geq \zeta_{c,j}^2$, und für $\mathcal{A}_j^2 < \zeta_{c,j}^2$

$$\omega_* = \frac{3}{4} \omega_{c,j} W \left[\frac{4\pi R^s \omega_0^2}{3\Gamma_b^2 S_2^2 \omega_{c,j}^2} \right], \quad (6.49)$$

wobei $W[z]$ die Lambertsche W -Funktion bezeichnet, die Lösung x der transzendenten Gleichung $z = x \exp[x]$. Es gilt $s = 0$ für Regime (b) sowie in Regime (a) $s = 12$.

Typische Verläufe dieser Lösungen für das differentielle Frequenzspektrum sind am Ende dieses Abschnitts gegeben in den Abbildungen 6.1 und 6.2.

Für den Sonderfall, dass $\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2} \simeq 0$, ergibt sich als Zwischenwert

$$\omega_{*,\alpha} = \alpha\omega_0, \quad (6.50)$$

und das differentielle Spektrum für diesen Fall ist abgebildet in Abbildung 6.3. Jedoch ist diese Lösung nur in einem kleinen Raumbereich gültig, vgl. Diskussion in Anhang H.3.

Man beachte weiterhin, dass die Lösungen (6.34), (6.35) und (6.37) ein Problem im Bereich hoher Frequenzen haben, die letzteren für den Fall, dass $\mathcal{A}_j^2 < \zeta_{c,j}$. Um auf die Gesamtleistung des Elektrons zu kommen, müssten diese Lösungen über $\omega_{high} \leq \omega \leq \infty$ integriert werden, und man erhielte eine unendlich hohe Leistung³. Es ist jedoch aus Kapitel 5.4.2 bekannt, dass die abgestrahlte Energie eines Elektrons genau durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{4e^2}{3L} \left(\frac{eA_{max}}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{V_b} \Gamma_b^2 (1 + \varpi_y^2) I_R \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{1}{\Lambda L} \frac{16\pi^2}{3\mu^2} \Gamma_b^3 I_R (1 + \varpi_y^2) (z_i A_{max})^2, \end{aligned} \quad (6.51)$$

beschränkt ist, wobei $\mu = m_e/m_i$ und I_R in (5.122) definiert wurde. Es existiert also eine „Kante“ im differentiellem Frequenzspektrum bei hohen Frequenzen, an dem das Elektron seine gesamte Energie verloren hat. Diese Einschränkung erlaubt es, die maximale Frequenz ω_{max} zu berechnen, indem man über alle Frequenzen und den Raumwinkel integriert. Da man jedoch für die Intensität zwei verschiedene Gleichungen hat (je nach Raumwinkel), wird zweckmäßigerweise die diese Integration in die Bereiche A und B aufgeteilt. A bezeichnet den Raumwinkel, in denen Gleichung (6.34) oder (6.35) gelten⁴; in B wird entsprechend über die Intensität (6.37) integriert. Hier kann wieder in dem Sinne verfahren werden, dass jeweils die *kleinere* der Intensitäten maßgebend ist. Es gilt dann für die Spektren

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int d\Omega \int_0^{\omega_{max}} d\omega \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \\ &\simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left[\int_A d\Omega \int_0^{\omega_*} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\pi}{\Gamma_b^2} \int_A d\Omega \int_{\omega_*}^{\omega_{max}} d\omega \frac{\omega}{S_2^2 \omega_{c,j}} \right. \\ &\quad \left. + \int_B d\Omega \int_0^{\omega_{*,\alpha}} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \int_B d\Omega \int_{\omega_{*,\alpha}}^{\omega_{max}} \alpha^2 \right] \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left[\frac{2\pi^3}{3\Gamma_b^6} \int_A d\Omega \frac{\omega_0^4}{S_2^6 \omega_{c,j}^3} - \frac{2}{3} \int_B d\Omega \alpha^3 \omega_0 + \omega_{max} \int_B d\Omega \alpha^2 + \omega_{max}^2 \frac{\pi}{2\Gamma_b^2} \int_A d\Omega \frac{1}{S_2^2 \omega_{c,j}} \right]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Hieraus kann man für die maximale Frequenz die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{max}^2 \left[\frac{\pi}{2\Gamma_b^2} \int_A d\Omega \frac{1}{S_2^2 \omega_{c,j}} \right] + \omega_{max} \left[\int_B d\Omega \alpha^2 \right] \\ &\quad - \left[\frac{4\pi^2 c \mathcal{E}}{e^2} - \frac{2\pi^3}{3\Gamma_b^6} \int_A d\Omega \frac{\omega_0^4}{S_2^6 \omega_{c,j}^3} + \frac{2}{3} \int_B d\Omega \alpha^3 \omega_0 \right] \end{aligned} \quad (6.53)$$

³Ansonsten sorgt der exponentielle Anteil des Spektrums für einen endlichen Wert der Integration.

⁴Hierbei ist außerdem zu beachten, dass für Fall (a), $\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2} > 0$, $\omega_{c,j} = \omega_{c,a}$ gilt und entsprechend für Fall (b), $\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2} < 0$, $\omega_{c,j} = \omega_{c,b}$. Strenggenommen müsste man daher den Raumbereich A noch einmal in die Bereiche A_a und A_b unterteilen; zur besseren Lesbarkeit wird dieses unterlassen.

ableiten, wobei \mathcal{E} , ω_0 , $\omega_{c,j}$ und α Funktionen der Sichtlinie \vec{n} und des Impulses $\vec{\omega}$ sind.

Falls Gleichung (6.37) im Zusammenhang mit den Exponentialfunktionen aus den Lösungen (6.34), (6.35) auftaucht, so bewirkt der exponentielle Abfall letzterer Gleichungen, dass für höhere Frequenzen der Winkelbereich um die eventuellen Polstellen rasch gegen Null strebt.

Numerisches Beispiel

Mit den bereits früher gewählten Zahlenwerten ergeben sich⁵ für $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) > 0$

$$\omega_* \simeq \frac{2.53 \times 10^{-2}}{\Lambda L}. \quad (6.54)$$

Bei $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) < 0$ ergibt sich

$$\omega_* \simeq \frac{5.26 \times 10^{-8}}{\Lambda L}, \quad (6.55)$$

dieses ist als Übergangsfrequenz nicht geeignet, da dieser Wert deutlich unterhalb der Grenzfrequenz ω_{low} liegt. Der Grund hierfür liegt in der Kleinheit des Faktors in Gleichung (6.43), welche offenbar eine sehr schlechte Näherung darstellt. Eine ganz simple Abschätzung für die Frequenz ω_* ergibt sich durch $\omega_* \simeq \omega_{low}$.

Ist $\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2} \simeq 0$, so hat man

$$\omega_{*,\alpha} \simeq \frac{3.75}{\Lambda L}. \quad (6.56)$$

Eine maximale Frequenz der Strahlung ω_{max} muss man in dem gewählten Beispiel nicht berechnen, da die Energie eines Teilchens nach Gleichung (6.51)

$$\mathcal{E} \simeq 1.13 \times 10^{13} \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{1}{\Lambda L} \quad (6.57)$$

beträgt und – wie in Abbildung 6.1 zu sehen – die Exponentialfunktion für einen genügend raschen Abfall der Leistung sorgt.

6.3 Sichtwinkeleffekt

Im vorigen Abschnitt wurde das differentielle Spektrum pro Teilchen, Frequenzintervall und Raumwinkelement hergeleitet. Man kann sich nun fragen, welchen Einfluss der Raumwinkel auf dieses Spektrum hat, z.B. unter welchem Raumwinkel das Spektrum ein Maximum annimmt. Hier muss man für eine genaue Betrachtung zu den einzelnen Fällen aus Abschnitt 6.2.3 und den Winkelfunktionen (6.31) zurückkehren. Man beachte, dass in den Funktionen neben dem Polarwinkel θ auch der Azimut ϕ auftaucht; im Gegensatz zur Synchrotronstrahlung ist also eine Zylindersymmetrie der Strahlung nicht zu erwarten. Stattdessen ist ebenfalls die Ebene der Solitonen von Bedeutung, d.h. in welcher Ebene dessen elektromagnetische Felder schwingen.

⁵Man beachte, dass anderen Fällen als den hier angegebenen auch $\mathcal{A}_j^2 \geq \zeta_{c,j}^2$ auftreten kann. In diesen Fall muss man statt Gleichung (6.49) Gleichung (6.48) benutzen.

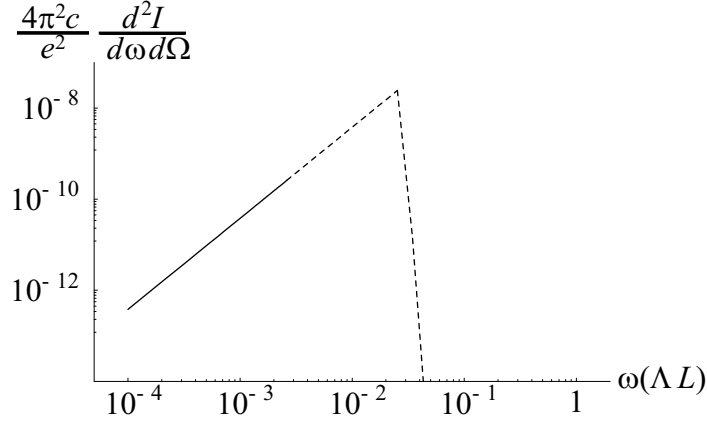


Abbildung 6.1: Charakteristischer Verlauf des Spektrums in dimensionslosen Einheiten der Frequenz $\omega(\Lambda L)$ und der Intensität $(4\pi^2 c/e^2)(d^2 I/d\omega d\Omega)$. Betrachtet werden Elektronen mit den Konstanten (6.39); in dieser Abbildung sind die Situationen (1) gewählt. Die gestrichelte Linie stellt die Fortsetzung der Graphen in die Bereiche dar, in denen die Näherung nicht mehr die Kleinheits- oder Großheitsbedingungen erfüllen. Der Wechsel zwischen den Gebieten hoher und niedriger Frequenz liegt bei $\omega_* = 2.53 \times 10^{-2}/(\Lambda L)$. Man beachte, dass der Verlauf der Funktion für hohe Frequenzen sehr schnell gegen Null strebt.

Um die Frage zu beantworten, unter welchem Winkel die meiste Energie abgestrahlt wird, muss man zunächst das differentielle Spektrum über alle Frequenzen integrieren, z.B. im Fall (1) gemäß

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_0^{\omega_*} d\omega \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_{\omega_*}^{\omega_{max}} d\omega \frac{\pi}{\Gamma_b^2 S_2^2} \left(\frac{2\omega}{\omega_{c,a}} H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] + \frac{\omega}{\omega_{c,b}} \exp\left[-\frac{4\omega}{3\omega_{c,b}}\right] \right). \quad (6.58)$$

Hierfür kann man nun auf die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt zurückgreifen. Man beachte, dass die obere Grenze ω_{max} nicht vom Raumwinkel abhängt. Es ist jedoch zu überprüfen, ob die Ungleichung $\mathcal{A}_j^2 \geq \zeta_{c,j}^2$ erfüllt ist oder nicht, da hiervon die Lage der Übergangsfrequenzen ω_* abhängen. Im Fall $\mathcal{A}_j^2 \geq \zeta_{c,j}^2$ erhält man

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega_*^3}{3\omega_0^2} - \frac{\pi\omega_*^2}{2\Gamma_b^2 S_2^2 \omega_{c,j}} + \frac{\pi\omega_{max}^2}{\Gamma_b^2 S_2^2 \omega_{c,j}} \right) = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\pi}{\Gamma_b^2} \frac{\omega_{max}^2}{S_2^2 \omega_{c,j}} - \frac{4\pi^3}{3\Gamma_b^6} \frac{\omega_0^4}{S_2^6 \omega_{c,j}^3} \right). \quad (6.59)$$

Falls $\mathcal{A}_j^2 < \zeta_{c,j}^2$, so kann man wegen des exponentiellen Abfalls zunächst die obere Integrationsgrenze durch ∞ nähern; so ergibt sich (mit $s = 0$ im Regime (b), $s = 12$ im Regime (a))

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega_*^3}{3\omega_0^2} + \frac{9\pi R^s \omega_{c,j}}{16\Gamma_b^2 S_2^2} \left(1 + \frac{4\omega_*}{3\omega_{c,j}} \right) \exp\left[-\frac{4\omega_*}{3\omega_{c,j}}\right] \right) \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{27}{64} \frac{\omega_{c,j}^3}{\omega_0^2} \left(W \left[\frac{4\pi R^s}{3\Gamma_b^2} \frac{\omega_0^2}{S_2^2 \omega_{c,j}^2} \right] + W^2 \left[\frac{4\pi R^s}{3\Gamma_b^2} \frac{\omega_0^2}{S_2^2 \omega_{c,j}^2} \right] + \frac{1}{3} W^3 \left[\frac{4\pi R^s}{3\Gamma_b^2} \frac{\omega_0^2}{S_2^2 \omega_{c,j}^2} \right] \right). \end{aligned} \quad (6.60)$$

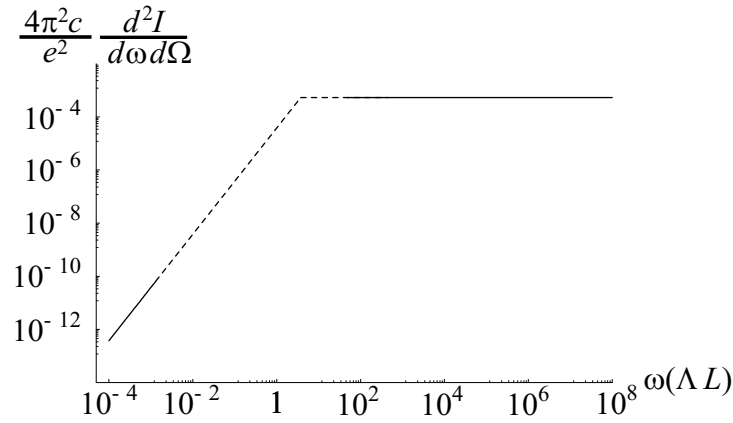


Abbildung 6.2: Charakteristischer Verlauf des Spektrums in dimensionslosen Einheiten der Frequenz $\omega(\Lambda L)$ und der Intensität $(4\pi^2 c/e^2)(d^2 I/d\omega d\Omega)$. Betrachtet werden Elektronen mit den Konstanten (6.39), aber $\theta = \pi$. Die gestrichelte Linie stellt die Fortsetzung der Graphen in die Bereiche dar, in denen die Näherung nicht mehr die Kleinheits- oder Großheitsbedingungen erfüllen. Der Wechsel zwischen den Gebieten hoher und niedriger Frequenz liegt bei $\omega_{*,\alpha} = 3.75/(\Lambda L)$. Man beachte, dass das Spektrum bei $\omega_{max,\alpha,I} =$ abbricht.

Die Winkelabhängigkeit steckt nur in den Termen S_2 und $\omega_{c,j}$ in der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_2^2 \omega_{c,j}} &\propto \frac{S_1^{3/2}}{S_2^{5/2}} = \frac{S_r^{5/2}}{S_1}, \\ \omega_{c,j}^3 &\propto \frac{S_2^{3/2}}{S_1^{9/2}} = \frac{1}{S_1^3 S_r^{3/2}}, \\ \frac{1}{S_2^2 \omega_{c,j}^2} &\propto \frac{S_1^3}{S_2^3} = S_r^3; \end{aligned} \quad (6.61)$$

somit kann man aus den Ergebnissen aus Anhang F das Verhalten der Intensität im Prinzip bestimmt werden. Dies soll für das numerische Beispiel im Folgenden geschehen.

Numerisches Beispiel

Mit den Werten (6.39) findet man für die zwei Fälle aus der Gleichung (6.60) jeweils ähnliche Verläufe⁶ in der Abhängigkeit vom Polarwinkel θ . Sichtbar ist dies in Abbildung 6.4; in beiden Fällen liegt das Maximum bei sehr kleinen Winkeln, d.h. nahe der Ausbreitungsrichtung des Solitons. Man beachte, dass auch der Fall (2) für $\theta = 0, \pi$ gegen Null geht. Im Falle des Azimuts ϕ , zu sehen in Abbildung 6.5 findet sich ein Verhalten symmetrisch zu derjenigen Ebene, welche durch die Normalenbedingung $\cos \phi = 0$, d.h. $\phi \in \{0, \pi, 2\pi\}$. Daher wird die meiste Energie in einem kleinen Kreis um $\theta = 0$ mit sinusoidaler Amplitude abgestrahlt. Die Bereiche ohne Emission liegen somit in der x - z -Ebene.

⁶Gleichung (6.59) wird wegen $\mathcal{A}_j^2 < \zeta_{c,j}^2$ für alle Fälle nicht benötigt.

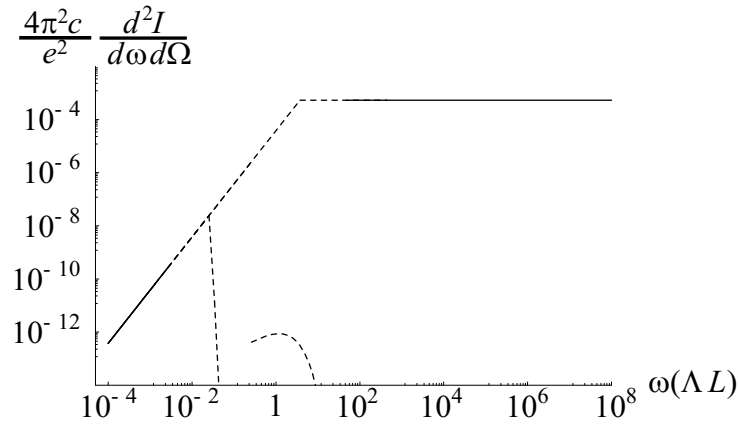


Abbildung 6.3: Charakteristischer Verlauf des Spektrums in dimensionslosen Einheiten der Frequenz $\omega(\Lambda L)$ und der Intensität $(4\pi^2 c/e^2)(d^2 I/d\omega d\Omega)$. Betrachtet werden Elektronen mit den Konstanten (6.39). Die gestrichelte Linien stellt die Fortsetzung der Graphen in die Bereiche dar, in denen die Näherung nicht mehr die Kleinheits- oder Großheitsbedingungen erfüllen. Die Punkte markieren die Übergangsfrequenz ω_* . Im Fall (2) wird der Übergang abweichend durch ω_{low} definiert, da der Schnittpunkt der beiden Graphen bei 5.26×10^{-8} läge.

6.4 Integration über ein Ensemble von Teilchen

Hier soll nun das differentielle Frequenzspektrum einer ganze Verteilung von Teilchen betrachtet werden. Um dieses zu erhalten, muss man dieses Spektrum mit einer Verteilungsfunktion falten und über den Teilchenimpuls integrieren. Im Folgenden wird wiederum die Potenzverteilung (6.30)

$$F_a = \frac{\gamma - 2}{2\pi} \frac{\delta[\Pi_z]}{(1 + \Pi_x^2 + \varpi_y^2 + \Pi_z^2)^{\gamma/2}} \quad (6.62)$$

gewählt, mit beliebigen Exponent $\gamma \geq 4$. Da man die differentielle Intensität in zwei Bereiche aufteilt, sind also die beiden Integrale

$$\begin{aligned} \int d\varpi^3 F_a \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{\gamma - 2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Pi_x \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_y \frac{1}{(1 + \Pi_x^2 + \varpi_y^2)^{\gamma/2}} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \\ \int d\varpi^3 F_a \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{\gamma - 2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Pi_x \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_y \frac{1}{(1 + \Pi_x^2 + \varpi_y^2)^{\gamma/2}} \frac{R^s \omega}{\omega_{c,j}} \exp\left[-\frac{4\omega}{3\omega_{c,j}}\right] \end{aligned} \quad (6.63)$$

zu lösen, je nachdem, ob man hohe oder niedrige Frequenzen betrachtet. Jedoch verkompliziert sich der Sachverhalt, da auch die Abschätzungen für die Gültigkeit der Näherungen, ω_{low} und ω_{high} , von den Impulsen $p_j \in \{\Pi_x, \varpi_y, \Pi_z\}$ abhängen. Untersucht man diese genauer, so findet man das Verhalten⁷

$$\begin{aligned} \omega_{low}(|p_j| \rightarrow 0) &\rightarrow const., \\ \omega_{high}(|p_j| \rightarrow 0) &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.64)$$

⁷Der Fall $|p_j| \gg 1$ wird vernachlässigt, weil die Verteilungsfunktion für $|p_j| \rightarrow \infty$ verschwindet.

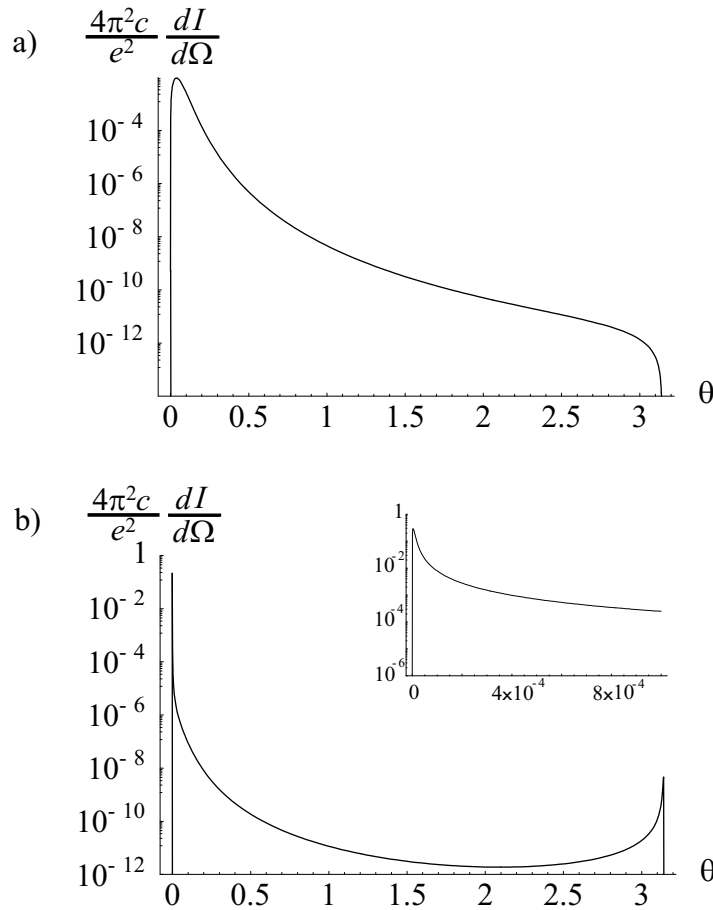


Abbildung 6.4: Die Abhängigkeit der differentiellen Intensität vom Polarwinkel θ . Das Maximum liegt bei kleinen Winkeln, geht aber für $\theta = 0$ auf Null zurück. Dies gilt auch für den Graphen b) des Falls (2), wie das Inset zeigt. Die Abstrahlung findet also vorzugsweise nahe der Solitonrichtung statt.

Dies bedeutet, dass die Hochfrequenzlösung so gut wie keinen Beitrag liefert. Man kann sich also auf den niederfrequenten Anteil konzentrieren und daher die Näherung (6.47) als Ansatz für die gesamte differentielle Intensität wählen.

Nun gilt es weiterhin zu berücksichtigen, dass die Überlegungen in den letzten Abschnitten stets für den Fall $|p_j| \ll |z_a R^2 A_{max}|$ durchgeführt wurde. Es ist daher sinnvoll, die Integration über die Impulse p_j auf den Bereich $[-z_a A_{max}, z_a A_{max}]$ zu beschränken. Zudem greift auch hier wieder das Argument, dass für höhere Impulse die Verteilungsfunktion gegen Null geht. Somit ergibt sich wegen der Symmetrie in den Impulsen p_j das Integral

$$\mathcal{I} \equiv \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{2(\gamma - 2)\omega^2}{\pi} \int_0^{z_a A_{max}} d\Pi_x \int_0^{z_a A_{max}} d\varpi_y \frac{1}{(1 + \Pi_x^2 + \varpi_y^2)^{\gamma/2}} \frac{1}{\omega_0^2} H[\omega_* - \omega]. \quad (6.65)$$

Zu beachten ist, dass die Übergangsfrequenz ω_* eine Funktion der Impulse p_j ist. Es ist daher erforderlich, dass zunächst die Bedingung $\omega_*(p_j) - \omega$ in eine Bedingung für die Impulse $p_{j,*}(\omega) - p_j$ umgeformt wird.

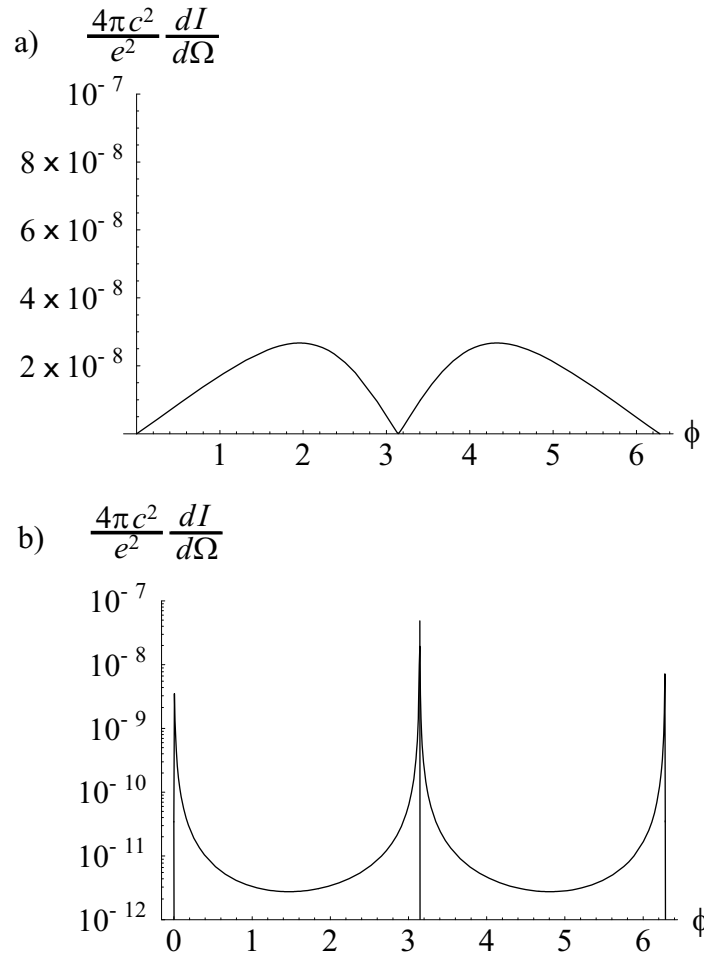


Abbildung 6.5: Die Abhängigkeit der differentiellen Intensität vom Azimut ϕ . Sie ist symmetrisch bezüglich einer Ebene, welche durch die Normalenbedingung $\cos \phi = 0$ definiert ist. Für diese Winkel wird die Intensität Null, selbst im Graph b) des Fall (2). Eine genaue Betrachtung der Umgebung der Winkel $\phi = 0, \pi, 2\pi$ zeigt einen vergleichbaren Abfall wie im Graphen a)

Numerisches Beispiel

In dem hier gewählten Beispiel hängt ω_* nur von ϖ_y ab. Somit benötigt man auch nur einen Grenzimpuls $\varpi_{y,*}$ und man hat, je nach Sichtwinkel (Fall (1) oder (2))

$$\begin{aligned} \varpi_y \leq \varpi_{y,*1} &\simeq \frac{28.7(\Lambda L)^2 \omega^2}{W^2[-4.84(\Lambda L)^{6/5} \omega^{6/5}]}, \\ \varpi_y \leq \varpi_{y,*2} &\simeq \frac{2.87 \times 10^{-5} (\Lambda L)^2 \omega^2}{W^2[-4.84(\Lambda L)^{6/5} \omega^{6/5}]} \end{aligned} \quad (6.66)$$

Hieraus ergibt sich dann die Näherung für ein Ensemble von Teilchen,

$$\mathcal{I} \simeq \left(24.2 \arctan \left[\frac{10\varpi_{y,*}}{(101 + \varpi_{y,*}^2)^{1/2}} \right] - \frac{242\varpi_{y,*}}{(1 + \varpi_{y,*}^2)(101 + \varpi_{y,*}^2)^{1/2}} \right) (\Lambda L)^2 \omega^2 \quad (6.67)$$

Die Lambertsche W -Funktion ist im Intervall $[-1/e, \infty[$ definiert. Da die Frequenz positiv ist, ergibt sich sofort die Einschränkung

$$\omega \leq \frac{1}{(4.84e)^{5/6}(\Lambda L)} = \frac{1.17 \times 10^{-1}}{(\Lambda L)} \quad (6.68)$$

und der Frequenzbereich, in dem Abstrahlung möglich ist, reduziert sich auf das Intervall $[0, 0.117]$. Für beide Fälle sind die Frequenzabhängigkeiten in Abbildung 6.6 dargestellt. Betrachtet man die Größenordnungen, so findet man, dass der Hauptbeitrag der Strah-

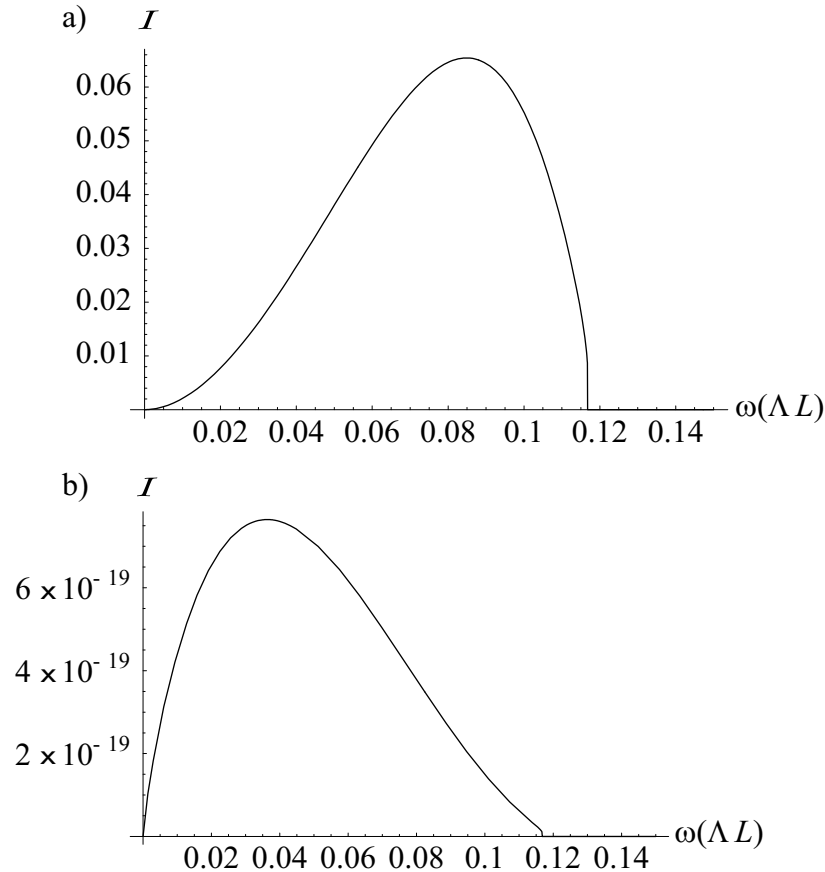


Abbildung 6.6: Strahlung eines Ensembles von Elektronen. Die Teilchen strahlen fast ausschließlich ihre Energie im Bereich $(\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2}) > 0$ ab, Abbildung a), die andere Halbsphäre ist zu vernachlässigen, wie man an der Größenordnung der Abbildung b) erkennen kann.

lung von den Elektronen des Falls (1) stammt. Alle weiteren Anteile sind vernachlässigbar. Hier zeigt sich wieder das Verhalten relativistischer Teilchen, dass die Strahlung fast ausschließlich in Bewegungsrichtung abgestrahlt wird.

7 Zusammenfassung und Bedeutung der Arbeit

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie“ bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie“ und setze sie als bekannt voraus.

Albert Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* [11].

Jeder wissenschaftlichen Arbeit liegt die Motivation zugrunde, ein verbessertes Verständnis für die Natur und ihre Gesetze zu erhalten. Es gehört dabei zu den Aufgaben der theoretischen Wissenschaften, also auch der theoretischen Physik, verschiedene einzelne Sachverhalte in ein gemeinsames Gerüst zu kleiden und mit einem Formalismus beschreiben zu können.

Hierin lag nun das erste Ziel der vorliegenden Arbeit. Im Universum besteht der überwältigende Anteil an sichtbarer Materie aus Plasma. Es ist jedoch offensichtlich, dass man einige Eigenschaften von Plasmen, z.B. die Energie- oder Impulsverteilung der Plasmateilchen, wegen der großen Entfernungen nicht ohne Weiteres messen kann. Dennoch werden diese Eigenschaften gerade in der kinetischen Theorie benötigt, um beobachtete Phänomene beschreiben zu können. Es stellt daher immer einen großen Fortschritt dar, wenn man Aussagen über Plasmen ohne Kenntnis der in der Praxis nicht messbaren Größen formulieren kann. In dieser Arbeit ist es nun gelungen, Dispersionsrelationen und Wachstumsraten für eine bestimmte Plasmainstabilität, die Weibelinstabilität, herzuleiten, ohne eine Verteilungsfunktion vorzugeben.

Neben der Aufgabe, bereits bekannte Sachverhalte – wobei es unerheblich ist, ob diese experimentell, numerisch oder theoretisch gewonnen wurden – analytisch zu untersuchen und in einen größeren Zusammenhang zu bringen, ist sicherlich das Auffinden einer neuen Erkenntnis, die Entwicklung einer neuen Idee, ein spannender Teil der Wissenschaft. Häufig ist es bloßer Zufall, der eine neue Entdeckung hervorruft; häufig genug aber auch gezieltes Suchen oder ein Geistesblitz. Auch die Dokumentation des Entdeckens von etwas Neuem, vorher nicht Dagewesenem ist ein Bestandteil dieser Dissertation, denn aus der Arbeit über eine allgemeine Form der Weibelinstabilität konnte eine neuartige nichtlineare Wellengleichung für ein unmagnetisches Plasma hergeleitet werden, welche als Lösung nichtlineare solitäre Wellen besitzt.

Nach einer allgemein gehaltenen Einführung über die kinetische Theorie in Kapitel 1 wurden in Kapitel 2 die nötigen Grundlagen für die Weibelinstabilität vorgestellt. Da zur Beschreibung die angesprochene statistische kinetische Theorie verwendet werden sollte, bildeten die Maxwellgleichungen und die relativistische Vlasovgleichung den Ausgangspunkt. Aus diesen Gleichungen wurde im Folgenden ganz allgemein die Dispersionsrelation für transversale Wellen in einem Plasma hergeleitet – die grundlegende Beziehung für jegliche Störungen des Gleichgewichtszustandes.

Dazu wurden die Ausgangsgleichungen zunächst linearisiert (weil man von kleinen Störungen ausgeht und die Gleichungen dann einigermaßen lösbar werden) und in den Fourierraum transformiert. Da ein Plasma ein leitendes Medium darstellt, lässt es sich mit Hilfe eines Ohmschen Gesetzes $\vec{j} = \bar{\sigma} \cdot \vec{E}$ beschreiben, wobei die Plasmaeigenschaften sämtlich in dem Leitfähigkeitstensor $\bar{\sigma}$ zum Ausdruck kommen. Es ist leicht einsichtig, dass ein so komplexes System wie das Plasma eine komplizierte Geometrie besitzen kann, daher liegt die Leitfähigkeit in Form eines Tensors vor. Allerdings konnte dieser Tensor für gyrotrope Verteilungen und der Annahme von Wellen, welche nur parallel zum Hintergrundmagnetfeld $B_0 \vec{e}_z$ orientiert sind, vereinfacht werden.

Gerade letzteres schien eine starke Einschränkung darzustellen. Jedoch wurde in dieser Arbeit der Fall eines (anfänglich) unmagnetischen Plasmas betrachtet; dies hatte zur Folge, dass der Wellenvektor \vec{k} der transversalen Wellen die einzige Ausrichtungsmöglichkeit für das Koordinatensystem ist. Man könnte auch sagen, das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass $\vec{k} = k \vec{e}_z$. Aufgrund dieser Annahmen lag der Leitfähigkeitstensor in einer deutlich vereinfachten Form vor und konnte mit dem Dielektrizitätstensor $\bar{\epsilon}$ und dem Maxwelloperator $\bar{\Lambda}$ in Verbindung gebracht werden.

Aus letzterem erhielt man die Dispersionsrelation eines unmagnetischen Plasmas aus der Forderung, dass die Determinante des Maxwelloperators verschwindet – eine Folgerung aus der Fouriertransformation und dem Residuensatz. Es zeigte sich, dass es drei entkoppelte Moden gibt, eine longitudinale und zwei transversale. Die beiden letzteren sind allerdings bei verschwindendem Magnetfeld entartet, d.h. sie fallen zusammen und es gibt nur *eine* transversale Mode, welche die Weibelinstabilität beschreibt.

In Kapitel 3 sollten nun aus dieser transversalen Mode einige allgemeine Aussagen über die Weibelinstabilität herausgearbeitet werden. Es zeigte sich, dass es möglich ist, die Dispersionsrelation in eine Form $c^2 k^2 = f(M^2)$ zu bringen, wobei $M = i(\omega/ck) = (\Gamma/ck)$ die imaginäre Phasengeschwindigkeit der Welle darstellt. Hierbei wurde eine rein imaginäre Frequenz angenommen, um die Rechnungen zu erleichtern. Die gewählte Form der Dispersionsrelation besitzt den außerordentlichen Vorteil, dass in den Integralen $f(M^2)$ als einziger Parameter die Variable M auftaucht anstatt der beiden Größen Γ und k . Daher konnte man M als unabhängige Variable und k als abhängige Variable wählen. So fiel es im weiteren Verlauf viel leichter, grundlegende Aussagen über die Instabilität zu treffen.

Damit ließ sich der erlaubte Wellenzahlbereich für eine Instabilität einfach als Differenz zweier Integrale darstellen, welche „nur“ noch gelöst werden müssen. Des Weiteren zeigte sich sowohl für $M \rightarrow \infty$ als auch für den Übergang in eine isotrope Verteilung der Teilchen, dass keine instabilen Moden auftreten können. Für $M \rightarrow 0$ konnten jedoch keine Näherungslösungen angegeben werden, da die entstehenden Integrale nicht konvergieren.

Diese ersten Ergebnisse konnten dann für bestimmte Klassen von Verteilungsfunktionen ausgeweitet werden. So wurden im weiteren Verlauf die Fälle

1. schwacher Anisotropie,
2. hoher Anisotropie,
3. ultrarelativistischer Teilchen und
4. einer asymmetrischen Verteilung der Teilchen

untersucht. Es soll an dieser Stelle noch einmal erwähnt werden, dass man hier *keine* bestimmte Verteilungsfunktion für die Teilchen im Plasma voraussetzte, sondern nur eine gewisse Klassifikation der Verteilungen vornahm. In allen Fällen führte dieses zu in der Literatur (für eine *festgelegte* Verteilungsfunktion) bekannten Dispersionsrelationen und Wachstumsraten. Somit wurde also gezeigt, dass die früheren Ergebnisse in der Literatur eine allgemeine Eigenschaft der verschiedenen Klassen von Verteilungsfunktionen darstellen. In den ersten drei Fällen führte die Annahme $M \rightarrow \infty$ zu dem bereits bekannten Ergebnis, dass dann keine Moden existieren.

Als weiteres Ergebnis muss man die Existenz von isolierten Moden werten, welche sich aus einer asymmetrischen Verteilung ergaben. Asymmetrisch bedeutet hier, dass die Funktion nicht nur von geraden, sondern auch von ungeraden Potenzen der Impulse abhängt. Ist dieses der Fall, so schienen die Weibelmoden sofort auf isolierte Wellenzahlen zu kollabieren. Diese isolierten Moden waren anschließend der Anlass, nach einer Solitonenlösung einer noch zu bestimmenden geeigneten nichtlinearen Gleichung zu suchen, was im zweiten Teil dieser Arbeit durchgeführt wurde.

Doch zuvor wurde in Kapitel 4 die gewonnenen Näherungen verwendet, um beispielhaft für einige geläufige Verteilungsfunktionen konkret die Dispersionsrelationen zu bestimmen. Im einzelnen handelte es sich dabei um

- eine monochromatische δ -Verteilung,
- eine sogenannte *Waterbag*-Verteilung,
- eine anisotrope Bi-Maxwell-Verteilung und
- eine κ -Verteilung.

Dazu mussten jeweils nur ein oder zwei Integrale über die Verteilungsfunktion gelöst werden – hierin zeigte sich nun der große Vorteil des Kapitels 3 dieser Arbeit, dass der qualitative Verlauf bereits vorher hergeleitet wurde: Wo vorher ein ganzer Artikel verfasst werden musste, um eine weitere Lösung für eine neue Verteilungsfunktion anzugeben, genügt nun (nach geeigneter Transformation) die Bestimmung von maximal zwei Integralen.

Zwei Punkte seien zu diesem Kapitel noch erwähnt: 1) Die einfachste Verteilungsfunktion versagte bei einigen Näherungen, so dass in diesem Fall keine Dispersionsrelation oder Wachstumsraten angegeben werden konnte. Dieses dürfte jedoch in der Natur der δ -Distribution begründet sein. 2) Es ließ sich bei einigen Lösungen eine gewisse strukturelle Ähnlichkeit feststellen. Hier scheint sich anzudeuten, dass diese Ergebnisse vielleicht auch quantitativ unabhängig von der Wahl der Verteilungsfunktion sind und somit dem Wesen der Weibelinstabilität innewohnen.

Kapitel 5 beschäftigte sich nun mit der vorher bereits angedeuteten Beschreibung von Solitonen in unmagnetischen Plasma. Dazu war es zunächst erforderlich, eine geeignete

Wellengleichung zu finden. Diese musste insbesondere eine nichtlineare Form besitzen, da erst die Nichtlinearität den Erhalt der Wellenstruktur im dispersiven Medium gewährleistet. Außerdem, um als Analogie zu den isolierten Weibelmoden zu gelten, wurden an das Plasma und die Welle die gleichen Voraussetzungen wie in den Kapiteln 2 und 3 gestellt, d.h. das Plasma ist unmagnetisch und die Wellen pflanzen sich entlang der z -Achse fort.

Mittels der Methode der Charakteristiken konnten nun die Maxwellgleichungen und die Vlasovgleichung in ein für die weiteren Umformungen geeignetes Koordinatensystem transformiert werden. Hieraus ergab sich ein gekoppeltes System von vier Integrodifferentialgleichungen. Dieses System ließ sich auf eine selbstkonsistente Gleichung reduzieren, indem man an die Verteilungsfunktion f_a zwei Forderungen stellte:

1. Die Teilchen bewegen sich alle mit einem konstanten Impuls in z -Richtung, gegeben durch die Gleichung $\Pi_z = 0$.
2. Die Verteilungsfunktion ist achsensymmetrisch in y -Richtung, d.h. es tritt nur eine Abhängigkeit von geraden Potenzen in ϖ_y auf.

Die sich ergebende Gleichung beinhaltete sowohl das Vektorpotential sowie analytisch schwierig zu lösende Integrale über die Verteilungsfunktion.

Diese nichtlineare Gleichung war dann der Ausgangspunkt zweier Lösungsstrategien. Als erstes wurde eine exakte Lösung durch die Wahl einer δ -Verteilung der Teilchen erreicht; und zwar für die Fälle eines Elektronenplasmas mit positivem Hintergrund, eines Elektron-Positron-Plasmas sowie eines Elektron-Ion-Plasmas. Es ergab sich jeweils ein einzelner sägezahnartiger, propagierender Wellenzug für das elektrische und magnetische Feld. Allerdings bewirkte die Unphysikalität der δ -Distribution hier ein nichtphysikalisches Verhalten: Die elektromagnetischen Felder des Solitons besaßen eine Unstetigkeitsstelle.

Aufgrund dieser Unzulänglichkeiten der exakten Lösung wurde nach einer asymptotischen Lösung gesucht. Als entscheidender Parameter zur Entwicklung der Wurzelfunktionen im Integral der Wellengleichung erwies sich das Vektorpotential A im Verhältnis zum Impuls der Teilchen. Da als Integrationskonstante jedoch auch ein maximales Vektorpotential A_{max} eingeführt werden musste – welches durch Messungen/Beobachtungen zu bestimmen ist –, ergaben sich drei mögliche Fälle: 1) A_{max} und A groß, 2) A_{max} groß und A klein, 3) A_{max} und A klein. Hierbei zeigte sich, dass in den Fällen 2) und 3) sich nur sinusoidale Lösungen mit festen Wellenzahlen k finden ließen, welche man aber als Übergang zu den isolierten Moden aus Kapitel 3 interpretieren könnte. Nur für ein genügend großes Vektorpotential gibt es eine solitäre Lösung, deren genaue Form nur von einer Größe $R \leq 1$ abhängt. Diese wiederum ist gegeben durch die Plasmaparameter, d.h. die Dichte des Plasmas, die Verteilungsfunktion sowie das maximale Vektorpotential.

Es zeigte sich, dass der Parameter R die räumliche *Ausdehnung* des Solitons nur wenig, d.h. etwa mit einem Faktor 2 beeinflusst, dagegen aber eine große Bedeutung für die *Form* des Solitons hat. Für einen Wert $R \simeq 1$ ergab sich ein nahezu sinusförmiger Verlauf der elektromagnetischen Felder mit einer kleinen Amplitude. Für Werte $R \ll 1$ hingegen näherten sich die Felder immer mehr der sägezahnartigen Form an, welche bereits von der exakten Lösung mit einer δ -förmigen Verteilung bekannt war, jedoch stets mit einem Abfall der Felder am Rand auf Null. Somit ergab sich hier trotz ähnlicher Form kein unphysikalisches Verhalten.

Hiermit war also die relative Gestalt des Solitons festgelegt. Es stellte sich jedoch an dieser Stelle die Frage nach den physikalischen Skalengrößen. Daher wurde im letzten Teil dieses Kapitels abgeschätzt, welche Größenordnung die entstehenden Magnetfelder und die räumlichen und zeitlichen Skalen des Solitons besitzen. Diese Größen konnten als Funktionen der Plasmaparameter und der Teilcheneigenschaften bestimmt werden und erlauben auf diese Weise prinzipiell die Beschreibung des Solitons. Erforderlich hierzu ist allerdings die Kenntnis dieser Parameter, welche aus Annahmen oder Simulationen entnommen werden müssen.

Für die Plasmaparameter stellt dieses insofern kein besonders großes Problem dar, da man aus vielfältigen Beobachtungen und Simulationen geeignete Werte aus der Literatur entnehmen kann. Etwas anders stellt sich die Situation für das maximale Vektorpotential dar. Man könnte – und das wurde abschließend im Kapitel 5 getan – aus allgemein gültigen physikalischen Prozessen wie der maximal verfügbaren Energiedichte, den Einfluss von Kollisionen oder Quanteneffekten Grenzbedingungen für A_{max} herleiten, jedoch ergaben sich dabei recht hohe obere Schranken. Alternativ könnte man eine Beziehung zwischen dem maximalen Magnetfeld und A_{max} aus Kapitel 5 nutzen, um aus Beobachtungen einen der Wirklichkeit näherkommenden Wert abzuleiten.

Zum Ende dieser Dissertation folgte eine Anwendung der im Kapitel 5 hergeleiteten Solitonstruktur. Die Voraussetzungen an die Verteilungsfunktion erinnern frappierend an die Verhältnisse in relativistischen Jets, z.B. in AGN. Es ist vorstellbar, dass die ausströmenden relativistischen Teilchen im Jet durch den hier vorgestellten Mechanismus Solitonen anregen. Diese könnten im weiteren Verlauf wieder mit den Teilchen wechselwirken und auf diese Weise Strahlung erzeugen. Daher wurde im Kapitel 6 die Frage erörtert, welche Eigenschaften diese Strahlung hätte.

Dazu wurde zunächst einzelne Elektron betrachtet und für dieses Elektron bestimmt, wie groß die abgestrahlte Leistung maximal sein kann; denn das Elektron strahlt ja durch die Beschleunigung im Solitonmagnetfeld Energie ab. So wurde in Analogie zur Synchrotronstrahlung eine allgemeine Gleichung des differentiellen Intensitätsspektrums aufgestellt, in welcher der Zusammenhang zwischen der abgestrahlten Energie pro Frequenz- und Raumwinkeleinheit mit der Beschleunigung durch die elektromagnetischen Felder des Solitons hergestellt wurde.

Leider ist diese Gleichung zu komplex, um sie analytisch lösen zu können. Daher wurden für bestimmte Bereiche Näherungslösungen entwickelt, welche durch geeignete Wahl einer Übergangsfrequenz aneinandergesetzt werden konnten. Zudem galt es, weitere Effekte zu berücksichtigen: den Übergang zu einem Ensemble von Elektronen, den Einfluss des Sichtwinkels auf die Verteilung und die Frage, ob die Elektronen im Verhältnis zur Magnetfelddichte eine sehr große oder sehr kleine Energie besitzen. Aus all diesem konnten dann für verschiedene Situationen die entsprechenden Verläufe des Intensitätsspektrums dargestellt werden.

Natürlich ist an dieser Stelle das Gebiet der linearen und nichtlinearen Wellen in unmagnetischen Plasmen nicht erschöpfend untersucht worden. So gelten alle Ergebnisse aus den Kapiteln 3 und 4 für räumlich stationäre Weibelmoden, da zur Vereinfachung der Rechnung eine rein imaginäre Frequenz angesetzt wurde. Dieses Prinzip konnte bereits erweitert werden (vgl. [41]), indem man zusätzlich eine kleine reelle Störung anbringt, d.h. man wählt als Frequenz

$$\omega = \epsilon\omega_R + i\Gamma, \quad (7.1)$$

mit $\epsilon \ll 1$. Allein schon aus dem Prinzip der Stetigkeit der (makroskopischen) Natur sollten sich Lösungen ergeben, die eine gewisse Ähnlichkeit mit denen aus Kapitel 3 besitzen. Besonders interessant würde diese Frage bei der Betrachtung einer asymmetrischen Verteilung sein, in welcher Form sich die isolierten Moden ändern. Offene Fragen gibt es außerdem immer noch in Bezug auf das Verhältnis zwischen der Weibelinstabilität und anderen Plasmainstabilitäten¹. Welche setzt zuerst ein? Bei welcher ergibt sich das größte Wachstum?

Die zukünftige Aufgabe bei der Untersuchung der solitären Wellen liegt auf der Hand: Neben der Frage nach der Polarisation der Strahlung und welche Größe des Faradayeffekts hieraus abzuleiten wäre, sollte man weitere geeignete Szenarien finden, für die der hier vorgestellte Prozess eine Erklärungsmöglichkeit bietet. Dieses wird aufgrund der relativistischen Teilchengeschwindigkeiten zwar nicht in allen astrophysikalischen Plasmen der Fall sein, jedoch gibt es extreme Systeme, die man untersuchen kann: Quasare, Jets von Neutronensternen oder Schwarze Löchern.

¹Auch wenn bereits erste Untersuchungen existieren, siehe Bret *et al.* [5, 6].

A Kurze mathematische Erläuterung der Weibelinstabilität

Man geht von einer einfachen Verteilungsfunktion gegenläufiger Ströme aus, d.h. die Elektronenbewegung findet nur in x -Richtung mit der Geschwindigkeit $\pm a$ statt

$$f_0(\vec{v}) = \frac{1}{2} (\delta(v_x - a) + \delta(v_x + a)) \delta(v_y) \delta(v_z). \quad (\text{A.1})$$

Auch in einem unmagnetisierten Plasma existieren infinitesimale Magnetfeldfluktuationen $\delta B_z = B_1(t) \exp[iky]$, weil geladene Teilchen im Plasma vorhanden sind. O.B.d.A. kann man die Ausrichtung so wählen, dass die Ausbreitung der Fluktuation in y -Richtung, die Amplitude dagegen nur in z -Richtung liegt. Dann lenkt die Lorentzkraft

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{m_e c} v_x \delta B_z \quad (\text{A.2})$$

die Elektronen abhängig von deren Bewegungsrichtung ab. Elektronen mit $v_x = a$ erfahren eine Beschleunigung $(dv_y/dt) = (ea/m_e c) \delta B_z$ in $+y$ -Richtung und Elektronen mit $v_x = -a$ entsprechend $(dv_y/dt) = -(ea/m_e c) \delta B_z$ in $-y$ -Richtung.

Nun muss man die Magnetohydrodynamik (MHD) bemühen: es entsteht eine zeitliche Änderung im Gesamtfluss des zweiten Momentes (d.h. des Drucktensors \bar{P}) in der x -Komponente durch die Oberfläche in Normale zur y -Achse ($(dv_x/dt) = 0$),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle v_y v_x \rangle &= \int d^3v f_0 v_x \frac{dv_y}{dt} = \\ &= \frac{e \delta B_z}{2 m_e c} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x a \delta(v_x - a) - \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x a \delta(v_x + a) \right) \\ &= \frac{ea^2 \delta B_z}{m_e c} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Wegen der Momentenerhaltung $n_0 m_e (\partial \langle \vec{v} \rangle / \partial t) + \nabla \cdot \bar{P} = 0$ ruft dieses eine Änderung in $\langle v_x \rangle$ hervor,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v_x \rangle = - \frac{\partial \langle v_y v_x \rangle}{\partial y}. \quad (\text{A.4})$$

Zusammen mit Gleichung (A.3) führt dies zu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle v_x \rangle = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \langle v_y v_x \rangle}{\partial t} = - \frac{ea^2}{m_e c} \frac{\partial \delta B_z}{\partial y} = - \frac{ea^2}{m_e c} ik \delta B_z. \quad (\text{A.5})$$

Aus dem Ampèregesetz für den Strom,

$$j_x = -en_e \langle v_x \rangle = \frac{c}{4\pi} [\nabla \times \vec{B}]_x = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial \delta B_z}{\partial y} = \frac{c}{4\pi} ik \delta B_z \quad (\text{A.6})$$

folgt aber

$$\langle v_x \rangle = -\frac{c}{4\pi en_e} ik \delta B_z. \quad (\text{A.7})$$

Gleichung (A.7) in Gleichung (A.5) eingesetzt ergibt eine Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \delta B_z}{\partial t^2} = \frac{4\pi e^2 a^2 n_e}{m_e c^2} \delta B_z = \frac{\omega_{p,e}^2 a^2}{c^2} \delta B_z \quad (\text{A.8})$$

mit rein reellen Lösungen, also zunächst keinen Wellen,

$$\delta B_z(t) \propto \exp\left[\pm \frac{\omega_{p,e} a t}{c}\right], \quad (\text{A.9})$$

wobei der gedämpfte Teil mit der Zeit verschwindet und

$$\delta B_z(t) \propto \exp\left[\frac{\omega_{p,e} a t}{c}\right], \quad (\text{A.10})$$

eine anwachsende Lösung darstellt. Setzt man diese Lösung in den allgemeinen Ansatz ($\vec{B}(\vec{x}) \exp[i\omega t]$) ein, so erhält man in diesem Fall eine rein imaginäre Frequenz ω bzw. aperiodische Lösungen.

Eine anwachsende Lösung einer Störung in der Weibelinstabilität erfordert also den Ansatz einer Frequenz $\omega = i\Omega$ mit $\Omega > 0$ in den Dispersionsrelationen. Da diese Rechnung strenggenommen nur für unmagnetisierte Plasmen gilt, wird das Wachstum der Mode nur so lange vernünftig beschrieben, wie der Larmorradius der Elektronen kleiner als die Skalenlänge des Plasmas ist.

B Anhang zur allgemeinen Herleitung der Dispersionsrelation

B.1 Fourier-Laplace-Transformation von Ableitungen

Die partielle Ableitung einer Feldgröße $\vec{A}(\vec{x}, t)$ nach der Zeit nimmt im Fourier-Laplace-Raum folgende Gestalt an

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t) \right] e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(-\vec{A}(\vec{x}, 0) - i\omega \int_0^\infty dt \vec{A}(\vec{x}, t) e^{i\omega t} \right) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \\ &= -\vec{A}_{\vec{k}}(0) - i\omega \vec{A}(\vec{k}, \omega), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

wobei in $A_{\vec{k}}(0)$ die Anfangsbedingung eingeht,

$$\vec{A}_{\vec{k}}(0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{A}(\vec{x}, 0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (\text{B.2})$$

Die räumlichen Ableitungen von $\vec{A}(\vec{x}, t)$ werden analog ausgeführt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(\vec{x}, t) \right] e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(ik_\nu \int_0^\infty dt A_\mu(\vec{x}, t) e^{i\omega t} \right) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \\ &= ik_\nu A_\mu(\vec{k}, \omega). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

B.2 Gleichgewichtsverteilungsfunktion

Die Voraussetzung für die hier dargelegte Störungsrechnung lautet, dass es eine Verteilungsfunktion nullter Ordnung f_{a0} gibt, die die exakte Vlasovgleichung (vgl. 2.5) erfüllt. Nun wird im Folgenden gezeigt, dass für f_{a0} diese Gleichung immer gilt, falls f_{a0} eine gyrotrope Verteilungsfunktion und das Hintergrundmagnetfeld homogen ist, also $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

Weil die Gleichgewichtsfunktion stabil und homogen ist, folgt $(\partial f_{a0} / \partial t) = (\partial f_{a0} / \partial \vec{x}) = 0$. Daher muss $f_{a0}(\vec{p})$ noch

$$q_a \frac{\vec{p} \times \vec{B}_0}{m_a \gamma_a c} \cdot \frac{\partial f_{a,0}(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{B.4})$$

erfüllen.

Man wählt dazu Zylinderkoordinaten (2.27) des Impulses,

$$p_x = p_\perp \cos \phi; \quad p_y = p_\perp \sin \phi; \quad p_z = p_\parallel, \quad (\text{B.5})$$

bzw.

$$p_{\parallel} = p_z; \quad p_{\perp} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}; \quad \phi = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right). \quad (\text{B.6})$$

Nun stellt man den Gradienten $\frac{\partial}{\partial \vec{p}}$ in Zylinderkoordinaten dar,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_x} \\ \frac{\partial}{\partial p_y} \\ \frac{\partial}{\partial p_z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{\partial \phi}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial p_{\perp}}{\partial p_y} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{\partial \phi}{\partial p_y} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_x}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{p_y}{p_{\perp}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{p_y}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{p_x}{p_{\perp}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{\sin \phi}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \sin \phi \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{\cos \phi}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Wendet man diesen an, so folgt

$$q_a \frac{\vec{p} \times \vec{B}_0}{m_a \gamma_a c} \frac{\partial f_{a,0}(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = -\frac{q_a B_0}{m_a \gamma_a c} \frac{\partial f_{a,0}(\vec{p})}{\partial \phi} = -\Omega_{B,a} \frac{\partial f_{a,0}(\vec{p})}{\partial \phi}. \quad (\text{B.8})$$

Fordert man die Gyrotropie der Verteilungsfunktion, so gilt $(\partial f_{a,0}/\partial \phi) = 0$, was zu zeigen war.

B.3 Variation der Konstanten

Die Differentialgleichung (2.29) ist von der Form

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} - \alpha(x)f(x) = g(x). \quad (\text{B.9})$$

Für $g(x) = 0$ ist die Lösung einfach durch $C_0 e^{h(x)}$ gegeben mit $h'(x) = \alpha(x)$.

Für $g(x) \neq 0$ macht man den Ansatz

$$f(x) = C(x)e^{h(x)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = C'(x)e^{h(x)} + h'(x)C(x)e^{h(x)}. \quad (\text{B.10})$$

Dieses formt man um,

$$\begin{aligned} C'(x) &= g(x)e^{-h(x)}, \\ C(x) &= C_0 + \int_0^x dx' g(x')e^{-h(x')}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

und erhält daraus die Lösung

$$f(x) = C_0 e^{h(x)} + \int_0^x dx' g(x')e^{h(x)-h(x')}. \quad (\text{B.12})$$

Für die linearisierte Vlasogleichung nehmen mit $\vec{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$ und

$$\alpha(\phi) = i \frac{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega}{\Omega_{B,a}} = i \frac{k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega}{\Omega_{B,a}}, \quad (\text{B.13})$$

$$g(\phi) = \frac{\Phi(\phi)}{\Omega_{B,a}} \quad (\text{B.14})$$

die Größen $h(\phi)$ und $C(\phi)$ die folgende Form an,

$$h(\phi) = i \frac{k_{\perp} v_{\perp} \sin \phi + (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) \phi}{\Omega_{B,a}} \quad (\text{B.15})$$

$$C(\phi) = \frac{1}{\Omega_{B,a}} \int_{\text{sign}(q_a \Gamma) \infty}^{\phi} d\phi' \Phi(\phi') \exp \left[-i \frac{k_{\perp} v_{\perp} \sin \phi' + (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) \phi'}{\Omega_{B,a}} \right]. \quad (\text{B.16})$$

Da bei der Linearisierung (2.7) angenommen wurde, dass die Fluktuationen klein sind, müssen hier die Integrationsgrenzen passend gewählt werden. Für den Fall einer komplexen Frequenz $\omega = \omega_R + i\Gamma$ ergibt sich ein reeller Faktor $\exp[\Gamma\phi/\Omega_{B,a}]$, der die Fluktuationen dämpfen kann. Dank der frei bestimmbaren Integrationskonstante kann die untere Grenze so gewählt werden, dass die Stammfunktion an dieser Stelle den Wert Null annimmt.

B.4 Auswertung der Winkelintegrale

Um die Winkelintegrale in Gleichung (2.39) zu berechnen, ist eine systematische Vorgehensweise von Vorteil. Definiert man sich zunächst aus Gleichung (2.39) den Winkelintegraltensor

$$\Theta_{ij}(\mu, \nu) \equiv \int_0^{2\pi} d\phi g_i(\phi) e^{i(\alpha+\nu)\phi} \int_{\text{sign}(q_a \Gamma) \infty}^{\phi} d\phi' g_j(\phi') e^{-i(\alpha+\mu)\phi'}, \quad (\text{B.17})$$

wobei $g_i(\phi) \in \{\cos \phi, \sin \phi, 1\}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, so stellt sich heraus, dass alle Komponenten dieses Tensors analytisch lösbar sind. Man erhält die Lösungen

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \frac{(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1) [(\alpha + \mu)(\nu - \mu)^2 - 2(\alpha + \mu) - (\nu - \mu)]}{(\alpha + \mu + 1)(\alpha + \mu - 1)(\nu - \mu + 2)(\nu - \mu - 2)(\nu - \mu)}, \\ \Theta_{12} &= \frac{i(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1) [(\alpha + \mu)(\nu - \mu) - (\nu - \mu)^2 + 2]}{(\alpha + \mu + 1)(\alpha + \mu - 1)(\nu - \mu + 2)(\nu - \mu - 2)(\nu - \mu)}, \\ \Theta_{13} &= \frac{(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1)(\nu - \mu)}{(\alpha + \mu)(\nu - \mu + 1)(\nu - \mu - 1)}, \\ \Theta_{21} &= \frac{i(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1) [(\alpha + \mu)(\nu - \mu) - 2]}{(\alpha + \mu + 1)(\alpha + \mu - 1)(\nu - \mu + 2)(\nu - \mu - 2)(\nu - \mu)}, \\ \Theta_{22} &= \frac{(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1) (-2(\alpha + \mu) + (\nu - \mu))}{(\alpha + \mu + 1)(\alpha + \mu - 1)(\nu - \mu + 2)(\nu - \mu - 2)(\nu - \mu)}, \\ \Theta_{23} &= \frac{i(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1)}{(\alpha + \mu)(\nu - \mu + 1)(\nu - \mu - 1)}, \\ \Theta_{31} &= \frac{(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1) [(\alpha + \mu)(\nu - \mu) - 1]}{(\alpha + \mu + 1)(\alpha + \mu - 1)(\nu - \mu + 1)(\nu - \mu - 1)}, \\ \Theta_{32} &= \frac{i(e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1) [(\alpha + \mu) - (\nu - \mu)]}{(\alpha + \mu + 1)(\alpha + \mu - 1)(\nu - \mu + 1)(\nu - \mu - 1)}, \end{aligned}$$

$$\Theta_{33} = \frac{e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1}{(\alpha + \mu)(\nu - \mu)}. \quad (\text{B.18})$$

Nun betrachtet man den Summentensor

$$\Psi_{ij} \equiv \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\mu}[\beta] J_{\nu}[\beta] \Theta_{ij}(\mu, \nu), \quad (\text{B.19})$$

Die Doppelsumme über μ und ν mit den Besselfunktionen in Gleichung (B.19) vereinfacht sich, da alle Terme von Θ_{ij} mit Nenner $\neq 0$ Null sind und somit wegfallen. Falls jedoch der Nenner ebenfalls Null ist, muss man die Regel von de l'Hospital anwenden, und man erhält Summanden $\neq 0$. Als Beispiel sei hier Θ_{33} betrachtet. Es gilt

$$\Theta_{33} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ 1/(\alpha + \mu) & \nu = \mu. \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Auf diese Weise lässt sich die Doppelsumme in den einzelnen Komponenten Ψ_{ij} in eine einfache Summe über μ vereinfachen, deren Summanden sich mit der Abkürzung $J_{\mu} = J_{\mu}[\beta]$ und den Beziehungen für die Besselfunktionen,

$$\begin{aligned} J_{\mu-1} + J_{\mu+1} &= \frac{2\mu}{\beta} J_{\mu}, \\ \frac{dJ_{\mu}}{d\beta} &= -\frac{\mu}{\beta} J_{\mu} + J_{\mu-1} = \frac{\mu}{\beta} J_{\mu} - J_{\mu+1}, \\ J_{\mu-1} - J_{\mu+1} &= 2\frac{dJ_{\mu}}{d\beta} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

ebenfalls explizit ausrechnen lassen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{\pi i}{2} \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-2}}{\alpha + \mu - 1} + J_{\mu} \left(\frac{1}{\alpha + \mu - 1} + \frac{1}{\alpha + \mu + 1} \right) + \frac{J_{\mu+2}}{\alpha + \mu + 1} \right) \\ &= \frac{\pi i}{2} \sum_{\mu} \frac{(J_{\mu-1} + J_{\mu+1})^2}{\alpha + \mu} = 2\pi i \sum_{\mu} \frac{\mu^2}{\beta^2} \frac{J_{\mu}^2}{\alpha + \mu}, \\ \Psi_{12} &= \frac{\pi}{2} \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-2}}{\alpha + \mu - 1} + J_{\mu} \left(\frac{1}{\alpha + \mu - 1} - \frac{1}{\alpha + \mu + 1} \right) - \frac{J_{\mu+2}}{\alpha + \mu + 1} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \sum_{\mu} \frac{J_{\mu-1}^2 - J_{\mu+1}^2}{\alpha + \mu} = -2\pi \sum_{\mu} \frac{\mu}{\beta} \frac{J_{\mu} J'_{\mu}}{\alpha + \mu}, \\ \Psi_{13} &= \pi i \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-1}}{\alpha + \mu} + \frac{J_{\mu+1}}{\alpha + \mu} \right) = 2\pi i \sum_{\mu} \frac{\mu}{\beta} \frac{J_{\mu}^2}{\alpha + \mu}, \\ \Psi_{21} &= \frac{\pi}{2} \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-2}}{\alpha + \mu - 1} - J_{\mu} \left(\frac{1}{\alpha + \mu - 1} - \frac{1}{\alpha + \mu + 1} \right) - \frac{J_{\mu+2}}{\alpha + \mu + 1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{\mu} \frac{J_{\mu-1}^2 - J_{\mu+1}^2}{\alpha + \mu} = 2\pi \sum_{\mu} \frac{\mu}{\beta} \frac{J_{\mu} J'_{\mu}}{\alpha + \mu} = -\Psi_{12}, \\ \Psi_{22} &= -\frac{\pi i}{2} \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-2}}{\alpha + \mu - 1} - J_{\mu} \left(\frac{1}{\alpha + \mu - 1} + \frac{1}{\alpha + \mu + 1} \right) + \frac{J_{\mu+2}}{\alpha + \mu + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi i}{2} \sum_{\mu} \frac{(J_{\mu-1} - J_{\mu+1})^2}{\alpha + \mu} = 2\pi i \sum_{\mu} \frac{J_{\mu}^2}{\alpha + \mu}, \\
\Psi_{23} &= \pi \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-1}}{\alpha + \mu} - \frac{J_{\mu+1}}{\alpha + \mu} \right) = 2\pi \sum_{\mu} \frac{J_{\mu} J'_{\mu}}{\alpha + \mu}, \\
\Psi_{31} &= \pi i \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-1}}{\alpha + \mu - 1} + \frac{J_{\mu+1}}{\alpha + \mu + 1} \right) \\
&= \pi i \sum_{\mu} \left(\frac{J_{\mu+1} J_{\mu}}{\alpha + \mu} + \frac{J_{\mu-1} J_{\mu}}{\alpha + \mu} \right) = 2\pi i \sum_{\mu} \frac{\mu}{\beta} \frac{J_{\mu}^2}{\alpha + \mu} = \Psi_{13}, \\
\Psi_{32} &= \pi \sum_{\mu} J_{\mu} \left(\frac{J_{\mu-1}}{\alpha + \mu - 1} - \frac{J_{\mu+1}}{\alpha + \mu + 1} \right) \\
&= \pi \sum_{\mu} \left(\frac{J_{\mu+1} J_{\mu}}{\alpha + \mu} - \frac{J_{\mu-1} J_{\mu}}{\alpha + \mu} \right) = -2\pi \sum_{\mu} \frac{J_{\mu} J'_{\mu}}{\alpha + \mu} = -\Psi_{23}, \\
\Psi_{33} &= 2\pi i \sum_{\mu} J_{\mu} \frac{J_{\mu}}{\alpha + \mu} = 2\pi i \sum_{\mu} \frac{J_{\mu}^2}{\alpha + \mu} \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Mit diesen Komponenten lässt sich der Leitfähigkeitstensor (2.40) in die Form (2.41) bringen.

C Mathematische Anmerkungen zur Weibelinstabilität und Solitontheorie

C.1 Betrachtung von Gleichung (3.18)

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die rechte Seite von Gleichung (3.18) für alle Werte E in $1 \leq E \leq \infty$ negativ ist, und zwar für beliebige M^2 . Zunächst sortiert man die rechte Seite neu,

$$\begin{aligned} & 3E\sqrt{E^2-1} - \frac{3E^2-1+3E^2M^2}{M} \arctan \frac{\sqrt{E^2-1}}{EM} \\ = & -\frac{E^2-1}{M} \arctan \frac{\sqrt{E^2-1}}{EM} + 3E^2 \left(-\left(\frac{2}{3M}+M\right) \arctan \frac{\sqrt{E^2-1}}{EM} + \frac{\sqrt{E^2-1}}{E} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Wegen $E \geq 1$ und $M > 0$ ist der erste Term stets negativ, und es genügt zu zeigen, dass

$$T_{E,M} = T[E, M] \equiv -\left(\frac{2}{3M}+M\right) \arctan \frac{\sqrt{E^2-1}}{EM} + \frac{\sqrt{E^2-1}}{E} \leq 0 \quad \text{in } E \geq 1, M \geq 0. \quad (\text{C.2})$$

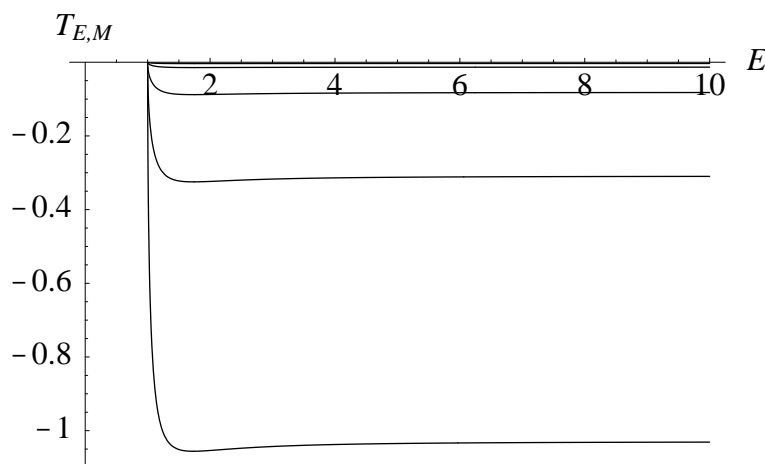


Abbildung C.1: Verlauf der Funktion $T_{E,M}$ für verschiedene Parameter M , von unten nach oben mit den Werten 0.5, 1, 2, 5 und 10. Dabei liegt die letzte Kurve bereit so nahe an Null, dass sie hier nicht mehr sichtbar ist.

Eine genaue Diskussion von $T_{E,M}$ ergibt folgende Eigenschaften, siehe auch Abbildung C.1:

1. $T[1, M] = 0$ für alle M ;
2. Es gibt nur ein lokales Extremum von $T_{E,M}$ bei $E = \sqrt{3}$ für alle M ;
3. $T[E \rightarrow \infty, M] \rightarrow -\left(\frac{2}{3M} + M\right) \arctan M^{-1} + 1 \equiv T_\infty[M]$;
4. Für kleine M gilt: $T[E, M \ll 1] < 0$ und $T[E, M \rightarrow 0] \rightarrow -\infty$;
5. Für kleine E gilt: $T[1 + \epsilon, M] < 0$, mit $\epsilon \ll 1$.

Die Kurve $T_{E,M}$ startet also bei $T[1, M] = 0$ und ist negativ für kleine Werte von M . Nach dem lokalen Extremum bei $E = \sqrt{3}$ nähert sich $T_{E,M}$ dem konstanten Wert $T_\infty[M]$ für $E \rightarrow \infty$ an, welcher zunächst sowohl positiv als auch negativ sein kann, abhängig von M . Falls $T_\infty[M]$ für ein bestimmtes M negativ ist, dann muss allerdings $T_{E,M} < 0$ für alle E sein, ansonsten hätte $T_{E,M}$ ein weiteres Extremum.

Nun ist nur noch zu zeigen, dass $T_\infty[M]$ für alle M negativ ist. Weil $T_\infty[M]$ bzgl. M streng monoton wachsend ist und man die Reihenentwicklung

$$T_\infty[M \rightarrow \infty] \simeq -\frac{1}{3M^2} \leq 0 \quad (\text{C.3})$$

hat, so folgt $T_\infty[M] \leq 0$ und damit $T_{E,M} < 0$ für alle M .

C.2 Berechnung der Gleichung (3.60)

Hier soll nun Gleichung (3.60) vereinfacht werden,

$$\sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \int_{-\sqrt{E^2-1}}^{\sqrt{E^2-1}} dy \frac{E^2 - 1 - y^2}{y^2 + E^2 M^2} \left(E H_a - 3E y^2 K_a + y^2 \frac{\partial H_a}{\partial E} - y^4 \frac{\partial K_a}{\partial E} \right) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Mit der Ergänzung

$$y^4 = (y^2 + E^2 M^2 - E^2 M^2)^2 = (y^2 + E^2 M^2)^2 - 2E^2 M^2 (y^2 + E^2 M^2) + E^4 M^4 \quad (\text{C.5})$$

kann man die Integrale über y ausführen,

$$\begin{aligned} & \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \left(E H_a - E^2 M^2 \left(-3E K_a + \frac{\partial H_a}{\partial E} \right) - E^4 M^4 \frac{\partial K_a}{\partial E} \right) \\ & \times \left(\frac{E^2(1 + M^2) - 1}{EM} \arctan \frac{\sqrt{E^2 - 1}}{EM} - \sqrt{E^2 - 1} \right) + \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \\ & \times \left(\left(-3E K_a + \frac{\partial H_a}{\partial E} + E^2 M^2 \frac{\partial K_a}{\partial E} \right) \frac{2}{3} (E^2 - 1)^{3/2} - \frac{\partial K_a}{\partial E} \frac{2}{15} (E^2 - 1)^{5/2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Partielle Integration über E im zweiten Term und Ordnen nach H_a und K_a führen zum Resultat

$$\begin{aligned} & \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE E \left(E H_a - E^2 M^2 \left(-3E K_a + \frac{\partial H_a}{\partial E} \right) - E^4 M^4 \frac{\partial K_a}{\partial E} \right) \\ & \times \left(\frac{E^2(1 + M^2) - 1}{EM} \arctan \frac{\sqrt{E^2 - 1}}{EM} - \sqrt{E^2 - 1} \right) = \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_1^\infty dE \sqrt{E^2 - 1} \\ & \times \left(\frac{2}{3} (4E^2 - 1) H_a + E^2 M^2 (2E^2 - 1) K_a + \frac{2}{15} (E^2 - 1) (9E^2 + 1) K_a \right), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

welches der Gleichung (3.61) in Kapitel 3.6 entspricht.

C.3 Bestimmung der Jacobideterminante (5.24)

In diesem Abschnitt soll die Jacobideterminante in Gleichung (5.24) berechnet werden. Mit Gleichung (5.8), $\varpi_x + e_A A / (m_a c^2) = \Pi_x$, und ϖ_y findet man

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} (\partial p_x / \partial \Pi_x) & (\partial p_x / \partial \varpi_y) & (\partial p_x / \partial \Pi_z) \\ (\partial p_y / \partial \Pi_x) & (\partial p_y / \partial \varpi_y) & (\partial p_y / \partial \Pi_z) \\ (\partial p_z / \partial \Pi_x) & (\partial p_z / \partial \varpi_y) & (\partial p_z / \partial \Pi_z) \end{vmatrix} \\ &= (m_a c)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (\partial \varpi_z / \partial \Pi_x) & (\partial \varpi_z / \partial \varpi_y) & (\partial \varpi_z / \partial \Pi_z) \end{vmatrix} = (m_a c)^3 \left| \frac{\partial \varpi_z}{\partial \Pi_z} \right|. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Aus Gleichung (5.17) [oder (5.16)],

$$\varpi_z = \left(\xi \Pi_z \pm \left[\Pi_z^2 - (1 - \xi^2) (1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2) \right]^{1/2} \right) / (1 - \xi^2), \quad (\text{C.9})$$

folgt

$$\frac{\partial \varpi_z}{\partial \Pi_z} = \frac{1}{1 - \xi^2} \left(\xi \pm \frac{\Pi_z}{\left[\Pi_z^2 - (1 - \xi^2) (1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2) \right]^{1/2}} \right). \quad (\text{C.10})$$

Ersetzt man die Wurzel in Gleichung (C.10) durch Gleichung (C.9), ergibt sich

$$\frac{\partial \varpi_z}{\partial \Pi_z} = \frac{1}{1 - \xi^2} \left(\xi + \frac{\Pi_z}{(1 - \xi^2) \varpi_z - \xi \Pi_z} \right). \quad (\text{C.11})$$

Nun kann man Gleichung (5.12) benutzen, $\xi \varpi_z = \gamma - \Pi_z$, um

$$\frac{\partial \varpi_z}{\partial \Pi_z} = \frac{\xi \gamma}{(1 - \xi^2) \gamma - \Pi_z}, \quad (\text{C.12})$$

zu erhalten, welches zur Gleichung (5.25) führt.

C.4 Lösung von Gleichung (5.44) mit Hilfe Elliptischer Integrale

Hier soll kurz dargelegt werden, wie man Gleichung (5.44) analytisch lösen kann. Aus Gleichung (5.44) folgt durch Separation der Variablen

$$-u \left[(u^2 - \rho^2)(1 - u) \right]^{-1/2} du = \mp dx. \quad (\text{C.13})$$

Die Substitution $u = 1 - \mu^2$ ergibt

$$-u \left[(u^2 - \rho^2)(1 - u) \right]^{-1/2} du = 2(1 - \mu^2) \left[(1 - \rho^2) - 2\mu^2 + \mu^4 \right]^{-1/2} d\mu. \quad (\text{C.14})$$

Nun ist es geschickt, $c_{\pm}^2 \equiv 1 \pm \rho$ mit $c_+^2 c_-^2 = 1 - \rho^2$ und $k^2 \equiv c_-^2 / c_+^2$ einzuführen. Dieses führt auf

$$\begin{aligned} \mu^4 - 2\mu^2 + (1 - \rho^2) &= (\mu^2 - c_+^2)(\mu^2 - c_-^2) = c_+^2 c_-^2 (1 - \mu^2/c_-^2)(1 - \mu^2/c_+^2) \\ &= c_+^2 c_-^2 (1 - \mu^2/c_-^2)(1 - k^2 \mu^2/c_-^2), \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

so dass die linke Seite der Gleichung lautet

$$\frac{2(1 - \mu^2)d\mu}{[(1 - \rho^2) - 2\mu^2 + \mu^4]^{1/2}} = \frac{2(1 - c_-^2(\mu^2/c_-^2))c_-d(\mu/c_-)}{c_+c_- [(1 - \mu^2/c_-^2)(1 - k^2\mu^2/c_-^2)]^{1/2}}. \quad (\text{C.16})$$

Durch eine erneute Substitution, $X \equiv \mu/c_-$, erhält man schließlich

$$(1 - c_-^2 X^2) [(1 - X^2)(1 - k^2 X^2)]^{-1/2} dX = \mp(c_+/2)dx, \quad (\text{C.17})$$

was formal integriert werden kann als Summe der Elliptischen Funktionen F und E,

$$F(\arcsin X, k) - (c_-^2/k^2)[F(\arcsin X, k) - E(\arcsin X, k)] = \mp(c_+/2)x. \quad (\text{C.18})$$

Dieses führt auf Gleichung (5.49),

$$-\frac{2\rho}{\sqrt{1+\rho}}F(\arcsin X, k) + 2\sqrt{1+\rho}E(\arcsin X, k) = \mp x. \quad (\text{C.19})$$

D Mathematischer Formalismus für Kapitel 6

D.1 Bestimmung der Integrale \hat{J}

D.1.1 Allgemeine Vereinfachungen

Hier soll im Folgenden die Auswertung der Integrale (6.15) durchgeführt werden. Es ist zweckmäßig, zunächst einen Geschwindigkeitsfaktor, $\Lambda = (V_b \Gamma_b^2 / c^2)$ abzuspalten,

$$\hat{J} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{\beta}(t) \exp[i\Phi(t)] \equiv \Lambda \vec{J}, \quad (\text{D.1})$$

und anschließend durch eine Substitution zur Längenkoordinate ζ via

$$\zeta = (t/\Lambda) - z_0 \quad \text{in} \quad -\zeta_{end} \leq \zeta \leq \zeta_{end} \quad (\text{D.2})$$

überzugehen. Es ist also $t = (\zeta + z_0)\Lambda$.

In den Integralen kann dann die konstante Phase $\varphi_0 = \exp[-i\omega(\vec{n} \cdot \vec{r}_0/c)]$ ignoriert werden, weil im weiteren Verlauf das Betragsquadrat der Integrale (6.15) gebildet wird und $|\varphi_0|^2 = 1$ gilt. Mit $l = (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)\Lambda$ und der Aufspaltung der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ in einen konstanten Term $\vec{\beta}_0$ und einen Term $\Delta\vec{\beta}$, welcher die Auswirkung des Solitons beinhaltet (man beachte, dass $\Delta\vec{\beta} = 0$ für $|\zeta| > \zeta_{end}$) erhält man

$$\begin{aligned} \vec{J}/\varphi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \vec{\beta}(\zeta) \exp[i\Phi(\zeta)]/\varphi_0 \\ &= \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta_{end}} d\zeta (\vec{\beta}_0 + \Delta\vec{\beta}(\zeta)) \exp[i\omega l \zeta - i\Delta\Phi(\zeta)] \\ &\quad + \vec{\beta}_0 \left(\int_{-\infty}^{-\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l \zeta - i\Delta\Phi(\zeta)] + \int_{\zeta_{end}}^{\infty} d\zeta \exp[i\omega l \zeta - i\Delta\Phi(\zeta)] \right) \equiv \vec{j}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Mit $\Delta\Phi(\zeta \leq -\zeta_{end}) = 0$ und $\Delta\Phi(\zeta \geq \zeta_{end}) = \Delta\Phi(\zeta_{end}) \neq 0$ kann man zunächst die letzten beiden Integrale aus Gleichung (D.3) auswerten,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{-\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l \zeta - i\Delta\Phi(\zeta)] + \int_{\zeta_{end}}^{\infty} d\zeta \exp[i\omega l \zeta - i\Delta\Phi(\zeta)] \\ &= \exp[-i\omega l \zeta_{end}]/(i\omega l) - \exp[-i\Delta\Phi(\zeta_{end})] \exp[i\omega l \zeta_{end}]/(i\omega l) \\ &= -(2/\omega l) \exp[-i\Delta\Phi(\zeta_{end})/2] \sin[\omega l \zeta_{end} - \Delta\Phi(\zeta_{end})/2] \equiv -S. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Mit der gleichen Substitution (D.2), $t' = (\zeta' + z_0)\Lambda$, bestimmt man auch die Phase,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \omega \int_{-\infty}^t dt' [n_x \Delta\beta_x(t') + n_y \Delta\beta_y(t')] \\ &= \omega \Lambda \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta} d\zeta' [n_x \Delta\beta_x(\zeta') + n_y \Delta\beta_y(\zeta')] \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

und hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die rechte Seite von Gleichung (D.3) aufzuteilen gemäß

$$\vec{j} \equiv \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \quad (\text{D.6})$$

wobei der erste Term \vec{j}_1 durch die konstante Geschwindigkeit $\vec{\beta}_0$ und der andere Ausdruck \vec{j}_2 durch den Differenzvektor $\Delta\vec{\beta}$ gegeben ist,

$$\begin{aligned} \vec{j}_1 &= \vec{\beta}_0 \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l\zeta - i\Delta\Phi(\zeta)] - \vec{\beta}_0 S, \\ \vec{j}_2 &= \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l\zeta - i\omega\Delta\Phi(\zeta)] (\Delta\beta_x(\zeta), \Delta\beta_y(\zeta), 0) \equiv (j_x, j_y, 0). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

D.1.2 Betrachtung von $|\vec{n} \cdot \vec{j}|^2$ und $j_\perp \cdot j_\perp^*$

Für Gleichung (6.16) gilt es nun, $j_\perp \cdot j_\perp^*$ zu berechnen. Dazu betrachtet man jedoch zunächst den zur Sichtlinie *parallelen* Anteil des Vektors \vec{j} ,

$$j_\parallel \equiv \vec{n} \cdot \vec{j} = (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)(I_1 - S) + I_2, \quad (\text{D.8})$$

in welchen die beiden Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l\zeta - i\Delta\Phi(\zeta)], \\ I_2 = \vec{n} \cdot \vec{j}_2 &= \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l\zeta] (n_x \Delta\beta_x(\zeta) + n_y \Delta\beta_y(\zeta)) \\ &\quad \times \exp[-i\omega\Lambda \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta} d\zeta' (n_x \Delta\beta_x(\zeta') + n_y \Delta\beta_y(\zeta'))] \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

eingehen. Der zweite Term, I_2 , ist mittels partieller Integration durch den ersten Term I_1 darstellbar,

$$\begin{aligned} I_2 &= n_x j_x + n_y j_y = -\frac{i}{\omega\Lambda} \int_{-\zeta_{end}}^{\zeta_{end}} d\zeta \exp[i\omega l\zeta] \frac{d}{d\zeta} \exp[-i\Delta\Phi(\zeta)] \\ &= -(2/\omega\Lambda) \exp[-i\Delta\Phi(\zeta_{end})/2] \sin[\omega l\zeta_{end} - \Delta\Phi(\zeta_{end})/2] + (l/\Lambda) I_1 \\ &= (l/\Lambda)(I_1 - S). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Man kann demzufolge also auch mit den Gleichungen (D.8) und (D.10) die parallelen Anteile der Integrale in Gleichung (6.16), j_\parallel , durch j_2 ausdrücken,

$$j_\parallel = I_1 - S = (\Lambda/l)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2), \quad (\text{D.11})$$

denn es gilt $(\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0) + (l/\Lambda) = 1$.

Man erhält also für \vec{j}_1 mit den Gleichungen (D.7a) und (D.11)

$$\vec{j}_1 = \vec{\beta}_0(I_1 - S) = (\Lambda/l)\vec{\beta}_0(\vec{n} \cdot \vec{j}_2). \quad (\text{D.12})$$

Dieses bedeutet, dass man, um eine Lösung für $j_\perp = \vec{j} - \vec{n}j_\parallel$ zu bestimmen, nur die Integrale $\Delta\Phi(\zeta_{end})$, j_x und j_y lösen muss. Da nun aber j_x und j_y symmetrisch sind, ergibt sich aus der Berechnung von j_y automatisch die entsprechende Lösung für j_x , wenn man die Indizes y durch x ersetzt.

Dann, mit $\vec{j} = (\Lambda/l)\vec{\beta}_0(\vec{n} \cdot \vec{j}_2) + \vec{j}_2$, kann man schreiben

$$\begin{aligned}\vec{j}_\perp &= \vec{j} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{j}) \\ &= (\Lambda/l)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2)[\vec{\beta}_0 - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)] + [\vec{j}_2 - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{j}_2)],\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

welches mit $(\Lambda/l) = (1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^{-1}$ zu

$$\begin{aligned}\vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^* &= (\Lambda/l)^2[(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0) - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)^2]|\vec{n} \cdot \vec{j}_2|^2 \\ &\quad + (\Lambda/l)[(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{j}_2^*)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2) + (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{j}_2)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2^*)] - 2(\Lambda/l)(\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)|\vec{n} \cdot \vec{j}_2|^2 \\ &\quad + |\vec{j}_2|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{j}_2|^2 \\ &= |\vec{j}_2|^2 + \frac{(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{j}_2^*)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2) + (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{j}_2)(\vec{n} \cdot \vec{j}_2^*)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)} - \frac{1 - (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0)}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^2}|\vec{n} \cdot \vec{j}_2|^2\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

führt.

D.2 Die Bewegung der Elektronen

In diesem Abschnitt sollen Näherungsformeln für die momentane Geschwindigkeit der Elektronen innerhalb des Solitons (gegeben durch $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 + \Delta\vec{\beta}$) bestimmt werden. Ausgangspunkt hierbei ist zunächst die Gleichung (5.63) für das normierte Vektorpotential,

$$(du/dx)^2 = (1 - u)(u - R^2)/u \quad (\text{D.15})$$

in welcher (du/dx) ein Maximum bei $u = R$ hat. Zudem gilt $u(x = 0) = 1$ und $u(x = x_{end}) = R^2$. Nun kann, wie schon in Abschnitt 5.3.2 dargelegt wurde, Gleichung (5.63) bzw. (D.15) nicht in geschlossener analytischer Form gelöst werden, so dass man geeignete Näherungen für $u(x)$ finden muss. Weil $u(x)$ symmetrisch in x ist, wählt man für $1 \geq u \geq R$ als Ansatz

$$u \simeq 1 - bx^2 \quad (\text{D.16})$$

und erhält aus Gleichung (D.15) zur Ordnung x^2

$$b = (1 - R^2)/4. \quad (\text{D.17})$$

Man findet daher, dass das Maximum (bei $u = R$) an der Stelle x_{max} durch

$$x(u = R) = \pm \frac{2}{(1 + R)^{1/2}} \equiv \pm x_{max} \quad (\text{D.18})$$

gegeben ist, mit $x_{max} > 0$. Ähnlich setzt man in $R \geq u \geq R^2$ das Potential in der Form

$$u = R^2(1 + a(x_{end} - |x|)^2) \quad (\text{D.19})$$

an, was in Verbindung mit Gleichung (D.15) in Ordnung x^2

$$a = (1 - R^2)/(4R^4), \quad (\text{D.20})$$

ergibt¹. Wegen $u(x = x_{max}) = R$ und $u = R^2$ bei $|x| = x_{end}$ ergibt sich der Ort x_{end} , an dem das Potential verschwindet (wo also das „Ende“ des Solitons ist) zu

$$x(u = R^2) = \pm \left(x_{max} + \frac{2R^{3/2}}{(1+R)^{1/2}} \right) = \pm 2 \frac{1+R^{3/2}}{(1+R)^{1/2}} \equiv \pm x_{end}, \quad (\text{D.21})$$

wobei $x_{end} > x_{max} > 0$. Es gibt also zwei Bereiche:

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 - \frac{1-R^2}{4}x^2 \equiv 1 - bx^2 && \text{in } 0 \leq |x| \leq x_{max}, \\ u(x) &= R^2 + \frac{1-R^2}{4R^2}(x_{end} - |x|)^2 \equiv R^2 + R^2a(x_{end} - |x|)^2 && \text{in } x_{max} \leq |x| \leq x_{end}. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der äußere Bereich des Solitons mit $x_{max} \leq |x| \leq x_{end}$ als *Regime (a)* bezeichnet, der innere Bereich mit $0 \leq |x| \leq x_{max}$ als *Regime (b)*.

Nun kann $\Delta\vec{\beta} = (\Delta\beta_x, \Delta\beta_y, 0)$ mit Hilfe der Gleichungen (6.7a) und der „senkrechten Energie“,

$$E_{\perp}[A] = (1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2)^{1/2}, \quad (\text{D.23})$$

berechnet werden. Weil $u = A/A_{max}$ in den beiden Regimes zu *quadratischer* Ordnung in x genähert wurde, wird für $\Delta\beta_x, \Delta\beta_y$ ebenso verfahren. Die Entwicklung ist ohne prinzipielle Schwierigkeiten, jedoch etwas aufwändig, indem man für das Potential genau diese Näherungen (D.22) benutzt und die Wurzelausdrücke für kleine Werte von x bzw. $(x_{end} - |x|)$ entwickelt. Man erhält im Regime (a), $x_{max} \leq |x| \leq x_{end}$, für die Differenzen in den Gleichungen (6.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{\perp}[A]} - \frac{1}{E_{\perp}[R^2 A_{max}]} &= \frac{z_a R^2 A_{max} (\Pi_x - z_a R^2 A_{max})}{E_{\perp}^3[R^2 A_{max}]} a(x_{end} - |x|)^2, \\ \frac{A}{E_{\perp}[A]} - \frac{R^2 A_{max}}{E_{\perp}[R^2 A_{max}]} &= \left(1 + \frac{z_a R^2 A_{max} (\Pi_x - z_a R^2 A_{max})}{E_{\perp}^2[R^2 A_{max}]} \right) \frac{R^2 A_{max}}{E_{\perp}[R^2 A_{max}]} a(x_{end} - |x|)^2, \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

somit sind $\Delta\beta_x$ und $\Delta\beta_y$ zur Ordnung $x^2 = \zeta^2/L^2$ bekannt. Im Regime (b), $0 \leq |x| \leq x_{max}$, findet man die Differenzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{\perp}[A]} - \frac{1}{E_{\perp}[R^2 A_{max}]} &= \frac{1}{E_{\perp}[A_{max}]} - \frac{1}{E_{\perp}[R^2 A_{max}]} - \frac{z_a A_{max} (\Pi_x - z_a A_{max})}{E_{\perp}^3[A_{max}]} bx^2, \\ \frac{A}{E_{\perp}[A]} - \frac{R^2 A_{max}}{E_{\perp}[R^2 A_{max}]} &= \frac{A_{max}}{E_{\perp}[A_{max}]} - \frac{R^2 A_{max}}{E_{\perp}[R^2 A_{max}]} \\ &\quad - \left(1 + \frac{z_a A_{max} (\Pi_x - z_a A_{max})}{E_{\perp}^2[A_{max}]} \right) \frac{A_{max}}{E_{\perp}[A_{max}]} bx^2. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Also sind auch in diesem Regime $\Delta\beta_x$ und $\Delta\beta_y$ zur Ordnung $x^2 = \zeta^2/L^2$ bekannt; und zusammengenommen ergeben sich die Gleichungen (6.21)

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\beta} &\equiv \Delta\vec{\beta}_0 (\zeta_{end} - |\zeta|)^2 && \text{in } \zeta_{max} \leq |\zeta| \leq \zeta_{end}, \\ &\equiv \Delta\vec{\beta}_1 - \Delta\vec{\beta}_2 \zeta^2 && \text{in } 0 \leq |\zeta| \leq \zeta_{max}. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

¹Man könnte sich die Frage stellen, ob diese Näherung im Fall $R^2 \ll 1$ überhaupt gültig ist. Aus der Bedingung $1 \gg a(x_{end} - |x|)^2$ folgt jedoch die Bedingung $(x_{end} - |x|)^2 \ll 4R^4/(1 - R^2) \simeq (2R^2)^2$. Die Näherung (D.19) ist also für $R^2 \ll 1$ nur in unmittelbarer Nähe von x_{end} gültig, ansonsten kann man Gleichung (D.16) verwenden.

mit den Faktoren

$$\begin{aligned}
\Delta\beta_{0,x} &= -\frac{1-R^2}{4L^2R^2} \frac{z_a A_{max} (1+\varpi_y^2)}{\Gamma_b E_\perp^3[R^2 A_{max}]} \\
\Delta\beta_{0,y} &= \frac{1-R^2}{4L^2R^2} \frac{z_a A_{max} \varpi_y (\Pi_x - z_a R^2 A_{max})}{\Gamma_b E_\perp^3[R^2 A_{max}]} \\
\Delta\beta_{1,x} &= \frac{1}{\Gamma_b} \left(\frac{\Pi_x - z_a A_{max}}{E_\perp[A_{max}]} - \frac{\Pi_x - z_a R^2 A_{max}}{E_\perp[R^2 A_{max}]} \right) \\
\Delta\beta_{1,y} &= \frac{\varpi_y}{\Gamma_b} \left(\frac{1}{E_\perp[A_{max}]} - \frac{1}{E_\perp[R^2 A_{max}]} \right) \\
\Delta\beta_{2,x} &= -\frac{1-R^2}{4L^2} \frac{z_a A_{max} (1+\varpi_y^2)}{\Gamma_b E_\perp^3[A_{max}]} \\
\Delta\beta_{2,y} &= \frac{1-R^2}{4L^2} \frac{z_a A_{max} \varpi_y (\Pi_x - z_a A_{max})}{\Gamma_b E_\perp^3[A_{max}]}
\end{aligned} \tag{D.27}$$

Man beachte, dass $|\Delta\beta_{0,x}|, |\Delta\beta_{0,y}| \geq |\Delta\beta_{2,x}|, |\Delta\beta_{2,y}|$ wegen $R \leq 1$. Es stellt sich heraus, dass für weitere Berechnungen selbst diese Näherungen noch zu kompliziert sind, um bei einem Ensemble von Teilchen die Integration über die Impulse durchführen zu können. Es ist jedoch bereits in der Herleitung der Solitonen (siehe Kapitel 5.3) die Näherung $|p_j| \ll |z_a R^2 A_{max}| \leq |z_a A_{max}|$ benutzt worden, mit $p_j \in \{|\Pi_x|, |\varpi_y|, |\Pi_z|\}$. Auf gleiche Weise kann man nun auch die Faktoren (D.27) entwickeln.

Als Zwischenschritt wird zunächst die senkrechte Energie bestimmt; man erhält²

$$\begin{aligned}
E_\perp[A]^{-m} &= [1 + \varpi_y^2 + (\Pi_x - z_a A)^2]^{-m/2} \\
&\simeq |z_a A|^{-m} [1 + (m\Pi_x/z_a A) + m[(m+1)\Pi_x^2 - (1 + \varpi_y^2)]/(2z_a^2 A^2)].
\end{aligned} \tag{D.28}$$

So besitzt man nun Näherungen für die Komponenten (6.8a), (6.8b) und (D.27), welche in den später auftauchenden Skalarprodukten (siehe Anhang H.1) benutzt werden können. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\beta_{0,x} &\simeq -\frac{1}{\Gamma_b} + \frac{1}{2\Gamma_b R^4} \frac{1 + \varpi_y^2}{z_a |z_a| A_{max}^2}, \\
\beta_{0,y} &\simeq \frac{1}{\Gamma_b R^2} \frac{\varpi_y}{|z_a| A_{max}}, \\
\Delta\beta_{0,x} &\simeq -\frac{1-R^2}{4L^2 R^8 \Gamma_b} \frac{1 + \varpi_y^2}{z_a |z_a| A_{max}^2} = -\frac{\Delta_x}{4L^2 R^8}, \\
\Delta\beta_{0,y} &\simeq -\frac{1-R^2}{4L^2 R^6 \Gamma_b} \frac{\varpi_y}{|z_a| A_{max}} = -\frac{\Delta_y}{4L^2 R^6}, \\
\Delta\beta_{1,x} &\simeq -\frac{1-R^4}{2R^4 \Gamma_b} \frac{1 + \varpi_y^2}{z_a |z_a| A_{max}^2} = -\frac{(1+R^2)\Delta_x}{2R^4}, \\
\Delta\beta_{1,y} &\simeq -\frac{1-R^2}{R^2 \Gamma_b} \frac{\varpi_y}{|z_a| A_{max}} = -\frac{\Delta_y}{R^2},
\end{aligned}$$

²Man beachte, dass aus der Definition (5.64) die Abhängigkeit $R = R_*/|z_a A_{max}|$ mit $R_* = const.$ folgt. Es muss also die Forderung $|p_j| \ll R_*/|z_a A_{max}|$ erfüllt werden.

$$\begin{aligned}
\Delta\beta_{2,x} &\simeq -\frac{1-R^2}{4L^2\Gamma_b} \frac{1+\varpi_y^2}{z_a|z_a|A_{max}^2} = -\frac{\Delta_x}{4L^2}, \\
\Delta\beta_{2,y} &\simeq -\frac{1-R^2}{4L^2\Gamma_b} \frac{\varpi_y}{|z_a|A_{max}} = -\frac{\Delta_y}{4L^2},
\end{aligned} \tag{D.29}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta_x &\equiv \frac{1-R^2}{\Gamma_b} \frac{1+\varpi_y^2}{z_a|z_a|A_{max}^2}, \\
\Delta_y &\equiv \frac{1-R^2}{\Gamma_b} \frac{\varpi_y}{|z_a|A_{max}}.
\end{aligned} \tag{D.30}$$

Es ist zu beachten, dass $\Delta_x \ll \Delta_y$.

E Näherungen für die Integrale

$$M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$$

In diesem Abschnitt sollen die Integrale $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$ genauer untersucht werden. Da sie analytisch nicht lösbar sind, sucht man nach Näherungslösungen für verschiedene Fälle. Dazu wird der Integrand auf geeignete Weise genähert – wie, das hängt von der betrachteten Situation ab, wie es in Abschnitt 6.2.3 geschildert ist. Im Folgenden werden alle Möglichkeiten diskutiert.

Zur Abkürzung wird in diesem Abschnitt der Index j der Variablen \mathcal{A}_j , $\psi_{1,j}$ und $\psi_{3,j}$ weggelassen, da die Resultate nicht von den einzelnen Regimes des Solitons abhängen. Man muss nur berücksichtigen, dass die auftretenden Bedingungen in beiden Regimes (a) und (b) zu gelten haben. Von Interesse sind nun die Bereiche kleiner Frequenz ($\omega \rightarrow 0$) und hoher Frequenz ($\omega \rightarrow \infty$), und wegen $\psi_1, |\psi_3| \propto \omega$ muss man die Fälle $\psi_1, |\psi_3| \rightarrow 0$ und $\psi_1, |\psi_3| \rightarrow \infty$ betrachten. Man beachte jedoch, dass selbst für hohe Frequenzen ω auch $|\psi_3| \rightarrow 0$ gelten kann, falls das Skalarprodukt $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}|$ verschwindet. Es sind also insgesamt drei Fälle zu untersuchen.

E.1 Näherung für niedrige Frequenzen ($\psi_1, |\psi_3| \rightarrow 0$)

Aus der Definition von $M_n^\pm[\mathcal{A}; \psi_1, \psi_3]$ erhält man mit der Substitution $z = \mathcal{A}w$ (wobei $\mathcal{A} = \text{const.}$)

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{A}} dz z^n \exp[i(\psi_1 z \pm |\psi_3| z^3)] &= \mathcal{A}^{n+1} \int_0^1 dw w^n \exp[i\mathcal{A}(\psi_1 w \pm \mathcal{A}^2 |\psi_3| w^3)] \\ &\simeq \mathcal{A}^{n+1} \int_0^1 dw w^n = \mathcal{A}^{n+1}/(n+1). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Dieses gilt jedoch nur für $\psi_1 \mathcal{A} \ll 1$ and $|\psi_3| \mathcal{A}^3 \ll 1$, was mit den Definitionen (6.28) und (6.29) zu Einschränkungen für die Frequenz führt,

$$\omega \ll \omega_{low} \equiv \min[(\zeta_c/\mathcal{A})\omega_c, 3(\zeta_c/\mathcal{A})^3\omega_c]. \quad (\text{E.2})$$

Diese Art von Bedingungen existieren für jede Näherung, und hier gehen die verschiedenen Einflüsse der solitären Welle, wie sie oben genannt werden, ein. Da es hier allerdings um eine qualitative Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Teilchen und Welle handeln soll, betrachtet man einfach den Frequenzbereich, in dem die Einschränkung (E.2) für alle denkbaren Solitonen gilt.

E.2 Näherung für hohe Frequenzen ($\psi_1, |\psi_3| \rightarrow \infty$)

Hier gilt $\psi_1 \mathcal{A} \gg 1$ und $|\psi_3| \mathcal{A}^3 \gg 1$ für $|\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2}| > 0$. Daher lässt sich analog zum vorigen Abschnitt eine untere Grenze für die Frequenz finden, welche gegeben ist durch

$$\omega \gg \omega_{high} \equiv \max[(\zeta_c/\mathcal{A})\omega_c, 3(\zeta_c/\mathcal{A})^3\omega_c]. \quad (\text{E.3})$$

Zur Näherung des Integrals geht man wiederum von der Definition (6.26) aus. Es ist geschickt, die Substitution $z = (\psi_1/|\psi_3|)^{1/2}w$ durchzuführen, und man erhält

$$\begin{aligned} (\psi_1/|\psi_3|)^{-(n+1)/2} M_n^\pm[\mathcal{A}; \psi_1, \psi_3] &= \int_0^B dw w^n \exp[ik(w \pm w^3)] \\ &= \int_0^B dw \exp[\Phi(w)] \equiv N_n^\pm[B; k] \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

wobei

$$\begin{aligned} k &\equiv (\psi_1^3/|\psi_3|)^{1/2} \propto \omega, \\ B &\equiv \mathcal{A}(\psi_1/|\psi_3|)^{-1/2}, \\ \Phi(w) &\equiv ik(w \pm w^3) + n \ln[w]. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Weil $k \propto \omega$, oszilliert der Integrand für fast alle Werte von w sehr schnell, außer in der Nähe der Punkte mit „stationärer Phase“ w_{sp} , an denen die erste Ableitung von $\Phi(w)$ eine Nullstelle hat; dieses ist in Abbildung E.1 dargestellt. Eine Reihenentwicklung stellt also eine geeignete Näherung des Integrandes um diese Punkte w_{sp} dar, welche durch die Bedingung $\Phi'(w_{sp}) = ik(1 \pm 3w_{sp}^2) - (n/w_{sp}) = 0$ gegeben sind. Diese Methode wird *Sattelpunktmethode* genannt. Da je nach Winkel zwischen Soliton und Beobachter ψ_3 positiv oder negativ sein kann, werden diese beiden Möglichkeiten nacheinander untersucht.

E.2.1 $1 + 3w_{sp}^2 = (in/kw_{sp})$

An dieser Stelle werden die Methoden der komplexen Funktionentheorie genutzt. Da der Integrand keine Singularität besitzt, kann man das Integral $N_n^+[B; k]$ in der komplexen Ebene zu einem geschlossenen Linienintegral schließen, welches w_{sp} auf dem Integrationspfad enthält, vgl. Abbildung E.2. Da geschlossene Integrale über holomorphe Funktionen im komplexen Raum Null sind, wenn sie keine Singularitäten enthalten, muss der Integrationsverlauf in der komplexen Ebene (welcher durch die stationäre Phase dominiert wird) gleich der Strecke entlang der reellen Achse sein,

$$\int_1 dw f(w) = \int_2 dw f(w) \quad (\text{E.6})$$

Daher kann man sich auf den Phasenpunkt w_{sp} konzentrieren. Wegen $k \gg 1$ erhält man als Näherungslösung zweiter Ordnung

$$w_{sp}^\pm \simeq \pm i/3^{1/2} - (in/2k) \quad (\text{E.7})$$

und folglich

$$\Phi(w_{sp}^\pm) \simeq \mp 2k/3^{3/2} + n \ln[w_{sp}^\pm]. \quad (\text{E.8})$$

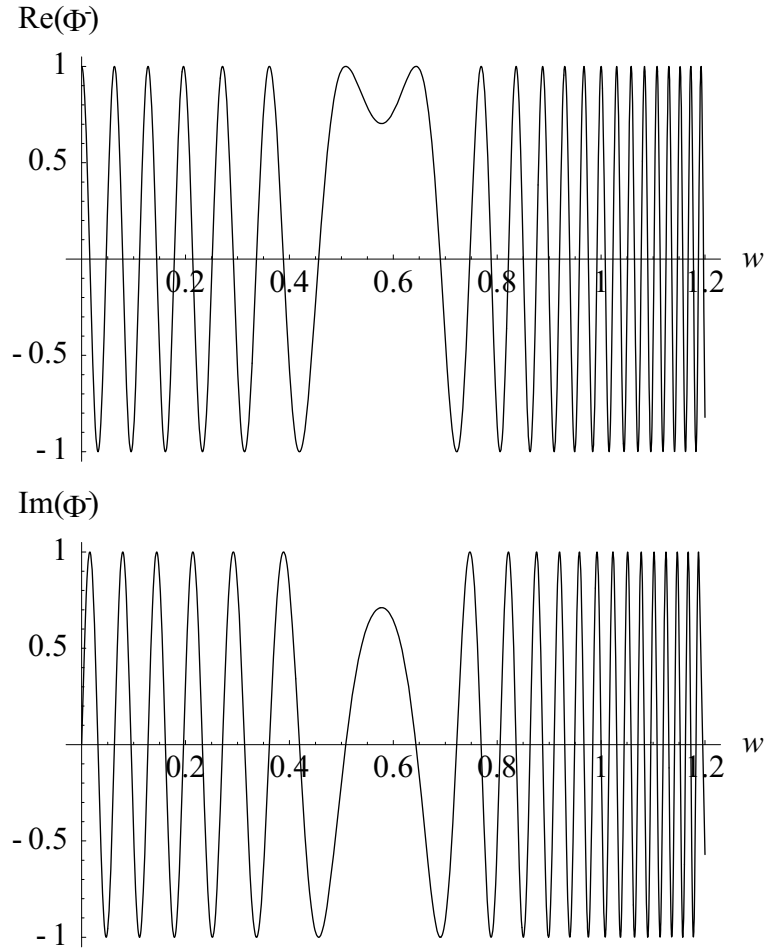


Abbildung E.1: Oszillation entlang der reellen Achse der Phase $\Phi^-(w)$ für $k = 10^2$ und $n = 0$. Oben ist der Realteil, unten der Imaginärteil der Funktion abgebildet. Man erkennt in der Nähe von $w = 1/\sqrt{3} \simeq 0.577$ den stationären Punkt der Phase. Für $\Phi^+(w)$ läge dieser Punkt auf der imaginären Achse; für $n = 1, 2$ wanderten diese Punkt minimal von den Achsen weg.

Man erhält zwei mathematische Lösungen, von denen man aber eine aus physikalischen Gründen ausschließen kann. Man erinnere sich, dass $k \propto \omega$. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll aus dem Frequenzspektrum unter Anderem auch die Leistung berechnet werden, indem man über die Frequenz von 0 bis ∞ integriert. Im Falle des unteren Vorzeichens erhielte man dann ein positives Vorzeichen in der Exponentialfunktion und es ergäbe sich Unendlich; man muss daher das obere Vorzeichen wählen. Dann kann man auch die Phase um w_{sp}^+ entwickeln, und es ergibt sich

$$\Phi(w) \simeq \Phi(w_{sp}^+) - (2 \cdot 3^{1/2} k - 3n)(w - w_{sp}^+)^2/2. \quad (\text{E.9})$$

Jetzt ist man in der Lage, die w -Integration auf das Intervall von $-\infty$ bis ∞ zu erweitern und durchzuführen,

$$\begin{aligned} N_n^+[B; k] &\simeq (2\pi/(2 \cdot 3^{1/2} k - 3n))^{1/2} (i/3^{1/2})^n \exp[-2k/3^{3/2}] \\ &\simeq (\pi/3^{1/2} k)^{1/2} (i/3^{1/2})^n \exp[-2k/3^{3/2}]. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

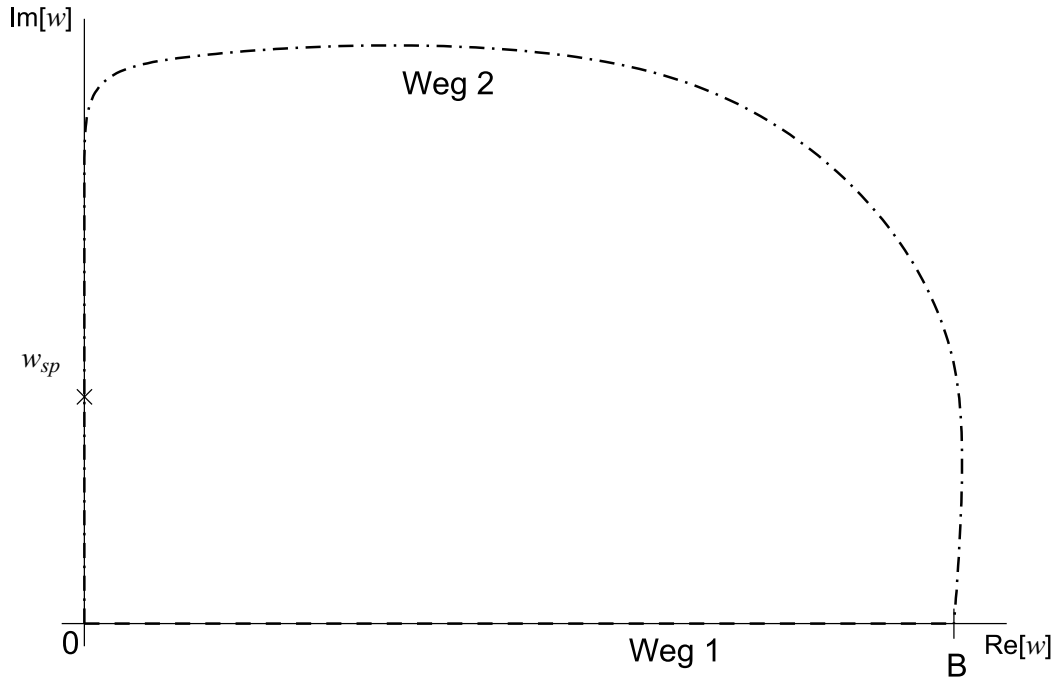


Abbildung E.2: Zur Lösung des Integrals (E.4) greift man auf die Funktionentheorie zurück und schließt den Integrationsweg im Komplexen. Das Integral über den Weg 2 hat den Hauptanteil in der Nähe der Punkte mit stationärer Phase, w_{sp} .

E.2.2 $1 - 3w_{sp}^2 = (in/kw_{sp})$

Hier sind die einzelnen Schritte fast identisch zu denjenigen im vorherigen Abschnitt. Wegen $k \gg 1$ liegen die Werte von w_{sp} sehr nahe an der reellen Achse und dominieren daher den Wert des Integrals N_n^- . Es ist also von Bedeutung, ob $\Re[w_{sp}]$ innerhalb des Integrationsintervalls liegt. Falls dem nicht so wäre, würde dieses Integral nur einen rasch oszillierenden Integranden besitzen, der – wenn im späteren Verlauf der Arbeit die verschiedenen Bereiche zusammengesetzt werden – vernachlässigt werden könnte. So hat man die Lösung mit $0 < \Re[w_{sp}] \leq B$ zu wählen, was zu der Bedingung

$$\mathcal{A}^2(\psi_1/|\psi_3|)^{-1} \geq 1/3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \geq \zeta_c^2 \quad (\text{E.11})$$

führt. Man beachte, dass ζ_c für jedes Teilchen von der Teilchengeschwindigkeit und zudem auch von der Sichtlinie des Beobachters abhängt. Falls die Bedingung (E.11) erfüllt ist, hat man die stationäre Phase bei

$$w_{sp} \simeq 1/\sqrt{3} - (in/2k) \quad (\text{E.12})$$

und die Reihenentwicklung der Phase ergibt

$$\Phi(w) \simeq \Phi(w_{sp}) - (2 \cdot 3^{1/2}ik + 3n)(w - w_{sp})^2/2 \quad (\text{E.13})$$

und

$$\begin{aligned} N_n^-[B; k] &\simeq (2\pi/(2 \cdot 3^{1/2}ik + 3n))^{1/2} (1/\sqrt{3})^n \exp[2ik/3^{3/2}] \\ &\simeq (\pi/3^{1/2}k)^{1/2} e^{-i\pi/4} (1/\sqrt{3})^n \exp[2ik/3^{3/2}]. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

E.3 $\psi_1 \rightarrow \infty$, $|\psi_3| \rightarrow 0$

Wie schon oben dargelegt, ist es selbst für hohe Frequenzen möglich, dass $|\psi_3| \rightarrow 0$, besonders in der Nachbarschaft der Winkel, bei denen $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| = 0$. Mit $S_2 = |n_y|/\Gamma_b$ erhält man die Bedingung

$$\begin{aligned} \psi_3 \mathcal{A}^3 &= (\mathcal{A}^3/12L^3)(\Lambda L\omega)(1-R^2)S_2\varpi_y/(z_a A_{max}) \ll 1 \\ \Leftrightarrow S_2 &\ll (12L^3/\mathcal{A}^3)(1-R^2)^{-1}(z_a A_{max}/\varpi_y)(\Lambda L\omega)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Für sehr hohe Frequenzen mag es lediglich ein sehr schmaler Bereich sein, in dem $\psi_1 \rightarrow \infty$ und gleichzeitig $|\psi_3| \rightarrow 0$, aber dennoch kann er nicht vernachlässigt werden, denn die Lösungen aus den vorherigen Abschnitten besitzen dort eine Polstelle. Die Umformung ist recht einfach,

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{A}} dz z^n \exp[i(\psi_1 z \pm |\psi_3| z^3)] &= \int_0^{\mathcal{A}} dz z^n \exp[i\psi_1 z(1 \pm (|\psi_3|/\psi_1)z^2)] \\ &\simeq \int_0^{\mathcal{A}} dz z^n \exp[i\psi_1 z] = \frac{\partial^n}{i^n \partial \psi_1^n} \int_0^{\mathcal{A}} dz \exp[i\psi_1 z] \\ &= \frac{\partial^n}{i^n \partial \psi_1^n} (\exp[i\psi_1 \mathcal{A}] - 1)/(i\psi_1) \\ &\simeq (\mathcal{A}^n/i\psi_1) \exp[i\psi_1 \mathcal{A}] - \delta_{n0}/(i\psi_1), \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

wobei im letzten Schritt $\psi_1 \rightarrow \infty$ genutzt wurde, und δ_{n0} ist das Kronecker-Delta. Es stellt sich noch die Frage nach der Abschätzung der Gültigkeit dieser Näherung. Es gelten die Bedingungen $\psi_1 \mathcal{A} \gg 1$ und $|\psi_3| \mathcal{A}^3 \ll 1$; die erste führt auf die Einschränkung

$$\omega \gg \omega_{high}^* \equiv (\zeta_c/\mathcal{A})\omega_c = 1/(\Lambda \mathcal{A}(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)). \quad (\text{E.17})$$

Die zweite Bedingung ergibt

$$\omega \ll 3(\zeta_c/\mathcal{A})^3 \omega_c = 1/(\Lambda \mathcal{A}^3 |\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}|) \rightarrow \infty \quad (\text{E.18})$$

mit $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| \rightarrow 0$. Daher ist Bedingung (E.18) in der Nachbarschaft von $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| = 0$, wo Gleichung (E.16) gültig ist, keine echte Einschränkung.

F Die Eigenschaften der Winkelfunktionen S_1 und S_2

In diesem Anhang sollen einige Eigenschaften der Winkelfunktionen S_1 und S_2 diskutiert werden, welche in der näheren Behandlung der Spektren von Bedeutung sind. Des Weiteren ist auch das Verhältnis $S_r = S_1/S_2$ von Interesse.

F.1 Die Winkelfunktion $S_1[\theta, \phi, \Gamma_b]$

Die erste Funktion (6.31a)

$$S_1[\theta, \phi, \Gamma_b] = 1 - \sqrt{1 - \Gamma_b^{-2}} \cos \theta + \sin \theta \cos \phi / \Gamma_b \quad (\text{F.1})$$

ist (mit $\phi = \pi/2$ und $\Gamma_b = 10$) in Abbildung F.1a zu sehen und hat Extremwerte bei

$$\theta_e = -\arctan \left[\frac{\cos \phi}{\sqrt{\Gamma_b^2 - 1}} \right] + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{F.2})$$

Die Abhängigkeit dieses Extremalwinkels vom Azimut stellt Abbildung F.1b dar, wobei $k = 0$ und $\Gamma_b = 10$. Die betragsmäßig größten Werte werden bei $\phi = l\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$) erreicht mit $|\theta_e(\phi = l\pi)| = \arctan[(\Gamma_b^2 - 1)^{-1/2}] \simeq \Gamma_b^{-1} \ll 1$ für $\Gamma_b \gg 1$.

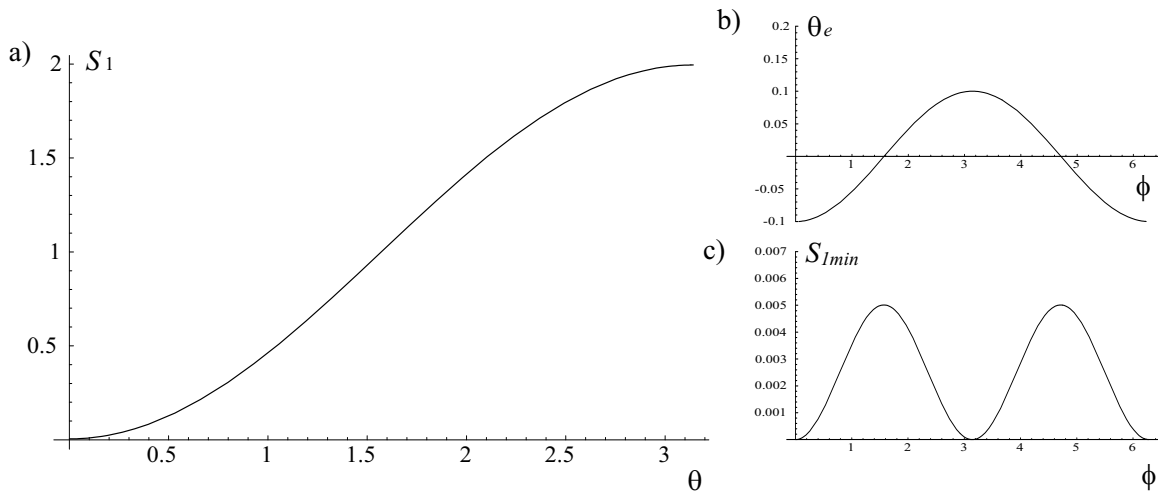


Abbildung F.1: a) Graph der Winkelfunktion $S_1[\theta, \phi = \pi/2, \Gamma_b = 10]$ (6.31a). b) Oszillation des minimalen Winkels $\theta_e|_{k=0}$ (F.2) als Funktion von ϕ mit $\Gamma_b = 10$. c) Minimum der Winkelfunktion S_1 (F.3) als Funktion von ϕ mit $\Gamma_b = 10$.

Mit dem Winkel (F.2) folgt für die Extrema der Funktion S_1 (mit $\Gamma_b \gg 1$ im zweiten Schritt)

$$S_{1,e}[\theta_e, \phi, \Gamma_b] = 1 \mp \sqrt{1 - \sin^2 \phi / \Gamma_b^2} \simeq 1 \mp 1 \pm (\sin^2 \phi) / (2\Gamma_b^2), \quad (\text{F.3})$$

wobei das obere Vorzeichen für gerade k gilt, somit Minima vorliegen, und das untere Vorzeichen für ungerade k gilt und S_1 daher dort Maxima hat. Die allgemeine Form der minimalen Werte der Winkelfunktion ist in Abbildung F.1c gezeigt. Das „größte“ Minimum (für $k = 0$) liegt bei $\phi = \pi/2; 3\pi/2$,

$$S_1[\theta_e, \phi, \Gamma_b]|_{k=0} \simeq 1/(2\Gamma_b^2). \quad (\text{F.4})$$

Aus Gleichung (F.2) folgt (mit $k = 0$), dass das Minimum von S_1 um Null oszilliert, wodurch die ganze Kurve S_1 2π -periodisch mit ϕ die θ -Achse entlanggleitet. Die Amplitude variiert ebenfalls mit ϕ , allerdings mit einer Periode π zwischen den Intervallen $[0, 2]$ und $[1/(2\Gamma_b^2), 2 - 1/(2\Gamma_b^2)]$. Man beachte, dass nur für $\phi = l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ die Winkelfunktion Null ist.

Berücksichtigt man nun, dass θ ein Polarwinkel ist, so folgt, dass die Funktion S_1 (außer für $\phi = \pi/2; 3\pi/2$) nur ein einziges Extremum (F.2) hat, und zwar für $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ ein Minimum ($k = 0$) und für $0 \leq \phi < \pi/2$ und $3\pi/2 < \phi < 2\pi$ ein Maximum ($k = 1$). Aufgrund dessen gibt es nur eine einzige Nullstelle der Winkelfunktion,

$$S_1[\theta_e(\phi = \pi), \phi = \pi, \Gamma_b] = 0 \quad (\text{F.5})$$

mit $\theta_e(\phi = \pi) = \arctan[(\Gamma_b^2 - 1)^{-1/2}]$.

F.2 Die Winkelfunktion $S_2[\theta, \phi, \Gamma_b]$

Die Winkelfunktion $S_2[\theta, \phi, \Gamma_b]$, gegeben durch Gleichung (6.31b),

$$S_2[\theta, \phi, \Gamma_b] = \sin \theta |\sin \phi| / \Gamma_b, \quad (\text{F.6})$$

ist einfacher zu behandeln. Es ist offensichtlich, dass die Minima $S_2 = 0$ genau bei $\phi = l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ auftreten. Weiterhin gibt es wegen $\theta \in [0, \pi]$ zwei Minima mit $S_2 = 0$ für $\theta = 0; \pi$. Die Maxima hingegen besitzen den Wert $S_2[\theta_e = \pi/2, \phi_e = \pi/2; 3\pi/2, \Gamma_b] = \Gamma_b^{-1}$, wie es in den Abbildungen F.2a, F.2ab zu erkennen ist.

F.3 Das Verhältnis $S_r \equiv S_1/S_2$

Neben den beiden Funktionen (6.31a) und (6.31b) im Einzelnen ist auch das Verhältnis

$$S_r \equiv \frac{S_1}{S_2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \Gamma_b^{-2}} \cos \theta + \sin \theta \cos \phi / \Gamma_b}{\sin \theta |\sin \phi| / \Gamma_b} \quad (\text{F.7})$$

für weitere Berechnungen wichtig und ist in Abbildung F.3a dargestellt. Daher werden auch ohne detaillierte Rechnung kurz seine Eigenschaften hergeleitet. Es ergibt sich, dass S_r ein Minimum bei dem Winkel

$$\theta_m = \arccos[\sqrt{1 - \Gamma_b^{-2}}] = \arcsin[\Gamma_b^{-1}] \simeq \Gamma_b^{-1} \quad (\text{F.8})$$

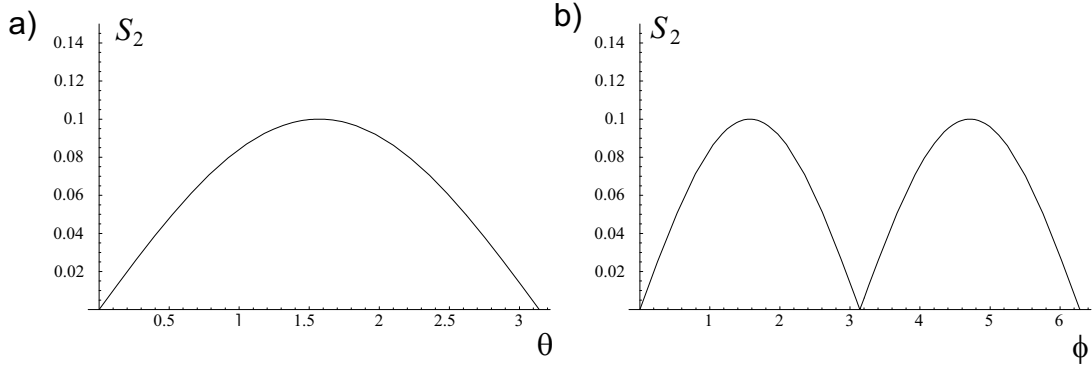


Abbildung F.2: a) Graph der Winkelfunktion $S_2[\theta, \phi = \pi/2, \Gamma_b = 10]$ (6.31b) als Funktion von θ . b) Graph der Winkelfunktion S_2 als Funktion von ϕ mit $\theta = \pi/2$ und $\Gamma_b = 10$.

hat, wobei der letzte Schritt für $\Gamma_b \gg 1$ gültig ist. Dieser hängt erstaunlicherweise nicht mehr vom Azimutwinkel ϕ ab, sondern nur noch von der *Bulkgeschwindigkeit* und diese Abhängigkeit in Abbildung F.3b zu sehen. Das dazugehörige Minimum von S_r ist durch

$$S_r[\theta_m, \phi, \Gamma_b] = \frac{1 + \cos \phi}{|\sin \phi|} \quad (\text{F.9})$$

gegeben, was im Gegensatz zum Winkel θ_m unabhängig von Γ_b , d.h. der *Bulkgeschwindigkeit* ist. Für $\phi = \pi$ ergibt sich $S_r[\theta_m, \phi = \pi, \Gamma_b] = 0$. Der Verlauf ist in Abbildung F.3c dargestellt.

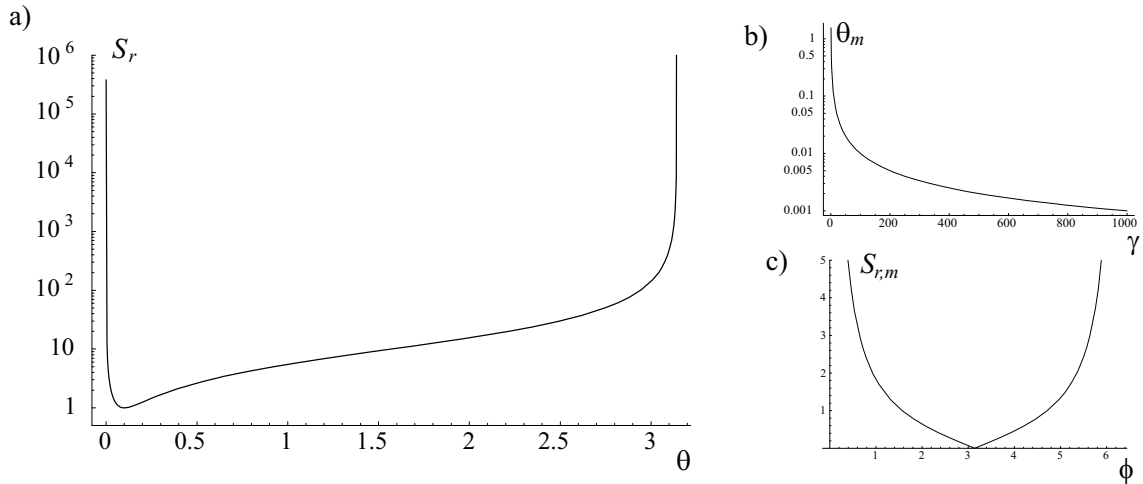


Abbildung F.3: a) Graph der Winkelfunktion $S_r[\theta, \phi = \pi/2, \Gamma_b = 10] = S_1/S_2$. b) Der minimale Winkel θ_m (F.8) als Funktion von Γ_b . c) Minimum der Winkelfunktion S_r (F.9) als Funktion von ϕ .

Es ist jedoch festzuhalten, dass das Verhältnis S_r nur exakt für $\theta = \theta_m$ Null wird. Macht man den Ansatz $\theta = \theta_m + \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$, so folgt als Näherungslösung

$$S_r[\theta_m + \epsilon, \phi, \Gamma_b] \simeq \frac{1 + \cos \phi}{|\sin \phi|} + \frac{\Gamma_b^2}{|\sin \phi|} \epsilon, \quad (\text{F.10})$$

was für $\phi \rightarrow \pi$ gegen Unendlich geht. Somit wird S_r nur für den Fall $\theta = \arcsin[\Gamma_b^{-1}]$, $\phi = \pi$ exakt Null, was später noch Bedeutung erlangt¹.

¹Der Wert $S_r = 0$ kann sogar *nur* entlang des Weges $\theta = \theta_m$ erreicht werden. Für alle anderen Winkel θ besitzt die Funktion für $\phi = \pi$ eine Polstelle. Dies hat zur Folge, dass dieser Sonderfall S_r bei den Winkelintegrationen vernachlässigt werden kann.

G Das differentielle Intensitätsspektrum für niedrige Frequenzen $\omega \rightarrow 0$

G.1 Näherung der Funktionen $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$

Niedrige Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ führen – wie schon im Abschnitt 6.2.3 bemerkt – zu kleinen Parametern $\psi_{1,j}, |\psi_{3,j}| \rightarrow 0$. Daher kann man die Näherung (E.1) benutzen,

$$M_n[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}] = \mathcal{A}_j^{n+1}/(n+1), \quad (\text{G.1})$$

um das Integral (6.27) in niedrigster Ordnung von ω zu berechnen,

$$\begin{aligned} j_y &\simeq \Delta\beta_{0,y}(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3(\exp[-i\omega\zeta_{end}] + \exp[i\omega\zeta_{end} - i\Delta\Phi(\zeta_{end})]) \\ &\quad + \left[(\Delta\beta_{1,y} - \Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}^2) 2\zeta_{max} + 2\Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}(2\zeta_{max})^2/2 - \Delta\beta_{2,y}(2\zeta_{max})^3/3 \right] \\ &\quad \times \exp[-i\omega\zeta_{max} - i\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3] \\ &\simeq 2\Delta\beta_{0,y}(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3 + 2\Delta\beta_{1,y}\zeta_{max} - 2\Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}^3/3 = const., \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

wobei die Definition des Phasenfaktors (6.23) verwendet wurde. Analog dazu ergibt sich für die x -Komponente des Vektors \vec{j}

$$j_x \simeq 2\Delta\beta_{0,x}(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3 + 2\Delta\beta_{1,x}\zeta_{max} - 2\Delta\beta_{2,x}\zeta_{max}^3/3 = const., \quad (\text{G.3})$$

indem man die Indizes austauscht.

Weil j_x und j_y reell sind, erhält man für Gleichung (D.14) in erster Ordnung

$$\begin{aligned} \vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^* &\simeq j_x^2 + j_y^2 - \frac{1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^2} (n_x j_x + n_y j_y)^2 \\ &\quad + 2(\beta_{0,x} j_x + \beta_{0,y} j_y)(n_x j_x + n_y j_y)/(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) + \mathcal{O}(\omega) \\ &\equiv \omega_0^{-2}/\Lambda^2 = const. \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Also lautet das Spektrum für ein Teilchen (man bedenke, dass $\Delta\Phi(\zeta_{end})/\omega$ nicht von ω abhängt, vgl. Gleichung (6.23))

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2, \quad \omega \ll \omega_{low} \quad (\text{G.5})$$

wobei

$$\omega_0 \simeq \frac{\Gamma_b}{2\Lambda L(1-R^2)} \left[\frac{(x_{end} - x_{max})^3}{12R^6} + \frac{x_{max}}{R^2} - \frac{x_{max}^3}{12} \right]^{-1} \frac{z_a A_{max}}{\varpi_y} \quad (\text{G.6})$$

Im Ergebnis tauchen die Größen x_{end} und x_{max} als Funktionen des Parameters R auf. Diese sind jedoch, wie bereits erwähnt, analytisch nicht zu bestimmen. Empirisch konnten allerdings die Näherungsformeln (5.72) gefunden werden,

$$\begin{aligned}x_{max} &\simeq 2(1 - R) + \frac{\pi}{2}R^{8/7}, \\x_{end} &\simeq 2(1 - R) + \pi R^{8/7}.\end{aligned}\tag{G.7}$$

Zur weiteren Betrachtung ist es von Vorteil, das Verhalten der Koordinaten x_{end} und x_{max} für große bzw. kleine R zu betrachten. Es ist jedoch sinnvoller, auf die in den Gleichungen (G.6) auftretenden Funktionen zurückzugreifen, und gegebenenfalls die Näherungsformeln (5.72) zu benutzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}f(R) &= R^2/(x_{end} - x_{max}) \simeq (2/\pi)R^{6/7}, \\g(R) &= 1/(2x_{max}) \simeq \frac{1}{4(1 - R) + \pi R^{8/7}}.\end{aligned}\tag{G.8}$$

Das Verhalten dieser Funktionen für große bzw. kleine R soll im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

Abschätzung der Funktionen (G.8) für $R \ll 1$ und $R \rightarrow 1$

Die Fälle $f(R \rightarrow 1)$ und $g(R)$ sind einfach abzuhandeln. Es ist aus Abbildung 5.6 und den Formeln (G.8) ersichtlich, dass

$$f(R \rightarrow 1) = 2/\pi,\tag{G.9}$$

$$g(R \ll 1) = 1/4,\tag{G.10}$$

$$g(R \rightarrow 1) = 1/\pi\tag{G.11}$$

in niedrigster Ordnung. Für $f(R \ll 1)$ muss man – wenn man den Näherungen (5.72) nicht vertraut – die Graphen von x_{end} und x_{max} genauer betrachten. Wollte man diese Funktionen entwickeln, so sollten sie prinzipiell in der Form

$$x_{end}(R) \simeq |x_{end}(0)| + |x'_{end}(0)|R + |x''_{end}(0)|R^2/2\tag{G.12}$$

$$x_{max}(R) \simeq |x_{max}(0)| - |x'_{max}(0)|R + |x''_{max}(0)|R^2/2\tag{G.13}$$

vorliegen. Nutzt man diesen Ansatz, so ergibt sich mit $\Delta x = |x'_{end}(0)| + |x'_{max}(0)|$

$$f(R \ll 1) \simeq 2R/\Delta x \propto R \ll 1.\tag{G.14}$$

Alternativ ergibt sich mit den empirischen Formeln

$$f(R \ll 1) = (2/\pi)R^{6/7} \ll 1.\tag{G.15}$$

G.2 Berechnung der Grenzfrequenz ω_{low}

Bisher wurde in diesem Anhang die Niedrigfrequenzlösung hergeleitet. Was noch fehlt, ist der Gültigkeitsbereich für diese Näherung. Dieses soll nun geschehen.

Aus der Ungleichung (E.2) muss man die geeignete Beschränkung finden. Aber da es die beiden Regimes (a) und (b) gibt, sind insgesamt vier Terme zu berücksichtigen. Zunächst kann man gewisse Faktoren aus der Minimumsvorschrift herausziehen,

$$\omega \ll \omega_{low} = \min[(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j}, 3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^3\omega_{c,j}] = (\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j} \min[1, 3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^2]. \quad (\text{G.16})$$

Nun kann man sich auf das Verhältnis

$$\Xi_j = 3 \left(\frac{\zeta_{c,j}}{\mathcal{A}_j} \right)^2 / 1 = 3 \left(\frac{\zeta_{c,j}}{\mathcal{A}_j} \right)^2 \quad (\text{G.17})$$

konzentrieren, um zu entscheiden, welcher der beiden Terme der kleinere ist. Fall $\Xi_j > 1$, so ist es $(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j}$, andernfalls ist $3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^3\omega_{c,j}$ das gewünschte Ergebnis. Mit der Substitution $\zeta = xL$ und den Winkelfunktionen (6.31) erhält man für das Regime (b)

$$\begin{aligned} \Xi_b &= \frac{3\Gamma_b(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)|z_a A_{max}|}{(1 - R^2)x_{max}^2 |n_y \varpi_y|} \\ &\simeq 3 \underbrace{\frac{1}{(1 - R^2)R^2 x_{max}^2}}_{\geq 1.48} \frac{S_1}{S_2} \underbrace{\left| \frac{z_a R^2 A_{max}}{\varpi_y} \right|}_{\gg 1}. \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

Im Regime (a) hat man analog

$$\Xi_a = 12 \frac{R^4}{(1 - R^2)(x_{end} - x_{max})^2} \frac{S_1}{S_2} \left| \frac{z_a R^2 A_{max}}{\varpi_y} \right|. \quad (\text{G.19})$$

In beiden Regimes muss zunächst berücksichtigt werden, dass das Verhältnis $S_r = S_1/S_2$ in der Nähe von $\theta = \arcsin[\Gamma_b^{-1}]$ und $\phi = \pi$ klein sein kann, aber größer als Null¹ (vgl. Anhang F.3). Durch die Bedingung $|\varpi_y| \ll |z_a R^2 A_{max}|$ gilt daher fast überall $\Xi_b > 1$.

Für Ξ_a muss man vorsichtiger sein, da auch für $R \ll 1$ das Verhältnis $\Xi_a < 1$ werden könnte. Jedoch gilt dann

$$\Xi_a \simeq \frac{48}{\pi^2} R^{26/7} S_r \left| \frac{z_a A_{max}}{\varpi_y} \right| \quad (\text{G.20})$$

und mit dem Ansatz $\Xi_a \simeq 1$ ergibt sich

$$R > R_m \equiv \left(\frac{\pi^2}{48 S_r} \underbrace{\left| \frac{\varpi_y}{z_a A_{max}} \right|}_{\ll 1} \right)^{7/26}, \quad \text{damit } \Xi_a > 1. \quad (\text{G.21})$$

Ist R nun größer als der in Gleichung (G.21) angegebene Grenzwert, gilt $\Xi_a > 1$ und man kann analog zum obigen Fall des Regimes (b) rechnen. Mit den Beispielwerten $\Gamma_b = 10$, $\varpi_y = 10^{-3}$, $z_a A_{max} = 10$ und $\theta = \phi = \pi/2$ liegt diese Grenze bei $R \simeq 2.94 \times 10^{-2}$; in dem hier gewählten Beispiel gilt also $R = 0.1 > R_m$ und Gleichung (G.19) ist gültig. Der Fall $R \rightarrow 1$ kann hingegen genauso behandelt werden wie die Abschätzung für das Regime (b). Man kann also für fast alle Werte von R die Annahme $\Xi_a > 1$ machen.

¹Nur exakt an dem Punkt $\theta_m \equiv \arcsin[\Gamma_b^{-1}]$, $\phi \equiv \pi$ wird $S_r \equiv 0$. Für alle anderen Punkte gilt $S_r > 0$, sogar mit $S_r \rightarrow \infty$ in der Umgebung von $\theta = \theta_m$, $\phi = \pi$.

An dieser Stelle muss noch erwähnt werden, dass der Grenzwert ω_{low} natürlich für beide Regimes gelten soll. Somit gilt wegen $2x_{max} > x_{end} - x_{max}$ fast immer bis auf die angegebenen Ausnahmen (sehr kleine Werte von R sowie $\theta = \theta_m$ und $\phi = \pi$),

$$\begin{aligned}
\omega \ll \omega_{low} &= (\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j} \\
&= \min \left[\frac{1}{\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)(\zeta_{end} - \zeta_{max})}, \frac{1}{2\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)\zeta_{max}} \right] \\
&= \frac{1}{2x_{max}S_1} \frac{1}{\Lambda L}. \tag{G.22}
\end{aligned}$$

Für $R \ll 1$ des Regimes (a) gilt entsprechend

$$\begin{aligned}
\omega \ll \omega_{low} &= 3(\zeta_{c,a}/\mathcal{A}_a)^3\omega_{c,a} \\
&= \min \left[\frac{3}{(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3\Lambda|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0|}, \frac{3}{8\zeta_{max}^3\Lambda|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2|} \right] \\
&= \frac{12}{(1 - R^2)S_2} \left| \frac{z_a A_{max}}{\varpi_y} \right| \min \left[\frac{R^6}{(x_{end} - x_{max})^3}, \frac{1}{8x_{max}^3} \right] \frac{1}{\Lambda L} \tag{G.23}
\end{aligned}$$

H Das differentielle Intensitätsspektrum für hohe Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$

Es soll nun das differentielle Intensitätsspektrum für hohe Frequenzen ausgerechnet werden. Hierbei hat man jedoch zu berücksichtigen, dass es zwei verschiedene Näherungen für die Funktionen $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$ von Gleichung (6.27) gibt, wie es in den Anhängen E.2 und E.3 durchgerechnet ist. Für $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| \simeq 0$ gilt Gleichung (E.16), während man ansonsten die Gleichungen (E.10, E.14) benutzen muss. Hat man dann exakte Ausdrücke für das Spektrum gefunden, kann man entscheiden, bei welchem Winkel man zwischen diesen Näherungen wechseln muss.

H.1 Näherung der Funktionen $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$ für $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| > 0$

Der erste Schritt ist es, die Funktionen $M_n^\pm[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}]$ von Gleichung (6.27) im Sinne des Anhangs E.2 zu nähern. Im Allgemeinen gibt es, wie bereits früher im Abschnitt 6.2.3 erwähnt, zwei Regimes für diese Funktionen M_n :

- (a) der äußere Bereich des Solitons (von $\pm\zeta_{max}$ bis $\pm\zeta_{end}$) mit $\mathcal{A}_a = \zeta_{end} - \zeta_{max}$, $\psi_{1,a} = \omega l$ und $\psi_{3,a} = -\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)/3$;
- (b) die innere Region (von $-\zeta_{max}$ bis ζ_{max}) mit $\mathcal{A}_b = 2\zeta_{max}$, $\psi_{1,b} = \omega(l - \Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1))$ und $\psi_{3,b} = \omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2)/3$.

Man beachte, dass in beiden Bereichen ψ_3 kleiner oder größer als Null sein kann, je nachdem ob $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2})$ kleiner oder größer als Null ist. Dennoch hat man nur zwei und nicht vier Fälle zu berücksichtigen, da die beiden Skalarprodukte nicht unabhängig voneinander ihr Vorzeichen wechseln. Ihr Verhalten ist stets entgegengesetzt, denn $\Delta\vec{\beta}_0$ und $\Delta\vec{\beta}_2$ unterscheiden sich lediglich durch den Faktor R^{-2} , wie es die Gleichungen (D.27) besagen.

Die beiden genannten Regimes besitzen wegen dieser unterschiedlichen Parameter auch unterschiedliche charakteristische Längen und Frequenzen,

$$\begin{aligned}
 \zeta_{c,a} &\equiv [(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)/|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0|]^{1/2}, \\
 \zeta_{c,b} &\equiv [(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)/|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2|]^{1/2}, \\
 1/\omega_{c,a} &\equiv \Lambda[(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)^3/|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0|]^{1/2}, \\
 1/\omega_{c,b} &\equiv \Lambda[(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)^3/|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2|]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{H.1}$$

Man hat also stets die Näherungen

$$\begin{aligned} M_n^+[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}] &\simeq \pi^{1/2} \psi_{1,j}^{-1/4+n/2} (3|\psi_{3,j}|)^{-1/4-n/2} \exp[-2(\psi_{1,j}^3/\psi_{3,j})^{1/2}/3^{3/2} + in\pi/2] \\ M_n^-[\mathcal{A}_j; \psi_{1,j}, \psi_{3,j}] &\simeq \pi^{1/2} \psi_{1,j}^{-1/4+n/2} (3|\psi_{3,j}|)^{-1/4-n/2} \exp[2i(\psi_{1,j}^3/\psi_{3,j})^{1/2}/3^{3/2} - i\pi/4]. \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Nach Abschnitt 6.2.3 müssen für den Sichtwinkel zwei Fälle berücksichtigt werden:

1. Für $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) > 0$ erhält man für das Regime (a)

$$M_n^-[\mathcal{A}_a; \psi_{1,a}, \psi_{3,a}] \simeq (\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1/2} \zeta_{c,a}^{n+1} \exp[(2i\omega/3\omega_{c,a}) - i\pi/4] \quad (\text{H.3})$$

und für Regime (b)

$$M_n^+[\mathcal{A}_b; \psi_{1,b}, \psi_{3,b}] \simeq (\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1/2} \zeta_{c,b}^{n+1} \exp[-(2\omega/3\omega_{c,b}) + in\pi/2]. \quad (\text{H.4})$$

2. Für $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) < 0$ hat man im Regime (a)

$$M_n^+[\mathcal{A}_a; \psi_{1,a}, \psi_{3,a}] \simeq (\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1/2} \zeta_{c,a}^{n+1} \exp[-(2\omega/3\omega_{c,a}) + in\pi/2], \quad (\text{H.5})$$

und Regime (b) vereinfacht sich zu

$$M_n^-[\mathcal{A}_b; \psi_{1,b}, \psi_{3,b}] \simeq (\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1/2} \zeta_{c,b}^{n+1} \exp[i(2\omega/3\omega_{c,b}) + i\pi/4]. \quad (\text{H.6})$$

An dieser Stelle kann man wieder im Sinne des Abschnitts 6.2.3 die Näherungen (D.29) nutzen und erhält die vier Formeln

$$\begin{aligned} \zeta_{c,a} &\simeq 2L \left(\frac{R^6}{1-R^2} S_r \frac{|z_a A_{max}|}{|\varpi_y|} \right)^{1/2} = R^3 \zeta_{c,b}, \\ \zeta_{c,b} &\simeq 2L \left(\frac{1}{1-R^2} S_r \frac{|z_a A_{max}|}{|\varpi_y|} \right)^{1/2}, \\ \omega_{c,a} &\simeq \frac{1}{2\Lambda L} \left(\frac{1-R^2}{R^6} \frac{S_2}{S_1^3} \frac{|\varpi_y|}{|z_a A_{max}|} \right)^{1/2} = \frac{\omega_{c,b}}{R^3}, \\ \omega_{c,b} &\simeq \frac{1}{2\Lambda L} \left((1-R^2) \frac{S_2}{S_1^3} \frac{|\varpi_y|}{|z_a A_{max}|} \right)^{1/2} = \frac{1}{\Lambda S_1 \zeta_{c,b}}. \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Man beachte, dass alle Definitionen von der Ordnung $\mathcal{O}(|z_a A_{max}|/|\varpi_y|) \gg 1$; damit sind sie alle intrinsisch groß.

Es ist weiterhin sicherzustellen, dass für einen nennenswerten Beitrag von M_n^- zu den Ergebnissen die Ungleichung (E.11) erfüllt werden muss. Umgekehrt bedeutet es, dass M_n^- vernachlässigbar wird, falls

$$\zeta_{c,j}^2 > \mathcal{A}_j^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^2 > 1. \quad (\text{H.8})$$

Dieses Verhältnis unterscheidet sich von dem Verhältnis (G.17) nur um einen Faktor Drei. Im Anhang G.2 wurde gezeigt, dass Ξ_j durchaus für kleine Werte R kleiner als Eins sein kann; man muss daher beide Faktoren in den weiteren Rechnungen berücksichtigen.

Lösung für hohe Frequenzen

Mit dem Phasenfaktor

$$1/\Omega \equiv l\zeta_{max} + \Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3, \quad (\text{H.9})$$

und mit der Definition (wobei $j \in \{a, b\}$)

$$\zeta_{j,y} \equiv (\Delta\beta_{1,y} + \Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}^2)\zeta_{c,j} + 2i\Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}\zeta_{c,j}^2 + \Delta\beta_{2,y}\zeta_{c,j}^3 \quad (\text{H.10})$$

hat man im Fall (1) für j_y

$$\begin{aligned} j_y &= 2\Delta\beta_{0,y}(\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1/2}\zeta_{c,a}^3 \exp[-i\Delta\Phi(\zeta_{end})/2] \\ &\quad \times \cos[(2\omega/3\omega_{c,a}) - \omega l\zeta_{end} + \Delta\Phi(\zeta_{end})/2 - \pi/4]H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] \\ &\quad + \zeta_{b,y}(\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1/2} \exp[-(2\omega/3\omega_{c,b}) - i\omega/\Omega]. \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Der Fall (2) führt hingegen auf

$$\begin{aligned} j_y &= 2\Delta\beta_{0,y}(\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1/2}\zeta_{c,b}^3 \exp[-i\Delta\Phi(\zeta_{end})/2] \\ &\quad \times \cos[(2\omega/3\omega_{c,b}) - \omega l\zeta_{end} + \Delta\Phi(\zeta_{end})/2 - \pi/4]H[\mathcal{A}_b^2 - \zeta_{c,b}^2] \\ &\quad + \zeta_{a,y}(\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1/2} \exp[-(2\omega/3\omega_{c,a}) - i\omega/\Omega]. \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

Es ist unschwer zu erkennen, dass dieser Fall aus dem ersten durch Vertauschen der Indizes a und b erhalten werden kann. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird exemplarisch der erste Fall behandelt, die Ergebnisse für den zweiten Fall sind einfach übertragbar.

Nun gilt es, im Sinne des Anhangs D.1 Gleichung (D.14) auszurechnen. In jedem Term dieser Gleichung treten Produkte von $j_{x,y}$ und $j_{x,y}^*$ auf, welche stets eine Abhängigkeit von der Frequenz in der Form

$$\begin{aligned} j_y j_y^* &\simeq 4\Delta\beta_{0,y}^2(\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1}\zeta_{c,a}^6 \cos^2[(2\omega/3\omega_{c,a}) - \omega l\zeta_{end} + \Delta\Phi(\zeta_{end})/2 - \pi/4]H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] \\ &\quad + |\zeta_{b,y}|^2(\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,b})] \\ &\quad + 2\Delta\beta_{0,y}(\zeta_{b,y} \exp[i\Delta\Phi(\zeta_{end})/2 - i\omega/\Omega] + \zeta_{b,y}^* \exp[-i\Delta\Phi(\zeta_{end})/2 + i\omega/\Omega]) \\ &\quad \times \zeta_{c,a}^3(\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1} \exp[-(2\omega/3\omega_{c,b})] \\ &\quad \times \cos[(2\omega/3\omega_{c,a}) - \omega l\zeta_{end} + \Delta\Phi(\zeta_{end})/2 - \pi/4]H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

besitzen. Für den hier interessierenden Frequenzbereich $\omega \rightarrow \infty$ oszillieren die trigonometrischen Funktionen so schnell, dass man die Mittelwerte für \cos (Null) und \cos^2 ($1/2$) näherungsweise verwenden kann, so dass man

$$j_y j_y^* \simeq 2\Delta\beta_{0,y}^2 \zeta_{c,a}^6 (\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1} H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] + |\zeta_{b,y}|^2 (\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,b})] \quad (\text{H.14})$$

erhält.

So ergibt sich für Gleichung (D.14)

$$\begin{aligned} \vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^* &= 2(\Delta\beta_{0,x}^2 + \Delta\beta_{0,y}^2)\zeta_{c,a}^6 (\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1} H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] \\ &\quad + (|\zeta_{b,x}|^2 + |\zeta_{b,y}|^2)(\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,b})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^2} \left[2(\Delta\beta_{0,x}^2 n_x^2 + 2\Delta\beta_{0,x}\Delta\beta_{0,y} n_x n_y + \Delta\beta_{0,y}^2 n_y^2) \right. \\
& \times \zeta_{c,a}^6 (\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1} H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] \\
& + (n_x^2 |\zeta_{b,x}|^2 + n_x n_y (\zeta_{b,x} \zeta_{b,y}^* + \zeta_{b,x}^* \zeta_{b,y}) + n_y^2 |\zeta_{b,y}|^2) \\
& \left. \times (\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,b})] \right] \\
& + \left[4(\beta_{0,x}\Delta\beta_{0,x} + \beta_{0,y}\Delta\beta_{0,y})(n_x\Delta\beta_{0,x} + n_y\Delta\beta_{0,y}) \zeta_{c,a}^6 (\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1} H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] \right. \\
& + [(\beta_{0,x}\zeta_{b,x}^* + \beta_{0,y}\zeta_{b,y}^*)(n_x\zeta_{b,x} + n_y\zeta_{b,y}) + (\beta_{0,x}\zeta_{b,x} + \beta_{0,y}\zeta_{b,y})(n_x\zeta_{b,x}^* + n_y\zeta_{b,y}^*)] \\
& \left. \times (\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,b})] \right] / (1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)). \tag{H.15}
\end{aligned}$$

So hat man also im Fall (1), $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) > 0$, für $\mathcal{A}_a^2 \geq \zeta_{c,a}^2$ die Lösung

$$\Lambda^2 \vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^* = (\omega/\pi\omega_{c,a})^{-1} \omega_{A,a}^{-2}, \tag{H.16}$$

wobei

$$\omega_{A,a}^{-2} \equiv \Lambda^2 \left(\Delta\vec{\beta}_0 \cdot \Delta\vec{\beta}_0 - \frac{1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^2} (\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)^2 + \frac{2(\vec{\beta}_0 \cdot \Delta\vec{\beta}_0)(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)} \right) 2\zeta_{c,a}^6. \tag{H.17}$$

Für $\mathcal{A}_a^2 < \zeta_{c,a}^2$ hat man mit der Definition $\vec{\zeta}_b = (\zeta_{b,x}, \zeta_{b,y}, 0)$ die Lösung

$$\Lambda^2 \vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^* = (\omega/\pi\omega_{c,b})^{-1} \omega_{B,b}^{-2} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,b})], \tag{H.18}$$

wobei

$$\omega_{B,b}^{-2} \equiv \Lambda^2 \left(|\vec{\zeta}_b|^2 - \frac{1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^2} |\vec{n} \cdot \vec{\zeta}_b|^2 + \frac{(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\zeta}_b^*)(\vec{n} \cdot \vec{\zeta}_b) + (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\zeta}_b)(\vec{n} \cdot \vec{\zeta}_b^*)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)} \right). \tag{H.19}$$

Betrachtet man den Fall (2), $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) < 0$, so finden sich analoge Resultate, in denen die Indizes a und b – wie oben erwähnt – vertauscht werden.

Der nächste Schritt besteht nun darin, die in den obigen Größen auftretenden Skalarprodukte für die Fälle (1) und (2) im Sinne von Anhang D.2 auszurechnen. Diese aufwändige Arbeit ergibt

$$\begin{aligned}
\omega_{A,a} & \simeq \left(\frac{1 - R^2}{8L^2 \Lambda^2 \Gamma_b R^6} \frac{\varpi_y |n_y|^3}{|z_a A_{max}|} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{n_x}{\Gamma_b} - n_z \frac{V_b}{c} \right)^{-3/2} = \frac{\Gamma_b S_2}{\sqrt{2}} \omega_{c,a}, \\
\omega_{B,b} & \simeq \left(\frac{1 - R^2}{4L^2 \Lambda^2 \Gamma_b} \frac{\varpi_y |n_y|^3}{|z_a A_{max}|} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{n_x}{\Gamma_b} - n_z \frac{V_b}{c} \right)^{-3/2} = \Gamma_b S_2 \omega_{c,b} = \frac{\Gamma_b}{\Lambda S_r \zeta_{c,b}}, \\
\omega_{A,b} & \simeq \left(\frac{1 - R^2}{8L^2 \Lambda^2 \Gamma_b} \frac{\varpi_y |n_y|^3}{|z_a A_{max}|} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{n_x}{\Gamma_b} - n_z \frac{V_b}{c} \right)^{-3/2} = \frac{\Gamma_b S_2}{\sqrt{2}} \omega_{c,b}, \\
\omega_{B,a} & \simeq \left(\frac{1 - R^2}{4L^2 \Lambda^2 \Gamma_b R^{18}} \frac{\varpi_y |n_y|^3}{|z_a A_{max}|} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{n_x}{\Gamma_b} - n_z \frac{V_b}{c} \right)^{-3/2} = \frac{\Gamma_b S_2}{R^6} \omega_{c,a}. \tag{H.20}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Definitionen (H.20) untereinander und von den Definitionen (H.7) nur um konstante Faktoren und Potenzen von R unterscheiden. Daher reicht es bei der

weiteren Betrachtung zunächst aus, sich auf eine der Definitionen (H.20) zu konzentrieren, da alle übrigen das gleiche Verhalten zeigen.

Nun kann man das Spektrum eines Teilchen für die beiden Fälle (1) und (2) angeben. Man erhält die beiden Lösungen (1), wobei $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) > 0$,

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left[\frac{2\pi}{\Gamma_b^2 S_2^2 \omega_{c,a}} H[\mathcal{A}_a^2 - \zeta_{c,a}^2] + \frac{\pi}{\Gamma_b^2 S_2^2} \frac{\omega}{\omega_{c,b}} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,b})] \right], \quad (\text{H.21})$$

und (2), wobei $(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}) < 0$

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left[\frac{2\pi}{\Gamma_b^2 S_2^2 \omega_{c,b}} H[\mathcal{A}_b^2 - \zeta_{c,b}^2] + \frac{\pi R^{12}}{\Gamma_b^2 S_2^2} \frac{\omega}{\omega_{c,a}} \exp[-(4\omega/3\omega_{c,a})] \right]. \quad (\text{H.22})$$

Die Ergebnisse der verschiedenen Fälle unterscheiden nicht in den Potenzen von ω , sie können also prinzipiell gleich behandelt werden.

H.2 Berechnung der Grenzfrequenz ω_{high}

Ähnlich wie im Fall niedriger Frequenzen muss man die Bedingung

$$\omega_{high} = \max[(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j}, 3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^3\omega_{c,j}] = (\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)\omega_{c,j} \max[1, 3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^2] \quad (\text{H.23})$$

untersuchen, welche auf das gleiche Verhältnis $\Xi_j = 3(\zeta_{c,j}/\mathcal{A}_j)^2$ führt. Aber nun ist man am größeren der beiden Terme interessiert, so dass man die Ergebnisse aus dem Abschnitt G.2 in gewissem Sinne übertragen kann. Es ergibt sich die Bedingung (außer für $R^2 \ll 1$ im Regime (a))

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_{high} &= \max \left[\frac{3}{\Lambda \mathcal{A}_a |\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0|}, \frac{3}{\Lambda \mathcal{A}_b |\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_2|} \right] \\ &= \frac{12}{(1-R^2)S_2} \left| \frac{z_a A_{max}}{\varpi_y} \right| \max \left[\frac{R^6}{(x_{end} - x_{max})^3}, \frac{1}{8x_{max}^3} \right] \frac{1}{\Lambda L} \end{aligned} \quad (\text{H.24})$$

Man beachte, dass ω_{high} nach Unendlich streben könnte; das gilt allerdings nur für $S_2 \rightarrow 0$, d.h. $\theta = 0, \pi$ oder $\phi = 0, \pi, 2\pi$. Dieses jedoch korrespondiert mit $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| \rightarrow 0$, und in diesem Fall gilt die ursprüngliche Näherung aus Abschnitt E.2 nicht mehr. Man muss stattdessen zur Näherung des Abschnitts E.3, Ungleichung (E.17) übergehen. Man hat dann die Bedingung

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_{high}^* &= \max \left[\frac{1}{(x_{end} - x_{max})(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)}, \frac{1}{2x_{max}(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)} \right] \frac{1}{\Lambda L} \\ &\simeq \frac{1}{(x_{end} - x_{max})S_1} \frac{1}{\Lambda L}. \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

H.3 Näherung für $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| \simeq 0$

Hier sollen nun für den Fall $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| \simeq 0$ die gültigen Näherungen für die Größen $j_{x,y}$ hergeleitet werden. Mit den Definitionen aus Anhang E.3 und $1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1 \simeq 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0$

ergibt sich für j_y

$$\begin{aligned}
j_y &\simeq \Delta\beta_{0,y} \left[(\zeta_{end} - \zeta_{max})^2 / (i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) \exp[-i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)\zeta_{max}] \right. \\
&\quad \left. - (\zeta_{end} - \zeta_{max})^2 / (i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) \exp[i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)\zeta_{max} - i\Delta\Phi(\zeta_{end})] \right] \\
&\quad + \left[(\Delta\beta_{1,y} - \Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}^2) / (i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) (\exp[i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)2\zeta_{max}] - 1) \right. \\
&\quad \left. + 2\Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}(2\zeta_{max}) / (i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) \exp[i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)2\zeta_{max}] \right. \\
&\quad \left. - \zeta_{max}(2\zeta_{max})^2 / (i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) \exp[i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)2\zeta_{max}] \right] \\
&\quad \times \exp[-i\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)\zeta_{max} - i\omega\Lambda(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_0)(\zeta_{end} - \zeta_{max})^3/3] \\
&\simeq 2i\Delta\beta_{0,y}(\zeta_{end} - \zeta_{max})^2 / (\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) \cos[\omega\Lambda\zeta_{max}(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0 - \vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)] \\
&\quad \times \exp[i\omega\Lambda\zeta_{max}(\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_1)] \\
&\quad + 2(\Delta\beta_{1,y} - \Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}^2) / (\omega\Lambda(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)) \sin[\omega\Lambda\zeta_{max}(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)] \quad (H.26)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis führt sodann mit $\omega \rightarrow \infty$, wobei wiederum die Mittelwerte 1/2 für die quadratischen trigonometrischen Funktionen und Null für die einfachen trigonometrischen Funktionen benutzt wurden, zu

$$j_y \cdot j_y^* \simeq \frac{2Z_y^2}{(\omega\Lambda)^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)^2}, \quad (H.27)$$

mit $Z_y = \Delta\beta_{0,y}(\zeta_{end} - \zeta_{max})^2 + \Delta\beta_{1,y} - \Delta\beta_{2,y}\zeta_{max}^2$. Also erhält man weiter

$$\Lambda^2 \vec{j}_\perp \cdot \vec{j}_\perp^* \simeq (\omega/\alpha)^{-2}, \quad (H.28)$$

und mit $\vec{Z} = (Z_x, Z_y, 0)$

$$\alpha^2 = 2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)^{-2} \left(Z_x^2 + Z_y^2 - \frac{1 - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{\beta}_0}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0))^2} (\vec{n} \cdot \vec{Z})^2 + \frac{2(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{Z})(\vec{n} \cdot \vec{Z})}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}_0)} \right) \quad (H.29)$$

Es ergibt sich (wegen $Z_x \ll Z_y$) schließlich

$$\alpha \simeq \frac{\sqrt{2}(1 - R^2)}{\Gamma_b S_1} \left(\frac{(x_{end} - x_{max})^2}{4R^6} + \frac{1}{R^2} - \frac{x_{max}^2}{4} \right) \frac{\varpi_y}{|z_a A_{max}|}. \quad (H.30)$$

Man beachte, dass $\alpha \rightarrow 0$ mit $R \rightarrow 0$ aber für $R \rightarrow 0$ gilt $\alpha \rightarrow \infty$. Es gilt somit

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2 \omega^2 \alpha^2}{4\pi^2 c \omega^2} = \frac{e^2 \alpha^2}{4\pi^2 c} = const. \quad (H.31)$$

bzgl. ω bei $|\vec{n} \cdot \Delta\vec{\beta}_{0,2}| \simeq 0$.

Die Grenzfrequenz in diesem Fall wurde bereits im letzten Abschnitt berechnet und ist durch Gleichung (H.25) gegeben.

I Index

Symbol	Bedeutung
A_{max}	maximal mögliches Vektorpotential
$E = \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{m_a^2 c^2}} = \gamma_a$	dimensionslose Energie in kovarianter Dispersionsrelation, Lorentzfaktor der Teilchen
$\text{erf}[z]$	Fehlerfunktion
${}_pF_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z]$	hypergeometrische Funktion
f_{a0}	Verteilungsfunktion der Teilchen
F_a, H_a, G_a, K_a	Entwicklungskoeffizienten der Verteilungsfunktion
$H[x]$	Stufen-, <i>Heaviside</i> funktion
$(d^2 I)/(d\omega d\Omega)$	differentielles Intensitätsspektrum eines Teilchens
$J_\nu[z]$	Besselfunktion erster Art
L	Skalenlänge im Soliton
$M = -i\mathcal{Z} = \frac{\Gamma}{ck}$	imaginäre Phasengeschwindigkeit
$N^2 = \frac{\vec{k}^2 c^2}{\omega^2}$	Brechungsindex
q_a	Ladung der Teilchen a
$R^2 = G_2/(2G_0 A_{max}^2)$	Solitonparameter, abhängig von A_{max} und F_a
$V_b = c/\xi$	Bulkgeschwindigkeit im Jet
x_{max}, x_{end}	Ort des Maximums, Endpunkt des Solitons
$y = \frac{p_{\parallel}}{m_a c}$	dimensionsloser Parallelimpuls in kovarianter Dispersionsrelation
$\mathcal{Z} = \frac{1}{N} = \frac{\omega}{ck}$	Phasengeschwindigkeit
$z_a = q_a/(m_a c^2)$	Normierungskonstante des Vektorpotentials A

α_a	dimensionsloser Anisotropieparameter des Plasmas
$\vec{\beta} = \vec{v}/c = \vec{\beta}_0 + \Delta\vec{\beta}$	normierte Teilchengeschwindigkeit im Bulk
Γ	Imaginärteil der Frequenz ω
$\Gamma[z]$	Gammafunktion
Γ_b	Lorentzfaktor des Bulks im Jets
$\gamma[a, z]$	unvollständige Gammafunktion
$\gamma_a = \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{m_a^2 c^2}} = E$	Lorentzfaktor der Teilchen, dimensionslose Energie in kovarianter Dispersionsrelation
$\bar{\epsilon}$	Dielektrizitätstensor
$\zeta = z - \xi ct$	transformierte z -Koordinate
$\eta_{L/T, \pm}$	longitudinale/transversale Mode der Dispersionsrelation $\Lambda = 0$
$\Lambda = (V_b \Gamma_b^2 / c^2)$	Normierungsfaktor im Soliton
$\bar{\Lambda}$	Maxwelloperator
$\Lambda_{L,T}$	longitudinale/transversale Mode der Dispersionsrelation $\Lambda = 0$ im unmagnetisierten Plasma
μ_a	dimensionsloser Parameter der senkrechten Plasmatemperatur
$\xi = c/V_b$	inverse Bulkgeschwindigkeit im Jet
Π_x, Π_z	dimensionslose Impulse im Koordinatensystem der Charakteristik
$\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$	dimensionslose Impulskordinaten
$\psi_a = \alpha_a / \mu_a$	Anisotropiefaktor des Plasmas
$\Omega_{B,a} = \frac{q_a B_0}{m_a \gamma_a c}$	Larmorfrequenz
ω_R	Realteil der Frequenz ω
$\langle A \rangle$	zeitliches Mittel der Größe A

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zur Weibelinstabilität	5
2.1	Die Landaukontur	12
3.1	Kriterium (3.12) für Instabilität	27
3.2	Qualitativer Verlauf von Gleichung (3.8)	29
3.3	Lösung der biquadratischen Gleichung (3.22)	30
3.4	Wachstumsrate für $M \rightarrow \infty$	31
4.1	Die vier Verteilungen	45
4.2	Isolierte Moden: Phasengeschwindigkeit M und Wachstumsrate Γ	57
4.3	Isolierte Moden: Wellenzahl κ	57
4.4	Isolierte Moden: Simulation	58
5.1	Das modifizierte Potential $u(x)$	67
5.2	Das normierte Magnetfeld $b(\rho)$	68
5.3	Das normierte Vektorpotential $u(x)$	74
5.4	Die normierte Magnetfelddichte $b^2(x)$	75
5.5	Das normierte Magnetfeld $b(x)$	76
5.6	Die Abhängigkeit von $x_{max}(R)$ und $x_{end}(R)$ vom Parameter R	77
5.7	Das Verhältnis x_{max}/x_{end}	78
5.8	Das Verhältnis $(1 - R)^2/I_R$	87
5.9	Verlauf von $(1 + x)^2 x^{1/2} (1 - x)^{1/2}$	88
6.1	Das differentielle Spektrum für $(\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2}) \neq 0$	103
6.2	Das differentielle Spektrum für $(\vec{n} \cdot \Delta \vec{\beta}_{0,2}) \simeq 0$	104
6.3	Das differentielle Spektrum der verschiedenen Fälle	105
6.4	Die Abhängigkeit der differentiellen Intensität vom Polarwinkel θ	106
6.5	Die Abhängigkeit der differentiellen Intensität vom Azimut ϕ	107
6.6	Strahlung eines Ensembles von Elektronen	108
C.1	Verlauf der Funktion $T_{E,M}$	122
E.1	Oszillation der Phase $\Phi(w)$	134
E.2	Integrationspfad des Integrals (E.4)	135
F.1	Eigenschaften der Winkelfunktion S_1	137
F.2	Eigenschaften der Winkelfunktion S_2	139
F.3	Eigenschaften der Winkelfunktion S_r	139

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz & I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington (1972)
- [2] G. Bekefi, *Radiation Processes in Plasmas*, John Wiley & Sons, New York (1966)
- [3] C.L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S.S. Meyer, L. Page, D.N. Spergel, G.S. Tucker, E. Wollack, E.L. Wright, C. Barnes, M.R. Greason, R.S. Hill, E. Komatsu, M.R. Nolta, N. Odegard, H.V. Peirs, L. Verde & J.L. Weiland, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003)
- [4] I.B. Bernstein, *Phys. Rev.* **109**, 10 (1958)
- [5] A. Bret, M.-C. Firpo & C. Deutsch, *Phys. Rev. E* **70**, 046601 (2004)
- [6] A. Bret, M.-C. Firpo & C. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 115002 (2005)
- [7] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **91**, 456 (1931)
- [8] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* **74**, 81 (1931)
- [9] S. Chandrasekhar, *Phil. Mag.* **11**, 592 (1931)
- [10] R.C. Davidson, *An Introduction to the Physics of Nonneutral Plasmas*, Addison-Wesley, Redwood City (1990)
- [11] A. Einstein, *Ann. Phys.* **49**, 769 (1916)
- [12] F.R. Elder, A.M. Gurewitsch, R.V. Langmuir & H.C. Pollock, *Phys. Rev.* **71**, 829 (1947)
- [13] B.D. Fried, *Phys. Fluids* **2**, 337 (1959)
- [14] A. Galeev & R.N. Sudan, *Handbook of Plasma Physics I*, New York (1972)
- [15] C.S. Gardner, *Phys. Fluids* **6**, 839 (1963)
- [16] I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York (1980)
- [17] A. Gruzinov, *Astrophys. J.* **563**, L15 (2001)
- [18] M. Honda & Y.S. Honda, *Astrophys. J.* **617**, L37 (2004)

- [19] J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik, Zweite Auflage*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1982)
- [20] G. Kalman, C. Montes & D. Quemada, *Phys. Fluids* **11**, 1797 (1968)
- [21] N.A. Krall & A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York (1973)
- [22] I. Langmuir, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.* **14**, 628 (1928)
- [23] I. Lerche, *Astrophys. J.* **147**, 689 (1967)
- [24] M.V. Medvedev & A. Loeb, *Astrophys. J.* **526**, 697 (1999)
- [25] K.-I. Nishikawa, P. Hardee, G. Richardson, R. Preece, H. Sol & G.J. Fishman, *Astrophys. J.* **595**, 555 (2003)
- [26] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D.E. Groom, I. M. Hook, A.G. Kim, M.Y. Kim, J.C. Lee, N.J. Nunes, R. Pain, C.R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R.S. Ellis, M. Irwin, R.G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B.J. Boyle, A.V. Filippenko, T. Matheson, A.S. Fruchter, N. Panagia, H.J.M. Newberg & W.J. Couch (The Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* **517**, 565 (1998)
- [27] M. Planck, *Ann. Phys.* **4**, 553 (1901)
- [28] A.G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiattia, A. Diercks, P.M. Garnavich, R.L. Gilliland, C.J. Hogan, S. Jha, R.P. Kirshner, B. Leibundgut, M.M. Phillips, D. Reiss, B.P. Schmidt, R.A. Schommer, R.C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N.B. Suntzeff & J. Tonry (High-z Supernova Search Team), *Astron. J.* **116**, 1009 (1998)
- [29] J.S. Russel, *Report on Waves, Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, 311, York (1844)
- [30] S.A. Sarra, *J. Onl. Math. Appl.* **3**, <http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=389> (2003)
- [31] U. Schaefer-Rolffs & R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **12**, 022104 (2005)
- [32] U. Schaefer-Rolffs, I. Lerche & R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **13**, 012107 (2006)
- [33] R. Schlickeiser & H. Lesch, *Astrophys. J.* **329**, 149 (1988)
- [34] R. Schlickeiser, *Astron. Astrophys.* **294**, 615 (1995)
- [35] R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **11**, 5532 (2004)
- [36] D. Summers & R.M. Thorne, *Phys. Fluids B* **3**, 1835 (1991)
- [37] D.G. Swanson, *Plasma Waves*, Academic Press, Boston (1989)
- [38] R.C. Tautz, *Magnetfelderzeugung in kosmologischen Plasmen*, Diplomarbeit, Bochum (2005)

- [39] R.C. Tautz, I. Lerche, R. Schlickeiser & U. Schaefer-Rolffs, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 13831 (2006)
- [40] R.C. Tautz & I. Lerche, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 14833 (2006)
- [41] R.C. Tautz & I. Lerche, *Astrophys. J.* **653**, 447 (2006)
- [42] R.C. Tautz & I. Lerche, *Phys. Plasmas* **14**, 072102 (2007)
- [43] R.C. Tautz, J.I. Sakai & I. Lerche, *Astrophys. Space Sci.* **310**, 159 (2007)
- [44] B.A. Trubnikov, *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions* (ed. M.A. Leontovich), Pergamon Press, Oxford, Vol. 3, p.122 (1959)
- [45] E.S. Weibel, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 83 (1959)
- [46] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1974)
- [47] J. Wiersma & A. Achterberg, *Astron. Astrophys.* **428**, 365 (2004)
- [48] F. Xiao, R.M. Thorne & D. Summers, *Phys. Plasmas* **5**, 2489 (1998)
- [49] P.H. Yoon & R.C. Davidson, *Phys. Rev. A* **35**, 2718 (1987)
- [50] P.H. Yoon, *Phys. Fluids B* **1**, 1336 (1989)
- [51] F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta* **6**, 110 (1933)

Publikationsliste

Publikationen im Zusammenhang mit dieser Arbeit

Diese Arbeit ist unveröffentlicht bis auf Auszüge, welche in den folgenden Artikeln enthalten sind:

- U. Schaefer-Rolffs, I. Lerche und R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **13**, 012107 (2006)
- U. Schaefer-Rolffs und I. Lerche, *Phys. Plasmas* **13**, 062303 (2006)

Weitere Publikationen

- U. Schaefer-Rolffs und R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **12**, 022104 (2005)
- R.C. Tautz, I. Lerche, R. Schlickeiser und U. Schaefer-Rolffs, *J. Phys. A* **39**, 13831 (2006)

Tagungsbeiträge

- 69. Jahrestagung DPG, TU/HU Berlin, 04.-09.03.2005
- 2. COPAP Workshop, Collective Processes in Astrophysical Plasmas, U Bochum, 13.-15.07.2005
- Schule für Astroteilchenphysik, Obertrubach-Bärnfels, 06.-14.10.2005
- DPG-Frühjahrstagung der Fachverbände Kurzzeit- und Plasmaphysik, U Augsburg, 27.-30.03.2006
- German-Russian Open Workshop, Turbulence in the Magnetized Interstellar Medium, Perm, Russland, 05.-08.09.2006

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Urs Schaefer-Rolffs
Geburtsdatum: 25.04.1980
Wohnort: Börnestraße 24, 45899 Gelsenkirchen

Laufbahn

Kath. Grundschule Devensstraße Gelsenkirchen-Horst	1986-1990
Leibniz-Gymnasium Gelsenkirchen-Buer	1990-1999
Abitur, Note 1,8	1999
Grundwehrdienst Panzerflakbataillon 7 Borken	1999-2000
Studium der Physik an der Ruhr-Universität Bochum (RUB)	2000-2005
Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl TPIV	2003-2005
Diplom „mit Auszeichnung“ am Lehrstuhl TPIV	April 2005
Promotionsstudium an der RUB	seit Mai 2005
Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl TPIV	seit Mai 2005
Fellow of the RUB Research School	seit Februar 2007