

MHD-Modellierung der Dynamik der solaren Korona

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Fakultät für Physik und Astronomie
der Ruhr-Universität Bochum

von

Jens Kleimann
aus Hagen/Westf.

Bochum 2005

Abgabe der Dissertation: 06. Mai 2005
Datum der Disputation: 14. Juli 2005
Erstgutachter: PD Dr. Horst Fichtner
Zweitgutachter: Prof. Dr. Rainer Grauer

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Sonne und Heliosphäre | 1 |
| 1.1.1 | Historischer Überblick | 1 |
| 1.1.2 | Der Sonnenwind | 2 |
| 1.1.3 | Solare Aktivität | 4 |
| 1.1.4 | Stand der Forschung | 6 |
| 1.2 | Motivation | 8 |
| 1.3 | Ziel und Aufbau der Arbeit | 9 |
| | | |
| 2 | Das Modell | 11 |
| 2.1 | Einheiten und Notation | 11 |
| 2.2 | MHD-Grundgleichungen | 12 |
| 2.2.1 | Bilanzgleichungen | 12 |
| 2.2.2 | Maxwellgleichungen | 14 |
| 2.2.3 | Reduktion der Variablen | 15 |
| 2.2.4 | Das ohmsche Gesetz | 16 |
| 2.3 | Vereinfachende Annahmen | 17 |
| 2.3.1 | Problematik des Zwei-Fluid-Ansatzes | 17 |
| 2.3.2 | Solare Rotation | 19 |
| 2.3.3 | Resistivität | 19 |
| 2.4 | Normierung | 20 |
| 2.5 | Endgültige Form des Gleichungssystems | 22 |
| 2.6 | Wahl der Heizfunktion Q | 23 |
| 2.6.1 | Allgemeines zu Modellen koronaler Heizung | 23 |
| 2.6.2 | Anpassung an die Modellgeometrie | 24 |
| 2.6.3 | Explizite Parametrisierung | 25 |
| 2.7 | Geometrie des Simulationsraumes | 26 |
| 2.7.1 | Wahl des Koordinatensystems | 26 |
| 2.7.2 | Randbedingungen | 27 |

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| 3 | Numerik | 29 |
| 3.1 | Der Algorithmus | 29 |
| 3.1.1 | Numerische Methodik | 29 |
| 3.1.2 | Das CWENO-Schema | 31 |
| 3.1.3 | Zeitintegration | 36 |
| 3.1.4 | Erweiterung 1D \rightarrow 3D | 38 |
| 3.1.5 | Charakteristische Geschwindigkeiten | 38 |
| 3.1.6 | Fazit: Vorteile von CWENO | 40 |
| 3.2 | Tests | 40 |
| 3.2.1 | Lineare Advektion (1D) | 40 |
| 3.2.2 | Lineare Advektion (2D) | 41 |
| 3.2.3 | Das hydrodynamische Stoßrohr | 42 |
| 3.2.4 | Strömung quer zum Magnetfeld | 44 |
| 3.2.5 | Alfvén-Flügel | 45 |
| 3.3 | Numerische Resistivität | 46 |
| 3.3.1 | Diskretisierungsfehler | 48 |
| 3.3.2 | Dispersion gegenüber Diffusion | 48 |
| 3.3.3 | Strategie | 49 |
| 3.3.4 | Testszenario | 50 |
| 3.3.5 | Wahl der Testfunktion | 51 |
| 3.3.6 | Ergebnisse | 52 |
| 3.4 | Quellterme | 55 |
| 3.4.1 | Einige Strategien zur Implementierung | 55 |
| 3.4.2 | Zellmittelwert gegenüber Punktwert | 57 |
| 3.5 | Behandlung der Randbedingungen | 60 |
| 3.5.1 | Der äußere Rand | 60 |
| 3.5.2 | Die Sonnenkugel als innerer Rand | 62 |
| 3.5.3 | Freie Extrapolation der Impulsdichte | 67 |
| 3.6 | Divergenzfreiheit des Magnetfeldes | 68 |
| 3.6.1 | Das GLM-Verfahren | 71 |
| 3.6.2 | Projektionsverfahren | 71 |
| 4 | Sonnenwind-Simulationen | 77 |
| 4.1 | Konvergenz zur Parker-Lösung | 77 |
| 4.1.1 | Die Startkonfiguration | 77 |
| 4.1.2 | Vergleich der Behandlung von $\ \mathbf{u}\ _{r=1}$ | 78 |
| 4.2 | Nicht-isotherme Winde | 79 |
| 4.3 | Konvergenz magnetisierter Winde | 81 |
| 4.3.1 | Das initiale Magnetfeld | 82 |
| 4.3.2 | Konvergenzläufe | 87 |
| 4.3.3 | Divergenzkorrektur: Vergleich und Bewertung | 88 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.4 | Problemfall ($\gamma \neq 1, \ \mathbf{B}\ > 0$) | 92 |
| 4.4 | CME-Modellierung | 92 |
| 4.4.1 | Initialisierung der Eruption | 93 |
| 4.4.2 | Parameterstudien | 96 |
| 4.4.3 | Anschluss an die Beobachtung | 101 |
| 5 | Zusammenfassung und Ausblick | 105 |
| A | „Klassische“ Sonnenwind-Modelle | 107 |
| A.1 | Das Parker-Modell | 107 |
| A.1.1 | Hydrodynamik | 107 |
| A.1.2 | Wirkung auf das solare Magnetfeld | 109 |
| A.2 | Magnetisierte Winde nach Weber & Davis | 111 |
| B | Das ohmsche Gesetz in der Heliosphäre | 113 |
| C | Ergänzende Betrachtungen zur Numerik | 115 |
| C.1 | Der Poisson-Schritt bei extrapolierten Randbedingungen | 115 |
| C.2 | Zur Wahl der Konstanten ε | 116 |
| | Literaturverzeichnis | 117 |
| | Literaturverzeichnis | 119 |
| | Eigene Veröffentlichungen | 131 |
| | Danksagung | 133 |
| | Lebenslauf | 135 |

Für Natascha

Kapitel 1

Einleitung

Wir hatten den Himmel da droben, übersät mit Sternen, und legten uns oft auf den Rücken und schauten zu ihnen hinauf und unterhielten uns darüber, ob sie erschaffen oder nur zufällig da wären.

Mark Twain, *Huckleberry Finn*

1.1 Sonne und Heliosphäre

1.1.1 Historischer Überblick

Obgleich astronomisch betrachtet nur ein Stern unter vielen, ist die Sonne für uns Menschen doch das wichtigste Gestirn überhaupt. Seit Jahrmilliarden versorgt sie die Erde mit einem konstanten Strom von Licht und Wärme, und macht so die Entstehung und den Fortbestand des Lebens erst möglich. Zahlreiche frühe Hochkulturen waren sich der lebensspendenden Funktion der Sonne mehr als deutlich bewusst und verehrten sie in Form von Gottheiten, allen voran die Ägypter. Sie sahen die Sonne als Sonnengott RA jeden Morgen im Osten geboren werden, in einem Boot über den Himmel nach Westen fahren, wo er am Abend starb, um am Morgen darauf wiedergeboren zu werden. Doch schon früh wurde auch über die physikalische Natur der Sonne nachgedacht. Bereits um das Jahr 2000 v. Chr. wurden in China Sonnenfinsternisse gezielt beobachtet und vorhergesagt. Einer von Priest [1982] zusammengestellten Zeittafel zufolge beobachtete bereits THEOPHRASTUS VON ATHEN (um 350 v. Chr.) Sonnenflecken mit dem bloßen Auge; ARISTARCH VON SAMOS, ein früher Verfechter des heliozentrischen Weltbildes, bestimmte 280 v. Chr. die Entfernung Erde – Sonne zu acht Millionen km.¹

¹Der mittlere Wert dieses Abstandes, heute als *Astronomische Einheit* (Astronomical Unit, AU) bezeichnet und zu $1,496 \cdot 10^8$ km bestimmt, wurde erstmals von EULER in der korrekten Größenordnung angegeben.

Mit dem Ende der kulturellen Blüte des Altertums geriet der überwiegende Teil dieser Erkenntnisse in Vergessenheit, und konnte erst mit Beginn der Renaissance wiedergewonnen werden.

1.1.2 Der Sonnenwind

Frühe Modelle der Sonnenatmosphäre

Das erste physikalische Modell des Sonnenaufbaus geht auf Lane [1870] zurück, der die Sonne als Gaskugel im hydrostatischen Gleichgewicht beschrieb. Die spätere Erweiterung um Energietransport durch Strahlung [Eddington 1926] festigte die Annahme, dass die Sonne größtenteils aus ionisiertem Wasserstoff besteht.² Die Oberfläche der Sonne ist demnach nicht scharf begrenzt; vielmehr fällt ihre Dichte graduell mit der Entfernung vom Zentrum ab. An die sichtbare Oberfläche der Sonne, die *Photosphäre*, schließen sich weitere Schichten nach außen dünner werdenden Gases an, darunter die *Korona*, die z. B. während einer totalen Sonnenfinsternis in Form eines Strahlenkranzes auch für das bloße Auge eindrucksvoll sichtbar wird.³

Basierend auf der Erkenntnis, dass die von FRAUNHOFER 1814 im Sonnenlicht nachgewiesenen Absorptionslinien auf eine Koronatemperatur $> 10^6$ K hinweisen [Grotrian 1933, Edlén 1942], modellierte Chapman [1954] die Sonnenatmosphäre als statisches Gebilde, dessen Energietransport durch Wärmeleitung bestimmt wird. Wenig später zeigte Parker [1958] in seiner berühmten Analyse, dass dieses Gebilde nicht im hydrostatischen Gleichgewicht mit dem interstellaren Medium sein kann, und postulierte die Existenz des *Sonnenwindes*, einer radialen Abströmung solaren Plasmas. Zuvor hatte Biermann [1951] aus der Orientierung von Kometenschweiften auf die Existenz eines solchen Windes der Geschwindigkeit (500...1500) km/s geschlossen. Die erste *in situ*-Beobachtung des Sonnenwindes durch die sowjetische Raumsonde LUNIK I wurde wenig später durch Messungen der Venus-Raumsonde MARINER II bestätigt [Neugebauer & Snyder 1966]. Auf Grund seiner Bedeutung für das Verständnis der vorliegenden Arbeit sind die Kernpunkte des Parker-Modells in Anhang A.1 zusammengefasst.

Die Heliosphäre

Dem Parker-Modell zufolge wird der Sonnenwind durch den Gradienten des Gasdrucks gegen die Gravitationskraft der Sonne radial nach außen getrieben. Er verdrängt die Materie des interstellaren Raumes, und bildet in diesem so eine Blase aus Sonnenwind-Plasma, die

²Für weitere historische Details siehe z. B. [Chandrasekhar 1939].

³ Die räumliche Abgrenzung der Korona gegen die darunter und darüber liegenden Schichten ist in einem gewissen Rahmen willkürlich. Wie Golub & Pasachoff [1997] anmerken, verlangt die Tendenz des Sonnenwindplasmas zur Ausbildung turbulenter Strukturen eher nach einer phänomenologischen Abgrenzung, zumal die lokale Temperaturschichtung nicht notwendig horizontal — gelegentlich sogar vertikal — verlaufen kann.

| | Koronale Basis | 1 AU (Ekliptik) | 1 AU (hohe Breiten) |
|----------------------------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| Anzahldichte [m^{-3}] | $3 \cdot 10^{14}$ | $7 \cdot 10^6$ | $4 \cdot 10^6$ |
| Geschwindigkeit [m/s] | $\approx 10^3$ | $4 \cdot 10^5$ | $8 \cdot 10^5$ |
| Temperatur [K] | $2 \cdot 10^6$ | $1 \cdot 10^5$ | $2 \cdot 10^5$ |
| Magnetfeld [T] | $1 \cdot 10^{-2}$ | $5 \cdot 10^{-7}$ | $\leq 5 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 1.1: Typische Werte der wichtigsten Plasma-Parameter im Sonnenwind zu Zeiten des solaren Minimums, nach Athay [1976] und Scherer et al. [2000].

sog. *Heliosphäre*. Größe und Gestalt dieser Blase werden durch die Wechselwirkung beider Medien bestimmt, wobei die Relativbewegung der Sonne gegen das lokale interstellare Medium mit einer Geschwindigkeit von ca. 25 km/s zu einer Richtungsabhängigkeit des Heliosphärenradius führt. Durch Vergleich der hydrodynamischen Druckterme beider Medien kann der Radius der heliosphärischen Schockfläche (in Anströmrichtung) im Bereich von etwa 100 AU lokalisiert werden. Die Bestätigung dieses Wertes durch in situ-Messung (etwa durch die VOYAGER-Sonden) steht derzeit noch aus, scheint sich aber anzudeuten [Krimigis et al. 2003, McDonald et al. 2003].

Schneller und langsamer Wind

Generell hängen die Eigenschaften des Sonnenwindes nahe der Oberfläche wesentlich von der lokalen Struktur des Magnetfeldes ab: Gebiete, in denen sich magnetische Feldlinien von der Sonnenoberfläche bis tief in die Heliosphäre erstrecken (sog. koronale Löcher) sind gekennzeichnet durch schnelle (≥ 400 km/s), stetige Plasmaströme, während bogenförmig zur Sonne geschlossene Feldlinien die Quelle des langsamen (≤ 400 km/s) Sonnenwindes bilden, der zudem im Vergleich zum schnellen Wind signifikante Unterschiede in der Elementzusammensetzung aufweist. Tabelle 1.1 stellt die typische Größenordnung einiger physikalischer Kenngrößen des Sonnenwind-Mediums zusammen. Allen Feldlinien gemein ist ihre auf großen Skalen spiralförmige Verdrillung, die durch das Zusammenspiel von Expansion des Windes und Rotation der Sonne bewirkt wird, siehe dazu Anhang A.1.2. Befinden sich auf einem Breitengrad Quellen sowohl des schnellen als auch des langsamen Windes, so kommt es an den Kollisionsflächen beider Windtypen zur Ausbildung (ebenfalls spiralförmiger) Schockfronten, der sog. *Korotierenden Wechselwirkungszonen* (corotating interaction regions, CIRs), die eine wesentliche Rolle bei der Beschleunigung energetischer Teilchen spielen. Für weitere Details siehe [Lang 2000, Velli et al. 2002].

Koronale Heizung

Die Temperatur des koronalen Gases von einigen 10^6 K übertrifft die Effektivtemperatur seiner Quellregion, der Photosphäre (5780 K) um ein Vielfaches. Der Grund für diesen Umstand ist seit mehr als sechzig Jahren Gegenstand aktueller Forschung und noch immer

weitgehend unverstanden. Unstrittig ist lediglich, dass die kinetische Energie oberflächennaher Konvektionsströmungen als primäre Energiequelle der Heizung zu sehen ist. Für den Transport dieser Energie in die Korona hinein wurden vor allem die folgenden zwei Prozesse als wesentlich erkannt:

- Magnetische Strukturen, die aufgrund der vorherrschenden hohen elektrischen Leitfähigkeit in das photosphärische Plasma „eingefroren“ sind, können durch konvektive Bewegungen so verformt werden, dass es in einem räumlich eng lokalisierten Bereichen zu *Rekonnexion* kommt. Dabei wird durch topologische Umgestaltung magnetische Feldenergie in Joule'sche Wärme umgewandelt.
- Die Konvektionsströmungen regen niederfrequente *Alfvénwellen* und Ion-Zyklotron-Wellen an, die entlang der magnetischen Feldlinien nach außen laufen. Dabei werden sie durch nichtlineare Wechselwirkungen zu höheren Frequenzen verschoben, bis sie einen merklichen Bruchteil der Proton-Zyklotron-Frequenz erreichen und dissipiert werden.⁴

Die von Biermann [1946] und Schwarzschild [1948] favorisierte Idee des Energietransports durch Schallwellen hat sich hingegen als zu ineffizient herausgestellt, und wurde zu Gunsten der genannten magnetfeldbasierten Prozesse aufgegeben (siehe etwa [Priest 1982]).

1.1.3 Solare Aktivität

Die neuzeitliche Wiederentdeckung der Sonnenflecken durch GALILEI 1610 markiert den ersten Bruch des auf ARISTOTELES zurückgehenden Dogmas der ewigen Unveränderlichkeit der Sonnengestalt. Wie wir heute wissen, zeigt die Sonne auf verschiedensten Zeitskalen messbare Aktivitäten, die (mit Ausnahme der harmonischen Oszillationen des Sonnenkörpers als Ganzes und der Dynamik der photosphärischen Konvektionszellen, der sog. *Granulation*) sämtlich magnetischen Ursprungs sind. Wir nennen hier zwei für die Arbeit wesentliche Aspekte.

Der solare Zyklus

Wie man heute weiß, korreliert das etwa alle elf Jahre auftretende Maximum der Sonnenfleckenanzahl mit der Umpolung des globalen solaren Magnetfeldes. Dieses hat während des Minimums nahe der Oberfläche näherungsweise die Gestalt eines Dipols, dessen Feldlinien mit wachsendem Abstand durch den Sonnenwind zu einem näherungsweise radialen Feld deformiert werden. Die gesamte Struktur ist in erster Näherung rotationssymmetrisch zur

⁴Eine magnetohydrodynamische Beschreibung dieses Heizprozesses wurde von Tu et al. [1984] entwickelt; siehe dazu auch Abschnitt 2.6.1.

Rotations- bzw. Dipolachse⁵, und weist in der Äquatorebene eine toroidale Stromschicht auf. An jedem der Pole befindet sich somit je ein koronales Loch, während sich um den Äquator ein Band aus bogenförmig geschlossenen Feldlinien (sog. *helmet streamer*) spannt. Mit Beginn des Maximums verschwindet diese achsialsymmetrische Struktur zu Gunsten einer hochgradig irregulären Konfiguration, die zudem hochfrequenten Gestaltänderungen (in etwa auf der Zeitskala einer Rotationsperiode) unterworfen ist. Zu einem Zeitpunkt können leicht zehn oder mehr koronale Löcher vorhanden sein, die sich ohne erkennbare Symmetrie über die Sonnenkugel verteilen. Das nachfolgende Minimum entspricht in seiner prinzipiellen Feldgeometrie dem Vorherigen, wobei die beiden magnetischen Pole nun vertauscht sind. Ein kompletter magnetischer Zyklus dauert also etwa 22 Jahre. Abbildung 1.1 zeigt einen qualitativen Vergleich der Feldstruktur beider Zustände.

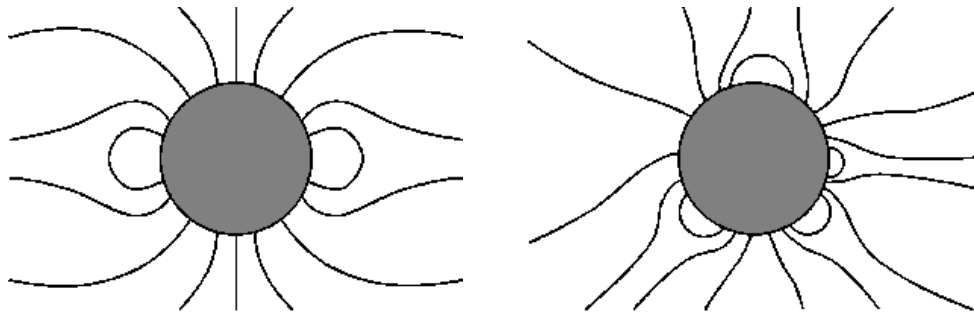


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des solaren Magnetfeldes im Minimum (links) und Maximum (rechts). Die linke Abbildung ist rotationssymmetrisch zur polaren Feldlinie (senkrechte Achse) zu denken.

Koronale Masseauswürfe

Als *koronalen Masseauswurf* (coronal mass ejection, CME, siehe Abbildung 1.2) bezeichnet man eine ausgedehnte Blase koronalen Gases, die sich von der Sonne aus radial nach außen bewegt. CMEs kommen in unterschiedlichen Gestalten vor⁶, und gehören sicher zu

⁵In einem neueren Modell propagiert Fisk [1996] eine deutliche Neigung der Dipolachse gegen die Rotationsachse, um die beobachtete Migration niederenergetischer Teilchen zwischen verschiedenen solaren Breiten zu erklären. Dieser Umstand ist für die vorliegende Untersuchung ohne Belang, da hier die solare Rotation vernachlässigt werden kann, und die Symmetrie des Problems damit einzig durch die Dipolachse definiert ist.

⁶Über die dreidimensionale Struktur eines CMEs besteht eine gewisse Unklarheit, da stets nur zweidimensionale Projektionen zur Verfügung stehen. Im Rahmen der STEREO-Mission (siehe z. B. Portier-Fozzani & Inhester [2001] und <http://stp.gsfc.nasa.gov/missions/stereo/stereo.htm> im WorldWideWeb) ist geplant, mit den Daten zweier baugleicher Sonden die volle dreidimensionale Struktur von CMEs zu rekonstruieren.

| | sol. Min. | sol. Max. |
|----------------------------|-------------------------------------|----------------|
| Häufigkeit [pro Tag] | 0, 2 | 2, 0 |
| Heliosphärische Breite | $\pm 10^\circ$ | $\pm 30^\circ$ |
| Ausdehnung | 20° – 60° | |
| Startgeschwindigkeit [m/s] | $1 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^6$ | |
| Masse [kg] | $2 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{13}$ | |
| Kinetische Energie [J] | $1 \cdot 10^{22} - 6 \cdot 10^{24}$ | |

Tabelle 1.2: *Typische Eigenschaften koronaler Masseauswürfe, nach [Kallenrode 2004].*

den spektakulärsten Manifestationen solarer Aktivität. Sie entstehen vermutlich in magnetischen Filamenten, deren Fußpunkte von konvektiven Strömungen der Photosphäre dergestalt deformiert werden, dass das Magnetfeld unter dem Filament einen sog. X-Punkt bildet, in dem sich die Feldlinien X-förmig kreuzen und die Feldstärke⁷ verschwindet. In diesem wird durch Rekonnektion Feldenergie in thermische und vor allem kinetische Energie umgewandelt, bis das Feld die Masse des Filamentes nicht mehr halten kann und es zur explosionsartigen Abstoßung kommt. Tabelle 1.2 fasst einige physikalische Parameter typischer CMEs zusammen.

Trifft ein CME auf einen Planeten, so kann er mit dessen Magnetosphäre — soweit vorhanden — in Wechselwirkung treten und so ein weites Spektrum an Effekten (wie Polarlichter, magnetische Stürme, etc.) auslösen. Dies betrifft vor allem die Erde, die als einziger der inneren Planeten eine hinreichend starke Magnetosphäre aufweist.⁸ Im Rahmen der *solar-terrestrischen Beziehungen* (und hier vor allem unter dem Stichwort *Weltraumwetter*) erhalten CMEs besondere Bedeutung durch den Umstand, dass diese Wechselwirkung auch die Möglichkeit der Beeinflussung oder gar Zerstörung von Kommunikationseinrichtungen mit einschließt [Valtonen 2005], und zudem potentielle Gefahren für bemannte Weltraummissionen birgt.

1.1.4 Stand der Forschung

In den vergangenen 40 Jahren erfolgten zahlreiche Untersuchungen über die Struktur des Sonnenwindes auf der Basis von in situ-Beobachtungen, die im Rahmen vieler internationaler Missionen mit interplanetaren Sonden gewonnen wurden. Wesentlich verbesserte Messungen wurden und werden seit Beginn der 90er Jahre durchgeführt. ULYSSES wurde im Oktober 1990 gestartet [Marsden 1996], YOHKOH im August 1991 [Ogawara et al. 1991] und SOHO im Dezember 1995 [Domingo et al. 1994]. Diese Missionen haben eine

⁷In dieser Arbeit werden die Begriffe *magnetische Feldstärke* und *magnetische Flussdichte* synonym für $\|\mathbf{B}\|$ verwendet.

⁸Das Dipolfeld des Merkur ist ca. 100mal schwächer als das der Erde [Neubauer 1991], das von Venus und Mars sogar um den Faktor 10^{-5} bzw. 10^{-4} [Luhmann & Russell 1997].

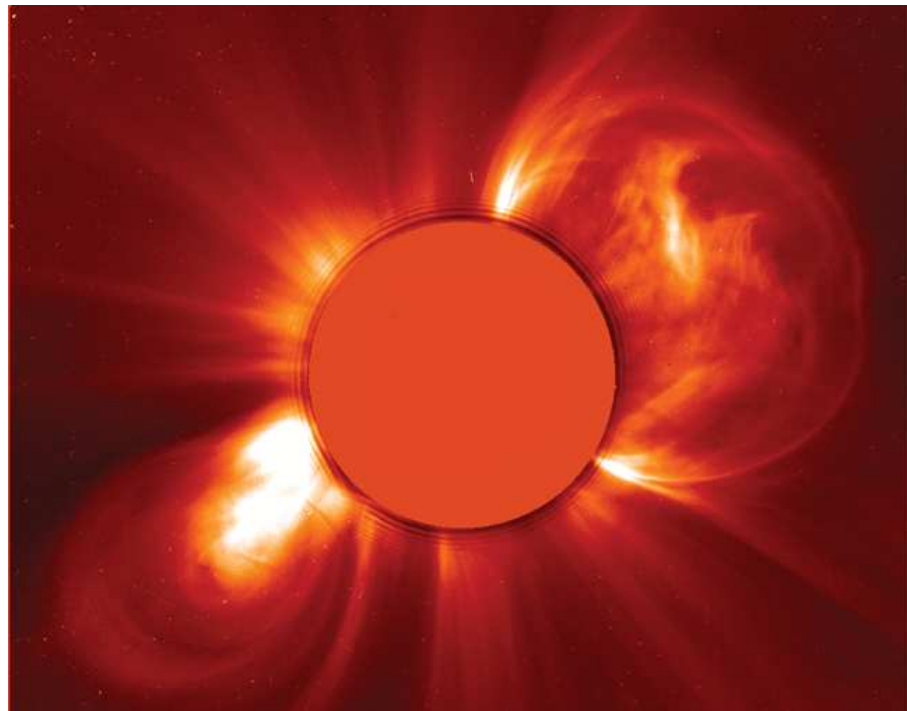


Abbildung 1.2: Diese spektakuläre Aufnahme im optischen Spektralbereich wurde am 8. November 2000 durch den LASCO C2-Koronographen an Bord der Raumsonde SOHO gemacht und zeigt zwei CMEs, die sich in scheinbar entgegengesetzter Richtung zueinander ausbreiten. (Quelle: <http://sohowww.nascom.nasa.gov/> im WorldWideWeb.)

komplementäre Instrumentierung, die uns Informationen über die Sonnenatmosphäre und ihr Magnetfeld bei hohen heliographischen Breiten, koronale Störungen wie den genannten Massenauswürfen, koronale Löcher, den Ursprung des Sonnenwindes und — indirekt — auch über die innere Struktur der Sonne liefern (siehe dazu [Lang 2000] sowie die Übersichtsartikel von Suess [2000] und Srivastava & Schwenn [2000]). Diese weltraumgestützten Beobachtungen werden ergänzt durch Fernerkundungen der Korona (für eine Übersicht siehe [Bird & Edenhofer 1990]), einschließlich Radiosondierungstechniken während Raketenflügen, sowie bodengestützten Beobachtungen bei optischen und Radiowellenlängen.

Während viele Modelle ein Verständnis lokaler Phänomene wie koronaler Flussröhren [Strong et al. 1994], koronaler Streamer [Schultz 1994] oder der Sonnenwind-Expansion von isolierten koronalen Löchern [Neugebauer 1994] ermöglichten, ist lediglich begrenzter Fortschritt bei der Modellierung der globalen Expansion der Korona erzielt worden. Gegenwärtige Sonnenwindmodelle konzentrieren sich auf Studien des so genannten chromosphärischen und koronalen Netzwerks [Bocchialini & Vial 1996], den Beschleunigungs-

mechanismus des Sonnenwindes [Marsch & Tu 2001, Laitinen et al. 2003] und die Bedeutung von minoren Ionenspezies wie z. B. Sauerstoff [Cramner 2001]. Die selbstkonsistente Modellierung der globalen Korona, d. h. die simultane Berechnung von Plasmaexpansion und Magnetfeldstruktur, die mit dem Modell von Pneuman & Kopp [1971] begonnen hat, konnte in den folgenden Jahrzehnten nicht wesentlich verbessert werden. Die wenigen Verbesserungen, wie z. B. die Berücksichtigung von Wärmeleitung [Robertson 1983], von anisotropen Temperaturen [Fichtner & Fahr 1990] oder von komplizierteren Magnetfeldstrukturen [Low 1988], die als 2D-Rechnungen nur für die inaktive Sonne anwendbar sind, beinhalten immer noch merkliche Einschränkungen entweder der globalen Anwendbarkeit oder der Selbstkonsistenz. Für die existierenden numerischen 3D-Modelle siehe z. B. [Riley et al. 2001] oder [Usmanov & Goldstein 2003]; ein semi-analytischer Ansatz mit Dodekaedersymmetrie wurde von Kalisch et al. [2003] vorgestellt. Erst in jüngerer Zeit gestattet die rasante Entwicklung großer Rechnerkapazitäten eine Annäherung an das Ziel des selbstkonsistenten, dreidimensionalen Modells, wie es etwa für die Beschreibung koronaler Strukturen [Amari et al. 2003, Roussev et al. 2003] oder die Vorhersage von solar-induzierten magnetosphärischen Störungen [Keller et al. 2002] erforderlich ist.

1.2 Motivation

In den letzten Jahren ist das Interesse an den physikalischen Vorgängen im Inneren der Sonne und in der Heliosphäre stark gestiegen. Dies liegt zum einen an den — auch auf Grund der technologischen Entwicklung — spürbarer werdenden solar-terrestrischen Beziehungen, und zum anderen an einem deutlich verbesserten Wissensstand. Eine Vielzahl von Beobachtungen mit Raumsonden, insbesondere mit SOHO und ULYSSES, haben unsere Kenntnis über die Physik der Sonne wesentlich erweitert. Zugleich wurde mit den Ergebnissen dieser Missionen aber auch deutlich, dass viele der bisherigen Modellvorstellungen zu vereinfachend sind und die nunmehr vorliegenden Daten nicht mehr im gewünschten bzw. notwendigen Detail beschrieben werden können.

Im Hinblick auf solar-terrestrische Beziehungen interessieren besonders die Kopplung der Sonnenatmosphäre an das umgebende Medium, die Ausbreitung von CMEs von der Korona bis zur Erdmagnetosphäre und ihre Wechselwirkung mit letzterer. Analytische Beschreibungen können nur sehr bedingt quantitative Modelldaten liefern, so dass der Entwicklung numerischer Modelle eine tragende Rolle zukommt. Dies ist auch notwendig hinsichtlich einer optimalen Vorbereitung zukünftiger solarer Missionen, insbesondere der geplanten SOLAR PROBE und dem europäisch-amerikanischen STEREO-Projekt.

Eine umfassende Simulation von solar-terrestrischen Beziehungen, die die Entwicklung von CMEs vom koronalen Entstehungsort bis zur Erdmagnetosphäre verfolgt, existiert infolge extremster Anforderungen an die numerische Gitterauflösung noch nicht; vielmehr wird das Gesamtzenario auf die Teilaspekte *Sonnennahe Dynamik und CME-Entstehung — Ausbreitung im interplanetaren Raum — Wechselwirkung mit planetaren*

Körpern heruntergebrochen. Für den letztgenannten Aspekt existieren MHD-basierte Studien beispielsweise von Ip & Kopp [2002] (Merkur), Murawski & Steinolfson [1996] (Venus), Walker et al. [1993] (Erde), Walker et al. [2001] (Jupiter) und Tóth et al. [2004] (Uranus).

Die vorliegende Studie betrifft dagegen hauptsächlich den Kopplungsprozess und die nachfolgende sonnennahe CME-Ausbreitung, wobei der neue Aspekt der symmetriefreien, voll dreidimensionalen Behandlung im Vordergrund steht. Vor allem die Reproduktion CME-induzierter Schockwellen stellt hohe Anforderungen an den verwendeten Simulationscode; dies motiviert die Verwendung von Verfahren, deren Stärke gerade in der Modellierung diskontinuierlicher Lösungen liegt. Hier sind neben dem *FCT-Verfahren* („flux corrected transport“, z. B. [Sauer et al. 1994]) vor allem die sog. *ENO-Schemata* (siehe Abschnitt 3.1) zu nennen. Mit der vorliegenden Arbeit wird erstmals die Anwendung eines solchen ENO-Verfahrens auf die MHD-Beschreibung der solaren Korona vorgelegt.

1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

Das primäre Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Erstellung eines magnetohydrodynamischen Modells der Sonnenumgebung, welches in der Lage ist, Wechselwirkung zwischen Magnetfeld und Fluidbewegung in selbstkonsistenter Weise zu beschreiben. Für die relevanten physikalischen Größen wie Dichte, Gasdruck, Magnetfeld etc. müssen hierzu Variationen in allen drei Raumdimensionen sowie in der Zeit zugelassen werden.

In einem zweiten Schritt soll die Ausbreitung CME-artiger „Störungen“ simuliert werden. Der vollständige Verzicht auf räumliche Symmetrien gestattet es dabei erstmals, die Expansionsrichtung des CME beliebig (insbesondere unabhängig von der Symmetrieachse des Magnetfeldes) zu wählen, und bildet damit eine wesentliche Verbesserung gegenüber den existierenden achsialsymmetrischen Modellen.

Die Arbeit gliedert sich dazu wie folgt: Nach erfolgter Einführung in das astrophysikalische Umfeld wird in Kapitel 2 das Modell beschrieben; insbesondere wird hier das zu lösende Differenzialgleichungssystem abgeleitet und in eine dem Problem angepasste Form gebracht. Kapitel 3 widmet sich den zum Einsatz gebrachten numerischen Verfahren und beschreibt die dabei auftretenden Probleme und deren Lösung. Hierzu zählen insbesondere die Implementierung der Quellterme, die Darstellung der Sonnenoberfläche als innerer Rand sowie Verfahren zur Gewährleistung der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes. In Kapitel 4 werden schließlich die durchgeführten sonnenphysikalischen Simulationen vorgestellt und ihre Ergebnisse diskutiert.

Kapitel 2

Das Modell

Dieses Kapitel ist dem verwendeten physikalischen Modell gewidmet. Dies betrifft vor allem das System der zu lösenden Gleichungen, die Auswahl relevanter Effekte und die geometrische Gestalt des Simulationsvolumens mit den zugehörigen Randbedingungen.

2.1 Einheiten und Notation

In dieser Arbeit wird durchweg dem MKS–Einheitensystem der Vorzug gegenüber dem GAUSS’schen cgs–System gegeben. Es finden ferner folgende Naturkonstanten Verwendung:

| | | |
|-----------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| c | $= 3,00 \cdot 10^8$ m/s | Lichtgeschwindigkeit im Vakuum |
| e | $= 1,60 \cdot 10^{-19}$ C | Elementarladung |
| m_e | $= 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg | Ruhemasse des Elektrons |
| m_p | $= 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg | Ruhemasse des Protons |
| k_B | $= 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K | Boltzmann-Konstante |
| μ_0 | $= 1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m | Permeabilität des Vakuums |
| ε_0 | $= 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m | Dielektrizitätskonstante des Vakuums |
| G | $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m ² /kg ² | Gravitationskonstante |
| M_\odot | $= 1,99 \cdot 10^{30}$ kg | Masse der Sonne |
| R_\odot | $= 6,96 \cdot 10^8$ m | Photosphärenradius der Sonne |

Weitere Formelzeichen werden am Ort ihres ersten Auftauchens definiert.

Vektorielle Größen sind durch Fettdruck gekennzeichnet; ihr Absolutbetrag wird, wie andere skalare Variablen auch, kursiv gesetzt:

$$B = \|\mathbf{B}\| \equiv \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}. \quad (2.1)$$

Gelegentlich wird bei partiellen Ableitungen eine der abkürzenden Schreibweisen

$$\partial_a b \equiv \partial_a b(\dots, a, \dots) \equiv \frac{\partial b(\dots, a, \dots)}{\partial a} \equiv \frac{\partial b}{\partial a} \quad (2.2)$$

verwendet, wenn dies übersichtlichere Formeln ergibt. Bei Variablen mit mehreren Indizes wird mitunter z. B. A_{ijk} statt $A_{i,j,k}$ geschrieben, wenn keine Verwechslung mit $A_{(i,j,k)}$ zu befürchten ist.

2.2 MHD-Grundgleichungen

Als *Plasma* wird allgemein ein (vollständig oder teilweise) ionisiertes Gas bezeichnet. Sind die internen Längenskalen des Plasmas (wie z. B. Teilchenabstände, Gyrationenradien und vor allem die Debyelänge) sehr klein gegen die Längenskala der makroskopischen Variationen, so kann durch Mittelung der Übergang vom Einzelteilchen-Ensemble zum als kontinuierlich angenommenen *Fluid* vollzogen werden. Man erhält so die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik (MHD), die als Erweiterung der klassischen Hydrodynamik (HD) um die Wechselwirkung mit (externen oder durch das Plasma selbst erzeugten) elektromagnetischen Feldern verstanden werden kann. Im Folgenden rekapitulieren wir diesen Weg in seinen wesentlichen Punkten.

2.2.1 Bilanzgleichungen

Die vollständige Information eines Ensembles von Teilchensorten α der Massen m_α und den elektrischen Ladungen q_α ist in den Einteilchen-Verteilungsfunktionen $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ enthalten. Dabei bezeichnen \mathbf{r} und \mathbf{v} den (mikroskopischen) Ort und die Geschwindigkeit der Teilchen, t ist die Zeit. Durch die Wirkung (externer oder interner) Kräfte \mathbf{F}_α sowie als Ergebnis von Stößen der Teilchen untereinander ergibt sich eine zeitliche Entwicklung von f_α , die durch die Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{\text{coll}} \quad (2.3)$$

beschrieben wird. Formal kann diese Gleichung durch den Satz von Liouville als Kontinuitätsgleichung im Phasenraum hergeleitet werden. Die rechte Seite von (2.3) beschreibt in dieser zunächst rein formalen Weise die Stoßwechselwirkungen der Teilchen untereinander. Durch sukzessive Momentenbildung von (2.3) (siehe etwa [Bittencourt 2004]) die Massen-, Impuls- und Energiebilanz in Form der magnetohydrodynamischen Grundgleichungen aufgestellt werden:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (p_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \right] + (\mathcal{P}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{h}_\alpha = M_\alpha \quad (2.6)$$

Dabei bedeuten

$$n_\alpha := \int_v f_\alpha d^3v \quad \text{Teilchenzahldichte} \quad (2.7)$$

$$\rho_\alpha := m_\alpha n_\alpha = m_\alpha \int_v f_\alpha d^3v \quad \text{Massendichte} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_\alpha := \frac{m_\alpha}{\rho_\alpha} \int_v f_\alpha \mathbf{v} d^3v \quad \text{Fluidgeschwindigkeit} \quad (2.9)$$

$$p_\alpha := \rho_\alpha \int_v f_\alpha \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha\|^2 d^3v \quad \text{skalärer Druck} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{P}_\alpha := \rho_\alpha \int_v f_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) d^3v \quad \text{Drucktensor} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{h}_\alpha := \frac{\rho_\alpha}{2} \int_v f_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha\|^2 d^3v \quad \text{Wärmefluss} \quad (2.12)$$

Die in den Quelltermen enthaltenen Ausdrücke

$$S_\alpha := m_\alpha \int_v \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{\text{coll}} d^3v \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A}_\alpha := m_\alpha \int_v \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{\text{coll}} \mathbf{v} d^3v \quad (2.14)$$

$$M_\alpha := m_\alpha \int_v \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{\text{coll}} \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha\|^2}{2} d^3v \quad (2.15)$$

bezeichnen der Reihe nach den durch Kollisionen bedingten Gewinn oder Verlust an Masse, Impuls und thermischer Energie.

Der Ausdruck $\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha$ fasst alle Kräfte zusammen, die durch den nicht konvektierenden Anteil $\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha$ der Teilchenbewegung \mathbf{v} auf ein Fluidelement einwirken. Ist diese Bewegung isotrop, und können außerdem Scherkräfte (Viskosität) vernachlässigt werden (wovon im Folgenden ausgegangen werden soll), so vereinfacht sich $\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha$ zum Gradient des skalaren kinematischen Druckes ∇p_α .

Der *Adiabaten-Exponent* γ ist definiert als das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck zu konstanter Temperatur; er hängt ferner über

$$\gamma := \frac{C_p}{C_V} = \frac{n_f + 2}{n_f} \quad (2.16)$$

mit der Zahl n_f der Freiheitsgrade des einzelnen Teilchens zusammen, wobei der Index α unterdrückt wurde. Für den hier relevanten Fall eines monoatomaren Gases ist $n_f = 3$ und folglich $\gamma = 5/3$. (Von einiger Bedeutung ist ferner der Fall eines *isothermen* Gases mit $\gamma = 1$.) Für ein ideales Gas mit der Zustandsgleichung

$$p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha \quad (2.17)$$

hängen die beiden Wärmekapazitäten über

$$C_p = C_V + k_B/m_\alpha \quad (2.18)$$

zusammen. Die thermische Energiedichte $e_{\text{th},\alpha}$ kann daher (z. B. [Priest 1982] folgend) geschrieben werden als

$$e_{\text{th},\alpha} \equiv \rho_\alpha C_v T_\alpha = \frac{p_\alpha}{\gamma - 1} . \quad (2.19)$$

Diese Beziehung gestattet es insbesondere, die Energiegleichung (2.6) durch p_α auszudrücken. In Kapitel 2.3.1 wird von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht werden. Die hier relevanten Kraftdichten sind die der elektromagnetischen Kraft und der Gravitationsbeschleunigung \mathbf{g} , daher:

$$\mathbf{F}_\alpha = n_\alpha [q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + m_\alpha \mathbf{g}] . \quad (2.20)$$

Die Kenntnis aller Momente von f_α ist äquivalent zur Kenntnis von f_α selbst. Da aber bei jeder Momentenbildung ein höheres (bisher nicht durch eine Momentengleichung bestimmtes) Moment auftaucht, muss das System durch zusätzliche, physikalisch motivierte Bedingungen geschlossen werden. So wird der Wärmefluss \mathbf{h}_α meist mit einem empirischen Wärmeleitkoeffizienten κ durch die Wärmeleitung nach FOURIER:

$$\mathbf{h}_\alpha = -\kappa \nabla T_\alpha \quad (2.21)$$

an die Temperatur gekoppelt; hier beschränken wir uns auf den Fall verschwindender Wärmeleitfähigkeit $\kappa = 0$, also $\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{0}$.

2.2.2 Maxwellgleichungen

Die (externen und internen) elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} gehorchen den Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma / \varepsilon_0 \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (2.25)$$

wobei Ladungsdichte σ und Stromdichte \mathbf{J} durch

$$\sigma := \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{J} := \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \quad (2.27)$$

definiert sind.

In gut leitenden Plasmen kann der Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ in (2.23) vernachlässigt werden, sofern die typischen Geschwindigkeiten klein sind gegen die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c \equiv (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$. Damit werden die Maxwellgleichungen (wie auch schon die Fluidgleichungen) *Galilei-invariant*.

2.2.3 Reduktion der Variablen

Die beiden Spezies Elektronen (e) und Protonen (p) sind gekennzeichnet durch ihre jeweiligen Anzahldichten n_α , Geschwindigkeiten \mathbf{u}_α , Gasdrücke p_α und Temperaturen¹ T_α mit $\alpha \in \{e, p\}$. Durch die hohe elektrische Leitfähigkeit des koronalen Plasmas kann von *Quasineutralität* ausgegangen werden, d. h. eventuell vorhandene Raumladungen werden durch Ströme so schnell wieder ausgeglichen, dass zu jedem Zeitpunkt $n_e \approx n_p$ gilt, oder etwas präziser

$$\frac{|n_e - n_p|}{n_e + n_p} \ll 1. \quad (2.28)$$

Dies rechtfertigt den Ansatz

$$n_e = n_p =: n. \quad (2.29)$$

Der Beitrag der Elektronen zur Gesamtmassendichte ist dann wegen

$$\rho := \rho_e + \rho_p = m_e n_e + m_p n_p = m_p n \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right) \approx m_p n \quad (2.30)$$

als vernachlässigbar anzusehen. Die nach (2.26) definierte Ladungsdichte kann damit wegen $q_p = -q_e = -e$ als $\sigma \approx 0$ angenommen werden.

Verwendet man für beide Teilchensorten die Zustandsgleichung des idealen Gases (2.17), so ist der Gesamtdruck gegeben durch

$$p = p_e + p_p = n_e k_B T_e + n_p k_B T_p \approx n k_B (T_e + T_p) = 2 n k_B T \quad (2.31)$$

mit der gemittelten Temperatur $T := (T_e + T_p)/2$.

Die beiden Geschwindigkeitsfelder \mathbf{u}_α können zudem gemäß

$$\mathbf{u} := \frac{1}{\rho_e + \rho_p} (\rho_e \mathbf{u}_e + \rho_p \mathbf{u}_p) = \mathbf{u}_p - \frac{\rho_e}{\rho} \underbrace{(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e)}_{= \mathbf{J}/(e n)} \quad (2.32)$$

¹ Streng genommen ist zusätzlich jeweils noch zwischen Temperaturen parallel und senkrecht zum Magnetfeld zu unterscheiden. Nach Hundhausen [1968] ist in 1 AU Abstand von der Sonne $T_e^\parallel/T_e^\perp \approx 1,1$ und $T_p^\parallel/T_p^\perp \approx 2$, was zumindest für Protonen die Berücksichtigung der Temperaturanisotropie sinnvoll erscheinen lässt. (Ein entsprechendes eindimensionales Modell wurde von Fichtner & Fahr [1990] entwickelt.) Nicht zuletzt wegen der in Abschnitt 2.3.1 dargelegten Schwierigkeiten verzichten wir hier auf diese Unterscheidung.

zu einer gewichteten mittleren Geschwindigkeit \mathbf{u} zusammengefasst werden (aus der die individuellen Geschwindigkeiten dann durch

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \frac{m_p}{\rho e} \mathbf{J} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u} + \frac{m_e}{\rho e} \mathbf{J} \quad (2.34)$$

zurückgewonnen werden können). Durch Summation über alle Teilchenspezies α überträgt sich die Massen- und Impulsbilanz auf die soeben definierten gemittelten Fluidgrößen ρ und \mathbf{u} :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \sum_{\alpha} S_{\alpha} = 0 \quad (2.35)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p - \mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} = 0, \quad (2.36)$$

wobei $p := \sum_{\alpha} p_{\alpha}$ der (skalare) Gesamtdruck ist. Erhaltung von Masse und Impuls implizieren das Verschwinden der Summen auf der rechten Seite; für Details siehe wiederum [Bittencourt 2004]. Mit der Energiegleichung kann verschieden verfahren werden. Zum einen kann in ähnlicher Weise aus (2.6) eine Gleichung für den Gesamtdruck abgeleitet werden. Das Ergebnis ist

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) \right] + (p \nabla) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (2.37)$$

Dabei heben sich die Stoßterme wieder gegenseitig auf; allerdings ist es damit nicht mehr möglich, Elektronen und Ionen verschiedene Temperaturen zuzuordnen. Soll andererseits auf die implizite Annahme $T_e = T_p$ verzichtet werden, so muss für beide Spezies eine separate Energiegleichung verwendet und gelöst werden. Da bei einem Stoß keine Umwandlung in andere Teilchensorten geschieht, ist auch ohne Summation $S_{\alpha} = 0$. Für \mathbf{A}_{α} und M_{α} ist dies nicht der Fall; der Impulsübertrag wird mit der Stoßfrequenz $\nu_{\alpha\beta}$ daher häufig als

$$\mathbf{A}_{\alpha} = -\rho_{\alpha} \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) \quad (2.38)$$

geschrieben; für den Energieübertrag M_{α} ist ein ähnlicher Ansatz notwendig. Eine Ableitung der MHD-Gleichungen für Elektronen-Ionen-Plasmen, die sogar den Fall anisotroper Temperaturverteilungen berücksichtigt, findet sich z. B. bei [Fichtner 1987].

2.2.4 Das ohmsche Gesetz

Der Zusammenhang zwischen den in einem Plasma vorhandenen elektromagnetischen Feldern und dem durch sie bewirkten Stromfluss \mathbf{J} wird durch das *ohmsche Gesetz* gegeben.

Für den Spezialfall eines vollständig ionisierten Elektronen-Ionen-Plasmas, dessen Konstituenten untereinander durch Stöße der Frequenz ν_{ei} wechselwirken, kann es aus den Einzelspezies-Gleichungen abgeleitet werden [Bittencourt 2004] und schreibt sich dann in der gebräuchlichen (allerdings bereits genäherten) Form als

$$(m_e/e) \partial_t \mathbf{J} - \nabla p_e = ne (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \mathbf{B} . \quad (2.39)$$

Dabei ist

$$\eta := \frac{m_e \nu_{ei}}{n e^2} \quad (2.40)$$

die (skalar angenommene) elektrische Resistivität des Plasmas. In seine einfachsten und gebräuchlichsten Form ist das ohmsche Gesetz durch den Klammerausdruck auf der rechten Seite gegeben, also durch

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} . \quad (2.41)$$

(Zur Rechtfertigung dieser Vereinfachung siehe Anhang B.) In dieser Gestalt kann es mit (2.22) und (2.25) zur Induktionsgleichung kombiniert werden:

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\eta \mathbf{J} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.42)$$

$$= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} [\eta \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \eta \times (\nabla \times \mathbf{B})] . \quad (2.43)$$

Außerdem vereinfacht sich der Quellterm der Energiegleichung (2.37) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{J} \cdot (\eta \mathbf{J} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{J} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ &= \eta \|\mathbf{J}\|^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

und wird in dieser Form als *ohmsche Heizung* bezeichnet.

2.3 Vereinfachende Annahmen

Dieser Abschnitt diskutiert einige vereinfachende Annahmen, durch welche die Komplexität der magnetohydrodynamischen Zwei-Fluid-Gleichungen weiter reduziert werden kann.

2.3.1 Problematik des Zwei-Fluid-Ansatzes

Da in der Heliosphäre die Coulomb-Stoßfrequenz zwischen Elektronen und Protonen zu niedrig ist, um die Annahme gleicher Temperaturen für beide Teilchenpopulationen zu rechtfertigen [Hartle & Sturrock 1968], ist es wünschenswert, beide Teilchensorten durch ein Zwei-Fluid-Modell zu beschreiben. Leider stößt dieses Ansinnen bei seiner Realisierung auf das folgende gravierende Problem:

Die dynamischen Gleichungen für die Plasmavariablen leiten sich im Kern von physikalischen Erhaltungsgrößen ab; soll etwa die Masse erhalten sein, so kann sich der Masseinhalt eines Volumens V nur durch Massezu- oder -abfluss über den Rand ∂V ändern. Es gilt also

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dF \Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) \, dV = 0, \quad (2.45)$$

und aus der Beliebigkeit von V folgt das Verschwinden des Integranden, also die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung in der bekannten Form. Während aber die erste Gleichung von (2.45) für beliebige Masseverteilungen $\rho(\mathbf{x}, t)$ gilt, erfordert der folgende Schritt offenbar die *Differenzierbarkeit* von ρ . Dieser Umstand wird z. B. bei Schockfronten relevant, wo es statt einer einzigen, wohldefinierten Lösung mehrere sog. *schwache Lösungen* gibt, die im mathematischen Sinne alle gleichberechtigt nebeneinander stehen. Die Auswahl der physikalisch korrekten Beschreibung hat nun durch eine *Entropie-Bedingung* zu geschehen. Dabei wird die zu lösende Gleichung inklusive Dissipationsterm aufgestellt und dann deren Lösung im Grenzfall verschwindender Dissipation betrachtet. Wie etwa LeVeque [1992] zeigt, führt dies auf die Schlussfolgerung, dass die dynamischen Variablen als Erhaltungsgrößen zu wählen sind.²

Im Ein-Fluid-Modell kann dies dadurch erreicht werden, dass die Energiegleichung über die Gesamtenergie e (statt Druck oder Temperatur) formuliert wird. Auf Grund der Stoßwechselwirkung sind nun die Energien $e_{e,p}$ des Zwei-Fluid-Modell für sich genommen leider nicht erhalten, und es ist unklar, welche Erhaltungsgrößen statt dessen zu verwenden sind. (Die Entropie ist bei Schocks bekanntlich ebenfalls keine Erhaltungsgröße.) Es scheint hier ein generelles Problem der Modellierung von Schocks in Multifluidmodellen vorzuliegen, dessen Lösung bisher noch aussteht. Da gerade die Ausbreitung von CMEs oft mit Schockwellen einhergeht (siehe z. B. [Leblanc et al. 2001]), stellt die Gefahr falsch reproduzierter Schockfronten ein schwerwiegendes Problem für die Expansionsstudien dar. Aus diesem Grund setzen wir pragmatisch $T_e = T_p = T$ und begnügen uns mit einer einzigen Energiegleichung für die Gesamtenergie

$$e = \frac{\rho \|\mathbf{u}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\gamma - 1}. \quad (2.46)$$

Nach einigen längeren Umformungen kann (2.37) in die Bilanzform

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right] = \rho (Q + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \quad (2.47)$$

gebracht werden. Der neu hinzugekommene Heizterm Q trägt der Tatsache Rechnung, dass die Energiedichte des Plasmas während der Expansion nicht streng erhalten bleibt,

²Dieser Umstand wird in Abschnitt (3.2.3) durch den exemplarischen Vergleich zweier Varianten illustriert.

sondern durch verschiedene Heizprozesse (ohmsche Heizung, Wellenheizung, etc.) erhöht wird. Auf die physikalischen und numerischen Aspekte der Heizfunktion wird in Abschnitt 2.6 näher eingegangen.

2.3.2 Solare Rotation

Die sichtbare Oberfläche der Sonne rotiert differenziell mit einer Frequenz, die näherungsweise wie

$$\Omega(\psi) = \Omega_0(1 + a \sin^2 \psi + b \sin^4 \psi) \quad (2.48)$$

von der heliographischen Breite $\psi \in [-90^\circ, +90^\circ]$ abhängt. Da die beobachtete globale Rotationsbewegung von anderen oberflächennahen Geschwindigkeitsfeldern überlagert wird, differieren die Werte der Parameter Ω_0 , a und b je nach Art des zu Grunde gelegten Messverfahrens. Komm et al. [1993] etwa ermitteln anhand von Magnetogrammdaten

$$\Omega_0 = (14,42 \pm 0,01)^\circ/\text{d}, \quad a \approx b = -0,145 \pm 0,1 \quad (2.49)$$

entsprechend einer siderischen Rotationsdauer von

$$P(\psi) = 2\pi/\Omega(\psi) \approx (25\dots35) \text{ d} . \quad (2.50)$$

(Die innerhalb der Konvektionszone ebenfalls vorhandene Abhängigkeit der Rotationsfrequenz von der Entfernung zum Zentrum der Sonne ist hier nicht von Belang, da das Sonneninnere „außerhalb“ des betrachteten physikalischen Raumes liegt.) Die Berücksichtigung dieser Rotation bedingt folglich entweder (im Inertialsystem) eine Zeitabhängigkeit der Randbedingung an der rotierenden Sonnenoberfläche, oder aber einen zusätzlichen Coriolis- bzw. Zentrifugalterm in der Impulsbilanz (sofern ein rotierendes Bezugssystem gewählt wurde.) Im letzteren Fall verhält sich die auf ein Fluidelement der Masse m einwirkende, durch Rotation induzierten Zentrifugalkraft zur Gravitationskraft wie

$$\frac{ma_{\text{zentr.}}(r, \psi)}{mg(r)} = \frac{\Omega(\psi)^2 r}{GM_\odot/r^2} \leq \underbrace{\frac{\Omega(0)^2 (R_\odot)^3}{GM_\odot}}_{\approx 2 \cdot 10^{-5}} \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^3 \quad (2.51)$$

und kann daher im hier betrachteten sonnennahen Weltraum (bis etwa $r \leq 10 R_\odot$) als vernachlässigbare Größe betrachtet werden. Gleiches gilt für die in Anhang A.1.2 beschriebene Verdrillung der Feldlinien zur PARKER-*Spirale*.

2.3.3 Resistivität

Nichtideale Effekte, wie Teilchenbewegungen senkrecht zu Magnetfeldlinien oder die als *Rekonnektion* bezeichnete topologische Umstrukturierung von Magnetfeldern, erfordern eine senkrecht zu \mathbf{B} orientierte Komponente des elektrischen Feldes [Hesse 1988], was

in der vorliegenden Situation (nach Wegfall aller anderen nichtidealen Terme) Gleichung (2.41) zufolge nur durch eine Resistivität $\eta \neq 0$ geleistet werden kann.

Die Resistivität eines vollionisierten Plasmas kann nach Spitzer [1962] zu

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{n e^2} \approx 60 \ln \Lambda \left(\frac{T}{\text{K}} \right)^{-3/2} \Omega\text{m} \quad (2.52)$$

abgeschätzt werden; der schwach temperatur- und dichteabhängige *Coulomb-Logarithmus* $\ln \Lambda$ liegt dabei im Bereich 5...20. Für $T \approx 10^6$ K ist demnach $\eta = \mathcal{O}(10^{-7} \Omega\text{m})$.

Diese Abschätzung berücksichtigt allerdings nur die Resistivität durch Stöße der Ladungsträger untereinander. Überschreitet die Stromdichte eine kritische Schwelle, so kommt es durch Instabilitäten wie die *Lower Hybrid-Driftinstabilität* zu Welle-Teilchen-Wechselwirkungen, die sich als sog. *anormale Resistivität* (siehe z. B. [Schlegel 1991]) bemerkbar machen. Diese kann durchaus einige Größenordnungen über der Abschätzung (2.52) liegen.

Das Ausmaß der durch $\eta \neq 0$ bewirkten Abweichung von der idealen Dynamik wird durch die dimensionslose *magnetische Reynolds-Zahl*

$$\text{Re}_M := \frac{\mu_0 L v}{\eta} \quad (2.53)$$

bestimmt; siehe dazu die Normierungstabelle in Abschnitt 2.4. Während η selbst Gleichung (2.52) zufolge räumlich vergleichsweise homogen ist, hängt Re_M (neben der Normierungsgeschwindigkeit $v = c_s$, siehe Abschnitt 2.4) vor allem von der Längenskala L ab, auf der sich z. B. das Magnetfeld merklich ändert. Im hier betrachteten Fall ist $L = \mathcal{O}(R_\odot)$, was auf $(\text{Re}_M)^{-1} = \mathcal{O}(10^{-14})$ führt. Wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wird, wird dieser Wert deutlich von der numerischen Resistivität des Codes übertroffen. In diesem Sinne kann in räumlich homogenen Gebieten in der Induktionsgleichung (2.42) problemlos $\eta \equiv 0$ gesetzt werden. Andererseits findet Rekonnektion zwar i. d. R. auf kleinen räumlichen Skalen $L \ll R_\odot$ statt, entfaltet aber (wie etwa im Falle der in Abschnitt 1.1.2 beschriebenen Ablösung eines CMEs) schnell auf wesentlich größeren Skalen erhebliche Wirkung. Beim Studium solcher Prozesse hat es daher ggf. durchaus Sinn, die Simulation lokal mit (unphysikalisch) hohen Resistivitäten zu betreiben. Daher wird in der vorliegenden Arbeit im Allgemeinen $\eta = 0$ gesetzt, die Option einer anderen Wahl (mit möglicher Abhängigkeit sowohl vom Ort als auch von anderen dynamischen Variablen wie der Stromdichte \mathbf{J}) im Modell aber explizit vorgesehen.

2.4 Normierung

Jede physikalische Größe X kann als Produkt einer dimensionslosen Zahl \bar{X} und einer dimensionsbehafteten Normierungskonstanten X_0 dargestellt werden. Um die Modellgleichungen in eine dimensionslose Form zu überführen, wählen wir zunächst für den (bis

| Physikal. Variable | Wert der Bezugsgröße |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Länge L | $L_0 := 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$ (Sonnenradius) |
| Anzahldichte n | $n_0 := 1,00 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$ |
| Temperatur T | $T_0 := 1,00 \cdot 10^6 \text{ K}$ |
| Gasdruck p | $2 n_0 k_B T_0 = 2,76 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$ |
| Massendichte ρ | $m_p n_0 = 1,67 \cdot 10^{-13} \text{ kg m}^{-3}$ |
| (CME-) Masse M_{cme} | $m_p n_0 (L_0)^3 = 5,63 \cdot 10^{13} \text{ kg}$ |
| Geschwindigkeit u | $c_s := \sqrt{2 k_B T_0 / m_p} = 1,28 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (Schallgeschw.) |
| Beschleunigung g | $(c_s)^2 / L_0 = 2,36 \cdot 10^1 \text{ m s}^{-2}$ |
| Zeit t | $L_0 / c_s = 5,45 \cdot 10^3 \text{ s}$ (Schallzeit) |
| Energiedichte e | $m_p n_0 (c_s)^2 = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ J m}^{-3}$ |
| Stromdichte J | $(c_s / L_0) \sqrt{m_p n_0 / \mu_0} = 6,75 \cdot 10^{-8} \text{ A m}^{-2}$ |
| magnet. Induktion B | $c_s \sqrt{\mu_0 m_p n_0} = 4,17 \cdot 10^{-7} \text{ T}$ |
| Gravitationspotenzial Φ | $(c_s)^2 = 1,65 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ |
| Heizrate Q | $(c_s)^3 / L_0 = 3,03 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ |
| Resistivität η | $\mu_0 c_s L_0 = 1,12 \cdot 10^8 \text{ } \Omega \text{ m}$ |

Tabelle 2.1: Übersicht der gewählten und abgeleiteten Normierungskonstanten.

zu einem gewissen Grade) willkürlichen Satz Basisgrößen Länge L , Teilchenzahldichte n und Temperatur T der Reihe nach die konstanten Bezugsgrößen Sonnenradius R_\odot , die mittlere Anzahldichte von $n_0 = 10^{14}$ Teilchen pro m^3 und eine mittlere Temperatur der Korona von $T_0 = 10^6 \text{ K}$. Durch Dimensionsanalyse ergibt sich daraus das komplette System von Bezugsgrößen. Tabelle 2.1 stellt die so entstandenen Normierungskonstanten in einer Übersicht zusammen.

Die dimensionslose Resistivität $\bar{\eta}$ ist also gleich dem Kehrwert der magnetischen Reynolds-Zahl (2.53).

Anstelle der Temperatur könnte auch das Magnetfeld als Basisgröße dienen; in diesem Fall würde statt der isothermen Schallgeschwindigkeit c_s die *Alfvéngeschwindigkeit*

$$v_A := \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_p n_0}} \quad (2.54)$$

zur Normierung herangezogen werden. Wie wollen hier davon absehen, da der Bezug auf v_A bei rein hydrodynamischen Studien keinen Sinn macht und daher auf diesem Wege kein einheitliches Normengefüge für den Vergleich zwischen HD- und MHD-Simulationen bereitgestellt werden könnte.

Um das Gravitationspotenzial im Quellterm der Impulsbilanz in die dimensionslose Gestalt

$$\bar{\Phi} = -\Gamma / \bar{r} \quad (2.55)$$

zu bringen, bedarf es schließlich noch der zusätzlichen Definition

$$\Gamma := \frac{GM_{\odot}}{L_0 (c_s)^2} = 11,489\dots \quad (2.56)$$

Wie allgemein üblich, werden die Balken über den Formelzeichen zur Vereinfachung der Notation im Folgenden wieder weggelassen.

2.5 Endgültige Form des Gleichungssystems

Wir fassen die endgültige, dimensionslose Form unseres Gleichungssystems zusammen. Zu lösen ist

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.57)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + (p + \|\mathbf{B}\|^2/2) \mathbf{1} \mathbf{1} - \mathbf{B} \mathbf{B}] = \rho \mathbf{g} \quad (2.58)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) = \eta \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \eta \times \mathbf{J} \quad (2.59)$$

$$\partial_t e + \nabla \cdot [(e + p + \|\mathbf{B}\|^2/2) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}] = \rho (Q + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) + \eta \|\mathbf{J}\|^2 \quad (2.60)$$

mit der Gravitationsbeschleunigung

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi = -\nabla \left(-\frac{\Gamma}{r} \right) = -\frac{\Gamma}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2.61)$$

der Energiebeziehung

$$e = \frac{\rho \|\mathbf{u}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} + \begin{cases} p/(\gamma - 1) & : \gamma \neq 1 \\ 0 & : \gamma = 1 \end{cases}, \quad (2.62)$$

der Stromdichte

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.63)$$

und einer vorgegebenen Heizfunktion Q .

Der Fall $\gamma = 1$ in Gl. (2.62) ist nur der Vollständigkeit halber mit angegeben. Tatsächlich kann im isothermen Fall auf die Integration von Gleichung (2.60) komplett verzichtet werden, wenn dafür die isotherme Zustandsgleichung

$$p = c_s^2 \rho \quad (2.64)$$

Verwendung findet. Ähnliches gilt für den adiabatischen Fall $Q = 0$: Die Gleichung (2.60) wird äquivalent zur adiabatischen Zustandsgleichung

$$p = C \rho^\gamma \quad (2.65)$$

mit einer aus der Anfangskonfiguration zu bestimmenden Konstanten C .

Eine mögliche Variante bestünde noch darin, der Gesamtenergiedichte e in Gl. (2.62) noch den Anteil aus der Gravitationsenergie $e_{\text{grav}} = \rho \Phi$ zuzuschlagen; in diesem Fall wäre der Quellterm $(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g})$ in Gl. (2.60) zu streichen. Da aber auch dann die beiden verbleibenden Quellterme bestehen blieben und in jedem Fall separat behandelt werden müssten, wollen wir es bei der angegebenen Form belassen.

2.6 Wahl der Heizfunktion Q

Das koronale Plasma erfährt während seiner Expansion durch verschiedene Mechanismen (siehe Abschnitt 1.1.2) eine deutliche Temperaturerhöhung. Diese Effekte werden vereinfachend in der Heizfunktion Q zusammengefasst. Der „Sonnenrand“ im Sinne der Simulation wird dabei nicht an der Photosphäre, sondern an der koronalen Basis angesetzt. Somit ist es *nicht* das Ziel, den steilen Temperaturgradienten zwischen Photosphäre und Korona nachzubilden; die Temperatur wird also nur mäßig um Faktoren der Ordnung eins variieren.

Es folgt eine kurze Diskussion der physikalischen Hintergründe sowie der optimalen Implementierung von Q .

2.6.1 Allgemeines zu Modellen koronaler Heizung

Die existierenden Sonnenwind-Modelle lassen sich nach ihren Strategien zur Behandlung des koronalen Heizung grob in drei Klassen einteilen. In der Reihenfolge zunehmender Realitätsnähe (und gleichfalls ansteigendem numerischen Aufwands) sind dies:

- Bei Verwendung einer isothermen [Parker 1958, Uchida 1967] oder adiabatischen [Keppens & Goedbloed 1999] Zustandsgleichung kann auf eine Energiegleichung (und damit auf eine Heizfunktion) komplett verzichtet werden.
- Bei expliziter Verwendung einer Energiegleichung muss ein Heizterm eingefügt werden, der den Energieverlust kompensiert, den das expandierende Plasma durch *adiabatische Kühlung* erleidet. Im einfachsten Fall kommen hier ad hoc-Heizfunktionen zum Einsatz, die entweder (bis auf die Proportionalität zur Dichte ρ) als reine Funktion des Ortes vorgeschrieben werden, wie z. B.

$$Q(r) = Q_0 \frac{\rho}{\rho_0} \exp\left(-\frac{r-1}{10}\right) \quad (2.66)$$

mit Konstanten Q_0 und ρ_0 [Wang & Wu 1998], oder dergestalt von anderen dynamischen Variablen abhängen, dass die sich einstellende Plasmatemperatur einem aus Beobachtungen ableitbaren Temperaturprofil nahe kommt. Ein typisches Beispiel hierfür ist das Modell von Manchester et al. [2004], dessen Heizfunktion

$$Q = \rho q_0 \left(T_0 - \gamma \frac{p}{\rho}\right) \exp\left[-\left(\frac{r - R_\odot}{\sigma_0}\right)^2\right] \quad (2.67)$$

die Konvergenz zu einer räumlich präzise vorgeschriebenen „Zieltemperatur“ $T_0(\mathbf{x})$ erzwingt, die ebenso wie σ_0 und q_0 in subtiler Weise vom Ort abhängt. Die funktionelle Gestalt von Q ist dabei i. d. R. nicht an tatsächliche physikalische Heiz- oder Kühlmechanismen angelehnt.

- Schließlich sind noch solche Modelle zu nennen, die sich um eine realitätsnahe Modellierung der physikalisch ablaufenden Heizmechanismen bemühen. Beispielsweise haben Tu et al. [1984] die Standard-MHD-Gleichungen um die Wechselwirkung des Fluids mit alfvénischen Fluktuationen $\delta\mathbf{B}$ und $\delta\mathbf{u}$ erweitert. Es ergibt sich ein zusätzlicher Druckterm $-\nabla p_w = -\nabla [(\delta\mathbf{B})^2/2]$ in der Impulsbilanz, sowie ein Heizterm der normierten Form

$$Q_w = -\frac{p_w}{f_H} \left[\ln \left(\frac{f_H}{f_0} \right) \right]^{-1} \left(\mathbf{u} + \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho}} \right) \cdot \nabla f_H . \quad (2.68)$$

Wellen werden durch photosphärische Wirbel der Frequenz f_0 erzeugt und laufen entlang der Magnetfeldlinien nach außen. Dabei werden sie durch nichtlineare Welle-Welle-Wechselwirkung zu höheren Frequenzen verschoben, bis sie in den Bereich der Ionen-Zyklotronfrequenz f_H gelangen und dissipiert werden. Die zeitliche Entwicklung des Wellenspektrums $f \mapsto P(f)$, welches mit dem Wellendruck über

$$p_w = \frac{1}{2} \int_{f_0}^{f_H} P(f) df \quad (2.69)$$

in Verbindung steht, muss mit einer separaten Gleichung beschrieben werden.

Als Kompromiss zwischen dem Wunsch nach möglichst weitgehender Selbstkonsistenz des Modells und dem pragmatischen Bestreben, den Schwerpunkt der Arbeit auf dem wesentlichen neuen Aspekt, der symmetriefreien Ausbreitung CME-ähnlicher Strukturen, zu belassen, wird in dieser Arbeit der Mittelweg einer vollen Energiegleichung mit ad hoc-Heizfunktion gegangen.

2.6.2 Anpassung an die Modellgeometrie

Grundsätzlich kann für Q jede funktionelle Abhängigkeit von Ort, Zeit oder den anderen physikalischen Größen vorgegeben werden. Dabei ist zu beachten, dass der Wert von Q am Sonnenrand eine zeitliche Änderung der Temperatur T verursachen wird, die im Allgemeinen nicht mit der für T formulierten Randbedingung kompatibel sein wird; effektiv springt Q dort also auf denjenigen Wert Q_{iso} , der die Temperatur auf dem konstanten Wert T_0 halten würde.

Die funktionelle Form von Q_{iso} kann bestimmt werden, indem die isotherme Zustandsgleichung $p = T_0 \rho$ in das System (2.57 – 2.62) eingesetzt wird. Auflösen nach Q liefert nach längerer Rechnung das Ergebnis

$$Q_{\text{iso}} = T_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})(\nabla \cdot \mathbf{B}) . \quad (2.70)$$

Anders als bei rein analytischer Betrachtung ist der zweite Term numerisch nicht exakt gleich Null, kann aber bei Verwendung entsprechender Korrekturverfahren³ gegen den ersten Term vernachlässigt werden.

Durch Wahl von $Q = Q_{\text{iso}}$ kann damit auch im Fall $\gamma \neq 1$ ein isothermes Plasma simuliert werden; insbesondere ist jede Heizfunktion Q , die die Bedingung $Q|_{r=1} = Q_{\text{iso}}|_{r=1}$ erfüllt, mit der Randbedingung $T|_{r=1} = T_0$ verträglich.

Zur Sicherstellung von $\lim_{r \rightarrow 1} Q = Q_{\text{iso}}$ legt diese Überlegung zwei Strategien für die Wahl der Heizfunktion nahe:

1. Eine räumliche Mittelung der Form

$$Q = \alpha Q_0 + (1 - \alpha) Q_{\text{iso}} \quad (2.71)$$

mit einer primären Heizfunktion Q_0 und einer zur Sonne hin monoton von 1 auf 0 fallenden Mittelungsfunktion $r \mapsto \alpha(r)$, oder

2. Verwendung einer auf Q_{iso} bezogenen *relativen* Heizfunktion $q(r)$, die die Bedingung $q(1) = 1$ erfüllt und die Heizrate gemäß

$$Q = q Q_{\text{iso}} \quad (2.72)$$

bestimmt.

Die zweite Methode (2.72) hat zusätzlich den Vorteil, dass durch Q_{iso} automatisch eine sinnvolle Größenordnung für Q vorgegeben wird, und die Kontrolle über Nettoheizung bzw. -kühlung leicht durch $q > 1$ bzw. $q < 1$ erreicht werden kann. Daher kommt im Folgenden dieser zweite Ansatz zum Tragen.

2.6.3 Explizite Parametrisierung

Die vorzuziehende relative Heizfunktion $q(r)$ sollte die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. Möglichst einfache analytische Gestalt
2. Am Sonnenrand stetig differenzierbarer Übergang zu $q(1) = 1$ (also $q'(1) = 0$)
3. Annahme eines (aus Gründen der Einfachheit) einzigen Maximums an einem vorgegebenen Radius
4. Für $r \rightarrow \infty$ sollte $q(r) \rightarrow 0$ gehen.

³ Siehe dazu Abschnitt 3.6.

Dies wird z. B. von der Funktion

$$q(r) = \begin{cases} \left[1 + 2H \left(\frac{r-1}{h-1} \right)^2 \right] / \left[1 + \frac{H}{H+1} \left(\frac{r-1}{h-1} \right)^4 \right] & : r \geq 1 \\ 1 & : r < 1 \end{cases} \quad (2.73)$$

mit den freien Parametern h und H geleistet, die von $q(1) = 1$ ausgehend bei $r = 1 + h$ den maximalen Wert $1 + H$ erreicht, bei $r = 1 + (h-1)\sqrt{2(1+H)}$ auf 1 zurückgefallen ist, um dann weiter monoton fallend gegen 0 zu streben (sofern $H \neq 0$ ist). Im Folgenden soll (2.73) als relative Heizfunktion Verwendung finden. Abbildung 2.1 zeigt eine Schar ausgewählter Kurven von $q(r)$.

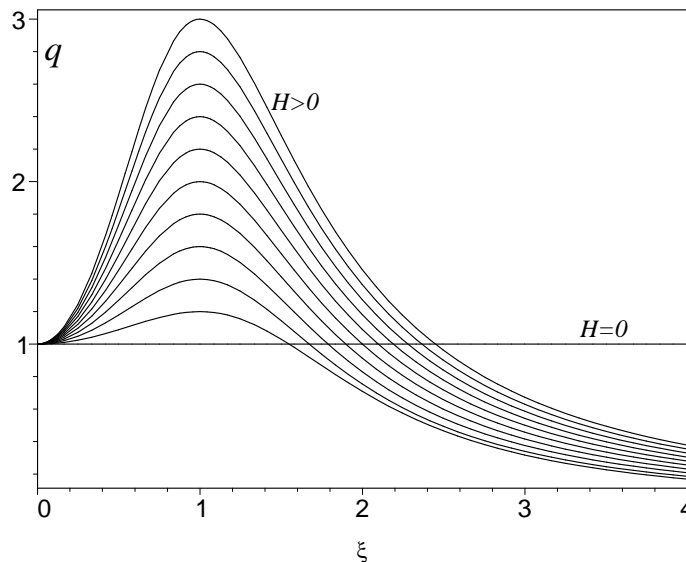


Abbildung 2.1: Relative Heizfunktion q nach Gleichung (2.73) als Funktion der umskalierten Radialkoordinate $\xi := (r-1)/(h-1)$, welche $[1, h]$ auf $[0, 1]$ abbildet. ($\xi = 0$ entspricht also dem Sonnenrand $r = 1$.) Der Parameter H wurde äquidistant im Intervall $0 \leq H \leq 2$ variiert. Der Grenzfall $H = 0$ reproduziert $q(r) \equiv 1$, also den isothermen Fall.

2.7 Geometrie des Simulationsraumes

2.7.1 Wahl des Koordinatensystems

Alle frühen (und die Mehrzahl der zeitgenössischen) Modelle des Sonnenwindes sind in sphärischen Koordinaten formuliert. Diese Wahl ist der Geometrie der kugelförmigen Sonnenoberfläche und der nahezu radialen Windexpansion optimal angepasst, und gestattet

zudem leicht die Beschränkung auf kugel- oder zylindersymmetrische Betrachtungen. Außerdem führt die Diskretisierung des Simulationsvolumens automatisch auf Gitternetze, deren Zellen nahe der Sonnenoberfläche eine höhere Auflösung in azimuthaler Richtung aufweisen, ein angesichts der gerade dort vorhandenen großen Gradienten sinnvoll erscheinender Nebeneffekt.⁴

Allerdings werden diese offensichtlichen Vorzüge mit einigen gravierenden Nachteilen erkauft. Die bei jedem Zeitschritt auszuwertenden Gleichungen werden durch die zahlreichen Skalenfaktoren deutlich komplizierter, was die Laufzeit der Simulationen merklich erhöht. Bei expliziten Verfahren (siehe Abschnitt 3.1) wird der maximal zulässige Zeitschritt durch die kleinste Gitterzelle bestimmt, was den Gewinn an räumlicher Auflösung bei kleinen Radien wieder schmälert. Vor allem aber sind mathematische Singularitäten bei $r = 0$ und $\vartheta \in \{0, \pi/2\}$ vorhanden, die in geeigneter Weise abgefangen werden müssen. Gerade für *globale* Modelle, die für alle Richtungen $\vartheta \in [0, \pi]$ Gültigkeit beanspruchen, liegt hierin das wesentliche Manko sphärischer Koordinaten [Linker 1987]. Speziell für die vorliegende Arbeit, deren Kernpunkt gerade der Verzicht auf jede Symmetrieannahme ist, kann der wesentliche Vorteil sphärischer Koordinaten nicht genutzt werden. Aus diesem Grund wird es hier bei der Verwendung kartesischer Koordinaten $[x, y, z]$ bleiben.

Der Mittelpunkt der Sonne befindet sich dabei im Ursprung des Koordinatensystems, das einen quaderförmigen Bereich aus der Heliosphäre ausschneidet. Mitunter wird der berechnete Bereich auf einen Oktanten oder Quadranten der Sonne beschränkt und an den Koordinatenflächen mit Hilfe von Symmetriebedingungen geeignet gespiegelt. Bei der Diskussion und Darstellung werden, soweit sinnvoll, sphärische Polarkoordinaten $[r, \vartheta, \varphi]$ verwendet. Der Zusammenhang zwischen ϑ und der heliosphärischen Breite ψ ist durch

$$\vartheta + \psi = \pi/2 = 90^\circ \quad (2.74)$$

gegeben; am Äquator ist also $\vartheta = \pi/2$ und $\psi = 0^\circ$.

2.7.2 Randbedingungen

Wir haben zwei Klassen von Rändern zu unterscheiden:

- Die äußere Berandung des quaderförmigen Simulationsvolumens hat kein Pendant in der Realität und entsteht nur durch die Endlichkeit des praktisch simulierbaren Volumens. Die Randbedingungen sind daher so zu wählen, dass die Existenz des Randes möglichst keinen Einfluss auf das Verhalten der physikalischen Größen auf seiner Innenseite hat.
- Die Oberfläche der Sonne stellt eine innere Berandung des Simulationsbereiches dar, die als Kugelform offenbar mit keiner kartesischen Koordinatenfläche zusammenfällt.

⁴Die radiale Richtung, in welcher die Gradienten noch ungleich größer sind, bleibt von diesem Effekt allerdings unberührt. Gitterzellen mit variabler Länge in r -Richtung sind möglich, wenn auch um den Preis (noch) komplizierterer Gleichungen und eines entsprechend erhöhten Rechenaufwands.

Dieser Umstand macht die in Abschnitt 3.5 diskutierten Extrapolationsverfahren erforderlich.

An dieser Grenze werden Dichte und Temperatur auf einem richtungsunabhängigen Wert festgehalten. Dies ist nur zulässig bei Vernachlässigung der solaren Rotation; für eine rotierende Sonne müsste sich ein Kräftegleichgewicht zwischen Gasdruck und Zentrifugalkraft einstellen dürfen [Keppens & Goedbloed 1999]. Alle drei Komponenten des Magnetfeldes werden ebenfalls festgehalten.

Einige Autoren fixieren die Geschwindigkeit bzw. Impulsdichte in gleicher Weise, z. B. Manchester et al. [2004], die die Zuweisung $v(1) = 0$ verwenden. Dieses Vorgehen ist problematisch, sofern die Parker-Windlösung (siehe Anhang A.1) reproduziert werden soll, da dann die Lösungskurve bereits durch den kritischen Punkt festliegt und nicht mit einer weiteren Festlegung der Form $v(1) = v_0$ vereinbar ist. Eine denkbare Rechtfertigung besteht darin, dass v dort hinreichend klein ist und die Abweichung vom exakten Parker-Windprofil ebenso verschwindend ausfallen wird. Alternativ bieten sich hier Extrapolationsverfahren an wie in [Keppens & Goedbloed 2000]. Beide Methoden werden in Abschnitt 4.1 miteinander verglichen.

Als Quelle des Windes wird der innere Rand großen Einfluss auf das von dort abströmende Plasma haben, während der äußere Rand, wo der Wind das Volumen wieder verlässt, dagegen von deutlich geringerer Bedeutung sein dürfte. Dies gilt zumindest in dem Fall, dass die Geschwindigkeit, mit der das Fluid diesen Rand passiert, größer ist als die lokale maximale Signalgeschwindigkeit (hier also die Geschwindigkeit schneller magnetosonischer Wellen). Die konkrete numerische Implementierung der beiden Randklassen wird in Abschnitt 3.5 besprochen.

Kapitel 3

Numerik

Die MHD-Gleichungen bilden einen Satz gekoppelter, nichtlinearer Differenzialgleichungen in drei Raumdimensionen und der Zeit. Analytische Lösungen sind nur für wenige Spezialfälle bekannt (siehe z. B. [Neukirch & Priest 2000] und die Zusammenstellung von Gleichgewichtslösungen in [Biskamp 1993] und [Priest 1982]), so dass man auf die numerische Approximation der gesuchten Lösungen angewiesen ist. Dieses Kapitel stellt das dazu herangezogene Verfahren vor und beschreibt die in diesem Zusammenhang auftretenden Probleme und deren Lösungen.

3.1 Der Algorithmus

3.1.1 Numerische Methodik

Die zu lösenden Gleichungen sind sämtlich von der Gestalt

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}[\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{Q}(\mathbf{r}) , \quad (3.1)$$

wobei die Komponenten des Vektors \mathbf{U} von den einzelnen dynamischen Variablen gebildet werden, hier also z. B. $\mathbf{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, e)^T$. In diesem Abschnitt bezeichne u beispielhaft eine dieser Variablen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird zunächst der eindimensionale Fall besprochen, dessen multidimensionale Erweiterung Gegenstand von Abschnitt 3.1.4 ist.

Zur numerischen Approximation der Lösungen von (3.1) existiert eine Vielzahl von Verfahren mit spezifischen Vor- und Nachteilen; für eine einführende Übersicht siehe etwa [Goldewski & Raviart 1996]. Allen gemein ist eine räumliche und zeitliche Diskretisierung, d. h. eine Parzellierung des d -dimensionalen Gebietes in Elementarzellen, in denen die dynamischen Variablen u durch Punkt- oder Zellmittelwerte dargestellt werden. (Es gibt also pro Zelle jeweils einen solchen Wert.) Die geometrische Form der Zellen ist so gewählt, dass sie von den Koordinatenflächen berandet werden. Für jede Dimension (bzw.

Koordinate) $m \in \{1, \dots, d\}$ gebe es N_m Zellen der Länge h_m . Zur Vereinfachung der Notation sei im Folgenden $N := (N_1 \cdots N_m)^{1/m}$ vereinbart. Im einfachsten Fall sind die h_m über das Gitter konstant; eine nicht-äquidistante Aufteilung bietet sich z. B. dann an, wenn die Größe der aufzulösenden räumlichen Strukturen einerseits eine obere Grenze für die Zellengröße vorgibt, diese Strukturen andererseits aber so stark lokalisiert sind, dass die globale Beachtung dieser Grenze zu unverträglich hohem Rechenaufwand führen würde. Besonders die dynamische Anpassung der Auflösung an die lokalen Gradienten der Variablen, die im Rahmen der sog. *Adaptiven Gitterverfeinerung* (adaptive mesh refinement, AMR, siehe z. B. [Friedel et al. 1997, Grauer et al. 1998]) erreicht wird, hat in den letzten Jahren große Bedeutung erlangt, und wird inzwischen auch für MHD-Modelle des Sonnenwindes genutzt.¹ Für das im vorliegenden Fall verwendete äquidistante, kartesische Gitter in den drei Dimensionen $[x, y, z]$ ist die Schreibweise $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ für (h_1, h_2, h_3) gebräuchlich.

Das numerische Schema \mathcal{D} bildet die Werte u_j^n der Zelle x_j zur Zeit $t^n = n \Delta t$ durch

$$u_j^{n+1} = \mathcal{D}(\{u_i^n, u_i^{n+1} | i \in I_{\mathcal{D}}(j)\}) \quad (3.2)$$

auf die neuen Werte u_j^{n+1} zur Zeit $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ ab, wobei der Operator \mathcal{D} aus den (alten und/oder neuen) Werten der Zelle selbst und ihren Nachbarzellen eine geeignete „Prognose“ des neuen Wertes erstellt. Die Indexmenge $I_{\mathcal{D}}(j)$ enthält also je nach Schema die Zelle j und einige (wenige) ihrer Nachbarzellen.

Man unterscheidet *explizite* und *implizite* Verfahren. Erstere verwenden in \mathcal{D} nur die bereits bekannten Zellwerte zur Zeit t^n ; sie sind einfach in der Anwendung, erlauben aber nur Zeitschritte Δt mit

$$\mathcal{V} \frac{\sqrt{d} \Delta t}{\min\{h_m\}} < C_{\text{CFL}} < 1, \quad (3.3)$$

wobei der genaue Wert von C_{CFL} verfahrensabhängig ist. Gleichung (3.3) wird als *CFL-Kriterium* [Courant et al. 1928] bezeichnet; es kann mathematisch durch Betrachtung der Charakteristiken der Lösung abgeleitet werden und besagt anschaulich, dass die maximale physikalische Geschwindigkeit \mathcal{V} im System nicht größer sein darf als die „Geschwindigkeit“ $\Delta x/\Delta t$, mit der sich die neuen Werte auf dem Zellgitter ausbreiten. *Implizite* Verfahren umgehen dieses Hindernis, indem sie die neuen Werte u_j^{n+1} simultan aus den Werten zur Zeit t^{n+1} berechnen. Dazu muss allerdings bei jedem Zeitschritt eine (wenn auch dünn besetzte) N^{2d} -Matrix invertiert werden.

Neben der Klassifizierung in explizite und implizite Verfahren liegt ein weiteres Unterscheidungsmerkmal in der Behandlung der Zellgrenzen, wo die Darstellung der Zellinhalte im Allgemeinen diskontinuierlich verläuft. Schemata wie das GODUNOV-Verfahren [Godunov 1959] lösen dort ein Riemannproblem, d. h. sie verwenden die (exakte oder genäherte)

¹Als Beispiel sei der BATS-R-US-Code genannt, siehe <http://www.cscamm.umd.edu/cmpd/batsrus.htm> im WorldWideWeb.

Zeitentwicklung der Anfangsbedingung

$$u(x, t^n) = \begin{cases} u_j^n & : x < x_{j+1/2} \\ u_{j+1}^n & : x \geq x_{j+1/2} \end{cases} . \quad (3.4)$$

Zentrierte Schemata vermeiden das wiederholte Lösen von Riemann-Problemen, in dem sie Ableitungen als Sekantensteigung in der gestaffelten Form

$$\partial_x u(x, t^n)|_{x_{j+1/2}} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad (3.5)$$

o. ä. diskretisieren, und das an der Zwischenstelle $x_{j+1/2}$ berechnete Ergebnis bei Bedarf in geeigneter Weise (etwa durch Interpolation) wieder auf das Gitter abbilden.

Beginnend mit dem klassischen Lax-Friedrichs-Schema [Lax 1954, Friedrichs 1954]

$$u_{j+1/2}^{n+1} = (u_j^n + u_{j+1}^n)/2 - (\Delta t/\Delta x) (F(u_{j+1}^n) - F(u_j^n)) \quad (3.6)$$

wurden mehrere verbesserte zentrierte Schemata entwickelt. Zu nennen sind hier vor allem das NT-Schema [Nessyahu & Tadmor 1990], welches mit seiner *ENO-Rekonstruktion* — die Abkürzung steht für *essentially non-oscillatory* — eine Strategie zur expliziten Vermeidung numerisch bedingter Oszillationen an starken Gradienten ausnutzt. Das in der vorliegenden Arbeit verwandte CWENO-Schema – wiederum eine Abkürzung für *Centrally weighted essentially non-oscillatory* — nach Kurganov & Levy [2000] kann als eine von zahlreichen Erweiterungen des NT-Schemas verstanden werden. Weitere Details zu diesem Verfahren können z. B. bei [Kurganov & Tadmor 2000] nachgelesen werden.

3.1.2 Das CWENO-Schema

Im Folgenden soll das in der Arbeit zum Einsatz gebrachte CWENO-Verfahren nach Kurganov & Levy [2000] in seinen wesentlichen Punkten vorgestellt werden. Es dient wie bereits erwähnt der approximativen Lösung hyperbolischer Differenzialgleichungen vom Typ (3.1). Aus Gründen der einfacheren Darstellung soll hier dessen eindimensionale Form

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f[u(x, t)] = Q[u(x, t), x, t] \quad (3.7)$$

betrachtet werden; ferner beschränken wir uns zunächst auf den Fall mit verschwindendem Quellterm $Q = 0$, also

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f[u(x, t)] = 0 . \quad (3.8)$$

Mit $\bar{u}(x, t)$ definieren wir den sog. *gleitenden Mittelwert* von $u(x, t)$ gemäß

$$\bar{u}(x, t) := \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} u(\zeta, t) \, d\zeta . \quad (3.9)$$

Einmaliges Integrieren von (3.8) über das Intervall $x \in [x' - \Delta x/2, x' + \Delta x/2]$ liefert

$$\partial_t \bar{u}(x', t) + \frac{1}{\Delta x} [f(u(x' + \Delta x/2, t)) - f(u(x' - \Delta x/2, t))] = 0, \quad (3.10)$$

nochmaliges (zeitliches) Integrieren über $\tau \in [t, t + \Delta t]$ ergibt

$$\bar{u}(x, t + \Delta t) = \bar{u}(x, t) - \frac{1}{\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} [f(u(x + \Delta x/2, \tau)) - f(u(x - \Delta x/2, \tau))] d\tau, \quad (3.11)$$

wobei statt x' wieder x geschrieben wurde.

Gleichung (3.11) gilt exakt, kann im Allgemeinen aber nicht analytisch integriert werden. Um eine Approximation der zeitlichen Entwicklung der Lösung auf dem Gebiet $\mathcal{L} := [0, L]$ zu gewinnen, wird \mathcal{L} in N äquidistante Zellen der Länge Δx aufgeteilt. Bei Verwendung der abkürzenden Schreibweise $x_j := j \Delta x$, $t^n := n \Delta t$ für $j = 0, \dots, N$ und

$$u_j^n := u(x_j, t^n) \quad (3.12)$$

$$\bar{u}_j^n := \bar{u}(x_j, t^n) \quad (3.13)$$

lautet (3.11) an der Stelle $x = x_{j+1/2}$ ausgewertet nun

$$\bar{u}_{j+1/2}^{n+1} = \bar{u}_{j+1/2}^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{j+1}, \tau)) - f(u(x_j, \tau))] d\tau. \quad (3.14)$$

Um mit dieser Gleichung für Zellmittel aus den zum Zeitpunkt t^n als bekannt angenommenen Zellmittelwerten \bar{u}_j^n die Werte zum nächsten Zeitpunkt $t^{n+1} \equiv t^n + \Delta t$ zu approximieren, bedarf es einer Diskretisierungsvorschrift für den Integralterm. Dazu wählt man für jede Zelle $I_j := [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ ein Polynom $x \mapsto P_j^n(x)$, welches die ursprüngliche Funktion $u(x, t)$ in dieser Zelle aus den bekannten Zellmittelwerten approximiert. Mit der Indikatorfunktion

$$\chi_j(x) := \begin{cases} 1 & : x \in I_j \\ 0 & : x \notin I_j \end{cases} \quad (3.15)$$

wird also

$$u(x, t^n) \approx \sum_j \chi_j(x) P_j^n(x) \quad (3.16)$$

und damit

$$\bar{u}_{x+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} P_j^n(x) dx + \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} P_{j+1}^n(x) dx \right). \quad (3.17)$$

Die Güte der Approximation hängt natürlich wesentlich von der gewählten Integrationsmethode und der Gestalt der P_j^n ab. Die Wahl stückweise konstanter „Polynome“ $P_j^n(x) = \bar{u}_j^n$ und einer Integration erster Ordnung

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_j, t)) dt \approx f(\bar{u}_j^n) \Delta t \quad (3.18)$$

liefert beispielsweise die Punktwerte des gestaffelten Lax-Friedrichs-Schemas (3.6).

Rekonstruktion nach CWENO

Das CWENO-Verfahren definiert die P_j als konvexe Summe je dreier Polynome

$$P_j(x) := \beta_L P_L(x) + \beta_C P_C(x) + \beta_R P_R(x) \quad (3.19)$$

mit $\sum_k \beta_k = 1$, wobei

$$P_L(x) := \bar{u}_j + (\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j)(x - x_j)/\Delta x \quad (3.20)$$

$$P_R(x) := \bar{u}_j + (\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1})(x - x_j)/\Delta x \quad (3.21)$$

als lineare Funktionen so gewählt sind, dass sie den zentralen und linken bzw. rechten Zellmittelwert erhalten, sie also die Bedingungen

$$\int_{I_{j-1}} P_L(x) dx = \bar{u}_{j-1}^n \quad (3.22)$$

$$\int_{I_j} P_L(x) dx = \bar{u}_j^n = \int_{I_j} P_R(x) dx \quad (3.23)$$

$$\bar{u}_{j+1}^n = \int_{I_{j+1}} P_R(x) dx \quad (3.24)$$

erfüllen. Das zentrale Polynom $P_C(x)$ hat die Gestalt

$$P_C(x) := (1 - c_L - c_R)^{-1} [P_{\text{ex}}(x) - c_L P_L(x) - c_R P_R(x)] , \quad (3.25)$$

mit Konstanten c_L und c_R , wobei $P_{\text{ex}}(x)$ dasjenige Polynom zweiten Grades ist, das alle drei Zellmittelwerte erhält.² (Zur besseren Lesbarkeit wurde in $P_{L,C,R}$ die Indizes n und j unterdrückt.) Für die im Folgenden verwandte symmetrische Wahl³ $c_L = c_R = 1/4$

²Anders ausgedrückt, $P_{\text{ex}}(x)$ erfüllt jede der drei Bedingungen (3.22 – 3.24).

³Levy et al. [2000] zeigen, dass für jede symmetrische Wahl (d. h. $c_L = c_R$) der Koeffizienten das resultierende Verfahren von der Ordnung drei ist.

bedeutet dies

$$\begin{aligned}
P_C(x) = \bar{u}_j^n & - \frac{1}{12} (\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n) \\
& + \frac{1}{2} (\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) \\
& + (\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Bestimmung der Gewichte

Die Gewichte β_k , $k \in \{\text{L}, \text{C}, \text{R}\}$ werden nun so bestimmt, dass das Polynom der Seite mit den größten Variationen den geringsten Beitrag zur Rekonstruktion leistet. Als Maß für diese Variationen werden die Indikatoren

$$S_k := \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left[(\Delta x) (P'_k(x))^2 + (\Delta x)^3 (P''_k(x))^2 \right] dx \tag{3.27}$$

definiert, aus denen die Gewichte β_k dann gemäß

$$\beta_k := \frac{\alpha_k}{\sum_m \alpha_m} \quad \text{mit} \quad \alpha_k := \frac{c_k}{(\varepsilon + S_k)^p} \quad \text{für } k, m \in \{\text{L}, \text{C}, \text{R}\} \tag{3.28}$$

berechnet werden.⁴ (Die Wahl der Konstanten p und ε wird im nächsten Unterabschnitt diskutiert.) Durch Einsetzen von (3.20), (3.21) und (3.26) in (3.27) folgt sofort

$$S_L = (\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n)^2 \tag{3.29}$$

$$S_C = \frac{13}{3} (\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n)^2 + \frac{1}{4} (\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n)^2 \tag{3.30}$$

$$S_R = (\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n)^2 \tag{3.31}$$

als explizite Form der Indikatoren. Falls also die Variation zu beiden Seiten der Zelle gleich ist, haben auch alle drei S_k den gleichen Wert, und es folgt $\beta_k = c_k$. In diesem Fall wird u_j^n einfach durch $P_{\text{ex}}(x)$ approximiert, und die Rekonstruktion ist in diesen Bereichen folglich von dritter Ordnung. Liegt dagegen ein starker einseitiger Gradient der Form

$$\bar{u}_{j-1}^n - \bar{u}_j^n = 0 \tag{3.32}$$

$$\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n = \delta u \gg \sqrt{\varepsilon} \tag{3.33}$$

⁴Es ist dabei $c_C := 1 - c_L - c_R$ zu setzen.

vor, so ist die resultierende Gewichtung offenbar durch

$$\alpha_L \approx 1 \quad \text{und} \quad \alpha_{C,R} = \mathcal{O} \left[\left(\frac{\varepsilon}{(\delta u)^2} \right)^p \right] \ll 1 \quad (3.34)$$

gekennzeichnet, und die Ordnung des Verfahrens reduziert sich lokal auf zwei. Auf diese Weise werden die für Verfahren dritter Ordnung (oder allgemein ungerader Ordnung, siehe Abschnitt 3.3.2) typischen oszillatorischen Artefakte an starken Gradienten wirkungsvoll unterdrückt.

Zur Wahl von p und ε

Der Exponent p in (3.28) regelt die Stärke des Einflusses der S_k auf die Gewichte β_k (wobei für $p = 0$ offenbar unabhängig von S_k stets $\beta_k = c_k$ ist). Wir schließen uns Jiang & Shu [1996] an, die den empirisch ermittelten Wert $p = 2$ empfehlen.

Die Konstante ε soll verhindern, dass bei sehr glatten Funktionen der Nenner von (3.28) zu Null wird, und wird von Kurganov & Levy [2000] pauschal zu $\varepsilon = 10^{-4}$ festgesetzt. Dies ist sicher nicht in allen Fällen die optimale Wahl, da die S_k proportional zu $(u_j)^2$ skalieren, und damit der Einfluss von ε von der jeweils im Problem relevanten Größenordnung von u abhängig wird. In Anhang C.2 wird noch etwas näher auf diese Problematik eingegangen.

Das semidiskrete Schema

Die Rekonstruktion von u durch zellenweise polynomiale Funktionen ist im Allgemeinen nicht stetig an den Zellgrenzen. Die dadurch bedingte Diskontinuität zwischen den Zellen I_j und I_{j+1} breitet sich in Form von Schocks mit einer Geschwindigkeit nach rechts und links aus, die nach oben betragsmäßig durch $a_{j+1/2}$ abgeschätzt sei. Zum Zeitpunkt $t^n + \delta t$ ist $u(x, t^n + \delta t)$ damit in jedem Fall stetig außerhalb der Intervalle

$$W_{j+1/2} := [x_{j+1/2} - a_{j+1/2} \delta t, x_{j+1/2} + a_{j+1/2} \delta t] . \quad (3.35)$$

Im Weiteren ist zwischen dem *volldiskreten* und dem *semidiskreten* Schema zu unterscheiden. Das volldiskrete Verfahren entsteht dadurch, dass auf der Vereinigung $\biguplus_i W_i$ und dessen Komplement jeweils Polynomrekonstruktionen $\bar{w}_{j+1/2}$ bzw. \bar{w}_j der beschriebenen Art stattfinden. Diese werden dann auf das ursprüngliche Gitter projiziert, und liefern eine Vorschrift zur Bestimmung der neuen Zellmittelwerte \bar{u}_j^{n+1} . Die verschiedenen Zellmittelwerte und ihre Lage zueinander sind in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

Ein wesentlicher Nachteil volldiskreter Verfahren besteht darin, dass ihre numerische Dissipation in ungünstiger Weise vom Zeitschritt Δt abhängt.⁵ Um dieses Problem zu umgehen,

⁵Für das Lax-Friedrichs-Verfahren (3.6) beispielsweise ist sie proportional zu $(\Delta x)^2/(\Delta t)$.

bietet sich der Übergang zum (hier tatsächlich zum Einsatz kommenden) *semidiskreten* Verfahren an, indem zusätzlich der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchgeführt wird. Dadurch geht die Intervalllänge der $W_{j+1/2}$ gegen Null, und man erhält mit

$$u_{j+1/2}^+ := P_{j+1}(x_{j+1/2}, t^n) \quad (3.36)$$

$$u_{j+1/2}^- := P_j(x_{j+1/2}, t^n) \quad (3.37)$$

das semidiskrete Verfahren in der Endform:

$$\frac{d\bar{u}_j(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \left[f(u_{j+1/2}^+) + f(u_{j+1/2}^-) - f(u_{j-1/2}^+) - f(u_{j-1/2}^-) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \left[a_{j+1/2}(t) \left(u_{j+1/2}^+(t) - u_{j+1/2}^-(t) \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \left[a_{j-1/2}(t) \left(u_{j-1/2}^+(t) - u_{j-1/2}^-(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ein zusätzlicher Vorteil des semidiskreten Verfahrens besteht offenbar darin, dass so auf die explizite Berechnung der Polynome auf den $W_{j+1/2}$ komplett verzichtet werden kann. Die $a_{j+1/2}$ können dabei leicht nach

$$a_{j+1/2} = \max_{\pm} \left\{ \varrho_{\text{sp}} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \left(u_{j+1/2}^{\pm} \right) \right) \right\} \quad (3.40)$$

durch den Spektralradius ϱ_{sp} der Jacobi-Matrix von f bestimmt werden. Für die MHD-Grundgleichungen wird diese Berechnung in Abschnitt 3.1.5 konkret ausgeführt.

Man beachte, dass bei CWENO nach (3.39) u_j^n und u_j^{n+1} auf dem selben Gitter liegen (im Gegensatz zum gestaffelten Lax-Friedrichs-Schema (3.6), welches u_j^n auf das „Zwischengitter“ $u_{j+1/2}^{n+1}$ abbildet). Dies erleichtert besonders die Behandlung der Randbedingungen und vermeidet die zusätzliche Diffusion, wenn (etwa zu diagnostischen Zwecken) ein Gitter in das andere transformiert wird.⁶

3.1.3 Zeitintegration

Der durch $\Delta t \rightarrow 0$ vorgenommene Übergang vom vlldiskreten zum semidiskreten Schema hat den weiteren Vorteil, dass das Verfahren zur zeitlichen Integration der Gleichung (3.39) nun beliebig gewählt werden kann. Im vorliegenden Fall kommt ein Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung zum Einsatz. In der speziellen Formulierung

⁶In der Regel ist es auch nötig, beide Gitter durch künstliche Diffusion aneinander zu koppeln, um deren „Auseinanderlaufen“ zu verhindern [Otto 1990].

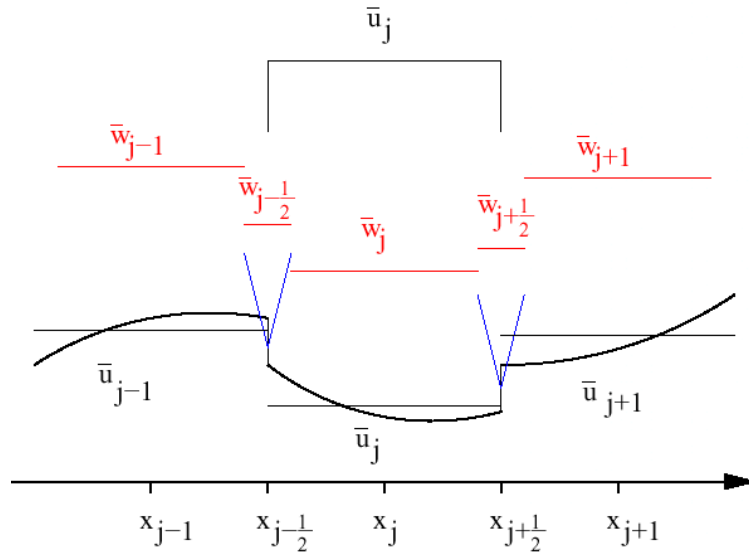


Abbildung 3.1: Gültigkeitsbereiche der verschiedenen Rekonstruktionen in der (x, t) -Ebene. Erkennbar sind die Polynomrekonstruktionen P_j , die auf den Zellmittelwerten \bar{u}_j basieren. Auf den (außerhalb der keilförmigen Segmente gelegenen) stetigen Teilstücken entstehen neue Zellmittelwerte $\bar{w}_{j+1/2}$, die im nächsten Schritt auf das ursprüngliche Gitter projiziert werden. Bei Übergang vom volldiskreten zum semidiskreten Schema ist es tatsächlich nicht mehr erforderlich, die $\bar{w}_{j+1/2}$ explizit zu berechnen, da im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ die Breite ihrer Träger (keilförmige Zonen) gegen Null geht.

$$\bar{v} \leftarrow \bar{u}^n + \Delta t G(\bar{u}^n) \quad (3.41)$$

$$\bar{v} \leftarrow \frac{3}{4}\bar{u}^n + \frac{1}{4}\bar{v} + \frac{1}{4}\Delta t G(\bar{v}) \quad (3.42)$$

$$\bar{u}^{n+1} \leftarrow \frac{1}{3}\bar{u}^n + \frac{2}{3}\bar{v} + \frac{2}{3}\Delta t G(\bar{v}) \quad (3.43)$$

wird ausgenutzt, dass bei drei Funktionsaufrufen pro Zeitschritt für jede Variable nur jeweils ein zusätzliches Feld zur Zwischenspeicherung des Feldes \bar{u}^n erforderlich ist. (G steht dabei für die rechte Seite von (3.39). Es wird also punktweise die Differentialgleichung $\partial_t \bar{u}(t) = G[\bar{u}(t)]$ gelöst.)

3.1.4 Erweiterung 1D \rightarrow 3D

Die Erweiterung des beschriebenen ENO-Rekonstruktionsverfahrens für mehrdimensionale Gleichungen der Form

$$\partial_t u(\mathbf{r}, t) + \sum_{d \in \{x, y, z\}} \partial_d f_d[u(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (3.44)$$

muss als nichttrivial bezeichnet werden. Verschiedene Ansätze dazu wurden z. B. von Levy et al. [2000] vorgeschlagen. Balbás & Tadmor [2004] konstruierten ein CWENO-Verfahren beliebiger Ordnung in 2D und diskutieren Beispielrechnungen idealer MHD mit Rekonstruktionen dritter und vierter Ordnung. In der vorliegenden Arbeit folgen wir der Einfachheit halber der bereits von Kurganov & Levy [2000] favorisierten Alternative, die beschriebene 1D-Rekonstruktion nacheinander für jede der drei Richtungen durchzuführen und die so berechneten Flüsse als Summe in (3.39) zu verarbeiten. In diesem Fall muss einzig das zentrale Polynom (3.26) durch

$$\begin{aligned} P_C(x) = \bar{u}_{i,j,k}^n & - \frac{1}{12} (\bar{u}_{i+1,j,k}^n - 2\bar{u}_{i,j,k}^n + \bar{u}_{i-1,j,k}^n) \\ & - \frac{1}{12} (\bar{u}_{i,j+1,k}^n - 2\bar{u}_{i,j,k}^n + \bar{u}_{i,j-1,k}^n) \\ & - \frac{1}{12} (\bar{u}_{i,j,k+1}^n - 2\bar{u}_{i,j,k}^n + \bar{u}_{i,j,k-1}^n) \\ & + \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j+1,k}^n - \bar{u}_{i,j-1,k}^n) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) \\ & + (\bar{u}_{i,j+1,k}^n - \bar{u}_{i,j,k}^n + \bar{u}_{i,j-1,k}^n) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

ersetzt werden, um die Beiträge in den zusätzlichen Richtungen zu berücksichtigen.

3.1.5 Charakteristische Geschwindigkeiten

In diesem Abschnitt sollen die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten a_j berechnet werden, die für die Verwendung des semidiskreten CWENO-Schemas (3.39) erforderlich sind.

Die Quellterme gehen nicht in die Berechnung der Jacobi-Matrix ein. Daher können wir hier ebensogut $Q = 0$ annehmen, und wie in Abschnitt (2.5) beschrieben, die Energiegleichung durch die Adiabatangleichung $\partial_t(p/\rho^\gamma) = 0$ ersetzen. Mit der Notation des

vorherigen Abschnitts verbleiben danach

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \text{ und } f_x = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + (-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/2 + p \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Die resultierende Jacobi-Matrix des Systems (2.58 – 2.59) hat dann die folgende Gestalt:

$$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_x^2 + \gamma p/\rho & 2u_x & 0 & 0 & -B_x & B_y & B_z \\ -u_x u_y & u_y & u_x & 0 & -B_y & -B_x & 0 \\ -u_x u_z & u_z & 0 & u_x & -B_z & 0 & -B_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (u_y B_x - u_x B_y)/\rho & B_y/\rho & -B_x/\rho & 0 & -u_y & u_x & 0 \\ (u_z B_x - u_x B_z)/\rho & B_z/\rho & 0 & -B_x/\rho & -u_z & 0 & u_x \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Mit den Abkürzungen

$$c_s := \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (3.48)$$

$$v_{Ax} := \frac{B_x}{\sqrt{\rho}} \quad (3.49)$$

$$v_f := \sqrt{c^2 + \frac{B^2}{\rho}} \quad (3.50)$$

für Schallgeschwindigkeit c_s , (x -Komponente der) Alfvéngeschwindigkeit v_{Ax} und schnelle magnetosonische Geschwindigkeit v_f lauten die Eigenwerte der Jacobi-Matrix (3.47)

$$\lambda_1 = 0 \quad (3.51)$$

$$\lambda_{2,3} = v_{Ax} \pm v_x \quad (3.52)$$

$$\lambda_{4,5} = v_x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(v_f)^2 + \sqrt{(v_f)^4 - (2c_s v_{Ax})^2}} \quad (3.53)$$

$$\lambda_{6,7} = v_x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(v_f)^2 - \sqrt{(v_f)^4 - (2c_s v_{Ax})^2}}. \quad (3.54)$$

Der gesuchte Spektralradius ist also offenbar gegeben durch

$$\varrho_{\text{sp}}(\mathbf{J}_x) \equiv \max \{\lambda_i\} = \max \{\lambda_4, \lambda_5\} \quad (3.55)$$

und kann betragsmäßig durch

$$|u_x| + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(v_f)^2 + \sqrt{(v_f)^4 - (2c_s v_{Ax})^2}} \quad (3.56)$$

nach oben abgeschätzt werden. Dies ist die gesuchte obere Schranke für die Ausbreitungsgeschwindigkeit in x -Richtung. Die entsprechenden Formeln für die y - und z -Richtung ergeben sich in völliger Analogie.

3.1.6 Fazit: Vorteile von CWENO

Zusammenfassend besteht ein wesentlicher Vorteil von CWENO (und allgemein aller zentrierten Schemata) in der Tatsache, dass kein (exakter oder approximativer) Riemann-Löser erforderlich ist. Die Verallgemeinerung auf den multidimensionalen Fall wird dadurch wesentlich erleichtert, da für das mehrdimensionale Riemann-Problem keine exakte Lösung bekannt ist. Zudem minimiert CWENO bei mäßig hohem Rechenaufwand sowohl die numerisch bedingte Dissipation (durch die hohe Ordnung des Verfahrens in glatten Bereichen) als auch die Dispersion (durch die ENO-Rekonstruktion zur Reduzierung oszillatorischer Artefakte). Die Vermeidung gestaffelter Gitter ist ebenfalls als eine nicht zu unterschätzende Vereinfachung zu betrachten.

3.2 Tests

Zwischen der praktischen Implementierung eines numerischen Verfahrens in eine Rechnerumgebung und der Anwendung auf die interessierende physikalische Fragestellung liegt der unverzichtbare Zwischenschritt der *Tests*. Deren Sinn liegt — neben dem Aufdecken von Programmierfehlern, etc. — darin, einen Eindruck von der Güte der erhaltenen Lösungen zu liefern, und den Anwender über Art und Ausmaß der stets vorhandenen numerischen Artefakte zu informieren. Auf Grund ihrer großen Bedeutung existiert mittlerweile eine beachtliche Auswahl von Testproblemen mit bekannter Lösung (z. B. [Stone et al. 1992, Fryxell et al. 2000]), die mit den Ergebnissen des zu testenden Codes zu vergleichen sind. Im Folgenden sollen einige der mit CWENO durchgeführten Tests diskutiert werden.

3.2.1 Lineare Advektion (1D)

Um einen Eindruck von der Qualität der Reproduktion von Strömungsproblemen in planarer Geometrie zu erhalten, betrachten wir das reduzierte System partieller Differentialgleichungen für Dichte $\rho = \rho(x, t)$ und Geschwindigkeit $u = u(x, t)$

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \quad (3.57)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = 0, \quad (3.58)$$

welches durch Einsetzen von $g \equiv 0$, $p \equiv 0$ und $B \equiv 0$ in die eindimensionale Version der Gleichungen (2.57) und (2.58) entsteht. Bei Verwendung der Anfangsbedingungen

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \text{und} \quad u(x, 0) = u_0 \quad (3.59)$$

kann leicht gezeigt werden, dass dieses so genannte *Advektionsproblem* die analytische Lösung

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - u_0 t) \quad (3.60)$$

$$u(x, t) = u_0 \quad (3.61)$$

besitzt. Das Dichteprofil wird also unter Beibehaltung seiner ursprünglichen Form mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit u_0 transportiert, weshalb jede wie auch immer geartete Abweichung von der anfänglichen Form des Profils ein numerisches Artefakt sein muss. Advektionstests dieser Art wurden u.a. von Boris & Book [1973] vorgeschlagen. Abb. 3.2 zeigt die Ergebnisse von Advektionsläufen, die für die Kastenfunktion

$$\rho_0(x) := \begin{cases} 1, 2 & : |x| \leq 1/3 \\ 1, 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (3.62)$$

als Anfangsprofil für verschiedene räumliche Auflösungen gewonnen wurden. Man beachte hier insbesondere das völlige Fehlen der von konventionellen Verfahren bekannten oszillatorischen Artefakte.⁷ Die Deformation des Dichtepulses spiegelt den Effekt numerischer Diffusion an dem an der Stufe vorliegenden unphysikalisch starken Gradienten wieder. Die im rechten Diagramm von Abb. 3.2 erkennbare „Dissipationszone“ erstreckt sich nur über wenige Gitterzellen und wird zudem bei steigender Auflösung merklich kleiner.

3.2.2 Lineare Advektion (2D)

Bei den Betrachtungen des letzten Abschnittes waren sowohl die Richtung von u als auch die des Gradienten von ρ parallel zur x -Achse (oder einer der anderen Koordinatenachsen) orientiert, so dass für diesen (auch numerisch) eindimensionalen Fall nur wenige Gitterpunkte in y - und z -Richtung erforderlich waren.⁸ Da aber die erzielten Ergebnisse (zumindest im Falle hinreichend hoher Auflösung) unabhängig vom konkret gewählten Koordinatensystem sein sollten, soll nun eine Variante des Advektionsproblem betrachtet

⁷Einen Eindruck von der typischen Gestalt solch artifizierlicher Oszillationen gewinnt man z. B. aus dem linken Teilbild der Abbildung C.1, auch wenn diese im dort geschilderten Fall aus Anschauungsgründen mit CWENO selbst erzeugt wurden.

⁸Die Natur der dreidimensionalen Implementierung bedingt, dass auch in einer invarianten Richtung mehr als eine Zelle vorzusehen ist, da es andernfalls in diesen Richtungen zu Schwierigkeiten bei der Berechnung der Flüsse kommen würde. Auch wird die Behandlung der Randbedingungen komplizierter, wenn in einer Richtung weniger Zellen im Gebiet als Randzellen vorhanden sind. Nur bei ausdrücklichem Verzicht auf mehrdimensionale Codierung könnte hiervon abgesehen werden.

werden, bei der die Symmetrieebene des Systems mit der x -Achse einen Winkel $\vartheta \neq 0^\circ$ einschließt. Obgleich die physikalische Situation natürlich unverändert bleibt, stehen dem Code nun zunächst keine *a priori*-Informationen über die Symmetrie des Problems mehr zur Verfügung. Dennoch müssen die generierten Daten ein korrektes Abbild der erwarteten Profile im rotierten Bezugssystem liefern. Wie Abb. 3.3 zeigt, ist dies in der Tat der Fall; die durch die Rotation des Bezugssystems hervorgerufenen Abweichungen liegen jeweils im Prozentbereich. (Man beachte, dass die dort gezeigten Graphen schräge Schnitte durch das Rechengebiet darstellen, die im Allgemeinen nur wenige Gitterpunkte exakt schneiden. Die dadurch notwendig gewordene Interpolation erklärt zum Teil den sehr glatten Verlauf der Profile.)

Während die in den Abbildungen 3.2 und 3.3 dargestellten Situationen dasselbe physikalische Problem beschreiben, sind die zugrundeliegenden numerischen Probleme also durchaus sehr verschieden.

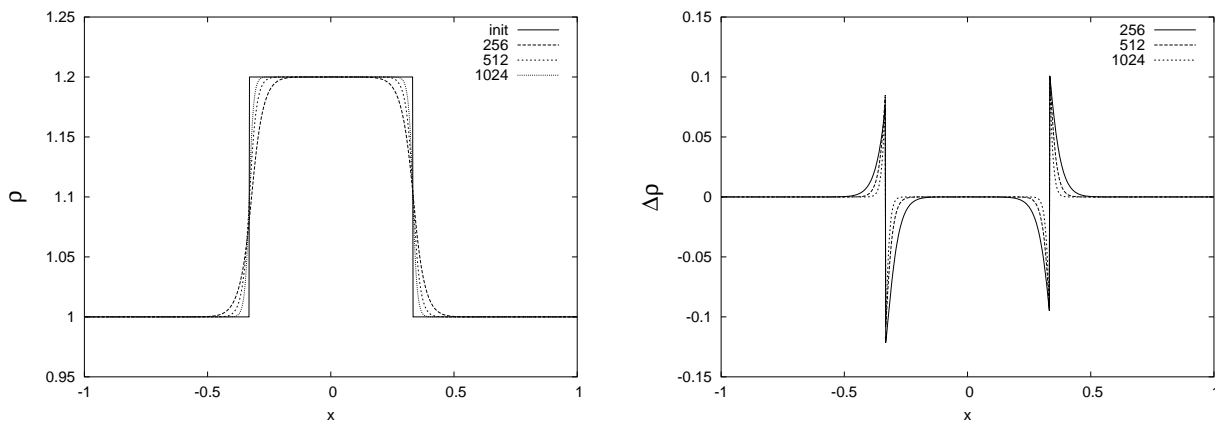


Abbildung 3.2: Advektionsläufe mit dem Anfangsprofil (3.62) und $u_0 = 0,5$ auf dem periodischen Gebiet $x \in [-1, 1]$. Links: Profile zur Zeit $t = 4$ (d. h. nach einem vollständigen Durchlauf durch das Simulationsgebiet, gepunktet) für verschiedene Werte der räumlichen Auflösung (256, 512 und 1024 Gitterpunkte), im Vergleich zum Ausgangsprofil (3.62) (durchgezogen). Rechts: Punktweise berechnete Abweichung von der idealen (d. h. unveränderten) Form.

3.2.3 Das hydrodynamische Stoßrohr

Das hydrodynamische Stoßrohr-Problem (*shock tube problem*, Riemann-Problem) wurde als numerisches Testproblem erstmals von Sod [1978] verwandt: zwei Bereiche, in denen jeweils verschiedene homogene Gasdichten und -drücke vorliegen, sind durch eine planare

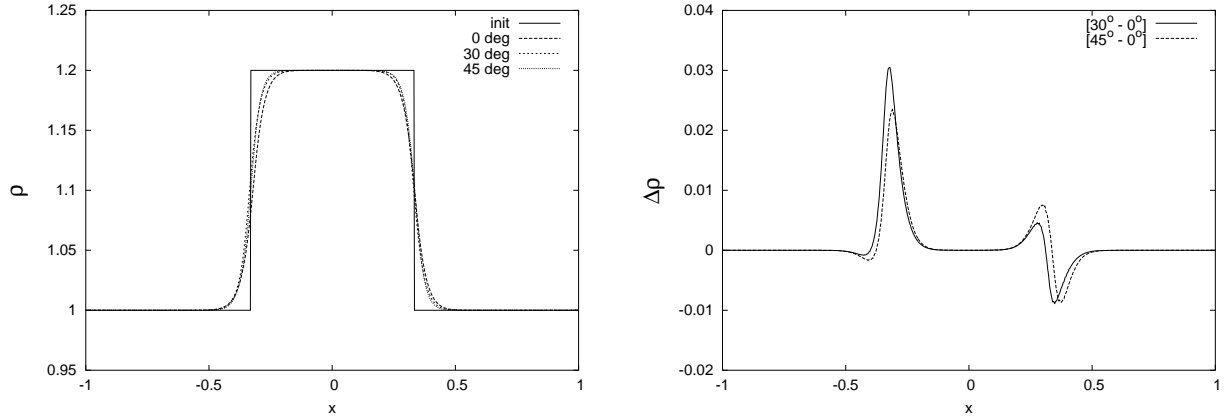


Abbildung 3.3: Advektionsläufe mit Orientierungen von $\vartheta \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$ gegen die x -Koordinatenrichtung. Die räumliche Auflösung entspricht 256 Gitterpunkten in Bewegungsrichtung (also $256/\cos \vartheta$ bzw. $256/\sin \vartheta$ in x - bzw. y -Richtung.) Links: Dichteprofile nach einem kompletten Durchlauf durch das Gebiet. Rechts: Absolute Abweichung der Profile für $\vartheta \in \{30^\circ, 45^\circ\}$ vom Referenzprofil $\vartheta = 0^\circ$. Die Parameter sind identisch mit den in Abschnitt 3.2.1 verwendeten.

Membran getrennt. Für $t < 0$ ist das Gas in beiden Halbräumen in Ruhe. Wird zur Zeit $t = 0$ die Membran plötzlich entfernt, kommt es zur Ausbildung verschiedener Diskontinuitäten, die sich mit charakteristischen Geschwindigkeiten von der ursprünglichen Grenze beider Gebiete entfernen. Die resultierenden zeitabhängigen (aber selbstähnlichen⁹) Profile können mit der bekannten semi-analytischen Lösung (siehe z. B. [Toro 1996]) verglichen werden und geben so Auskunft über die Präzision, mit der der Code Diskontinuitäten abzubilden vermag.

Abbildung 3.4 zeigt exemplarisch das sich entwickelnde Druckprofil für das sog. *starke Stoßrohr* (strong shock tube, [Calder et al. 2002]), dessen Anfangsbedingung

$$[\rho(x), p(x)] = \begin{cases} [10, 1] & : x < 0 \\ [100, 10] & : x \geq 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

noch etwas extremere Gradienten beinhaltet als die des klassischen Stoßrohr-Problems. Bei diesem Beispiel tritt die in Abschnitt 2.3.1 angesprochene Diskrepanz zwischen einer Formulierung der dynamischen Gleichungen bei verschiedenen Variablen (hier Energiedichte und Druck) besonders deutlich hervor: Die Beschreibung durch die Dichten von Erhaltungsgrößen (hier der Gesamtenergie) liefert eine korrekte Wiedergabe der Lösung auch an Diskontinuitäten, während mit einer nicht erhaltenen Größe (hier der Druck) unter ansonsten identischen Bedingungen Ergebnisse produziert werden, die in unakzeptabler Weise von der exakten Lösung abweichen.

⁹Darunter ist hier zu verstehen, dass Druck und Dichte nur vom Quotienten x/t abhängen.

Weitere erfolgreiche Testläufe mit CWENO, die sich insbesondere des von Brio & Wu [1988] um Magnetfelder erweiterten Stoßrohr-Problems bedienen, wurden von Kleimann et al. [2004] durchgeführt; dort kommt zusätzlich ein Verfahren zur adaptiven Gitterverfeinerung zum Einsatz.

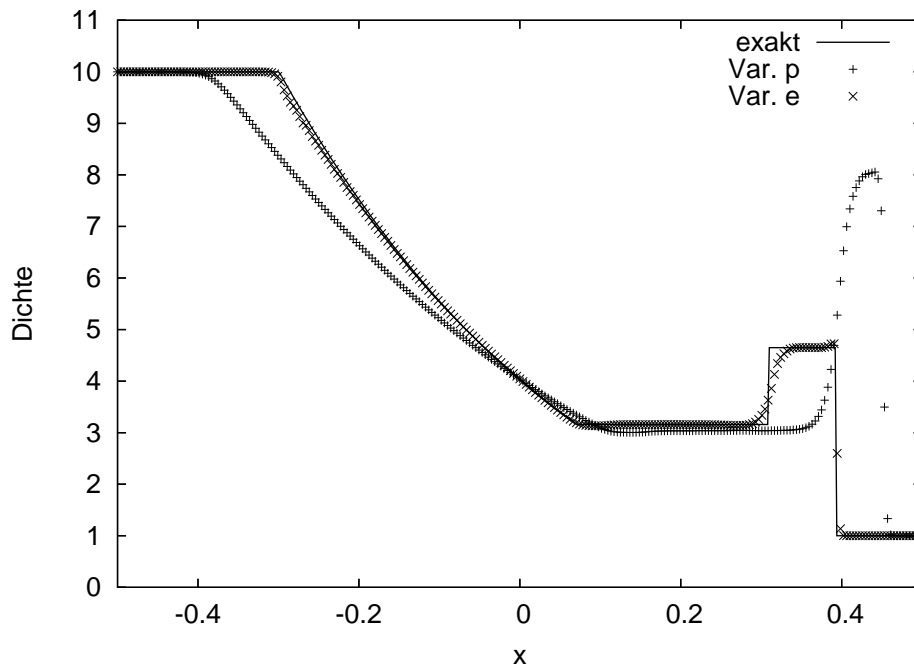


Abbildung 3.4: Dichteprofil des SOD-Problems zur Zeit $t = 0,08$, jeweils berechnet mit Druck p (+) und Energiedichte e (×) als Variable. Die e -Kurve gibt die exakte Lösung (durchgezogene Kurve) bereits bei der hier gezeigten Auflösung von 256 Gitterpunkten mit annehmbarer Genauigkeit wieder, während die p -Kurve in markanter Weise davon abweicht.

3.2.4 Strömung quer zum Magnetfeld

Als einfaches Testproblem für die Fähigkeit des Codes, auch Konfigurationen mit einer Resistivität $\eta \neq 0$ korrekt zu reproduzieren, wird nun die folgende Situation betrachtet: Zwischen zwei planparallelen Platten bei $z \in \{0, 1\}$ befindet sich ein inkompressibles Fluid, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u} = \sin(\pi z) \mathbf{e}_x$ in positive x -Richtung bewegt. Zur Zeit $t = 0$ sei das Fluid senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung von einem homogenen Magnetfeld der Form $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ durchdrungen. Anders als in allen anderen betrachteten Situationen werden Dichte und Geschwindigkeit an jedem Ort zeitlich konstant gehalten; es handelt sich also um ein *magnetokinematisches* Problem, das keine Rückwirkung des

Magnetfeldes auf das Fluid berücksichtigt.¹⁰ Dies entspricht dem Grenzfall, in welchem die Energiedichte $B^2/2$ des magnetischen Feldes sehr klein gegen die kinetische Energiedichte $\rho u^2/2$ ist. Das ursprünglich homogene Magnetfeld wird nun durch die Wirkung der Strömung in charakteristischer Weise verformt. Anders als im idealen Fall existiert für diesen Vorgang ein stationärer Endzustand, der mit der Randbedingung $B_x|_{z=0} = 0 = B_x|_{z=1}$ als

$$\mathbf{B}(z) = B_0 \left[\frac{\cos(\pi z) + 2z - 1}{\eta \pi} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \right] \quad (3.64)$$

geschrieben werden kann [Kippenhahn & Möllenhoff 1975]; die bei $z = 1/2$ auftretende maximale Auslenkung der Feldlinien kann zu

$$\delta x = \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.65)$$

bestimmt werden. Abbildung 3.5 zeigt einige Momentaufnahmen der zeitlichen Entwicklung des Feldlinienbildes.

3.2.5 Alfvén-Flügel

Als abschließendes Beispiel eines astrophysikalisch motivierten Testfalles soll nun die Bewegung eines massiven Hindernisses durch ein magnetisiertes Plasma betrachtet werden. Drell et al. [1965] konnten zeigen, dass es in dieser Situation zur Erzeugung stehender MHD-Wellen in der (\mathbf{u}, \mathbf{B}) -Ebene kommt. (Ein verfeinertes Modell (mit Berücksichtigung der Massen-, Impuls- und Energiebilanz) wurde von Wright & Schwarz [1990] vorgelegt.) Dieses Phänomen spielt z. B. eine wesentliche Rolle bei der Wechselwirkung der Jupitermagnetosphäre mit seinem Mond IO [Neubauer 1980, Linker et al. 1988] und der Ionosphäre der Erde mit künstlichen Satelliten (z. B. [Kopp & Schröder 1998]).

Eine anfänglich homogene Strömung $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_x$ der Dichte ρ_0 wird senkrecht von einem ebenfalls homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ durchsetzt; die Randbedingungen sind periodisch in allen Richtungen. Im Mittelpunkt des Simulationsvolumens wird innerhalb eines kugelförmigen Bereichs die Geschwindigkeit bei jedem Zeitschritt um den Faktor

$$\delta(r, t) = 1 - \min\{1, t\} [1 - \tanh(4 \max\{0, r - 1\})] \quad (3.66)$$

vermindert. (siehe Abbildung 3.6 unten links) Auf diese Weise wird dort für die Strömung ein massives Hindernis erzeugt, und es kommt in der Folge zur Ausbreitung sog. *Alfvén-Flügel*, pfeilförmige Strukturen, die sich (im Bezugssystem des Hindernisses) entlang der beiden Charakteristiken der Alfvén- bzw. *langsamen magnetosonischen Mode*

$$\mathbf{c}_{\pm} := \begin{cases} \mathbf{u} \pm (\mathbf{B}/\sqrt{\rho}) & : \text{ (Geschwindigkeit) } \\ \mathbf{u} \pm (\mathbf{B}/B) \min\{c_s, B/\sqrt{\rho}\} & : \text{ (Gasdruck) } \end{cases} \quad (3.67)$$

¹⁰Die stationäre Lösung des entsprechenden selbstkonsistenten Problems wurde erstmals von Hartmann [1937] angegeben. Dort wird zusätzlich ein Viskositätsterm $\nu \rho \nabla^2 \mathbf{u}$ in der Impulsbilanz verwendet; der Grenzfall $\nu \rightarrow 0$ führt auf $\partial_z v_x(z) = 0 = \partial_z B_x(z)$ und ist als Testproblem wenig interessant.

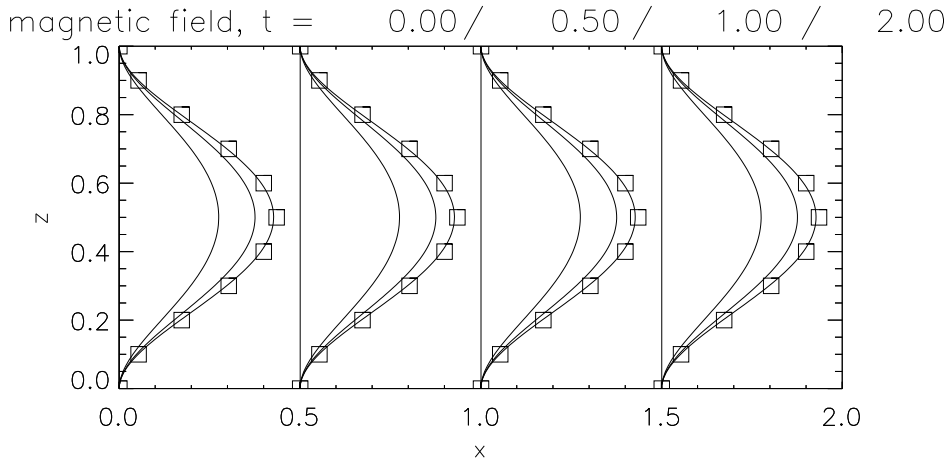


Abbildung 3.5: Ausgewählte Feldlinien des vereinfachten (magnetokinematischen) Hartmann-Problems aus Abschnitt 3.2.4 zu den Zeitpunkten $t \in \{0, 1/2, 1, 2\}$. Der Endzustand (3.64) ist durch die quadratischen Symbole gekennzeichnet. Die zunehmende Deformation der anfänglich linearen Feldlinien und ihre Konvergenz zum stationären Zustand ist deutlich erkennbar. Die Auflösung beträgt in jeder Richtung 100 Gitterzellen pro Längeneinheit (also 200×100 Zellen insgesamt, wobei wegen der Invarianz in x -Richtung nur die Auflösung in z bedeutsam ist). Der Rand in x -Richtung ist periodisch, in z -Richtung wird am Rand \mathbf{B} festgehalten.

in der (\mathbf{u}, \mathbf{B}) -Ebene (hier also der (x, z) -Ebene) ausbreiten. Abbildung 3.6 zeigt die Konturen von Druck und Geschwindigkeit, sowie die Feldlinien des zugehörigen Magnetfeldes zur Zeit $t = 19,5$ nach Einsetzen der Abbremsung. Die Parameter sind $\rho_0 = 1$, $u_0 = 1$, $B_0 = 1$, $p_0 = 0,5$; die Auflösung beträgt 60^3 Zellen. Die Deformation der Feldlinien beschränkt sich ausschließlich auf den Bereich der Alfvén-Flügel, die in allen drei Abbildungen klar hervortreten. Obgleich für das betrachtete Gesamtsystem keine exakte Lösung bekannt ist, können an diesem schon recht komplexen Beispiel doch wesentliche physikalische Aspekte (vor allem Geometrie, Morphologie, Ausbreitungsgeschwindigkeiten) eindrucksvoll verifiziert werden.

3.3 Numerische Resistivität

Die in Abschnitt 2.3.3 vorgenommene Bevorzugung *idealer* MHD (also der Setzung $\eta \equiv 0$) wurde dort mit der Dominanz der stets vorhandenen numerischen Resistivität η_{num} über jeglichen astrophysikalisch motivierten Wert von η begründet. Zur Untermauerung der Sinnhaftigkeit dieser Annahme soll nun versucht werden, den für den verwendeten Algo-

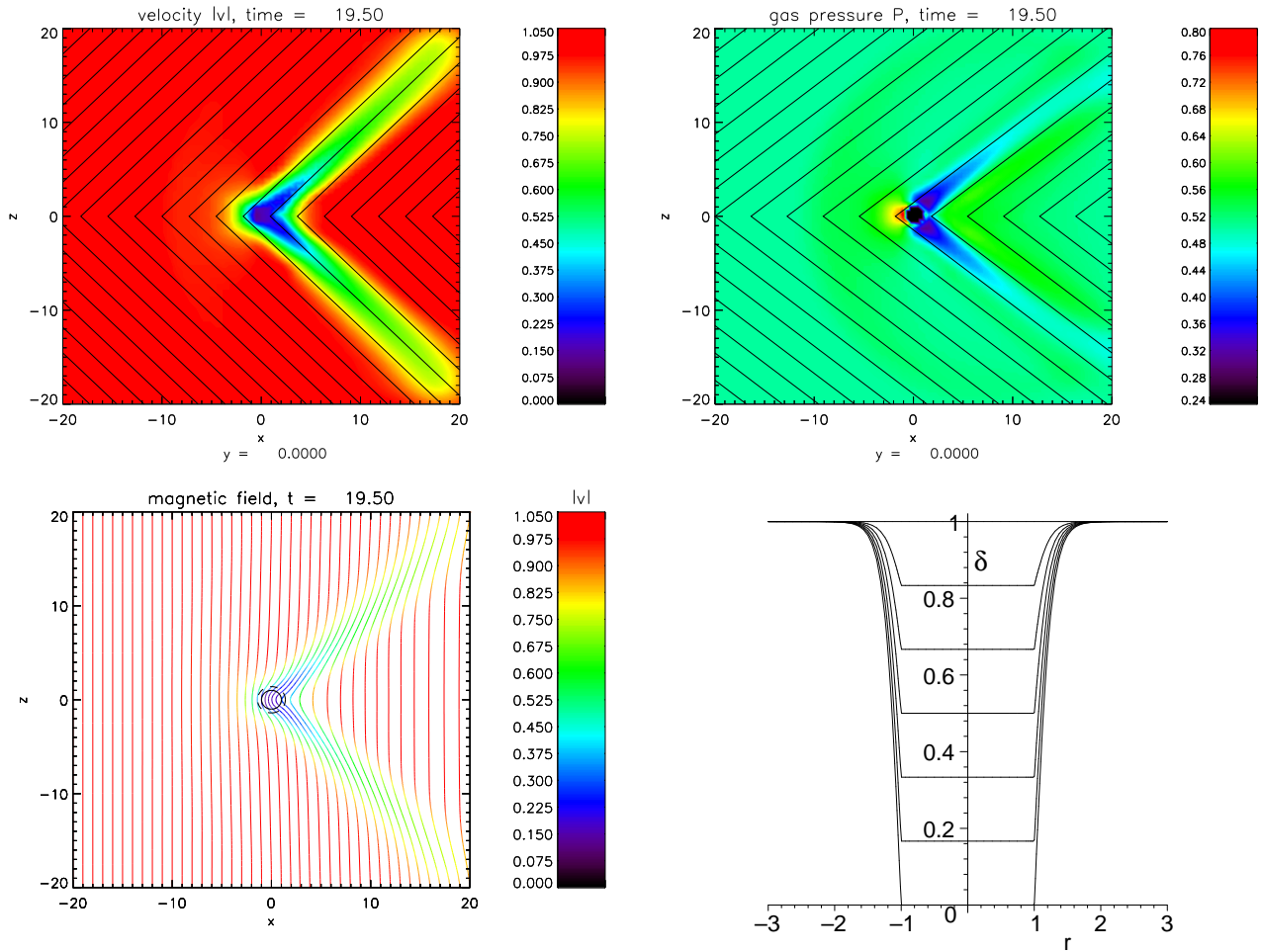


Abbildung 3.6: Oben: Alfvén-Flügel in Geschwindigkeit (links) und Gasdruck (rechts) in der (x, z) -Ebene bei $t = 19,5$. Die Ausbreitung geschieht (im Bezugssystem des Hindernisses) entlang der Alfvén-Charakteristiken (durchgezogene Linien) mit der (Galilei-transformierten) Geschwindigkeit $u_p := \sqrt{u^2 + (c_s)^2}$ (Druck) bzw. $u_v := \sqrt{u^2 + B^2/\rho}$ (Geschwindigkeit). Ebenfalls deutlich erkennbar ist die Druckerhöhung in Anströmrichtung vor dem Hindernis, die sich dort durch die Komprimierung des gestauten Plasmas bildet. Wegen $u_v = \sqrt{2}$ und $u_p = \sqrt{3/2}$ erreichen die Flügel den Rand des dargestellten Gebietes zur Zeit $t_v = 20\sqrt{2}/u_v = 20$ bzw. $t_p = 20\sqrt{2}/u_p = 40/\sqrt{3} \approx 23$, was sich vor allem in der linken Darstellung gut verifizieren lässt. Untere Reihe, links: Verlauf der Magnetfeldlinien für die obige Situation. Die Farbe entspricht (wie im Bild darüber) dem Betrag der Geschwindigkeit. Rechts: Das zur Abbremsung verwandte Profil (3.66) für $t \in [0, 1]$ in sechs äquidistanten Schritten.

rithmus gültigen Wert von η_{num} abzuschätzen.

3.3.1 Diskretisierungsfehler

Sollen Differenzialgleichungen durch Diskretisierung angenähert und gelöst werden, so sind allgemein zwei Fehlerquellen von Bedeutung:

- *Rundungsfehler* entstehen dadurch, dass reelle Werte rechnerintern durch Dezimalzahlen mit einer endlichen Anzahl von Stellen repräsentiert werden.
- *Abschneidefehler* haben ihre Ursache in dem Umstand, dass Ableitungen durch Taylorentwicklungen von Differenzenquotienten angenähert werden, die aus praktischen Gründen nur wenige Summanden umfassen können.

Erstere sind i. d. R. durch die Hardware vorgegeben, letztere können durch die Auswahl des numerischen Verfahrens beeinflusst werden. Betrachten wir also die Abschneidefehler etwas eingehender: Bezeichnet

$$\mathcal{D} : u^n \mapsto u^{n+1} \quad (3.68)$$

den (diskreten) Operator, der die diskrete Lösung u_j^n zur Zeit $t = t^n$ auf jene zur Zeit $t = t^{n+1}$ abbildet, so ist der *lokale Abschneidefehler* (local truncation error, LTE) durch

$$\text{LTE}_{\mathcal{D}} := u_e^{n+1} - \mathcal{D}(u_e^n) \quad (3.69)$$

definiert, wobei u_e die exakte Lösung bezeichnet. Der LTE misst also die Abweichung von der exakten Lösung, die sich nach einem Zeitschritt eingestellt hat. Ist \mathcal{D} ein Verfahren der Ordnung l , so ist $\text{LTE}_{\mathcal{D}}$ von der Gestalt

$$u_{e,j}^{n+1} - [\mathcal{D}(u_e^n)]_j = \Delta t \left[C (\Delta x)^l \frac{\partial^{l+1} u_e}{\partial x^{l+1}} \Big|_{(j\Delta x, n\Delta t)} + \mathcal{O}[(\Delta x)^{l+1}] \right] \quad (3.70)$$

mit einer Konstanten C , die für einfache Verfahren explizit angegeben werden kann; siehe dazu etwa [Colella & Puckett 1994]. Die mittels \mathcal{D} produzierte numerische Lösung verhält sich demnach näherungsweise so, als wäre der zu lösenden Gleichung ein Term $\propto \partial^{l+1} u / \partial x^{l+1}$ hinzugefügt worden. Das qualitative Erscheinungsbild der dadurch verursachten numerischen Artefakte steht daher in einem engen Zusammenhang mit der Ordnung l des Verfahrens. Dies soll an folgendem Beispiel kurz veranschaulicht werden.

3.3.2 Dispersion gegenüber Diffusion

Betrachten wir Fletcher [1991] folgend die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (3.71)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad (3.72)$$

welche Lösungen der Form

$$f(x, t) = f_0 \exp[-\gamma(k)t] \cos[k(x - u(k)t)] \quad (3.73)$$

mit $k \in \mathbb{R}$ zulassen. Für $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ erhalten wir die bekannte Advektionsgleichung, welche das Profil $f(x)$ transportiert, ohne dessen Form zu ändern.

Gleichung (3.73) beschreibt eine ebene Welle, die sich mit der Geschwindigkeit $v(k)$ in der positiven x -Richtung ausbreitet, während sich ihre ursprüngliche Amplitude f_0 nach der Zeit $1/\gamma(k)$ um den Faktor $1/e$ verringert hat. Durch Einsetzen von (3.73) finden wir

$$\begin{aligned} u(k) = v & \quad \wedge \quad \gamma(k) = \alpha k^2 & \text{für (3.71)} \\ u(k) = v - \beta k^2 & \quad \wedge \quad \gamma(k) = 0 & \text{für (3.72)} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Der α -Term lässt also die Ausbreitungsgeschwindigkeit unverändert, bewirkt aber einen Zerfall des Profils (*Diffusion*), der wegen der k^2 -Abhängigkeit für kurzweilige Profile besonders ausgeprägt ist. Der β -Term hingegen, der den Einfluss des Störterms dritter Ordnung steuert, bewirkt *Dispersion* (d. h. ein Auseinanderlaufen des Profils), da die kurzweiligen Moden sich nun langsamer ausbreiten. Allgemein haben Verfahren gerader Ordnung Dispersion, Verfahren ungerader Ordnung (mit Korrekturterm der Form $(-1)^m \nabla^{2m} f$) dagegen Diffusion zur Folge. Numerisch bedingte Dispersion äußert sich in Oszillationen in der Nähe starker Gradienten, Diffusion dagegen in einer scheinbar erhöhten Viskosität bzw. Resistivität.

3.3.3 Strategie

Da CWENO (zumindest in hinreichend „glatten“ Gebieten) ein Verfahren dritter Ordnung darstellt, erwarten wir, dass die Wirkung des Abschneidefehlers sich in der Induktionsgleichung durch einen diffusiven Korrekturterm der Form $-\zeta_{\text{num}} \nabla^4 \mathbf{B}$ beschreiben lässt. Die zur Abschätzung von ζ_{num} zugrunde gelegte Idee ist es, einen möglichst einfachen Testfall zu betrachten, für den die modifizierte Induktionsgleichung

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \zeta \nabla^4 \mathbf{B} \quad (3.75)$$

eine nichttriviale, analytisch darstellbare Lösung besitzt. Durch Vergleich mit den Ergebnissen der zugehörigen Simulation (in welcher der Code Gleichung (3.75) *ohne* explizite Berücksichtigung des resistiven Terms $\propto \zeta$ löst) kann dann auf denjenigen Wert von ζ_{num} geschlossen werden, bei dem die maximale Übereinstimmung zwischen exakter und numerisch gewonnener Lösung besteht.

3.3.4 Testszenario

Zunächst ist klar, dass hierfür alle statischen Probleme ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) ungeeignet sind, da der Algorithmus nur die Lösung $\partial_t B = 0$ liefern kann. (Sämtliche Terme auf der rechten Seite von (3.39) berechnen sich aus $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, skalieren daher mit $\|\mathbf{u}\|$ und verschwinden für $\|\mathbf{u}\| = 0$.) Daher betrachten wir im Folgenden das an (3.57 – 3.58) angelehnte eindimensionale Advektionsystem

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \quad (3.76)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = \partial_x(-p + B^2/2) \quad (3.77)$$

$$\partial_t B - \partial_x(u B) = -\zeta \partial_{xxxx} B, \quad (3.78)$$

welches wir aus dem allgemeinen System (2.57 – 2.60) für den Spezialfall

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u(x, t) \mathbf{e}_x, & \rho &= \rho(x, t), \\ \mathbf{B} &= B(x, t) \mathbf{e}_y, & p &= p(x, t), \\ \mathbf{g} &= \mathbf{0}, & \gamma &= 1, \\ Q &= 0, & c_s &= 1 \end{aligned} \quad (3.79)$$

und unter Hinzufügung des Terms $-\zeta \partial_{xxxx} B$ gemäß (3.75) erhalten. Wählen wir als Anfangsbedingung

$$\rho(x, 0) = \rho_0 - \beta(x)^2/2 \quad (3.80)$$

$$u(x, 0) = u_{\text{adv}} \quad (3.81)$$

$$B(x, 0) = \beta(x), \quad (3.82)$$

so wird der magnetische Druck wegen $p = \rho$ exakt durch den thermischen Druck kompensiert, und die auf das System einwirkende Gesamtkraftdichte verschwindet. Analog zur hydrodynamischen Advektion (siehe Abschnitt 3.2.1) gilt dann für alle t

$$\rho(x, t) = \rho(x - u_{\text{adv}} t, 0) \quad (3.83)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) = u_{\text{adv}}. \quad (3.84)$$

Durch die Galilei-Transformation

$$x' = x - u_{\text{adv}} t \quad (3.85)$$

$$t' = t \quad (3.86)$$

gehen wir nun in das mit u_{adv} mitbewegte Bezugssystem über, wo die verbleibende DGL (3.78) des Magnetfeldes nun

$$\frac{\partial B'(x', t)}{\partial t} = -\zeta \frac{\partial^4 B'(x', t)}{\partial (x')^4} \quad (3.87)$$

lautet.

3.3.5 Wahl der Testfunktion

Die Endlichkeit des periodischen Rechengebietes $\mathcal{L} = [-\lambda/2, \lambda/2]$ impliziert, dass $B'(x', t)$ als periodisch in x' angenommen und daher durch die Fourier-Reihe

$$B'(x', t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \cos(k_n x' - \varphi_n) \quad \text{mit} \quad k_n := \frac{2\pi}{\lambda} n \quad (3.88)$$

dargestellt werden kann. Somit scheint es naheliegend, die Startfunktion

$$\beta(x) = \cos(k x) \quad (3.89)$$

für einige ausgewählte Werte von k zu betrachten.
Einsetzen des Separationsansatzes

$$B(x, t) = s(x) q(t) \quad (3.90)$$

in (3.87) führt auf

$$-\frac{1}{\zeta} \frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{s'''(x)}{s(x)} =: A^4 \quad (3.91)$$

mit den Einzellösungen

$$s(x) = s_1 \exp(Ax) + s_2 \exp(-Ax) + s_3 \sin(Ax) + s_4 \cos(Ax) \quad (3.92)$$

$$q(t) = q(0) \exp(-\zeta A^4 t), \quad (3.93)$$

wobei statt x' wieder x geschrieben wurde.¹¹ Die allgemeine Lösung ist also

$$B(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\zeta A_n^4 t) [s_{1,n} \exp(A_n x) + s_{2,n} \exp(-A_n x) + s_{3,n} \sin(A_n x) + s_{4,n} \cos(A_n x)] \quad (3.94)$$

Für $t = 0$ muss die Startlösung (3.89) reproduziert werden. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisfunktionen in (3.92) bedeutet das für die (noch) freien Konstanten in (3.94)

$$\left. \begin{aligned} s_{1,n} = s_{2,n} = s_{3,n} &= 0 \\ s_{4,n} &= \delta_{n0} \\ A_n &= k \end{aligned} \right\} \forall n, \quad (3.95)$$

was schließlich auf

$$B(x, t) = \exp(-k^4 \zeta t) \cos(k x) \quad (3.96)$$

als Lösung für die zeitliche Entwicklung von (3.89) führt.

¹¹Dies ist unkritisch, da ab hier nur noch Zeitpunkte betrachtet werden sollen, bei denen $x = x'$ ist.

| Δt | N | α_N | $\alpha_N N^3$ |
|------------|-----|------------|----------------|
| 0,004 | 100 | 0,000776 | 776,0 |
| 0,005 | 80 | 0,001534 | 785,4 |
| 0,008 | 50 | 0,006287 | 785,9 |
| 0,01 | 40 | 0,011880 | 760,3 |
| 0,02 | 20 | 0,072803 | 582,4 |
| 0,025 | 16 | 0,130355 | 533,9 |
| 0,04 | 10 | 0,493148 | 493,1 |
| 0,05 | 8 | 0,901763 | 461,7 |

Tabelle 3.1: Parameter der magnetischen Advektionsläufe und die unter Verwendung der Fitfunktion (3.103) ermittelten Zerfallskonstanten α_N . Für ein Verfahren exakt dritter Ordnung sollte $\alpha_N N^3$ in etwa gleich einer globalen Konstanten sein; die Abweichung von dieser angenommenen Skalierung zu kleinen N hin wird in der letzten Spalte deutlich.

3.3.6 Ergebnisse

Zugfolge der allseitig periodischen Randbedingungen kann das Rechengebiet auf eine volle Wellenlänge in x beschränkt werden, die durch N Zellen der Größe Δx überdeckt wird. Daher ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{N \Delta x}. \quad (3.97)$$

Für den in Tabelle 3.1 genannten Satz an Auflösungen N wird das System (3.76 – 3.78) jeweils für 20 Advektionsperioden simuliert. Indem das Produkt $N \Delta t = 0,4$ konstant gehalten wird, ist nach Gleichung (3.3) der (anfängliche) CFL-Wert

$$C_{\text{CFL}} = (\Delta t / \Delta x) v_f = (1 + 2\sqrt{3})/10 \approx 0,446 \quad (3.98)$$

unabhängig von N . Zu den Zeitpunkten

$$t^n := n P_{\text{adv}} = n \frac{\lambda}{v_{\text{adv}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.99)$$

passiert das Profil seine Ausgangslage, und (3.96) zufolge ist dann insgesamt eine Amplitudenverminderung um den Faktor

$$d_n := \frac{B(x, t^n)}{B(x, 0)} = \exp(-\zeta k^4 P_{\text{adv}} n) \quad (3.100)$$

zu erwarten.

Die direkte Quotientenbildung gemäß (3.100) ist ungünstig wegen der Nulldurchgänge von $B(x, 0)$ bei $kx = \pm\pi/2$. Daher wird statt dessen die Funktion

$$b_{\text{fit}}(x, d_n) := d_n \cos(kx) \quad (3.101)$$

mit dem freien Parameter d_n an das Profil angefitet, d. h. für jedes n wird derjenige Wert von d_n bestimmt, der

$$\sum_{x_i \in \mathcal{L}} |B(x_i, t^n) - b_{\text{fit}}(x_i, d_n)|^2 \quad (3.102)$$

minimiert. Abbildung 3.7 stellt als Beispiel die Profile $B(x, t^n)$ und die so ermittelten Abklingfaktoren d_n dar.

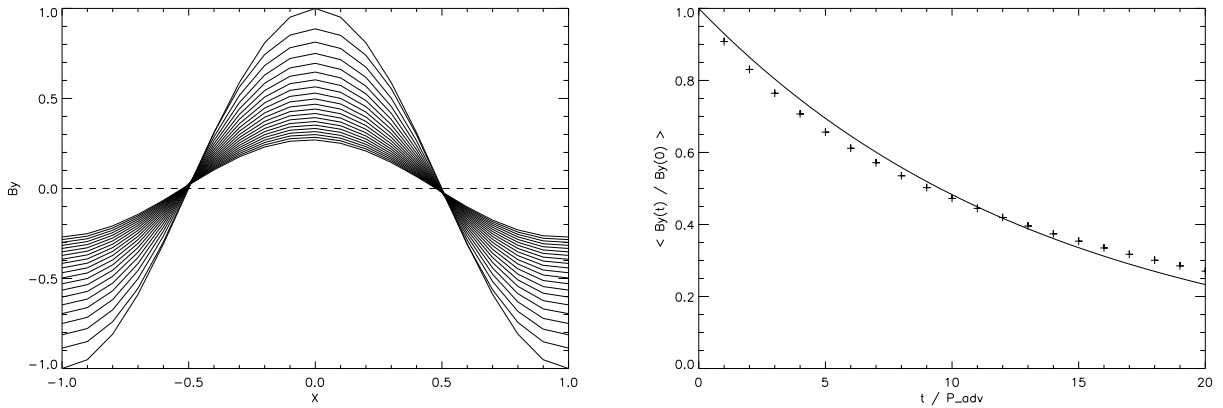


Abbildung 3.7: Links: Das advektierte B -Profil zu den Zeitpunkten $t^n = n P_{\text{adv}}$, $n \in \{0, 1, \dots, 20\}$ bei einer Auflösung von $N = 20$ Gitterzellen und der Advektionsgeschwindigkeit $v_{\text{adv}} = 0,5$. Rechts: Relativer Abfall der mittleren Amplitude von B über der Zeit (ebenfalls in Einheiten von P_{adv}). Zusätzlich dargestellt ist die Kurve (3.103), deren Parameter α_N nach die Methode der kleinsten Quadrate (3.102) bestimmt wurde.

Für jedes N nach Tabelle 3.1 erhält man so einen separaten Satz an Abklingfaktoren $\{d_n\}$, die nun ihrerseits mit einer exponentiellen Fitfunktion der Form

$$d_{\text{fit}}(t, \alpha_N) := \exp\left(-\alpha_N \frac{t}{P_{\text{adv}}}\right) \quad (3.103)$$

verglichen werden können. Abbildung 3.8 stellt die so ermittelten Wertepaare (N, α_N) in einem doppeltlogarithmischen Diagramm dar. Diesen kann in guter Näherung

$$\alpha_N = \frac{\alpha_1}{N^3} \quad \text{mit } \alpha_1 := 700 \quad (3.104)$$

entnommen werden. Kombiniert mit (3.100) und den Ergebnissen von (3.103) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\alpha_N}{k^4 P_{\text{adv}}} = \left(\frac{\alpha_1}{N^3}\right) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-4} \left(\frac{\lambda}{u_{\text{adv}}}\right)^{-1} \\ &\approx \frac{700}{(2\pi)^4} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^3 v_{\text{adv}} \approx 0,449 (\Delta x)^3 u_{\text{adv}}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

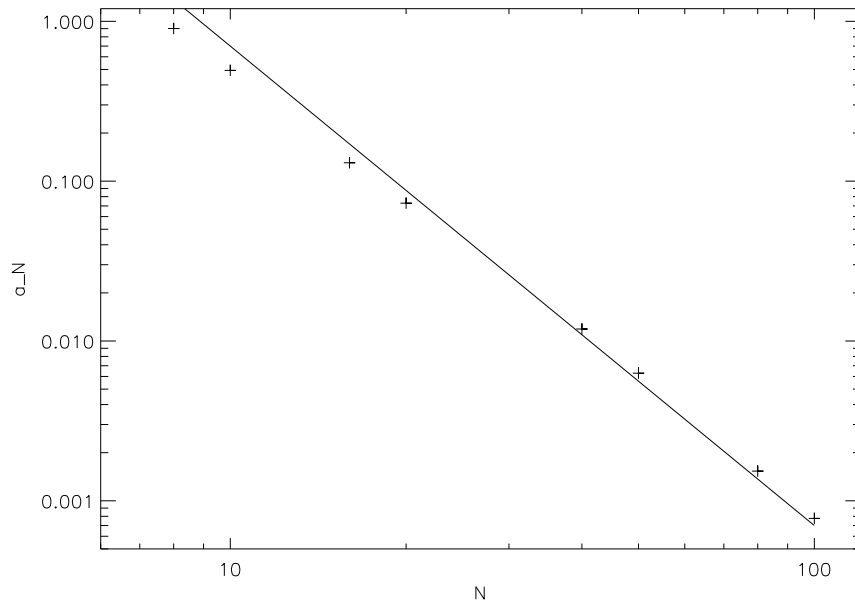


Abbildung 3.8: *Doppeltlogarithmische Darstellung der Wertepaare (N, a_N) gemäß Tabelle 3.1. Der Verlauf wird in offenbar in akzeptabler Weise durch $a_N = 700/N^3$ (durchgezogene Linie) wiedergegeben. Für kleine N deutet sich eine Abflachung des Profils an; in diesem Bereich wird $B(x, t)$ nur durch wenige Gitterzellen repräsentiert, wodurch in der Polynomrekonstruktion der Zellwerte die linearen Polynome gegenüber den Quadratischen an Einfluss gewinnen und die formale Ordnung von drei in Richtung zwei absinkt.*

Für allgemeines u können wir also das Maß der im Code präsenten numerisch bedingten Diffusion quantifizieren als

$$\zeta_{\text{num}} \approx \frac{(\Delta x)^3 u}{2} . \quad (3.106)$$

Diese Formel zeigt nochmals explizit, dass rein statische Lösungen zur Bestimmung von ζ_{num} nicht geeignet sind. Wollte man in den Simulationen eine explizite physikalische Resistivität η berücksichtigen, so wäre die Zeitentwicklung der numerischen Lösung von B im hier betrachteten Fall durch eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} - \zeta_{\text{num}} \frac{\partial^4 B(x, t)}{\partial x^4} \quad (3.107)$$

bestimmt. Der zu (3.73) analoge Ansatz

$$B(x, t) = B_0 \exp[-\gamma(k)t] \cos[k(x - ut)] \quad (3.108)$$

führt auf einen Amplitudenzerfall der Stärke

$$\gamma(k) = k^2 (\eta + k^2 \zeta_{\text{num}}) . \quad (3.109)$$

Die Wirkung der numerisch bedingten Diffusion ($\propto \zeta_{\text{num}}$) kann also in eine „effektive“ numerische Resistivität umgerechnet werden, die dann natürlich von der Wellenzahl abhängig ist:

$$\eta_{\text{eff,num}} := k^2 \zeta_{\text{num}} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{(\Delta x)^3 u}{2}. \quad (3.110)$$

Als kleinste auf dem Zellgitter sinnvoll darstellbare Wellenlänge sei $\lambda_{\text{min}} := 6 \Delta x$ angesetzt, die GröÙte ist durch die Abmessungen des Simulationsvolumens als $\lambda_{\text{max}} := L = N \Delta x$ vorgegeben. Bei $u = \mathcal{O}(1)$ überdeckt $\eta_{\text{eff,num}}$ also etwa den Bereich

$$\frac{2\pi^2}{N^2} \Delta x = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{max}}}\right)^2 \frac{(\Delta x)^3}{2} \leq \eta_{\text{eff,num}} \leq \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{min}}}\right)^2 \frac{(\Delta x)^3}{2} = \frac{\pi^2}{18} \Delta x. \quad (3.111)$$

Typische Parameter für die Sonnenwind-Simulationen aus Kapitel 4 sind $N \leq 100$ und $\Delta x \geq 0,05$. Damit liegt dort die numerisch bedingte Resistivität im Bereich 10^{-4} (für λ_{max}) bis etwa 10^{-2} im Falle von λ_{min} . Wie schon in Abschnitt 2.3.3 angekündigt, übertreffen diese Werte die stoßbedingte SPITZER- Resistivität (2.52) um einige Größenordnungen. Die dort vorgebrachten Gründe, nach denen ggf. die Berücksichtigung expliziter physikalischer Resistivität dennoch sinnvoll sein kann, bleiben davon allerdings unbeeinflusst.

3.4 Quellterme

Die eingangs gegebenen Erläuterungen zum CWENO-Verfahren gelten zunächst nur für den Spezialfall (3.8), in welchem der Quellterm Q verschwindet. Es stellt sich nun die Frage, wie die diversen Quellterme (Heizung, Gravitation, und in diesem Fall auch Resistivität) auf der rechten Seite der dynamischen MHD-Gleichungen zu behandeln sind.

3.4.1 Einige Strategien zur Implementierung

Viele alternative Verfahren, wie z. B. der klassische ROE-Löser [Roe 1981], sehen keine expliziten Quellterme vor. Der übliche Ausweg besteht in einem sog. *Splitting-Verfahren*, welches statt eines Zeitschritts für

$$\partial_t U(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}[U(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \quad (3.112)$$

jeweils abwechselnd je einen Zeitschritt für

$$\partial_t U(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}[U(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad \text{und} \quad (3.113)$$

$$\partial_t U(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \quad (3.114)$$

ausführt; für den zweiten Schritt (3.114) muss ein weiteres Verfahren gefunden werden. Durch STRANG-*Splitting* [Strang 1968] kann die formale Ordnung dieser Kombination von

$\mathcal{O}(\Delta t)$ auf $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ verbessert werden (sofern beide Einzelverfahren mindestens zweiter Ordnung sind), indem Reihenfolge und Schrittweite auf geeignet kombiniert werden.

Wiederholt man die CWENO-Herleitung aus Abschnitt 3.1 für Quellterme $Q \neq 0$, so zeigt sich, dass deren Berücksichtigung im Rahmen des Verfahrens einfach dadurch zu erreichen ist, dass auf der rechten Seite des semidiskreten Schemas (3.39) der Term

$$Q_j(t) := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} Q[u(x, t), x, t] dx \quad (3.115)$$

hinzugefügt wird. Das geeignete Verfahren zur Diskretisierung dieses über die Zelle gemittelten Quellterms kann in einfachen Fällen durch die Forderung gefunden werden, der Algorithmus möge eine bekannte, hinreichend einfache, stationäre Lösung möglichst exakt reproduzieren. Beispielsweise betrachten Kurganov & Levy [2002] das eindimensionale SAINT-VERNANT-System

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \quad (3.116)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2} h^2\right) = -g h \partial_x K, \quad (3.117)$$

welches die Zeitentwicklung der Wasserhöhe $h(x, t)$ und der Fließgeschwindigkeit $u(x, t)$ über einem Flussbett des Profils $K(x)$ bestimmt. (g ist die Schwerebeschleunigung.) Für den statischen Fall $u = 0$ ist (nach einem Variablenwechsel) $\mathbf{u}_{j+1/2}^+ = \mathbf{u}_{j+1/2}^-$ für $\mathbf{u} \in \{h + K, hu, a\}$ zu setzen, wobei sich die Indizes auf die Notation des semidiskreten CWENO-Schemas (3.39) für (3.116, 3.117) beziehen. Die Forderung, das Schema möge den statischen Fall exakt reproduzieren, liefert so direkt eine Diskretisierungsvorschrift für den Quellterm $-g h \partial_x K$.

Für den vorliegenden Fall der MHD-Sonnenwindgleichungen ist eine derartige simple Lösung nicht verfügbar; insbesondere sind Lösungen der Form $u = 0$ oder $u = u_0 = \text{konst.}$ nicht zu erwarten. Es bleibt also nur, die Quellterme möglichst präzise numerisch über die jeweilige Zelle zu integrieren. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 3.4.2 weiter vertieft.

Die CFL-Bedingung für Quellterme

Zu beachten ist ferner, dass sich durch das Hinzufügen von Quelltermen zusätzlich zur CFL-Bedingung (3.3) ggf. weitere einschränkende Bedingungen der für den Zeitschritt Δt ergeben können. Für einen resistiven Quellterm der Form $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ in der Induktionsgleichung ist beispielsweise die Bedingung

$$\eta \Delta t < (\Delta x)^2 \quad (3.118)$$

zu beachten, die leicht aus einer Stabilitätsanalyse (siehe z. B. [Potter 1973]) abgeleitet werden kann.

Komplizierte Quellterme (wie nichtlineare Funktionen des Ortes, etc.) entziehen sich dieser einfachen Herangehensweise. In einem solchen Fall ist es sinnvoll, den Zeitschritt eher konservativ zu wählen und bei Anzeichen numerischer Instabilitäten ggf. weiter zu verkleinern. Simulationen mit $\eta = 0$ wurden i. d. R. mit etwa $C_{\text{CFL}} \approx 0,5$ betrieben, sofern nicht explizit abweichende Angaben gemacht werden.

3.4.2 Zellmittelwert gegenüber Punktwert

Wie in Abschnitt 3.1 dargelegt, rechnet der Algorithmus nicht eigentlich mit den Punktwerten $u_{ijk} = u(\mathbf{r}_{ijk})$ am Ort des Gitterpunktes $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ijk}$, sondern mit den über das Zellvolumen V_{ijk} gemittelten Größen $\bar{u}_{ijk} = \left(\int_{V_{ijk}} u(\mathbf{r}) d^3r \right) / V_{ijk}$. Bei Verfahren zweiter Ordnung, die zur Rekonstruktion der Zellinhalte lineare Polynome verwenden, sind die Punktwerte gleich den Zellmittelwerten. Anders beim CWENO-Verfahren dritter Ordnung, wo dieser Unterschied zwischen u_{ijk} und \bar{u}_{ijk} potentiell relevant wird, sobald $u(\mathbf{r})$ in anderer als linearer Weise vom Ort abhängt. In diesem Fall stehen wir vor der Aufgabe, eine möglichst gute Approximation an das Zellmittel

$$\bar{Q}_{ijk} = (V_{ijk})^{-1} \int_{V_{ijk}} Q[\mathbf{r}, u(\mathbf{r})] dV_{ijk} \quad (3.119)$$

des Quellterms Q zu finden. Ist Q eine Funktion des Ortes allein (also unabhängig von den Funktionswerten u), so bietet sich (falls möglich) die analytische Integration an, andernfalls deren numerische Approximation, etwa durch Quadratur nach SIMPSON

$$\bar{Q}_{ijk} \approx \sum_{\alpha, \beta, \gamma = -1}^{+1} w_{\alpha\beta\gamma}^s Q(\mathbf{r}_{i+\alpha/2, j+\beta/2, k+\gamma/2}) \quad (3.120)$$

mit insgesamt $3^3 = 27$ Stützstellen auf den Mittelpunkten aller Kanten und Seitenflächen der Zelle, sowie im Mittelpunkt der Zelle und in allen acht Ecken. Die Gewichte der Stützstellen sind in diesem Fall als

$$w_{\alpha\beta\gamma}^s = \frac{1}{216} \times \begin{cases} 64 & : & |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 0 & \text{(Zellenmitte)} \\ 16 & : & |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 1 & \text{(Flächenmitte)} \\ 4 & : & |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 2 & \text{(Kantenmitte)} \\ 1 & : & |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 3 & \text{(Eckpunkt)} \end{cases} \quad (3.121)$$

zu wählen.

Nun hängen die hier zur Diskussion stehenden Quellterme der Gravitation und Heizung

$$Q_{\text{grav}} = -\frac{\rho \Gamma}{\|\mathbf{r}\|} \quad (3.122)$$

$$Q_{\text{heiz}} = q(\|\mathbf{r}\|) T_0 \rho \nabla \cdot \left(\frac{\rho \mathbf{u}}{\rho} \right) \quad (3.123)$$

sowohl vom Ort als auch explizit von ρ und der Impulsdichte $\rho \mathbf{u}$ ab, zudem muss ein Divergenzterm berechnet werden. Dies verlangt nach einer analytischen Ersatzfunktion $\hat{\rho}_{ijk}(x, y, z)$ für die Dichte und weiterer drei Funktionen für die Komponenten von $\rho \mathbf{u}$, die an den Stützstellen von (3.120) ausgewertet werden können. Hierzu wählen wir für jede Zelle V_{ijk} eine Menge \mathcal{N} von Zellen, die außer V_{ijk} selbst noch einige Nachbarzellen von V_{ijk} enthält, und bestimmen $\hat{\rho}_{ijk}(x, y, z)$ dergestalt, dass

$$\frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \hat{\rho}_{ijk}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \bar{\rho}_{ijk} \quad \forall V_\alpha \in \mathcal{N} \quad (3.124)$$

gilt, d. h. dass $\hat{\rho}_{ijk}(x, y, z)$ die Zellmittelwerte aller Zellen aus \mathcal{N} erhält. Sei z. B.

$$\mathcal{N}_{ijk} := \{V_{i'j'k'} \mid \max\{|i' - i|, |j' - j|, |k' - k|\} \leq 1\} \quad (3.125)$$

die Menge, die neben der Zelle V_{ijk} selbst genau jene $3^3 - 1 = 26$ Nachbarzellen enthält, die in jeder Richtung höchstens eine Stelle von V_{ijk} entfernt ist. In diesem Fall kann $\hat{\rho}_{ijk}(x, y, z)$ sinnvollerweise als triquadratisches Polynom

$$\hat{\rho}_{ijk}(x, y, z) := \sum_{l,m,n=0}^2 c_{lmn} x^l y^m z^n \quad (3.126)$$

gewählt werden, da es in diesem Fall genau 27 Bedingungen für die 27 Koeffizienten c_{ijk} gibt.

Es stellt sich nun die Frage, wie die Werte an den Stützstellen aus $\hat{\rho}_{ijk}(x, y, z)$ berechnet werden sollen. Die zellenweise Approximation durch

$$\bar{Q}_{ijk} \approx \sum_{\alpha,\beta,\gamma=-1}^{+1} w_{\alpha\beta\gamma}^s \hat{\rho}_{ijk}(x_{i+\alpha/2}, x_{j+\beta/2}, x_{k+\gamma/2}) \quad (3.127)$$

allein hat den Nachteil, dass an den Rändern der Zellen merkliche Sprünge in den Werten der beiden Funktionen entstehen. Es ist z. B. im Allgemeinen

$$\hat{\rho}_{i,j,k}(x_{j+1/2}, y_j, z_k) \neq \hat{\rho}_{i+1,j,k}(x_{j+1/2}, y_j, z_k) ,$$

obwohl beide Funktionen eine Approximation (z. B.) der Dichte am gleichen Punkt im Raum liefern sollen. Wie das in Abbildung 3.9 dargestellte Beispiel zeigt, ist die direkte Verwendung von $\hat{\rho}(x, y, z)$ an den Stützstellen besonders dann problematisch, wenn die zu approximierende Funktion deutlich stärker als quadratisch steigt oder abfällt. Die so berechneten Polynome neigen dazu, die Werte an den Stützstellen auf der Grenze zwischen zwei Gitterzellen systematisch zu unter- bzw. zu überschätzen. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoller, auf den Zellenrändern anstelle der Werte des einzelnen Polynoms

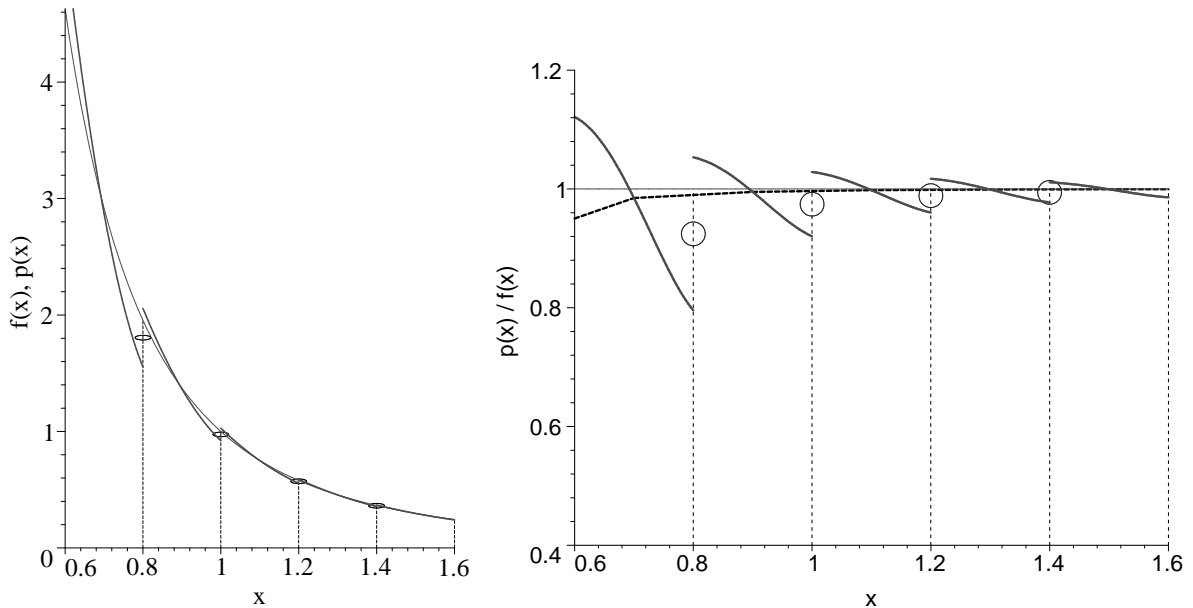


Abbildung 3.9: Links: Die Funktion $f(x) := 1/x^3$ wird auf dem Intervall $0,6 \leq x \leq 1,6$ durch $N = 5$ quadratische Polynome $p_i(x)$ (dick gezeichnet) approximiert, wobei jedes $p_i(x)$ jeweils die Integralmittelwerte von $f(x)$ über die eigene und die beiden Nachbarzellen erhält. An den Intervallgrenzen $x = x_{i+1/2}$ werden die wahren Werte $f(x_{i+1/2})$ systematisch unter- bzw. überschätzt. Die arithmetischen Mittelwerte $[p_i(x_{i+1/2}) + p_{i+1}(x_{i+1/2})]/2$ (ovale Symbole) würden schon eine deutlich bessere Näherung für $f(x_{i+1/2})$ liefern. Tatsächlich zum Einsatz kommen soll der Mittelwert $[p_i(x_i) + p_{i+1}(x_{i+1})]/2$ der rekonstruierten Punktwerte im Mittelpunkt der Zelle. Rechts: die gleiche Situation, aber zur besseren Veranschaulichung normiert auf $f(x)$. Effektiv wird $f(x)$ also durch den dick gestrichelten Kurvenzug angenähert (links nicht sichtbar).

den arithmetischen Mittelwert der Punktwerte der angrenzenden Zellmittelpunkte zu verwenden. Dieser ist aus zwei, vier oder acht Summanden zu bilden, je nachdem, wie viele Zellen an den zu berechnenden Punkt angrenzen.

Für die Zellmittelpunkte kann jeweils Gleichung (3.126) herangezogen werden:

$$\hat{\rho}(0, 0, 0) = c_{000} = \sum_{i,j,k=-1}^{+1} w_{ijk}^p \bar{\rho}_{ijk} \tag{3.128}$$

mit

$$w_{ijk}^p = \frac{1}{13824} \times \begin{cases} 26^3 = 17576 & : |i| + |j| + |k| = 0 \\ 26^2 = 676 & : |i| + |j| + |k| = 1 \\ 26^1 = 26 & : |i| + |j| + |k| = 2 \\ 26^0 = 1 & : |i| + |j| + |k| = 3 \end{cases} \tag{3.129}$$

Gegenüber einer direkten Auswertung des Quellterms am Ort \mathbf{r}_{ijk} (also in der Zellenmitte) hat das beschriebene Verfahren den Nachteil des massiv erhöhten Rechenaufwandes, da nun bei jedem Zeitschritt pro Zelle der Quellterm einmal für jede der 27 Zellen aus \mathcal{N}_{ijk} auszuwerten ist. Vergleiche anhand der Konvergenzrechnungen aus Abschnitt 4 zeigen (bei einem Anstieg der CPU-Rechenzeit um den Faktor 2..3) praktisch keinen Unterschied der Ergebnisse im Hinblick auf Gitterartefakte o. ä. Aus diesem Grund scheint es sinnvoller, die Quellterme punktweise je einmal pro Zelle auszuwerten und damit den Unterschied zwischen Zellmittelwerten und Punktwerten außer Acht zu lassen.

3.5 Behandlung der Randbedingungen

Dieser Abschnitt diskutiert, in welcher Weise die Randbedingungen auf den in Abschnitt 2.7.2 beschriebenen beiden Randarten konkret zu implementieren sind.

3.5.1 Der äußere Rand

Die Berechnung von \bar{u}_{ijk}^{n+1} durch CWENO und das in Abschnitt 3.6.2 erläuterte Projektionsverfahren erfordern die Existenz von Nachbarzellen in einer bzw. drei Zellen Entfernung. Um das eigentliche Simulationsvolumen befindet sich daher eine $b = 3$ Zellen breite Schicht aus *Randzellen*, denen vor jedem Zeitschritt gemäß den dort gültigen Randbedingungen entsprechende Werte zuzuweisen sind. Dazu ist für jede dynamische Variable

$$\omega \in \{\rho, (\rho u_x), (\rho u_y), (\rho u_z), B_x, B_y, B_z, e\}$$

und für jede der sechs Randflächen $X_{\pm}, Y_{\pm}, Z_{\pm}$ jeweils eine der in Tabelle 3.2 aufgeführten Randbedingung vorzuschreiben. Die vorgesehenen Möglichkeiten sind:

periodisch: Der Rand wird mit dem gegenüberliegenden Rand identifiziert, der dann ebenfalls periodisch zu wählen ist. Das Gebiet kann als Ring (1D) bzw. Torus (2D) veranschaulicht werden.

symmetrisch: Der Rand bildet eine Symmetrieebene für ω .

antisymmetrisch: Am Rand wird $\omega = 0$, etwa wenn der Rand ein reflektierendes Hindernis für die Strömung darstellen soll, so dass an diesem Rand die gleichnamige Komponente der Geschwindigkeit (also z. B. u_x an X_{\pm}) antisymmetrisch vorgegeben wird. Zusätzlich wird ω *auf* dem Rand explizit zu Null gesetzt.

extrapolierend: ω wird linear in den Rand hinein extrapoliert. Dieses auch als *ausfließende Randbedingung* bezeichnete Vorgehen kommt an freien Rändern zum Einsatz, an denen die Strömung das Gebiet möglichst störungsfrei verlassen soll. Haben der

Funktionswert ω und seine zweite Ableitung ω'' auf der Innenseite das gleiche Vorzeichen, so kann es vorkommen, dass die Extrapolation einen unerwünschten Vorzeichenwechsel erzwingt. (Konkret könnte z. B. ein Dichte- oder Geschwindigkeitsabfall $\rho \propto r^{-n}$, $n \geq 0$ auf der Außenseite zu $\rho < 0$ extrapoliert werden. Aus diesem Grund wird ein Vorzeichenwechsel oft zusätzlich durch explizite Setzung auf Null (für die Geschwindigkeit) bzw. auf einen Wert > 0 (im Falle der Dichte) abgefangen.

Die konkrete Auswahl ist dem jeweils zu simulierenden Problem anzupassen. Tabelle 3.3 gibt ein typisches Beispiel für eine solche Auswahl. Die entsprechenden geometrischen Verhältnisse sind in Abbildung 3.10 veranschaulicht.

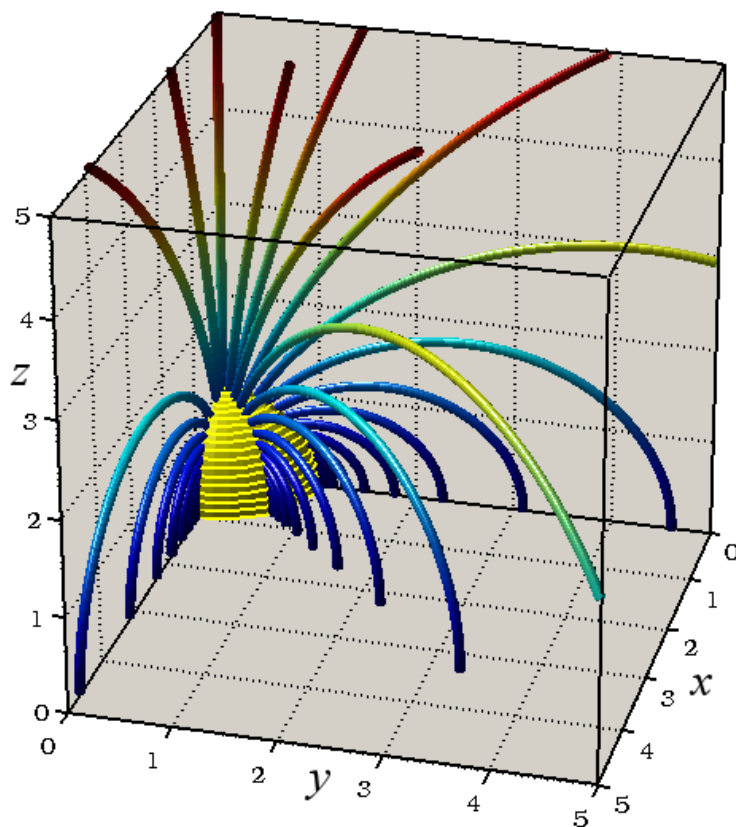


Abbildung 3.10: Veranschaulichung der Geometrie des Rechengebietes im Falle eines Oktanten mit der Sonne im Ursprung. Dargestellt sind ferner ausgewählte Feldlinien eines Dipolfeldes. Das Magnetfeld steht senkrecht auf dem Rand Z_- (bei $z = 0$) und parallel zu den Rändern X_- und Y_- . Randbedingungen an Rändern, die den Ursprung schneiden, (grau schattiert) ergeben sich aus Symmetriebedingungen; die anderen drei Randflächen (transparent) tragen extrapolierte Randbedingungen.

| Bezeichnung | Bedeutung | Vorschriften ($i \in [1, b]$) | |
|---------------------|--------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| (P) periodisch | | $\omega_{-i} \leftarrow \omega_{N-i}$ | $\wedge \omega_{N+i} \leftarrow \omega_i$ |
| (S) symmetrisch | $\omega' \rightarrow 0$ | $\omega_{-i} \leftarrow \omega_i$ | $\wedge \omega_{N+i} \leftarrow \omega_{N-i}$ |
| (A) antisymmetrisch | $\omega \rightarrow 0$ | $\omega_{-i} \leftarrow -\omega_i$ | $\wedge \omega_{N+i} \leftarrow -\omega_{N-i}$ |
| (E) extrapolierend | $\omega'' \rightarrow 0$ | $\omega_{-i} \leftarrow 2\omega_0 - \omega_i$ | $\wedge \omega_{N+i} \leftarrow 2\omega_N - \omega_{N-i}$ |

Tabelle 3.2: *Im Code verwandte Randbedingungen und ihre Realisierung. Es sei hierbei $\{\omega_i \mid i = 0, \dots, N\}$ die Sequenz der Zellinhalte entlang einer Koordinatenrichtung. Die Zellen des linken ($i = -b, \dots, -1$) und rechten ($i = N + 1, \dots, N + b$) Randes sind entsprechend der letzten Spalte mit den bereits berechneten Werten zu füllen.*

| | Rand | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | X_- | X_+ | Y_- | Y_+ | Z_- | Z_+ |
| ρ | S | E | S | E | S | E |
| ρu_x | A | E | S | E | S | E |
| ρu_y | S | E | A | E | S | E |
| ρu_z | S | E | S | E | A | E |
| B_x | A | E | S | E | A | E |
| B_y | S | E | A | E | A | E |
| B_z | S | E | S | E | S | E |
| e bzw. T | S | E | S | E | S | E |

Tabelle 3.3: *Randbedingungen für das Beispiel des in Abbildung 3.10 dargestellten Sonnenwind-Oktanten mit dipolartigem Magnetfeld. Durch Spiegelung an den $(X/Y/Z)_-$ -Rändern (die den Ursprung enthalten) wird der komplette Würfel (dann mit der Sonne im Zentrum) reproduziert. Die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{B} sollen an den Randflächen parallel zu diesen liegen, mit Ausnahme der Äquatorialebene Z_- , auf der \mathbf{B} senkrecht zu stehen hat.*

3.5.2 Die Sonnenkugel als innerer Rand

Die Physik des Windmodells erfordert die Vorgabe physikalischer Randbedingungen auf der Sonnenoberfläche, welche nach Abschnitt 2.7 durch die Kugel $\mathcal{S} := \{\mathbf{r} \mid \|\mathbf{r}\| = 1\}$ im Inneren des Simulationsvolumens dargestellt wird. Da \mathcal{S} offenbar mit keiner der kartesischen Koordinatenflächen zusammenfällt, stellt sich die Frage, wie die auf \mathcal{S} vorzuziehenden Randbedingungen auf die Punkte des Gitters zu übertragen sind. (Motiviert durch die in Abschnitt 3.4.2 festgestellte praktische Äquivalenz zwischen Zellmittelwerten und Punktwerten wird für den Rest der Arbeit nicht mehr zwischen beiden Begriffen unterschieden; die Bezeichnungen „Gitterpunkt“ und „Gitterzelle“ werden also synonym verwendet.)

Das *Forcing*-Prinzip

Das naive Verfahren besteht darin, einfach alle Punkte innerhalb von \mathcal{S} auf ihrem Anfangswert zu belassen. Damit wird \mathcal{S} faktisch durch seine konvexe Hülle dargestellt.

Deutlich präziser ist das *Forcing*-Verfahren nach Fadlun et al. [2000], welches auf eine Idee von Peskin [1972] für Randbedingungen an die Strömungsgeschwindigkeit zurückgeht: Um dem Fluid am Punkt \mathbf{r}_i eine Geschwindigkeit $\mathbf{V}_i(t)$ vorzuschreiben, wird auf der rechten Seite der Navier-Stokes-Gleichung eine geeignete Kraftdichte der Form

$$\mathbf{f}_i(t) \propto \mathbf{V}_i(t) - \mathbf{u}_i(t) \quad (3.130)$$

eingefügt, die die tatsächliche Geschwindigkeit \mathbf{u}_i zu \mathbf{V}_i hin „verschiebt“ (und offenbar verschwindet, sobald wie gewünscht $\mathbf{V}_i(t) = \mathbf{u}_i(t)$ gilt).

Deutlich vorteilhafter (weil numerisch stabiler und frei von der Notwendigkeit, für (3.130) geeignete Skalierungskonstanten zu wählen) ist das *direkte* Forcing [Mohd-Yusof 1997]: Ist z. B.

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} = (\text{RHS})_i^{n+1/2} + \mathbf{f}_i^{n+1/2} \quad (3.131)$$

die diskretisierte Fassung der Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \mathbf{u} = \text{RHS} + \mathbf{f} , \quad (3.132)$$

so erhält man die Form von $\mathbf{f}_i^{n+1/2}$ einfach durch Einsetzen von $\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^{n+1}$ in (3.131) und auflösen nach $\mathbf{f}_i^{n+1/2}$ zu

$$\mathbf{f}_i^{n+1/2} = -(\text{RHS})_i^{n+1/2} + \frac{\mathbf{V}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} . \quad (3.133)$$

Für andere Zeitschrittverfahren — speziell für das Runge-Kutta-Schema (3.41) — ergeben sich aus demselben Vorgehen Ausdrücke für \mathbf{f} , die von (3.133) abweichen.

Das Forcing-Verfahren ist sinnvoll, wenn man an den tatsächlich an der Grenzfläche angreifenden Kräften interessiert ist, und ein direktes Setzen der Randbedingungen nicht möglich oder nicht sinnvoll ist. Hier ist die Kraftdichte \mathbf{f} allerdings nur Mittel zum Zweck, und es macht keinen Unterschied, ob die gewünschte Bedingung $\mathbf{u}_i = \mathbf{V}_i$ durch direkte Setzung oder durch die Wirkung von \mathbf{f} zustande kommt. Aus diesem Grund spricht nichts dagegen, Randgitterpunkte direkt auf den Wert von \mathbf{V}_i zu setzen. Dieser ist allerdings in jedem Fall vorher zu bestimmen, da konkret nur $\mathbf{V}|_{\mathcal{S}}$ gegeben ist.

Geeignete Verfahren zur Interpolation

Dazu wird zunächst eine Liste von Gitterpunkten $\mathcal{G} := \{\mathbf{g}_\alpha\}$ erstellt, die außerhalb, aber noch hinreichend nahe an \mathcal{S} liegen, um als „Ort“ des Randes zu gelten. Das naive Vorgehen wäre es, zu jedem Punkt \mathbf{g}_α einen „nahe“ gelegenen Raumpunkt $\mathbf{s}_\alpha \in \mathcal{S}$ (z. B. die

Projektion $\mathbf{g}_\alpha \|\mathbf{g}_\alpha\|^{-1}$ von \mathbf{g}_α auf \mathcal{S}) zuzuordnen und $\mathbf{u}(\mathbf{g}_\alpha) := \mathbf{V}(\mathbf{s}_\alpha)$ zu setzen.¹² Es fände dann keinerlei Interpolation statt, und \mathcal{S} wäre effektiv durch die Einhüllende der zu \mathcal{G} gehörigen Zellvolumina repräsentiert.

Eine weitere Möglichkeit ist es, den vorzugebenden Wert durch Interpolation zu ermitteln. Beim von Fadlun et al. [2000] favorisierten Vorgehen wird zunächst jedem \mathbf{g}_α ein benachbarter, weiter außen liegender Gitterpunkt \mathbf{n}_α zugeordnet. Der bei \mathbf{g}_α vorzugebende Wert wird dann durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{g}_\alpha) := \mathbf{V}_\alpha + \frac{\|\mathbf{g}_\alpha\| - 1}{\|\mathbf{n}_\alpha\| - 1} [\mathbf{u}(\mathbf{n}_\alpha) - \mathbf{V}_\alpha] \quad (3.134)$$

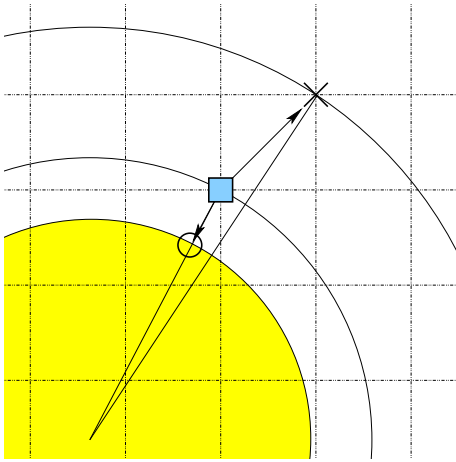
linear gemittelt. Die Interpolation (3.134) ist offenbar von erster Ordnung in radialer Richtung und von Ordnung Null in allen Richtungen senkrecht dazu, da in (3.134) nur der Abstand $\|\cdot\| - 1$ zu \mathcal{S} eingeht. Als Interpolationspunkt \mathbf{n}_α sollte daher derjenige Nachbarpunkt von \mathbf{g}_α gewählt werden, der erstens weiter außen liegt als dieser und dessen Ortsvektor zweitens vom Ursprung aus gesehen in eine möglichst ähnliche Richtung zeigt. Das Auswahlverfahren wird z. B. in [Spanier 2002] eingehender erläutert; die Beziehung der Punkte \mathbf{g}_α , \mathbf{n}_α und \mathbf{s}_α zueinander ist in Abbildung 3.11 dargestellt.

Im Hinblick auf die äußerst starken radialen Gradienten (v. a. der Dichte), die nahe der Sonne auftreten, ist diese Vorgehensweise offensichtlich zu ungenau, und es wäre wünschenswert, zur Interpolation weitere Punkte bei kleineren Abständen heranzuziehen. Das tatsächlich zum Einsatz gebrachte Verfahren (im Hinblick auf die würfelförmige Anordnung der zur Mittelung herangezogenen Nachbarzellen hier als *Kubus-Verfahren* bezeichnet) ist daher das Folgende:

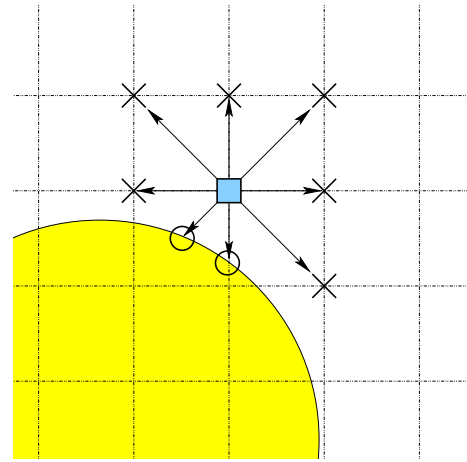
1. Als erstes wird eine Liste \mathcal{G} derjenigen Gitterpunkte erstellt, die selbst außerhalb von \mathcal{S} liegen, aber mindestens zwei ihrer $3^3 - 1 = 26$ Nachbarpunkte $\mathbf{n}_{\alpha,i}$ im Inneren von \mathcal{S} haben. Für alle innen liegenden Nachbarn wird $\mathbf{n}_{\alpha,i}$ durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie zwischen ihm und \mathbf{g}_α ersetzt. (Anders ausgedrückt: Jeder innen liegende Nachbarpunkt wird so lange auf \mathbf{g}_α zugeschoben, bis $\|\mathbf{n}_{\alpha,i}\| = 1$ gilt, er also genau auf der Oberfläche liegt.)
2. Nach jedem Zeitschritt wird jedem \mathbf{g}_α ein neuer Wert zugeordnet, der sich durch gewichtete Mittelung gemäß

$$\mathbf{u}(\mathbf{g}_\alpha) := \frac{\sum_i \|\mathbf{g}_\alpha - \mathbf{n}_{\alpha,i}\|^{-1} \hat{\mathbf{u}}_{\alpha,i}}{\sum_i \|\mathbf{g}_\alpha - \mathbf{n}_{\alpha,i}\|^{-1}} \quad (3.135)$$

¹²Die in diesem Kapitel besprochenen Verfahren gelten grundsätzlich für alle dynamischen Variablen, für die Randwerte vorzugeben sind. Der Einfachheit halber behalten wir die im Zusammenhang mit dem Forcing-Verfahren eingeführten Bezeichnungen \mathbf{u} für Variablen und \mathbf{V} für die Randwerte bei.



Radiales Zwei-Punkte-Verf. (3.134)



Kubus-Verfahren (3.135)

Abbildung 3.11: Vergleich der beiden Interpolationsverfahren. Jedem der Gitterpunkte \mathbf{g}_α (hier als Quadrat dargestellt) wird per Interpolation ein neuer Wert zugewiesen. Die Pfeile zeigen auf die Raumpunkte, die zur Interpolation herangezogen werden. Es handelt sich dabei entweder um außerhalb von \mathcal{S} liegende Gitterpunkte (\times), oder um Schnittpunkte (\circ) der direkten Verbindungslinien zu innenliegenden Nachbarpunkten. Die Länge der Pfeile ist gleich dem inversen Gewicht des Punktes, auf den er zeigt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist jeweils nur das zweidimensionale Analogon (rechts mit $3^2 - 1 = 8$ Nachbarpunkten) dargestellt.

aus den umliegenden Rand- bzw. Gitterwerten

$$\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,i} := \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{n}_{\alpha,i}) & : \|\mathbf{n}_{\alpha,i}\| > 1 \\ \mathbf{V}(\mathbf{n}_{\alpha,i}) & : \|\mathbf{n}_{\alpha,i}\| = 1 \end{cases} \quad (3.136)$$

ergibt. Für Nachbarpunkte außerhalb von \mathcal{S} wird also der soeben von CWENO neu berechnete Zellenwert verwendet, für die inneren Nachbarn dagegen der Randwert auf \mathcal{S} in Richtung des fraglichen Nachbarpunktes. Abbildung 3.11 stellt die beiden Interpolationen (3.134) und (3.135) in einem schematischen Vergleich gegenüber.

Die Gewichtung mit dem inversen Abstand $\|\mathbf{g}_\alpha - \hat{\mathbf{n}}_{\alpha,i}\|^{-1}$ verallgemeinert die lineare Zwei-Punkte-Mittelung (3.134) auf mehr als zwei Punkte und sorgt dafür, dass $\mathbf{u}(\mathbf{g}_\alpha)$ gleich dem Randwert $\mathbf{V}(\mathbf{g}_\alpha)$ wird, falls \mathbf{g}_α sich exakt auf dem Rand \mathcal{S} befindet. (In diesem Fall geht $\|\mathbf{g}_\alpha - \hat{\mathbf{n}}_{\alpha,i}\|^{-1} \rightarrow \infty$ für einige i , und alle anderen Punkte liefern nach erfolgter Normierung keinen Beitrag mehr zu (3.135). Bei der praktischen Implementierung wird dieser Fall durch eine Fallunterscheidung abgefangen.)

Bei der praktischen Ausführung ist schließlich noch zu beachten, dass i. d. R. einige der Nachbarpunkte $\mathbf{n}_{\alpha,i}$ selbst in der Liste \mathcal{G} auftauchen. Um sicherzustellen, dass die Summanden in (3.135) nicht bereits ihrerseits durch Interpolation verändert wurden, ist die Interpolation *simultan* für alle Punkte auszuführen, andernfalls wäre das Gesamtergebnis von der Reihenfolge abhängig, in der die Liste \mathcal{G} abgearbeitet wird. Der konkrete Ablauf pro Zeitschritt ist dabei folgender:

1. CWENO berechnet für alle Gitterpunkte die neuen Werte und setzt diese anschließend. Danach wird für jeden Punkt $\mathbf{g}_\alpha \in \mathcal{G}$ auf Grundlage dieser Gitterwerte die beschriebene Interpolation durchgeführt. Der durch Interpolation gewonnene Wert wird allerdings nicht gleich auf dem Gitter gesetzt, sondern zunächst mit Hilfe von \mathcal{G} zwischengespeichert und bleibt somit für weitere Interpolationen desselben Zeitschritts ohne Einfluss.
2. Erst wenn auf diese Weise die Interpolationswerte für alle Punkte aus \mathcal{G} im Zwischenspeicher vorliegen, werden diese der Reihe nach auf das Gitter übertragen. Die Liste \mathcal{G} wird also zweimal durchlaufen (Interpolation und Übertrag auf das Gitter); die Reihenfolge ist in beiden Fällen beliebig.

Besonderheiten im Sonnenwind-Fall

Für die konkret vorliegende Situation kann die Güte des Verfahrens wie folgt noch etwas verbessert werden:

- Die lineare Interpolation ist offenbar exakt für lineare Funktionen, und verschlechtert sich mit zunehmender Abweichung von der Linearität. Vermutet man z. B. für die zu interpolierende Funktion \mathbf{u} einen Verlauf wie $\|\mathbf{u}(\mathbf{r})\| \propto \|\mathbf{r}\|^{-n}$, so ist es sinnvoll, alle Terme $\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,i}$ in (3.135) mit $\|\hat{\mathbf{n}}_{\alpha,i}\|^n$ zu multiplizieren, um auch in einer nichtlinearen Situation eine möglichst glatte Approximation zu erhalten. Das Ergebnis der Mittelung muss am Ende natürlich wieder durch $\|\mathbf{g}_\alpha\|^n$ dividiert werden. Besonders für die Dichte bietet sich hier eine Multiplikation mit $\|\hat{\mathbf{n}}_{\alpha,i}\|^{2\dots 4}$ an. (Tatsächlich verwendet wird schließlich der Exponent 3.)
- Der Natur der gewählten Beschreibung folgend, ist das Mittelungsverfahren für alle drei kartesischen Komponenten von \mathbf{B} (und ggf. auch für die von $\rho\mathbf{u}$, s. u.) anzuwenden. Besonders wichtig ist dabei, dass weder die Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{B}$, noch eine eventuelle Symmetrie des Feldes durch die Mittelung zerstört wird; ein rein radiales Feld sollte z. B. durch die Interpolation in ein ebenfalls radiales Feld übergehen. Da die naive, komponentenweise Interpolation dies nicht leisten kann, wird zuvor jeder Vektor $\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,i}$ um die Achse $\mathbf{n}_{\alpha,i} \times \mathbf{g}_\alpha$ gedreht, bis $\mathbf{n}_{\alpha,i}$ und \mathbf{g}_α parallel sind; erst danach wird die Mittelung (3.135) angewendet. Auf diese Weise wird lokal dergestalt auf die gekrümmte Oberfläche korrigiert, dass im Falle eines Radialfeldes alle $\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,i}$ parallel

zueinander (und zu \mathbf{g}_α) orientiert sind. Der gemittelte Vektor $\mathbf{u}(\mathbf{g}_\alpha)$ ist dadurch ebenfalls parallel zu \mathbf{g}_α , d. h. radial.

- Schließlich ist noch zu beachten, dass der Zeitschritt aus den in Abschnitt 2.3.1 dargelegten Gründen die Energiedichte e als dynamische Variable verwendet, die Randbedingung allerdings für die Temperatur T zu formulieren ist; dieser Umstand wird vor allem bei der im nächsten Abschnitt besprochenen freien Interpolation wichtig. Es wird daher nach jedem Zeitschritt die Variable e mittels

$$T = \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma - 1}{\rho} \left[e - \frac{\|\rho\mathbf{u}\|^2}{2\rho} - \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2} \right] \quad (3.137)$$

durch T ersetzt, dann die Interpolation der Randwerte durchgeführt und anschließend mittels der Umkehrung von (3.137) wieder der Übergang $T \rightarrow e$ vollzogen. Auf diese Weise ist die Randbedingung für T von der Behandlung von \mathbf{u} (siehe Abschnitt 3.5.3) entkoppelt.

3.5.3 Freie Extrapolation der Impulsdichte

Wie schon in Abschnitt 2.7.2 erläutert, ist die Strömungsgeschwindigkeit am Sonnenrand bereits durch die Existenz des kritischen Punktes festgelegt und daher nicht mit einer willkürlichen Randbedingung bei $r = 1$ (oder einem anderen Radius) vereinbar. Keppens & Goedbloed [1999] berücksichtigen diesen Umstand, indem sie die Radialkomponente des Impulsdichte ρu_r linear in eine zwei Zellen breite Schicht aus Randzellen (sog. *ghost cells*) hinein extrapolieren. Es stellt sich nun die Frage, wie ein solches Vorgehen von sphärischen auf kartesische Koordinaten übertragen werden kann.

Was wird extrapoliert?

Der Verlauf von $r \mapsto u(r)$ im Parker-Modell legt nahe, dass das Profil von $\rho\mathbf{u}$ in Sonnennähe durch den sehr steilen Anstieg zum Sonnenrand hin dominiert wird. Im Licht des oben Gesagten würden sich danach eher die „sanfteren“ Funktionen $u_r \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r$ oder der radiale Massefluss $s := \rho u_r r^2$ zur Interpolation anbieten. Für die letztere Wahl spricht außerdem, dass im stationären Zustand aus Gründen der Masseerhaltung $\partial_r s = 0$ zu gelten hat. Die lineare Extrapolation von s ist also mit der Masseerhaltung verträglich, anders als die von $\rho u_r = s/r^2$ allein, die systematisch zu kleine Geschwindigkeiten liefern würde. Um den Aufwand in akzeptablen Grenzen zu halten, wird die Strömung am Sonnenrand als radial angesetzt. Das allgemeine Vorgehen ist nun dieses:

1. Die bereits für die anderen Randbedingungen erstellte Liste \mathcal{G} wird um alle Gitterpunkte \mathbf{g}_α aus dem radialen Intervall $\|\mathbf{g}_\alpha\| \in [1 - 2 \min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, 1]$ erweitert. (Zellen, die noch weiter innen liegen, werden von der Zeitintegration nicht erfasst.) Es ergibt sich eine Anordnung von Gitterzellen ähnlich der in Abbildung 3.12 dargestellten.

2. Jeder Gitterpunkt $\mathbf{g}_\alpha \in \mathcal{G}$ erhält eine eigene Menge an Nachbarzellen \mathcal{N}_α zugewiesen, aus denen sein neuer Wert extrapoliert wird. \mathcal{N}_α nimmt alle Zellen auf, die erstens weiter außen liegen als \mathbf{g}_α und zweitens nicht weiter als δ von \mathbf{g}_α entfernt liegen. Eine geeignete Wahl ist $\delta \approx 2 \Delta x$, so dass \mathcal{N}_α etwa 10...20 Elemente enthält.
3. Wiederum ist zu beachten, dass zahlreiche Gitterpunkte gleichzeitig sowohl in \mathcal{G} als auch in diversen \mathcal{N}_α enthalten sind. Um sicherzustellen, dass stets nur Information von außerhalb verwendet wird, ist \mathcal{G} nach $\|\mathbf{g}_\alpha\|$ zu *sortieren* und von außen nach innen abzuarbeiten.
Die bis hierhin beschriebenen Schritte müssen nur einmal am Anfang ausgeführt werden; danach bleiben \mathcal{G} und die \mathcal{N}_α unverändert.
4. Für die eigentliche Extrapolation wird nach jedem Zeitschritt für jeden Punkt $\mathbf{g}_\alpha \in \mathcal{G}$ die Liste \mathcal{N}_α abgearbeitet, indem für jeden Punkt $\mathbf{n}_i \in \mathcal{N}_\alpha$ die radiale Komponente seines Masseflusses

$$(s_r)_{\alpha,i} = [(\rho \mathbf{u})_{\alpha,i} \cdot \mathbf{n}_{\alpha,i}] \|\mathbf{n}_{\alpha,i}\| \quad (3.138)$$

berechnet wird. Dieser wird lokal als Polynom ersten Grades

$$s_r(r) = s_0 + r s_1 \quad (3.139)$$

in r angesetzt, dessen beiden Koeffizienten s_0 und s_1 (der Index α wurde unterdrückt) nach der Methode der kleinsten Quadrate an die Wertepaare $[\|\mathbf{n}_{\alpha,i}\|, (s_r)_{\alpha,i}]$ angepasst werden. Der gesuchte Wert der Impulsdichte am Ort \mathbf{g}_α ist folglich durch

$$(\rho \mathbf{u})(\mathbf{g}_\alpha) = \frac{s_0 + r_\alpha s_1}{(r_\alpha)^3} \mathbf{g}_\alpha \quad \text{mit} \quad r_\alpha := \|\mathbf{g}_\alpha\| \quad (3.140)$$

gegeben.

3.6 Divergenzfreiheit des Magnetfeldes

Das Problem und seine Quantifizierung

Zufolge der Maxwellgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.141)$$

müssen alle physikalisch sinnvollen Magnetfelder zu jedem Zeitpunkt frei von Quellen sein. Für analytische Betrachtungen kann Gl. (3.141) als Anfangsbedingung formuliert werden, für die wegen

$$\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\partial_t \mathbf{B}) = \nabla \cdot (-\nabla \times \mathbf{E}) \equiv 0 \quad (3.142)$$

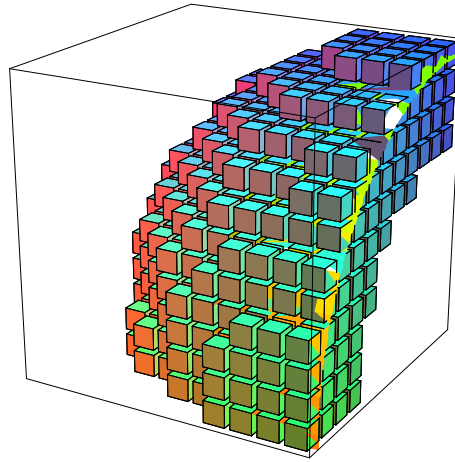


Abbildung 3.12: *Dreidimensionale Darstellung der Zellen, in denen die Extrapolation stattfindet. Der Sonnenrand ist in diesem Beispiel mit 10 Zellen pro Dimension aufgelöst, entsprechend einer Zellengröße von $\Delta x = 0,1$ in jeder Richtung. Die einzelnen Zellen wurden hier verkleinert dargestellt, um durch den fiktiven Zwischenraum die räumliche Struktur der Anordnung klarer hervortreten zu lassen.)*

aus der Gültigkeit von (3.141) zu einem Zeitpunkt deren Gültigkeit zu allen Zeiten folgt. Wird das kontinuierliche Feld \mathbf{B} wie hier durch Komponentenwerte auf einem endlichen, diskreten Gitter approximiert, so kann die Bedingung (3.141) im Allgemeinen nur bis auf Rundungsfehler gelten. Diese Rundungsfehler können sich im Verlaufe der Simulation zu merklicher Größe aufsummieren, und so schnell zu einer wachsenden Verfälschung der Magnetfeldtopologie führen. Es ergibt sich daher die Notwendigkeit, durch zusätzliche Maßnahmen zu gewährleisten, dass $(\nabla \cdot \mathbf{B})_{\text{num}}$ „klein“ bleibt. Um diese Forderung zu präzisieren, bedarf es eines Vergleichsausdrucks, der (wie $\nabla \cdot \mathbf{B}$) proportional ist zu $\|\mathbf{B}\|$ geteilt durch eine Längenskala, auf der sich \mathbf{B} merklich ändert. Das dazu gelegentlich verwandte Kriterium

$$|\nabla \cdot \mathbf{B}|_{\text{num}} \ll \|\nabla \times \mathbf{B}\|_{\text{num}} \quad (3.143)$$

ist leider ungeeignet in Situationen mit $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, wie sie gerade beim Sonnenwind (z. B. bei der Dipol-Startlösung, siehe Abschnitt 4.3.1) häufig auftreten. Aus diesem Grund soll hier statt dessen der Ausdruck

$$|\nabla \cdot \mathbf{B}|_{\text{num}} \ll \|\nabla \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}\|_{\text{num}} \quad (3.144)$$

zum Einsatz kommen.

Auswahl der Verfahren

Aus der Vielzahl der existierenden Verfahren zur Reduzierung von Divergenzfehlern (für eine Übersicht siehe Tóth [2000]) wurden für diese Arbeit zwei Strategien ausgewählt:

- eine Erweiterung des bestehenden Gleichungssystems, die $\nabla \cdot \mathbf{B}$ durch Dämpfung und Advektion zum Rand hin vermindert, und
- ein *Projektionsverfahren*, welches das Magnetfeld auf den Unterraum der divergenzfreien Felder projiziert.

Beide werden in den Abschnitten 3.6.1 bzw. 3.6.2 beschrieben und in Abschnitt 4.3.3 auf ihre praktische Anwendbarkeit für das vorliegende MHD-Modell geprüft und verglichen.

Der Sonnenrand als Quelle von $\nabla \cdot \mathbf{B}$

Neben der geschilderten Unvollkommenheit numerischer Verfahren stellen innere Ränder, auf denen das Magnetfeld im Sinne einer Randbedingung fixiert wird, eine weitere Quelle von $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ dar. An solch einer Grenzfläche \mathcal{S} stößt das in der Zeit entwickelte Feld \mathbf{B}_t an das vorgegebene Magnetfeld \mathbf{B}_0 . Jedes Verfahren zur Aufrechterhaltung der Randbedingung vereinigt in der Umgebung von \mathcal{S} beide Felder zu einem „Mischfeld“

$$\mathbf{B}_{\text{av}} := f \mathbf{B}_0 + (1 - f) \mathbf{B}_t . \quad (3.145)$$

Diese Sichtweise schließt die Möglichkeit von Interpolationen wie (3.135) ebenso ein wie ein einfaches Überschreiben im Inneren. (In diesem Fall wäre f als

$$f(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{r} \text{ innerhalb von } \mathcal{S} \\ 0 & : \mathbf{r} \text{ außerhalb von } \mathcal{S} \end{cases} \quad (3.146)$$

zu verstehen.) Selbst wenn \mathbf{B}_0 divergenzfrei gewählt wurde, und nach jedem Zeitschritt stets $\nabla \cdot \mathbf{B}_t = 0$ wäre, so trägt das nach (3.145) gebildete Feld in der Umgebung von \mathcal{S} wegen

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{av}} = \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B}_0)}_{=0} - \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B}_t)}_{=0} f + (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_t) \cdot \nabla f \neq 0 \quad (3.147)$$

dennoch eine massive Verletzung der Divergenzfreiheit¹³, die hier zudem vom Sonnenwind sehr schnell in vormals divergenzfreie Bereiche advektiert würde. Auch aus diesem Grund sind Strategien zur Gewährleistung der Divergenzbedingung (3.141) unverzichtbar.

¹³Dieses Argument gilt unabhängig von der Größe des Trägers von $\|\nabla f\|$. Die Breite der Zone, in der $\nabla f \neq \mathbf{0}$ ist, kann zwar durch Wahl von f beliebig klein gemacht werden; $\|\nabla f\|$ selbst wird dort folglich aber beliebig groß.

3.6.1 Das GLM-Verfahren

Beim sog. GLM-Verfahren — die Abkürzung steht für *Generalized Lagrange Multiplier* — wird die $(\nabla \cdot \mathbf{B} = 0)$ -Bedingung mit einem orts- und zeitabhängigen Lagrange-Multiplikator Ψ an die dynamische Gleichung für \mathbf{B} gekoppelt. Dedner et al. [2002] untersuchen verschiedene Realisierungsmöglichkeiten dieses Prinzips und empfehlen ein Vorgehen, bei dem die nicht-resistive Form der Induktionsgleichung (2.59) durch

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}) = -\nabla \Psi \quad (3.148)$$

zu ersetzen ist; die neue Größe $\Psi(\mathbf{r}, t)$ wird — ausgehend von der Anfangsbedingung $\Psi(\mathbf{r}, 0) = 0$ — durch die zusätzliche Gleichung

$$\partial_t \Psi + (c_h)^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = - \left(\frac{c_h}{c_p} \right)^2 \Psi \quad (3.149)$$

zusammen mit den anderen dynamischen Variablen in der Zeit integriert. Die Wirkung dieser Gleichung (3.149) auf Ψ (und $\nabla \cdot \mathbf{B}$) besteht zum einen in einer Dämpfung mit der Zeitkonstanten $\tau_d := (c_p/c_h)^2$, während andererseits eine Advektion (unter anderem) zum Rand des Rechenvolumens stattfindet. c_h ist dabei die Geschwindigkeit, mit der Ψ advektiert wird, und hat idealerweise den gemäß des CFL-Kriteriums (3.3) maximal zulässigen Wert \mathcal{V} . Die zweite Konstante c_p wird Dedner et al. [2002] folgend durch

$$(c_p)^2 = 0,18 c_h \quad (3.150)$$

festgelegt.

Der wesentliche Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass die Gleichungen (3.148) und (3.149) beide die für CWENO erforderliche Gestalt (3.1) haben, und ihre Integration daher leicht in den vorhandenen Code eingeschlossen werden kann, ohne dessen Struktur ändern zu müssen; insbesondere bleiben Erhaltungssätze unverändert gültig.

3.6.2 Projektionsverfahren

Das Prinzip

Das so genannte *Projektionsverfahren* wurde von Chorin [1967; 1968; 1969] für die numerische Suche nach inkompressiblen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung entwickelt; seine Anwendung auf das Magnetfeld im Rahmen von MHD-Simulationen geht auf Brackbill & Barnes [1980] zurück. Die Idee besteht darin, das vorhandene Magnetfeld auf den Unterraum der divergenzfreien Vektorfelder zu projizieren. Dazu wird in einem ersten Schritt zunächst die Poissongleichung

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (3.151)$$

für Φ gelöst. Dessen Gradient wird von \mathbf{B} subtrahiert:

$$\mathbf{B}' := \mathbf{B} - \nabla \Phi . \quad (3.152)$$

Das so bestimmte Feld \mathbf{B}' ist dann wegen

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' = \nabla \cdot (\mathbf{B} - \nabla \Phi) = \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.153)$$

nach Konstruktion divergenzfrei.

Diskretisierung

Die numerische Implementierung der Gleichungen (3.151) und (3.152) verlangt nach einer Diskretisierungsvorschrift für die Operatoren ∇ , $\nabla \cdot$ und ∇^2 , die durch die Wahl der diskretisierten Form der Divergenzbedingung festgelegt ist. In unserem Fall entscheiden wir uns für die einfache zentrierte Form

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{B})_{\text{num}} &:= \frac{(B_x)_{i+1,j,k} - (B_x)_{i-1,j,k}}{2 \Delta x} \\ &+ \frac{(B_y)_{i,j+1,k} - (B_y)_{i,j-1,k}}{2 \Delta y} \\ &+ \frac{(B_z)_{i,j,k+1} - (B_z)_{i,j,k-1}}{2 \Delta z}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Durch Einsetzen folgt sofort, dass wir die Operatoren ∇ und ∇^2 gemäß

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi)_{\text{num}} &:= \left(\frac{\Phi_{i+1,j,k} - \Phi_{i-1,j,k}}{2 \Delta x} \right) \mathbf{e}_x \\ &+ \left(\frac{\Phi_{i,j+1,k} - \Phi_{i,j-1,k}}{2 \Delta y} \right) \mathbf{e}_y \\ &+ \left(\frac{\Phi_{i,j,k+1} - \Phi_{i,j,k-1}}{2 \Delta z} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.155)$$

und

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \Phi)_{\text{num}} &:= \frac{\Phi_{i+2,j,k} - 2\Phi_{i,j,k} + \Phi_{i-2,j,k}}{(2 \Delta x)^2} \\ &+ \frac{\Phi_{i,j+2,k} - 2\Phi_{i,j,k} + \Phi_{i,j-2,k}}{(2 \Delta y)^2} \\ &+ \frac{\Phi_{i,j,k+2} - 2\Phi_{i,j,k} + \Phi_{i,j,k-2}}{(2 \Delta z)^2} \end{aligned} \quad (3.156)$$

zu diskretisieren haben.

Die Wahl (3.154) ist natürlich keinesfalls eindeutig; statt der hier verwandten Form wären z. B. auch Diskretisierungen höherer Ordnung denkbar. Ebenso könnte man etwa die Komponenten von \mathbf{B} in jedem Gitterpunkt (i, j, k) durch Polynomfunktionen $P_{(x|y|z)}$ approximieren und fordern, dass das Volumenintegral des resultierenden Divergenzfeldes

$$\int_V (\partial_x P_x + \partial_y P_y + \partial_z P_z) dV \equiv \int_{\partial V} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{F} \quad (3.157)$$

über die Gitterzelle V (bzw. der Fluss des Vektors $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)^T$ durch die Oberfläche der Zelle) verschwinden möge.

Die Diskretisierung der Poissongleichung (3.151) auf einem Gitter der Größe N^3 führt auf ein gekoppeltes System von ebenfalls N^3 linearen algebraischen Gleichungen für $\Phi_{i,j,k}$. Die direkte Lösung dieses Systems würde für jeden Zeitschritt die Invertierung einer $(N^3 \times N^3)$ -Matrix erfordern, was schon für moderate Werte von N schnell an praktische Grenzen stößt. Aus diesem Grund sollen statt dessen iterative Lösungsverfahren zum Einsatz kommen, speziell die weiter unten beschriebenen Verfahren nach GAUSS-SEIDEL bzw. dessen durch *successive overrelaxation* (siehe Abschnitt 3.6.2) verbesserte Version.

Randbedingungen für Φ

Unabhängig vom gewählten Projektionsverfahren erfordert die Lösung der Poissongleichung (3.151) die Vorgabe von Werten von Φ auf dem (in diesem Falle zwei Zellen breiten) Rand des Gebietes. Zwar wird das resultierende Feld \mathbf{B}' unabhängig von diesen Randwerten in jedem Fall numerisch (nahezu) divergenzfrei sein, allerdings werden dabei die an \mathbf{B} gestellten Randbedingungen i. d. R. zerstört (bzw. zerstört deren nachträgliche Wiederherstellung die bereits erzielte Divergenzfreiheit). Soll eine für \mathbf{B} geltende Randbedingung auch für \mathbf{B}' Bestand haben, so müssen wir nach Gleichung (3.152) die Gültigkeit der gleichen Randbedingung auch für $\nabla\Phi$ fordern. Für jede Komponente $u \in \{x, y, z\}$ bedeutet dies am Rand $u \in \{u_{\min}, u_{\max}\}$:

$$B_u \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{periodisch} \\ \text{symmetrisch} \\ \text{antisymmetrisch} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{periodisch} \\ \text{antisymmetrisch} \\ \text{symmetrisch} \end{array} \right\} \text{ zu w\"ahlen.}$$

Zusammen mit der Diskretisierung (3.155) ergeben sich hieraus die Vorschriften, nach denen die Randwerte aus den Werten der innen gelegenen Punkte zu berechnen sind. Einzig die Randbedingung „Extrapolation“ kann nicht auf diese Weise behandelt werden, da die Iterationsvorschrift in diesem Fall numerisch instabil wird.¹⁴ Anhang C.1 motiviert dies anhand eines Spezialfalls. Statt dessen wird $\Phi_{i,j,k}$ auf dem Rand nun so gewählt, dass z. B. für die x -Richtung $\Phi_{i-1,j,k} = \Phi_{i+1,j,k}$ gilt, und der Projektionsschritt in Richtung des Randes somit keinen Beitrag zu $(\nabla\Phi)_{\text{num}}$ liefert.

¹⁴Im Gegensatz zu den Randbedingungen des hyperbolischen Systems, die sich mit nur endlichen Geschwindigkeiten im Gebiet ausbreiten, beeinflusst die Φ -Randbedingung der elliptischen Poissongleichung instantan das Verhalten von \mathbf{B} im gesamten Gebiet. Daher ist das in Abschnitt 2.7.2 verwandte Argument, dem zufolge die äußeren Randbedingungen nur bei „langsamen“ Fluidgeschwindigkeiten merklichen Einfluss auf das Verhalten im Simulationsgebiet nehmen können, hier nicht gültig.

Ablauf der Iteration

Die Differenzgleichung

$$(\nabla^2 \Phi)_{\text{num}} = (\nabla \cdot \mathbf{B})_{\text{num}} =: S \quad (3.158)$$

kann zusammen mit (3.156) nach $\Phi_{i,j,k}$ aufgelöst werden, und führt mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{h^2} := \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \quad (3.159)$$

und

$$D_{i,j,k} := \frac{\Phi_{i+2,j,k} + \Phi_{i-2,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i,j+2,k} + \Phi_{i,j-2,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{\Phi_{i,j,k+2} + \Phi_{i,j,k-2}}{(\Delta z)^2} \quad (3.160)$$

auf

$$\Phi'_{i,j,k} \leftarrow \Phi_{i,j,k}^{\text{GS}} := \frac{h^2}{2} (D_{i,j,k} - 4 S_{i,j,k}) \quad (3.161)$$

als iterative Bestimmungsgleichung¹⁵ für die neuen Werte $\Phi'_{i,j,k}$. Das Verfahren besteht also aus folgenden Schritten:

1. Initialisierung von $\Phi_{i,j,k}$ mit Anfangswerten (z. B. Null)
2. Setzen der Randbedingungen gemäß des oben dargestellten Prinzips
3. Punktweises Anwenden der Iterationsvorschrift (3.161)
4. Wiederholung ab Punkt 2, falls

$$\sum_{i,j,k} \|\Phi'_{i,j,k} - \Phi_{i,j,k}\| \geq \varepsilon_p \quad (3.162)$$

mit einer vorzugebenden Schranke $\varepsilon_p > 0$

5. Subtraktion des Gradienten der konvergierten Lösung Φ gemäß (3.155) und (3.152).

¹⁵Der obere Index GS kennzeichnet (3.161) als sog. *Gauß-Seidel-Verfahren*, bei dem — im Gegensatz zum *Jacobi-Verfahren* — die neuen Werte $\Phi'_{i,j,k}$ sequenziell statt simultan berechnet werden. Das Gauß-Seidel-Verfahren ist einfacher zu implementieren und konvergiert schneller. Der Umstand, dass die Zwischenergebnisse von der Reihenfolge der Punkte bei der Berechnung abhängen, fällt hier nicht ins Gewicht.

Konvergenzbeschleunigung

Die Konvergenz des Iterationsverfahrens (3.161) kann erheblich beschleunigt werden, wenn statt dessen die modifizierte Vorschrift

$$\Phi'_{i,j,k} = (1 - \omega) \Phi_{i,j,k} + \omega \Phi_{i,j,k}^{\text{GS}} \quad (3.163)$$

mit dem Relaxationsparameter $\omega \in [1, 2[$ verwandt wird. Der neue Wert $\Phi'_{i,j,k}$ wird also aus der alten Lösung extrapoliert, wobei $\omega = 1$ das herkömmliche Gauß-Seidel-Verfahren (3.161) liefert. Das Schema (3.163) wird in der Literatur als *successive overrelaxation* bezeichnet. Für $\omega \geq 2$ konvergiert das Verfahren i. d. R. nicht mehr.

Die Wahl des optimalen Parameters $\omega = \omega_{\text{opt}}$ gestaltet sich im Allgemeinfall schwierig; siehe dazu die detailreiche Analyse von Forsythe & Wasow [1960]. Für den Fall eines rechteckigen Gitters der Größe $N_1 \times \dots \times N_d$ und verschwindendem Quellterm S konnte allerdings von Young [1954] die Beziehung

$$(\bar{\mu} \omega_{\text{opt}})^2 - 4(\omega_{\text{opt}} - 1) = 0 \quad (3.164)$$

gezeigt werden, wobei

$$\bar{\mu} := \sum_{k=1}^d \left[\frac{1}{h_k^2} \left(\sum_{j=1}^d \frac{1}{h_j^2} \right)^{-1} \right] \cos \left(\frac{\pi}{N_k} \right) \quad (3.165)$$

zu setzen ist und h_k (wie schon in Abschnitt 3.1.1) den Abstand der Gitterpunkte in Richtung k bezeichnet. Gilt speziell $N_k = N$ und $h_k = h$ für alle $k \in \{1, \dots, d\}$, so ergibt sich also einfach $\bar{\mu} = \cos(\pi/N)$ und damit

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2 \left[1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2} \right]}{\bar{\mu}^2} = \frac{2 \left[1 - \sqrt{1 - \cos^2(\pi/N)} \right]}{\cos^2(\pi/N)} = \frac{2}{1 + \sin(\pi/N)}. \quad (3.166)$$

Obwohl im vorliegenden Fall das Verfahren mit dem Quellterm $(\nabla \cdot \mathbf{B})_{\text{num}} \neq 0$ betrieben wird, verwenden wir im Folgenden dennoch den ω -Wert nach (3.164) bzw. (3.165). Die so erzielte beachtliche Konvergenzbeschleunigung (siehe Tabelle 4.1) rechtfertigt dieses Vorgehen *a posteriori*.

Kapitel 4

Sonnenwind-Simulationen

In diesem Kapitel werden die durchgeführten Simulationsrechnungen des Sonnenwindes diskutiert. Während sich die bisher in der Literatur dokumentierten Anwendungen des CWENO-Schemas praktisch ausschließlich auf klassische Numerik-Testfälle beschränken, bildet die vorliegende Arbeit die erste Anwendung auf die dynamische Modellierung der inneren Heliosphäre, und stellt damit — zusammen mit den von Kissmann et al. [2005] durchgeführten Simulationen zur interstellaren Turbulenz — die bisher einzigen CWENO-Anwendungen auf astrophysikalische Problemstellungen überhaupt dar.

Ausgehend von einer Reproduktion des einfachsten aller Windmodelle, dem in Anhang A.1 vorgestellten isothermen Parker-Sonnenwind, wird die Komplexität des Modells stufenweise erhöht durch den Übergang zu nichtisothermen, dann zu magnetisierten Szenarien. Abschließend werden CME-Expansionsstudien für MHD-Winde vorgestellt.

4.1 Konvergenz zur Parker-Lösung

Das allgemeine Vorgehen zur Herstellung stabiler MHD-Gleichgewichte besteht darin, ausgehend von einer (innerhalb gewisser Grenzen) willkürlich gewählten Startkonfiguration die dynamischen MHD-Gleichungen in der Zeit zu integrieren, bis schließlich ein hinreichend stationärer Zustand erreicht ist. Dieser kann dann mit der bekannten Lösung aus Anhang A.1 verglichen werden.

Aufgrund der radialen Symmetrie des Parker-Modells genügt es, nur einen Oktanten zu betrachten; die Geometrie entspricht somit der in Abbildung 3.10 dargestellten. Zusätzliche Maßnahmen zur Beschleunigung der Konvergenz, wie z. B. künstliche Rückstellkräfte oder formal konstante Dichten [Rastätter 1997], werden nicht verwendet.

4.1.1 Die Startkonfiguration

Zunächst sind für die Variablen $v(r, t)$ und $\rho(r, t)$ sinnvolle Startprofile für $t = 0$ zu wählen.

Das initiale Geschwindigkeitsprofil sollte der Randbedingung $v(r, 0)|_{r=1} = v(1, 0) = 0$ genügen, nach außen monoton und stetig differenzierbar ansteigen, und (aus Gründen der Konvergenzbeschleunigung) in der Größenordnung der erwarteten Parker-Lösung liegen. Zur Vermeidung von Rand-Artefakten sollte am Rand einerseits eine Überschall-Strömung vorliegen, andererseits wirkt sich ein hoher Maximalwert durch die CFL-Bedingung (3.3) ungünstig auf den zulässigen Zeitschritt aus. Daher wird am Radius des innersten Randpunktes

$$r_m := \min\{(N_x \Delta x, N_y \Delta y, N_z \Delta z)\} \quad (4.1)$$

eine maximale Geschwindigkeit v_m vorgegeben und durch

$$v(r, 0) = \frac{v_m}{2r_m - 3} \times \begin{cases} 0 & : r < 1 \\ (r - 1)^2 & : r \in [1, 2] \\ 2r - 3 & : r > 2 \end{cases} \quad (4.2)$$

ein stetig differenzierbares Profil konstruiert.

Das initiale Dichteprofil $\rho(r, 0)$ hat die Randbedingung $\rho(1, 0) = \rho_0$ zu erfüllen und von dort rasch nach außen abzufallen. Eine einfache Wahl ist z. B. die Funktion $\rho(r, 0) = \rho_0 r^{-3}$. Deren Polstelle bei $r = 0$ wird aus praktischen Gründen innerhalb von $r < r_c := 1/2$ durch den stetig differenzierbaren Übergang in eine geeignet gewählte Polynomfunktion abgefangen. Insgesamt ergibt sich so:

$$\rho(r, 0) = \rho_0 \times \begin{cases} \frac{1}{2(r_c)^3} \left[5 - 3 \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right] & : r \leq r_c \\ \frac{1}{r^3} & : r > r_c \end{cases} . \quad (4.3)$$

Alternativ könnte daran gedacht werden, $\rho(r, 0)$ durch

$$\rho(r, 0) \propto \frac{1}{r^2 v(r, 0)} \quad (4.4)$$

festzulegen, was einem räumlich konstanten Massefluss entspräche. Diese Möglichkeit muss hier allerdings wegen $v(1, 0) = 0$ verworfen werden. Als Temperaturprofil kommt nur die isotherme Lösung $T(r, 0) = T_0$ in Frage.

4.1.2 Vergleich der Behandlung von $\|\mathbf{u}\|_{r=1}$

Nachdem in Abschnitt 2.7.2 die beiden möglichen Verfahren der Behandlung von \mathbf{u} am Sonnenrand — feste Dirichlet-Randbedingung $u = 0$ oder freie Extrapolation — diskutiert wurden, und die konkrete numerische Extrapolationsmethode in Abschnitt 3.5.3 vorgestellt wurde, sollen nun beide Verfahren miteinander verglichen werden. Das für diese Untersuchung verwendete Gitter teilt den physikalischen Raum $[0, 3]^3 \subset \mathbb{R}^3$ in 30^3 Zellen

der Länge $\Delta x = 0,1$; die Parameter der Startlösung sind $\rho_0 = 1$, $T_0 = 2,25$ und $v_m = 2$. Der Zeitschritt $\Delta t = 0,005$ liefert anfänglich $C_{\text{CFL}} \approx 0,16$, einen im Sinne der numerischen Stabilität eher konservativen Wert.

Abbildung 4.1 vergleicht die Geschwindigkeitsprofile der konvergierten Lösungen sowie einiger Zwischenschritte, indem zu einem Zeitpunkt für jede Zelle Geschwindigkeit gegen Radius aufgetragen wird. Wie erwartet weicht das Dirichlet-Verfahren bei kleinen Radien von der Parker-Lösung ab, da diese nicht mit der Randbedingung $v(1) = 0$ verträglich ist. Da bei dieser Art der Darstellung tatsächlich *alle* Gitterpunkte erfasst werden, lässt sich auch der Grad der Abweichung von der radialen Symmetrie des Problems beurteilen. Auch in dieser Hinsicht scheint das Extrapolationsverfahren der starren Bedingung $u = 0$ überlegen zu sein: Die Datenpunkte bei einem gegebenen Radius liegen deutlich enger zusammen.

Dennoch kann festgestellt werden, dass die stationären Profile in beiden Fällen gut mit der analytischen Lösung übereinstimmen, und die quantitativen Unterschiede zwar merklich, doch insgesamt gering ausfallen. Die Überlegenheit des Extrapolationsverfahrens wird mit einer etwas aufwändigeren Implementierung erkaufte.

4.2 Nicht-isotherme Winde

Eine erste Verallgemeinerung besteht in der Aufgabe der isothermen Zustandsgleichung zugunsten einer expliziten Integration der Energiegleichung. Wie schon in Abschnitt 2.6.1 erläutert, bedarf es in diesem Fall einer Heizfunktion, um den Verlust an thermischer Energie durch *adiabatische Kühlung* zu kompensieren.

Wirkung der Heizfunktion

Zunächst wird die vorhergegangene Relaxation zur Parker-Lösung für den Fall $\gamma = 5/3$ (statt $\gamma = 1$) wiederholt, wobei die isotherme Heizfunktion (2.70) Verwendung findet. (Dies entspricht einer relativen Heizfunktion (2.73) mit dem Parameter $H = 0$; im Idealfall sollte die Temperatur also an jedem Ort konstant bleiben.) Die Simulation erstreckt sich nun über das Volumen $[0,4]^3$ mit 40 Gitterzellen in jeder Richtung; die Zellengröße liegt also unverändert bei $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1$. Abbildung 4.2 zeigt die Temperaturprofile zu verschiedenen Zeiten, sowie wiederum für die beiden Varianten Extrapolation/Dirichlet-Randbedingung. Auch hier machen sich für letztere einige Rand-Artefakte bemerkbar. Abgesehen davon liegen die maximalen Abweichungen bei ca. $\pm 1\%$, also deutlich im akzeptablen Bereich.

In Abbildung 4.3 ist die Wirkung der Heizfunktion für die Parameter $H = 1$ und $h = 2$ (entsprechend einer Heizwirkung nahe $r = 2$) dargestellt. Auch hier bleibt die radiale Symmetrie des Problems erhalten. Durch die advektierende Wirkung der Windströmung verschieben sich die Maxima von $T(r)$ und $q(r)$ leicht gegeneinander.

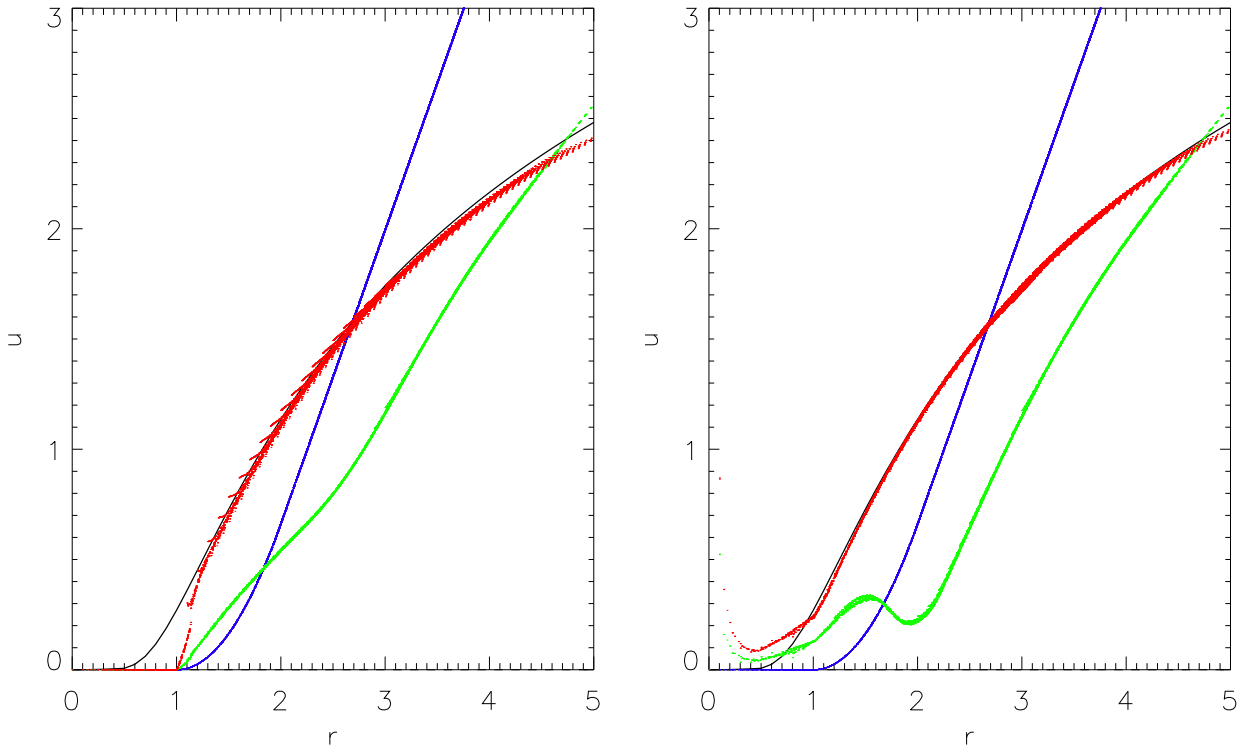


Abbildung 4.1: Vergleich der beiden Varianten zur Behandlung der Geschwindigkeit am Rand $r = 1$. Links Dirichlet-Randbedingung $u(1) = 0$, rechts freie Extrapolation der radialen Impulsdichte ρ_r . Dargestellt sind jeweils die Wertepaare $(\|\mathbf{r}_{ijk}\|, \|\mathbf{u}_{ijk}\|)$ für alle Punkte \mathbf{r}_{ijk} des Gitters zu den Zeitpunkten $t = 0$ (blau), $t = 1$ (grün) und im Endzustand $t = 8$ (rot), sowie die zugehörige Parker-Lösung (schwarz). Der maximale Radius ist gleich $\|(3, 3, 3)^T\| = 3\sqrt{3} \approx 5,2$.

Azimutale Variation der Heizrate

Ebenfalls besteht die Möglichkeit, der Heizfunktion eine zusätzliche Winkelabhängigkeit zu verleihen. Obwohl in den CME-Expansionsstudien (Abschnitt 4.4) von dieser Möglichkeit im Allgemeinen abgesehen wird, so stellt sie doch einen weiteren Test für die Stabilität der sich einstellenden Temperaturverteilung dar. Für diese Betrachtung wird die relative Heizfunktion

$$\hat{q}(r, \vartheta) = (1 + w \cos \vartheta) q(r) \quad (4.5)$$

mit einer Anisotropie-Konstanten $w > 0$ und den unveränderten Parametern $H = 1, h = 2$ verwendet; die Starttemperatur (und damit die Randbedingung für $T|_{r=1}$) ist $T_0 = 1, 2$. Nach der Zeit $t = 8$ hat sich das in Abbildung 4.4 wiedergegebene Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil eingestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass sich auch bei in azimu-

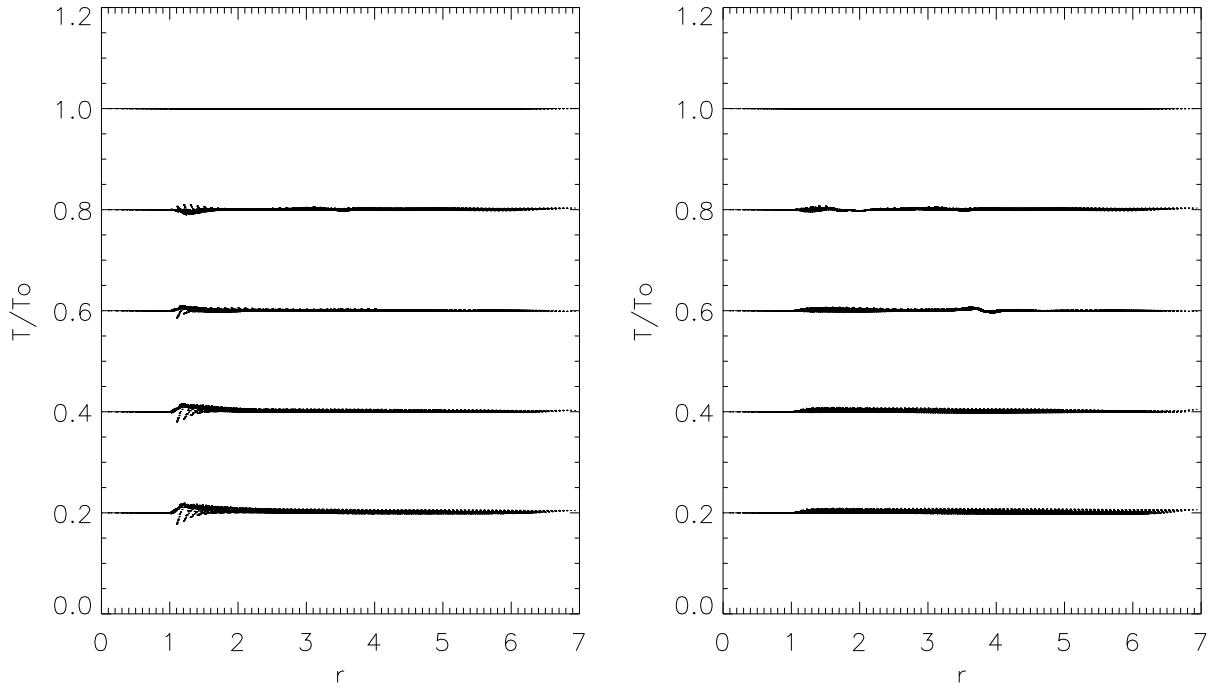


Abbildung 4.2: Radiale Temperaturprofile für $\gamma = 5/3$, wie sie sich bei Verwendung der isothermen Heizfunktion (2.70) ergeben, zu den Zeitpunkten $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Alle Profile sind auf die Startlösung $T(r) = T_0 = 2,25$ normiert; aus Darstellungsgründen sind jene zur Zeit $t = n$ um $\Delta T = 0,2 n$ nach unten verschoben. Wie schon im Falle von Abbildung 4.1 wurden auch hier alle 40^3 Datenpunkte eingezeichnet. Links wurde wiederum die freie Extrapolation, rechts die fixe Randbedingung $u(1) = 0$ verwendet. Die schon aus Abbildung 4.1 bekannten Artefakte übertragen sich offenbar in recht direkter Weise auf die Temperatur.

taler Richtung variierender Heizrate im Gleichgewicht eine stabile Temperaturverteilung einstellt, die die genannte $\cos \vartheta$ -Abhängigkeit von \hat{q} in der zu erwarteten Weise wiedergibt.

4.3 Konvergenz magnetisierter Winde

In den vorangegangenen Abschnitten 4.1 und 4.2 konnte die Fähigkeit des im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten CWENO-basierten Codes zur Generierung einfacher, physikalisch sinnvoller Gleichgewichtslösungen hydrodynamischer Windmodelle erfolgreich demonstriert werden. In einem nächsten Schritt folgt nun die wichtige Erweiterung um Wechselwirkung mit dem solaren Magnetfeld.

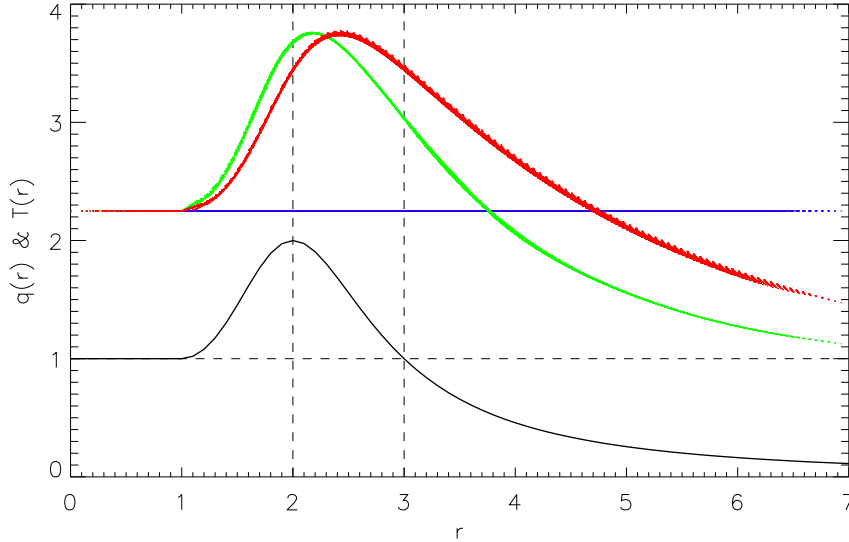


Abbildung 4.3: Die relative Heizfunktion (2.73) für die Parameter $H = 1$, $h = 2$ (schwarz und durchgezogen gezeichnet) und das sich daraus ergebende Temperaturprofil zu verschiedenen Zeiten. Die Farbzuordnung ist identisch mit der aus Abbildung 4.1. Das sich einstellende Temperaturprofil (rot) entspricht qualitativ der Form von $q(r)$, wobei die Lage von Maximum und zweitem Nulldurchgang (gestrichelt) durch die Windströmung merklich nach außen verschoben werden.

4.3.1 Das initiale Magnetfeld

Für die Wahl des „Startfeldes“ $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{B}|_{t=0}$ bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. Für das solare Minimum gebräuchlich sind u. a. Dipole mit und ohne explizite Stromschicht [Banaszkiewicz et al. 1998], Quadrupolfelder [Manchester et al. 2004] sowie Kombination von Monopol- und Dipolanteilen [Keppens & Goedbloed 1999]. Beliebte sind sog. Gleichgewichtslösungen, also kraftfreie Felder, die wegen

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

definitionsgemäß keinen Beitrag zur Kräftebilanz in der Impulsgleichung liefern. Soll (wie in diesem Fall) die Rückwirkung von \mathbf{u} auf \mathbf{B} in vollem Umfang durch die Induktionsgleichung berücksichtigt werden, so wird die Kraftfreiheit (4.6) im Allgemeinen schon nach kurzer Zeit nicht mehr gelten, und die Forderung, \mathbf{B}_0 möge die Bedingung (4.6) erfüllen, verliert an Bedeutung.

Das Feld sollte achsialsymmetrisch sein, die Nord-Süd-Symmetrieverhältnisse der ruhigen Sonne (Übergang $(B_x, B_y, B_z) \rightarrow (B_x, B_y, -B_z)$ bei Spiegelung an der Äquatorebene, siehe Abbildung 1.1) wiedergeben, und dabei eine möglichst einfache Gestalt haben. Die

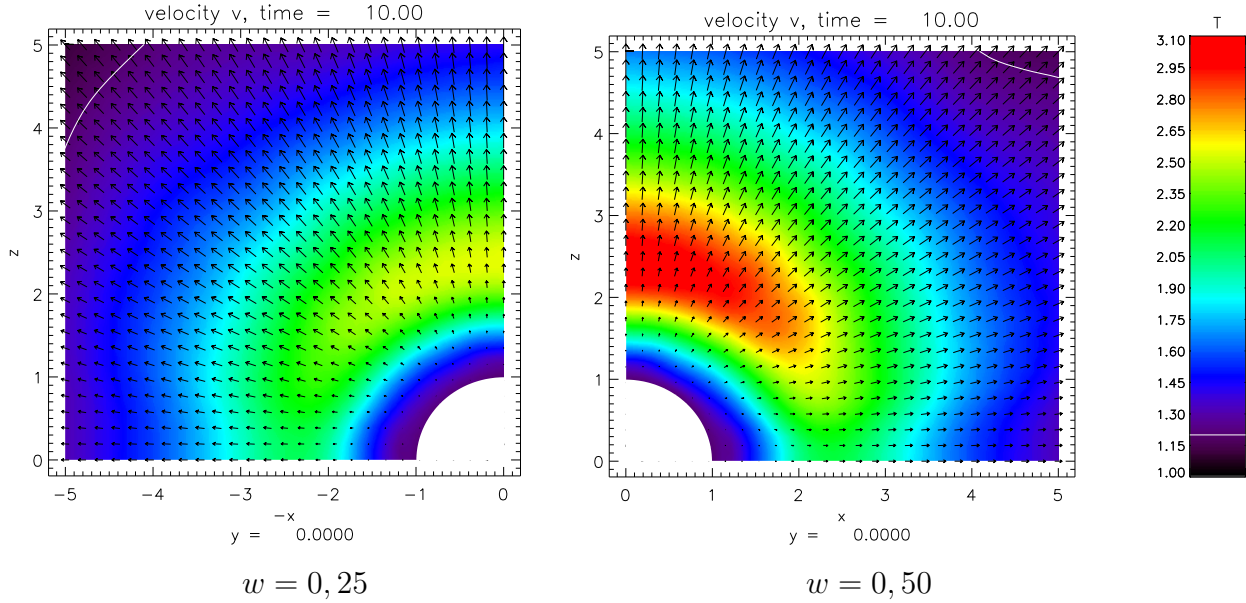


Abbildung 4.4: Konturplot der stationären Temperaturverteilung für die anisotrope Heizfunktion (4.5), kombiniert mit einem Vektorplot der Geschwindigkeit für zwei verschiedene Werte des Parameters w . Die Randtemperatur $T_0 = 1, 2$ (dimensionslos bzw. in Einheiten von 10^6 K) ist als zusätzliche Höhenlinie gezeichnet.

Divergenzfreiheit von \mathbf{B}_0 wird sichergestellt durch Verwendung des zugehörigen Vektorpotentials \mathbf{A}_0 , für welches im Hinblick auf die gewünschte achsiale Symmetrie die Formulierung

$$\mathbf{A}_0 = \frac{F(r)}{r} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \quad (4.7)$$

nach Tsinganos & Low [1989] mit einer frei wählbaren Funktion $r \mapsto F(r)$ sinnvoll erscheint. Das dadurch definierte Magnetfeld

$$\mathbf{B}_0 := \nabla \times \mathbf{A}_0 = \left(\frac{2F(r)}{r^2} \cos \vartheta \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{F'(r)}{r} \sin \vartheta \right) \mathbf{e}_\vartheta \quad (4.8)$$

weist die gewünschten Eigenschaften auf und ist nach Konstruktion analytisch divergenzfrei. Da die Startlösung \mathbf{B}_0 (im Gegensatz zu \mathbf{B}) auch im Code durch (4.8) dargestellt wird, gilt dies sogar numerisch bis zur Maschinengenauigkeit.

Der Fluss von \mathbf{B}_0 durch eine (z. B. die obere) Hemisphäre Ω_+ am Radius r ist gerade

$$\int_{\Omega_+} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{e}_r \, dF = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} B_r \, r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi F(r) , \quad (4.9)$$

wodurch $F(r)$ eine gewisse anschauliche Interpretation erhält. (Der Fluss durch die gesamte Kugel­fläche $\Omega_+ \cup \Omega_-$ ist natürlich Null.) Speziell für $F(r) = P_0/r$ ergibt sich

$$\mathbf{B}_0 = P_0 \left(\frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin \vartheta}{r^3} \mathbf{e}_\vartheta \right), \quad (4.10)$$

das Feld eines Punktdipols mit Dipolmoment P_0 . Die Wahl $F(r) = F_0$ liefert hingegen das radiale Feld

$$\mathbf{B}_0 = \left(\frac{2F_0 \cos \vartheta}{r^2} \right) \mathbf{e}_r, \quad (4.11)$$

dessen Feldstärke antisymmetrisch zu seiner äquatorialen Nullebene verläuft. Durch geschickte Wahl von $F(r)$ können also verschiedene Mischformen erzeugt werden, die alle­sam den oben an \mathbf{B}_0 gestellten Anforderungen genügen.

Die ($\mathbf{u} \parallel \mathbf{B}$)-Bedingung am Sonnenrand

Die Randbedingungen für Strömungs- und Magnetfeld sollten mit der Annahme „eingefrorener“ Feldlinien verträglich sein, d. h. im Bereich von $r = 1$ sollte

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

gelten. Zuzufolge der Induktionsgleichung ist damit insbesondere $\partial_t \mathbf{B}|_{r=1} = \mathbf{0}$.

Im einfachsten Fall wird die Geschwindigkeit dort im Rahmen der Randbedingung, wie in Abschnitt 3.5.2 beschrieben, auf den Wert Null gesetzt. Dann gilt (4.12) für jedes beliebige Feld \mathbf{B} , und nichts spricht gegen eine möglichst einfache Wahl, wie z. B. den exakten Dipol (4.10).

Werden die Randwerte der Geschwindigkeit \mathbf{u} andererseits gemäß Abschnitt 3.5.3 durch freie Extrapolation nach innen bestimmt, so liegt dort ein Strömungsfeld der Gestalt $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) \mathbf{e}_r$ mit $u(\mathbf{r}) > 0$ vor. \mathbf{B} sollte in diesem Fall also auf jeden Fall radial bei $r = 1$ beginnen, und erst jenseits eines Radius r_0 glatt in die klassische Helmet-Struktur einmünden. Dieses Verhalten kann sehr leicht erreicht werden z. B. durch

$$F(r) := \begin{cases} F_0 & : r < r_0 \\ F_0 + (F_1 - F_0) \alpha(r) & : r \in [r_0, r_1] \\ F_1 & : r > r_1 \end{cases} \quad (4.13)$$

mit $r_0 < r_1$, $F_0 < F_1$ und einer Mittelungsfunktion $\alpha : [r_0, r_1] \rightarrow [0, 1]$, wie etwa

$$\alpha(r) := \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right). \quad (4.14)$$

Abbildung 4.5 stellt das Beispiel (4.13) und das resultierende Feldlinienbild grafisch dar. Da das Feld für große r lediglich asymptotisch radial werden soll, wäre z. B. auch

$$F(r) := \begin{cases} F_0 & : r < r_0 \\ F_1 + (F_0 - F_1) \exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right)^2 \right] & : r \geq r_0 \end{cases} \quad (4.15)$$

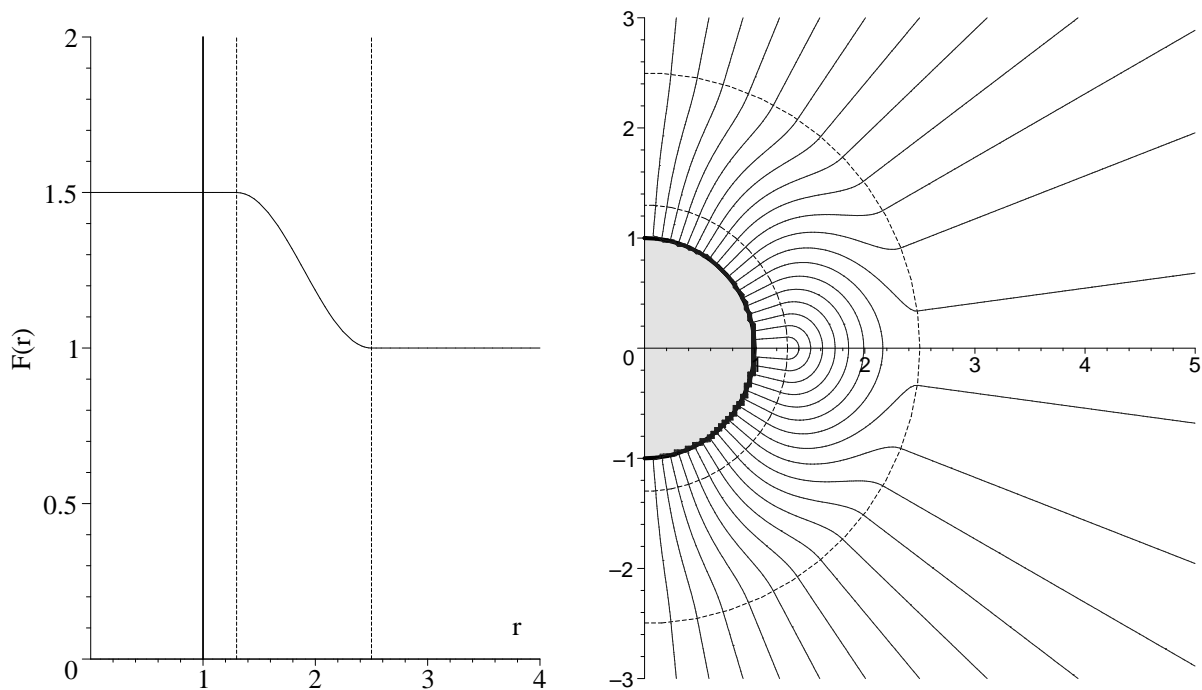


Abbildung 4.5: Links: Die Funktion (4.13) für die Parameter $r_0 = 1,3$, $r_1 = 2,5$, $F_0 = 1,5$ und $F_1 = 1,0$. Rechts: Feldlinienbild des resultierenden Magnetfeldes in der (x, z) - bzw. (r, ϑ) -Ebene. Die Feldlinien ergeben sich als Konturlinien der Flussfunktion $A_\varphi r \sin \vartheta = F(r) \sin^2 \vartheta$. Die Radien r_0 und r_1 sind in beiden Fällen als gestrichelte Linien dargestellt. Die Korrespondenz zwischen $F'(r) = 0$ und $\mathbf{B} \sim \mathbf{e}_r$ ist deutlich erkennbar.

eine gültige Wahl. Ebenfalls lassen sich auf diese Weise leicht fließende Übergänge zwischen radialem und dipolartigem Feld erzeugen, indem $F(r)$ in einer Übergangszone sanft von F_0 auf P_0/r wechselt.

Singularitätenfreie Fortsetzung

Das Feld (4.8) divergiert für $r \rightarrow 0$. Dies ist unkritisch für die Integration bezüglich t (die im Inneren nicht stattfindet), stellt aber ein Problem für das Projektionsverfahren aus Kapitel 3.6 dar, welches auf dem gesamten Gitter operiert.¹ Daher soll das Magnetfeld im Inneren einer kleinen Kugel mit Radius $R_t < 1$ um den Ursprung stetig differenzierbar in ein divergenz- und singularitätenfreies Ersatzfeld übergehen. Zu dessen Konstruktion

¹Man könnte natürlich daran denken, eine geeignet gewählte Umgebung des Ursprungs vom Iterationsverfahren auszunehmen. Da der Projektionsalgorithmus aber einen beachtlichen Anteil der Gesamtrechnenzeit beansprucht, sollten die in der Iterationsschleife eingeschlossenen Schritte so effizient wie möglich gestaltet und nicht durch zusätzliche Operationen wie die wiederholte Abfrage eines (evtl. krummflächig berandeten) inneren Ausschlussgebietes verkompliziert werden.

soll die allgemeine Form (4.8) beibehalten werden, wobei allerdings $F(r)$ durch eine Polynomfunktion der Form $F_i(r) = \sum_n f_n r^n$ ersetzt wird.

Wegen $(B_r)_i \propto F_i(r)/r^2$ muss zunächst einmal $f_0 = f_1 = 0$ gelten. Bei Forderung nach Differenzierbarkeit des resultierenden Magnetfeldes bei $r = 0$ ist ebenfalls $f_3 = 0$. Die ersten drei nicht verschwindenden Koeffizienten f_2 , f_4 und f_5 werden nun so gewählt, dass der Funktionswert von $F_i(r)$ sowie die erste und zweite Ableitung bei $r = R_t$ mit der Funktion $F_a(r)$ des äußeren Feldes übereinstimmen. Für den Fall eines Dipolfeldes ergibt sich so insgesamt

$$F(r) = \begin{cases} F_a(r) = P_0/r & : r > R_t \\ F_i(r) = \frac{P_0}{R_t} \left[5 \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 - 9 \left(\frac{r}{R_t} \right)^4 + 5 \left(\frac{r}{R_t} \right)^5 \right] & : r \leq R_t \end{cases}, \quad (4.16)$$

die analoge Betrachtung für das radiale Feld (4.11) führt auf

$$F(r) = \begin{cases} F_a(r) = F_0 & : r > R_t \\ F_i(r) = \frac{F_0}{3} \left[10 \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 - 15 \left(\frac{r}{R_t} \right)^4 + 8 \left(\frac{r}{R_t} \right)^5 \right] & : r \leq R_t \end{cases}. \quad (4.17)$$

Im Gegensatz zum rotationsfreien Außendipol ist mit dem so konstruierten Feld eine elektrische Stromdichte

$$\mathbf{J}_0 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_0) = \left(\frac{2F(r) - r^2 F''(r)}{r^3} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \quad (4.18)$$

$$= \begin{cases} \frac{90 P_0}{2 R_t^4} \left(\frac{r}{R_t} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R_t} \right) \right] \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi & : F_i(r) = \frac{P_0}{r} \\ \frac{2F_0}{R_t^3} \left(\frac{r}{R_t} \right) \left[25 - 24 \left(\frac{r}{R_t} \right) \right] \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi & : F_i(r) = F_0 \end{cases} \quad (4.19)$$

verbunden. Damit diese die oberflächennahe Zeitintegration nicht in unphysikalischer Weise beeinflusst, sollte R_t folglich hinreichend weit (mindestens drei Gitterzellen) unter der Oberfläche liegen. Abbildung 4.6 stellt die diskutierten Magnet- und Stromfelder in einem Vergleich gegenüber. Anders als z. B. das von Keppens & Goedbloed [1999] verwendete Startfeld, welches für die Äquatorzone $|\psi| \leq 30^\circ$ ein Dipolfeld und für deren Komplement ein Monopolfeld verwendet, ist das hier verwendete Feld von einheitlicher Gestalt. (Dadurch wird insbesondere die massive Verletzung der Divergenzbedingung (3.141) vermieden, die sich andernfalls unweigerlich an der Grenzfläche zwischen Monopol- und Dipolbereich einstellen würde.) Die Antwort auf die Frage, ob im Endzustand eine gegebene Feldlinie zur Oberfläche geschlossen ist oder sich ins Unendliche öffnet, ist also nicht vorgegeben, sondern wird in selbstkonsistenter Weise allein durch die relative Stärke des Magnetfeldes bestimmt.

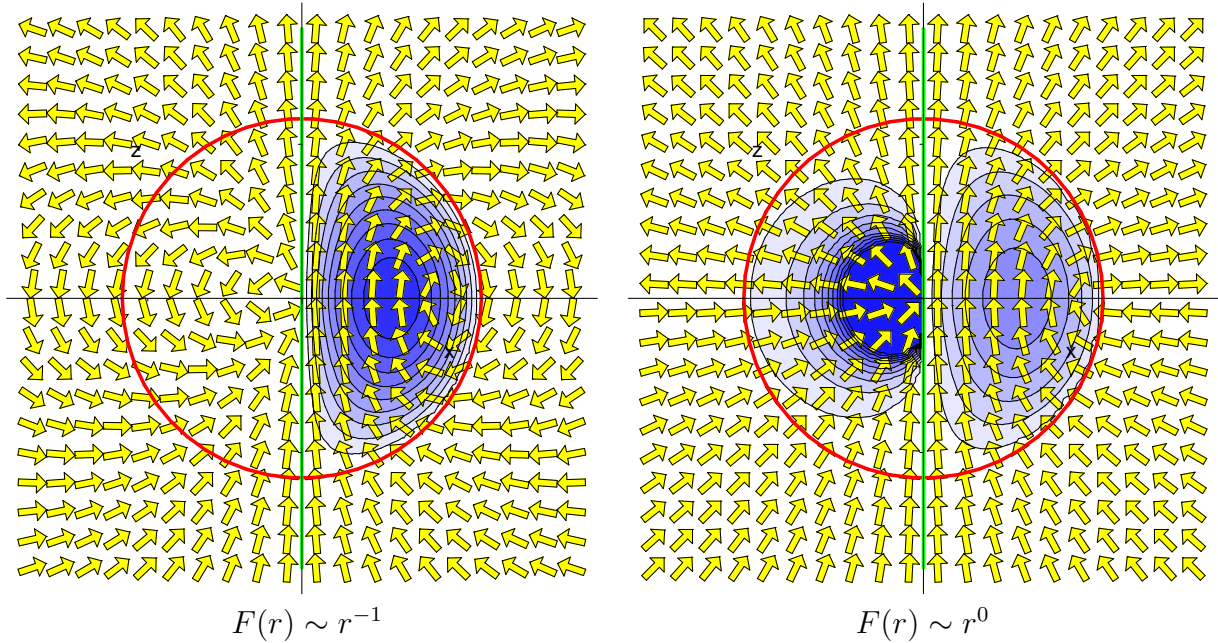


Abbildung 4.6: Die aus den Gleichungen (4.16) und (4.17) resultierenden Magnetfelder als Vektorplot in der poloidalen Ebene. In der linken Halbkugel ist jeweils das unveränderte Feld nach (4.8) dargestellt, im rechten Teil die Kombination mit dem nach innen fortgesetzten Feld. Die Länge der Pfeile ist auf Eins normiert, um die Feldgeometrie deutlicher hervortreten zu lassen. Der Kreis kennzeichnet die Kugeloberfläche $r = R_t$. (Man beachte nochmals $R_t < 1$.) Ferner ist die nach (4.18) berechnete Stromdichte als Konturbild hinterlegt. Die Farbskala ist in beiden Abbildungen auf die maximale Stromdichte des Dipol-Falles von $J_{\max} = (45/2)P_0$ normiert, die an der Stelle $[r, \theta] = [R_t/2, \pi/2]$ erreicht wird. Die nicht verschwindende Stromdichte des Radialfeldes (4.11) im Außenraum kann in der Darstellung durch die Skalierung nicht aufgelöst werden.

4.3.2 Konvergenzläufe

Ziel der nun folgenden Betrachtung ist es, analog zur hydrodynamischen Parker-Lösung auch für den magnetisierten Sonnenwind stabile Gleichgewichtskonfiguration herzustellen, wobei zunächst wieder $\gamma = 1$ gesetzt sei. Zusätzlich zur in Abschnitt 4.1 beschriebenen Situation liege zur Zeit $t = 0$ im Außenraum $r \geq 1$ ein Dipolfeld der Stärke $P_0 = 4$ vor. Am Rand $r = 1$ wird die Geschwindigkeit auf dem Anfangswert $v(1) = 0$ festgehalten; damit nehmen wir Ungenauigkeiten der in Abbildung 4.1 links dargestellten Größenordnung in Kauf zu Gunsten einer einfacheren Implementierung des Magnetfeldes.

Abbildung 4.7 zeigt die Startlösung, sowie das Ergebnis der Konvergenzläufe mit verschiedenen räumlichen Auflösungen. Deutlich erkennbar ist die Ausbildung des äquatorialen Helmet-Streamers (vergleiche dazu die Skizze in Abbildung 1.1 links), sowie die von des-

sen Feldlinien umschlossene *statische Zone*. Die Ergebnisse bei verschiedenen Auflösungen ähneln sich stark, lediglich die Geschwindigkeitskonturen nehmen bei 100^3 Zellen eine etwas glattere Gestalt an.

Eine Reduzierung der Dipolstärke (hier um den Faktor 4) wirkt sich in der erwarteten Weise aus: Der Einfluss des Magnetfeldes wird geringer, erkennbar an einer deutlich kleineren statischen Zone sowie an einem Magnetfeld, welches nun weitgehend von der Strömung dominiert wird und fast überall zu einem Radialfeld verformt wird. Speziell für die rechts unten gezeigte Konfiguration (100^3 Punkte bei $t = 10$) sind in Abbildung 4.8 für die wesentlichen Größen Dichte, Geschwindigkeit, Magnetfeld und Stromdichte noch jeweils zwei Schnitte entlang einer Achse dargestellt. Es sei hier besonders auf die im letzten Diagramm hervortretende Stromschicht in der Äquatorebene hingewiesen, die aus der Form der Feldlinien und der Symmetriebedingung an das Magnetfeld auch zu erwarten war.

4.3.3 Divergenzkorrektur: Vergleich und Bewertung

An dieser Stelle soll veranschaulicht werden, welche enorme Bedeutung dem Projektionsverfahren aus Abschnitt 3.6.2 (bzw. generell einer jeden Strategie zur Gewährleistung der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes) bei Simulationen wie den hier geschilderten zukommt. Dazu wurde der in Abbildung 4.7 dargestellte Lauf bei deaktivierter Projektionsroutine unter ansonsten identischen Bedingungen wiederholt. Obwohl das Startfeld \mathbf{B}_0 quellenfrei gewählt wurde, kommt es schnell zu einem rapiden, räumlich stark lokalisierten Anwachsen von $\nabla \cdot \mathbf{B}$, verbunden mit irregulären (und unphysikalischen) Fluktuationen der Geschwindigkeit. Deren Anwachsen erzwingt schließlich den Abbruch der Rechnungen (hier zum Zeitpunkt $t = 3, 12$), sobald die maximale Geschwindigkeit erstmals die voreingestellte Schwelle von $u_{\max} = 30$ (!) überschreitet. Abbildung 4.9 (obere Reihe) zeigt eine Momentaufnahme der Situation zur Zeit $t = 1, 5$. Die strahlenförmige Gestalt der Strukturen von $(\nabla \cdot \mathbf{B}) / \|\nabla \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}\|$ (rechts oben) legt nahe, dass der Sonnenrand als Quelle divergenzbehafteter Feldstrukturen wirkt, die dann vom Wind in die äußeren Bereiche advektiert werden. Diese Vermutung ist konsistent mit den Überlegungen zu Gleichung (3.147) und wird weiter erhärtet bei Betrachtung der gesamten Zeitentwicklung der in Abbildung 4.9 wiedergegebenen Situation. Es bleibt also festzuhalten, dass es ohne Korrektur auf $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ nicht nur zu einer groben Verfälschung der Dynamik kommt, sondern dass sogar die praktische Fortsetzbarkeit der Simulation ab einem gewissen Zeitpunkt nicht mehr gegeben ist.

Zum Vergleich wurde die Simulation mit dem GLM-Verfahren nach Dedner et al. [2002] (Abschnitt 3.6.1) nochmals wiederholt. Die dadurch erzielte Verbesserung (mittlere Reihe in Abbildung 4.9) ist offensichtlich; insbesondere kommt es nun nicht mehr zum vorzeitigen Abbruch der Simulation. Dennoch muss die Größenordnung des verbleibenden Fehlers (hier ≤ 30 %) als nicht akzeptabel angesehen werden.² Aus diesem Grund kommt in allen

²Es muss betont werden, dass diese Bewertung zunächst nur für Situationen mit Interpolation an inneren Rändern gilt und keine Rückschlüsse auf die generelle Anwendbarkeit der GLM-Methode zulässt.

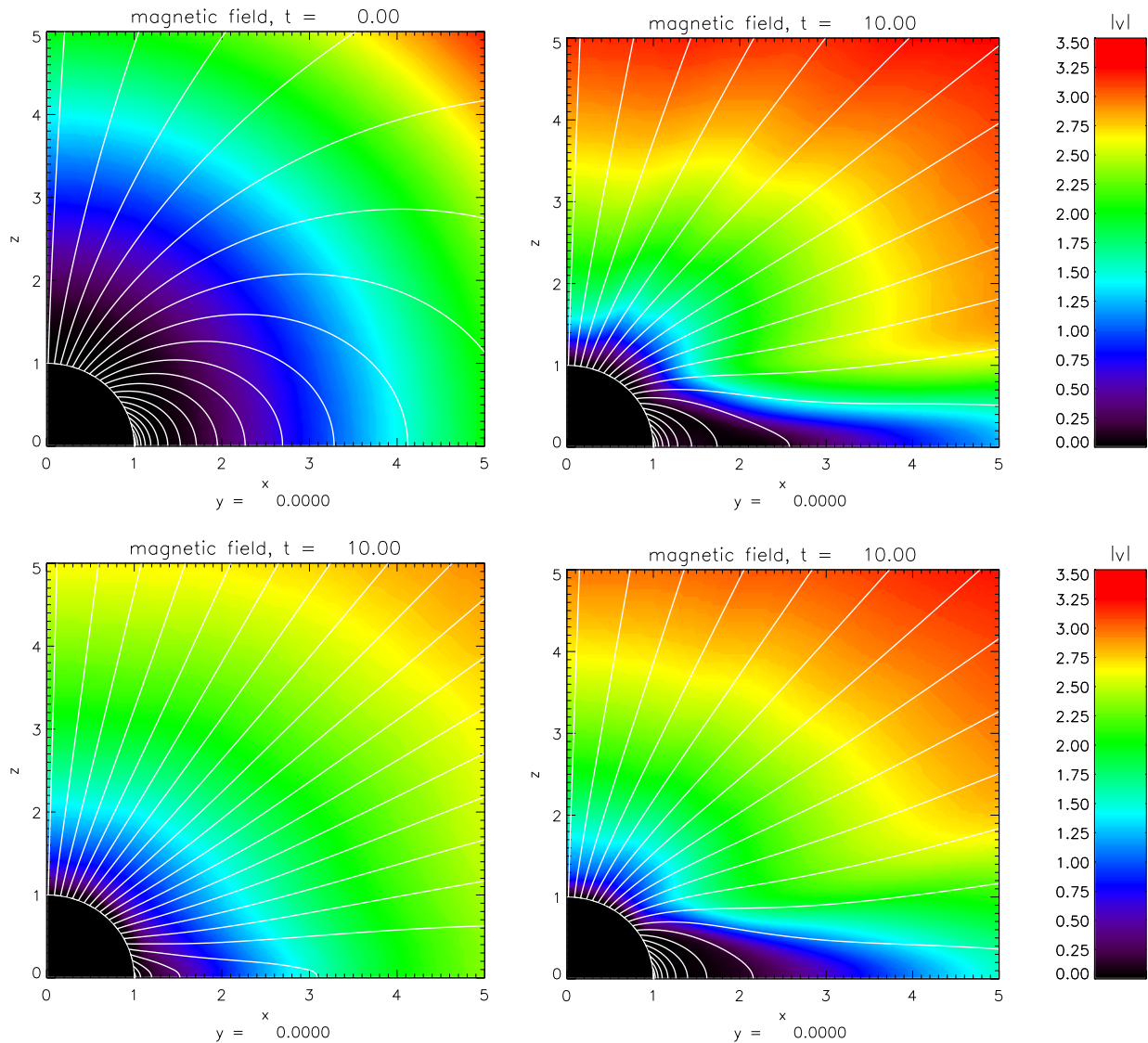


Abbildung 4.7: Schnitte entlang der Ebene $y = 0$ des Simulationsvolumens. Dargestellt ist jeweils der Betrag der Geschwindigkeit als farbcodierter Konturplot, kombiniert mit den Feldlinien des Magnetfeldes (in weiß). Links oben: Die Startlösung, bestehend aus einem exakten Dipol in z -Richtung und dem radialsymmetrischen Geschwindigkeitsfeld (4.2). Rechts daneben: Der Endzustand (zur Zeit $t = 10$) bei einer Auflösung von 50^3 Zellen; darunter die gleiche Situation mit 100^3 Zellen aufgelöst. Links unten: Zum Vergleich das konvergierte Ergebnis bei einer geringeren Dipolstärke P_0 (1 statt 4) bei ebenfalls 50^3 Gitterpunkten.

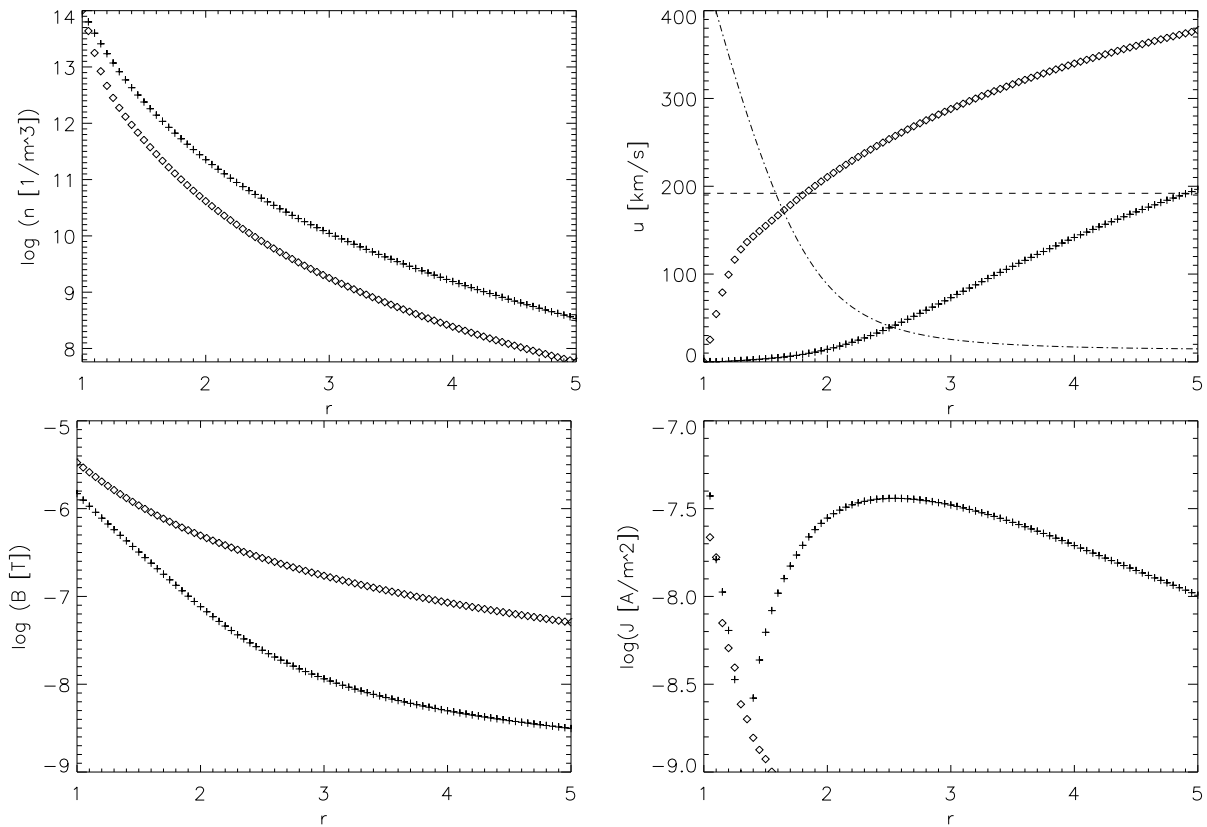


Abbildung 4.8: Schnitte durch die konvergierte Lösung (Abbildung 4.7 rechts unten) entlang der x -Achse (Äquator, Symbol „+“) bzw. der z -Achse (Polrichtung, Symbol „ \diamond “) in physikalischen Einheiten. Dargestellt sind Teilchendichte n sowie Betrag der Geschwindigkeit \mathbf{u} , des Magnetfeldes \mathbf{B} und der Stromdichte \mathbf{J} . Zur Geschwindigkeit ist zusätzlich noch die Schallgeschwindigkeit (gestrichelt) und die Alfvéngeschwindigkeit (strichpunktierte Linie) entlang der x -Achse dargestellt. Die Alfvéngeschwindigkeit in z -Richtung ist fast überall größer als 400 km/s und daher in der Darstellung unterdrückt.

folgenden Simulationen das Projektionsverfahren zum Einsatz. Als willkommener Nebeneffekt kann der Speicherplatz für das Feld Ψ eingespart werden; andererseits erhöht sich die Rechenzeit deutlich. Um dies zu quantifizieren, wurde wiederum die magnetisierte Relaxation nach Abschnitt 4.3.2 herangezogen, und die pro Zeitschritt benötigte CPU-Zeit ermittelt. Tabelle 4.1 gibt einen Eindruck von den Ergebnissen. Je nach Anforderung an die Exaktheit, mit der die Divergenzbedingung erfüllt werden soll, kann sich die Gesamt-Rechenzeit ohne Weiteres verdoppeln. (Tóth [2000] beziffert in seinem Vergleich verschiedener Korrekturverfahren den Rechenaufwand des Projektionsverfahrens mit 30 % der Gesamt-Rechenzeit. Es ist anzunehmen, dass die hier tabellierten Zeiten durch eine weitergehende Optimierung des Codes noch deutlich verbessert werden können.)

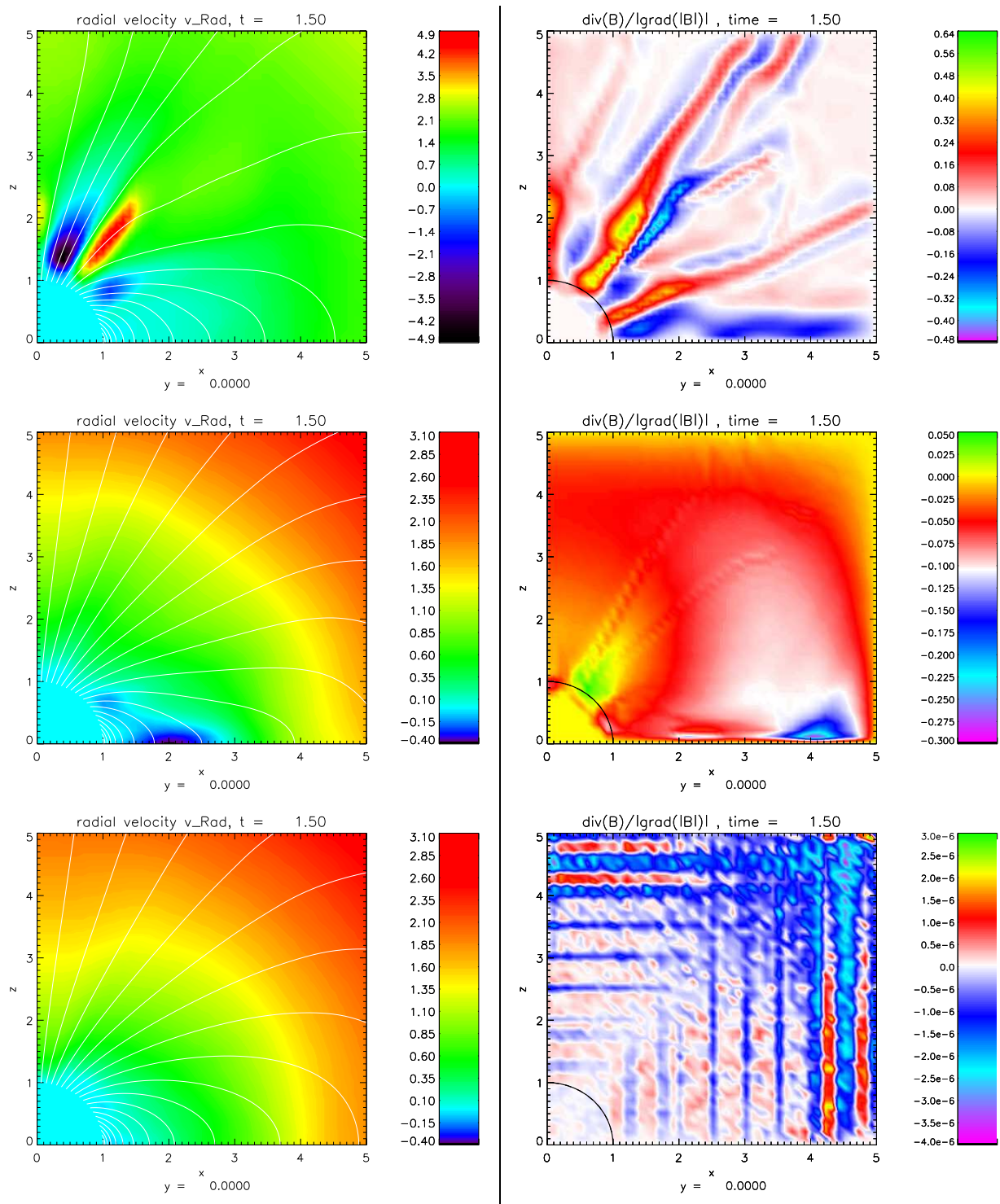


Abbildung 4.9: Die zu Abbildung 4.7 oben rechts analoge Situation zum früheren Zeitpunkt $t = 1,5$ jeweils ohne Korrektur auf $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (oben), korrigiert durch GLM (Mitte) bzw. das Projektionsverfahren (unten). Dargestellt als Farbkontur sind für jeden Lauf die Radialkomponente von \mathbf{u} (links, mit Magnetfeldlinien) sowie die Größe $(\nabla \cdot \mathbf{B})/\|\nabla \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}\|$ (rechts). Zu beachten sind die aus Darstellungsgründen ggf. verschobenen Farbskalen.

| N | Projektionsverfahren | | |
|-----|----------------------|-------------|-------------|
| | – ohne – | s. overrel. | Gauß-Seidel |
| 20 | 0,3 | 0,5 | 0,9 |
| 50 | 3,2 | 5,9 | 22,3 |
| 80 | 12,9 | 25,9 | 95,7 |
| 100 | 24,2 | 48,5 | 192,8 |

Tabelle 4.1: Pro Zeitschritt benötigte CPU-Rechenzeit auf einem 2,2 GHz AMD OPTERON-Prozessor in Sekunden, tabelliert für ein würfelförmiges Gitter mit N^3 Zellen und verschiedene Varianten des Projektionsverfahrens (ohne Korrektur — successive overrelaxation — Standardverfahren nach Gauß-Seidel). Die Abbruchkonstante für die Iteration wurde zu $\varepsilon_p = 10^{-9}N^3$ gewählt; Φ darf sich im Mittel über alle Zellen also pro Schritt um höchstens 10^{-9} ändern. Auf diese Weise wird eine obere Grenze für $|\nabla \cdot \mathbf{B}| / \|\nabla \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}\|$ von etwa 10^{-5} erreicht. Die Konvergenzbeschleunigung durch Überrelaxation ist beachtlich; dennoch muss ein großer Teil der Rechenzeit für das Korrekturverfahren eingesetzt werden.

4.3.4 Problemfall ($\gamma \neq 1$, $\|\mathbf{B}\| > 0$)

Als logische Fortsetzung der bisherigen Strategie, die Modellierung stufenweise von einfachen zu komplexen Beschreibungen hin zu erweitern, verbleibt abschließend die Betrachtung der nicht-isothermen, voll magnetisierten Sonnenwind-Expansion. Nachdem gezeigt werden konnte, dass jeder der beiden Teilaspekte für sich genommen zufriedenstellende Ergebnisse produziert, scheint zunächst nichts dagegen zu sprechen, beide Aspekte in einem einzigen Modell zusammenzuführen. Es zeigt sich allerdings, dass diese Kombination nicht in der Lage ist, die Temperatur mittels der (isothermen) Heizfunktion (2.70) auch nur näherungsweise konstant zu halten: Nach kurzer Zeit kommt es zu einer Temperaturverteilung ähnlich der in Abbildung 4.10 dargestellten. Der Grund für dieses Phänomen konnte im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen leider nicht abschließend geklärt werden. Bis zur Klärung dieser Frage bleibt zunächst nur, die vorläufige Unvereinbarkeit der Aspekte $\gamma \neq 1$ und $\|\mathbf{B}\| > 0$ zur Kenntnis zu nehmen, und die Expansion magnetisierter Winde und ihrer „Störungen“ weiterhin im isothermen Grenzfall zu untersuchen.

4.4 CME-Modellierung

Bei Vorgabe einer dipolähnlichen Startkonfiguration des Magnetfeldes kommt es (zumindest für $\gamma = 1$) schon nach kurzer Zeit zur Ausbildung einer radialen Feldstruktur bei hohen heliographischen Breiten, während die äquatornahen Feldlinien (bei hinreichend hoch gewählter Feldstärke) geschlossen bleiben und dort eine statische Zone formen, in

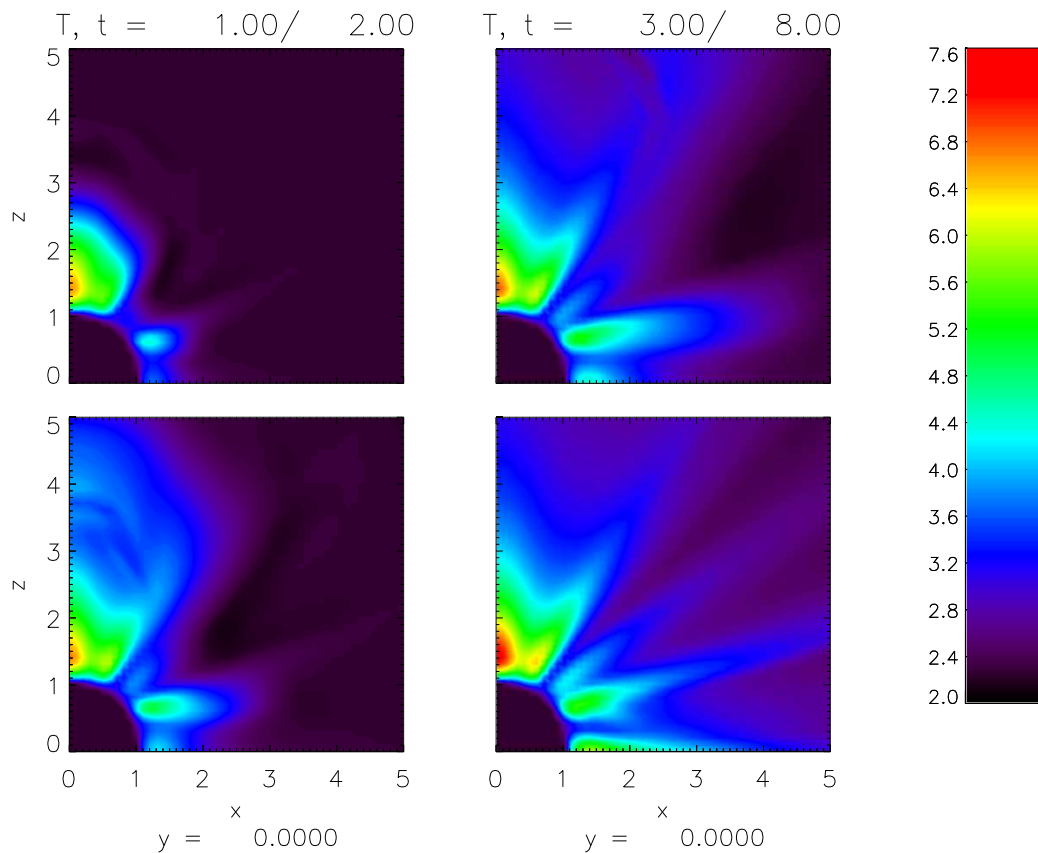


Abbildung 4.10: Die (unphysikalische) Temperaturentwicklung einer magnetisierten, nicht-isothermen Sonnenwind-Simulation zu verschiedenen Zeitpunkten, veranschaulicht als Konturplot in der (x, z) -Ebene. Die Parameter sind $\rho_0 = 1$, $P_0 = 4$ und $T_0 = 2, 25$.

welcher der Plasmafluss fast vollständig zum Erliegen kommt (siehe Abbildung 4.7). Das so erzeugte stabile Gleichgewicht soll nun seinerseits als Startlösung für die Expansion CME-artiger Dichtestörungen genutzt werden.

4.4.1 Initialisierung der Eruption

Die Komplexität des CME-Phänomens und die traditionell schwierige Beobachtungssituation hat zu einer Fülle an Modellen zur Erklärung des Eruptionsvorganges geführt, die sich jeweils auf spezielle Aspekte konzentrieren; für eine Übersicht siehe [Manchester et al. 2004] und die Referenzen darin. Entsprechend zahlreich sind die Methoden, mit denen in den diversen numerischen Modellen eine Eruption herbeigeführt wird.

Nach einer kurzen Ausführung zur (mutmaßlichen) Natur des Prozesses soll im Folgenden die hier gewählte Variante der Initiierung beschrieben werden.

Der physikalische Prozess

Allgemein wird angenommen, dass CMEs in sog. *Protuberanzen* entstehen. Hierbei handelt es sich um dichte, relativ kühle Materieballen, die auf einem arkadenartigen Band bogenförmig geschlossener Magnetfeldlinien aufsitzen, und von der $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})$ -Kraft der gekrümmten Feldlinien gegen ihre eigene Gravitationskraft im Gleichgewicht gehalten werden. Durch verschiedene Effekte, wie z. B. den Abfluss von Materie nach unten, die Verscherung der Fußpunkte der Protuberanz durch photosphärische Konvektionsströmungen oder das Auftauchen zusätzlicher Masse aus der Photosphäre kann ein Teil der Arkade instabil werden und die in ihm enthaltene Materieblase nach außen abstoßen. Des Weiteren stellt magnetische Rekonnektion in Helmet-Streamern [Wiegmann 1998] einen wesentlichen Beschleunigungsprozess dar.

CMEs lassen sich (bei ansonsten großer morphologischer Vielfalt) einteilen in sog. *schnelle CMEs*, die sich mit deutlich über 400 km/s (aber ohne weitere Beschleunigung) von der Sonne entfernen, und *beschleunigte CMEs*, die sich mit anfänglich geringer, dann aber steigender Geschwindigkeit bewegen. Numerische MHD-Experimente von Wu et al. [2004] legen den Schluss nahe, dass diese Unterscheidung nicht zwingend an eine bestimmte Initiierungsvariante gekoppelt ist.

Dichteexzess als Randbedingung

Im vorliegenden Fall liegt der Schwerpunkt des Interesses eher auf dem Aspekt der Ausbreitung als der eigentlichen Entstehung des CMEs. Aus diesem Grund kommt hier der vereinfachende Ansatz nach Groth et al. [2000] bzw. Keppens & Goedbloed [2000] zum Einsatz, bei dem am Sonnenrand kurzzeitig eine isotherme Dichte- (und damit Druck-) Erhöhung als Randbedingung vorgegeben wird. Diese kann bei hinreichender Stärke den äquatorialen Helmet-Streamer aufbrechen und zur Ablösung des Dichteüberschusses in Form einer rasch expandierenden Blase führen.

Alternative Ansätze wie die zusätzliche lokale Heizung des Plasmas erfordern sowohl $B > 0$ als auch $\gamma \neq 1$ und können aufgrund der in Abschnitt 4.3.4 dargestellten Problematik vorerst nicht verfolgt werden. Außerdem scheint es naheliegend, als Ausgangspunkt der Untersuchung ein möglichst einfaches Verfahren mit einer überschaubaren Zahl freier Parameter zu wählen.

Um zum Zeitpunkt $t = t_{\text{cme}}$ eine Eruption der Dauer τ_{cme} zu initiieren, wird also an einem vorzugebenden Ort auf der Sonnenoberfläche während des Zeitintervalls

$$\mathcal{T} := [t_{\text{cme}}, t_{\text{cme}} + \tau_{\text{cme}}] \quad (4.20)$$

ein zeitlich und räumlich begrenzter zusätzlicher Massefluss der Form

$$\rho(\mathbf{r}, t)|_{r=1} = \rho_{\text{cme}}(\mathbf{r}, t) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_{r=1} = v_{\text{cme}} \mathbf{e}_r \quad (4.22)$$

vorgegeben. Das Zentrum des Ausbruchsgebietes liege ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Ebene $\varphi = 0$, also bei

$$\mathbf{r}_{\text{cme}} := \begin{pmatrix} x_{\text{cme}} \\ y_{\text{cme}} \\ z_{\text{cme}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_{\text{cme}} \\ 0 \\ \cos \vartheta_{\text{cme}} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Der Funktionswert von $\rho_{\text{cme}}(\mathbf{r}, t)$ hänge für feste Zeit t nur vom Winkelabstand

$$\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\text{cme}}) := \arccos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\text{cme}}) \quad (4.24)$$

zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}_{cme} ab, d. h. $\rho_{\text{cme}}(\mathbf{r}, t)$ sei rotationssymmetrisch bezüglich der Achse \mathbf{r}_{cme} . In Anlehnung an Keppens & Goedbloed [2000] verwenden wir die Funktion

$$\rho_{\text{cme}}(\mathbf{r}, t) := \begin{cases} f_0 \sin^2 \left(\pi \frac{t - t_{\text{cme}}}{\tau_{\text{cme}}} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\text{cme}})}{\delta_{\text{cme}}} \right) & : t \in \mathcal{T} \wedge \alpha \leq \delta_{\text{cme}} \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.25)$$

die in Ort und Zeit glatt aus dem ungestörten Zustand hervorgeht und ebenso wieder in diesen einmündet. Dabei bezeichnet $2\delta_{\text{cme}}$ den Winkeldurchmesser der kreisförmigen Ausbruchsregion Ω_{cme} , die somit den Anteil

$$\omega_{\text{cme}} := \frac{1}{4\pi} \int_0^{\delta_{\text{cme}}} 2\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1 - \cos(\delta_{\text{cme}})}{2} \quad (4.26)$$

der Sonnenoberfläche bedeckt. Die Gesamtmasse des durch den Ausbruch freigesetzten CMEs berechnet sich zu

$$M_{\text{cme}} := \int_{\mathcal{T}} \int_{\Omega_{\text{cme}}} \rho_{\text{cme}}(\mathbf{r}, t) v_{\text{cme}} \, d\omega \, dt \quad (4.27)$$

$$= f_0 v_{\text{cme}} \int_{t_0}^{t_{\text{cme}} + \tau_{\text{cme}}} \sin^2 \left(\pi \frac{t - t_{\text{cme}}}{\tau_{\text{cme}}} \right) dt \int_0^{\delta_{\text{cme}}} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\delta_{\text{cme}}} \right) 2\pi \sin \alpha \, d\alpha \quad (4.28)$$

$$= f_0 v_{\text{cme}} \tau_{\text{cme}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{(\delta_{\text{cme}}/\pi)^2 + \cos(\delta_{\text{cme}})}{(\delta_{\text{cme}}/\pi)^2 - 1} \right) \quad (4.29)$$

$$= f_0 v_{\text{cme}} \tau_{\text{cme}} \left[\frac{\pi^2 - 4}{4\pi} (\delta_{\text{cme}})^2 - \mathcal{O}[(\delta_{\text{cme}})^4] \right]. \quad (4.30)$$

Für $\delta_{\text{cme}} = 30^\circ = \pi/6$ beträgt diese Masse in physikalischen Einheiten also

$$M_{\text{cme,phys.}} \approx \frac{f_0 v_{\text{cme}} \tau_{\text{cme}}}{16} \times 10^{15} \text{ kg}, \quad (4.31)$$

ein typischer Wert für einen stärkeren CME.

Zu beachten ist allerdings, dass es entgegen der obigen Formel auch bei $v_{\text{cme}} = 0$ zur Ablösung eines CMEs kommen kann, ebenso wie sich trotz der Randbedingung $v(1) = 0$ (aus numerischen Gründen) eine Windlösung mit merklichem Massefluss einstellt; siehe dazu die Vergleichsrechnungen aus Abschnitt 4.1.2. Die Abschätzung (4.31) ist in diesem Sinne also eher als eine untere Schranke zu verstehen.

4.4.2 Parameterstudien

Aus der Menge der durchgeführten Expansionsstudien sollen im Folgenden die in Tabelle 4.2 aufgeführten Simulationsläufe näher beschrieben und diskutiert werden. In allen vier Fällen wurden die CMEs bei $\vartheta_{\text{cme}} = \pi/2$ (also am Äquator) gestartet, da diese Breite (vor allem während des solaren Minimums) dem generischen Fall entspricht, siehe dazu Tabelle 1.2. Die Ausdehnung der Ausbruchsregion betrug in allen Fällen $\delta_{\text{cme}} = 30^\circ$, ein ebenfalls typischer Wert. Die Amplitude des Startpulses wurde zu $f_0 = 16$ gewählt, seine Dauer lag stets bei $\tau_{\text{cme}} = 1$. Alle anderen Parameter entsprechen denen des Konvergenzlaufes aus Abbildung 4.7 oben rechts (also $\rho_0 = 1$, $T_0 = 2,25$ und $P_0 = 4$), wobei die Ausdehnung des Simulationsvolumens in x -Richtung (d. h. der Richtung der CME-Ausbreitung) auf zehn Sonnenradien verdoppelt wurde, um dem CME möglichst lange folgen zu können. Unter Beibehaltung der Punktedichte von $\Delta x = 0.1$ in jeder Richtung ergibt sich die Dimensionierung des Gitters somit zu $[N_x, N_y, N_z] = [100, 50, 50]$.

Die beiden Abbildungstafeln 4.11 und 4.12 zeigen exemplarisch für Lauf 4 ausgewählte Momentaufnahmen der Expansionsdynamik in Form von Feldlinien- und Konturplots der Geschwindigkeit sowie der (logarithmierten) Massendichte. Nach Tabelle 4.2 handelt es sich um einen „langsamen“ CME (der Startgeschwindigkeit Null), der nach kurzer Zeit von einem „schnellen“ CME gefolgt wird. Die initiale Zeitdifferenz zwischen beiden Ereignissen beträgt $t_{\text{cme},2} - t_{\text{cme},1} = 1$; da sich jeder der Startvorgänge über den Zeitraum

| Lauf Nr. | 1. CME | | 2. CME | |
|----------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | v_{cme} | t_{cme} | v_{cme} | t_{cme} |
| 1 | 0 | 10,0 | — | — |
| 2 | — | — | 4 | 10,0 |
| 3 | 0 | 10,0 | 4 | 11,5 |
| 4 | 0 | 10,0 | 4 | 11,0 |

Tabelle 4.2: Liste der Parameter Startzeitpunkt t_{cme} und -geschwindigkeit v_{cme} für die CME-Simulationen. Als erstes wurden ein „langsamer“ CME (Lauf 1) bzw. ein „schneller“ CME (Lauf 2) jeweils einzeln gestartet. Danach wurden beide in einem gemeinsamen Lauf mit einem zeitlichen Abstand von 1,5 (Lauf 3) bzw. 1,0 (Lauf 4) Zeiteinheiten kombiniert.

$\tau_{\text{cme}} = 1$ erstreckt, ist die Ausbruchsregion allerdings nur für einen verschwindenden Zwischenzeitraum tatsächlich in Ruhe. Die Einzelbilder lassen sich wie folgt kommentieren:

Bild 1 ($t = 10, 0$): Zu diesem Zeitpunkt ist das System durch Konvergenz dem Gleichgewichtszustand hinreichend nahe gekommen, um seinerseits als Startlösung für die CME-Simulation zu dienen. Die beiden aus Abschnitt 4.3.2 bekannten Bereiche — Helmet-Streamer mit statischer Zone in Äquatornähe, schneller Wind aus den polaren offenen Feldlinien — haben sich deutlich ausgebildet. Der erste CME beginnt, ist aber noch nicht sichtbar.

Bild 2 ($t = 11, 0$): Der am Sonnenrand vorgegebene Dichteexzess (4.25) erreicht kurzzeitig wieder den Wert Null, bevor die Initiierung des zweiten CMEs einsetzt. In der vormals statischen Zone beginnt der erste CME zu beschleunigen, wobei er die Feldlinien des Helmet-Streamers vor sich her schiebt und diese dabei komprimiert.

Bild 3 ($t = 11, 5$): Fortgesetzte Ausbreitung und Beschleunigung von CME 1; der Dichteexzess des zweiten CMEs erreicht seinen maximalen Wert.

Bild 4 ($t = 12, 1$): Die Massendichte von CME 2 erreicht ihr Maximum. Beide CMEs sind (besonders in der Geschwindigkeit) als klar getrennte Einzelobjekte erkennbar.

Bild 5 ($t = 12, 5$): Die mit der Dichtekonzentration von CME 2 einhergehende Erhöhung des Gasdrucks treibt eine nach außen gerichtete Expansion an. Im Vergleich zu Bild 4 ist die weitaus größere Gesamtmasse des schnellen CMEs deutlich erkennbar.

Bild 6 ($t = 12, 9$): Die Frontfläche von CME 2 schießt zu CME 1 auf; die Kontaktregion ist in allen drei Variablen von starken Gradienten gekennzeichnet.

Bild 7 ($t = 14, 0$): Unter fortgesetzter Beschleunigung erreicht auch der schnelle CME den Rand bei zehn Sonnenradien, wobei er die Feldlinien hinter sich her zieht und sie damit nahezu radial verformt.

Bild 8 ($t = 22, 0$): Beide CMEs haben das Simulationsgebiet vollständig verlassen; das System ist in eine dem Ausgangszustand vergleichbare Lage zurückgekehrt.

Zu den Zeitpunkten der Bilder 1, 3, 5, 6 und 7 werden in Abbildung 4.13 für die Dichte ρ (bzw. Teilchendichte n) sowie für die beiden Komponenten³ u_x und B_z zusätzlich eindimensionale Schnittprofile entlang der Ausbreitungsachse der CMEs gezeigt.

³Aus Symmetriegründen sind auf der Achse $y = 0 = z$ nur diese beiden von Null verschieden.

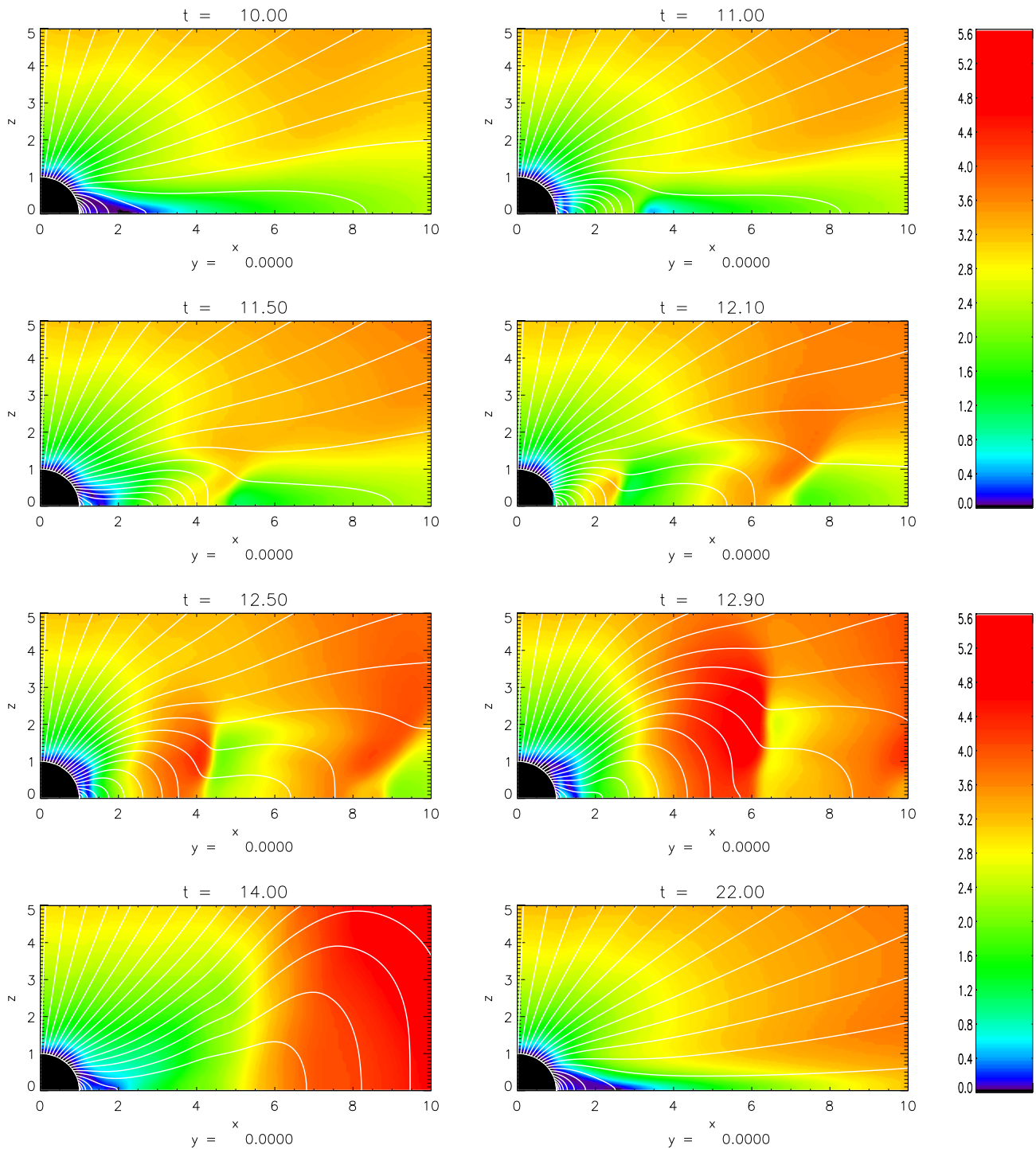


Abbildung 4.11: Ausgewählte Momentaufnahmen von Simulationenlauf 4 als Schnitt durch die Ebene $y = 0$. Den Konturen für die Geschwindigkeit $\|\mathbf{u}\|$ (farbcodiert in Einheiten der Schallgeschwindigkeit) sind die Feldlinien des solaren Magnetfeldes überlagert. Die Zeitpunkte sind oberhalb der Einzelbilder vermerkt.

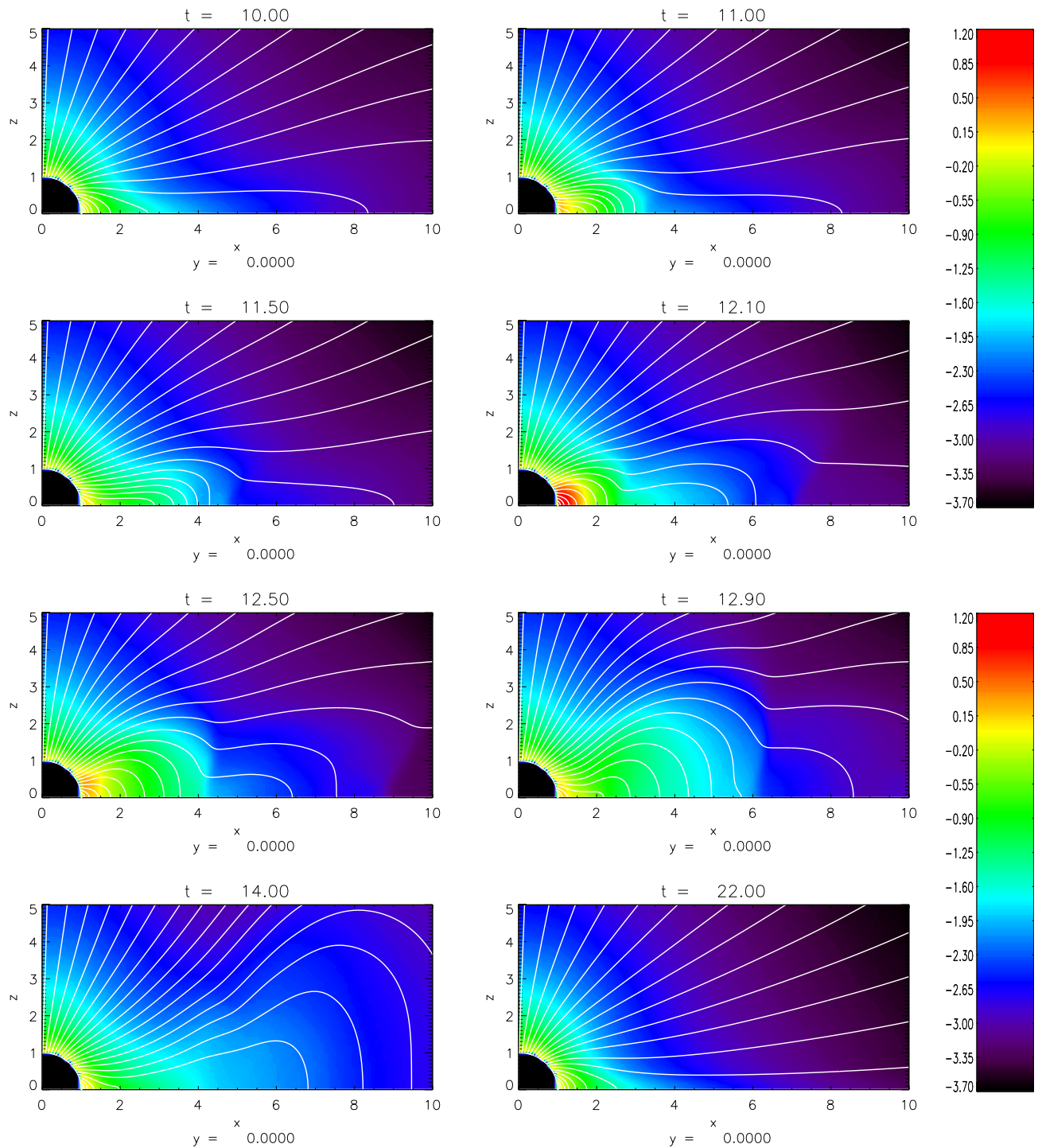


Abbildung 4.12: Die zur Abbildungstafel 4.12 analogen Schnitte (zu identischen Zeitpunkten), wobei statt des Betrages der Geschwindigkeit nun der dekadische Logarithmus der Massendichte als farbcodierte Kontur dargestellt ist. Wiederum sind ausgewählte Magnetfeldlinien überlagert.

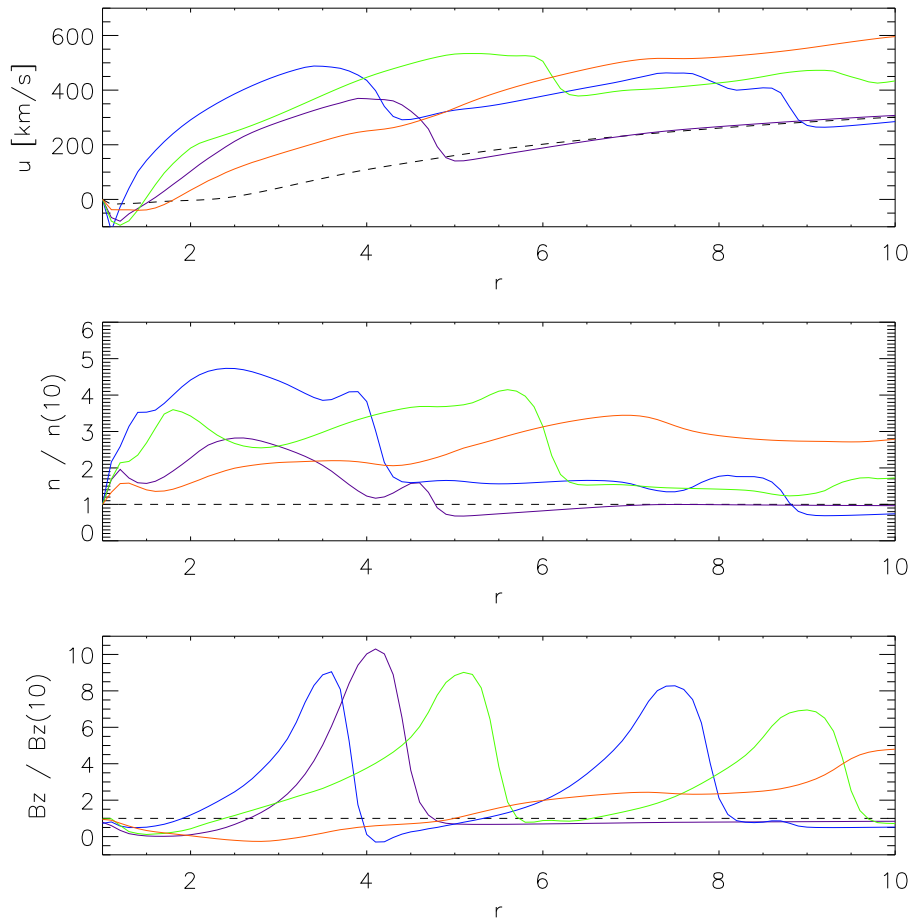


Abbildung 4.13: Profile von Geschwindigkeit (oben), Dichte (Mitte) und Magnetfeld (unten) entlang der x -Achse für Lauf 4 zu den Zeitpunkten $t = 10,0$ (schwarz, gestrichelt), $11,5$ (violett), $12,5$ (blau), $12,9$ (grün) und $14,0$ (rot), entsprechend den Einzelbildern Nr. 1, 3, 5, 6 und 7 der Abbildungstafeln 4.11 und 4.12. Aufgrund ihrer starken Gradienten sind Dichte und Magnetfeld auf das entsprechende Profil für $t = 10,0$ (d. h. auf den ungestörten Zustand) normiert; nur die Geschwindigkeit ist in physikalischen Einheiten angegeben. (Tatsächlich wäre eine Normierung hier ungünstig wegen der sehr kleinen Absolutwerte der Gleichgewichtslösung nahe der Sonne.) In der direkten Gegenüberstellung von Magnetfeld und Geschwindigkeit wird der Vorgang des „Aufsammelns“ und Mittransportes von magnetischem Fluss besonders gut deutlich.

4.4.3 Anschluss an die Beobachtung

Aufgrund des Absorptionsverhaltens der Erdatmosphäre können nur der sichtbare und der Radiobereich des elektromagnetischen Spektrums zur erdgebundenen CME-Beobachtung genutzt werden. Optische Beobachtungen durch Koronographen liefern Bilder ähnlich der Abbildung 1.2 und geben Auskunft über die (projizierte) Geometrie eines CME sowie über seine (ebenfalls projizierte) Geschwindigkeit. Wegen ihrer wesentlich geringeren Auflösung werden Radiobeobachtungen oft mit optisch gewonnenen Daten kombiniert, und gestatten — mit Hilfe verschiedener Modellannahmen — eine Abschätzung der physikalischen Parameter am Ort des CMEs. Durch Satellitenmissionen konnte der zugängliche Spektralbereich wesentlich erweitert werden; außerdem stehen auf diesem Wege in situ-Messungen zur Verfügung, die einen direkten Zugang zu den Plasmaparametern des Sonnenwindes gestatten, ohne dass ein Sichtlinien-Integral invertiert werden muss.

Abbildung 4.14 zeigt die Zusammenstellung der zeitlichen Variation der MHD-Größen im erdnahen Sonnenwind, wie sie vom ADVANCED COMPOSITION EXPLORER (ACE) für eine sog. *magnetische Wolke*⁴ gemessen wurde. Die ACE-Sonde wurde 1997 gestartet [Stone et al. 1998] und befindet sich nun stationär im *Lagrange-Punkt* L_1 , also auf der direkten Verbindungslinie Erde – Sonne bei einem heliozentrischen Radius von 0,99 AU.

Um zumindest eine qualitative Verbindung der hier vorgestellten Simulationen zu Beobachtungsdaten der in Abbildung 4.14 exemplarisch wiedergegebenen Form herzustellen, wurden für alle vier Fälle aus Tabelle 4.2 entlang der CME-Trajektorie (d. h. der x – Achse) fünf feste Punkte mit den Radien $r_b \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ gewählt, zu jedem Zeitschritt die aktuellen Werte der drei an diesen Punkten nicht verschwindenden Variablen $[B_z, n, u_x]$ ausgelesen und in den Diagrammen 4.15 und 4.16 gegenübergestellt. Auf diese Weise entsteht ein Zeitprofil der Größen, wie sie ein stationärer Beobachter registrieren würde, während die CMEs seinen Ort passieren. (Zu beachten ist, dass die Profile für Dichte n und Magnetfeld B_z am Radius r_b mit $(r_b/R_\odot)^3$ bzw. $-(r_b/R_\odot)^2$ multipliziert wurden, da ansonsten bereits der radiale Verdünnungseffekt die kompakte Darstellung der Kurven für verschiedene Radien in einem einzigen Diagramm unmöglich gemacht hätte. Diese Maßnahme beeinflusst offenbar nur die relative Größe zweier Profile zueinander, nicht aber die Gestalt des einzelnen Profils.)

In der Tat lassen sich einige Parallelen zwischen Beobachtung und Simulation identifizieren; vor allem der steile Anstieg und das langsame Abklingen der Geschwindigkeitsmaxima ist in beiden Fällen deutlich erkennbar. Auch die scharfen, fast nadelförmigen Maxima der Magnetfeldprofile haben eine auffällige Ähnlichkeit.

Die deutlichen Unterschiede in der Gesamtdauer einer Passage (ca. ein Tag für die magnetische Wolke gegenüber ca. einer Stunde in der Simulation) kann ohne weiteres durch die sehr unterschiedlichen Beobachtungsorte erklärt werden, da die Wolke wesentlich mehr Zeit hatte, sich von einem vermutlich deutlich kompakteren Gebilde auf die beobachtete

⁴Darunter versteht man einen interplanetaren CME, dessen überdurchschnittlich starkes Magnetfeld über die gesamte Länge des Gebildes eine sanft rotierende, möglicherweise helikale Struktur hat.

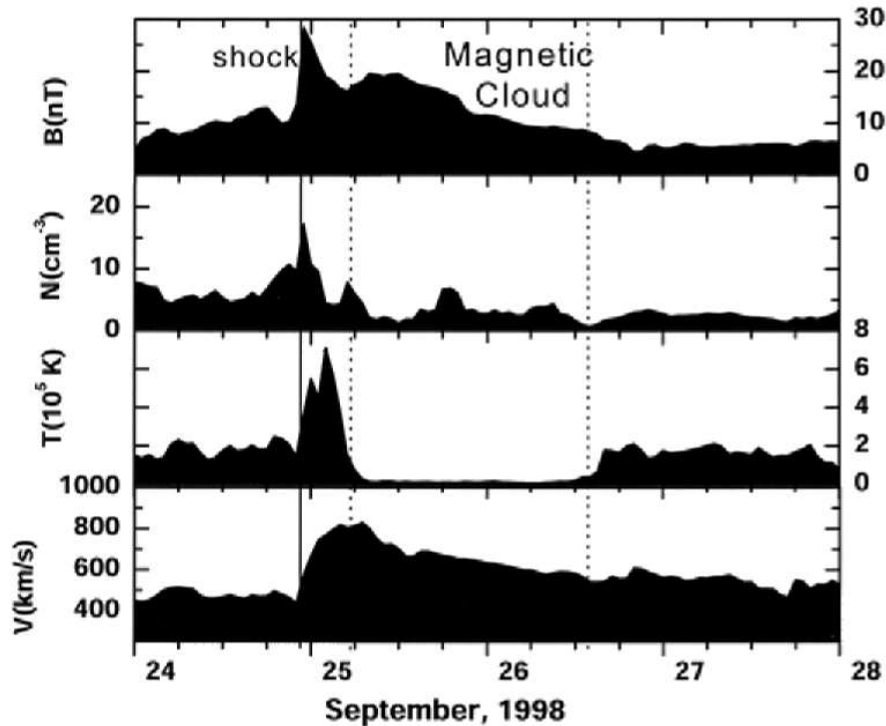


Abbildung 4.14: Zeitliche Profile von Magnetfeldstärke, Teilchenzahldichte, Plasmatemperatur und Strömungsgeschwindigkeit des erdnahen Sonnenwind-Plasmas, in situ gemessen von der ACE-Sonde im September 1998 während eine magnetische Wolke über den Satelliten hinwegzog; nach Burlaga et al. [2001]. Die von diesen Autoren vorgeschlagene Abgrenzung der Wolke bzw. der ihr vorausgehenden Schockfront ist durch senkrechte Markierungen gekennzeichnet.

Länge von bis zu 1 AU auszudehnen; auch wird die Transitdauer eines simulierten CMEs nicht gänzlich unabhängig sein von der Dauer seiner Initiierung (die hier eben gerade bei ca. 1,5 h Echtzeit liegt).

Die simulationsbasierten Profiltafeln 4.15 und 4.16 lassen auch für sich genommen einige interessante Feststellungen zu. So zeigt das untere Diagrammpaar in 4.15 deutlich die Erhöhung der Feldstärke durch die Kompressionswelle des CMEs, die sich mit dessen nach außen zunehmender Geschwindigkeit noch weiter verstärkt. Wie erwartet ist dieser Effekt beim schnellen CME doch ausgeprägter (und das Feld kurzzeitig um den Faktor ~ 2 höher). Im Fall von Lauf 4 kann die Kollision der beiden CMEs besonders gut anhand der Verschiebung der Maxima der Profile von Magnetfeld und Geschwindigkeit verfolgt werden. Bemerkenswert ist auch hier die kurzzeitige, deutliche Erhöhung des Magnetfeldes im Moment der Kollision.

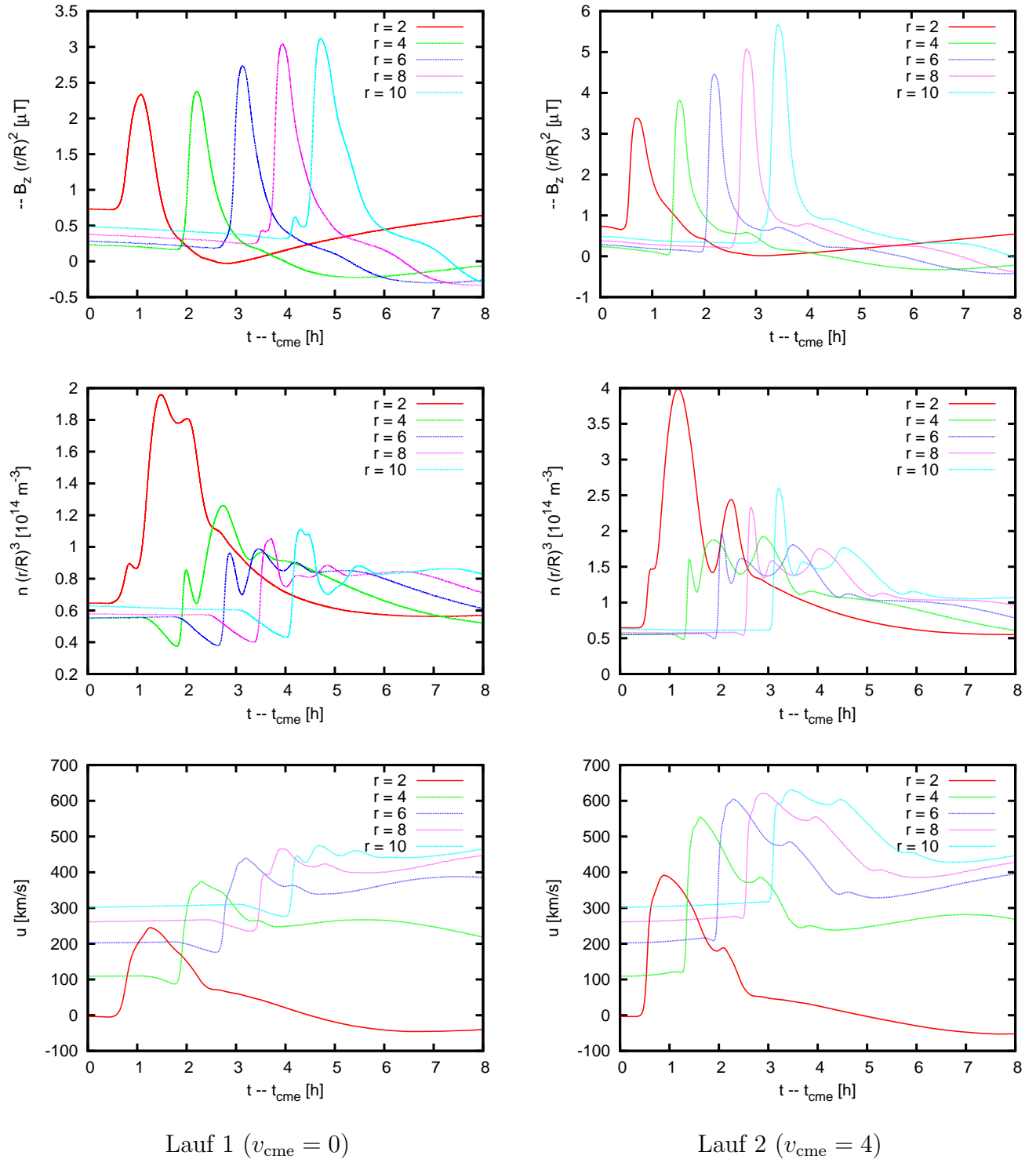


Abbildung 4.15: Zeitkurven für Magnetfeld $-B_z$, Dichte n und Geschwindigkeit v_x an ausgewählten Radien entlang der Ausbreitungsrichtung des einzelnen CMEs, links $v_{\text{cme}} = 0$, rechts $v_{\text{cme}} = 4$. Das Minuszeichen vor B_z kompensiert den Nord-Süd-Polarität des Magnetfeldes (mit $B_z < 0$ bei $z = 0$).

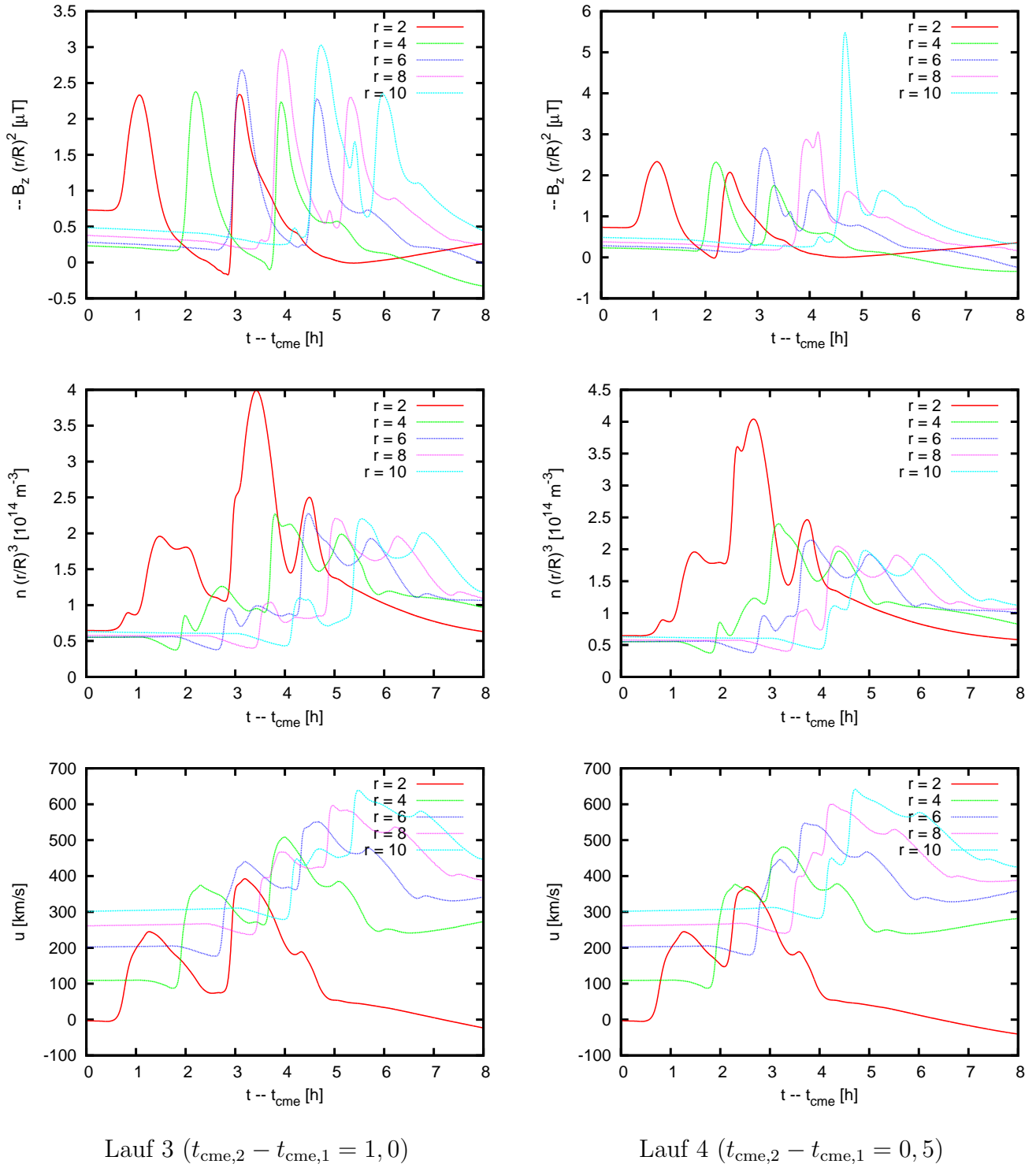


Abbildung 4.16: Die zu Abbildung 4.15 analoge Tafel für zwei kurz aufeinander folgende CMEs: Ein langsamer CME ($v_{\text{cme},2} = 0$) startet bei $t_{\text{cme},1} = 10$, ein schnellerer ($v_{\text{cme},2} = 4$) folgt bei $t_{\text{cme},2} = 11,5$ (links) bzw. $t_{\text{cme},2} = 11,0$ (rechts), also im tatsächlichen Abstand von 2,25 bzw. 1,5 h.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand der vorgelegten Arbeit ist die Erstellung eines magnetohydrodynamischen 3D-Modells der sonnennahen Heliosphäre, sowie dessen numerische Implementierung und Anwendung auf die Beschreibung der Expansion sog. Koronaler Masseauswürfe (CMEs). In einem ersten Schritt wurden die MHD-Gleichungen der Natur des Problems und seines astrophysikalischen Umfeldes angepasst, und verschiedene mögliche Einflüsse auf ihre physikalische Relevanz und praktische Modellierbarkeit geprüft. Diese Untersuchung mündete insbesondere in der Festlegung auf eine Ein-Fluid-Beschreibung zu Gunsten einer korrekten Wiedergabe diskontinuierlicher Lösungen.

Die numerische Realisierung des Modells in einer bestehenden C++ -Rechnerumgebung geschah unter Verwendung des kartesischen CWENO-Schemas, welches nach Sichtung verschiedener Alternativen durch seine hohe Wiedergabetreue in der Nähe großer Gradienten und die vergleichsweise unproblematische Verallgemeinerung auf Systeme von Gleichungen in mehreren Dimensionen überzeugte. Dieser neu erstellte Code wurde einer Anzahl numerischer Tests ansteigender Komplexität in ein, zwei und drei Raumdimensionen unterzogen. Es konnte gezeigt werden, dass die analytischen Lösungen — sofern bekannt — stets mit hoher Genauigkeit reproduziert wurden. Auch die Ergebnisse jener Testrechnungen, deren exakte Lösungen nicht bekannt sind, waren konsistent mit dem physikalisch zu erwartenden Verhalten.

Neben der Implementierung der nichtlinearen Quellterme (für Gravitation und Heizung) stellte die Approximation der Sonnenoberfläche als innere Berandung des Rechengebietes eine wesentliche Herausforderung dar. Den dort auftretenden hohen Gradienten (vor allem der Dichte) sowie der Notwendigkeit, die Randbedingungen von einer kugelförmigen Fläche auf das kartesische Gitter zu übertragen, konnte mit einer entsprechend angepassten Interpolationsmethode begegnet werden. Im Falle der Geschwindigkeit wurde die freie Extrapolation nach innen mit der Alternative einer klassischen Dirichlet-Randbedingung verglichen. Die dabei festgestellte überlegene Genauigkeit des Interpolationsverfahrens liegt im Prozentbereich und ist gegen den höheren Rechenaufwand abzuwiegen.

Zur Wahrung der (numerischen) Divergenzfreiheit des Magnetfeldes wurde ein klassisches

Projektionsverfahren mit einer Variante der sog. GLM-Methode verglichen und dem (allerdings numerisch aufwändigeren) Projektionsverfahren schließlich der Vorzug gegeben, da die beim GLM-Verfahren verbleibenden relativen Divergenz-Fehler von ca. 10 % als nicht akzeptabel eingestuft werden mussten. Deren Ursache wird in der räumlichen Mittelung des Magnetfeldes am Sonnenrand vermutet; die Aussagekraft dieses Vergleiches für andere Geometrien oder Szenarien ist folglich sehr begrenzt.

Zur Herstellung stationärer Sonnenwind-Lösungen wurden das System ausgehend von einer jeweils geeignet gewählten Startkonfiguration in der Zeit integriert, bis sich in selbstkonsistenter Weise ein stabiles Gleichgewicht einstellte. Beginnend mit dem klassischen hydrodynamischen Parker-Wind konnten auf diese Weise sowohl nicht-isotherme als auch magnetisierte Windlösungen generiert werden.

Die so gefundene Gleichgewichtslösungen wurden nun ihrerseits als Startkonfiguration für die Simulation der Expansion CME-artiger Materieblasen genutzt. Dabei ist vor allem der Aspekt der vollständig dreidimensionalen Modellierung hervorzuheben, der es gestattete, die Expansionsrichtung des CMEs gänzlich unabhängig von der Symmetrieachse des Magnetfeldes zu wählen; insbesondere konnte die Ausbreitung in der Ekliptik studiert werden. Die aus den Simulationsdaten erstellten Zeitprofile für Dichte, Strömungsgeschwindigkeit und Magnetfeldstärke zeigen zumindest qualitative Übereinstimmungen mit typischen satellitengestützten Beobachtungsdaten; ein quantitativer Vergleich ist problematisch, da für den hier betrachteten geringen Abstand zu Sonne (noch) keine in situ-Messungen vorliegen; zudem stellen die immer noch zahlreich vorhandenen Vereinfachungen des Modells, insbesondere die noch notwendigerweise vorausgesetzte isotherme Zustandsgleichung, ein Hindernis dar.

Ausblick

Es ist klar, dass die Modellierung eines hochkomplexen und dynamischen Systems wie der inneren Heliosphäre und ihrer Wechselwirkung mit transienten Störungen in vielerlei Hinsicht unvollständig bleiben muss, zumal im Rahmen einer Arbeit wie der hier vorgelegten die Konzentration auf einige wesentliche Kernpunkte geboten ist. Für zukünftige Arbeiten bieten sich so zahlreiche mögliche Erweiterungen an. Als vorrangiges Ziel ist hier die Zusammenführung geheizter (d. h. nicht-isothermer) Szenarien mit magnetisierten Windmodellen zu nennen, die aufgrund numerischer Probleme derzeit noch nicht abschließend vollzogen werden konnte. Diese Stoßrichtung scheint um so naheliegender, als beide Teilaspekte für sich genommen erwiesenermaßen bereits zufriedenstellende Lösungen produziert haben. Ferner kann daran gedacht werden, das Simulationsvolumen durch adaptive Gitterverfeinerung und/oder Parallelisierung des Codes deutlich zu vergrößern. Modellseitig könnte z. B. die Topologie des Magnetfeldes mit in die Initialisierung der CME-Eruption einbezogen werden; gerade hier stellt der bereits im Code vorgesehene Übergang von der idealen zur resistiven MHD eine vielversprechende Option dar.

Anhang A

„Klassische“ Sonnenwind-Modelle

In dieses Kapitel werden die wesentlichen Kernpunkte der frühen Modelle des Sonnenwindes rekapituliert, sofern sie für die vorliegende Arbeit relevant erscheinen.

A.1 Das Parker-Modell

Dieser Abschnitt stellt das ursprüngliche HD-Modell des Sonnenwindes nach [Parker 1958] vor, welches trotz seiner Einfachheit eine näherungsweise korrekte Vorstellung von der globalen Struktur der heliosphärischen Überschall-Plasmaströmung liefert.

A.1.1 Hydrodynamik

Als isothermes, radialsymmetrisches, nichtmagnetisiertes und zeitunabhängiges Modell geht das Parker-Modell aus vom Gleichungssystem

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho u) \quad (\text{A.1})$$

$$u \frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM_{\odot}}{r^2} \quad (\text{A.2})$$

$$p = c_s^2 \rho, \quad (\text{A.3})$$

bestehend aus der Kontinuitätsgleichung, der Impulsbilanz und der isothermen Zustandsgleichung, wobei (A.1) sofort zu

$$r^2 \rho u = \text{konst.} \quad (\text{A.4})$$

integriert werden kann. Nach Elimination von ρ und p durch (A.4) bzw. (A.3) kann Gleichung (A.2) als

$$\frac{u^2 - c_s^2}{u} \frac{du}{dr} = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM_{\odot}}{r^2} \quad (\text{A.5})$$

geschrieben werden. Von besonderer Bedeutung ist der sog. *kritische Radius*

$$r_{\text{crit.}} := \frac{GM_{\odot}}{2c_s^2}, \quad (\text{A.6})$$

an welchem die rechte (und natürlich auch die linke) Seite von (A.5) verschwindet und $u'(r)$ somit entweder Null wird oder (im Fall $u = c_s$) nicht eindeutig festgelegt ist. Mit den normierten Variablen

$$v := \frac{u}{c} \quad \text{und} \quad x := \frac{r}{r_{\text{crit.}}} \quad (\text{A.7})$$

ergibt sich daraus schließlich die dimensionslose Form

$$\frac{v^2 - 1}{2v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}. \quad (\text{A.8})$$

Deren Integration führt auf die implizite¹ Gleichung

$$v^2 - \ln(v^2) = 4 \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) + C, \quad (\text{A.13})$$

wobei sich je nach Wahl der Integrationskonstanten C die in Abbildung A.1 dargestellten Lösungstopologien ergeben.

Lösungen mit $C < -3$ sind physikalisch irrelevant, da sie nicht jedem x ein eindeutiges $v(x)$ zuordnen. Für $C > -3$ ergeben sich komplett super- oder subsonische Profile. Erstere stehen nicht im Einklang mit dem Beobachtungsbefund kleiner Geschwindigkeiten naher der koronalen Basis; letztere müssen ebenfalls verworfen werden, da sie (wie alle abströmenden Lösungen mit $\lim_{x \rightarrow \infty} v = 0$) zu einem divergierenden Gasdruck im Unendlichen führen. (Die Kombination von Kontinuitätsgleichung (A.1) und isothermer Zustandsgleichung (A.4) liefert sofort

$$\lim_{r \rightarrow r_0} p(r) = c_s^2 \lim_{r \rightarrow r_0} \rho(r) = \infty \quad (\text{A.14})$$

¹Wie Cramner [2004] bemerkt, kann diese Beziehung mit

$$D(x) := x^{-4} \exp(-4/x - C) \quad (\text{A.9})$$

auch als

$$v^2 = -W[-D(x)] \quad (\text{A.10})$$

geschrieben werden, wobei $W(x)$ die LAMBERT'sche W-Funktion bezeichnet, welche definitionsgemäß die transzendente Gleichung

$$W(z) \exp[W(z)] = z \quad (\text{A.11})$$

löst. Speziell für $C = -3$ ist die Lösungskurve wie folgt aus den beiden reellwertigen Ästen W_0 und W_{-1} zu kombinieren:

$$v^2 = \begin{cases} -W_0[-D(x)] & : x < 1 \\ -W_{-1}[-D(x)] & : x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

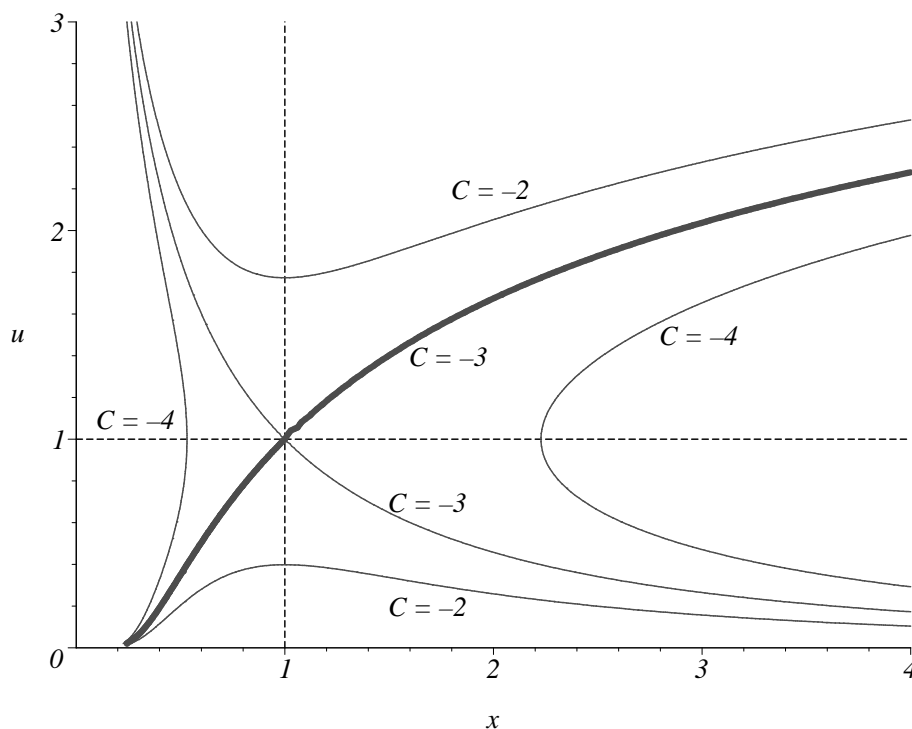


Abbildung A.1: Das sog. Parker-Bondi-Diagramm stellt ausgewählte Lösungskurven der impliziten Gleichung (A.13) in der (x, v) -Ebene dar. Die dick hervorgehobene Kurve (für $C = -3$, $\partial_x v > 0$) setzt sich aus zwei Teillästen zusammen und kennzeichnet den hier relevanten Sonnenwind-Fall.

für alle Orte r_0 , an denen das Gas zur Ruhe kommt.)

Für den verbleibenden Fall $C = -3$ ergeben sich zwei Lösungskurven, die sich im kritischen Punkt $(x, u) = (1, 1)$ kreuzen. Die monoton fallende Kurve wurde von Bondi [1952] für den Fall sphärisch-symmetrischer Akkretion auf ein zentrales Objekt gefunden; sie ist für $v > 0$ instabil und daher als Windlösung wenig interessant. Tatsächlich ist die zweite, monoton wachsende Lösung als einzige dynamisch stabil [Velli 2001] und zeichnet ein näherungsweise korrektes Bild des tatsächlich vorliegenden Strömungsverhaltens.

A.1.2 Wirkung auf das solare Magnetfeld

Unter der Annahme, dass das solare Magnetfeld im idealen Plasma des Sonnenwindes „eingefroren“ ist und von diesem passiv nach außen transportiert wird, konnte Parker die resultierende Feldstruktur in der Äquatorialebene angeben.

Jenseits von der sog. *Quellfläche*, einer gedachten Kugel mit Radius $r_0 \approx 2 \dots 3 R_\odot$, hat das räumlich hochkomplexe photosphärische Magnetfeld näherungsweise die Gestalt

eines radialen Feldes angenommen. Im mit der Winkelgeschwindigkeit Ω mitrotierenden Bezugssystem ist die Bahnkurve eines solchen Fluidelements der radialen Geschwindigkeit u_{sw} (und damit die Gleichung für die zugehörige Feldlinie) durch

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Omega t \quad (\text{A.15})$$

$$r(t) = r_0 + u_{\text{sw}} t \quad (\text{A.16})$$

gegeben. Elimination von t gibt

$$r(\varphi) = r_0 + u_{\text{sw}} \frac{\varphi - \varphi_0}{\Omega} \quad (\text{A.17})$$

und zeigt, dass die Feldlinien die Form archimedischer Spiralen annehmen. Divergenzfreiheit in sphärischen Koordinaten bedingt

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) \Rightarrow B_r = \frac{C_1}{r^2}; \quad (\text{A.18})$$

ferner folgt aus der Induktionsgleichung (2.42) für ein stationäres ($\partial_t = 0$), ideales ($\eta = 0$) Plasma

$$0 = [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(u_\varphi B_r - u_r B_\varphi)] \Rightarrow u_\varphi B_r - u_r B_\varphi = \frac{C_2}{r}. \quad (\text{A.19})$$

Bei Auswertung der beiden Integrationskonstanten an $r = r_0$ folgt

$$B_r = B_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} \quad (\text{A.20})$$

$$B_\varphi = B_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} \frac{u_\varphi - r\Omega}{u_r}, \quad (\text{A.21})$$

da dort $u_\varphi = r_0\Omega$ und $B_\varphi = 0$ gilt. Für große Radien $r \gg u_\varphi/\Omega$ vermindert sich die Feldstärke also wie

$$B(r) \approx \frac{B_0 r_0^2}{r^2} \sqrt{1 + \left(\frac{r\Omega}{u_r(r)} \right)^2}, \quad (\text{A.22})$$

und für den Winkel ψ , den die Feldlinie mit dem Radiusvektor einschließt, gilt

$$\tan \psi = \left| \frac{B_\varphi}{B_r} \right| = \frac{|u_\varphi - r\Omega|}{u_r} \approx \frac{r\Omega}{u_r} \quad \text{bei } r \gg \frac{u_\varphi}{\Omega}. \quad (\text{A.23})$$

Am Erdorbit ist $\tan \psi \approx 1$, also $\psi \approx 45^\circ$. Abbildung A.2 gibt einen qualitativen Eindruck von der Feldlinienstruktur in Aufsicht (d. h. entlang der Rotationsachse blickend). Innerhalb der Quellfläche (d. h. für $r < r_0$) ist die obige Formel nicht anwendbar; da dort magnetische und kinetische Energiedichte etwa von gleicher Größenordnung sind, kann in diesem Bereich von starrer Rotation ausgegangen werden.

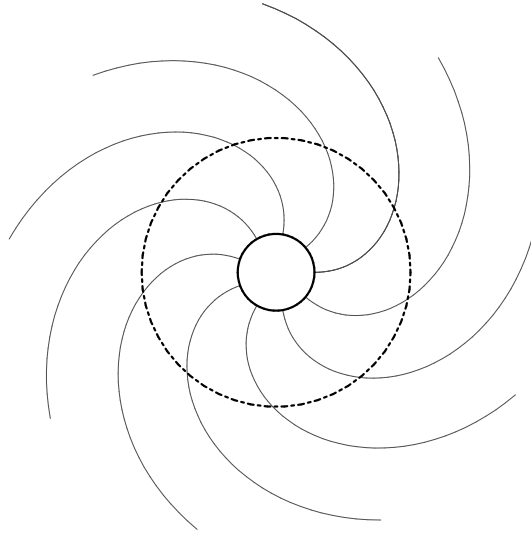


Abbildung A.2: Ausgewählte Feldlinien des äquatorialen Magnetfeldes jenseits der Quellfläche $r = r_0$ (durchgezogener Kreis). Am Erdorbit (gestrichelter Kreis, nicht maßstabsgetreu) ist die Ablenkung der Feldlinien aus der radialen Richtung etwa gleich 45° .

A.2 Magnetisierte Winde nach Weber & Davis

Das Modell von Weber & Davis [1976], welches zusätzlich zu den Gleichungen (A.1 – A.3) noch die azimutale Impulsbilanz

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_\varphi = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\varphi \quad (\text{A.24})$$

in der Äquatorebene betrachtet, bestätigt die Annahme starrer Rotation im Bereich $r < r_0$ anhand der Formel

$$u_\varphi(r) = \frac{u_r/u_A - 1}{(u_r r^2)/(u_A r_A^2) - 1} r\Omega = \left(1 - \frac{u_r}{u_A}\right) r\Omega + \mathcal{O}\left[\left(\frac{r}{r_A}\right)^3\right]. \quad (\text{A.25})$$

r_A bezeichnet den *Alfvén-Radius*, an dem v_r gleich der radialen Alfvén-Geschwindigkeit $u_A := B_r/\sqrt{\mu_0\rho}$ wird. Für große Abstände gilt also näherungsweise

$$u_\varphi(r) \approx \frac{r_A^2 \Omega}{r} \left(1 - \frac{u_A}{u_r}\right), \quad (\text{A.26})$$

wie aus Gründen der Drehimpulserhaltung auch zu erwarten war. Der exakte Wert von r_A ist nicht bekannt; die Extrapolation von HELIOS-Daten weist auf $r_A \approx 12 R_\odot$ hin [Pizzo et al. 1983]. Im Kontext der vorliegenden Arbeit liegt die Bedeutung dieses Modells in erster Linie darin, dass es die in Abschnitt 2.3.2 vorgenommene Vernachlässigung der solaren Rotation rechtfertigt.

Anhang B

Das ohmsche Gesetz in der Heliosphäre

Wie in Abschnitt 2.2.4 dargelegt, kommt das allgemeine ohmsche Gesetz (2.39) in dieser Arbeit in der stark vereinfachten Form (2.41) zum Einsatz (wobei in allen hier vorgestellten Simulationen $\eta = 0$ gesetzt wurde). Für den hier vorliegenden Fall des heliosphärischen Wasserstoff-Plasmas kann diese Form wie folgt begründet werden:

Unter Verwendung der Normierungstabelle 2.1 folgt aus (2.39) für die dimensionslosen Felder $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ der Ausdruck

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}} &= \frac{1}{u_0 B_0} \left[\eta_0 J_0 \bar{\eta} \bar{\mathbf{J}} - \frac{p_0}{n_0 e L_0} \frac{1}{\bar{n}} \bar{\nabla} \bar{p}_e + \frac{J_0 B_0}{n_0 e} \frac{1}{\bar{n}} \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{m_e J_0}{n_0 e^2 t_0} \frac{1}{\bar{n}} \partial_t \bar{\mathbf{J}} \right] \\ &= \bar{\eta} \bar{\mathbf{J}} + \frac{1}{\bar{n}} \left[\left(\frac{\lambda_p}{L_0} \right) (-\bar{\nabla} \bar{p}_e + \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}}) + \left(\frac{\lambda_e}{L_0} \right)^2 \partial_t \bar{\mathbf{J}} \right].\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

Die *Eindringtiefen* λ_α , $\alpha \in \{e, p\}$ hängen dabei definitionsgemäß über die Beziehung

$$\lambda_\alpha := \frac{c}{\omega_\alpha} \quad (\text{B.2})$$

mit den für Elektronen und Protonen jeweils relevanten *Plasmafrequenzen*

$$\omega_\alpha := \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_\alpha}} \quad (\text{B.3})$$

zusammen. Mit den Normierungskonstanten aus Tabelle 2.1 findet man

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e &\approx 0,5 \text{ m} \\ \lambda_p &\approx 22,8 \text{ m} \end{aligned} \right\} \ll L_0 \equiv R_\odot. \quad (\text{B.4})$$

Diese Abschätzung rechtfertigt die Vernachlässigung aller Summanden auf der rechten Seite von (B.1) bis auf den resistiven Term, dessen Relevanz für die vorliegenden Untersuchungen bereits in Abschnitt 2.3.3 diskutiert wurde.

Anhang C

Ergänzende Betrachtungen zur Numerik

C.1 Der Poisson-Schritt bei extrapolierten Randbedingungen

Wie in Abschnitt 3.6.2 dargelegt, werden für das Projektionsverfahren die Randwerte von Φ so gewählt, dass $\nabla_i \Phi$ und B_i die gleichen Randbedingungen erfüllen. Es soll nun motiviert werden, warum dieses Vorgehen bei extrapolierten Randbedingungen nicht geeignet ist. Dazu betrachten wir den Spezialfall verschwindender Quelle $S = (\nabla \cdot \mathbf{B})_{\text{num}}$ und beschränken uns auf eine eindimensionale Betrachtung.

Extrapolierte Randbedingung für $\nabla \Phi$ bedeutet

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla \Phi)_{i-1} - 2(\nabla \Phi)_i + (\nabla \Phi)_{i+1} \\ &= \frac{\Phi_i - \Phi_{i-2}}{2 \Delta x} - 2 \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2 \Delta x} + \frac{\Phi_{i+2} - \Phi_i}{2 \Delta x} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

oder

$$\Phi_{i+2} = \Phi_{i-2} + 2\Phi_{i+1} - 2\Phi_{i-1} \quad (\text{C.2})$$

sobald einer der vier Punkte außerhalb des Gitters liegt. Sei nun $i = N$ der letzte Punkt des Gitters. Der Iterationsschritt (3.161) zur Lösung von $\nabla^2 \Phi = 0$ lautet dann

$$\Phi'_N = [\Phi_{N+2} + \Phi_{N-2}] / 2 \quad (\text{C.3})$$

$$= [(\Phi_{N-2} + 2\Phi_{N+1} - 2\Phi_{N-1}) + \Phi_{N-2}] / 2 \quad (\text{C.4})$$

$$= [\Phi_{N-2} + 2(\Phi_{N-3} + 2\Phi_N - 2\Phi_{N-2}) - 2\Phi_{N-1} + \Phi_{N-2}] / 2 \quad (\text{C.5})$$

$$= 2\Phi_N - \Phi_{N-1} - \Phi_{N-2} + \Phi_{N-3}, \quad (\text{C.6})$$

wobei Φ_{N+2} und Φ_{N+1} mittels (C.2) durch Werte im Inneren des Gitters ausgedrückt wurden.

Im Sinne einer VON NEUMANN-Stabilitätsanalyse (siehe z. B. [Potter 1973]) setzen wir Φ nun als Fourier-Mode der Form

$$\Phi_i(t) = A_n \exp(jik\Delta x) =: A_n \exp(ji\beta) \quad (\text{C.7})$$

an. Dabei ist k die Wellenzahl der Mode, n zählt die Iterationen, i ist der Index der Gitterzelle und j bezeichnet die imaginäre Einheit $(0, 1) \in \mathbb{C}$. Durch Einsetzen ergibt sich die Amplitudenverstärkung pro Iterationsschritt zu

$$\left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \left| \frac{\Phi'_N}{\Phi_N} \right| = |2 - \exp(-j\beta) - \exp(-2j\beta) + \exp(-3j\beta)| \quad (\text{C.8})$$

$$= \sqrt{1 - 4 \sin^2 \beta (4 \cos \beta - 3)} \quad (\text{C.9})$$

$$\geq 1 \quad \text{für } |\beta| \geq \arccos(3/4) = 0,7227\dots \quad (\text{C.10})$$

Sobald also die inneren Werte von Φ Moden im durch (C.10) bezeichneten Bereich enthalten, wird das Verfahren numerisch instabil. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass Φ nach außen quadratisch extrapoliert wird, wodurch die so berechneten Randwerte im Einzelfall betragsmäßig größer werden können als die inneren Werte, aus denen sie bestimmt wurden. Die nachfolgende Mittelung (C.3) erhöht dann den Betrag von Φ_N , was die extrapolierten Werte weiter erhöht usw.

C.2 Zur Wahl der Konstanten ε

Wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben, ist bei der Berechnung der Gewichte (3.28) der Fall abzufangen, dass im Falle einer einseitig konstanten Lösung durch Null dividiert wird, da dann der zugehörige Indikator S_k (3.27) verschwindet. Zu diesem Zweck wird eine „kleine“ Konstante $\varepsilon > 0$ zu S_k addiert, die von Kurganov & Levy [2000] pauschal zu 10^{-4} angesetzt wird. Da die Wirkung von ε von der Größenordnung der \bar{u}_j abhängt (also sozusagen „dimensionsbehaftet“ ist), ist die Wahl dieser Konstante dem jeweiligen Problem anzupassen. Um die Wichtigkeit dieses Punktes zu unterstreichen, werden zwei Advektionsläufe der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Art bei unterschiedlichem ε durchgeführt: Das schon bekannte kastenförmige Dichteprofil (3.62) wird mit der Geschwindigkeit $u_{\text{adv}} = 0,5$ über den periodischen Bereich $x \in [-1, 1]$ advektiert. Abbildung C.1 zeigt zwei exemplarische Ergebnisse. Der von Kurganov & Levy [2000] empfohlene Wert muss danach offensichtlich als ungeeignet für diese Problemklasse bezeichnet werden. Deutlich bessere Ergebnisse werden hingegen mit der Wahl $\varepsilon = 10^{-12}$ erzielt, die aus diesem Grund in allen durchgeführten Simulationen Verwendung findet.

Das hier geschilderte Beispiel macht deutlich, dass CWENO zwar ein mächtiges Werkzeug zur Vermeidung oszillatorischer Artefakte darstellt, es diese Wirkung aber nicht

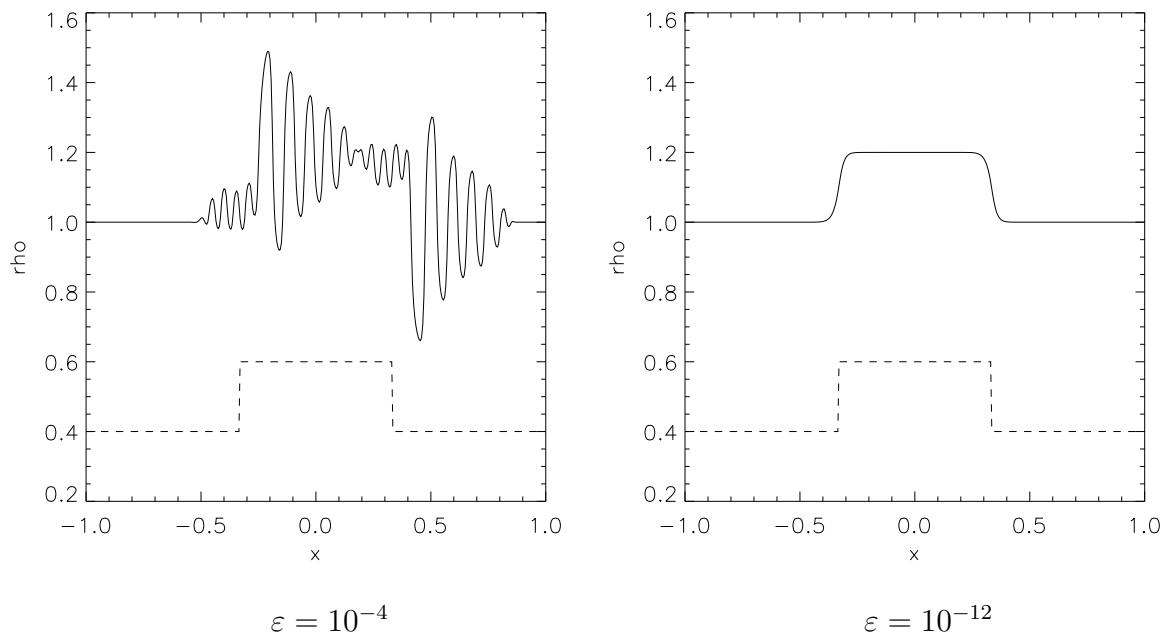


Abbildung C.1: Advektionsläufe für zwei verschiedene Werte der Konstanten ε für die Indikatoren (3.28). In beiden Fällen beträgt die Auflösung 400 Gitterzellen in x -Richtung und der Zeitschritt $\Delta t = 0,0025$, entsprechend einem CFL-Wert von 0,25. Dargestellt sind jeweils das Dichteprofil zur Zeit $t_1 = 4 = 2/u_{\text{adv}}$ (also nach genau einem Durchlauf), sowie das (um 0,6 Einheiten nach unten verschoben gezeichnete) Startprofil $\rho_0(x)$ nach Gleichung (3.62) (gestrichelt gezeichnet).

immer und automatisch entfaltet.¹ Vielmehr sind die gewählten Parameter der Natur des Problems anzupassen, und eine geeignete Wahl kann oft erst durch numerische Parameterstudien gefunden werden.

¹Gerade vor diesem Hintergrund scheint die Bezeichnung des Verfahrens (ENO = „essentially non-oscillatory“) sehr passend gewählt.

Literaturverzeichnis

- T. Amari, J.F. Luciani, J.J. Aly, Z. Mikić & J. Linker (2003):
Coronal Mass Ejections: Initiation, Magnetic Helicity, and Flux Ropes. I. Boundary Motion-driven Evolution, *Astrophys. J.* **585**, 1073.
- R.G. Athay (1976):
The solar chromosphere and corona: Quiet Sun, D. Reidel Publishing Comp. Dordrecht.
- J. Balbás & E. Tadmor (2004):
Non-Oscillatory Central Schemes for One- and Two-Dimensional MHD Equations. II: High-order Semi-discrete Schemes, eingereicht zu *J. Comp. Phys.*
- M. Banaszkiewicz, W.I. Axford & J.F. McKenzie (1998):
An analytic solar magnetic field model, *Astron. Astrophys.* **337**, 940.
- L. Biermann (1946):
Zur Deutung der chromosphärischen Turbulenz und des Exzesses der UV-Strahlung in der Sonne, *Naturwiss.* **33**, 118.
- L. Biermann (1951):
Kometenschweife und solare Korpuskularstrahlung, *Z. Astrophysik* **29**, 274.
- M.K. Bird & P. Edenhofer (1990):
Remote sensing observations of the solar corona, in: *Physics of the Inner Heliosphere I*, herausgegeben von R. Schwenn & E. Marsch. Springer, Berlin.
- D. Biskamp (1993):
Nonlinear Magnetohydrodynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- J.A. Bittencourt (2004):
Fundamentals of Plasma Physics, 3. Auflage, Springer, New York.
- K. Bocchialini & J.-C. Vial (1996):
High-Chromosphere and Low-Transition-Region Network: a Different Organization in an Equatorial Coronal Hole? *Sol. Phys.* **168**, 37.

H. Bondi (1952):

On spherically symmetrical accretion, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc* **112**, 195.

J.P. Boris & D.L. Book (1973):

Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works, *J. Comp. Phys.* **11**, 38.

J.U. Brackbill & D.C. Barnes (1980):

The Effect of Nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations, *J. Comp. Phys.* **35**, 426.

M. Brio & C.C. Wu (1988):

An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics, *J. Comp. Phys.* **75**, 400.

L.F. Burlaga, R.M. Skoug, C.W. Smith, D.F. Webb, T.H. Zurbuchen, A. Reinard (2001):

Fast ejecta during the ascending phase of solar cycle 23: ACE observations, 1998-1999, *J. Geophys. Res.* **106** 20957-20977.

A.C. Calder und 17 Koautoren (2002):

On Validating an Astrophysical Simulation Code, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **229**, 143.

S. Chandrasekhar (1939):

An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover Publications, New York.

S. Chapman (1954):

The Viscosity and Thermal Conductivity of a Completely Ionized Gas, *Astrophys. J.* **120**, 151.

A.J. Chorin (1967):

A numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, *J. Comput. Phys.* **2**, 12.

A.J. Chorin (1968):

Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, *Math. Comp.* **22**, 745.

A.J. Chorin (1969):

On the Convergence of Discrete Approximations to the Navier-Stokes Equations, *Math. Comp.* **23**, 341.

P. Colella & E.G. Puckett (1994):

Modern Numerical Methods for Fluid Flow, unveröffentlicht, online verfügbar unter <http://www.amath.unc.edu/Faculty/minion/class/puckett/>

- R. Courant, K. Friedrichs & H. Lewy (1928):
Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik, *Math. Ann.* **100**, 32.
- S.R. Cramner (2001):
Ion-cyclotron diffusion of velocity distributions in the extended solar corona, *J. Geophys. Res.* **106**, A11, 24937.
- S.R. Cramner (2004):
New views of the solar wind with the Lambert W function, *Amer. J. Phys.* **72**, 1397.
- A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.-D. Munz, T. Schnitzer & M. Wesenberg (2002):
Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations, *J. Comp. Phys.* **175**, 645.
- V. Domingo, B. Fleck, B. & A.I. Poland (1994):
The scientific payload of the space-based solar and heliospheric observatory (SOHO), *Space Sci. Rev.* **70**, 7.
- S.D. Drell, H.M. Foley & M.A. Ruderman (1965):
Drag and Propulsion of Large Satellites in the Ionosphere: An Alfvén Propulsion Engine in Space, *J. Geophys. Res.* **70**, 3131.
- A. Eddington (1926):
The Internal Constitution of the Stars, Cambridge University Press, Cambridge.
- B. Edlén (1942):
Die Deutung der Emissionslinien im Spektrum der Sonnenkorona, *Z. Astrophys.* **22**, 30.
- E.A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi & J. Mohd-Yusof (2000):
Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations, *J. Comp. Phys.* **161**, 35.
- H. Fichtner (1987):
Behandlung der Sonnenwindexpansion aus koronalen Magnetfeldstrukturen unter Berücksichtigung der Plasma-Magnetfeld-Wechselwirkung, Diplomarbeit, Universität Bonn.
- H. Fichtner & H.J. Fahr (1989):
Plasma expansion from diverging magnetic field configurations — the plasma-magnetic field interaction, *Planet. Space Sci.* **37**, 987.
- H. Fichtner & H.J. Fahr (1990):
Towards a rigorous model for multifluid expansion of stellar coronae: application to the solar wind, *Astron. Astrophys.* **241**, 187.

- L.A. Fisk (1996):
Motion of the footpoints of heliospheric magnetic field lines at the Sun: Implications for recurrent energetic particle events at high heliographic latitudes, *J. Geophys. Res.* **101**, 15547.
- C.A. Fletcher (1991):
Computational Techniques for Fluid Dynamics, 2. Auflage. Springer, New York.
- G.E. Forsythe & W.R. Wasov (1960):
Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, Wiley, New York.
- H. Friedel, R. Grauer & C. Marliani (1997):
Adaptive Mesh Refinement for Singular Current Sheets in Incompressible Magnetohydrodynamic Flows, *J. Comp. Phys.* **134**, 190.
- K.O. Friedrichs (1954):
Symmetric hyperbolic linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **7**, 345.
- B. Fryxell und 9 Koautoren (2000):
FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermo-nuclear Flashes, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **131**, 273.
- S.K. Godunov (1959):
Ein Finite-Differenzen-Verfahren für die numerische Berechnung diskontinuierlicher Lösungen der Gleichungen der Fluidodynamik, *Mat. Sb.* **49**, 271 (auf Russisch).
- J.P. Goedbloed & S. Poedts (2004):
Principles of Magnetohydrodynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- E. Goldewski & P. Raviart (1996):
Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Springer, New York.
- L. Golub & J.M. Pasachoff (1997):
The Solar Corona, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- R. Grauer, C. Marliani & K. Germaschewski (1998):
Adaptive Mesh Refinement for Singular Solutions of the Incompressible Euler Equations, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4177.
- C.P.T. Groth, D.L. De Zeeuw, T.I. Gombosi, K.G. Powell (2000):
Global three-dimensional MHD simulation of a space weather event: CME formation, interplanetary propagation, and interaction with the magnetosphere, *J. Geophys. Res.* **105**, 25053-25078.

- W. Grotrian (1933):
Ergebnisse der Potsdamer Expedition zur Beobachtung der Sonnenfinsternis am 9. Mai 1929 in Takengon (Nordsumatra), *Z. Astrophys.* **7**, 26.
- R.E. Hartle & P.A. Sturrock (1968):
Two-Fluid Model of the Solar Wind, *Astrophys. J.* **151**, 1155.
- J. Hartmann (1937):
Hg-Dynamics I. Theory of the Laminar Flow of an electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field, *Matematisk-fysiske Meddelelser* **M 15**, 6.
- M. Hesse:
Untersuchungen zur magnetischen Rekonnerion in dreidimensionalen Systemen, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- A.J. Hundhausen (1968):
Direct Observations of Solar-Wind Particles, *Space Sci. Rev.* **8**, 690.
- W.-H. Ip & A. Kopp (2002):
MHD simulations of the solar wind interaction with Mercury, *J. Geophys. Res.* **107(A11)**, 1348, DOI 10.1029/2001JA009171
- G.-S. Jiang & C.-W. Shu (1996):
Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comp. Phys.* **126**, 202.
- H. Kalisch, W. Neutsch, H. Fichtner, S.R. Sreenivasan & M. Shevalier (2003):
Coronal Holes and Icosahedral Symmetry. Part 3: Integration of the Hydrodynamic Equations, *Astrophys. Space Sci.* **288**, 547.
- M.-B. Kallenrode (2004):
Space Physics, 3. Auflage. Springer, Berlin.
- K.A. Keller und 6 Koautoren (2002):
Global MHD modeling of the impact of a solar wind pressure change, *J. Geophys. Res.* **107(A7)**, 1126, DOI 10.1029/2001JA000060
- R. Keppens & J.P. Goedbloed (1999):
Numerical simulations of stellar winds: polytropic models, *Astron. Astrophys.* **345**, 251.
- R. Keppens & J.P. Goedbloed (2000):
Stellar winds, dead zones, and coronal mass ejections, *Astrophys. J.* **530**, 1036.
- R. Kippenhahn & C. Möllenhoff (1975):
Elementare Plasmaphysik, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

- J. Kleimann, A. Kopp, H. Fichtner, R. Grauer & K. Germaschewski (2004):
Three-dimensional MHD high-resolution computations with CWENO employing adaptive mesh refinement, *Comp. Phys. Comm.* **158/1**, 47.
- R. Kissmann, J. Kleimann, H. Fichtner & R. Grauer (2005):
First studies of interstellar turbulence using a new MHD code, *in Vorbereitung*.
- R.W. Komm, R.F. Howard & J.W. Harvey (1993):
Torsional oscillation patterns in photospheric magnetic features, *Solar Phys.* **143**, 19.
- A. Kopp & A. Schröder (1998):
MHD Simulations of Large Conducting Bodies Moving Through a Planetary Magnetosphere, *Physica Scripta* **T74**, 71.
- S.M. Krimigis und 7 Koautoren (2003):
Voyager I exited the solar wind at a distance of ~ 85 AU from the Sun, *Nature* **426**, 45-48.
- A. Kurganov & D. Levy (2000):
A third-order semidiscrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations, *SIAM J. Sci. Comput* **22**, 1461.
- A. Kurganov & D. Levy (2002):
Central-Upwind Schemes for the Saint-Venant System, *Math. Model. Num. Anal.* **36**, 397.
- A. Kurganov & E. Tadmor (2000):
New High-Resolution Central-Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations, *J. Comp. Phys.* **160**, 241.
- T. Laitinen, H. Fichtner & R. Vainio (2003):
Toward a self-consistent treatment of the cyclotron wave heating and acceleration of the solar wind plasma, *J. Geophys. Res.* **108(A2)**, 1081, DOI 10.1029/2002JA009479
- J.H. Lane (1870):
On the Theoretical Temperature of the Sun, under the hypothesis of a Gaseous Mass maintaining its Volume by its Internal Heat, and depending on the Laws of Gases as known to Terrestrial Experiment, *Amer. J. Sci., 2nd ser.* **148**, 57.
- K.R. Lang (2000):
The Sun from Space, Springer, New York
- P.D. Lax (1954):
Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Comm. Pure Appl. Math* **7**, 159.

- Y. Leblanc, G.A. Dulk, A. Vourlidas, J.-L. Bougeret (2001):
Tracing shock waves from the corona to 1 AU: Type II radio emission and relationship with CMEs, *J. Geophys. Res.* **106**, 25301.
- R.J. LeVeque (1992):
Numerical Methods for Conservation Laws (Lectures in Mathematics). Birkhäuser, Basel.
- D.Levy, G. Puppo & G. Russo (2000):
Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws, *SIAM J. Sci. Comput.* **22**, 656.
- J.A. Linker (1987):
The Interaction of Io with the Plasma Torus, Dissertation, University of California, Los Angeles.
- J.A. Linker, M.G. Kivelson & R.J. Walker (1988):
An MHD simulation of plasma flow past Io: Alfvén and slow mode perturbations, *J. Geophys. Res.* **15**, 1311.
- B.C. Low (1988):
Two-dimensional solar wind flows, in: *Solar Wind VI*, herausgegeben von V.J. Pizzo, T.E. Holzer & D.G. Sime, *NCAR/TN-306+Proc* **1**, 113.
- J.G. Luhmann & C.T. Russell (1997):
Venus/Mars: Magnetic Field and Magnetosphere, in: *Encyclopedia of Planetary Sciences*, Hrsg Shirley & Fainbridge, 454-456, Chapman and Hall, New York.
- W.B. Manchester und 7 Koautoren (2004):
Three-dimensional MHD simulation of a flux rope driven CME, *J. Geophys. Res.* **109**, A01102, DOI: 10.1029/2002/JA009672.
- E. Marsch & C.-Y. Tu (2001):
Heating and acceleration of coronal ions interacting with plasma waves through cyclotron and Landau resonance, *J. Geophys. Res.* **106**, 227.
- R.G. Marsden (1996):
A summary of solar wind observations at high latitudes: ULYSSES, *Space Sci. Rev.* **78**, 67.
- F.B. McDonald, E.C. Stone, A.C. Cummings, B. Heikkila, N. Lal & W.R. Webber (2003):
Enhancements of energetic particles near the heliospheric termination shock, *Nature*, **426**, 48-51.

- J. Mohd-Yusof (1997):
Combined Immersed Boundaries/B-Splines-Methods for Simulation of Flows in Complex Geometries, *CTR Annual Research Briefs*, NASA Ames/Stanford Univ.
- K. Murawski & R.S. Steinolfson (1996):
Numerical simulations of mass loading in the solar wind interaction with Venus, *J. Geophys. Res.* **101** 2547-2560.
- H. Nessyahu & E. Tadmor (1990):
Non-oscillatory central-differencing for hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.* **87**, 408.
- F.M. Neubauer (1980):
Nonlinear Standing Alfvén Wave Current System at Io — Theory, *J. Geophys. Res.* **85**, 1171.
- F.M. Neubauer (1991):
Die Magnetosphären anderer Planeten im Sonnensystem, in: *Plasmaphysik im Sonnensystem*, hrsg. von K.-H. Glaßmeier & M. Scholer, BI Wissenschaftsverlag.
- M. Neugebauer (1994):
Observations of the solar wind from coronal holes, *Space Sci. Rev.* **70**, 319.
- M. Neugebauer & C.W. Snyder (1966):
Mariner II observations of the solar wind. 1. Average properties, *J. Geophys. Res.* **71**, 4469.
- T. Neukirch & E.R. Priest (2000):
Generalization of a Special Class of Time-dependent Solutions of the Two-dimensional Magnetohydrodynamic Equations to Arbitrary Pressure Profiles, *Phys. Plasmas* **7**, 3105.
- Ogawara und 7 Koautoren (1991):
The Solar-A Mission — an Overview, *Solar Phys.* **136**, 1.
- A. Otto (1990):
3D Resistive MHD Computations of Magnetospheric Physics, *Comp. Phys. Comm.* **59**, 185.
- E. N. Parker (1958):
Dynamics of interplanetary gas and magnetic fields, *Astrophys. J.* **128**, 664.
- C.S. Peskin (1972):
Flow pattern around heart valves, *J. Comp. Phys.* **10**, 252.

- V. Pizzo und 5 Koautoren (1983):
Determination of the solar wind angular momentum flux from the HELIOS data — an observational test of the Weber and Davis theory, *Astrophys. J.* **271**, 335.
- G.W. Pneuman & R.A. Kopp (1970):
Gas-magnetic field interactions in the Solar corona, *Solar Phys.* **18**, 258.
- F. Portier-Fozzani & B. Inhester (2001):
3D Coronal structures and their evolutions measured by Stereoscopy, consequences for Space Weather and the STEREO mission, *Space Sci. Rev.* **97**, 51.
- D. Potter (1973):
Computational Physics, John Wiley, London.
- E.R. Priest (1982):
Solar Magnetohydrodynamics, D. Reidel Publishing Comp. Dordrecht.
- L. Rastätter (1997):
Transportphänomene an der Grenzschicht zwischen Magnetosphäre und Akkretions-scheibe eines kompakten Sterns, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- P. Riley, J.A. Linker & Z. Mikić (2001):
An empirically-driven global MHD model of the solar corona and inner heliosphere *J. Geophys. Res.* **106(A8)**, 15889-15902.
- B.J. Robertson (1983):
Self-consistent magnetohydrodynamic coronal hole flows, *Solar Phys.* **83**, 63.
- P. Roe (1981):
Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *J. Comp. Phys.* **43**, 257.
- I.I Rousev und 8 Koautoren (2003):
A Three-dimensional Model of the Solar Wind Incorporating Solar Magnetogram Observations, *Astrophys. J.* **595**, L57.
- K. Sauer, A. Bogdanov & K. Baumgärtel (1994):
Evidence of an ion composition boundary (protonopause) in bi-ion fluid simulations of solar wind mass loading, *J. Geophys. Res. Lett.* **21**, 2255-2258.
- K. Scherer, H. Fichtner & E. Marsch (Hrsg.) (2000):
Outer Heliosphere: Beyond the Planets, Copernicus Gesellschaft, Katlenburg-Lindau.
- K. Schlegel (1991):
Das Polarlicht, in: *Plasmaphysik im Sonnensystem*, hrsg. von K.-H. Glaßmeier & M. Scholer, BI Wissenschaftsverlag.

- C.G. Schultz (1994):
Coronal streamers' theories, *Space Sci. Rev.* **70**, 233.
- K. Schwarzschild (1948):
On Noise Arising from the Solar Granulation, *Astrophys. J.* **107**, 1.
- G.A. Sod (1978):
A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.* **27**, 1.
- F. Spanier (2002):
Strömungen in komplexen Geometrien, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum.
- L. Spitzer (1962):
Physics of Fully Ionized Gases, 2. Auflage, Interscience, New York.
- N. Srivastava & R. Schwenn (2000):
The origin of the Solar Wind: An Overview, in: *The Outer Heliosphere: Beyond the Planets*, herausgegeben von K. Scherer, H. Fichtner & E. Marsch, Copernicus Gesellschaft, Katlenburg-Lindau.
- J.M. Stone, J.F. Hawley, C.R. Evans & M.L. Norman (1992):
A test suite for magnetohydrodynamical simulations, *Astrophys. J.* **388**, 415.
- E.C. Stone und 6 Koautoren (1998):
The Advanced Composition Explorer, *Space Sci. Rev.* **86**, 1-22.
- G. Strang (1968):
On the Construction and Comparison of Difference Schemes, *SIAM J. Numer. Anal.* **5**, 506.
- K.T. Strong und das YOKOH Team (1994):
Observations of loops and prominences, *Space Sci. Rev.* **70**, 133.
- S.T. Suess (2000):
The Sun and the Solar Wind Close to the Sun, *Adv. Space Res.* **26**, 761.
- E.F. Toro (1996):
Riemann Solvers and Upwind Methods for Fluid Dynamics, Springer, New York.
- G. Tóth (2000):
The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes, *J. Comp. Phys.* **161**, 605-652.

- G. Tóth, D. Kovács, K.C. Hansen & T.I. Gombosi (2004):
Three-dimensional MHD simulations of the magnetosphere of Uranus, *J. Geophys. Res.* **109(A11)**, A11210, DOI: 10.1029/2004JA010406.
- K. Tsinganos & B.C. Low (1989):
Steady hydromagnetic flows in open magnetic fields. II — Global flows with static zones, *Astrophys. J.* **342**, 1028.
- C.-Y. Tu, Z.-Y. Pu & F.-S. Wei (1984):
The Power Spectrum of Interplanetary Alfvénic Fluctuations: Derivation of the Governing Equation and Its Solution, *J. Geophys. Res.* **89**, 9695.
- Y. Uchida (1967):
Propagation of hydromagnetic disturbances in the solar corona and Moreton's wave phenomenon, *Solar Phys.* **4**, 30.
- A.V. Usmanov & M.L. Goldstein (2003):
A tilted-dipole MHD model of the solar corona and solar wind, *J. Geophys. Res.* **108**, SSH 1-1, CiteID 1354, DOI 10.1029/2002JA009777.
- M. Valtonen (2005):
Space Weather Effects on Technology, in: *Space Weather — The Physics Behind a Slogan*. Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin.
- M. Velli (2001):
Hydrodynamics of the solar wind expansion, *Astrophys. Space Sci.* **277**, 157.
- M. Velli, R. Bruno, F. Malara (2002):
Solar Wind Ten: Proceedings of the Tenth International Solar Wind Conference, Pisa, *AIP Conference Proceedings* **679**.
- R.J. Walker, T. Ogino, J. Raeder & M. Ashour-Abdalla (1993):
A global magnetohydrodynamic simulation of the magnetosphere when the interplanetary magnetic field is southward: The onset of magnetotail reconnection, *J. Geophys. Res.* **98**, 17235-17250.
- R.J. Walker, T. Ogino & M.G. Kivelson (2001):
Magnetohydrodynamic simulations of the effects of the solar wind on the Jovian magnetosphere, *Planet. Space Sci.* **49**, 237-245.
- A.H. Wang & S.T. Wu (1998):
Global model of the corona with heat and momentum addition, *J. Geophys. Res.* **103**, 1913.

E.J. Weber & L. Davis (1976):

The Angular Momentum of the Solar Wind, *Astrophys. J.* **148**, 217.

T. Wiegelmann (1998):

Zur Theorie von Helmetstreamern und ihrer Bedeutung für koronale Massenausbrüche und den langsamen Sonnenwind, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.

A.N. Wright & S.J. Schwarz (1990):

The Equilibrium of a Conducting Body Embedded in a Flowing Plasma, *J. Geophys. Res.* **95**, 4027.

S.T. Wu, T.X. Zhang, E. Tandberg-Hanssen, Y. Liu, X. Feng, A. Tan (2004):

Numerical Magnetohydrodynamic Experiments for Testing the Physical Mechanisms of Coronal Mass Ejections Acceleration, *Solar Phys.* **225**, 157-175.

D. Young (1954):

Iterative methods for solving partial difference equations of hyperbolic type, *Trans. Amer. Math. Soc.* **76**, 92.

Eigene Veröffentlichungen

N. Bennert et al. (1999)

Differential photometry of suspected Cataclysmic Variables, *International Bulletin of Variable Stars*, **4779**, 1.

J. Kleimann & G. Hornig (2001)

Non-ideal MHD Properties of Magnetic Flux Tubes in the Solar Photosphere, *Solar Phys.* **200**, 47.

J. Kleimann, H. Fichtner, A. Kopp, K. Germaschewski & R. Grauer (2002)

On the dynamics of the solar corona: first results obtained with a new 3D MHD model, *in: Solar variability: from core to outer frontiers. The (10th European Solar Physics Meeting, September 2002, Prag. ESA SP-506*, **1**, 21.

J. Kleimann, H. Fichtner, A. Kopp, K. Germaschewski & R. Grauer (2002)

On the dynamics of the solar corona: the numerics behind a self-consistent 3D MHD model, *in: Solar variability: from core to outer frontiers. The (10th European Solar Physics Meeting, September 2002, Prag. ESA SP-506*, **1**, 51.

J. Kleimann, A. Kopp, H. Fichtner, R. Grauer & K. Germaschewski (2004)

Three-dimensional MHD high-resolution computations with CWENO employing adaptive mesh refinement, *Comp. Phys. Comm.* **158/1**, 47.

R. Kissmann, J. Kleimann, H. Fichtner & R. Grauer (2005)

First studies of interstellar turbulence using a new MHD code, *in Vorbereitung*.

Danksagung

Mein vornehmlicher Dank gilt DR. HORST FICHTNER für seine vorbildliche Betreuung, seine stete Bereitschaft zu motivierenden Diskussionen und seine freundliche und sachkundige Unterstützung bei zahllosen fachlichen Fragen. Ihm verdanke ich das Verständnis vieler interessanter physikalischer Zusammenhänge.

DR. ANDREAS KOPP schulde ich großen Dank für seine engagierte Unterstützung bei der Bewältigung diverser (nicht nur) numerischer Schwierigkeiten, sowie für sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

RALF KISSMANN und FELIX SPANIER haben bei zahlreichen Gelegenheiten wertvolle Anregungen und Ideen vorgetragen.

Bei der WERNHER VON BRAUN-STIFTUNG ZUR FÖRDERUNG DER WELTRAUMWISSENSCHAFTEN darf ich mich für großzügige finanzielle Unterstützung während der ersten beiden Jahre meiner Promotion bedanken. Ebenfalls danke ich dem ALLGEMEINEN PROMOTIONSKOLLEG der Ruhr-Universität Bochum für die Gewährung eines Abschluss-Stipendiums.

PROF. DR. RAINER GRAUER danke ich für seine Kooperations- und Diskussionsbereitschaft bei vielen numerischen Fragestellungen, für die Zurverfügungstellung bereits existierender C++-Routinen sowie für die freundliche Übernahme des Koreferates.

RALF KISSMANN und DR. ANDREAS KOPP gaben mir zahlreiche nützliche Hinweise bei der Niederschrift dieser Arbeit.

Ferner bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Weltraum- und Astrophysik für die ausgesprochen angenehme Arbeitsatmosphäre.

Lebenslauf

- Name: Jens Kleimann
- Geburtsdatum: 04. Oktober 1973
- Geburtsort: Hagen/Westf.
- Schulbildung: 1980 – 1984 Erlenschule Witten
1984 – 1993 Schillergymnasium Witten
Abitur: Juni 1993
- Grundwehrdienst: Oktober 1993 – September 1994
- Studium: Oktober 1994 – Juli 2000
Physik (Diplom) an der Ruhr-Universität Bochum
- Diplomarbeit: April 1999 – April 2000 am Lehrstuhl Theoretische
Physik IV der Ruhr-Universität Bochum.
Titel: *Magnetische Kopplung zwischen Chromosphäre
und Konvektionszone der Sonne*
- Diplom: 03. Juli 2000
- Wissenschaftliche Tätigkeiten: August 2000 – März 2005
Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl
Theoretische Physik IV
seit April 2005
Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max-Planck-Institut
für Sonnensystemforschung, Katlenburg-Lindau