

Inverse Comptonstreuung und die Hochenergie–Emission relativistischer Stoßwellen

Dissertation zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der

Fakultät für Physik und Astronomie
der Ruhr-Universität Bochum

von

Carsten Arbeiter

Bochum 2005

Referent:	Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser
Koreferent:	Prof. Dr. Martin Pohl
Tag der mündlichen Prüfung:	29.6.05

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird die inverse Comptonstreuung behandelt. Bei diesem Prozess streuen Elektronen niederenergetische Photonen zu höheren Energien; für die Anwendung auf die Jets aktiver galaktischer Kerne wird der sogenannte SSC-Prozess, bei dem die Elektronen die von ihnen selbst erzeugten Synchrotronphotonen streuen, untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird für diesen Prozess erstmals eine analytische Lösung unter Berücksichtigung aller Beschränkungen der Verteilungen der Streupartner hergeleitet. Darüber hinaus wird im Rahmen des sogenannten Modells der relativistischen Stoßfront erstmalig der SSC-Prozess und die Auswirkung der elektrostatischen Turbulenz auf die Multifrequenzspektren untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Phänomenologie der AGN	1
1.2	Das vereinheitlichte Modell der AGN	6
1.3	Ziel und Struktur der vorliegenden Arbeit	10
2	Die Targetphotonenverteilung	13
2.1	Die Akkretionsscheibe	13
2.2	Der Staubtorus	16
2.3	Die <i>broad-line-region</i>	18
2.4	Das Jetelement	19
3	Die inverse Comptonstreuung	23
3.1	Notation und Definitionen	23
3.2	Transformationen und Invarianten	26
3.3	Die differentielle Streurrate	28
3.3.1	Der differentielle Wirkungsquerschnitt	29
3.3.2	Isotrope Targetphotonenverteilungen	30
3.4	Die Kühlrate	32
3.5	Die Berechnung des spektralen Flusses	34
3.5.1	Der Fluss pro logarithmischem Energieintervall	36
4	SSC für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung	37
4.1	Eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung	37
4.2	Das Synchrotronspektrum einer potenzgesetzförmigen Elektronenverteilung	40
4.3	Die SSC Streurrate für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung	43
4.4	Darstellung der Ergebnisse	44
4.5	Vergleich: Die SSC-Streurrate im Thomson-Limit	56
5	SSC-Strahlung und das Modell der relativistischen Stoßfront	59
5.1	Das Modell der relativistischen Stoßfront	60

5.2	Die zeitliche Entwicklung der Stoßfront und der relativistischen Teilchenpopulationen	62
5.3	SSC-Strahlung im Modell der relativistischen Stoßfront	65
5.4	Darstellung der Ergebnisse	69
5.4.1	Vergleich: δ - und Heaviside-funktionförmige Quellfunktion \dot{N}_p	71
5.4.2	Der Einfluss des Beobachtungswinkels Θ_S^*	76
5.4.3	Ein Heaviside-funktionsförmiges Dichteprofil des interstellaren Mediums.	81
5.4.4	Die Lichtkurve	86
5.4.5	Die Flussverhältnisse verschiedener Energiebänder	90
5.4.6	Die Flussverhältnisse als Funktion des Flusses	92
5.4.7	Die Abfolge mehrerer Wolken	93
5.4.8	EGRET-Messdaten	96
6	Zusammenfassung und Ausblick	99
A	Die Transformation von μ	103
B	Die Transformation von n	105
C	Die Berechnung der Targetphotonendichte n	107
D	Die Berechnung der differentiellen Streurrate \dot{n}_S	111
D.1	Vergleich: Die differentielle Streurrate eines Elektrons $d^2N/(dt d\epsilon_S)$ im Thomson-Limit	118
E	Die Berechnung der Kühlrate $\dot{\gamma}$	121
F	Die <i>head-on</i>-Approximation	127
G	Die Berechnung der differentiellen Streurrate \dot{n}_S für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung.	131
G.1	Die Integration über b	132
G.2	Vergleich der Heaviside-Funktionen	136
G.3	Die Integration über x	139
G.4	Vergleich: Die differentielle Streurrate \dot{n}_S für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung im Thomson-Limit	150
	Literaturverzeichnis	155

Kapitel 1

Einleitung

Als Einleitung für die vorliegende Arbeit wird zunächst eine Klasse astronomischer Objekte vorgestellt, die sogenannten aktiven galaktischen Kerne (AGN^a). Bei AGN handelt es sich um Galaxien, deren Kerngebiete sich vor allem durch hohe und stark variable Leuchtkräfte auszeichnen. Die aus den Beobachtungen gewonnenen Erkenntnisse führten zu einem vereinheitlichten Modell der AGN. Dieses wird ebenso diskutiert wie verschiedene Modelle zur Erklärung der hochenergetischen Komponente der Multifrequenzspektren der AGN; insbesondere der sogenannte SSC-Prozess wird erläutert. Anschließend wird die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, neue Lösungen für den SSC-Prozess zu erlangen, motiviert und zur Übersicht der Aufbau der Arbeit dargelegt.

Eine Unterklasse in der Familie der Galaxien sind die sogenannten aktiven galaktischen Kerne (AGN). Während sich „gewöhnliche“ Galaxien dadurch charakterisieren lassen, dass sich ihr Multifrequenzspektrum im Wesentlichen aus der Superposition des Lichtes ihrer Sterne ergibt, weisen AGN ein strukturreiches Spektrum vom Radio- bis zum Bereich höchster γ -Energien auf. Wie der Name bereits besagt, bezeichnet man mit AGN genau genommen den Zentralbereich der jeweiligen *Wirtsgalaxie*; deren Charakteristika werden allerdings deutlich von Emissionen bestimmt, die unmittelbar aus den Zentralbereichen stammen oder mit ihnen in Zusammenhang stehen, so dass die betroffenen Galaxien als Ganzes als AGN bezeichnet werden. Gelegentlich findet sich auch die Bezeichnung *aktive Galaxie* in der Literatur.

1.1 Die Phänomenologie der AGN

Aktive galaktische Kerne wurden bereits in der Frühzeit der optischen Astronomie beobachtet, wenngleich die Bezeichnung AGN neueren Datums ist. Zunächst wurden AGN als *planetare Nebel* bekannt, da man sich über ihren extragalaktischen Charakter

^aAus dem Englischen *Active Galactic Nucleus*

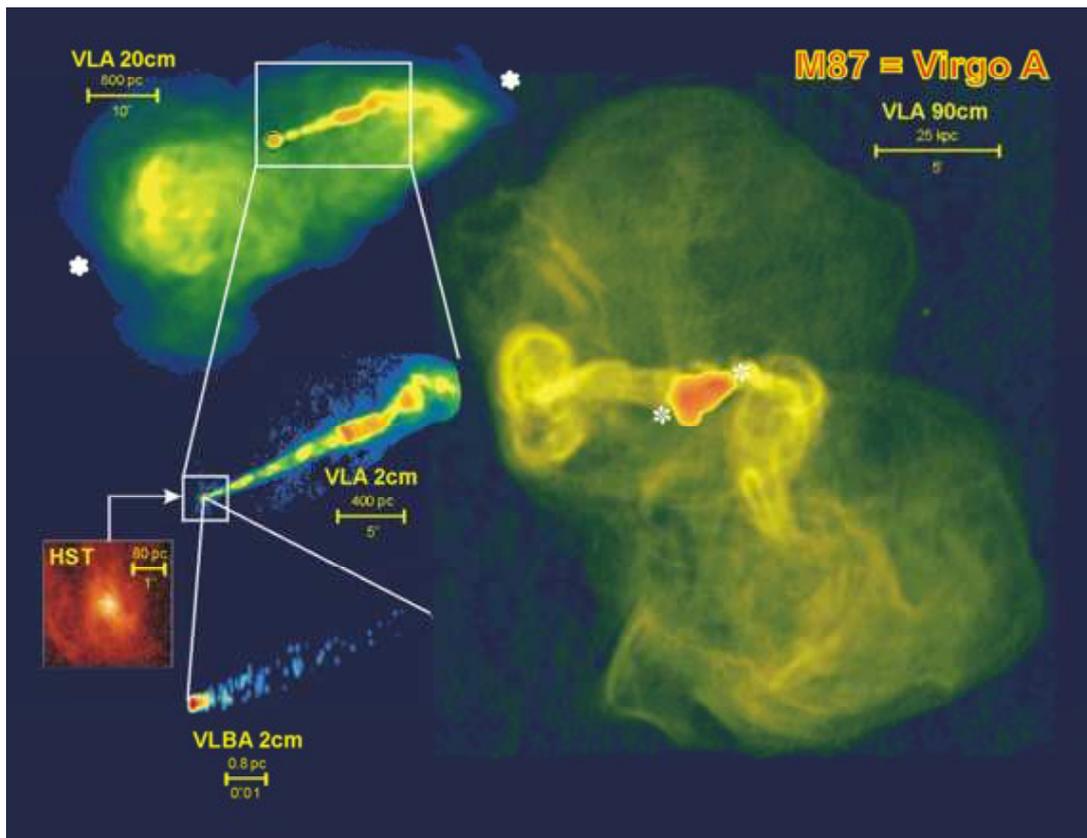


Abbildung 1.1: Eine Montage von Aufnahmen des *Very Large Array* (VLA) bzw. des *Very Long Baseline Array* (VLBA), die interferometrisch betrieben werden; sie zeigt die Radiogalaxie M87/VirgoA bei verschiedenen Auflösungen. Der innere Bereich (links oben) zeigt zwei *radio lobes*, von denen nur der rechte mit einem *Jet* verbunden zu sein scheint; bei größerer Auflösung zeigt dieser knotenartige Strukturen, die auch als *Blobs* bezeichnet werden. Quelle: NRAO/AUI/NSF^b

noch nicht im Klaren war; erst allmählich begann sich die *Insel-Universum-Theorie* durchzusetzen (Curtis, 1917).

Bereits damals wurden einige der spektralen Besonderheiten dieser Quellen, wie die Emission starker Linienstrahlung, entdeckt. Es wurde darüber hinaus erkannt, dass die Zentralbereiche der AGN teilweise deutlich stärkere Strahlungsintensitäten aufweisen als der gesamte restliche Bereich der Galaxie und dass ihre Linienemissionen stark dopplerverbreitert sind und von Atomen hoher Anregung stammen. Nach ihrem Entdecker werden AGN mit diesen Eigenschaften als *Seyfert-Galaxien* bezeichnet (Seyfert, 1943).

Mit dem Aufkommen der Radioastronomie wurde ein weiteres Energieband für die Astronomie nutzbar. Auch in diesem Bereich fanden sich Objekte hoher Leuchtkraft, die sich zunächst räumlich nicht auflösen ließen und daher als *quasi-stellare*

^bDie Abkürzung NRAO/AUI/NSF steht für *National Radio Astronomy Observatory / Associated Universities, Inc. / National Science Foundation*

Radioquellen klassifiziert wurden, woraus das Kunstwort *Quasare* entstand. Ein wichtiger Durchbruch zum Verständnis der Quasare und damit der AGN gelang 1963, als M. Schmidt der Radioquelle 2C273 ein im Optischen bekanntes Objekt mit einer zum damaligen Zeitpunkt exotischen Rotverschiebung von $z = 1.58$ zuordnen konnte (Schmidt, 1963). Erst ab diesem Zeitpunkt wurde allgemein anerkannt, dass es sich bei den Quasaren um extragalaktische Quellen handelt.

Durch die Technik der *Very Long Baseline Interferometry (VLBI)*, bei der die Daten von Teleskopen an verschiedenen, möglichst weit voneinander entfernten Orten zeitgenau aufgenommen und die Interferenzmuster anschließend berechnet werden, konnten die zum Teil ausgedehnten Strukturen dieser Objekte im Detail beobachtet werden. Es zeigt sich, dass ein Großteil der Strahlung im Radiobereich von sogenannten *radio lobes* emittiert wird, die durch große Distanzen von dem ebenfalls sehr hellen Zentralobjekt getrennt sind und oft symmetrisch um dieses angeordnet zu sein scheinen. Die *radio lobes* werden teilweise von, im Vergleich zur Distanz zum Zentralobjekt, schmalen Strukturen erhöhter Intensität verbunden, den sogenannten *Jets*.

Abbildung 1.1 zeigt als Beispiel die Radiogalaxie M87, die auch als VirgoA bezeichnet wird^c. In dieser Bildmontage sind Bilder des *Very Large Array (VLA)* und des *Very Long Baseline Array (VLBA)*, bei denen die VLBI-Technik verfeinert wurde, mit verschiedenen Auflösungen, bzw. Längenskalen, dargestellt. Neben der großräumigen Radiostruktur erkennt man auf kleineren Skalen (oben links) zwei *radio lobes*, von denen nur der auf dem Bild rechts mit dem Zentralobjekt durch einen Jet verbunden zu sein scheint. Wie hier ist in vielen Quellen nur ein Jet zu sehen, oder der sogenannte *Counterjet* strahlt deutlich schwächer.

Besonders in der nächst größeren Auflösung (Mitte links) zeigt der Jet knotenartige Strukturen, die auch als *Blobs*^d bezeichnet werden. In vielen Quellen entfernen sich diese Blobs in Beobachtungszeiträumen von mehreren Jahren von dem Zentralobjekt. In einigen Fällen scheint die Entfernungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit um ein Vielfaches zu übersteigen (Cohen et al., 1977; Gómez et al., 1998); dieser Effekt der *superluminalen Bewegung*^e lässt sich durch den relativistischen Dopplereffekt erklären (Rees, 1966; Blandford & Rees, 1978).

Das Bild links in Abbildung 1.2 zeigt als Beispiel für dieses Phänomen das Objekt 3C279 zu verschiedenen Zeitpunkten. Für den äußeren Blob, der sich in dieser Darstellung nach rechts von dem Zentrum entfernt, ergibt sich eine *scheinbare Geschwindigkeit* von $v_{\text{app}} \simeq 4c$; hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Die Erklärung dieses Phänomens wird in Abbildung 1.2 anhand der Skizze rechts und dem dazugehörigen Bildtext erörtert.

^cAuf die Beobachtung von M87 geht sowohl die Entdeckung des ersten *Jets* zurück (Curtis, 1918), als auch die Prägung des Begriffs *Jet* (Baade & Minkowski, 1954).

^dAus dem Englischen; *blob* heißt soviel wie Klumpen oder Klecks.

^eDer Effekt der *superluminalen Bewegung* wurde zum ersten mal von Whitney et al. (1971) beobachtet.

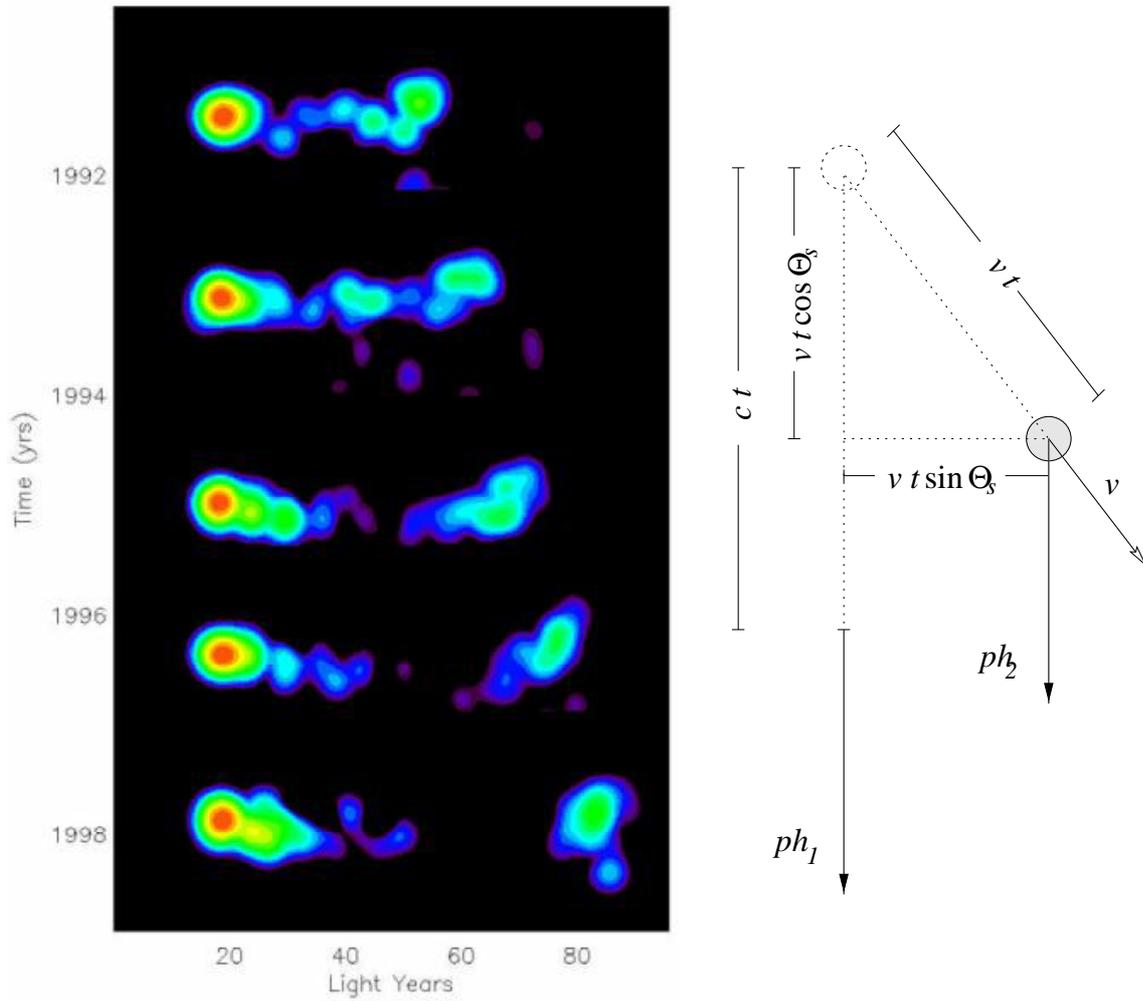


Abbildung 1.2: Die *superluminalen Bewegung*. *Linke Seite:* Eine Bildmontage, die den Quasar 3C279 zu verschiedenen Zeitpunkten zeigt. Aus der Darstellung ist unmittelbar entnehmbar, dass der Blob, der sich auf dem Bild nach rechts von dem Zentrum entfernt, in gut sechs Jahren über 20 Lichtjahre zurücklegt; somit ist seine *scheinbare Geschwindigkeit* $v_{\text{app}} > 3c$. Quelle: NRAO/AUI/NSF. *Rechte Seite:* Die superluminalen Bewegung als Auswirkung des relativistischen Dopplereffekts. Man betrachte die Emission zweier Photonen: Ein Photon, das von einer Quelle, die sich mit der Geschwindigkeit v unter einem Winkel Θ_S auf den Beobachter zubewegt (gepunkteter Kreis), zum Zeitpunkt t_1 emittiert wird, hat zum Zeitpunkt t_2 bereits die Strecke ct mit $t = t_2 - t_1$ zurückgelegt (ph_1). Aufgrund der Eigenbewegung der Quelle mit der Geschwindigkeit $v = B_\Gamma c$ ist sein Abstand zu einem bei t_2 emittierten Photon $\ell = ct - vt \cos \Theta_S$; die Zeitdifferenz, die sich für einen Beobachter aus dem Nachweis der beiden Photonen in seinem Detektor ergibt ist folglich $\Delta T = \ell/c$, also gerade die Zeit, die das zweite Photon für die Strecke ℓ benötigt. Die in der Projektion am Himmel zurückgelegte Strecke ist $\Delta S = vt \sin \Theta_S$. Somit ergibt sich für die (auf c normierte) *scheinbare Geschwindigkeit*

$$B_{\Gamma, \text{app}} \equiv \frac{v_{\text{app}}}{c} = \frac{1}{c} \frac{\Delta S}{\Delta T} = B_\Gamma \frac{\sin \Theta_S}{1 - B_\Gamma \cos \Theta_S}.$$

Für $\cos \Theta_S = B_\Gamma$ ergibt sich der Maximalwert $B_{\Gamma, \text{app}}^{\text{max}} = \Gamma B_\Gamma$ mit $\Gamma = [1 - B_\Gamma^2]^{-\frac{1}{2}}$.

Da sich als Maximalwert der scheinbaren Geschwindigkeit $B_{\Gamma, \text{app}}^{\text{max}} = \Gamma B_{\Gamma}$ ergibt (Definitionen der Größen siehe Text zu Abbildung 1.2), ist der Effekt scheinbarer Überlichtgeschwindigkeit erst ab Geschwindigkeiten $B_{\Gamma} > 1/\sqrt{2} \approx 0.71$ möglich. Es muss sich bei Quellen, die sich superluminal bewegen, also um Objekte handeln, die sich mit relativistischen Geschwindigkeiten auf den Beobachter zubewegen. Diese Feststellung erklärt auch zwanglos den Intensitätsunterschied zwischen den Jets, bzw. die scheinbare Abwesenheit des Counterjets (vgl. Abbildung 1.1): Aufgrund des *relativistischen Dopplereffekts* werden die Flüsse der sich auf den Beobachter zubewegenden Quelle im Beobachtersystem verstärkt^f; bewegt sich der Counterjet in die entgegengesetzte Richtung wird sein Strahlungsfluss abgeschwächt. Das unterschiedliche Intensitätsniveau ergibt sich also aus der unterschiedlichen Relativbewegung der Quellen zum Beobachter.

Die Quelle 2C273 rückte wenig später erneut in den Blickpunkt der Astronomie. Die ESA-Satellitenmission COS B eröffnete der Beobachtung mit einem Messintervall von 2 keV bis 5 GeV^g einen neuen Bereich des elektromagnetischen Spektrums und entdeckte 2C273 als erste extragalaktische Quelle im Bereich der γ -Strahlung (Swanenburg et al., 1978). Als 1991 das *Energetic Gamma Ray Experiment Telescope (EGRET)* seine Arbeit aufnahm, wurden schnell weitere Quellen im γ -Bereich entdeckt, darunter 66 sichere und 28 wahrscheinliche Detektionen von AGN (Hartmann et al., 1999; Mukherjee et al., 1997; von Montigny et al., 1995). Bis auf einen AGN handelt es sich dabei ausschließlich um sogenannte *Blazare*, einer Untergruppe von AGN, die im Wesentlichen sogenannte *flat spectrum radio quasars (FSRQ)* und *BL Lac objects (BLLac)* umfasst, die sich durch hohe Leuchtkräfte und kurze Variabilitätszeitskalen auszeichnen (vgl. Abbildung 1.3).

Es gehört zu den wichtigsten Ergebnissen der EGRET-Mission, dass Blazare einen Großteil ihrer Strahlung im γ -Bereich emittieren (Catanese & Weekes, 1999), dass also im νF_{ν} -Spektrum^h neben einem Maximum bei niedrigen Energien noch ein ausgeprägtes zweites Maximum im Bereich höchster Energien zu finden ist. So sind durch erdgebundene Čerenkov-Teleskope bis heute gesichert sechs Blazare im Bereich von TeV-Energien beobachtet worden (z. B. Horan & Weekes, 2004).

Die vor allem für Blazare extrem hohen Leuchtkräfte ($\sim 10^{48}$ erg/s), die hohen Energien der Photonen und die kurzen Variabilitätszeitskalen (~ 1 h) lassen sich ebenfalls durch ein Modell erklären, bei dem sich die Strahlungsquelle relativistisch und unter kleinem Winkel auf den Beobachter zubewegt (Pohl et al., 1995; Dermer & Gehrels, 1995)ⁱ, da durch das Transformationsverhalten die intrinsischen Zeitskalen

^fDer relativistischen Dopplereffekt wird in Kapitel 3 diskutiert.

^gZur Veranschaulichung: $1\text{GeV} \cong 1.602 \cdot 10^{-3}\text{erg} \cong 2.418 \cdot 10^{23}\text{Hz} \cong 1.241 \cdot 10^{-13}\text{cm}$.

^hZum (differentiellen Strahlungs-)Fluss F_{ν} und seiner Darstellung als νF_{ν} -Spektrum siehe Unterkapitel 3.5.

ⁱDie angeführten Artikel befassen sich mit der Verletzung der sogenannten *Elliot-Shapiro-Relation*, die besagt, dass das Verhältnis aus Leuchtkraft und Variationszeitskala einen bestimmten

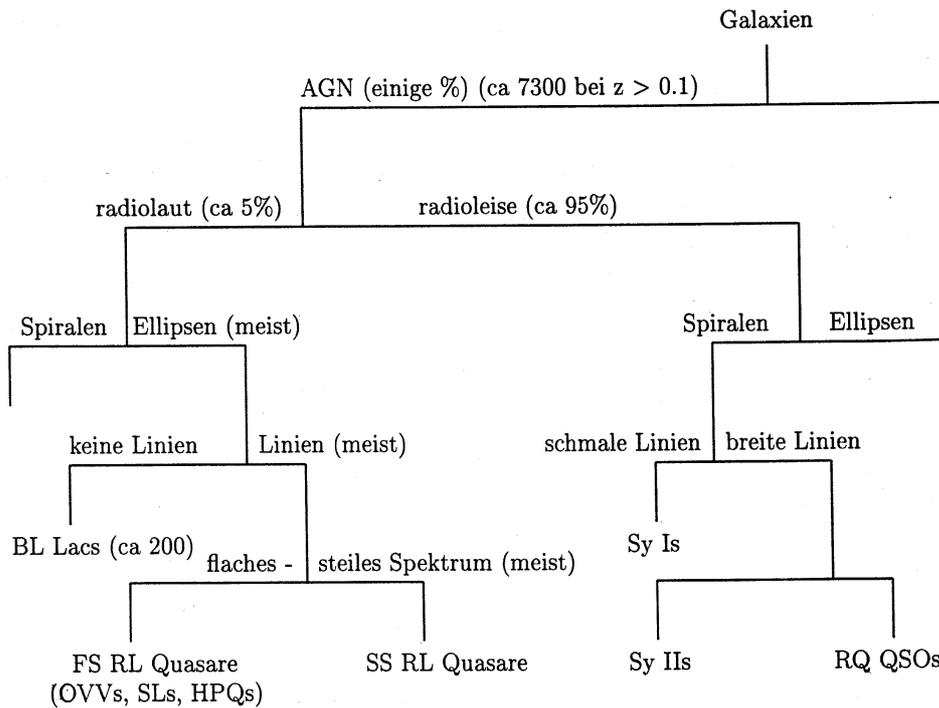


Abbildung 1.3: Eine (nicht vollständige) Übersicht über die Phänomenologie der AGN. Die Untergruppe der Blazare setzt sich aus den BL Lac Objekten und den FS RL Quasaren, im Weiteren FSRQ abgekürzt, zusammen (Mause, 1996, s. Text).

länger und die Flüsse und Energien kleiner sind als im Beobachtersystem gemessen. Man bezeichnet die Effekte dieser Transformationseigenschaften auch als *relativistisches Beaming* (Blandford & Rees, 1978).

Die verschiedenen Galaxien, die man zur Klasse der AGN zusammengefasst hat, sind in Abbildung 1.3 schematisch dargestellt. Der Versuch, die unterschiedlichen Charakteristiken der AGN durch ein einheitliches Modell zu erklären, führte zu dem *vereinheitlichten Modell aktiver galaktischer Kerne*, das die verschiedenen *radiolauten*^j AGN als unterschiedliche Manifestationen der gleichen Objekte beschreibt.

1.2 Das vereinheitlichte Modell der AGN

Die in AGN produzierten Energiemengen, die sich aus der hohen Leuchtkraft und dem langen Aktivitätszeitraum von bis zu 10^6 Jahren (Länge der Jets) ergibt, führen zu der Frage nach deren Erzeugungsmechanismus. Die Akkretion von Materie auf ein supermassives Objekt rückte dabei in den Mittelpunkt der Überlegungen (Salpeter,

Wert nicht übersteigen darf. Einen Ausweg bieten relativistisch bewegte Strahlungsquellen.

^jEin AGN gilt als *radiolaut*, wenn das Verhältnis der Flüsse bei 5 GHz und im blauen optischen Frequenzband (UVB-System, Johnson & Morgan, 1953) größer als ein Wert $a > 1$ ist; in der Regel wird $a = 10$ gesetzt (Kellerman et al., 1989).

1964). Als Zentralobjekt wurde ein *schwarzes Loch* vorgeschlagen und Mechanismen der Energiegewinnung durch elektromagnetische Wechselwirkungen wurden vorgestellt (Blandford & Znajek, 1977).

Aus diesen Überlegungen und der Evidenz für relativistisch bewegte Quellen im Jet, sowie verschiedener weiterer beobachteter Eigenschaften, wie der Existenz oder Abwesenheit von Emissionslinien, ergibt sich das vereinheitlichte Modell (radiolauter) aktiver galaktischer Kerne (siehe Abbildung 1.4 und Urry & Padovani (1995)). Darin besteht der innere Bereich des AGN aus einem rotierenden, supermassiven schwarzen Loch mit einer umgebenden Akkretionsscheibe. Gaswolken spiralisieren in diesen Bereich hinein und emittieren Linien, die im Zentralbereich stark dopplerverbreitert werden; dieser Bereich bildet die sogenannte *broad-line-region (BLR)* und wird für große Beobachtungswinkel^k von einem Staubtorus verdeckt. Die Wolken in größerer Entfernung sind hingegen für alle Beobachtungswinkel sichtbar; da sie sich langsamer bewegen, bilden sie die *narrow-line-region (NLR)*. So können die verschiedenen Linienformen in den Spektren, die zu unterschiedlichen Klassifikationen der AGN führen, als Aufsichtsphänomen gedeutet werden^l.

Die Jets entstehen ebenfalls in diesem zentralen Gebiet, indem sich Plasmoide, durch Magnetfelder kollimiert, mit relativistischen Geschwindigkeiten (anti-)parallel zu dem Drehimpulsvektor des schwarzen Loches aus dem Kernbereich heraus bewegen. Diese Plasmoide sind die im Radiobereich beobachteten Blobs; sie emittieren das in Unterkapitel 1.1 beschriebene Multifrequenzspektrum mit zwei ausgeprägten Maxima. Als Strahlungsmechanismus für das niederenergetische Maximum, welches im Energiebereich zwischen Infrarot und Röntgenstrahlung angesiedelt ist, gilt die Synchrotronemission hochrelativistischer Elektronen, bzw. Positronen, aus den sich ebenfalls relativistisch bewegenden Blobs als allgemein akzeptiert^m.

Für die hochenergetische Strahlungskomponente werden aktuell mehrere Möglichkeiten diskutiert. Die *inverse Comptonstreuung* wurde bereits früh als mögliche Quelle hochenergetischer Strahlung genannt (Rees & Sciama, 1966).

Bei dem Prozess der inversen Comptonstreuung werden niederenergetische Photonen von relativistischen Elektronen oder Positronen zu hohen Energien gestreut.

Da die Existenz hochenergetischer Elektronen durch die Identifikation der Synchrotronemission hochrelativistischer Elektronen als gesichert gilt, muss auch inverse Comptonstreuung stattfinden; in dem Fall, dass die Elektronen die von ihnen selbst generierten Synchrotronphotonen streuen, spricht man von *SSC-Strahlung (Synchrotron-*

^kDer Beobachtungswinkel ist der Winkel zwischen der Jetachse des AGN und der Sichtlinie zum Beobachter.

^lDieser Teil des Modells beschreibt ebenfalls die radioleisen AGN; diese bilden jedoch keine stark kollimierten Jets aus (Antonucci, 1992).

^mAls mögliche Alternative wurde elektrostatische Bremsstrahlung vorgeschlagen (Schlickeiser, 2003).

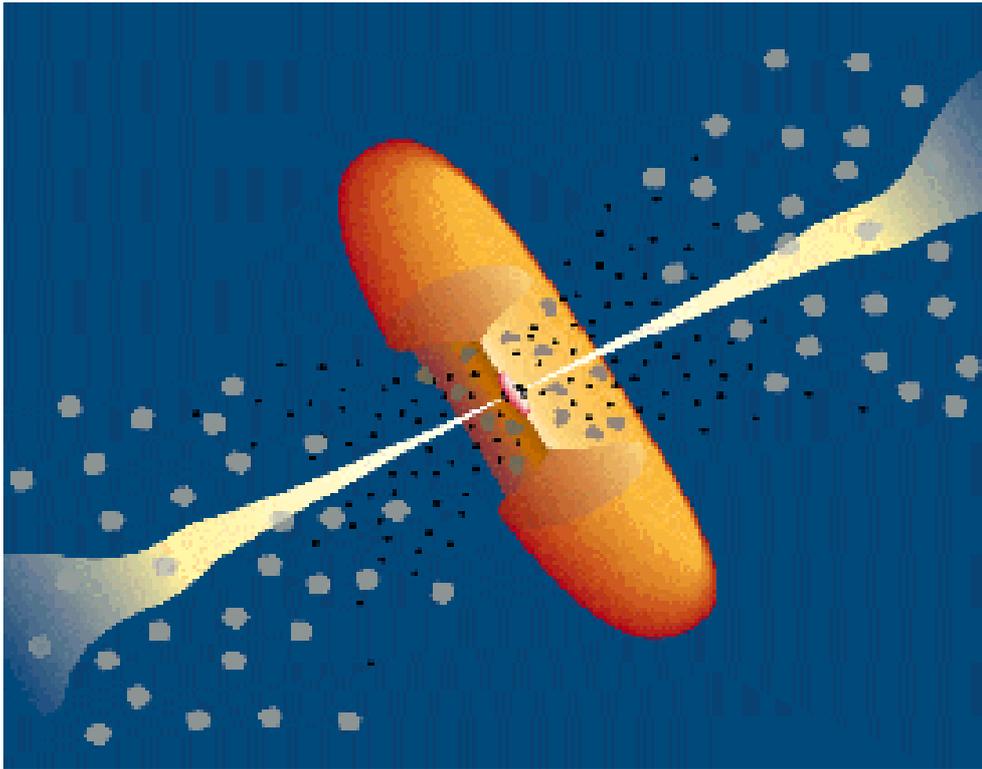


Abbildung 1.4: Das vereinheitlichte Modell (radiolauter) aktiver galaktischer Kerne: Das Zentralobjekt ist ein supermassives schwarzes Loch, umgeben von einer Akkretionsscheibe. Gaswolken spiralisieren in den Zentralbereich hinein und emittieren dabei, je nach Geschwindigkeit, stark oder schwach verbreiterte atomare Übergangslinien; für große Beobachtungswinkel ist dieser Bereich zum Teil von einem Staubtorus verdeckt. Aus der Umgebung des schwarzen Loches wird Materie (anti-)parallel zu seinem Drehimpulsvektor aus dem Zentralbereich befördert und bildet die Jets. Ein Großteil der unterschiedlichen Phänomenologie der AGN wird dadurch als Orientierungseffekt verständlich (Urry & Padovani, 1995).

Self-Compton). Die Frage der Quellen der niederenergetischen Photonen, die gestreut werden, ist Gegenstand aktueller Diskussion und wird im nächsten Kapitel (Kapitel 2) erörtert.

Die hohe Variabilität der AGN in sämtlichen Wellenlängenbereichen macht eine simultane Beobachtung dieser Objekte vom Radio- bis in das TeV-Band unerlässlich. Da Absorptionseffekte die Interpretation der im TeV-Bereich gemessenen Strahlung erschweren, kommt der inversen Comptonstreuung und insbesondere dem SSC-Prozess, dessen Strahlungsmaximum zwischen dem Röntgen- und TeV-Bereich erwartet werden darf, eine Schlüsselrolle zu. Vorallem die eindeutige Verbindung der Synchrotron- und der SSC-Strahlung aufgrund der Tatsache, dass diese durch dieselbe Elektronenpopulation erzeugt werden, erlaubt klare Rückschlüsse auf die Verteilung der Elektronen, sowie den Einfluss externer Photonenfelder.

Allgemein werden Modelle, die die Jet-Plasmoide als Elektron-Positron-Plasmen beschreiben, als *leptonische Modelle* bezeichnet. Mit ihrer Hilfe werden die Spek-

tren der AGN modelliert (als aktuelles Beispiel siehe Krawczynski et al., 2004). Die Berücksichtigung der Absorption bei Blazaren, die im TeV detektiert werden, und die damit verbundenen Korrekturen des intrinsischen Spektrums lassen sich in leptonischen Modellen allerdings nur schwer, bzw. nur durch zusätzliche Annahmen, erklären (Aharonian et al., 2002).

Im Gegensatz dazu gehen *hadronische Modelle* in der Regel von schockbeschleunigten Proton–Elektron–Plasmen aus, die hochenergetische Sekundärteilchen erzeugen (z.B. Kazanas & Ellison, 1986; Sikora et al., 1987; Mannheim & Biermann, 1992). Die daraus entstehenden Elektronen und Positronen unterliegen wiederum den in leptonischen Modellen diskutierten Kühlprozessen; darüber hinaus entstehen γ -Photonen durch den Zerfall neutraler Pionen, sowie Neutrinos.

Eine alternative Klasse von hadronischen Modellen beschreibt die Jets als kollimierte Proton–Elektron–Ströme, die mit dem *externen* Medium wechselwirken und dabei sekundäre Teilchen erzeugen (z.B. Dar & Laor, 1997; Beall & Bednarek, 1999, und die Referenzen darin). Verwandt mit diesen Modellen ist das Modell der *relativistischen Stoßfront* von Pohl & Schlickeiser (2000)^a, in dem die sich bewegenden Jetelemente als kollimierte Stoßwellen beschrieben werden.

Insbesondere der Neutrinofluss von AGN liefert ein eindeutiges Merkmal für die Unterscheidung von leptonischen und hadronischen Modellen (Schuster et al., 2002) für die Emissionen der Jets. Generell ist die Vielfalt beobachteter Eigenschaften von radiolauten AGN sehr groß, so dass das einfache Modell der AGN insofern unzureichend ist, als dass der Beobachtungswinkel *allein* nicht in der Lage ist, die verschiedenen Charakteristika zu erklären, wenngleich das allgemeine Bild eines AGN, wie es in Abbildung 1.4 skizziert ist, bestehen bleibt. Als weitere Einflüsse werden beispielsweise die Akkretionsrate des schwarzen Loches und die zeitliche Entwicklung genannt (Dopita, 1997); letztere wurde von Böttcher & Dermer (2002) modelliert. Die sogenannte *Blazar-Sequenz* ist der Versuch, als weiteren Parameter die Energiedichte des Jets zu etablieren, sowie auf einen unterschiedlich starken Einfluss äußerer Photonenfelder zu verweisen (Fossati et al., 1998; Ghisellini et al., 1998); allerdings scheinen neuere Messungen dem postulierten Schema teilweise nicht zu entsprechen (Padovani et al., 2003; Caccianiga & Marchã, 2004).

Das Unterfangen, ein genaues Verständnis der AGN und insbesondere der Blazare zu erlangen, ist in der Hochenergie–Astrophysik also Gegenstand eines äußerst dynamischen Forschungsfeldes.

^aDer in diesem Artikel verwendete Ausdruck *blast wave* wurde in späteren Artikeln zu besagtem Modell durch *collision front* ersetzt, da der Ausdruck *blast wave* einen scheinbaren Bezug zu einer älteren Arbeit von Blandford & McKee (1977) herstellt, der nicht gegeben ist.

1.3 Ziel und Struktur der vorliegenden Arbeit

Wie in Unterkapitel 1.1 beschrieben, zeichnet sich das Multifrequenzspektrum der AGN durch zwei Maxima aus, wobei das niederenergetische als Synchrotronstrahlung hochrelativistischer Elektronen interpretiert wird. Daher gilt die Existenz hochenergetischer Elektronen in den Jets der AGN als gesichert. Diese müssen zwangsläufig durch inverse Comptonstreuung mit den durch verschiedene Quellen generierten Photonenfeldern wechselwirken. Man weiß also bislang, dass die inverse Comptonstreuung zu dem hochenergetischen Maximum der AGN beitragen wird und dass ein starkes Photonenfeld aus Synchrotronphotonen vorhanden ist. Eine Vielzahl von Autoren nutzt diese Erkenntnis, um die Spektren der AGN anzupassen. Um hier nur zwei aktuelle Beispiele zu nennen, sei auf die Arbeit von Krawczynski et al. (2004) und den Übersichtsartikel von Böttcher (2004) verwiesen; weitere grundlegende Arbeiten werden in Kapitel 2 gewürdigt. Bislang gibt es aber weder eine analytische Lösung für den SSC-Prozess, die sowohl die evidente Begrenztheit des Elektronen- wie auch des sich daraus ergebenden Synchrotronspektrums behandelt, noch ein Modell, das die zeitliche Entwicklung des Multifrequenzspektrums in allen Energiebändern befriedigend erklärt.

Um einen Fortschritt in dem Verständnis der AGN zu erzielen werden in der vorliegenden Arbeit zwei Ziele verfolgt: Zum einen soll erstmals für den, in vielen der oben erwähnten Modellen verwendeten, phänomenologischen Ansatz einer auf einen Teil des Energieraumes begrenzten, potenzgesetzförmigen Elektronenverteilung eine analytische Lösung für den SSC-Prozess hergeleitet werden, die auch die Begrenztheit des Synchrotronspektrums, das sich aus einer solchen Verteilung ergibt, berücksichtigt. Durch diese genauere Behandlung des SSC-Prozesses wird gewährleistet, dass das Anpassen von Messdaten ein genaueres Abbild der Verhältnisse, die *in situ* gegeben sind, hervorbringt, bzw. dass die Möglichkeit einer analytischen Überprüfung der numerisch erzielten Ergebnisse gegeben wird.

Darüber hinaus soll das Modell der relativistischen Stoßfront von Pohl & Schlickeiser (2000) zum ersten Mal um den wichtigen SSC-Prozess erweitert werden. Da dieses Modell die Herkunft der hochenergetischen Elektronen zu erklären vermag und die zeitliche Entwicklung der relativistischen Stoßfront lediglich durch die Dichteverteilung des interstellaren Mediums und den Anfangswerten der Stoßfront-Parameter bestimmt ist, liefert es eine hervorragende Möglichkeit, die Verhältnisse im Jet und in der unmittelbaren Umgebung des AGN zu verstehen. Außerdem soll das Multifrequenzspektrum der relativistischen Stoßfront erstmalig unter Berücksichtigung der elektrostatischen Turbulenz, die von Pohl et al. (2002) behandelt wird, diskutiert werden.

Insofern kommt der vorliegenden Arbeit eine Schlüsselrolle auf dem Weg zum Verständnis der AGN zu: Die Ergebnisse dieser Arbeit können, unter besonderer Berücksichtigung der Beobachtung von AGN im MeV- und GeV-Bereich des elektromagnetischen Spektrums, zu weitgehenden Aufschlüssen über die Verhältnisse in

den Jets von AGN führen, zum einen durch einen, in dieser Arbeit zu verfeinern, phänomenologischen Ansatz, zum anderen durch das Modell der relativistischen Stoßfront, in dessen Zusammenhang hier erstmals der SSC-Prozess diskutiert werden soll.

Daher ist die vorliegende Arbeit insbesondere als Vorbereitung auf die GLAST-Mission (einen kurzen Überblick über die Mission liefern Gehrels & Michelson, 1999) zu sehen, die in naher Zukunft lanciert wird; durch deren satellitengestützte Messinstrumente wird der GeV-Bereich des elektromagnetischen Spektrums in sehr guter Energie- und räumlicher Auflösung erschlossen. Insbesondere die gegenüber EGRET deutlich verbesserte Empfindlichkeit und die damit verbundene verbesserte Zeitauflösung wird eine genaue Untersuchung der Variabilität von AGN in diesem Energiebereich ermöglichen (Dermer & Dingus, 2004). Aufbauend auf die hier zu erzielenden, grundlegenden Ergebnisse kann eine Software entwickelt werden, die die gemessene zeitliche Entwicklung der AGN durch Variation der Modellparameter reproduziert. Mit den beiden unabhängigen Herangehensweisen können die Daten unterschiedlich modelliert und die sich daraus ergebenden Eigenschaften der Jets der AGN verglichen werden.

Um die beschriebenen Ziele zu erreichen, werden im nächsten Kapitel (Kapitel 2) zunächst die wichtigsten Quellen derjenigen Photonen, die in dem inversen Comptonprozess zu hohen Energien gestreut werden, kurz beschrieben. Die spektrale Photonendichte am Ort des Jetelements, die in den inversen Comptonprozess eingeht, wird für Synchrotronphotonen, die in dem Jet selbst produziert werden, bestimmt. In Kapitel 3 wird der elementare Prozess der inversen Comptonstreuung eines einzelnen Elektrons ausführlich dargestellt und die differentielle Streurrate für eine isotrope Photonverteilung berechnet. Um eine Lösung für eine Verteilung von Elektronen zu erhalten, wird in Kapitel 4 zunächst eine potenzgesetzförmige spektrale Elektronenverteilung angenommen und eine analytische Lösung für den SSC-Prozess vorgestellt. Dieser wird ausführlich diskutiert, und die prinzipiellen Eigenschaften und funktionalen Abhängigkeiten der resultierenden Spektren werden erörtert. In Kapitel 5 wird der SSC-Prozess im Rahmen des Modells der relativistischen Stoßfront von Pohl & Schlickeiser (2000) diskutiert. Dazu wird das Modell kurz vorgestellt und die numerisch berechneten Multifrequenzspektren werden unter besonderer Berücksichtigung des inversen Comptonprozesses diskutiert. Kapitel 6 gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf weiterführende Arbeiten.

Um die Nachvollziehbarkeit der Arbeit zu erhöhen, werden längere Rechnungen, auch wenn sie wesentlicher Bestandteil der Arbeit sind, im Anhang durchgeführt.

Kapitel 2

Die Targetphotonenverteilung

In diesem Kapitel werden verschiedene Möglichkeiten für die Quellen der niederenergetischen Targetphotonen vorgestellt. Die Targetphotonen durchdringen in dem Szenario der inversen Comptonstreuung ein mit relativistischen Elektronen und Positronen gefülltes Jetelement und werden von den hochenergetischen Teilchen zu höheren Energien gestreut. Für eine interne Strahlungsquelle, die Synchrotronstrahlung der Elektronenpopulation, wird die Targetphotonendichte zur späteren Verwendung hergeleitet.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, gibt es unterschiedliche Szenarien für die Herkunft der niederenergetischen Photonen, die im Englischen üblicherweise als *Targetphotonen* bezeichnet werden. Unter Targetphotonen versteht man diejenigen Photonen, die im Prozess der inversen Comptonstreuung zu höheren Energien gestreut werden, auf die also bei dem Stoß mit einem relativistischen Elektron Energie übertragen wird. In der Literatur findet sich ebenfalls der Begriff *seed photons*, also *Saatphotonen*. Die Quellen der Targetphotonen lassen sich in zwei grundsätzlich verschiedene Klassen aufteilen. Zum einen ist es naheliegend, externe Strahlungsquellen für die zu streuenden Photonen anzunehmen. Modelle, die diese Herkunft der Targetphotonen protegieren, nennt man allgemein *External-Inverse-Compton (EIC)*-Modelle. In den nächsten drei Unterkapiteln werden mögliche *externe* Targetphotonenquellen vorgestellt.

2.1 Die Akkretionsscheibe

Die das schwarze Loch umgebende Akkretionsscheibe ist eine denkbare Photonenquelle für den inversen Comptoneffekt (Dermer et al., 1992; Dermer & Schlickeiser, 1993). In dem vereinheitlichten Modell der aktiven galaktischen Kerne (siehe Kapitel 1, insbesondere Abbildung 1.4) umgibt das zentrale schwarze Loch eine Scheibe akkretierter Materie. Die Darstellung einer solchen Akkretionsscheibe zeigt Abbildung 2.1. Die Akkretionsscheibe kann im Wesentlichen durch eine geometrisch dünne und

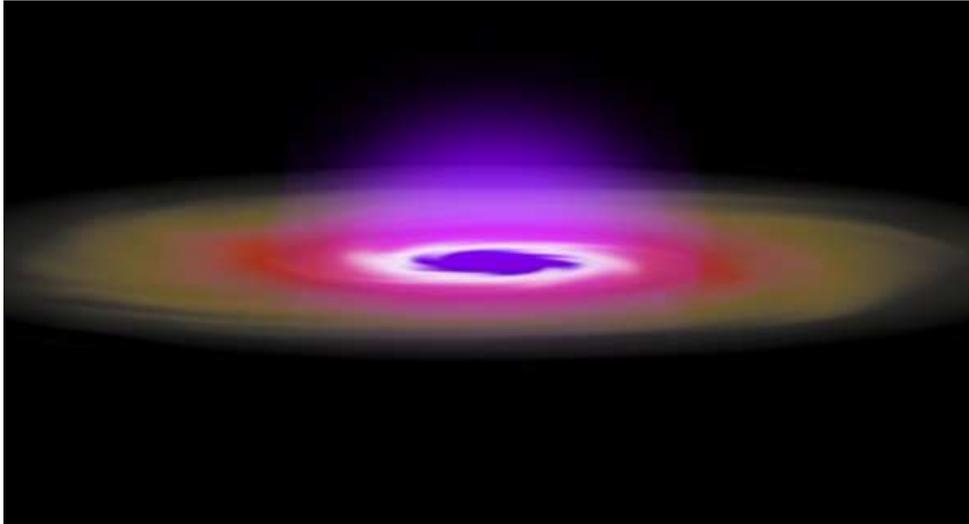


Abbildung 2.1: Eine künstlerische Darstellung einer Akkretionsscheibe um ein schwarzes Loch. Quelle: Homepage MPA ^a.

optisch dicke Scheibe beschrieben werden (Shakura & Sunyaev, 1973). In diesem Fall und unter der zusätzlichen Annahme, dass das zentrale schwarze Loch nicht rotiert, beginnt die Akkretionsscheibe bei $R = 3R_S$ und der von ihr emittierte Strahlungsfluss F_ϵ zeigt eine radiale Abhängigkeit gemäß

$$F_\epsilon(R) \propto R^{-3} \left(1 - \frac{3R_S}{R} \right), \quad (2.1)$$

wobei $R_S = 2GM/c^2$ der sogenannte *Schwarzschild-Radius* ist; dieser ist gleichbedeutend mit dem Radius des Ereignishorizontes des schwarzen Loches, sofern dessen Drehimpuls vernachlässigbar ist. Die Konstanten G und c sind die Gravitationskonstante und die Lichtgeschwindigkeit, und M ist die Masse des zentralen schwarzen Loches. Mit zunehmender Höhe x des betrachteten Jetelements über der Akkretionsscheibe verringert sich der Fluss der Photonen durch das Emissionsgebiet der inversen Comptonstreuung. Wenn der Abstand x den Radius R_{AD} der Akkretionsscheibe ^b um ein Vielfaches übersteigt, ist also $x/R_{AD} \gg 1$, kann die Akkretionsscheibe als Punktquelle betrachtet werden. Entsprechend verringert sich ihr Fluss quadratisch mit der Entfernung.

Zur weiteren Diskussion werden einige Begriffe und Definitionen eingeführt, die im nächste Kapitel ausführlicher behandelt werden: Wie in der Diskussion der superlu-

^ahttp://www.mpa-garching.mpg.de/HIGHLIGHT/2001/highlight0110_e.html

^bDer Radius der Akkretionsscheibe ist nicht eindeutig definiert. Ab einem gewissen Abstand wird der gravitative Einfluss des Zentralkörpers gegenüber anderen Kräften, wie beispielsweise der Anziehung durch andere Massen in der Umgebung, vernachlässigbar. Da hier die Strahlung der Akkretionsscheibe von Bedeutung ist, könnte man als Radius der Akkretionsscheibe denjenigen Abstand definieren, ab dem der Fluss der außerhalb dieses Abstandes liegenden Fläche weniger als 1% zur Gesamtleuchtkraft beiträgt. Dies ist ab $R \approx 900R_S$ erfüllt.

minimalen Bewegung erörtert, entfernt sich das Jetelement von der Akkretionsscheibe mit der relativistischen Geschwindigkeit $B_\Gamma c$. Ist u_ϵ^* die Energiedichte der von der Akkretionsscheibe emittierten Photonen am Ort des betrachteten Jetelements, bedeutet das für die Energiedichte im mitbewegten Laborsystem des Jets (Rybicky & Lightman, 1979)

$$u_\epsilon = \Gamma^3 (1 - B_\Gamma \mu^*)^3 u_{\epsilon^*}^* , \quad (2.2)$$

wobei $\Gamma = 1/\sqrt{1 - B_\Gamma^2}$ der Lorentzfaktor des Jetelementes und $\mu^* = \cos \Theta^*$ der Winkel in Bezug auf die Jetachse ist. Bei Betrachtung der Akkretionsscheibe als Punktquelle bedeutet das für den Winkelkosinus der einlaufenden Photonen, in Bezug auf die Jetachse, $\mu^* = 1$. Für Quellen mit $\Gamma \gg 1$ kann man $B_\Gamma = 1$ setzen und erhält

$$u_\epsilon \stackrel{\mu^*=1}{=} \Gamma^3 (1 - B_\Gamma)^3 u_{\epsilon^*}^* = \frac{1}{\Gamma^3 (1 + B_\Gamma)^3} u_{\epsilon^*}^* \stackrel{B_\Gamma=1}{\simeq} \frac{1}{8\Gamma^3} u_{\epsilon^*}^* . \quad (2.3)$$

Zusätzlich zur Verringerung der Strahlungsdichte durch die Abnahme mit wachsender Entfernung verringert sich die Energiedichte der zu streuenden Photonen in dem Jetelement auch durch seine Relativbewegung in Bezug auf die Photonenquelle; der Jet-Lorentzfaktor, der in der dritten Potenz eingeht, kann dabei viele Größenordnungen ausmachen.

Betrachtet man den differentiellen Wirkungsquerschnitt der inversen Comptonstreuung, der den Streuprozess in Abhängigkeit der Winkel und Energien der Streupartner beschreibt, fällt auf, dass der genäherte Wirkungsquerschnitt im Laborsystem (Reynolds, 1982; Dermer & Schlickeiser, 1993)

$$\frac{d^2\sigma}{d\epsilon_S d\Omega_S} \propto \delta[\epsilon_S - \gamma^2 \epsilon (1 - \beta \cos \psi)] \delta(\Omega_S - \Omega_e) \quad (2.4)$$

für die Streuung in Beobachtungsrichtungen Ω_S , nahe der Jetachse besonders klein ist: Die δ -Funktion im Raumwinkelement Ω_S bewirkt, dass der Wirkungsquerschnitt nur für Streurichtungen einen Beitrag liefert, die identisch zu der Flugrichtung Ω_e des Elektrons sind. Mit anderen Worten, ein Elektron streut alle Targetphotonen exakt in seine Bewegungsrichtung. Für den Winkel zwischen einlaufendem Photon und Elektron ψ in der δ -Funktion der Energie ergibt sich aus dem Kosinussatz der sphärischen Geometrie^c für $\mu = 1$, also in der Näherung der Akkretionsscheibe als punktförmige Photonenquelle (s.o.), und unter Zuhilfenahme der δ -Funktion des Raumwinkelements

$$\cos \psi = \cos \Theta_S . \quad (2.5)$$

In Gleichung 2.4 ergibt sich somit der kleinste Wert für die Streuenergie gerade in Richtung der Jetachse, also bei Beobachtungswinkeln, unter denen die Dopplerverstärkung für den Beobachter am stärksten ist; gerade die Jets von Blazaren mit

^cNachzulesen in Gleichung D.22.

ihren hohen Leuchtkräften und kleinen Variabilitätszeitskalen werden im vereinheitlichten Modell der AGN in kleinen Winkeln zur Sichtlinie angesiedelt. Eine Targetphotonenquelle „im Rücken“ des Jetelements ist also auch durch die funktionale Form des differentiellen Wirkungsquerschnittes wenig effizient in der Bereitstellung von Targetphotonen.

2.2 Der Staubtorus

Eine weitere externe Strahlungsquelle stellt der den aktiven galaktischen Kern umgebende Staub dar (Błażejowski et al., 2000; Arbeiter et al., 2002). In dem vereinheitlichten Modell (vgl. Unterkapitel 1.2) wurde dieser zunächst postuliert, um das Fehlen stark dopplerverbreiteter Emissionslinien in einigen Quellen zu erklären. Der Staub ist in der Ebene der Akkretionsscheibe angeordnet, allerdings nicht als flache Scheibe, sondern als sich zu höheren Breitengraden erstreckender Torus. Ein extremes Beispiel für die Geometrie einer solchen Staubanordnung zeigt Abbildung 2.2. Der Staub umschließt hier fast vollständig das im inneren liegende und von dem in der Zeichnung gewählten Beobachtungswinkel nicht sichtbare Zentrum des aktiven galaktischen Kerns und schirmt die Linien der *broad-line-region* ab, die von schnell um die Jetachse zirkulierenden Wolken nahe des Zentrums herrühren sollen.

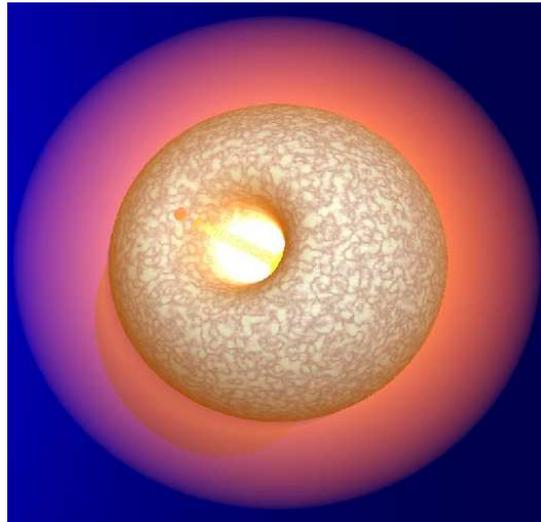


Abbildung 2.2: Die Illustration eines Staubtorus. Quelle: Homepage M. Camenzind^e.

Eine aktivere Rolle kommt dem Staub durch die Interpretation von Strahlungsspektren im infraroten Teil des elektromagnetischen Spektrums zu (siehe Abbildung 2.3). In den Spektren einer Vielzahl von Quellen zeigen sich „Buckel“ im Infraroten, die man als Staubemission interpretieren kann (Haas et al., 1998, 2000). Allerdings sind einzelne Schwarzkörperstrahler nicht in der Lage, einen Buckel ausreichender Breite zu liefern. Die Daten wurden daher mit zahlreichen modifizierten Schwarzkörpern angepasst, gerade so, dass deren Summation den Beobachtungen entsprach. Unter modifizierter Schwarzkörperstrahlung versteht man Schwarzkörperstrahlung, die von einem Ensemble kleiner Quellen emittiert wird, beispielsweise also Staubkörnern. Experimentelle Untersuchungen haben ergeben, dass sich das Spektrum einer solchen Anordnung mittels einer einfachen Modifikation des Schwarzkörper-

^e<http://www.lsw.uni-heidelberg.de/users/mcamenzi/Images/Torus1.jpeg>

spektrums gut beschreiben lässt, so dass man ansetzen kann

$$F_\epsilon \propto \frac{\epsilon^{3+\kappa}}{\exp\left(\epsilon \frac{m_e c^2}{k_B T}\right) - 1} \quad (2.6)$$

mit $\epsilon m_e c^2 = h\nu$, sowie der Staubtemperatur T und der *Boltzmannkonstante* k_B . In der Energieabhängigkeit des Flusses ist also das Spektrum des Schwarzkörperstrahlers durch einen zusätzlichen Faktor ϵ^κ modifiziert, wobei in der Regel für $\kappa = 2$ gewählt wird. Das steile Ansteigen des Flusses an der niederenergetischen, bzw. langwelligeren Flanke des Spektrums macht diese Wahl von κ nötig, um dem Verlauf der Datenpunkte gerecht zu werden.

Die große Anzahl der für das Anpassen der Messdaten notwendigen modifizierten Schwarzkörperstrahler und die im Vergleich dazu geringe Zahl an Messpunkten im fernen Infrarot macht eine statistische Auswertung jedoch nicht möglich, bzw. nicht sinnvoll, da beispielsweise für einen χ^2 -Test die Anzahl der Freiheitsgrade zu klein ist. Auch das Postulat, dass der Staubemissionsbuckel aus einem Synchrotronspektrum herausragt, ist auf diese Weise nicht zu verifizieren, da auf der einen Seite die Anzahl der Messpunkte zwar zunimmt, sich aber auf der anderen Seite die Anzahl der freien Parameter erhöht. Letzten Endes liefert hier die χ^2 -Summe pro Freiheitsgrad einen zu großen Wert; auch hier ist die Anzahl der Freiheitsgrade zu gering, um mit einer statistischen Methode mehrere modifizierte Schwarzkörperstrahler anzupassen.

Trotzdem deutet vieles auf die Existenz von Staub in AGN hin, wenngleich ein dichteres Netz an Datenpunkten für eine statistische Untersuchung wünschenswert wäre. Der Einfluss des Staubes als Photonenquelle für die inverse Comptonstreuung hängt darüber hinaus von der räumlichen Ausbreitung des Staubes und seiner Leuchtkraft ab, wie Arbeiter et al. (2002) zeigen. In AGN mit wenig Staubemission dürfte dieser als Targetphotonenquelle vernachlässigbar sein. Darüber hinaus gilt ebenso wie für die Strahlung der Akkretionsscheibe: ist das Jetelement nicht mehr im Bereich der Staub-Strahlungsquelle, sondern hat diese bereits hinter sich gelassen, verringert sich die Targetphotonendichte im Jetelement näherungsweise mit dem Abstandsquadrat.

2.3 Die *broad-line-region*

Die bereits erwähnte *broad-line-region* (BLR), deren Strahlung in einigen AGN gemessen wird, ist ebenfalls eine mögliche Quelle für niederenergetische Photonen, die ein mit relativistischen Elektronen gefülltes Jetelement durchdringen und als Target der inversen Comptonstreuung dienen können (Sikora et al., 1994); die BLR kann zu diesem Zweck ähnlich wie der Staub beschrieben werden (Böttcher & Bloom, 2000). Einer theoretischen Behandlung kommt vereinfachend zugute, dass der Linienecharakter der Strahlung eine Beschreibung der Energieabhängigkeit durch δ -Funktionen in der differentiellen spektralen Targetphotonendichte n erlaubt.

Auch für diese Strahlungsquelle gilt, dass ihr Einfluss schwindet, sobald das Jetelement einen Abstand zum zentralen Objekt aufweist, der die Entfernung der Targetphotonenquelle vom zentralen Objekt übersteigt. Der Abstand der BLR kann aus der Verzögerung zwischen Variationen der Kontinuums- und Linienstrahlung, dem sogenannten *reverberation mapping* bestimmt werden (z.B. Peterson et al., 2004).

Die hier vorgestellten *externen* Strahlungsquellen tragen also in unterschiedlicher Stärke zu einem möglichen Targetphotonenfeld bei. Die gemessenen Leuchtkräfte der verschiedenen Elemente des aktiven galaktischen Kerns, sofern sie überhaupt bestimmbar sind, variieren über viele Größenordnungen. Insofern lässt sich nicht zweifelsfrei bestimmen, welche der Strahlungsquellen den entscheidenden Beitrag liefert. Insbesondere gilt, dass der Einfluss der unterschiedlichen Komponenten, abgesehen von ihrer Leuchtkraft, stark von den geometrischen Verhältnissen abhängt, im Wesentlichen vom Ort des Jetelements und der Ausdehnung der Targetphotonenquellen. Der Vergleich der Akkretionsscheibe zu einer kugelschalenförmigen Staubverteilung wurde von Arbeiter et al. (2002) behandelt; insbesondere wird nachgewiesen, dass der Einfluss der Staubemission den der Akkretionsscheibe in Bezug auf die inverse Comptonstreuung deutlich übersteigen kann.

Eine weitere Quelle der im inversen Comptonprozess zu streuenden Photonen ist das Jetelement selbst:

2.4 Das Jetelement

Die Elemente der Jets, in denen die inverse Comptonstreuung stattfindet, zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass sie im Radiobereich mit Hilfe der *Very Long Baseline Interferometry (VLBI)* als sich bewegende Intensitätsmaxima beobachtet werden. Abbildung 2.3 zeigt als weiteres Beispiel das Objekt 3C273 (Pearson et al., 1981). Aus der Variabilität dieser Quellen und dem spektralen Verlauf der Strahlung schließt man, dass es sich bei den beobachteten Photonen um Synchrotronphotonen einer Population relativistischer Elektronen,

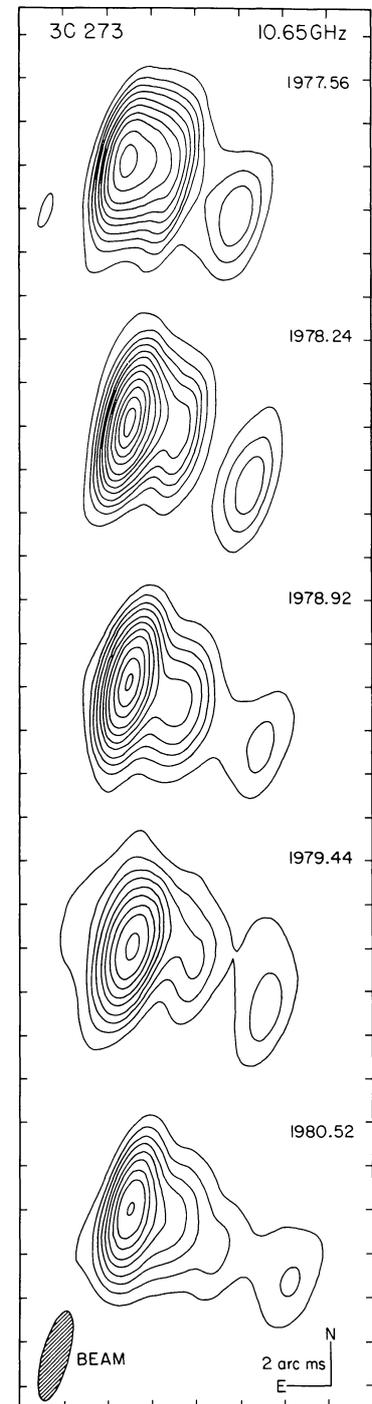


Abbildung 2.4: VLBI Aufnahmen (10.65 GHz) von 3C273 zu verschiedenen Zeitpunkten (Pearson et al., 1981)

bzw. Positronen, handelt. Diese Elektronen^f sind ebenfalls für die inverse Comptonstreuung verantwortlich. Es ist somit naheliegend, die Synchrotronphotonen, die von derselben Elektronenpopulation erzeugt werden, als Targetphotonen der inversen Comptonstreuung zu betrachten. Modelle, die diese Form der *internen* Strahlungsquelle postulieren, werden als *Synchrotron-Self-Compton (SSC)*-Modelle bezeichnet (Maraschi et al., 1992; Bloom & Marscher, 1996). In allen Blazaren, von denen starke Synchrotronstrahlung bekannt ist, *muss* durch den SSC-Prozess Strahlung generiert werden und dies unabhängig von dem Ort des betrachteten Jetelements. Die Verbindung der Spektren der beiden Strahlungskomponenten über die ursächliche Elektronenpopulation ermöglicht darüber hinaus eine klarere Falsifizierbarkeit des reinen SSC-Modells, da der Verlauf beider Strahlungsspektren allein durch die Form der Elektronenverteilung bestimmt ist.

Die spektrale differentielle Dichte der Targetphotonen lässt sich aus der Elektronenverteilung in mehreren Schritten berechnen: Als erstes wird die spektrale Leistung eines Elektrons genähert. Daraus ergibt sich in einem zweiten Schritt der Emissionskoeffizient der Synchrotronstrahlung. In einem dritten und vierten Schritt wird dieser (im optisch dünnen Fall) benutzt, um die Intensität, und daraus schließlich die spektrale Targetphotonendichte, zu berechnen.

Ist die Geometrie des Jetelements durch eine Scheibe gegeben, erhält man nach der Ausführung der oben angeführten Schritte

$$n(\epsilon) \simeq \frac{4\pi j_\epsilon d}{\epsilon c} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{2R}{d} \right)^2 \right] \right], \quad (2.7)$$

wobei d und R die Dicke und den Radius der Scheibe bezeichnen. Die detaillierte Rechnung wird in Anhang C durchgeführt. Der Emissionskoeffizient j_ϵ der Synchrotronstrahlung ist durch die Faltung der isotropen Elektronenverteilung n_e mit der spektralen Leistung eines einzelnen Elektrons $P_{\text{sy}}(\epsilon)$ gegeben:

$$j_\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\gamma n_e(\gamma) P_{\text{sy}}(\epsilon). \quad (2.8)$$

Der SSC-Prozess zeichnet sich gegenüber den EIC-Modellen also in zweierlei Hinsicht aus: Zum einen ist er aufgrund der näherungsweise annehmbaren Isotropie des Targetphotonenfeldes einfacher zu handhaben; zum anderen ist die Existenz eines starken Synchrotronphotonenfeldes durch die Beobachtungen gesichert. Will man die hochenergetische Strahlungskomponente der AGN-Spektren durch inverse Comptonstreuung hochrelativistischer Elektronen erklären, ist die Existenz eines starken Synchrotronphotonenfeldes unvermeidlich, da die hochenergetischen Elektronen

^fDa sich das Verhalten von Elektronen und Positronen in Bezug auf Synchrotronstrahlung und inverse Comptonstreuung nicht unterscheidet, werden im weiteren Verlauf die Positronen unter dem Begriff Elektronen subsummiert.

zwangsläufig auch Synchrotronstrahlung erzeugen müssen. Daher wird die Betrachtung der inversen Comptonstreuung im folgenden Kapitel auf isotrope Targetphotonenverteilungen, und damit auf den SSC-Prozess, fokussiert.

Kapitel 3

Die inverse Comptonstreuung

In diesem Kapitel wird die inverse Comptonstreuung diskutiert. Dazu werden zunächst die verwendeten Größen und Bezugssysteme definiert. Die differentielle Streurrate wird allgemein hergeleitet und, im Hinblick auf der Anwendung auf aktive galaktische Kerne, für den Spezialfall einer isotropen Targetphotonenverteilung berechnet. Der Energieverlust, den ein Elektron durch die inverse Comptonstreuung erfährt, wird hergeleitet; darüber hinaus wird dargestellt, wie aus der berechneten Streurrate die im Beobachtersystem messbaren Flüsse berechnet werden.

Wie im vorhergehenden Kapitel beschrieben, ist es evident anzunehmen, dass die beobachtete hochenergetische Gammastrahlung in den Jets, genauer gesagt in den im Radiobereich beobachteten Knoten darin, durch inverse Comptonstreuung von niederenergetischen Photonen entsteht. Welchen Energiebereich die zu streuenden Photonen umspannen, hängt von ihrer Quelle ab. Wie beschrieben, kommen dafür unter anderem der Staub(torus), die BLR oder die Akkretionsscheibe in Frage. Eine interne Quelle stellt die von den streuenden Elektronen selbst erzeugte Synchrotronstrahlung dar; dieser Fall wird im Folgenden eingehend untersucht.

3.1 Notation und Definitionen

In vielen der hier diskutierten Prozessen spielt das Vorzeichen der Ladung keine Rolle; in diesen Fällen sind die Positronen unter dem Begriff Elektronen subsummiert. Wenn eine Unterscheidung notwendig ist, wird dies entsprechend dargelegt. Prinzipiell können schwerere Teilchen, wie beispielsweise Wasserstoff-Ionen H^+ , ebenso Photonen streuen und zur Erzeugung hochenergetischer Strahlung beitragen (z.B. Protheroe & Mücke, 2001). Allerdings ist der Wirkungsquerschnitt für die inverse Comptonstreuung, der sogenannte *Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt*, invers proportional zum Quadrat der Masse des Teilchens (siehe Gleichung 3.17), und somit für das Wasserstoff-Ion $\sim 3.6 \cdot 10^6$ mal, also gut sechs Größenordnungen kleiner als

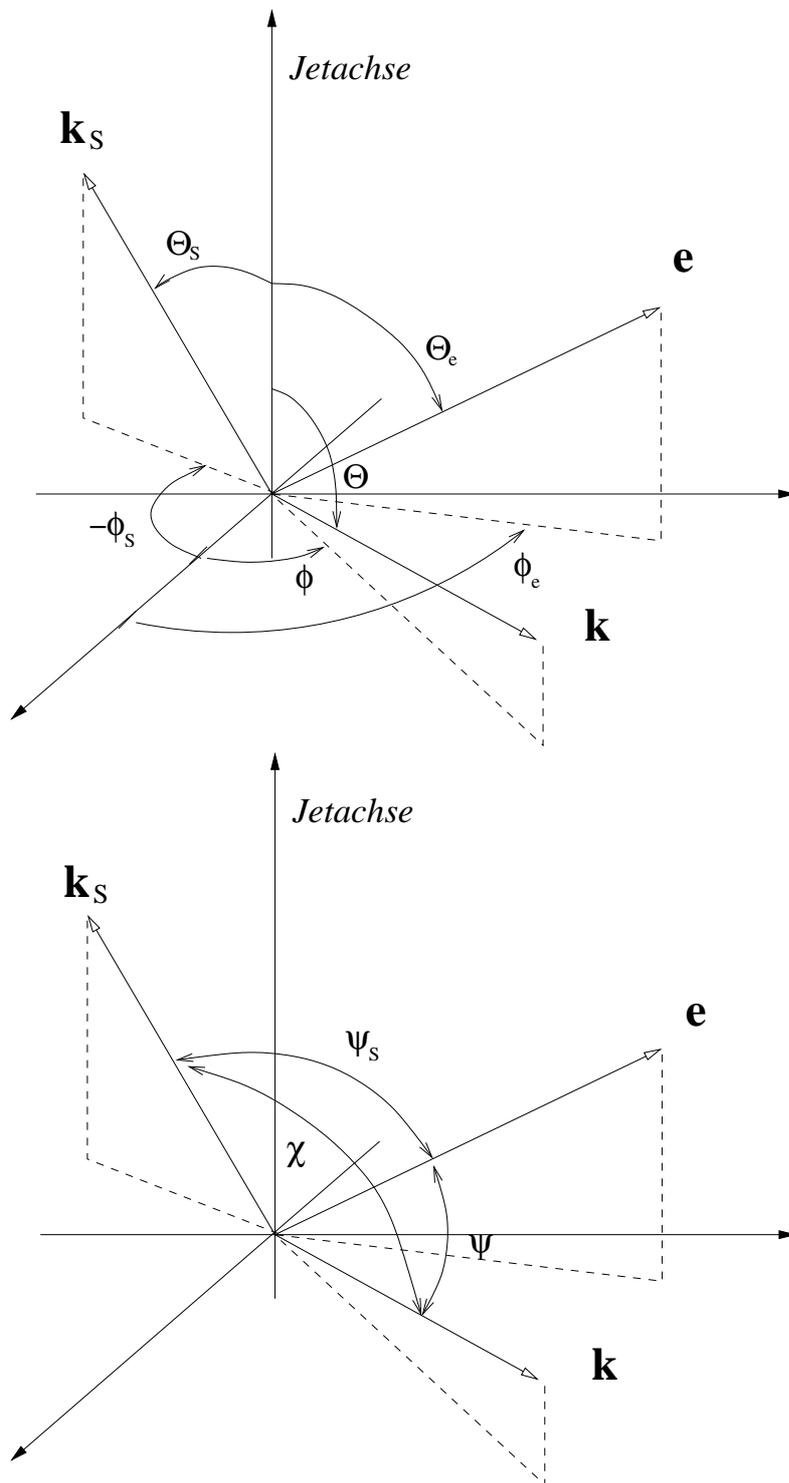


Abbildung 3.1: Die verwendeten Winkel in Bezug auf die Jetachse. Die Vektoren \mathbf{k} , \mathbf{k}_s und \mathbf{e} bezeichnen die Wellenvektoren der ein- bzw. der auslaufenden oder gestreuten Welle und den Einheitsvektor in Bewegungsrichtung des Elektrons. *Obere Figur:* Die Polarwinkel Θ_x (vgl. Gleichung 3.1) der drei Konstituenten der inversen Comptonstreuung. *Untere Figur:* Die Winkel zwischen den Richtungsvektoren der an der Streuung beteiligten Partikel.

der für Elektronen. Außerdem sind schwerere Teilchen entsprechend des Massenunterschiedes schwieriger zu beschleunigen.

Der Klein–Nishina–Wirkungsquerschnitt lässt sich am kompaktesten im Ruhesystem des Elektrons darstellen; somit ergeben sich für die folgenden Berechnungen drei zu unterscheidende Bezugssysteme: Zum einen das Bezugssystem, in dem sich ein individuelles Elektron in Ruhe befindet, sprich: das *Elektronruhesystem*. Größen in diesem System sind durch einen Strich (') gekennzeichnet. Als Zweites das Ruhesystem, in dem sich das betrachtete Jetelement in Ruhe befindet, im Weiteren als *Laborsystem* bezeichnet; Größen in diesem System haben keine zusätzliche Kennzeichnung. Schließlich das System, in dem die Galaxie des aktiven Kerns rotiert, aber keine longitudinale Bewegung ausführt. Messgrößen in diesem System unterscheiden sich von den beobachtbaren nur noch durch die Berücksichtigung der kosmischen Rotverschiebung und der, im allgemeinen vernachlässigbaren, Farbverschiebung aufgrund der nicht–kosmologischen Relativbewegung der betrachteten Galaxie zu unserer eigenen, sowie der Drehbewegungen der Galaxien. Daher wird dieses Bezugssystem im Weiteren als *Beobachtersystem* bezeichnet; die Größen hier sind mit einem Stern (*) versehen. Bei der Auswertung der Berechnungen und der Darstellung von Spektren oder Ähnlichem wird die Auswirkung der Rotverschiebung berücksichtigt (siehe Unterkapitel 3.5).

In der einfachsten Modellvorstellung des AGN läuft der Jet parallel zur Drehimpulsachse des zentralen schwarzen Loches, der Akkretionsscheibe und des Staubtorus (vgl. Kapitel 1). Es bietet sich also an sphärische Polarkoordinaten zu benutzen, wobei das System aufgrund der Symmetrie um die Jetachse unabhängig von dem Azimutwinkel ist. Die verschiedenen Winkel in Bezug auf die Jetachse sind in der oberen Figur von Abbildung 3.1 zu sehen. Hier stehen \mathbf{k} und \mathbf{k}_S für den Wellenvektor der ein– bzw. auslaufenden oder gestreuten Welle und \mathbf{e} für den Einheitsvektor in Bewegungsrichtung des Elektrons, also $\mathbf{e} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Die Polarwinkel treten in der Regel als Argument des Kosinus auf, daher definiert man

$$\mu_x \equiv \cos \Theta_x , \quad (3.1)$$

wobei sich die verschiedenen Indizes, die hier allgemein durch x bezeichnet sind, aus den Winkelindizes der Polarwinkel Θ_x in Abbildung 3.1 ergeben. In der unteren Figur der gleichen Abbildung werden die Winkel zwischen \mathbf{k} , \mathbf{k}_S und \mathbf{e} definiert. Ihre Kosinus lassen sich mit Hilfe des Kosinussatzes der sphärischen Trigonometrie durch die oben definierten Kosinus der verschiedenen Polarwinkel darstellen (siehe Gleichung D.22).

Die Energie wird, soweit nicht anders angegeben, stets in Einheiten der Elektronenruheenergie, also

$$\epsilon = \frac{E}{m_e c^2} , \quad (3.2)$$

verwendet. Entsprechend der Wellenvektoren hat die Energie der einlaufenden Photonen keinen Index, wohingegen die Energie der gestreuten Photonen mit einem Index S versehen ist.

3.2 Transformationen und Invarianten

Die funktionale Abhängigkeit der zu berechnenden physikalischen Größen, sowie deren Argumente, sind abhängig von dem Bezugssystem, in dem sie betrachtet werden. Da sich diese mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit relativ zueinander bewegen, wird das Transformationsverhalten durch die spezielle Relativitätstheorie beschrieben. Die Transformation der Energie ergibt sich aus der Lorentztransformation der nullten Komponente des Vierer-Impulses $\mathbf{p}^{(4)} = (E/c, \mathbf{p})$: Wählt man zwei Bezugssysteme (im Folgenden durch „ $\hat{}$ “ und „ $\bar{}$ “ unterschieden) derart, dass ihre Achsen parallel liegen und ihre Relativgeschwindigkeit nur in der z -Komponente ungleich null ist, $\mathbf{v}_r = (0, 0, v_r)$, dann gilt allgemein

$$\hat{E} = \gamma (\bar{E} - c\boldsymbol{\beta} \cdot \bar{\mathbf{p}}) = \gamma (\bar{E} - c\beta\bar{p} \cos \bar{\Theta}) . \quad (3.3)$$

Hier ist $\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{v}_r/c$ und v_r , β und \bar{p} sind die jeweiligen Beträge der Vektoren; der Winkel $\bar{\Theta}$ ist der Polarwinkel des Impulses, $\bar{\Theta} = \angle(\boldsymbol{\beta}, \bar{\mathbf{p}})$ ^a. Da hier Photonen betrachtet werden, gilt außerdem $\bar{E} = \bar{p}c$ und man erhält

$$\hat{\epsilon} = \bar{\epsilon}\gamma (1 - \beta \cos \bar{\Theta}) = \bar{\epsilon}\gamma (1 - \beta\bar{\mu}) \quad (3.4)$$

mit $\bar{\mu} \equiv \cos \bar{\Theta}$. Entsprechend der zuvor eingeführten Notation ist Gleichung 3.4 die Energietransformation aus dem Laborsystem in das Elektronruhesystem, wenn

$$\hat{\epsilon} \rightarrow \epsilon' , \quad \bar{\epsilon} \rightarrow \epsilon , \quad \bar{\mu} \rightarrow \mu \quad (3.5)$$

und β der auf die Lichtgeschwindigkeit normierte Geschwindigkeitsbetrag des betrachteten Elektrons ist.

Eine weitere wichtige Relation beschreibt das Transformationsverhalten des Polarwinkelkosinus μ , das man aus der Transformation von Geschwindigkeitsvektoren erhält (Hagedorn, 1973, Herleitung in Anhang A):

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{\mu} - \beta}{1 - \beta\bar{\mu}} . \quad (3.6)$$

Die beiden Gleichungen 3.4 und 3.6 beschreiben ganz allgemein das Transformationsverhalten von Photonen und somit insbesondere auch die Transformation der Photonenenergie in das Beobachtersystem: Definiert man hierzu B_Γ als die normierte Geschwindigkeit des Laborsystems, also

$$B_\Gamma \equiv \frac{v}{c} , \quad (3.7)$$

wobei v die Geschwindigkeit der betrachteten Jetkomponente ist, und Γ als den dazugehörigen Lorentzfaktor

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - B_\Gamma^2}} , \quad (3.8)$$

^aDas Winkelzeichen ist definiert durch $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|))$.

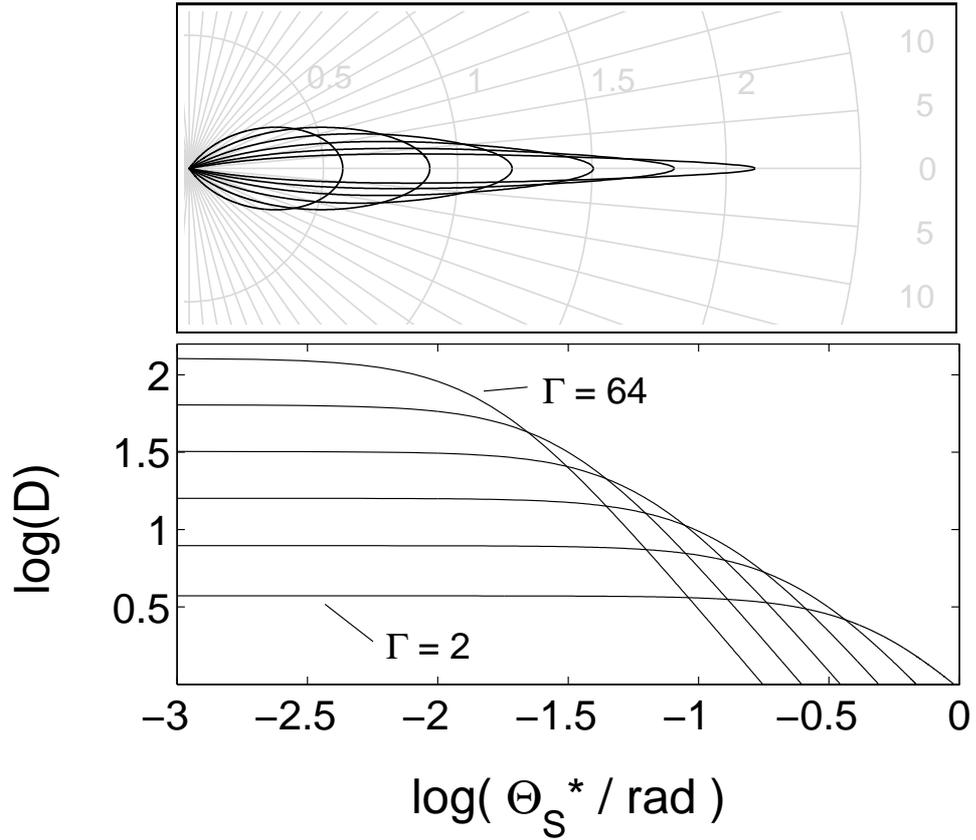


Abbildung 3.2: Der Dopplerfaktor D in Abhängigkeit des Winkels Θ_S^* in zwei verschiedenen Darstellungen. *Obere Figur:* Der Dopplerfaktor $\log(D)$ in der Darstellung als Polar- oder Vektordiagramm. Die grauen, radial verlaufenden Linien geben den Streuwinkel Θ_S^* in Grad an (graue Zahlen rechts). Die grauen Kreissegmente sind Linien konstanter Werte von $\log(D)$ (horizontal angeordnete Zahlen). Die schwarzen Kurven zeigen die Werte des Dopplerfaktors in Abhängigkeit des Winkels Θ_S^* für verschiedene Lorentzfaktoren $\Gamma = \{2; 4; 8; 16; 32; 64\}$ (von innen nach außen). So erzielt beispielsweise der Dopplerfaktor für $\Gamma = 64$ einen Wert von $D \sim 100$ bei einem Winkel $\Theta_S^* \sim 0.5^\circ$; der Maximalwert des Dopplerfaktors ist $D_{\Gamma=64}^{\max} \simeq 128$ (vgl. Gleichung 3.11). *Untere Figur:* Der Dopplerfaktor $\log(D)$ in Abhängigkeit des Winkels $\log(\Theta_S^*)$ in Radian für verschiedene Lorentzfaktoren Γ (s.o.). Für Winkel $\Theta_S^* < 1/\Gamma$ ist der Dopplerfaktor annähernd konstant auf dem Wert des Maximums bei $\Theta_S^* = 0^\circ$; für grössere Winkel nimmt er quadratisch ab.

und beachtet, dass sich die Galaxie vom Laborsystem aus betrachtet in negative z -Richtung bewegt, erhält man

$$\epsilon^* \stackrel{\text{Gl.3.4}}{\equiv} \epsilon \Gamma (1 + B_\Gamma \mu_S) \stackrel{\text{Gl.3.6}}{\equiv} \frac{\epsilon}{\Gamma (1 - B_\Gamma \mu_S^*)} = D \epsilon . \quad (3.9)$$

Im letzten Schritt wurde der so genannte *Dopplerfaktor* D definiert als

$$D = D(\Gamma, \Theta_S^*) \equiv \frac{1}{\Gamma (1 - B_\Gamma \mu_S^*)} , \quad (3.10)$$

der in verschiedenen Potenzen die Transformation sämtlicher Größen in das Beobachter-

system beschreibt. Als Funktion des Streuwinkels Θ_S^* hat der Dopplerfaktor ein Maximum bei $\Theta_S^* = 0^\circ$ mit

$$D_\Gamma^{\max} \equiv D(\Gamma, \Theta_S^* = 0^\circ) = \frac{1}{\Gamma(1 - B_\Gamma)} = (1 + B_\Gamma) \Gamma \stackrel{\Gamma \gg 1}{\simeq} 2\Gamma. \quad (3.11)$$

Abbildung 3.2 zeigt den Dopplerfaktor als Polardiagramm (obere Figur) und in doppellogarithmischer Darstellung (untere Figur) für verschiedene Werte des Lorentzfaktors Γ . Mit größer werdendem Lorentzfaktor Γ ist die Winkelverteilung von D zunehmend um die 0° -Richtung konzentriert (obere Figur). Die Kurve für einen Lorentzfaktor $\Gamma = 64$ übersteigt den Wert $\log(D) = 1$ bei ungefähr $\Theta_S^* \sim 2.5^\circ$ und den Wert $\log(D) = 2$ bei ungefähr $\Theta_S^* \sim 0.5^\circ$. Innerhalb dieser geringen Winkeländerung nimmt der Wert des Dopplerfaktors also um eine Größenordnung zu; eine monochromatische Photonenquelle wird also unter einem Beobachtungswinkel von 0.5° bei zehnmal höheren Energien gemessen als unter einem Beobachtungswinkel von 2.5° .

An der unteren Figur von Abbildung 3.2 lässt sich ablesen, dass der Wert des Dopplerfaktors D bis zu einem Winkel $\sim 1/\Gamma$ annähernd konstant ist und für größere Winkel quadratisch abnimmt. Eine sich relativistisch bewegende Strahlungsquelle wird also die meiste Energie in einen Winkelbereich $\Theta_S^* < 1/\Gamma$ zu ihrer Bewegungsrichtung emittieren.

Aus der Invarianz der differentiellen Größen \dot{n}/ϵ , n/ϵ^2 und u_ϵ/ϵ^3 unter Lorentztransformation, wobei \dot{n} die Rate, n/ϵ die Teilchendichte und u_ϵ die Energiedichte ist, ergibt sich (Blumenthal & Gould, 1970; Rybicky & Lightman, 1979)

$$\dot{n}^* = D\dot{n}, \quad n^* = D^2n, \quad u_\epsilon^* = D^3u_\epsilon, \quad (3.12)$$

und daraus unter anderem für das Volumen V und die Zeit t (Begelman et al., 1984)

$$V^* = DV, \quad t^* = t/D. \quad (3.13)$$

Somit ist beispielsweise die Zeit, die ein Beobachter zwischen zwei Ereignissen in einer bewegten Quelle misst, einen Faktor $1/D$ kürzer als im Ruhesystem der Quelle.

3.3 Die differentielle Streurrate

Um das durch die inverse Comptonstreuung entstehende Strahlungsspektrum zu bestimmen, gilt es die differentielle Streurrate \dot{n}_S dieses Prozesses zu berechnen. Diese ist definiert als

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) \equiv \frac{d^4N_S}{dV dt d\Omega_S d\epsilon_S}; \quad (3.14)$$

sie ist also die Anzahl der Photonen N_S , die pro Volumenelement und Zeitintervall in ein bestimmtes Winkel- und Energieintervall gestreut werden. Die differentielle Streurrate liefert somit ein Photonenspektrum, das vom Winkel zwischen der Sichtlinie

des Betrachters und einem festzulegenden Bezugssystem abhängt. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, bietet sich bei der Betrachtung von AGN deren Jetachse als Bezugsachse eines sphärischen Koordinatensystems an; das differentielle Raumwinkelement $d\Omega_S$ enthält also den in Abbildung 3.1 festgelegten Streuwinkel zwischen Jetachse und Beobachter Θ_S .

Zur Berechnung der differentiellen Streurrate im Laborsystem gilt (Dermer et al., 1992)

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) = \int_1^\infty d\gamma \oint d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e) \frac{d^3N}{dt d\Omega_S d\epsilon_S}, \quad (3.15)$$

wobei $d\Omega_x = d\mu_x d\phi_x$ das dem entsprechenden Polarwinkel Θ_x zugeordnete Raumwinkelement und ϕ_x den jeweiligen Azimutwinkel bezeichnet (vgl. Gleichung 3.1) und

$$\frac{d^3N}{dt d\Omega_S d\epsilon_S} \equiv c \int_0^\infty d\epsilon \oint d\Omega (1 - \beta \cos \psi) n(\epsilon, \Omega) \frac{d^2\sigma}{d\epsilon_S d\Omega_S} \quad (3.16)$$

die differentielle Rate der von einem einzelnen Elektron gestreuten Photonen. Die differentiellen Teilchendichten n_e und n quantifizieren die spektrale Anzahl der Elektronen bzw. Photonen pro Raumwinkel- und Volumenelement. Hier ist $\psi \equiv \angle(\mathbf{e}, \mathbf{k})$ der Winkel zwischen dem einlaufenden Photon und dem Elektron, wie im unteren Teil von Abbildung 3.1 zu sehen ist, und $d^2\sigma/(d\epsilon_S d\Omega_S)$ ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der inversen Comptonstreuung (s. u.). Das so erzielte Ergebnis für die differentielle Streurrate kann mit Hilfe der Invarianz von \dot{n}/ϵ (Gleichung 3.12) in das Beobachtersystem transformiert werden.

3.3.1 Der differentielle Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/(d\epsilon_S d\Omega_S)$ der inversen Comptonstreuung beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Streupartnern. Im Elektronruhesystem lässt sich der so genannte *Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt* in der kompaktesten Form darstellen (Jauch & Rohrlich, 1976):

$$\frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S} = \frac{r_0^2 \epsilon_S'^2}{2 \epsilon'^2} \left[\frac{\epsilon'}{\epsilon'_S} + \frac{\epsilon'_S}{\epsilon'} - \sin^2 \chi' \right] \delta(\epsilon'_S - \epsilon'_0). \quad (3.17)$$

Hier ist $\chi = \angle(\mathbf{k}_S, \mathbf{k})$ (siehe Abbildung 3.1), $r_0^2 = e^2/m_e c^2 = 3\sigma_T/8\pi$ ist der klassische Elektronenradius und σ_T der *Thomson-Wirkungsquerschnitt*. Die δ -Funktion beschreibt die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts mit

$$\epsilon'_0 = \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'(1 - \cos \chi')}. \quad (3.18)$$

Im Grenzfall kleiner Targetphotonenenergien, dem so genannten *Thomson-Limit* ($\epsilon' \leq 1$), und mit Hilfe der *head-on-Approximation* ($\psi' = \pi$, siehe Anhang F) vereinfacht sich der differentielle Klein–Nishina–Wirkungsquerschnitt und wird im Laborsystem zu (Reynolds, 1982; Dermer & Schlickeiser, 1993)

$$\frac{d^2\sigma}{d\epsilon_S d\Omega_S} = \sigma_T \delta(\epsilon_S - \gamma^2 \epsilon (1 - \beta \cos \psi)) \delta(\Omega_S - \Omega_e) . \quad (3.19)$$

Das Thomson–Limit ist beispielsweise anwendbar für Staubemission als Quelle der Targetphotonen bis zu Energien, die einer Äquivalenztemperatur von einigen hundert Kelvin entsprechen, je nach Größe des maximalen Lorentzfaktors der Elektronen und der Geschwindigkeit des betrachteten Jetelements (Arbeiter et al., 2002).

3.3.2 Isotrope Targetphotonenverteilungen

Die Annahme, dass die Targetphotonen im Laborsystem isotrop verteilt sind, führt zu einer erheblichen Vereinfachung der Berechnung der differentiellen Streurrate, da dann die Targetphotonenverteilung relativ einfach in das Elektronruhesystem transformiert werden kann (Jones, 1968).

Im allgemeinen Fall ist die Targetphotonenverteilung jedoch anisotrop. Dies gilt insbesondere für alle externen Quellen: Selbst für den einfachsten möglichen Fall, dass die Targetphotonenverteilung im Beobachtersystem isotrop ist, wird sie durch die Transformation in das Laborsystem (Gleichung 3.12 mit Gleichung 3.10^b) $n = n^* \Gamma^2 (1 - B_\Gamma \mu^*)^2$ stark anisotrop. Aufgrund der Relativbewegung des Laborsystems in Bezug zum Beobachtersystem ist es also evident, dass ein im Laborsystem isotropes Strahlungsfeld nur durch eine *interne* Strahlungsquelle gewährleistet werden kann. Die Synchrotronstrahlung der Elektronen in der Jetkomponente ist somit eine mögliche Quelle. Man kann davon ausgehen, dass die Elektronen isotrop verteilt sind, da die Streuung des Anstellwinkels zwischen Elektron \mathbf{e} und Hintergrund–Magnetfeld \mathbf{B} , im Englischen als *pitch-angle* bezeichnet und hier identisch mit Θ_e , im allgemeinen der schnellste Prozess ist, dem energiereiche Elektronen unterliegen (Schlickeiser, 2002). Entsprechend ist der *Emissionskoeffizient* j_e^{sy} der Synchrotronstrahlung isotrop und, in einer Näherung nullter Ordnung, auch das Strahlungsfeld (siehe Kapitel 2). Für eine isotrope Targetphotonen– sowie Elektronenverteilung sind die Verteilungen beider Streupartner des inversen Comptonprozesses also isotrop; somit ist die differentielle Streurrate ebenfalls isotrop und lässt sich formal schreiben als Integration von Gleichung 3.15 über alle Streuwinkel und Division durch 4π . Dadurch vereinfacht sich der Integrand ohne dass Information über den Streuprozess verloren geht:

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) = \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega_S \int_1^\infty d\gamma \oint d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e) \frac{d^3N}{dt d\Omega_S d\epsilon_S}$$

^bDa in die Targetphotonenverteilung n^* differentiell in Θ^* ist, wird Θ_S in Gleichung 3.10 durch Θ^* ersetzt.

$$= \frac{1}{4\pi} \int_1^{\infty} d\gamma \oint d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e) \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S}. \quad (3.20)$$

Die differentielle Photonendichte $n(\epsilon, \Omega) \stackrel{\text{isotr.}}{=} n(\epsilon)/4\pi$ lässt sich aufgrund ihrer Isotropie in kompakter Form im Elektronruhesystem darstellen:

$$n'(\epsilon', \epsilon) = \frac{\epsilon' n(\epsilon)}{2\gamma\epsilon^2} \Theta\left(\epsilon' - \frac{\epsilon}{2\gamma}\right) \Theta(2\gamma\epsilon - \epsilon'). \quad (3.21)$$

Die Herleitung dieser Gleichung befindet sich in Anhang B. Hierbei ist Θ die Heaviside-Funktion mit

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Aufgrund dieses Ergebnisses und der ebenfalls kompakten Form des Klein–Nishina–Wirkungsquerschnitts ist es naheliegend, die Berechnung der differentiellen Streurrate \dot{n}_S , bzw. von $d^2N/(dt d\epsilon_S)$, im Elektronruhesystem auszuführen. Dazu wird die Rate $d^2N/(dt d\epsilon_S)$ zunächst transformiert:

$$\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} = \int d\Omega_S \frac{d^3N}{dt d\epsilon_S d\Omega_S} = \frac{1}{\gamma} \int d\Omega'_S \frac{d^3N}{dt' d\epsilon'_S d\Omega'_S} \frac{\epsilon'_S}{\epsilon_S}. \quad (3.23)$$

Die Streurrate eines einzelnen Elektrons dN'/dt' im Elektronruhesystem lässt sich nach Blumenthal & Gould (1970) berechnen aus

$$\frac{dN}{dt'} = c \int \sigma dn'. \quad (3.24)$$

Differentiell erweitert ergibt sich entsprechend

$$\frac{d^3N}{dt' d\epsilon'_S d\Omega'_S} = c \int \frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S} dn'. \quad (3.25)$$

Aufgrund von Gleichung 3.21 gilt für die differentielle Dichte $dn' = n'(\epsilon', \epsilon) d\epsilon' d\epsilon$; zusammen mit dem zweiten Ausdruck in Gleichung 3.23 ergibt dies

$$\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} = \frac{c}{\gamma} \int_0^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} d\epsilon' \oint d\Omega'_S \frac{\epsilon'_S}{\epsilon_S} \frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S} n'(\epsilon', \epsilon). \quad (3.26)$$

Das Raumwinkelelement $d\Omega'_S$ der gestreuten Photonen in Bezug auf die Jetachse ist gleich dem Raumwinkelelement $d\Omega'_{\text{ph}} \equiv d\cos\chi' d\phi'_{\text{ph}}$ der gestreuten Photonen in Bezug auf die einlaufenden Photonen. A priori ist vorauszusetzen, dass das Raumwinkelelement der gestreuten Photonen nicht von der Wahl der Bezugsachse abhängen kann; formal lässt sich zeigen, dass die Jacobi-Matrix der Transformation zwischen den beiden Bezugssystemen $\partial(\cos\chi', \phi')/\partial(\mu'_S, \phi'_S)$ gleich eins ist (Mause,

1996). Nach Einsetzen des differentiellen Wirkungsquerschnitts aus Gleichung 3.17 und der differentiellen Photonendichte aus Gleichung 3.21 ergibt sich nunmehr

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} &= \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^2 \epsilon_S} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \int_0^\infty d\epsilon' \int_{-1}^1 d \cos \chi' \left\{ \delta(\epsilon'_S - \epsilon'_0) \right. \\ &\times \left. \frac{\epsilon'_S{}^3}{\epsilon'} \left[\frac{\epsilon'}{\epsilon'_S} + \frac{\epsilon'_S}{\epsilon'} - \sin^2 \chi' \right] \Theta \left(\epsilon' - \frac{\epsilon}{2\gamma} \right) \Theta(2\gamma\epsilon - \epsilon') \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Mit der Näherung $\beta = 1$, die für einen Lorentzfaktor $\gamma \gtrsim 3$ einen Fehler von weniger als 5% bewirkt, und der *head-on*-Approximation ($\psi' = \pi$, siehe Anhang F), ergibt sich für $\epsilon \leq \epsilon_S \leq 4\epsilon\gamma^2/(1 + 4\epsilon\gamma)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} &\simeq \frac{2\pi r_0^2 c}{\gamma^2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \Theta(1 - q) \Theta \left(q - \frac{1}{4\gamma^2} \right) \\ &\times \left[2q \ln q + (1 + 2q)(1 - q) + \frac{1}{2} \frac{(4\epsilon\gamma q)^2}{(1 + 4\epsilon\gamma q)} (1 - q) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit

$$q \equiv \frac{\epsilon_S}{4\epsilon\gamma^2 \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \right)}. \quad (3.29)$$

Für den niederenergetischen Teil des Streuspektrums, $\epsilon/4\gamma^2 \leq \epsilon_S \leq \epsilon$, ergibt sich

$$\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \approx \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^4} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \left(\frac{4\gamma^2 \epsilon_S}{\epsilon} - 1 \right), \quad (3.30)$$

beides in Übereinstimmung zu Jones (1968). Im Thomson-Limit, also im Grenzfall kleiner Targetphotonenenergien, ist die Streuung im Elektronruhesystem elastisch. Es gilt also $\epsilon'_0 \simeq \epsilon'$ in Gleichung 3.18. Da man im Thompson-Limit $\epsilon' \ll 1$ voraussetzen kann, folgt $\epsilon_S \ll \gamma$. Daher lässt sich der letzte Term der Klammer in Gleichung 3.28 vernachlässigen und q geht über zu $q \simeq \epsilon_S/4\epsilon\gamma^2$ und man erhält die Streurrate im Thomson-Limit, wie sie von Blumenthal & Gould (1970) berechnet wurde (siehe Anhang D.1).

3.4 Die Kühlrate

Die differentielle Streurrate $\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S)$ ergibt die spektrale Verteilung der im inversen Comptonprozess pro Sekunde gestreuten Photonen. Wie in Anhang D gezeigt, gewinnen Photonen in dem Energiebereich zwischen ϵ und $4\gamma^2\epsilon/(1 + 4\gamma\epsilon)$ Energie, die sie

dem Elektron entziehen. Folgerichtig stellt der inverse Comptonprozess für eine Elektronenpopulation einen Verlustprozess dar, der auf die Verteilung der Elektronen im Energieraum zurückwirkt und bei der zeitlichen Entwicklung entscheidenden Einfluss nehmen kann. Die Kühlrate $\dot{\gamma}$, mit der sich die Energie eines Elektrons durch die Verluste bei der inversen Comptonstreuung ändert, ergibt sich aus der Integration über die abgestrahlte spektrale Leistung. Die differentielle Streurrate wird also für ein einzelnes Elektron der Energie γ berechnet und über alle Streuenergien und -winkel integriert; die Kühlrate ist hier also allgemein durch

$$-\dot{\gamma} \equiv \oint d\Omega_S \int d\epsilon_S \epsilon_S \dot{n}_S^\delta(\epsilon_S, \Omega_S) \quad (3.31)$$

definiert, wobei \dot{n}_S^δ die differentielle Streurrate eines einzelnen Elektrons der Energie γ ist. Das Elektron verliert Energie bei den Streuprozessen, bei denen das gestreute Photon Energie gewinnt, also in dem Energiebereich $\epsilon_S > \epsilon$. Ist das Targetphotonenfeld isotrop, berechnet sich die differentielle Streurrate für diesen Energiebereich mit Hilfe von Gleichung 3.28. Geht man davon aus, dass die Heizung der Elektronen in dem Bereich $\epsilon_S < \epsilon$ vernachlässigbar ist, ergibt sich, nach der Substitution von ϵ_S durch q aus Gleichung 3.29, für die Kühlrate

$$-\dot{\gamma} = C \int d\epsilon \epsilon n(\epsilon) \int_{\frac{1}{4\gamma^2}}^1 dq \left[\frac{2q^2 \ln q}{(1+mq)^2} + \frac{q+q^2-2q^3}{(1+mq)^3} + \frac{m}{2} \frac{q^3-q^4}{(1+mq)^4} \right] \quad (3.32)$$

mit $C \equiv 32\pi r_0^2 c \gamma^2 = 12\sigma_T c \gamma^2$. Nach einigen Umformungen erhält man daraus schließlich

$$-\dot{\gamma} = 3\sigma_T c \gamma \int d\epsilon n(\epsilon) \frac{1}{m^2} \left\{ \left(\frac{1}{2}m + 6 + \frac{6}{m} \right) \ln(1+m) - \left[\frac{11}{12}m^3 + 8m^2 + 13m + 6 \right] (1+m)^{-2} + 2\text{dilog}(1+m) \right\} \quad (3.33)$$

mit $m = 4\epsilon\gamma$ in Übereinstimmung mit Jones (1968); hier ist *dilog* die *Dilogarithmus-Funktion*, deren Definition in Gleichung E.12 gegeben ist. Die detaillierte Herleitung der Kühlrate findet sich in Anhang E.

Im Thomson-Limit ist $m \ll 1$, und in dieser Näherung ergibt sich in kleinster Ordnung

$$-\dot{\gamma} \stackrel{\text{TL}}{\equiv} \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \frac{u_{\text{tot}}}{m_e c^2} \quad \text{mit} \quad u_{\text{tot}} \equiv m_e c^2 \int d\epsilon \epsilon n(\epsilon), \quad (3.34)$$

also gerade wieder die in der Literatur vielfach verwendete Kühlrate der inversen Comptonstreuung im Thomson-Limit (Blumenthal & Gould, 1970).

3.5 Die Berechnung des spektralen Flusses

Die differentielle Streurrate, wie sie in Unterkapitel 3.3 dargestellt ist und für den Fall einer isotropen Targetphotonenverteilung für ein einzelnes Elektron hergeleitet wird, beschreibt das Ergebnis der inversen Comptonstreuung vollständig. Allerdings ist diese Größe keine Messgröße und muss daher noch in eine solche umgewandelt werden, um den Vergleich mit Messdaten zu ermöglichen. Die „natürliche“ Messgröße in der Astronomie ist der (differentielle Strahlungs-) Fluss^c F_{ϵ^*} . Dieser gibt an, wieviel Energie E^* ein Beobachter pro Zeit und Fläche innerhalb eines Energiebereiches um ϵ^* misst, beziehungsweise, im Falle theoretischer Vorhersagen, messen sollte. Er ist definiert als

$$F_{\epsilon^*} \equiv \frac{d^3E^*}{dA^*dt^*d\epsilon^*}. \quad (3.35)$$

Für Strahlungsquellen, die optisch dünn sind und deren Ausdehnung klein ist im Vergleich zu ihrer Entfernung, kann der Fluss durch das Volumenintegral des Emissionskoeffizienten j_{ϵ} über die Ausdehnung der Quelle berechnet werden. Der Emissionskoeffizient wiederum ist definiert als

$$j_{\epsilon}(\Omega) \equiv \frac{d^4E}{dVdtd\epsilon d\Omega} = m_e c^2 \epsilon \frac{d^4N}{dVdtd\epsilon d\Omega}, \quad (3.36)$$

also als Energie, die pro Zeit und Volumen in ein Raumwinkel- und Energiesegment emittiert wird. Besagte Integration über die Ausdehnung der Quelle liefert also die Gesamtenergie, die pro Zeit und Energieintervall in eine bestimmte Richtung abgestrahlt wird. Teilt man dieses Ergebnis durch das Entfernungsquadrat erhält man gerade den Fluss der Quelle in diesem Abstand; letzterer ist gegeben durch die *Luminositätsdistanz* d_L (Lang, 1974)

$$d_L \equiv \frac{c}{H_0 q_0^2} \left[z q_0 + (q_0 - 1) \left(\sqrt{2q_0 z + 1} - 1 \right) \right]. \quad (3.37)$$

Sie berechnet, in Abhängigkeit der kosmologischen Parameter der *Rotverschiebung* z und des *Abbremsungsparameters* q_0 , also unter Berücksichtigung der Krümmung der Raumzeit, jene Entfernung, in der der Strahlungsfluss mit d_L^{-2} abgenommen hat. Anders ausgedrückt ist die Luminositätsdistanz gerade so definiert, dass Flüsse mit einem einfachen „1/Entfernungsquadrat“-Gesetz abnehmen. In einem Einstein-de Sitter-Universum, also für $q_0 = \frac{1}{2}$, vereinfacht sich Gleichung 3.37 zu

$$d_L^{\text{EdS}} \equiv \frac{2c}{H_0} \left[1 + z - \sqrt{1 + z} \right]. \quad (3.38)$$

^cIn der Literatur ist der Fluss zumeist differentiiell in der Strahlungsfrequenz ν angegeben, also als F_{ν} . Zu dessen Definition wird in Gleichung 3.35 $d\epsilon = h d\nu / m_e c^2$ durch $d\nu$ ersetzt. Es gilt also

$$F_{\epsilon} = \frac{m_e c^2}{h} F_{\nu}$$

In dieser Arbeit wird $q_0 = \frac{1}{2}$ sowie $H_0 = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ angenommen.

Des Weiteren muss berücksichtigt werden, dass hier eine sich relativistisch bewegende Strahlungsquelle beschrieben wird; der Fluss F_ϵ muss also noch aus dem Laborsystem, in dem der Emissionskoeffizient j_ϵ berechnet wird, in das Beobachtersystem, in dem die Messung des Flusses stattfindet, transformiert werden.

Für den Fluss^d im Beobachtersystem ergibt sich somit (Begelman et al., 1984)

$$F_{\epsilon^*}^* = D^3 F_\epsilon = \frac{D^3}{d_L^2} \int dV j_\epsilon, \quad (3.39)$$

mit dem Dopplerfaktor D , wie er in Gleichung 3.10 definiert ist, und der Luminositätsdistanz aus Gleichung 3.37 bzw. 3.38. Da hier angenommen wird, dass die strahlenden, bzw. streuenden Teilchen homogen in einem gewissen Volumen verteilt sind, ist j_ϵ nicht ortsabhängig und die Integration über den Raum ergibt besagtes Volumen. Damit erhält man schließlich für den Fluss einer weit entfernten, optisch dünnen und homogenen Strahlungsquelle

$$F_{\epsilon^*}^* = \frac{D^3 V}{d_L^2} j_\epsilon. \quad (3.40)$$

Man beachte, dass der Fluss im Beobachtersystem $F_{\epsilon^*}^*$ selbst für einen im Laborsystem isotropen Emissionskoeffizienten aufgrund des Dopplerfaktors, der in der dritten Potenz eingeht, stark anisotrop ist (vgl. Abbildung 3.2).

Die Auswirkung der Raumzeitkrümmung auf die Amplitude des Strahlungsflusses wird, wie oben beschrieben, durch die spezielle Definition der Luminositätsdistanz berücksichtigt. Die kosmische Rotverschiebung der Strahlung muss ebenfalls im Transformationsverhalten der Energie berücksichtigt werden. Aus der Definition der Rotverschiebung

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (3.41)$$

wobei λ_0 die emittierte und λ die gemessene Wellenlänge ist, ergibt sich für die Energie der Strahlung

$$\epsilon^* = \frac{D}{1+z} \epsilon. \quad (3.42)$$

Der Fluss der Quelle wird also in der Amplitude mit D^3 verstärkt und um einen Faktor $D/(1+z)$ zu höheren Energien verschoben, sofern D für die gewählte Kombination

^dDie Notation ist hier so zu verstehen, dass der Index ϵ beziehungsweise ϵ^* diejenige Energie angibt, in der der Fluss differentiell ist. Fasst man F und j als Funktionen der jeweiligen Variablen ϵ beziehungsweise $\epsilon^* \stackrel{\text{Gl. 3.9}}{=} D\epsilon$ auf, ist das Verhalten der betrachteten Größen unter der Transformation der Bezugssysteme etwas besser einsichtig:

$$F^*(\epsilon^*) = D^3 F(\epsilon(\epsilon^*)) = D^3 F\left(\frac{\epsilon^*}{D}\right) \propto D^3 j\left(\frac{\epsilon^*}{D}\right).$$

von Γ und μ_S^* größer als eins ist, was für die in dieser Arbeit betrachteten Winkel stets zutrifft.

Gleichung 3.40 zur Berechnung des Flusses einer Strahlungsquelle aus dem Emissionskoeffizienten des jeweiligen Strahlungsprozesses gilt ganz allgemein. Aus dem Vergleich der Definition der differentiellen Streurrate \dot{n}_S in Gleichung 3.14 mit der Definition des Emissionskoeffizienten j_ϵ in Gleichung 3.36, ergibt sich unmittelbar, dass sich der Emissionskoeffizient des SSC-Prozesses darstellen lässt als

$$j_{\epsilon_S}(\Omega_S) = m_e c^2 \epsilon_S \dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S). \quad (3.43)$$

Somit lässt sich aus der Kenntnis der differentiellen Streurrate (bzw. des Emissionskoeffizienten) des jeweiligen Strahlungsprozesses im Laborsystem der zu erwartende Fluss im Beobachtersystem berechnen.

3.5.1 Der Fluss pro logarithmischem Energieintervall

Oft wird in der Darstellung, sowohl der Ergebnisse von Beobachtungen, wie auch theoretischer Modellierungen, statt des Flusses F_ϵ , der Fluss multipliziert mit der Energie ϵF_ϵ , gegenüber der Photonenenergie ϵ , aufgetragen. Diese Darstellungsweise wird gewählt, um den Spektren besser entnehmen zu können, in welche Energiebereiche die größte Leistung abgestrahlt wird. Die totale Leistung, die in ein Energieintervall emittiert wird, ergibt sich aus dem Integral des Flusses über das entsprechende Energieintervall. In der doppellogarithmischen Darstellung, die zur Visualisierung der über viele Dekaden reichenden Spektren in der Regel gewählt wird, werden die kleineren Energien folglich in dem Sinne „bevorzugt“, dass gleich breite Energieintervalle bei höheren Energien viel näher zusammenrücken. Dieses „Problem“ wird umgangen, indem nicht der Fluss selbst, sondern der *Fluss pro logarithmischem Energieintervall* dargestellt wird. Mit $F \equiv F_\epsilon d\epsilon$ gilt

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = d \ln \epsilon \quad \Rightarrow \quad \epsilon F_\epsilon = \epsilon \frac{dF}{d\epsilon} = \frac{dF}{d \ln \epsilon} \equiv F_{\ln \epsilon}. \quad (3.44)$$

Die Größe $F_{\ln \epsilon}$ gibt also an, wieviel Leistung pro logarithmischem Energieintervall bei einer bestimmten Energie emittiert wird; somit wird die „Verzerrung“ aufgrund der logarithmischen Darstellung aufgehoben und man kann den jeweiligen Spektren direkt entnehmen, bei welchen Energien die meiste Leistung erzeugt wird.

Kapitel 4

SSC für eine potenzgesetzförmige^a Elektronenverteilung

In diesem Kapitel wird erstmalig eine analytische Lösung der differentiellen Streurrate für den Spezialfall einer potenzgesetzförmigen Energieabhängigkeit der Elektronenverteilung vorgestellt, die ebenfalls die Beschränkungen der Synchrotronphotonenverteilung berücksichtigt. Dazu wird zunächst die Elektronenverteilung detailliert beschrieben, sowie die sich daraus ergebende, ebenfalls potenzgesetzförmige Targetphotonenverteilung. Anschließend wird die Integration über die Elektronen- und Photonenenergie ausgeführt, wobei eine Reihe von Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Die erarbeitete Lösung wird für eine Reihe von Parameterkonstellationen diskutiert.

Um eine analytische Berechnung der Streurrate des SSC-Prozesses ausführen zu können, müssen die Verteilungen der streuenden Elektronen und der zu streuenden Photonen bekannt sein.

Die vorliegende Arbeit fokussiert auf den Jet als Quelle der zu streuenden Targetphotonen, da in dem Jet notwendigerweise Synchrotronphotonen in großer Anzahl vorhanden sein müssen (siehe Abschnitt 2.4). Im Folgenden wird hergeleitet, wie das inverse Comptonspektrum für eine isotrope und potenzgesetzförmige Verteilung von Elektronen aussieht, unter der Annahme, dass diese die von ihnen selbst produzierten Synchrotronphotonen streuen.

4.1 Eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung

Als ein Ansatz zur Lösung der differentiellen Streurrate wird die Elektronenpopulation durch eine potenzgesetzförmige Verteilung im Energieraum beschrieben. Die Annahme eines potenzgesetzförmigen Elektronenspektrums stützt sich dabei im Wesentlichen auf die beobachteten Spektren der AGN, die sich für viele Quellen in

^aDas Wort *potenzgesetzförmig* wird in der Seitenüberschrift durch *PL* (von *power law*) abgekürzt.

begrenzten spektralen Bereichen, welche durchaus mehrere Dekaden des Frequenzbandes umfassen können, relativ gut durch potenzgesetzförmige Kurven darstellen lassen. Dadurch entstand die Idee, dass es sich bei den beobachteten Spektren um Synchrotron- bzw. inverse Comptonstrahlung eben solcher Elektronenverteilungen handelt. Ein weiteres Argument für die Betrachtung einer solchen Elektronenverteilung liegt in der Vereinfachung der Rechnung; Gleiches gilt für die Annahme der Isotropie.

Da sich die Verteilung der Elektronen evidenterweise nicht bis zu unendlich hohen Energien erstreckt und eventuell auch eine untere Schranke aufweist, reicht sie von einer unteren Energie γ_1 bis zu einer oberen Energie γ_2 , also

$$n_e(\gamma, \Omega_e) = \frac{n_0}{4\pi} \gamma^{-s} \Theta(\gamma - \gamma_1) \Theta(\gamma_2 - \gamma) . \quad (4.1)$$

Hierbei ist Θ die Heaviside-Funktion, wie sie bereits in Gleichung 3.22 definiert wurde und s ist der Spektralindex der Elektronenverteilung.

Der Normierungsfaktor n_0 ergibt sich aus

$$\begin{aligned} n_{\text{ges}} &\stackrel{!}{=} \oint d\Omega_e \int_1^\infty d\gamma n_e(\gamma, \Omega_e) = n_0 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-s} = n_0 \begin{cases} \frac{\gamma_2^{1-s} - \gamma_1^{1-s}}{1-s} , & s \neq 1 \\ \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} , & s = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow n_0 = n_{\text{ges}} &\begin{cases} \frac{1-s}{\gamma_2^{1-s} - \gamma_1^{1-s}} , & s \neq 1 \\ \left[\ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right]^{-1} , & s = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit der Gesamtelektronendichte n_{ges} . Analog lässt sich n_0 durch die totale Energiedichte der Elektronen

$$u_{\text{ges}} = m_e c^2 \int d\Omega_e \int d\gamma \gamma n_e(\gamma, \Omega_e) \quad (4.3)$$

ausdrücken:

$$n_0 = \frac{u_{\text{ges}}}{m_e c^2} \begin{cases} \frac{2-s}{\gamma_2^{2-s} - \gamma_1^{2-s}} , & s \neq 2 \\ \left[\ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right]^{-1} , & s = 2 \end{cases} . \quad (4.4)$$

Die mittlere Energie $\langle \gamma \rangle$ einer Elektronenverteilung ergibt sich aus

$$\langle \gamma \rangle \equiv \frac{\int d\gamma \gamma n_e(\gamma)}{\int d\gamma n_e(\gamma)} = \frac{u_{\text{ges}}}{n_{\text{ges}} m_e c^2} \stackrel{s \neq \{1,2\}}{=} \frac{1-s}{2-s} \frac{\gamma_2^{2-s} - \gamma_1^{2-s}}{\gamma_2^{1-s} - \gamma_1^{1-s}}$$

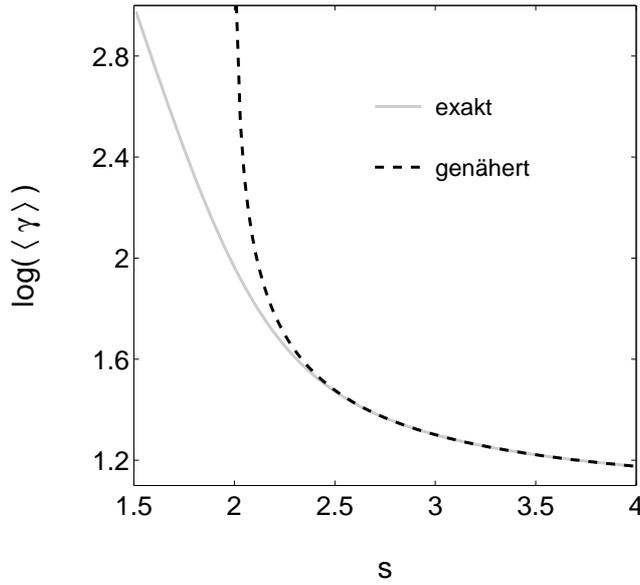


Abbildung 4.1: Die mittlere Elektronenenergie $\langle \gamma \rangle$ in Abhängigkeit von des Spektralindex s der potenzgesetzförmigen Elektronenverteilung n_e (graue, durchgezogene Linie). Die untere, bzw. obere Energiegrenze ist $\gamma_1 = 10$ bzw. $\gamma_2 = 10^5$. Der genäherte Wert aus Gleichung 4.5 ist als schwarze, gestrichelte Linie dargestellt.

$$= \frac{s-1}{s-2} \frac{\gamma_2^{s-2} - \gamma_1^{s-2}}{\gamma_2^{s-1} - \gamma_1^{s-1}} \gamma_1 \gamma_2 \stackrel{\substack{\gamma_2 \gg \gamma_1 \\ s \gg 2}}{\approx} \frac{s-1}{s-2} \gamma_1. \quad (4.5)$$

Hierbei ist

$$n_e(\gamma) = \int d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e); \quad (4.6)$$

in dem hier betrachteten isotropen Fall gilt $n_e(\gamma) = 4\pi n_e(\gamma, \Omega_e)$.

Für ein Elektronenspektrum, bei dem die Energiegrenzen deutlich voneinander getrennt sind und der Spektralindex $s \gg 2$ ist, wird die mittlere Elektronenenergie also im Wesentlichen von der unteren Energiegrenze bestimmt. Die hochenergetischen Elektronen tragen aufgrund ihrer kleinen Anzahl nur marginal zum Mittelwert der Elektronenenergie bei.

In Abbildung 4.1 ist der Verlauf der mittleren Elektronenenergie $\langle \gamma \rangle$ in Abhängigkeit des Spektralindex s der Elektronenverteilung als durchgezogene, graue Linie dargestellt, sowie der Verlauf der Näherungslösung als schwarze, gestrichelte Linie. Die untere, bzw. obere Energiegrenze ist $\gamma_1 = 10$ und $\gamma_2 = 10^5$. Es zeigt sich, dass ab einem Wert von $s \simeq 2.4$ die Näherungslösung sehr gut mit dem exakten Wert übereinstimmt.

Aus Gleichung 4.5 folgt außerdem, dass ganz allgemein

$$u_{\text{ges}} = m_e c^2 \langle \gamma \rangle n_{\text{ges}} \quad (4.7)$$

gilt, sich die totale Energiedichte also aus Gesamteilchenzahldichte und mittlerer Elektronenenergie zusammensetzt.

4.2 Das Synchrotronspektrum einer potenzgesetzförmigen Elektronenverteilung

Um die Photonendichte der Synchrotronphotonen, die hier als Targetphotonen der inversen Comptonstreuung dienen sollen, zu berechnen, wird zunächst der Emissionskoeffizient j_ϵ der Synchrotronstrahlung berechnet. Für eine isotrope Elektronenverteilung ist dieser gegeben durch Gleichung 2.8:

$$j_\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty d\gamma n_e(\gamma) P_{\text{sy}}(\epsilon) \quad (4.8)$$

mit (Rybicky & Lightman, 1979)

$$P_{\text{sy}}(\epsilon) = \sqrt{3} \frac{e^3 B}{m_e c^2 h} F\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right) \quad \text{und} \quad (4.9)$$

$$F(z) = z \int_z^\infty dt K_{\frac{5}{3}}(t) \propto \begin{cases} z^{\frac{1}{3}} & , \quad z \ll 1 \\ e^{-z} z^{\frac{1}{2}} & , \quad z \gg 1 \end{cases} .$$

Hierbei ist $K_{\frac{5}{3}}$ die modifizierte Besselfunktion, und die kritische Photonenenergie ϵ_c ist definiert als

$$\epsilon_c = \underbrace{\frac{3}{4\pi} \frac{e B h}{m_e^2 c^3}}_{\equiv \epsilon_0} \gamma^2 \quad (4.10)$$

mit der Elementarladung e , der Magnetfeldstärke B , dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Elektronenruheenergie $m_e c^2$; für $B = 1$ ergibt sich $\epsilon_0 \simeq 3.4 \cdot 10^{-14}$.

Setzt man die potenzgesetzförmige Elektronenverteilung aus Gleichung 4.1 ein, integriert über den Raumwinkel $d\Omega_e$, so ergibt sich für den Emissionskoeffizienten

$$j_\epsilon = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^3 B}{m_e c^2 h} n_0}_{\equiv K_0} \int_1^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-s} F\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma^2}\right) . \quad (4.11)$$

Durch die Substitution

$$x = \frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma^2} \quad \rightsquigarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} x^{-\frac{1}{2}}} , \quad d\gamma = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} x^{-\frac{3}{2}} \quad (4.12)$$

erhält man

$$j_\epsilon = \frac{K_0}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1-s}{2}} \int_{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_2^2}}^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2}} dx x^{\frac{s-3}{2}} F(x)$$

$$= \frac{K_0}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1-s}{2}} \left\{ \underbrace{\int_0^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2}} dx x^{\frac{s-1}{2}} \int_x^\infty dt K_{\frac{5}{3}}(t)}_{\equiv \text{I1}} - \int_0^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_2^2}} dx x^{\frac{s-1}{2}} \int_x^\infty dt K_{\frac{5}{3}}(t) \right\}. \quad (4.13)$$

Das Integral I1 kann man weiter auswerten:

$$\begin{aligned} \text{I1} &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx x^{\frac{s-1}{2}} K_{\frac{5}{3}}(t) \Theta \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2} - x \right) \Theta(t - x) \\ &= \int_0^\infty dt K_{\frac{5}{3}}(t) \left\{ \Theta \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2} - t \right) \int_0^t dx x^{\frac{s-1}{2}} + \Theta \left(t - \frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2} \right) \int_0^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2}} dx x^{\frac{s-1}{2}} \right\} \\ &= \frac{2}{s+1} \int_0^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2}} dt t^{\frac{s+1}{2}} K_{\frac{5}{3}}(t) + \frac{2}{s+1} \underbrace{\int_{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2}}^\infty dt \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2} \right)^{\frac{s+1}{2}} K_{\frac{5}{3}}(t)}_{= \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2} \right)^{\frac{s-1}{2}} F \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2} \right)}. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Da das zweite Integral in Gleichung 4.13 einen analogen Ausdruck liefert, erhält man insgesamt

$$j_\epsilon = \frac{K_0}{s+1} \left\{ \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1-s}{2}} \int_{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_2^2}}^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2}} dt t^{\frac{s+1}{2}} K_{\frac{5}{3}}(t) + \gamma_1^{1-s} F \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_1^2} \right) - \gamma_2^{1-s} F \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0 \gamma_2^2} \right) \right\}.$$

Im Bereich $\epsilon_0 \gamma_1^2 \ll \epsilon \ll \epsilon_0 \gamma_2^2$ können die Integralgrenzen des verbliebenen Integrals näherungsweise zu Null bzw. Unendlich gesetzt und die beiden Terme mit der F -Funktion vernachlässigt werden. Somit erhält man für $\epsilon_0 \gamma_1^2 \ll \epsilon \ll \epsilon_0 \gamma_2^2$:

$$\begin{aligned} j_\epsilon &\simeq \frac{K_0}{s+1} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1-s}{2}} \int_0^\infty dt t^{\frac{s+1}{2}} K_{\frac{5}{3}}(t) \\ &= \frac{K_0}{s+1} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1-s}{2}} 2^{\frac{s-1}{2}} \Gamma \left(\frac{s}{4} + \frac{19}{12} \right) \Gamma \left(\frac{s}{4} - \frac{1}{12} \right). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde Formel 11.4.22 aus Abramowitz & Stegun (1964) benutzt; hierbei ist Γ die Gammafunktion. Es gilt zu bemerken, dass

$$\epsilon_{1|2} \equiv \epsilon_0 \gamma_{1|2}^2 = \epsilon_C (\gamma_{1|2}) \quad (4.15)$$

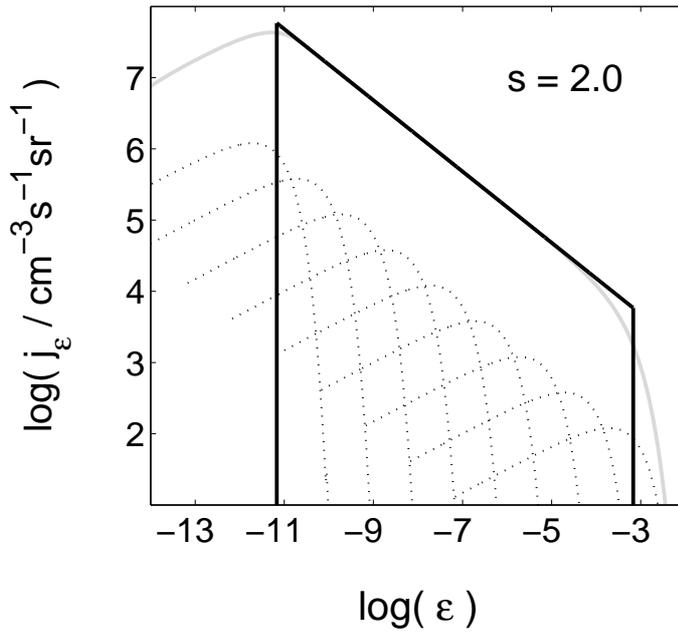


Abbildung 4.2: Der Emissionskoeffizient j_ϵ für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung von $\gamma_1 = 10$ bis $\gamma_2 = 10^5$ mit einem Spektralindex $s = 2$. Die graue Linie gibt den numerisch berechneten spektralen Verlauf des Emissionskoeffizienten j_ϵ für $B = 1$ G wieder; die schwarze Linie zeigt den genäherten Verlauf von $\epsilon = \epsilon_0 \gamma_1^2$ bis $\epsilon = \epsilon_0 \gamma_2^2$ mit $B = 1$. Die gepunkteten Linien zeigen die Beiträge einzelner Elektronenenergien von γ_1 bis γ_2 , wobei die ausgewählten Elektronenenergien einen Faktor $\sqrt{10}$ auseinander liegen, so dass die Maxima der resultierenden Emissionskoeffizienten j_ϵ jeweils eine Größenordnung auseinander liegen.

die kritischen Photonenergien derjenigen Elektronen sind, die die obere, bzw. untere Grenze der Elektronenverteilung bezeichnen. Da das Gesamtspektrum aus der Superposition von Synchrotronspektren der verschiedenen Elektronen der Energien von γ_1 bis γ_2 entsteht, kann man erwarten, dass sich das Gesamtspektrum für $\epsilon \ll \epsilon_0 \gamma_1^2$ beziehungsweise für $\epsilon \gg \epsilon_0 \gamma_2^2$ entsprechend dem asymptotischen Verhalten der F -Funktion in Gleichung 4.9 verhält.

Für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung ist der Emissionskoeffizient also über einen großen Teil des Energiespektrums potenzgesetzförmig, mit einem exponentiellen Gefälle am hochenergetischen Ende des Spektrums. Abbildung 4.2 zeigt den genäherten (schwarze Linie) sowie den exakten (graue Linie) spektralen Verlauf des Emissionskoeffizient j_ϵ (siehe auch den Text zur Abbildung).

Wie in Anhang C gezeigt, lässt sich aus dem Emissionskoeffizienten ein Ausdruck für die Targetphotonendichte herleiten. Für eine scheibenförmige Geometrie mit Radius R und Dicke d kann man ansetzen

$$n(\epsilon) = G(d, R) \frac{j_\epsilon}{\epsilon} = K_1 \epsilon^{-\frac{s+1}{2}} \Theta(\epsilon - \epsilon_1) \Theta(\epsilon_2 - \epsilon) , \quad (4.16)$$

wobei alle Vorfaktoren in K_1 zusammengefasst wurden, also

$$K_1 \equiv G(d, R) \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^3 B}{m_e c^2 h} \frac{n_0}{s+1} 2^{\frac{s-1}{2}} \epsilon_0^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{s}{4} - \frac{1}{12}\right) \quad (4.17)$$

mit $G(d, R)$ aus Gleichung C.10 und ϵ_0 aus Gleichung 4.10.

4.3 Die SSC Streurate für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung

Aus der Definition der differentiellen Streurate \dot{n}_S in Gleichung 3.15, bzw. deren Vereinfachung für den Fall isotroper Elektronen- und Targetphotonenverteilungen in Gleichung 3.20, ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{n}_S &= \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty d\gamma \oint d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e) \frac{d^2 N}{dt d\epsilon_S} = \frac{n_0}{4\pi} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-s} \frac{d^2 N}{dt d\epsilon_S} \quad (4.18) \\ &= \frac{1}{2} K_1 n_0 r_0^2 c \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\epsilon \Theta\left(q - \frac{1}{4\gamma^2}\right) \Theta(1-q) \\ &\quad \times \gamma^{-(s+2)} \epsilon^{-\frac{s+3}{2}} \left[2q \ln q - 2q^2 + q + 1 + \frac{1}{2} \frac{(4\gamma\epsilon q)^2}{1 + 4\gamma\epsilon q} (1-q) \right] \end{aligned}$$

$$\text{mit } q = \frac{\epsilon_S}{4\epsilon\gamma \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)}.$$

In Gleichung 4.18 wurde die Elektronenverteilung aus Gleichung 4.1 eingesetzt und über den Raumwinkel integriert. Im nächsten Schritt wurde die Streurate eines Elektrons $dN/(dt d\epsilon_S)$, wie sie in Kapitel 3 hergeleitet wird (Gleichung 3.28), einschließlich der Verteilung der Synchrotronphotonen (Gleichung 4.16), eingesetzt.

Wie sich unmittelbar ablesen lässt, müssen bei der Ausführung der Integrationen über γ und ϵ die jeweiligen Integrationsgrenzen mit den Beschränkungen des Integranden, die durch die beiden Heaviside-Funktionen in q gegeben sind, verglichen werden. Substituiert man

$$x \equiv \frac{\epsilon_S}{\gamma} \quad \text{und} \quad b \equiv \frac{1}{4\epsilon\epsilon_S} \quad (4.19)$$

und integriert, nach einigem Umsortieren der Terme nach Potenzen von b , über die neue Variable b , so ergibt sich

$$\dot{n}_S = K(\epsilon_S) \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}} dx x^s \left[-A(x) \left(\frac{2}{s+3}\right)^2 b^{\frac{s+3}{2}} \left[1 - \frac{s+3}{2} \ln b\right] \right]$$

$$+ B(x) \frac{2}{s+3} b^{\frac{s+3}{2}} - C(x) \frac{2}{s+5} b^{\frac{s+5}{2}} + D(x) \frac{2}{s+1} b^{\frac{s+1}{2}} \Bigg]_{\max\left(\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}, \frac{1-x}{4\epsilon_S^2}\right)}^{\min\left(\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}, \frac{1-x}{x^2}\right)} \quad (4.20)$$

wobei $K(\epsilon_S)$ in Gleichung G.8 definiert ist und die Funktionen A bis D nur von der zweiten Integrationsvariablen x , nicht aber von b abhängen. Ihre genaue Form findet sich in den Gleichungen G.10 bis G.13.

Aus den Integrationsgrenzen ergeben sich vier verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, so dass das Integral über x in vier Teilintegrale zerfällt, die in verschiedenen Energiebereichen des Streuspektrums Beiträge liefern. Um die Gesamtlösung übersichtlich zu halten und da das Augenmerk dieser Arbeit auf der γ -Strahlung der AGN liegt, werden Lösungen mit $\epsilon_S > \epsilon$ betrachtet. Die verbleibenden Integrale über x lassen sich als Kombinationen von Lerchschen Φ -Funktionen darstellen, und der Vergleich der Integrationsgrenzen führt auf eine in drei Energieintervalle in ϵ_S unterteilte Lösung für die differentielle Streurrate \dot{n}_S .

Die gesamte Rechnung ist in Anhang G dargestellt. Als Ergebnis für die differentielle Streurrate (Gleichung G.73) ergibt sich

$$\dot{n}_S \propto \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} f(\epsilon_S), \quad (4.21)$$

wobei die Funktion $f(\epsilon_S)$ in die drei oben erwähnten Energieintervalle von ϵ^{11} über ϵ^{12} und ϵ^{21} bis ϵ^{22} zerfällt mit

$$\epsilon^{ij} = \frac{4\epsilon_j\gamma_i^2}{1 + 4\epsilon_j\gamma_i} \quad (4.22)$$

(entsprechend den Gleichungen G.38 bis G.42). Für den im weiteren Verlauf der Diskussion zumeist zutreffenden Fall, dass

$$\gamma_1 \ll \sqrt[3]{\frac{1}{4\epsilon_0}} \ll \gamma_2 \quad (4.23)$$

ist, erstreckt sich das Spektrum der inversen Comptonstreuung von Synchrotronphotonen, die von derselben Elektronenpopulation erzeugt wurden, die für den Streuprozess verantwortlich sind, in etwa von

$$4\epsilon_0\gamma_1^4 < \epsilon_S < \gamma_2. \quad (4.24)$$

Die größte erzielbare Energie ist also die Energie der Elektronen an der oberen Grenze der Elektronenverteilung γ_2 .

4.4 Darstellung der Ergebnisse

Im Folgenden werden verschiedene Elektronenspektren und die Ergebnisse der sich daraus ergebenden differentielle Streuraten \dot{n}_S vorgestellt. So zeigt Abbildung 4.3 die

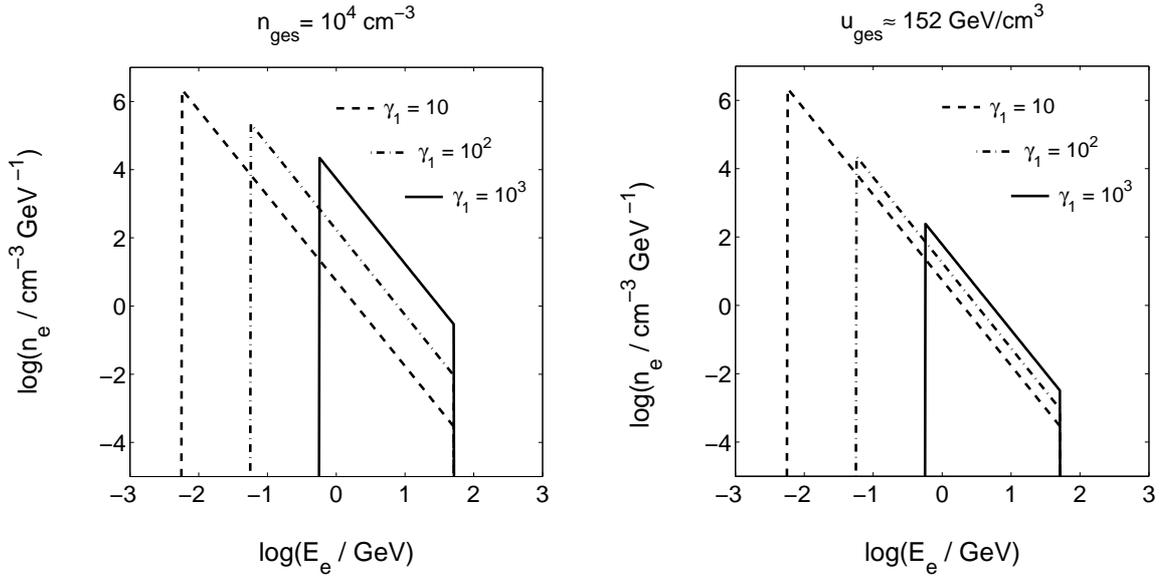


Abbildung 4.3: Die differentielle Elektronendichte n_e für verschiedene untere Energiegrenzen γ_1 . Der Spektralindex der Elektronenverteilung ist $s = 2.5$; die obere Energiegrenze beträgt $\gamma_2 = 10^5$. Auf der Abszisse ist die Energie $E_e = \gamma m_e c^2$ in GeV aufgetragen. *Linke Figur:* Die Gesamtdichte der Elektronen n_{ges} ist jeweils konstant 10^4 cm^{-3} . *Rechte Figur:* Die Gesamtenergiedichte u_{ges} beträgt jeweils 152 GeV/cm^3 . Dies entspricht unter obigen Bedingungen der Energiedichte von 10^4 Elektronen mit $\gamma_1 = 10$.

differentielle Elektronendichte n_e für verschiedene untere Energiegrenzen γ_1 ; auf der Abszisse ist jeweils die Energie $E_e = \gamma m_e c^2$ in GeV aufgetragen, (zur Energieeinheit GeV siehe auch Fussnote g in Kapitel 1). In der linken Figur von Abbildung 4.3 ist die Gesamtelektronendichte konstant bei $n_{\text{ges}} = 10^4 \text{ cm}^{-3}$. Anders, als intuitiv vielleicht zu erwarten, steigt die Anzahldichte bei der kleinsten jeweiligen Elektronenenergie γ_1 durch das Verkleinern des Energieintervalls nicht an, sondern nimmt im Gegenteil ab. Analog zu der Diskussion der mittleren Elektronenenergie (Gleichung 4.5) lässt sich aus Gleichung 4.2 ablesen, dass der Vorfaktor der differentiellen Elektronendichte für $s \gg 1$ proportional zu γ_1^{s-1} ist:

$$n_e(\gamma, \Omega_e) \approx \frac{n_{\text{ges}}}{4\pi} \gamma_1^{s-1} \gamma^{-s} \Theta(\gamma - \gamma_1) \Theta(\gamma_2 - \gamma). \quad (4.25)$$

Somit ist die differentielle Elektronendichte n_e bei $\gamma = \gamma_1$ proportional zu $1/\gamma_1$ und nimmt bei einer Erhöhung der unteren Energiegrenze γ_1 entsprechend ab.

Die Energiedichte bei obiger Parameterkonstellation und $\gamma_1 = 10$ beträgt $u_{\text{ges}} \simeq 152 \text{ GeV/cm}^3$. Dieser Wert wird in der linken Figur von Abbildung 4.3 bei der Variation von γ_1 konstant gehalten. Da

$$n_{\text{ges}} = \frac{u_{\text{ges}}}{m_e c^2 \langle \gamma \rangle} \quad \text{und} \quad \langle \gamma \rangle \approx \frac{s-1}{s-2} \gamma_1 \quad (4.26)$$

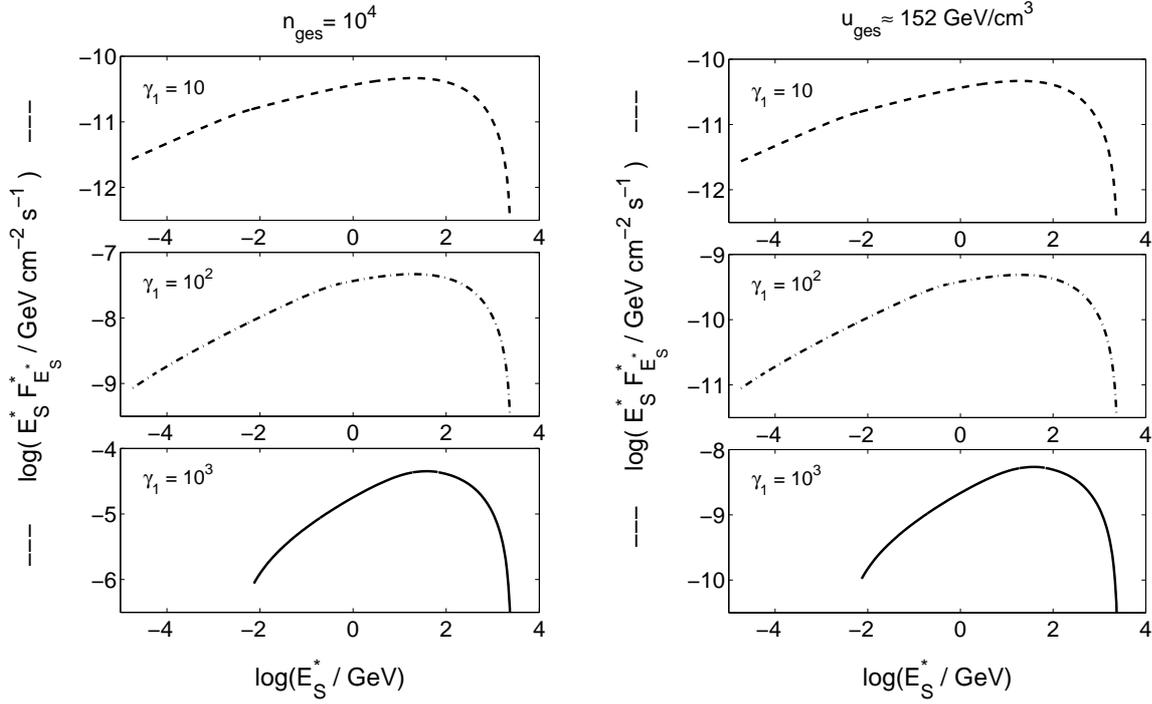


Abbildung 4.4: Das Ergebnis der inversen Comptonstreuung von Synchrotronphotonen, resultierend aus den verschiedenen Elektronenverteilungen aus Abbildung 4.3, als $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrum; die Quelle befindet sich in einer Luminositätsdistanz von $d_L = 2.19 \text{ Gpc}$ und bewegt sich mit einem Lorentzfaktor $\Gamma = 300$ und unter einem Beobachtungswinkel von $\Theta_S^* = 0.5^\circ$ auf den Betrachter zu. Die Geometrie der Quelle ist scheibenförmig mit einem Radius $R = 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}$ und einer Dicke $d = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}$; die Magnetfeldstärke beträgt $B = 1 \text{ G}$. Die Linienstile entsprechen denen aus Abbildung 4.3. *Linke Figur:* Die totale Anzahldichte n_{ges} der Elektronenverteilung ist konstant. *Rechte Figur:* Die totale Energiedichte u_{ges} der Elektronenverteilung ist konstant.

(siehe Gleichung 4.5) verringert sich der maximale Wert der Elektronendichte bei γ_1 durch die hier vorgenommene Variation von γ_1 um eine weitere Größenordnung. Die in der Abschätzung geforderte Bedingung $s \gg 2$ ist für $\gamma_1 = 10$ und $\gamma_2 = 10^5$ bei $s = 2.5$ bereits sehr gut erfüllt (vgl. Abbildung 4.1).

Das Ergebnis der inversen Comptonstreuung von Synchrotronphotonen der Elektronenverteilungen aus Abbildung 4.3 ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Die unterschiedlichen Linienstile der Streuspektren entsprechen denen der verschiedenen Elektronenverteilungen in Abbildung 4.3, in der linken Figur für die konstante totale Elektronendichte $n_{\text{ges}} = 10^4 \text{ cm}^{-3}$, in der rechten für die konstante Gesamtenergiedichte $u_{\text{ges}} \simeq 152 \text{ GeV/cm}^3$. Es wird angenommen, dass sich die Strahlungsquelle, also das Jetelement, in einer Entfernung befindet, die einer Rotverschiebung von $z = 0.5$ entspricht; mit Gleichung 3.38 ergibt sich daraus eine Luminositätsdistanz von $d_L^{\text{EdS}} = 2.19 \text{ Gpc}$. Ferner bewegt sie sich mit einem Lorentzfaktor^b $\Gamma = 300$ und

^bEin Lorentzfaktor von $\Gamma = 300$ ist für AGN ein vergleichsweise hoher Wert; in einer anderen

unter einem Winkel von $\Theta_S^* = 0.5^\circ$ zur Sichtlinie auf den Betrachter zu, und das Magnetfeld im Inneren des Jets beträgt $B = 1$ G. Im folgenden Kapitel 5 wird die Strahlungsquelle in den Jets aktiver galaktischer Kerne als scheibenförmige Stoßfront beschrieben; daher wird auch hier eine scheibenförmige Geometrie mit einem Radius von $R = 5 \cdot 10^{14}$ cm und einer Dicke von $d = 2 \cdot 10^{14}$ cm gewählt.

Wie zu erwarten, führt eine höher angesetzte untere Energieschranke der Elektronenverteilung γ_1 bei der Form der spektralen Verteilung der SSC-Photonen im Wesentlichen zu Änderungen im niederenergetischen Bereich des Spektrums. Der „Knick“ in der Steigung des Streuspektrums wird mit zunehmender Energie der unteren Grenze γ_1 zu höheren Energien verschoben. Das Spektrum der Targetphotonen, das durch die Abstrahlung von Synchrotronphotonen der Elektronen entsteht, wurde in der Näherung aus Gleichung 4.16 benutzt, wobei die Grenzen der Targetphotonenverteilung durch die Grenzen der Elektronenverteilung bestimmt werden: $\epsilon_{1|2} = \epsilon_0 \gamma_{1|2}^2$ (vgl. Gleichung 4.16). Der Knick, der im SSC-Spektrum zu erkennen ist, verschiebt sich bei der Erhöhung der Grenzenergie γ_1 um zwei Größenordnungen und weist damit dieselbe Abhängigkeit von γ_1 auf, wie die Grenzenergie der Photonverteilung ϵ_1 (s. o.). Er entsteht also nicht durch die Begrenzung der Elektronenverteilung selbst, sondern aus der daraus resultierenden Begrenzung der Synchrotronphotonen. Die Berücksichtigung der niederenergetischen Flanke der Targetphotonenverteilung würde einen fließenden Übergang in der Steigung des SSC-Spektrums bewirken.

Die Änderung der Steigung erfolgt in etwa bei

$$\epsilon_{12} \stackrel{\text{Gl. 4.22}}{=} \frac{4\epsilon_0 \gamma_1^2 \gamma_2^2}{1 + 4\epsilon_0 \gamma_1 \gamma_2^2}, \quad (4.27)$$

also bei der Grenzenergie zwischen dem ersten und dem zweiten Energieintervall der differentiellen Streurate \dot{n}_S in Gleichung G.73; sie ist somit ebenfalls von dem Quadrat der *oberen* Elektronengrenzenergie γ_2 abhängig, wie weiter unten diskutiert wird.

Die Festlegung der totalen Anzahl- und Energiedichte auf einen konstanten Wert unter Variation der unteren Energiegrenze beeinflusst nicht die spektrale Form des Streuspektrums; für die verschiedenen Werte von γ_1 ist sie in den beiden in Abbildung 4.4 dargestellten Fällen $n_{\text{ges}} = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und $u_{\text{ges}} \simeq 152 \text{ GeV/cm}^3$ augenscheinlich identisch. Die Leistung, die von einem Beobachter von den unterschiedlichen Verteilungen empfangen würde, unterscheidet sich hingegen um Größenordnungen.

Im Falle einer konstanten totalen Energiedichte u_{ges} (rechte Figur von Abbildung 4.4) wächst die maximale, abgestrahlte Leistung proportional zur Erhöhung der unteren Grenzenergie γ_1 , bzw. mit der damit verbundenen Erhöhung der mittleren Elektronenenergie $\langle \gamma \rangle$ des Elektronenspektrums (vgl. Gleichung 4.26), an. Im Falle der konstanten totalen Elektronendichte n_{ges} steigt die Strahlungsleistung mit der dritten Potenz von γ_1 .

Klasse von astrophysikalischen Hochenergiequellen, den sogenannten *gamma ray bursts* (GBR) werden Lorentzfaktoren bis zu $\Gamma = 1000$ angenommen. Wie Gopal-Krishna et al. (2004) zeigen, sind große Lorentzfaktoren für AGN mit den Abschätzungen aus Messdaten verträglich (vgl. Gopal-Krishna et al., 2004, und Referenzen darin).

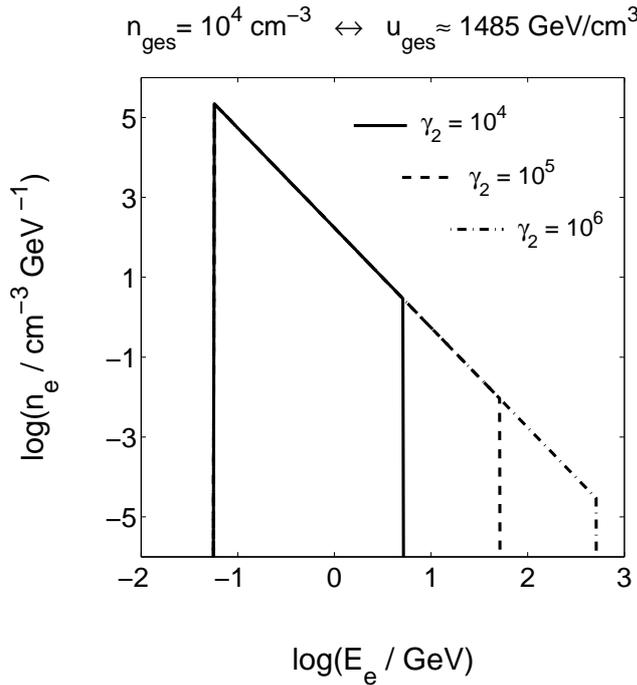


Abbildung 4.5: Die differentiellen Elektronendichte n_e für verschiedene obere Energiegrenzen γ_2 . Der Spektralindex der Elektronenverteilung ist $s = 2.5$; die untere Energiegrenze beträgt $\gamma_1 = 10^2$. Die Variation von γ_2 führt bei konstanter Gesamtdichte der Elektronen und bei konstanter Gesamtenergiedichte ($n_{\text{ges}} = 10^4 \text{ cm}^{-3} \hat{=} u_{\text{ges}} = 1485 \text{ GeV/cm}^3$ für $\gamma_2 = 10^4$) zu marginal unterschiedlichen spektralen Verteilungen; daher wurde auf eine getrennte Darstellung verzichtet.

Die Lösung für die differentielle Streurrate \dot{n}_S der inversen Comptonstreuung aus Gleichung G.73 zeigt, dass

$$\dot{n}_S \propto n_0^2. \quad (4.28)$$

Ist die obere Energiegrenze der Elektronen γ_2 deutlich größer als die untere Grenze γ_1 , und ist darüber hinaus $s \gg 1$, kann man in Gleichung 4.2 den Beitrag der oberen Grenze vernachlässigen, und es ergibt sich

$$n_0 \approx \begin{matrix} \gamma_2 \gg \gamma_1 \\ s \gg 1 \end{matrix} (s-1) n_{\text{ges}} \gamma_1^{s-1}. \quad (4.29)$$

Im Falle einer konstanten Gesamtenergiedichte u_{ges} muss die Gesamtteilchendichte n_{ges} mit Hilfe des Ausdrucks für die totale Energiedichte u_{ges} aus Gleichung 4.7 und der Gleichung für die mittlere Elektronenenergie $\langle \gamma \rangle$ aus Gleichung 4.5 dargestellt werden:

$$n_{\text{ges}} = \frac{u_{\text{ges}}}{m_e c^2} \langle \gamma \rangle^{-1} \approx \begin{matrix} \gamma_2 \gg \gamma_1 \\ s \gg 2 \end{matrix} \frac{s-2}{s-1} \frac{u_{\text{ges}}}{m_e c^2} \gamma_1^{-1}. \quad (4.30)$$

Unter den diskutierten Voraussetzungen ergibt sich also

$$\dot{n}_S \propto n_0^2 \propto n_{\text{ges}}^2 \gamma_1^{2(s-1)} \propto \begin{cases} \gamma_1^{2(s-1)}; & n_{\text{ges}} = \text{konst.} \\ \gamma_1^{2(s-2)}; & u_{\text{ges}} = \text{konst.} \end{cases} \quad (4.31)$$

Da hier als Spektralindex $s = 2.5$ gewählt wurde, ergibt sich genau der zuvor diskutierte Zusammenhang: Wird die untere Elektronenenergiegrenze γ_1 um das zehnfache

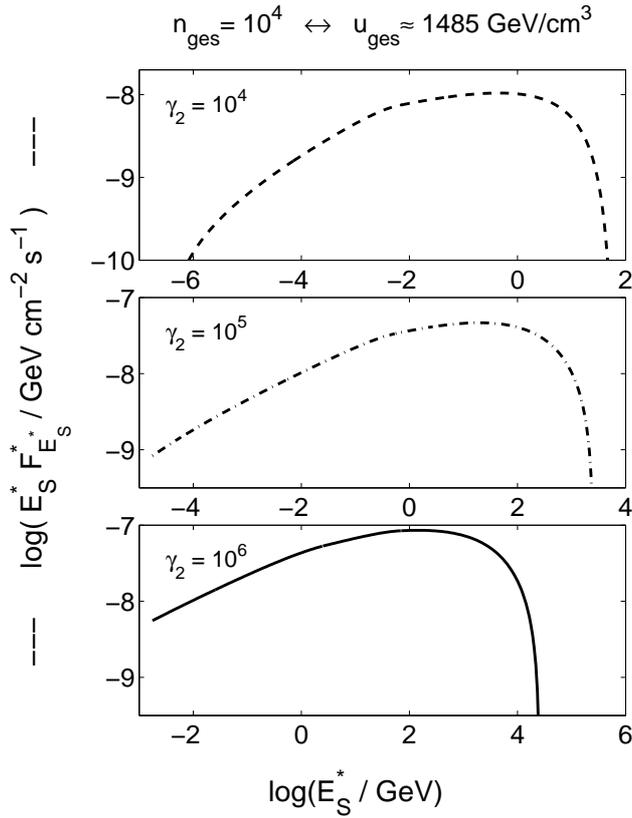


Abbildung 4.6: Das Ergebnis der inversen Comptonstreuung von Synchrotronphotonen, resultierend aus den verschiedenen Elektronenverteilungen aus Abbildung 4.3, als $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrum; die Quelle befindet sich in einer Luminositätsdistanz von $d_L = 2.19 \text{ Gpc}$ und bewegt sich mit einem Lorentzfaktor $\Gamma = 300$ und unter einem Beobachtungswinkel von $\Theta_S^* = 0.5^\circ$ auf den Betrachter zu; die Magnetfeldstärke beträgt $B = 1 \text{ G}$. Die Spektren bei konstanter totaler Anzahldichte n_{ges} der Elektronenverteilung und konstanter totaler Energiedichte u_{ges} unterscheiden sich entsprechend der Elektronenverteilungen nur marginal.

erhöht, verschiebt sich die maximale, abgestahlte Leistung bei konstanter Gesamtenergiedichte u_{ges} der Elektronenverteilung ebenfalls um einen Faktor zehn. Im Falle der konstant gehaltenen totalen Elektronenanzahldichte n_{ges} steigt die abgestahlte Leistung um einen Faktor 10^3 .

In Abbildung 4.5 sind spektrale Elektronendichten dargestellt, bei denen die obere Energiegrenze γ_2 variiert wird. Da die Anzahl der Elektronen an der oberen Energiegrenze bei der gewählten Steigung der Verteilung von $s = 2.5$ bereits bei der kleinsten hier betrachteten oberen Energiegrenze von $\gamma_2 = 10^4$ um drei Größenordnungen kleiner ist als bei der unteren, variieren die Werte der Elektronendichte bei konstanter Gesamtelektronendichte n_{ges} kaum. Bei einer Erhöhung der oberen Energiegrenze machen sich die wenigen Elektronen, die zu höheren Energien umverteilt werden, bei kleineren Energien kaum bemerkbar. Entsprechend hat es den Anschein, dass die spektrale Verteilung lediglich zu höheren Energien „erweitert“ wird.

Bei konstanter Gesamtenergiedichte $u_{\text{ges}} \propto \langle \gamma \rangle n_{\text{ges}}$ sind die Ergebnisse nahezu identisch mit denen konstanter Gesamtelektronendichte, da die mittlere Elektronenenergie $\langle \gamma \rangle$ bei der hier gewählten Parameterkonstellation nur schwach mit γ_2 variiert (siehe Gleichung 4.26). Somit unterscheiden sich die beiden Fälle nur marginal, und auf eine getrennte Darstellung kann verzichtet werden.

Abbildung 4.6 zeigt die Spektren der SSC-Streuung der in Abbildung 4.5 dargestellten Elektronenverteilungen. Aufgrund der nur geringen Erhöhung der mittleren

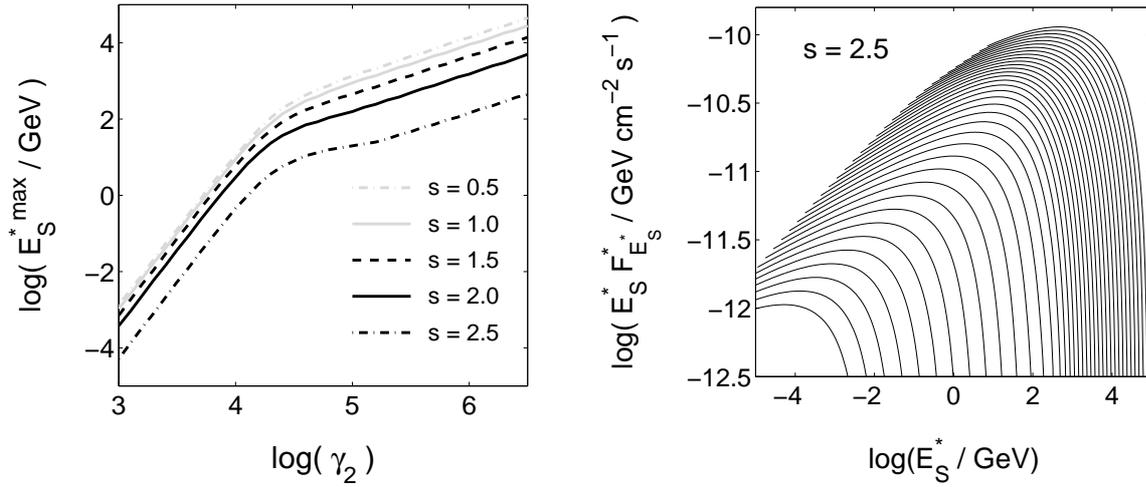


Abbildung 4.7: Die Entwicklung des Streuspektrums bei Variation der oberen Elektronenenergiegrenze γ_2 . Die untere Grenze ist $\gamma_1 = 10$. *Linke Figur:* Die Streuenergie $E_S^*(\max(E_S^* F_{E_S^*}^*))$, bei der sich das Maximum des $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrums befindet, aufgetragen gegen die oberen Elektronenenergiegrenze γ_2 für verschiedene Spektralindizes s . *Rechte Figur:* Der hochenergetische Teil des $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrums von $\log(\gamma_2) = 3.0$ bis $\log(\gamma_2) = 6.5$ in 0.1er Schritten für $s = 2.5$.

Elektronenenergie mit zunehmender oberer Grenzernergie γ_2 steigt die emittierte Leistung im Vergleich zu Abbildung 4.4 geringer an. Die mit der Erhöhung ebenfalls verbundene Verbreiterung des Synchrotronspektrums führt zu einem „glatteren“ Verlauf im niederenergetischen Bereich des SSC-Spektrums, da die „Kanten“ der Elektronen- bzw. Synchrotronphotonenverteilungen an Gewicht verlieren.

Die maximale Photonenenergie, die durch die inverse Comptonstreuung der Synchrotronphotonen generiert werden kann, ist

$$\epsilon_{22} \stackrel{\text{Gl. G.39}}{\approx} \frac{4\epsilon_2 \gamma_2^2}{1 + 4\epsilon_2 \gamma_2} \quad (4.32)$$

und steigt folglich für $4\epsilon_2 \gamma_2 = 4\epsilon_0 \gamma_2^3 \gg 1$ nur noch proportional zu γ_2 an. Entsprechend dieser Entwicklung für die maximalen Streuphotonenenergien verhält sich das Maximum des SSC-Spektrums. Da für $\gamma_2 = 10^4$ gerade $4\epsilon_2 \gamma_2 \approx 1$ ist, verschiebt sich das Maximum der Streustrahlung bei der Verzehnfachung der oberen Energiegrenze um etwas mehr als eine Größenordnung; bei einer weiteren Erhöhung nur noch um eine Größenordnung.

Zur Veranschaulichung dieser These ist in Abbildung 4.7 sowohl der Verlauf der Stelle des Leistungsmaximums des SSC-Spektrums $E_S^*(\max(E_S^* F_{E_S^*}^*))$ dargestellt (linke Figur), als auch die $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektren für $s = 2.5$ selbst (rechte Figur).

Wie erwartet, verschiebt sich das Maximum des Strahlungsspektrums im Bereich $4\epsilon_0 \gamma_2^3 \ll 1$ mit γ_2^4 zu höheren Streuenergien E_S^* . Nach einem Übergangsbereich ist der Zuwachs von $E_S^*(\max(E_S^* F_{E_S^*}^*)) \propto \gamma_2$. Die Abhängigkeit im Bereich $4\epsilon_0 \gamma_2^3 \gg 1$ ist also nur noch linear und verläuft insofern identisch zum Verlauf der maximalen

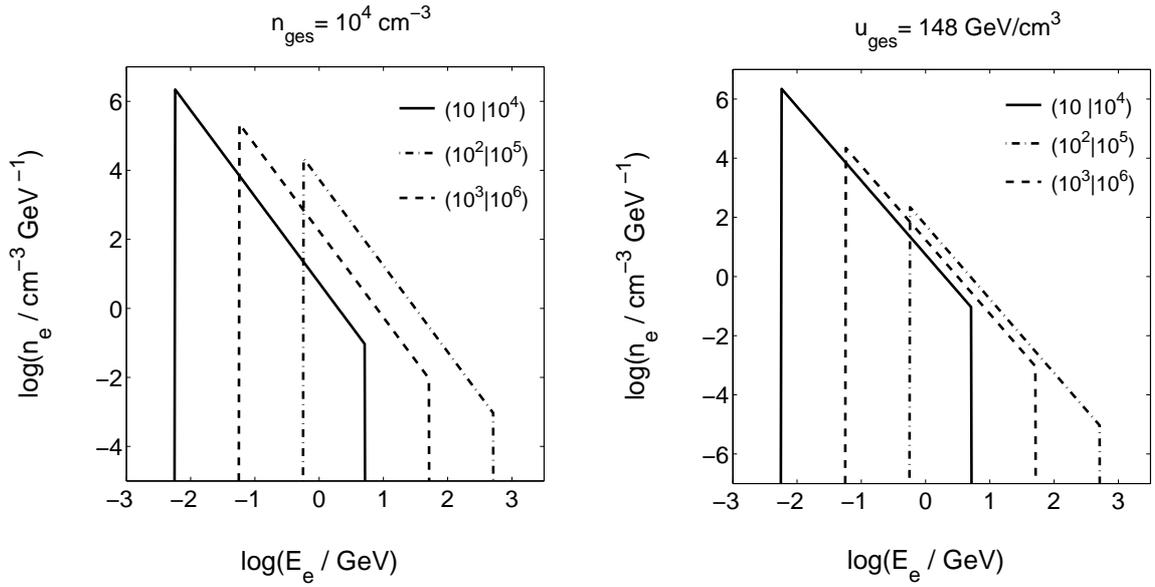


Abbildung 4.8: Die differentielle Elektronendichte n_e für verschiedene Energiegrenzen γ_1 und γ_2 . Die Klammern in der Legende oben rechts bezeichnen die jeweiligen $(\gamma_1|\gamma_2)$ Paare. Der Spektralindex der Elektronenverteilung ist $s = 2.5$. *Linke Figur:* Die Gesamtdichte der Elektronen n_{ges} ist jeweils konstant 10^4 cm^{-3} . *Rechte Figur:* Die Gesamtenergiedichte u_{ges} beträgt jeweils 152 GeV/cm^3 . Dies entspricht unter obigen Bedingungen der Energiedichte von 10^4 Elektronen mit $\gamma_1 = 10$.

Streuenergie ϵ^{22} .

Abbildung 4.8 zeigt die Kombination der vorhergehenden Variationen: Hier werden sowohl die untere als auch die obere Energiegrenze γ_1 , bzw. γ_2 , um einen Faktor zehn bei gleichbleibender Gesamtelektronendichte n_{ges} (linke Figur in Abbildung 4.8) und gleichbleibender Gesamtenergiedichte u_{ges} (rechte Figur in Abbildung 4.8) erhöht.

Das Ergebnis der inversen Comptonstreuung der Elektronenverteilungen aus Abbildung 4.8 ist in Abbildung 4.9 zu sehen. Analog zum Verhalten bei der Variation der unteren Energiegrenze in Abbildung 4.4 ist der Anstieg der abgestrahlten Leistung bei konstanter Gesamtenergiedichte u_{ges} annähernd linear zur Änderung der unteren Energiegrenze γ_1 und damit in etwa zur mittleren Elektronenenergie $\langle \gamma \rangle$ (vgl. Gleichung 4.5 und Abbildung 4.1). Bei konstanter Gesamtelektronendichte n_{ges} hingegen steigt die maximale Strahlungsleistung in etwa proportional zu γ_1^3 .

Das Maximum des SSC-Spektrums entwickelt sich bei der „Verschiebung“ der Elektronenverteilung zu höheren Energien entsprechend dem Verhalten bei Variation der oberen Energieschranke. Wie in den Beispielen zuvor, beeinflusst die Wahl der konstant gehaltenen Größe, also n_{ges} oder u_{ges} , nicht die spektrale Form der Spektrens.

Da die untere Grenze im gleichen Maße erhöht wird wie die obere, das Elektronen-

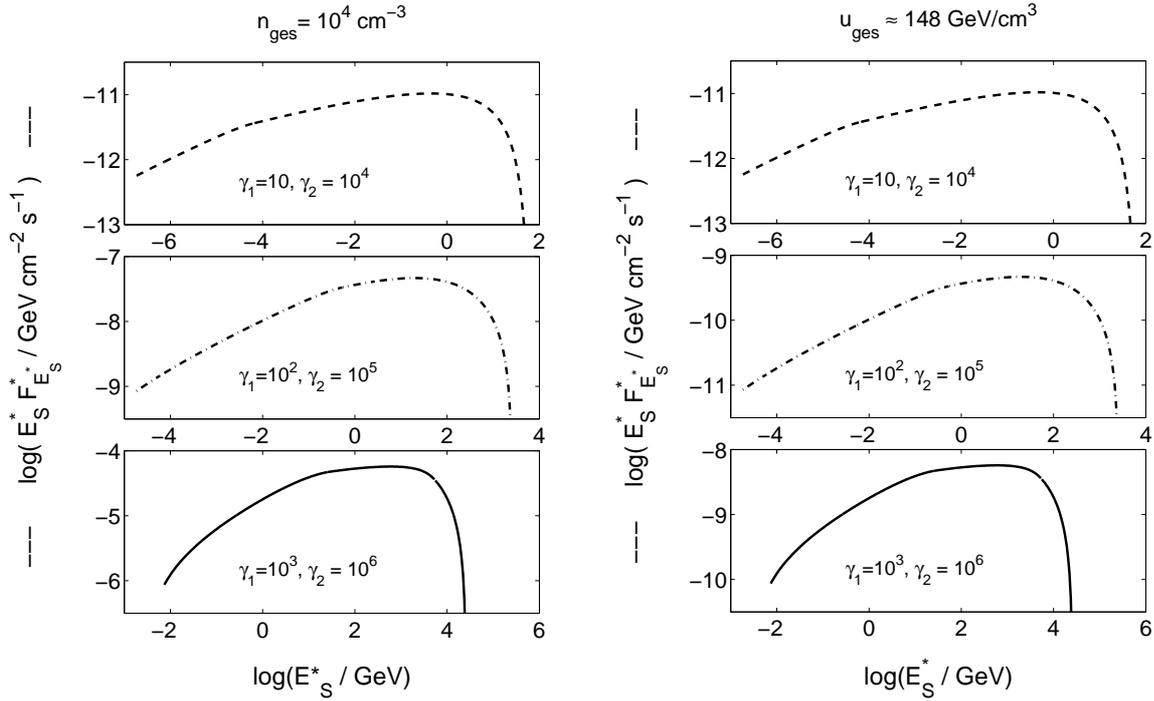


Abbildung 4.9: Das Ergebnis der inversen Comptonstreuung von Synchrotronphotonen, resultierend aus den verschiedenen Elektronenverteilungen aus Figur 4.8, als $E_S^* F_{E_S}^*$ -Spektrum; die Quelle befindet sich in einer Luminositätsdistanz von $d_L = 2.19$ Gpc und bewegt sich mit einem Lorentzfaktor $\Gamma = 300$ und unter einem Beobachtungswinkel von $\Theta_S^* = 0.5^\circ$ auf den Betrachter zu; die Magnetfeldstärke beträgt $B = 1$ G. *Linke Figur:* Die totale Anzahldichte n_{ges} der Elektronenverteilung ist konstant. *Rechte Figur:* Die totale Energiedichte u_{ges} der Elektronenverteilung ist konstant.

spektrum also stets drei Größenordnungen umfasst, bleibt der „Knick“ in der niederenergetischen Flanke des Spektrums, der von der endlichen Breite des Energieintervalls der Elektronenverteilung herrührt, in den verschiedenen Spektren von Abbildung 4.9 sichtbar. Gemäß Gleichung G.38, bzw. 4.27, ist dieser proportional zu $\gamma_1^2 \gamma_2^2$ und verschiebt sich beim Übergang von $(10|10^4)$ zu $(10^2|10^5)$ um vier Größenordnungen. Da sich für das zweite Wertepaar $4\epsilon_0 \gamma_1 \gamma_2^2 \approx 1$ ergibt und sich oberhalb dieses Wertes eine Proportionalität linear zu γ_1 einstellt, ist der Knick in der mittleren Figur von 4.9 etwas weniger als vier Größenordnungen gegenüber dem Wert der oberen Figur verschoben.

Darüber hinaus fällt auf, dass der Knick zunehmend an das Maximum des Spektrums heranrückt. Hier macht sich das Verlassen des Thomson-Limit-Bereichs mit zunehmender Energie der Elektronen bemerkbar. Das Thomson-Limit gilt für $\epsilon' < 1$ und, da es für alle Winkel ψ zwischen Elektron und Targetphoton gelten soll, im Laborsystem maximal bis zu $2\gamma\epsilon < 1$ (vgl. Gleichung 3.4). Bei der Berechnung des SSC-Spektrums wurde über die beiden Verteilungen in ϵ und γ integriert; mit zunehmender „Verschiebung“ des Elektronenspektrums gilt diese Bedingung für einen

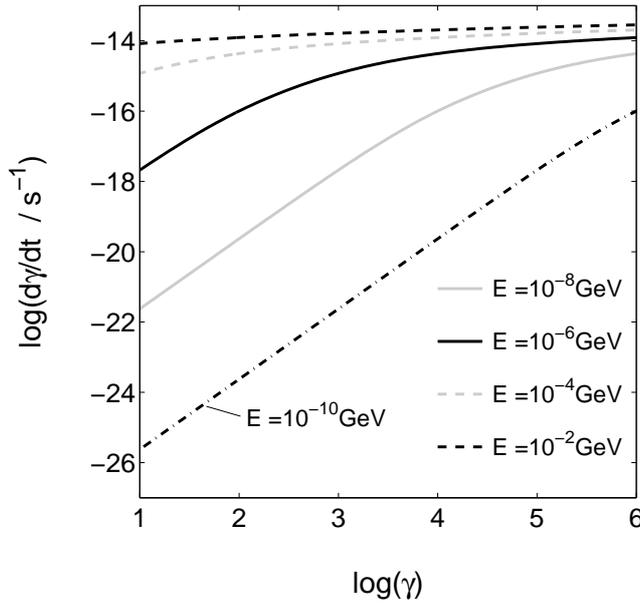


Abbildung 4.10: Die Elektronenkühlrate $\dot{\gamma}$ in Abhängigkeit der Elektronenenergie γ für verschiedene Targetphotonenenergien ϵ .

größer werdenden Teil der Kombinationen von γ und ϵ nicht.

Abbildung 4.10 zeigt den Übergang zwischen dem Thomson-Limit-Bereich und dem Bereich höherer Energien ($2\gamma\epsilon > 1$), dem sogenannten *Klein-Nishina-Bereich*, anhand der Elektronenkühlrate $\dot{\gamma}$ (siehe Gleichung 3.33). Da diese den totalen Energieverlust eines Elektrons in Abhängigkeit seiner Energie beschreibt, und somit die von ihm emittierte bolometrische Strahlungsleistung, verschafft diese Größe einen guten Eindruck von dem Übergang zwischen den beiden Energiebereichen (vgl. Unterkapitel 3.4). Die Elektronenkühlrate ist gegenüber der auf die Elektronenruheenergie $m_e c^2$ normierten Elektronenenergie, also dem Lorentzfaktor γ , aufgetragen; die unterschiedlichen Verläufe ergeben sich aus den verschiedenen Targetphotonenenergien $E = m_e c^2 \epsilon$. Die unterste Kurve zeigt die Elektronenkühlrate für eine Targetphotonenenergie $E = 10^{-10}$ GeV: Sie steigt in dem gesamten betrachteten Elektronenenergieintervall quadratisch an, also entsprechend der Gleichung 3.34 für den Thomson-Limit-Bereich. Bereits bei einer Photonenergie von $E = 10^{-8}$ GeV wird diese Abhängigkeit bei einer Elektronenenergie von $\gamma \approx 10^4 \hat{=} 5$ GeV verlassen; bei einer Photonenergie von $E = 10^{-6}$ GeV bereits bei $\gamma \approx 10^2$. Da für $E = 10^{-8}$ GeV die Grenzenenergie des Thomson-Limit-Bereichs $2\gamma\epsilon \approx 0.4$ kleiner als eins ist, wird ersichtlich, wie wichtig die Berücksichtigung des gesamten Klein-Nishina-Wirkungsquerschnittes ist.

Jenseits des Thomson-Limit-Bereichs nimmt die Elektronenkühlrate mit steigender Elektronenenergie nur noch wenig zu und geht schließlich in einen nahezu konstanten Wert über. Die Elektronen der höchsten Energien tragen also weniger effizient zur Streuung der Synchrotronphotonen bei; daher verschiebt sich zum einen das Maximum des Streuspektrums in Abbildung 4.9 nur noch in etwa linear mit der Erhöhung der oberen Energiegrenze γ_2 (siehe auch Abbildung 4.6 und die Beschreibung im Text), zum anderen fällt das Spektrum an der hochenergetischen Flanke

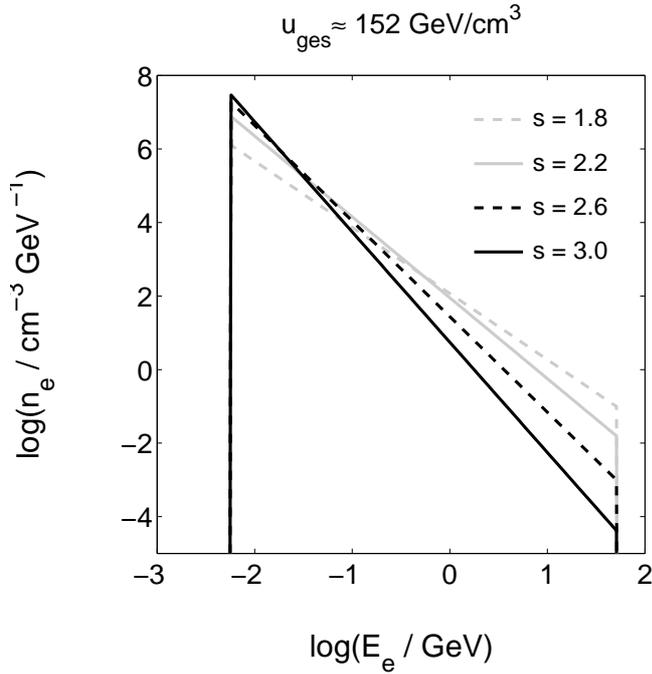


Abbildung 4.11: Die differentielle Elektronendichte n_e für verschiedene Spektralindizes s . Die untere Energiegrenze beträgt $\gamma_1 = 10$, die obere $\gamma_2 = 10^5$. Die Gesamtenergiedichte ist konstant bei $u_{\text{ges}} \approx 152 \text{ GeV/cm}^3$.

zunehmend steiler ab. Das Verlassen des Thomson-Limit-Bereichs führt in diesem Fall also zu einem härter werdenden *cut-off* im SSC-Spektrum. Dieser Effekt macht sich stärker bemerkbar als bei der ausschließlichen Variation der oberen Grenzenenergie γ_2 , da bei der gleichzeitigen Erhöhung der unteren Grenze γ_1 der Elektronenverteilung auch der niederenergetische Teil der Targetphotonen, die in der Kombination mit den Hochenergieelektronen noch die Bedingung $2\gamma\epsilon < 1$ erfüllen, wegfällt. Stark vereinfacht könnte man sagen, dass die energiereichsten Elektronen in diesem Fall keine geeigneten Streupartner finden.

Abbildung 4.11 zeigt den Verlauf der spektralen Elektronendichte für verschiedene Spektralindizes s . Die Energiegrenzen der Verteilung sind $\gamma_1 = 10$ und $\gamma_2 = 10^5$; die totale Anzahldichte der Elektronen n_{ges} wurde so variiert, dass die totale Energiedichte der Elektronenverteilung konstant bei $u_{\text{ges}} \approx 152 \text{ GeV}$ liegt.

Mit zunehmendem Spektralindex s fallen die Unterschiede bei der kleinsten Elektronenenergie γ_1 zunehmend geringer aus. Die hochenergetischen Teilchen tragen zu der Gesamtenergie

$$u_{\text{ges}} = m_e c^2 \int d\gamma \gamma n_e(\gamma) = m_e c^2 \langle \gamma \rangle n_{\text{ges}} \quad (4.33)$$

für Spektralindizes, die deutlich größer als zwei sind, nur gering bei, so dass die mittlere Elektronenenergie

$$\langle \gamma \rangle \approx \frac{s-1}{s-2} \gamma_1 \quad (4.34)$$

ist, wie in Gleichung 4.5 gezeigt. Bei konstanter Gesamtenergiedichte u_{ges} und fester unterer Energiegrenze γ_1 variiert die Gesamtanzahldichte n_{ges} als Funktion des

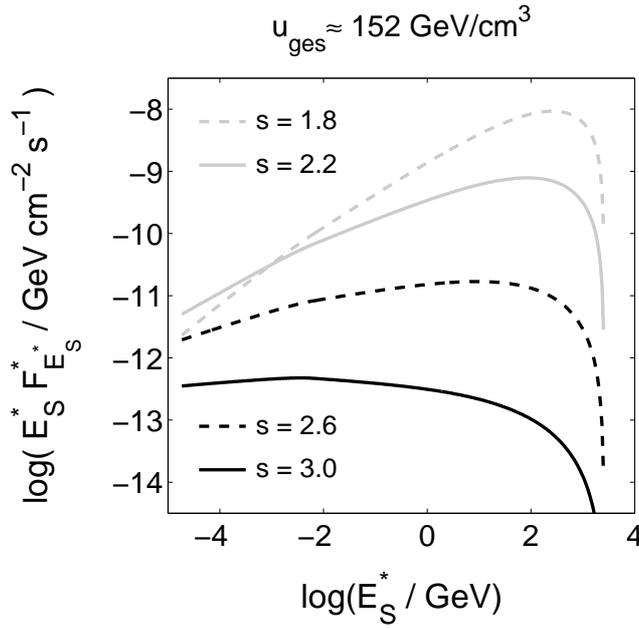


Abbildung 4.12: Das Ergebnis der inversen Comptonstreuung von Synchrotronphotonen, resultierend aus den verschiedenen Elektronenverteilungen aus Abbildung 4.11, als $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrum; die Quelle befindet sich in einer Luminositätsdistanz von $d_L = 2, 19 \text{ Gpc}$ und bewegt sich mit einem Lorentzfaktor $\Gamma = 300$, unter einem Beobachtungswinkel von $\Theta_S^* = 0.5^\circ$ auf den Betrachter zu; die Magnetfeldstärke beträgt $B = 1 \text{ G}$.

Spektralindex s also nur noch mit $(s - 2)/(s - 1)$. Da der wesentliche Beitrag zur Gesamtanzahldichte n_{ges} bei steilen Elektronenspektren ebenfalls von dem kleinsten Energiewert herrührt, verändert sich die Elektronendichte an der unteren Energiegrenze mit größer werdendem Spektralindex s nur noch wenig.

Wie wesentlich die hochenergetischen Teilchen allerdings für den SSC-Prozess sind ist in Abbildung 4.12 abzulesen. Hier sind die aus den Elektronenverteilungen der vorherigen Abbildung resultierenden SSC-Spektren dargestellt. Die größte Strahlungsleistung und der größte Wert der Energie, an der das Strahlungsmaximum emittiert wird, werden für das *härteste*, also flachste, hier betrachtete Elektronenspektrum mit einem Spektralindex von $s = 1.8$ erzielt. Das Maximum liegt hier bei $E_S^* \simeq 256 \text{ GeV}$. Mit zunehmender Steigung des Elektronenspektrums verflacht auch das Spektrum der SSC-Strahlung; die maximale abgestrahlte Leistung nimmt ab und das Maximum „wandert“ zu kleineren Energien. Außerdem wird der Knick an der niederenergetischen Flanke des Spektrums mit zunehmender Steigung deutlicher sichtbar. Bei einer Steigung von $s = 3$ wird eben Jener zum Maximum des Strahlungsspektrums. Die Energie bei der die maximale Leistung emittiert wird, ist ungefähr fünf Größenordnungen kleiner als die Maximumsenergie bei $s = 1.8$; für noch größere Steigungen liegt das Leistungmaximum unterhalb des hier betrachteten Energieintervalls. Ein deutlich ausgeprägtes Maximum im Hochenergiebereich des Spektrums weist also auf ein Elektronenspektrum mit einer kleineren Steigung als $s = 3$ hin.

4.5 Vergleich: Die SSC–Streurate im Thomson–Limit

Im Bereich des Thomson–Limits gilt die vielfach verwendete Formel für die differentielle Streurate von Blumenthal & Gould (1970), die in Anhang G.4 hergeleitet wird

$$\dot{n}_S^{\text{TL}}(\epsilon_S, \Omega_S) = r_0^2 c n_0 2^{s+1} \frac{s^2 + 4s + 11}{(s+1)(s+3)^2(s+5)} \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} \int d\epsilon \epsilon^{\frac{s-1}{2}} n(\epsilon). \quad (4.35)$$

Diese Lösung suggeriert einen potenzgesetzförmigen Verlauf des Spektrums und speziell für $s = 3$ einen horizontalen Verlauf der Kurve, da $E_S^* F_{E_S^*}^* \propto \epsilon_S^2 \dot{n}_S \propto \epsilon_S^{\frac{3-s}{2}}$ und die Integration über $n(\epsilon)$ nur einen von ϵ_S unabhängigen Wert liefert. Der Vergleich mit Abbildung 4.12 zeigt jedoch, dass dies auch für den niederenergetischen Bereich des $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrums nicht erfüllt ist.

Der Grund hierfür liegt in den Annahmen begründet, die bei der Herleitung von Gleichung 4.35 gemacht werden. Zur Bestimmung der unteren Grenze der Integration über die Elektronenenergie wird gefordert, dass

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_S}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} > \gamma_1 \quad (4.36)$$

(vgl. Gleichung G.75). Außerdem wird die Lösung der oberen Energiegrenze γ_2 vernachlässigt mit dem Hinweis, dass die Lösung für

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_S}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \gamma_2 \quad (4.37)$$

bestimmt werde (vgl. G.78). Die damit verbundenen Begrenzungen für die Integration über die Targetphotonenenergie finden in Gleichung 4.35 keine Berücksichtigung. Obige Beschränkungen führen zu

$$\frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \ll \epsilon < \frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2}. \quad (4.38)$$

Generell gilt im Thomson–Limit

$$\epsilon_S < 4\gamma_2^2 \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon > \frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2}. \quad (4.39)$$

Nimmt man diese weniger starke Beschränkung, um die Integration über ϵ ausführen zu können, ergibt sich für das Integral in Gleichung 4.35 allgemein

$$\int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\frac{s-1}{2}} n(\epsilon) \Theta \left(\epsilon - \frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \right) \Theta \left(\frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2} - \epsilon \right). \quad (4.40)$$

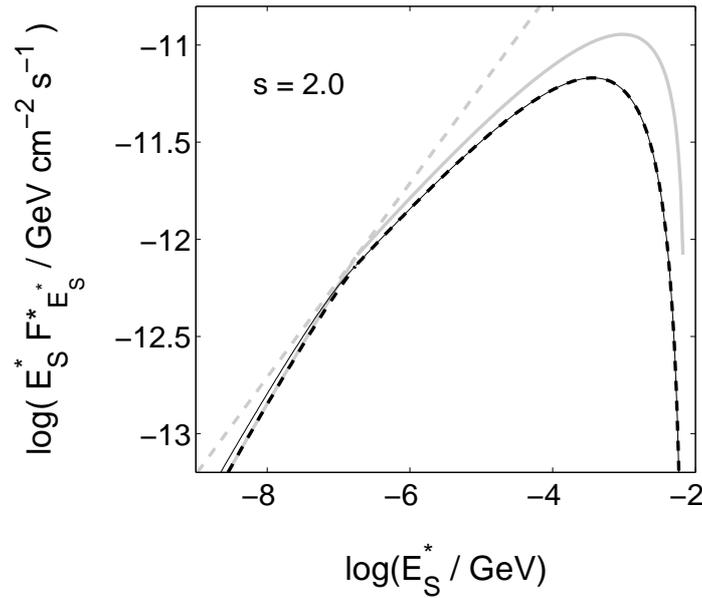


Abbildung 4.13: Das $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrum für einen Spektralindex der Elektronen von $s = 2$ und einer unteren, bzw. oberen, Grenzenergie $\gamma_1 = 5$ und $\gamma_2 = 10^3$ im Vergleich: Die graue gestrichelte Linie zeigt die im Thomson-Limit berechnete Lösung von Blumenthal & Gould (1970), die graue durchgezogene Linie die Lösung von Blumenthal & Gould (1970) unter Berücksichtigung der in Gleichung 4.38 angeführten Beschränkungen der ϵ -Integration. Die schwarze durchgezogene Linie zeigt besagte Lösung unter zusätzlicher Berücksichtigung der vernachlässigten, unteren Integrationsgrenze der γ -Integration und die schwarze gestrichelte Linie die hier vorgestellte, allgemeine Lösung aus Gleichung G.73.

Setzt man hier die bereits verwendete, potenzgesetzförmige Targetphotonenverteilung aus Gleichung 4.16 an, erhält man mit $\epsilon_{1|2} = \epsilon_0 \gamma_{1|2}^2$

$$K_1 \int_{\max[\epsilon_1, \epsilon_S/4\gamma_2^2]}^{\min[\epsilon_2, \epsilon_S/4\gamma_1^2]} d\epsilon \epsilon^{-1} = K_1 \Theta(4\epsilon_0 \gamma_1^2 \gamma_2^2 - \epsilon_S) \log \left[\frac{\epsilon_S}{4\epsilon_0 \gamma_1^4} \right] - K_1 \Theta(\epsilon_S - 4\epsilon_0 \gamma_1^2 \gamma_2^2) \log \left[\frac{\epsilon_S}{4\epsilon_0 \gamma_2^4} \right]. \quad (4.41)$$

Das Spektrum zerfällt also in zwei Teilbereiche um $4\epsilon_0 \gamma_1^2 \gamma_2^2$. Diese werden jeweils mit einem logarithmischen Ausdruck in ϵ_S moduliert; ein potenzgesetzförmiger Verlauf ist also nicht zu erwarten.

Abbildung 4.13 zeigt die verschiedenen Lösungen, die das SSC-Spektrum beschreiben, für eine Elektronenverteilung mit $s = 2$, sowie $\gamma_1 = 5$ und $\gamma_2 = 10^3$. Im Thomson-Limit muss $\epsilon' < 1$ sein. Da dies für alle Photonen stets erfüllt sein muss, und damit auch für alle Winkel zwischen Photon und Elektron sowie alle Elektronenenergien, muss gelten

$$\epsilon' \stackrel{\text{Gl.3.4}}{=} \gamma \epsilon (1 - \beta \cos \psi) < 2\gamma \epsilon < 2\gamma_2 \epsilon_2 = 2\epsilon_0 \gamma_2^3 \stackrel{!}{<} 1, \quad (4.42)$$

was bei der hier gewählten oberen Energiegrenze der Elektronen γ_2 und $B = 1$ G gewährleistet ist.

Die graue, gestrichelte Linie zeigt das SSC-Spektrum, das sich aus Gleichung 4.35 mit der Photonenverteilung aus Gleichung 4.16 ergibt, wenn die Beschränkungen der Lösung bei der Integration über ϵ nicht berücksichtigt werden. Wie zu sehen ist, erhält man eine potenzgesetzförmige Abhängigkeit $\dot{n}_S^{\text{TL}} \propto \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}}$, also für das $E_S^* F_{E_S^*}^*$ -Spektrum mit $s = 2$ eine Gerade mit der Steigung $1/2$.

Die graue, durchgezogene Linie zeigt die korrigierte Version aus Gleichung 4.41, die besagte Beschränkungen berücksichtigt. Diese Lösung weicht bereits deutlich von dem rein potenzgesetzförmigen Spektrum ab. Die Übereinstimmung mit der, als schwarze gestrichelte Linie dargestellten, hier hergeleiteten allgemeinen Lösung ist allerdings ebenfalls nicht besonders gut. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass in Gleichung 4.40 die stärkere Bedingung $\frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \ll \epsilon$ durch die ebenfalls zu erfüllende Bedingung $\frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} < \epsilon$ ersetzt wird. Mit anderen Worten, die Teillösung für die obere Energiegrenze der Integration über γ , die in Gleichung 4.35 unter der Bedingung $\frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \ll \epsilon$ vernachlässigt wird, muss ebenfalls berücksichtigt werden.

Die durchgezogene, schwarze Linie zeigt das Spektrum aus Gleichung G.88, bei dem dieser Teil der Lösung für die differentielle Streurrate im Thomson-Limit \dot{n}_S^{TL} ebenfalls einbezogen wird. Sie zeigt in weiten Bereichen des Spektrums eine hervorragende Übereinstimmung mit der hier erzielten Lösung, bei deren Herleitung der volle Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt verwendet wurde. Die geringe Abweichung an der niederenergetischen Flanke des Spektrums erklärt sich aus der Tatsache, dass die Wahl $\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_S/\epsilon} > \gamma_1$ in Gleichung G.75 ebenfalls eine willkürliche Begrenzung der Lösung darstellt. Berücksichtigt man die Fälle $\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_S/\epsilon} < \gamma_1$, ergeben sich für den Bereich $\epsilon_S < 4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2$ zusätzliche Lösungen, die den Verlauf der Thomson-Limit-Lösung weiter an die allgemeine Lösung angleichen.

Die Lösung für die differentielle Streurrate der inversen Comptonstreuung der Synchrotronphotonen einer potenzgesetzförmigen Elektronenverteilung unter Verwendung des vollen Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitts geht also im niederenergetischen Thomson-Limit in die für diesen Grenzfall berechnete Lösung über.

Kapitel 5

SSC–Strahlung und das Modell der relativistischen Stoßfront

Wie in den vorhergehenden Kapiteln beschrieben, können die Strahlungsquellen der hochenergetischen Photonen den Jets der AGN zugeschrieben werden. In diesem Kapitel wird ein Modell vorgestellt, das die einzelnen beobachteten Elemente des Jets (Blobs) als relativistische Stoßwelle beschreibt, deren kaltes Plasma das umliegende interstellare Medium aufgrund der sogenannten Zweistrominstabilität „aufammelt“ und im Ruhesystem der Stoßfront isotropisiert. Die energiereichen Protonen generieren durch Proton–Proton–Stöße in einer Zerfallskaskade hochenergetische Elektronen und Positronen. Die zeitliche Entwicklung der Teilchenpopulationen wird durch eine Differentialgleichung beschrieben, die numerisch integriert wird. Die entstehenden Elektronen– und Positronenpopulationen erzeugen im Wesentlichen Synchrotron– und inverse Compton–, aber auch Brems– und Annihilationsstrahlung; die ebenfalls entstehenden neutralen Pionen zerfallen direkt in γ –Photonen. Die Multifrequenzspektren werden für verschiedene Parameterkonstellationen erstmalig unter Berücksichtigung der SSC–Komponente und dem Einfluss der elektrostatischen Turbulenz diskutiert.

Das vereinheitlichte Modell aktiver galaktischer Kerne ordnet die Strahlungsquellen der hochenergetischen γ –Photonen den Jets der AGN zu. Ein Großteil der Erklärungsmodelle geht davon aus, dass die γ –Photonen durch inverse Comptonstreuung entstehen. Verantwortlich für die hohen Photonenenergien und die großen Leuchtkräfte der Quellen sind, neben der relativistischen Bewegung der Quellen, im Wesentlichen die hohe Energie der streuenden Elektronen. Im vorhergehenden Kapitel wurde analytisch hergeleitet, wie das Spektrum der inversen Comptonstreuung für eine isotrope und potenzgesetzförmige Elektronenverteilung aussieht, unter der Annahme, dass diese die selbst produzierten Synchrotronphotonen streut.

Die Modelle, die die Strahlungsspektren zu erklären versuchen, beschränken sich im Allgemeinen auf die Behandlung des Strahlungsprozesses und der Rückwirkung

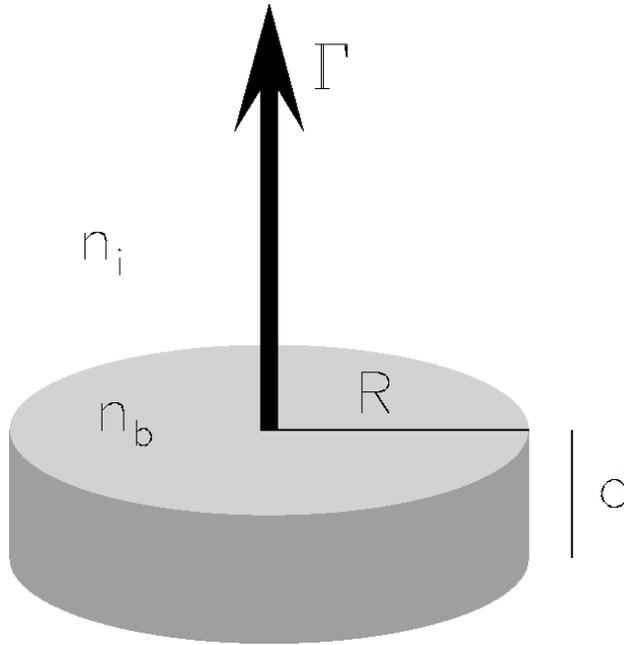


Abbildung 5.1: Eine Skizze der relativistischen Stoßfront. Ein scheibenförmiges Volumenelement mit Radius R , Dicke d und Dichte n_b bewegt sich entlang der Jetachse mit Lorentzfaktor Γ in das interstellare Medium der Dichte n_i (Pohl & Schlickeiser, 2000).

dieses Energieverlustes auf die Verteilung der Elektronen im Energieraum, um damit die zeitliche Entwicklung der Spektren beschreiben zu können. Die Frage nach der Entstehung der hochenergetischen Elektronenpopulation wird in diesem Zusammenhang meistens nicht behandelt. Der oft genannte Prozess der Schockbeschleunigung müßte sehr schnell und effizient vonstatten gehen, um die rapiden Verluste durch Strahlung zu kompensieren und die Elektronen mit den benötigten Energien zu versehen.

Als alternatives Szenario für die Produktion wird die Beschleunigung von Protonen vorgeschlagen (z. B. Mannheim & Biermann, 1992); diese produzieren mit einem äußeren Photonenfeld Photomesonen, die eine Vielzahl von sekundären Elektronen und Positronen entstehen lassen. Auf ähnliche Weise wird in Modelle, die einen gerichteten Protonenstrahl und dessen Wechselwirkung mit Wolken der *broad-line-region* betrachten (z. B. Beall & Bednarek, 1999), die notwendigen Elektronen bzw. Positronen zur Verfügung gestellt. Erstere Modelle erfordern sehr starke Magnetfelder, da der *Gyroradius* der Protonen^a kleiner sein muss als die Größe des Jetelements; in letzteren Modellen wird der Protonenstrahl innerhalb einer Wolke sehr schnell durch die Zweistrominstabilität gestoppt.

5.1 Das Modell der relativistischen Stoßfront

Diese Überlegungen führten zur Formulierung des Modells der *relativistischen Stoßfront* durch Pohl & Schlickeiser (2000). Abbildung 5.1 zeigt eine schematische Darstel-

^aDer Gyro- oder *Lamorradius* ist definiert als $R_G \equiv 2\pi\gamma_p m_p c^2 / (eB)$, wobei γ_p und m_p die Energie- und Ruhemasse des Protons sind.

lung einer solchen relativistischen Stoßfront, wie sie in den Jets der AGN auftreten soll: Eine durch das Magnetfeld B des Jets kollimierte Stoßfront mit der Dichte n_b läuft entlang der Jetachse mit relativistischer Geschwindigkeit B_Γ , bzw. dem korrespondierenden Lorentzfaktor Γ , in das interstellare Medium der Dichte n_i . Dies besteht, ebenso wie das Plasma der Stoßfront, im Wesentlichen aus ionisiertem Wasserstoff. Die als scheibenförmig genäherte Geometrie der Stoßfront ist bestimmt durch deren Dicke d und Radius R .

In dem Ruhesystem der Stoßfront, im Weiteren *Laborsystem* genannt (siehe Unterkapitel 3.1), stellt sich die Situation so dar, dass durch das ruhende Plasma der Stoßfront ein Strom Teilchen mit relativistischer Geschwindigkeit antiparallel zum Magnetfeld läuft. Dieser Strom ist instabil gegenüber der *Zweistrominstabilität*. Weil $n_b \gg n_i = \Gamma n_i^*$ ist, können die angeregten Plasmawellen als Störung des Hintergrund-, also des Stoßfrontplasmas, behandelt werden. Da in Bezug auf das Magnetfeld nichtparallele Plasmawellen thermisch gedämpft werden (z.B. Tademaru, 1969), können diese vernachlässigt werden. Die Untersuchung paralleler Störungen der Form $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$ führt auf implizite Dispersionsrelationen für elektrostatische ($\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$) und für elektromagnetische Wellen ($\delta\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$).

Die von Pohl & Schlickeiser (2000) durchgeführte Betrachtung der elektromagnetischen Wellen führt zu dem für weitere Betrachtungen der Strahlungsprozesse wesentlichen Ergebnis, dass der einlaufende Teilchenstrahl auf einer Länge von

$$\lambda \simeq 6 \cdot 10^{10} \frac{n_{b,8}^{\frac{1}{2}}}{\Gamma_{100} n_{i,0}^*} \text{ cm} \quad \text{mit} \quad n_{b,8} \equiv \frac{n_b}{10^8 \text{ cm}^3}, \quad \Gamma_{100} \equiv \frac{\Gamma}{100}, \quad n_{i,0}^* \equiv \frac{n_i^*}{\text{cm}^3} \quad (5.1)$$

isotropisiert wird. Die einlaufenden Protonen, die aufgrund ihrer 1836 mal größeren Masse die wesentlichen Konstituenten des Teilchenstrahls sind, verlieren bei der Absorption durch die relativistische Stoßfront keine Energie und bilden im Laborsystem eine Population isotrop verteilter, energiereicher Teilchen mit dem Lorentzfaktor der Stoßfront Γ .

Die Betrachtung elektrostatischer Plasmawellen, die in Pohl et al. (2002) vorgenommen wurde, führt zu dem Ergebnis, dass die Energieverluste, die die einströmenden Protonen bei der elektrostatischen Wechselwirkung erfahren, zur Bildung einer Plateauverteilung im Energieraum führen, bei der der Lorentzfaktor der Stoßfront Γ die obere Grenze der Verteilung bildet. Im Vergleich zeigt sich, dass die elektrostatische Instabilität auf einer deutlich kürzeren Zeitskala als die elektromagnetische zum Tragen kommt; allerdings ist der Teilchenstrahl, nach der Modifikation der Energieverteilung durch die elektrostatische Instabilität, noch immer instabil gegenüber der elektromagnetischen, so dass der Strahl nach der Relaxation durch die elektrostatische Instabilität durch die elektromagnetische Instabilität ebenso isotropisiert wird.

5.2 Die zeitliche Entwicklung der Stoßfront und der relativistischen Teilchenpopulationen

Die wesentliche Größe, sowohl für die zeitliche Entwicklung der Dynamik der Stoßfront, als auch für die Rate der neu entstehenden, für die Strahlung verantwortlichen Teilchen, ist die Rate \dot{N} , mit der Materie aufgenommen wird. Durch den Impulsübertrag der Teilchen auf die Stoßfront wird diese abgebremst; das Ruhesystem der Stoßfront (Laborsystem) ist also nicht stationär, was in der Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Systems berücksichtigt werden muss. Die Abbremsung der Stoßfront wirkt wiederum auf die Aufnahme rate \dot{N} und somit auf die Anzahl entstehender neutraler und geladener Pionen und damit auch auf die Anzahl der Elektronen und Positronen zurück.

Betrachtet man einzig die elektromagnetische Instabilität wird die Stoßfront durch diese mit relativistischen Teilchen angereichert, die eine isotrope Winkelverteilung aufzeigen. Die differentielle Rate, mit der relativistische Protonen zugeführt werden beträgt (Pohl & Schlickeiser, 2000)^b:

$$\dot{N}_p(\gamma_p) = \pi R^2 c n_i^* \sqrt{\Gamma^2 - 1} \delta(\gamma_p - \Gamma) \equiv \dot{N}_p^{\text{EM}}. \quad (5.2)$$

Hierbei ist γ_p der Lorentzfaktor der Protonen. Betrachtet man außerdem den Einfluss elektrostatischer Instabilitäten, ändert sich die Energieverteilung der aufgenommenen Teilchen. Im Gegensatz zu den elektromagnetischen Wellen, die die Teilchen lediglich im Anstellwinkel zum Magnetfeld, dem sogenannten *pitch-angle*, streuen und die Teilchenverteilung dabei isotropisieren, ohne ihre kinetische Energie zu beeinflussen, verändern die elektrostatischen Wellen die Verteilung der Teilchen solange, bis sich eine Plateauverteilung im Energieraum etabliert hat. Die obere Grenzenergie dieses Plateaus ist dabei die ursprüngliche Energie der einströmenden Teilchen Γ und für die differentielle Rate mit der relativistische Protonen zugeführt werden ergibt sich (Pohl et al., 2002; Schlickeiser et al., 2003):

$$\dot{N}_p(\gamma_p) = \pi R^2 c n_i^* \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{\Gamma - 1} \Theta(\Gamma - \gamma_p) \equiv \dot{N}_p^{\text{ES}}. \quad (5.3)$$

Die Aufnahme von Protonen bei der Energie $\gamma_p = \Gamma$ ist also um einen Faktor $\sim 1/\Gamma$ reduziert und stattdessen gleichmäßig auf Energien kleiner als Γ verteilt. Nachdem der Teilchenstrahl durch die schnellere elektrostatische Turbulenz relaxiert wurde, ist er immer noch instabil in Bezug auf die elektromagnetische Instabilität; durch diese wird er daher anschließend ebenfalls im Anstellwinkel gestreut und somit isotropisiert.

Mit der Materieaufnahme der Stoßfront ist notwendigerweise auch eine Aufnahme von Impuls verbunden, der die Stoßfront abbremst. Die Impulsaufnahme δP im Zeitintervall δt berechnet sich zu

$$\delta P = \pi R^2 m_p c^2 n_i^* (\Gamma^2 - 1) \delta t, \quad (5.4)$$

^bAlle Formeln dieses Unterkapitels, bei denen keine Referenz angegeben ist, sind aus diesem Artikel entnommen.

wobei m_p die Masse der Protonen ist, die aufgrund des Masseverhältnisses zu den Elektronen für die Impulsaufnahme wesentlich ist. Der obige Impulsübertrag verändert den Impuls der Stoßfront, die sich mit der Masse

$$M_{\text{SF}} = \pi R^2 d (n_b m_p + M_{\text{rel}}) \quad (5.5)$$

und dem Lorentzfaktor Γ entlang der z -Achse bewegt. Die Massendichte der aufgenommenen, relativistischen Teilchen M_{rel} berechnet sich aus dem Integral über die differentielle Verteilung dieser Teilchen n_p im Energieraum:

$$M_{\text{rel}} = m_p \int_1^{\infty} d\gamma_p \gamma_p n_p(\gamma_p) . \quad (5.6)$$

Im gegenwärtigen Ruhesystem der Stoßfront wird sich diese also *rückwärts* bewegen, da sich ihr Lorentzfaktor Γ nach der Zeit δt aufgrund des Impulsübertrages aus Gleichung 5.4 verringert. Der neue Lorentzfaktor der Stoßfront $\hat{\Gamma}$ ergibt sich aus

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{\delta P}{M_{\text{SF}} c} \right)^2} - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \frac{\delta P}{M_{\text{SF}} c} \quad (5.7)$$

und kann numerisch leicht berechnet werden.

Die differentielle Rate, mit der der Stoßfront relativistische Teilchen zugeführt werden (Gleichung 5.2 und 5.3), geht als Quellterm in die Kontinuitätsgleichung für die relativistischen Protonen ein:

$$\frac{\partial N_p(\gamma_p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma_p} (\dot{\gamma}_p N_p(\gamma_p)) + \frac{N_p(\gamma_p)}{T_E} + \frac{N_p(\gamma_p)}{T_N} = \dot{N}_p(\gamma_p) . \quad (5.8)$$

Hierbei ist T_E die Zeitskala für diffusives Entweichen von Protonen aus der Stoßfront und T_N die Zeitskala für Verluste durch Umwandlung von Protonen in Neutronen. Die kontinuierlichen Verluste sind in der Kühlrate $\dot{\gamma}_p$ (Einheit s^{-1}) zusammengefasst, die sich im Wesentlichen aus den Verlusten durch elastische Streuungen

$$-\dot{\gamma}_{p,\text{el}} \simeq 3 \cdot 10^{-8} n_{b,8} \frac{\gamma_p}{\sqrt{\gamma_p^2 - 1}} \text{ s}^{-1} \quad (5.9)$$

und inelastische Streuungen

$$-\dot{\gamma}_{p,\text{inel}} \simeq 7 \cdot 10^{-8} n_{b,8} \frac{(\gamma_p - 1)^2}{\gamma_p + 1} \text{ s}^{-1} \quad (5.10)$$

zusammensetzen. Letztere Formel ergibt sich aus der Integration über die Energien der Sekundärteilchen, die bei dem Streuprozess entstehen; zu ihrer Berechnung wurde das Monte-Carlo-Modell DTUNUC(V2.2) (Möhring & Ranft, 1991; Ranft et al., 1994) herangezogen, mit dem auch die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Produktion von Pionen ermittelt wurden. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für

die Produktion neutraler Pionen geht in die Berechnung von deren Quellfunktion q_{π^0} ein. Die neutralen Pionen zerfallen augenblicklich in zwei γ -Photonen, deren Quellfunktion sich wiederum aus

$$q_{\gamma}(\epsilon) = 2 \int_{\epsilon + \frac{m_{\pi^0}^2 c^4}{4\epsilon}}^{\infty} dE_{\pi^0} \frac{q_{\pi^0}}{\sqrt{E_{\pi^0} - m_{\pi^0}^2 c^4}} \quad (5.11)$$

berechnet. Hierbei sind E_{π^0} und m_{π^0} die Energie und die Ruhemasse der Pionen. Für die Zeitskala T_N gilt

$$T_N \simeq 3 \cdot 10^7 n_{b,8}^{-1} \left\langle \exp \left(-\frac{L}{\gamma 2.7 \cdot 10^{13} \text{cm}} \right) \right\rangle \text{s} . \quad (5.12)$$

Hierbei ist L die Weglänge der Neutronen durch die Stoßfront und die Klammern stehen für die Mittelung über den Emissionswinkel der Neutronen. Für die im Folgenden diskutierten Beispiele ist das Argument der Exponentialfunktion stets im Bereich von eins.

Geladene Pionen zerfallen in Myonen und diese weiter in Elektronen bzw. Positronen. Aus den differentiellen Wirkungsquerschnitten für die Produktion geladener Pionen, bzw. deren Quellfunktion, und der Kinematik der zwei Zerfallsprozesse lassen sich die Quellfunktionen der sekundären Elektronen und Positronen bestimmen. Da diese in Anzahl und Energie die primären Elektronen um ein Vielfaches übersteigen, werden nur die sekundären Elektronen betrachtet. Neben der Kühlung durch die inverse Comptonstreuung von Synchrotronphotonen (vgl. Gleichung 3.33) werden auch die Kühlungen durch Synchrotron- und Bremsstrahlung, sowie durch elastische Streuungen berücksichtigt. Sie berechnen sich zu

$$-\dot{\gamma}_{\text{Sy}} \simeq 2.7 \cdot 10^{-14} \frac{u_B}{m_e c^2} (\gamma^2 - 1) \text{s}^{-1} , \quad (5.13)$$

$$-\dot{\gamma}_{\text{Br}} \simeq 8 \cdot 10^{-8} n_{b,8} (\gamma - \gamma^{-1}) \text{s}^{-1} , \quad (5.14)$$

$$-\dot{\gamma}_{\text{e,el}} \simeq 8 \cdot 10^{-5} n_{b,8} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \text{s}^{-1} . \quad (5.15)$$

Hier ist $u_B = B^2/8\pi$ die Energiedichte des Magnetfeldes. Fasst man diese Kühlprozesse zur Gesamtkühlrate $\dot{\gamma}$ zusammen, ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung der sekundären Elektronen

$$\frac{\partial N_e(\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\dot{\gamma} N_e(\gamma)) + \frac{N_e(\gamma)}{T_E} + \frac{N_e(\gamma)}{T_{\text{ann}}} = \dot{N}_e(\gamma) , \quad (5.16)$$

mit der Zeitskala für die Verluste durch Annihilation (Jauch & Rohrlich, 1976)

$$T_{\text{ann}}^{-1} = \frac{3c\sigma_T n_b}{8(\gamma + 1)\sqrt{\gamma^2 - 1}} \left[(\gamma + 4 + \gamma^{-1}) \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) - \beta(\gamma + 1) \right] , \quad (5.17)$$

mit dem Thomson–Wirkungsquerschnitt σ_T , wobei angenommen wird, dass das Hintergrundplasma energetisch genug ist, um Coulomb– und Rekombinationsprozesse zu vernachlässigen. Die Zeitskala für diffuses Entweichen ergibt sich zu

$$T_E \simeq 1.7 \cdot 10^5 \frac{d_{13}^2 \Gamma_{100} n_{i,0}^*}{\beta \sqrt{n_{b,8}}} \text{s}, \quad (5.18)$$

wobei die Dicke d_{13} der Stoßfront analog zu den anderen Größen zu $d = 10^{13} d_{13}$ cm definiert ist (vgl. Gleichung 5.1).

5.3 SSC–Strahlung im Modell der relativistischen Stoßfront

Hier soll nun erstmalig die SSC–Strahlung in das Modell der relativistischen Stoßfront von Pohl & Schlickeiser (2000) integrieren werden; dazu muss zunächst die differentielle Streurrate bestimmt werden, um anschließend das SSC–Spektrum eines AGN berechnen zu können. Um die differentielle Streurrate zu bestimmen, werden die Integrationen in Gleichung 3.20 mit den aus dem Modell der relativistischen Stoßfront ermittelten Elektronen– und Synchrotronphotonenverteilungen numerisch ausgeführt. Der Energieverlust, den die Elektronen durch den Streuprozess erfahren, wirkt auf die Verteilung der Elektronen zurück und muss in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt werden. Aufgrund der hohen Energieverluste, die ein Elektron bei der inversen Comptonstreuung erfahren kann, gilt die Kontinuitätsgleichung 5.16 in dieser Form strenggenommen *nicht*. Die maximale Energie, die ein gestreutes Photon erreichen kann, ist

$$\epsilon_S^{\max} = \frac{4\epsilon\gamma^2}{1 + 4\epsilon\gamma}, \quad (5.19)$$

wie aus dem Definitionsbereich von Gleichung 3.28 ersichtlich. Im hochenergetischen Teil der Streuprozesse (*Klein–Nishina–Bereich*), für den $4\epsilon\gamma \gg 1$ gilt, ist also

$$\epsilon_S^{\max} \simeq \gamma. \quad (5.20)$$

Aus Gründen der Energieerhaltung muss ein Elektron, das ein Photon zu dieser Energie streut, seine gesamte kinetische Energie in diesem einen Stoß verlieren. Die Energieverluste, die ein Elektron in diesem Bereich erfährt, dürfen also nicht als kontinuierlich aufgefasst werden, da diese einen wesentlichen Teil ihre Energie verlieren. Andernfalls könnte die totale Kühlrate $\dot{\gamma}$, die in die Kontinuitätsgleichung eingeht und sich additiv aus den Kühlraten der einzelnen Kühlprozesse zusammensetzt, einfach um die Kühlrate der SSC–Streuung aus Gleichung 3.33 erweitert werden. Da dieser Ansatz für den gesamten Bereiche $4\epsilon\gamma \ll 1$ anwendbar ist, kann diese Herangehensweise als Näherung für die diskrete Behandlung der Streuprozesse aufgefasst werden.

Um den Kühlprozess auch im Klein–Nishina–Bereich korrekt zu behandeln, muss nicht nur ermittelt werden wieviel Energie Elektronen einer bestimmten Energie pro Zeitintervall *insgesamt* verlieren ($\hat{=}\dot{\gamma}$), sondern *wieviele Photonen einer bestimmten Energie* von den verschiedenen Elektronen erzeugt werden. Über den Zusammenhang zwischen neuer Elektronenenergie $\hat{\gamma}$, vorheriger Elektronenenergie γ und der Energie des gestreuten Photons ϵ_S ,

$$\hat{\gamma} = \gamma - \epsilon_S, \quad (5.21)$$

lässt sich aus der Streurrate der inversen Comptonstreuung für ein einzelnes Elektron aus Gleichung 3.28

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} &\simeq \frac{2\pi r_0^2 c}{\gamma^2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \Theta(1-q) \Theta\left(q - \frac{1}{4\gamma^2}\right) \\ &\times \left[2q \ln q + (1+2q)(1-q) + \frac{1}{2} \frac{(4\epsilon\gamma q)^2}{(1+4\epsilon\gamma q)} (1-q) \right], \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\text{mit } q = \frac{\epsilon_S}{4\epsilon\gamma^2 \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} \quad (5.23)$$

die Rate $C(\gamma, \hat{\gamma})$ für den Übergang $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$ bestimmen. Setzt man dazu in obige Gleichung $\epsilon_S = \gamma - \hat{\gamma}$ ein, ergibt sich zunächst

$$q = \frac{\gamma - \hat{\gamma}}{4\epsilon\gamma^2} \frac{1}{1 - \frac{\gamma - \hat{\gamma}}{\gamma}} = \frac{1}{4\epsilon} \frac{\gamma - \hat{\gamma}}{\gamma\hat{\gamma}} = \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{\hat{\gamma}} - 1\right)}_{\equiv E^*} \underbrace{\frac{1}{\epsilon\gamma}}_{\equiv 1/E} = \frac{E^*}{E},$$

$$\frac{1}{2} \frac{(4\epsilon\gamma q)^2}{1 + 4\epsilon\gamma q} = \frac{1}{2} \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{\hat{\gamma}} - 1\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \left[\left(\frac{\gamma}{\hat{\gamma}}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\hat{\gamma}} + 1 \right] = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{\gamma}{\hat{\gamma}} + \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \right]}_{\equiv r} - 1$$

$$\rightsquigarrow 1 + \frac{1}{2} \frac{(4\epsilon\gamma q)^2}{1 + 4\epsilon\gamma q} (1-q) = 1 - (1-r) \left(1 - \frac{E^*}{E}\right) = (1-r) \frac{E^*}{E} + r.$$

Mit diesen Zwischenberechnungen ergibt sich unmittelbar

$$C(\gamma, \hat{\gamma}) \equiv \int_{E^*/\gamma}^{4\gamma E^*} d\epsilon n(\epsilon) \frac{3\sigma_T c}{4E\gamma} \left[r + (2-r) \frac{E^*}{E} - 2 \left(\frac{E^*}{E}\right)^2 - \frac{2E^*}{E} \ln \frac{E}{E^*} \right], \quad (5.24)$$

wobei $r_0^2 = 3\sigma_T/8\pi$ benutzt wird. Die hier vorgestellte Notation entspricht der von Zdziarski (1988). Die Integrationsgrenzen für die Integration über ϵ ergeben sich

aus den Beschränkungen in q , die in Gleichung 5.22 durch die Heaviside-Funktionen ausgedrückt werden^c, nämlich

$$\begin{aligned}
 q > \frac{1}{4\gamma^2} &\stackrel{\epsilon_s = \gamma - \hat{\gamma}}{\implies} \frac{\gamma - \hat{\gamma}}{4\epsilon\gamma^2 \left(1 - \frac{\gamma - \hat{\gamma}}{\gamma}\right)} > \frac{1}{4\gamma^2} \\
 &\implies \epsilon < \frac{\gamma}{\hat{\gamma}} (\gamma - \hat{\gamma}) = \gamma \left[\frac{\gamma}{\hat{\gamma}} - 1 \right] = 4\gamma E^* \\
 q < 1 &\stackrel{\text{s. O.}}{\implies} \epsilon > \frac{\gamma - \hat{\gamma}}{4\gamma\hat{\gamma}} = \frac{1}{4\gamma} \left[\frac{\gamma}{\hat{\gamma}} - 1 \right] = \frac{E^*}{\gamma}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Die diskreten Verluste der differentiellen Teilchenzahl N_e für Elektronen der Energie γ ergeben sich damit als

$$-N_e(\gamma) \int_1^\gamma d\hat{\gamma} C(\gamma, \hat{\gamma}), \tag{5.26}$$

die Verluste zu allen möglichen kleineren Elektronenenergien werden also „aufintegriert“. Teilchengewinne werden durch die Kühlung von Elektronen höherer Energien zu der betrachteten Energie γ erzielt:

$$\int_\gamma^\infty d\hat{\gamma} N_e(\hat{\gamma}) C(\hat{\gamma}, \gamma). \tag{5.27}$$

Die Kontinuitätsgleichung in Gleichung 5.16 muss also um die beiden obigen Terme erweitert werden, um die Auswirkung der Kühlung durch die inverse Comptonstreuung zu berücksichtigen. Man erhält damit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_e(\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\dot{\gamma} N_e(\gamma)) + N_e(\gamma) \int_1^\gamma d\hat{\gamma} C(\gamma, \hat{\gamma}) \\
 - \int_\gamma^\infty d\hat{\gamma} N_e(\hat{\gamma}) C(\hat{\gamma}, \gamma) + \frac{N_e(\gamma)}{T_E} + \frac{N_e(\gamma)}{T_{\text{ann}}} = \dot{N}_e(\gamma).
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Mit Gleichung 5.22, bzw. 3.28, und Gleichung 3.20 ergibt sich die differentielle Streurrate \dot{n}_s des SSC-Prozesses, hier nochmal explizit angegeben:

$$\dot{n}_s = \frac{r_0^2 c}{2} \int_1^\infty d\gamma \int_0^\infty d\epsilon \frac{n_e(\gamma)}{\gamma^2} \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \Theta(1 - q) \Theta\left(q - \frac{1}{4\gamma^2}\right)$$

^cZdziarski (1988) gibt für die obere Integrationsgrenze „ ∞ “ an; somit hat er offensichtlich die Begrenzung des Gültigkeitsbereiches von Gleichung 5.22 nach unten ($q > 1/4\gamma^2$) nicht berücksichtigt.

$$\times \left[2q \ln q + (1 + 2q)(1 - q) + \frac{1}{2} \frac{(4\epsilon\gamma q)^2}{(1 + 4\epsilon\gamma q)} (1 - q) \right]. \quad (5.29)$$

Die differentielle Elektronendichte ergibt sich aus der jeweiligen Lösung $N_e(\gamma)$ durch $n_e(\gamma) = N_e(\gamma)/V$. Es wird also davon ausgegangen, dass die Dichte der Elektronen in dem Volumen V der Stoßfront näherungsweise homogen ist.

Die differentielle Targetphotonendichte $n(\epsilon)$ ergibt sich gemäß Anhang C als

$$n(\epsilon) = G(d, R) \frac{j_\epsilon}{\epsilon} \quad (5.30)$$

mit dem Faktor $G(d, R)$ aus Gleichung C.10, der den Einfluss der Geometrie auf die Elektronendichte beschreibt. Für den Emissionskoeffizienten der Synchrotronstrahlung gilt (vgl. Gleichung C.5)

$$j_\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\gamma n_e(\gamma) P_{\text{sy}}(\epsilon), \quad (5.31)$$

wobei hier für die spektrale Leistung die genäherte Form

$$P_{\text{sy}}(\epsilon) \simeq \frac{\sqrt{3}e^3 B}{m_e c^2} 1.78 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right) \quad \text{mit} \quad \epsilon_c = \frac{3eBh}{4\pi m_e^2 c^3 \gamma^2}, \quad (5.32)$$

wie sie von Wallis (1959) eingeführt wurde, benutzt werden soll, um den numerischen Rechenaufwand zu verringern. Eine ausführliche Beschreibung der einzelnen Schritte zur Bestimmung der spektralen Targetphotonendichte findet sich in Anhang C.

Mit dem so gewonnenen Emissionskoeffizienten der Synchrotronstrahlung wird, außer der spektralen Dichte der Targetphotonen, die zur Berechnung der differentiellen Streurrate nötig ist, gemäß Gleichung 3.40 auch der Strahlungsfluss der Synchrotronkomponente im Multifrequenzspektrum der relativistischen Stoßfront ermittelt. Ebenso wird aus der differentiellen Streurrate, die in einfachem Zusammenhang zum Emissionskoeffizienten steht (siehe Gleichung 3.43), das Spektrum der SSC-Strahlung bestimmt.

Ohne eingehende Diskussion wird noch das Bremsstrahlungs- und Annihilationsspektrum der relativistischen Stoßfront von Pohl & Schlickeiser (2000) übernommen. Das Spektrum der Bremsstrahlung der Elektronenverteilung ergibt sich aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses; der Wirkungsquerschnitt berechnet sich im relativistischen Grenzfall gemäß (Blumenthal & Gould, 1970) zu

$$\left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\text{BS}} = \frac{2\alpha r_0^2}{\epsilon} \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \frac{\epsilon}{\gamma} + \frac{\epsilon^2}{\gamma^2} \right] \left[2 \ln \left[2\gamma \left(\frac{\gamma}{\epsilon} - 1 \right) \right] - 1 \right], \quad (5.33)$$

wobei α die Feinstrukturkonstante ist. Das Annihilationsspektrum erhält man aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt (Jauch & Rohrlich, 1976)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\text{ANN}} = \frac{\pi r_0^2}{\beta^2 \gamma^2} \left[\frac{\epsilon}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon} + \frac{2(1 + \gamma)}{\epsilon_1 \epsilon} - \left(\frac{1 + \gamma}{\epsilon_1 \epsilon} \right)^2 \right] \quad (5.34)$$

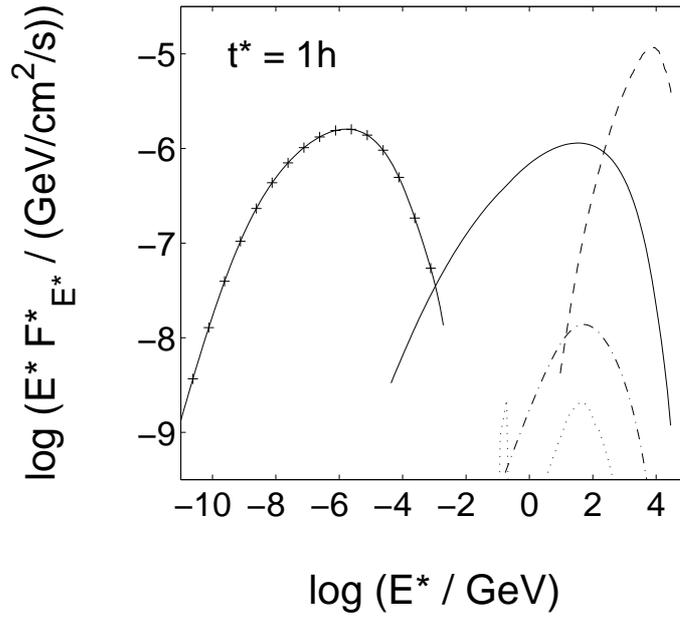


Abbildung 5.2: Ein Beispiel für ein Multifrequenzspektrum eines AGN, wie es durch das Modell der relativistischen Stoßfront vorhergesagt und im weiteren Verlauf ausführlich diskutiert wird. Aufgetragen ist in einer doppellogarithmischen Darstellung das $E^* F_{E^*}^*$ -Spektrum in $\text{GeV}/\text{cm}^2/\text{s}$ gegen die Strahlungsenergie E^* in GeV. Die durchgezogene Linie zeigt die SSC-Komponente der Strahlung. Das Synchrotronspektrum ist als durchgezogene Linie mit Kreuzen dargestellt; das Spektrum des π^0 -Zerfalls als gestrichelte Linie. Brems- und Annihilationstrahlung sind als Strich-Punkt-, bzw. punktierte Linie eingezeichnet. In der linken oberen Ecke ist die Zeit vermerkt, die seit dem Startzeitpunkt bei $t^* = 0$ für einen Beobachter auf der Erde vergangen wäre. Wenn nicht anders vermerkt, befindet sich die Strahlungsquelle in einer Luminositätsdistanz von $d_L = 2.19 \text{ Gpc}$ und bewegt sich mit einem anfänglichen Lorentzfaktor von $\Gamma_0 \equiv \Gamma(t^* = 0) = 300$ auf den Beobachter zu; der Beobachtungswinkel, sowie die übrigen Parameter, sind in den jeweiligen Erläuterungen der Abbildungen angegeben.

mit

$$\epsilon + \epsilon_1 = 1 + \gamma \quad \text{und} \quad \frac{1}{\gamma(1 + \beta)} \leq \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \leq \gamma(1 + \beta), \quad (5.35)$$

wobei ϵ und ϵ_1 die Energien der entstehenden Photonen bezeichnen.

5.4 Darstellung der Ergebnisse

Mit den Berechnungen und Überlegungen der vorangegangenen (Unter-)Kapitel lässt sich die zeitliche Entwicklung eines AGN mittels des Modells der relativistischen Stoßfront modellieren. Die Dynamik der Stoßfront selbst ist durch die Impulsaufnahme (Gleichung 5.4) und der damit verbundenen Verlangsamung bzw. Verkleinerung des Lorentzfaktors Γ beschrieben. Die Quellfunktion \dot{N}_p der aufgenommenen Protonen wird durch den aktuellen Lorentzfaktor und die externe Dichte bestimmt, wobei sich

aus der Kontinuitätsgleichung (Gleichung 5.8), unter Berücksichtigung der verschiedenen Kühlprozesse, die aktuelle Population der relativistischen Protonen, und damit der Emissionskoeffizient des π^0 -Zerfalls und die Quellfunktion sekundärer Elektronen, ergeben. Die Quellfunktion geht mit den verschiedenen Verlustprozessen in die Kontinuitätsgleichung der Elektronen ein (Gleichung 5.16). Aus der sich ergebenden Elektronenverteilung werden die Spektren der verschiedenen Strahlungsprozesse, also im Wesentlichen Synchrotron- und SSC-Strahlung, sowie Brems- und Annihilationsstrahlung, bestimmt.

In Abbildung 5.2 ist das Multifrequenzspektrum eines AGN, wie es durch das Modell der relativistischen Stoßfront vorhergesagt wird, dargestellt. Hier soll zunächst die Notation der im weiteren Verlauf vorgestellten Spektren erläutert werden: Als Abszisse ist die Energie der Photonen im Beobachtersystem in GeV aufgetragen^d. Zur Umrechnung muss die normierte Energie der Photonen ϵ_S bzw. ϵ mit der Elektronenruheenergie $m_e c^2 \simeq 5.11 \cdot 10^{-4}$ GeV multipliziert werden.

Auf der Ordinate ist der Fluss als $E^* F_{E^*}$ -Spektrum aufgetragen (vgl. Abschnitt 3.5). Aufgrund des relativistischen Beamings ist die Lage des Spektrums im Energieraum, sowie die erzielte Intensität, trotz der Isotropie der Quelle im Laborsystem stark winkelabhängig und für kleine Winkel, sowohl in der Intensität als auch in der Energie, um ein Vielfaches verstärkt. Dem entgegen wirkt die kosmische Rotverschiebung, deren Effekt gegenüber der Variation durch die relativistische Bewegung der Quelle vergleichsweise klein ist^e.

Die durch den SSC-Prozess erzeugte Strahlung ist in Abbildung 5.2 als durchgezogene Linie eingetragen; das Spektrum der als Targetphotonen für die inverse Comptonstreuung dienenden Synchrotronphotonen ist als durchgezogene Linie mit Kreuzen dargestellt. Außerdem sind die π^0 -, Brems- und Annihilationsstrahlungsspektren als gestrichelte, strichpunktierte bzw. punktierte Linie eingetragen. Die Zeit zu der das dargestellte Spektrum im Beobachtersystem seit dem Start der numerischen Berechnung beobachtet werden könnte, ist in der linken oberen Hälfte vermerkt.

Die Stoßfront tritt für einen Beobachter erst dann in Erscheinung, wenn sie auf externe Materie trifft, wenn sie also einen Bereich mit $n_i^* \neq 0$ erreicht. Faktisch ist das im interstellaren Raum stets der Fall; extrem kleine Dichten können allerdings unter Umständen vernachlässigt werden. Betrachtet man also die zeitliche Entwicklung der relativistischen Stoßfront ab einem Zeitpunkt $t^* = 0$, zu dem sie in ein Gebiet der Dichte n_i^* läuft, ist die zeitliche Entwicklung des Multifrequenzspektrums vollkommen durch die Parameter der Anfangskonstellation bestimmt. Diese sind die Anfangswerte des Lorentzfaktors Γ_0 und der inneren Dichte der Stoßfront n_b , sowie die als konstant angenommenen Werte für die Dicke d , den Radius R , das Magnetfeld B , sowie die Dichte n_i^* des interstellaren Mediums.

^dZu Veranschaulichung: $1 \text{ GeV} \simeq 1.241 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$; das sichtbare Licht liegt in etwa bei $500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$; der Bereich der GeV Strahlung liegt also bei $\sim 4 \cdot 10^8$ -fach höheren Energien.

^eDies gilt natürlich nur für Beobachtungswinkel bei denen $D \gg 1$ (oder auch $D \ll 1$!); ersteres ist für die hier betrachteten Fälle mit $\Theta_S^* < 5^\circ$ und $\Gamma \gg 1$ stets der Fall.

Für den Verlauf der Dichte des interstellaren Mediums n_i^* sind verschiedene Szenarien denkbar. Die Dichte des interstellaren Mediums ist großen räumlichen Schwankungen unterlegen; somit bietet sich die externe Dichte n_i^* an, für eine zusätzliche zeitliche Variation verantwortlich zu sein. Im Wesentlichen gibt es zwei verschiedene Vorgaben für das Dichteprofil des interstellaren Raumes: *Erstens* kann sich die Stoßfront durch einen homogen ausgefüllten Raum bewegen; eine zeitliche Variation ergibt sich dann aus dem Aufbau der Teilchenspektren und der Abbremsung der Stoßfront, und der damit verbundenen Verringerung der Energie der aufgesammelten Protonen. *Zweitens* kann die Stoßfront durch eine einzelne Wolke und anschließend durch einen quasi leeren Raum laufen; nach der Phase der Materieaufnahme bleibt der Lorentzfaktor der Stoßfront konstant, und das zeitliche Verhalten der Strahlungsspektren ist durch die Kühlprozesse der vorhandenen Protonen bestimmt.

Weitere Szenarien ergeben sich aus der Variation bzw. Kombination dieser beiden Konstellationen: So kann die Stoßfront wiederholt auf Wolken treffen; ob sich das Strahlungsverhalten wesentlich von dem einer Wiederholung des Verhaltens bei der Passage einer einzelnen Wolke unterscheidet, hängt von den Abständen und den Ausdehnungen der Wolken, sowie von deren Dichte im Verhältnis zur Dichte der relativistischen Stoßfront, ab. Des Weiteren kann die Stoßfront abwechselnd durch Gebiete hoher und niedriger Dichte laufen, es findet also eine stete, wenn auch unterschiedlich starke, Abbremsung der Stoßfront statt. Die Dichte zwischen den einzelnen Wolken wird zu einem nur leicht veränderlichen Strahlungsniveau zwischen einzelnen Strahlungsausbrüchen, die durch dichtere Wolken induziert werden, führen.

Außer der räumlichen Verteilung des externen Mediums ist die Frage der angeregten Turbulenz im Plasma der Stoßfront ein weiteres Unterscheidungskriterium für den Ablauf der Materieaufnahme. Die in den Gleichungen 5.2 und 5.3 dargestellten funktionalen Abhängigkeiten der Quellrate der Protonen sollen zunächst verglichen werden.

5.4.1 Vergleich: δ - und Heaviside-funktionförmige Quellfunktion \dot{N}_p

Der Vergleich der Multifrequenzspektren der relativistischen Stoßfront, für die zwei unterschiedlichen Quellfunktionen der Protonenverteilung, soll zunächst unter der Annahme eines homogenen interstellaren Mediums geschehen. Die Diskussion der Multifrequenzspektren im Falle einer in Wolken konzentrierten äußeren Dichte folgt weiter unten.

Die beiden turbulenz erzeugten Quellfunktionen für die Aufnahme von Protonen aus dem interstellaren Medium unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass die Anzahl an Protonen bei der höchsten Energie $\gamma_p = \Gamma$ für die Quellfunktion, die unter Berücksichtigung der elektrostatischen Turbulenz bestimmt wurde, \dot{N}_p^{ES} (Gleichung 5.3, Heaviside-funktionförmige Verteilung), gegenüber der Quellfunktion, die unter der Annahme einer rein elektromagnetischen Turbulenz ermittelt wurde, \dot{N}_p^{EM}

(Gleichung 5.2, δ -funktionförmige Verteilung), in etwa um einen Faktor Γ geringer ist; stattdessen ist der Bereich kleinerer Protonenenergien ($\gamma_p \leq \Gamma$) gleichmäßig mit derselben Anzahl von Protonen besetzt.

Dies bedeutet, dass der relativistischen Protonenverteilung N_p in der Summe weniger Energie zugeführt wird; daher steht weniger Energie für die Produktion von Pionen zur Verfügung, und als Folge davon wird weniger Energie durch π^0 -Zerfallsphotonen und in der Form von Photonen, die durch die verschiedenen Elektronen-Kühlprozesse erzeugt werden, abgestrahlt.

In Abbildung 5.3 sind die Multifrequenzspektren für die beiden Fälle und verschiedene Beobachtungszeiten dargestellt. Der modellierte AGN befindet sich in einer Luminositätsdistanz von $d_L = 2.19$ Gpc, und die relativistische Stoßfront läuft mit einem anfänglichen Lorentzfaktor von $\Gamma_0 = 300$ entlang der Jetachse unter einem Beobachtungswinkel von $\Theta_s^* = 0.1^\circ$ auf den Beobachter zu. Hier wird angenommen, dass das interstellare Medium eine homogene Dichte von $n_i^* = 0.2 \text{ cm}^{-3}$ aufweist. Der Radius und die Dicke der relativistischen Stoßfront betragen $R = 10^{14} \text{ cm}$ und $d = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}$.

Diese Werte sind in Einklang mit Größenabschätzungen, die aus der Variabilität der beobachteten AGN gewonnen werden. Einige Quellen aus der Untergruppe der *Blazare* zeigen im TeV-Bereich deutliche Variationen in der Intensität der Strahlung auf Zeitskalen von bis zu 30 min (Aharonian et al., 2003). Das Volumen, in dem die Strahlung erzeugt wird, kann somit keinen wesentlich größeren Durchmesser haben als die Lichtlaufzeit, die sich aus der Variabilitätszeitskala ergibt: Selbst ohne Kenntnis des Mechanismus des Strahlungsausbruchs und anschließenden Strahlungsabfalls ist ersichtlich, dass sich die Wirkung des Auslösers des Ausbruchs nur mit Lichtgeschwindigkeit durch das betroffene Volumen bewegen kann. Geht man davon aus, dass das Erreichen des Strahlungsmaximums im zeitlichen Verlauf im Wesentlichen dadurch bestimmt ist, dass das gesamte Volumen der Strahlungsquelle zum Strahlen angeregt wird, dass somit eine weitere Zunahme durch spezifische Eigenschaften des Strahlungsprozesses nicht gegeben ist oder vergleichsweise gering ausfällt, ergibt sich daraus eine Abschätzung der Größe der Strahlungsquelle. Berücksichtigt man zusätzlich die Transformation der Zeit $t^* = t/D$, wobei D der Dopplerfaktor aus Gleichung 3.10 ist, erhält man aus der *Variabilitätszeitskala* τ_{var} ^f für die charakteristische Länge

$$R_{\tau_{\text{var}}} = D\tau_{\text{var}}c \xrightarrow{\tau_{\text{var}}=30 \text{ min}} R_{\tau_{0,5\text{h}}} \simeq D \cdot 5.4 \cdot 10^{13} \text{ cm} . \quad (5.36)$$

Für den als Anfangswert angenommenen Lorentzfaktor von $\Gamma_0 = 300$ und $\Theta_s^* = 0.1^\circ$ ergibt sich $R_{\tau_{\text{var}}} \simeq 2.6 \cdot 10^{16} \text{ cm}$. Für kleine Beobachtungswinkel Θ_s^* relaxiert der Dopplerfaktor also die Bedingung an die Größe des Emissionsgebietes deutlich; in dem hier gewählten Beispiel beträgt er $D(\Theta_s^* = 0.1^\circ, \Gamma = 300) \simeq 471$.

Die Längenskala, die in dem Modell der relativistischen Stoßfront mit der Variabilitätszeitskala in Verbindung steht, ist die Dicke d . Die obere Grenze für die Zeit, die

^fDa die *Variabilitätszeitskala* τ_{var} im Beobachtersystem gemessen wird, wird von der Indizierung mit einem Stern abgesehen.

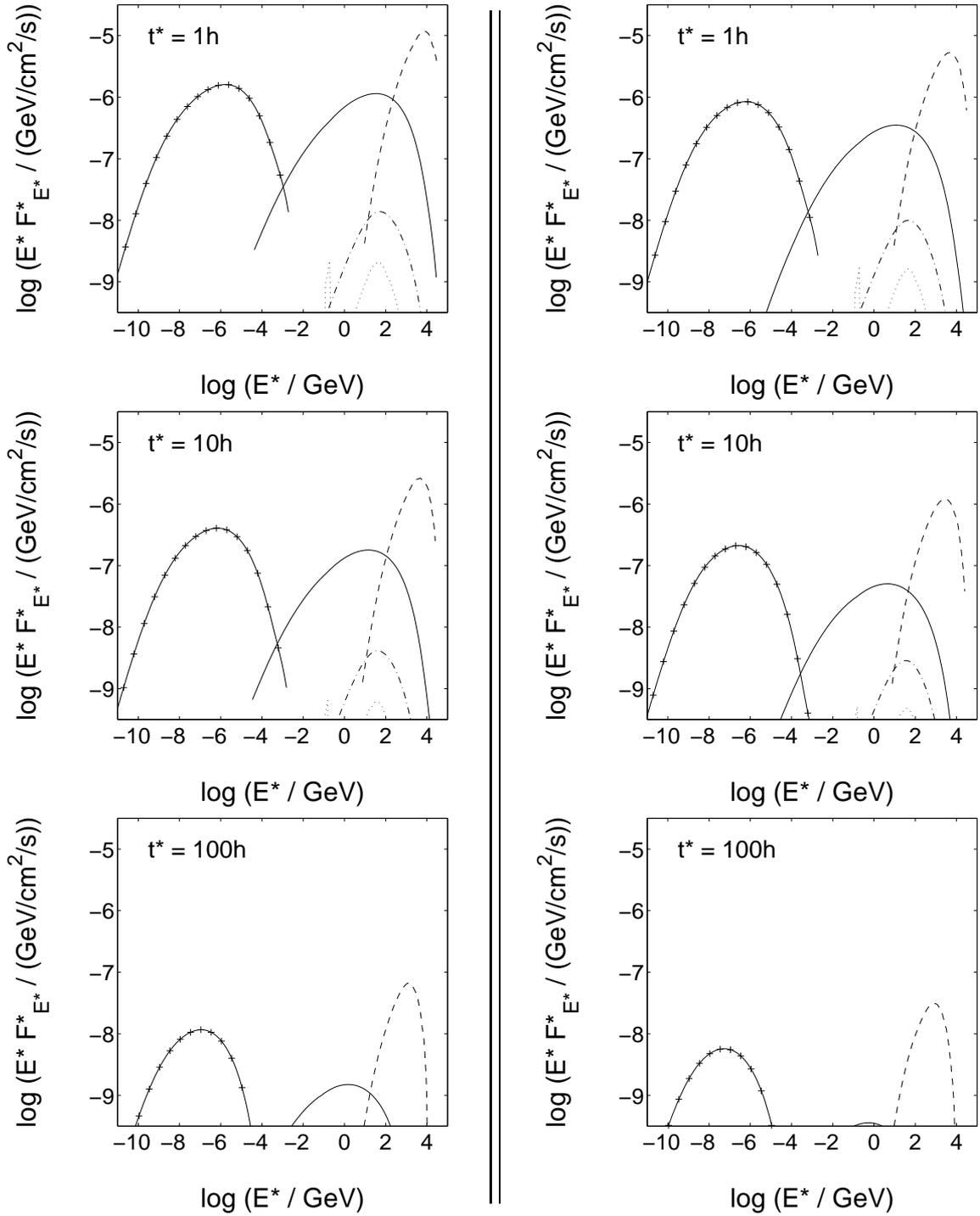


Abbildung 5.3: Das Multifrequenzspektrum eines AGN zu verschiedenen Zeitpunkten; dieselbe Notation wie in Abbildung 5.2. Der Beobachtungswinkel beträgt $\Theta_S^* = 0.1^\circ$ und die Dichte des interstellaren Mediums ist konstant $n_1^* = 0.2 \text{ cm}^{-3}$. Die weiteren Parameter sind: $R = 10^{14} \text{ cm}$, $d = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}$, $n_b = 5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$ und $B = 2 \text{ G}$. *Linke Seite:* reine elektromagnetische Instabilität. *Rechte Seite:* zusätzliche elektrostatische Instabilität.

ein Signal zur Durchquerung der Stoßfront benötigt, ist $\tau_R = R/2c$, sie steht also in Zusammenhang mit dem Radius R . Durch die Scheibengeometrie der Stoßfront trifft die „Störung“, die den Strahlungsanstieg verursacht, sprich: das Auftreffen auf die interstellare Materie, näherungsweise gleichzeitig innerhalb des Radius' R auf. Somit kann diese innerhalb von $\tau_d = d/c < \tau_R$ das gesamte Volumen der Stoßfront erfassen. Für eine sehr dünne Scheibe ($d \ll R$) kann dieser Unterschied wesentlich sein; aufgrund der Isotropieannahme für das Targetphotonenfeld im Inneren der Scheibe werden im Folgenden allerdings nur Konfigurationen mit $d \lesssim R$ betrachtet.

Die linke Spalte von Abbildung 5.3 zeigt Multifrequenzspektren für eine δ -Quellfunktion \dot{N}_p^{EM} . Für die hier gewählte Parameterkonfiguration ist die SSC-Komponente eine Stunde nach dem Beginn der Materieaufnahme, und der damit verbundenen Entstehung einer relativistischen Protonenpopulation in der Stoßfront, in etwa gleich groß wie die der Synchrotronstrahlung mit einem Maximum von $10^{-6} \text{ GeV/cm}^2/\text{s}$; das heißt, es geht in etwa gleich viel Leistung in die beiden Anteile des Spektrums. Durch das relativistische Beaming sind die Spektren stark *blauverschoben*. Das Strahlungsmaximum der Synchrotronkomponente liegt zum Zeitpunkt $t^* = 1 \text{ h}$ etwas oberhalb von 1 keV, also im Röntgenbereich; die größte Leistung des SSC-Prozesses wird knapp unterhalb von 100 GeV empfangen.

Einen deutlich höheren Maximalwert des Flusses erzielen die Photonen, die durch den Zerfall von neutralen π^0 -Pionen entstanden sind: dieser übersteigt den Fluss der beiden oben beschriebenen Komponenten in etwa um eine Größenordnung und liegt mit knapp 10 TeV noch einmal bei um zwei Größenordnungen höheren Photonenenergien als die SSC-Komponente. Die Brems- und Annihilationsstrahlung spielen eine untergeordnete Rolle.

Obwohl hier eine konstante äußere Dichte angenommen wird, erreicht das Strahlungsniveau des Spektrums nach circa einer Stunde sein Maximum und nach neun weiteren Stunden hat es sich bereits deutlich verringert. Die Ursache hierfür liegt in der Abbremsung der Stoßfront begründet. Sie wirkt sich auf zweierlei Art aus: *Zum einen* wird durch den sich verringernden Lorentzfaktor der relativistischen Stoßfront die Energie der aufgenommenen Teilchen geringer. Der Lorentzfaktor der Teilchen entspricht, für den Fall der rein elektromagnetischen Turbulenz, exakt dem der Stoßfront ($\dot{N}_p(\gamma_p) \propto \delta(\gamma_p - \Gamma)$); verlangsamt sich diese aufgrund des Impulsübertrags der aufgenommenen Materie, verringert sich ebenso die Energie der neu aufgenommenen Teilchen, die der relativistischen Population an Protonen hinzugefügt werden. Folglich steht auch den aus dieser Population erzeugten Pionen weniger Energie zur Verfügung und die Strahlung der Zerfallsprodukte nimmt entsprechend ab. *Zum anderen* verringert sich hier durch die Abnahme des Lorentzfaktors auch das relativistische Beaming (vgl. Unterkapitel 1.1), da der Dopplerfaktor $D = D(\Theta_s^*, \Gamma)$ mit abnehmendem Lorentzfaktor kleiner wird. Wie im weiteren Verlauf gezeigt wird, sind allerdings auch Kombinationen von Θ_s^* und Γ_0 möglich, bei denen der Dopplerfaktor bei der

Abnahme von Γ zunächst anwächst[§].

Nach 100 Stunden Beobachtungszeit geht das Maximum des Synchrotronspektrum um einen Faktor 100 zurück. Die Stoßfront ist auf einen Lorentzfaktor von $\Gamma \simeq 106$ heruntergebremst; entsprechend weniger Energie wird ihr pro Zeitintervall zugeführt. Der Dopplerfaktor ist auf einen Wert $D \simeq 205$ zurückgegangen. Er geht über das Transformationsverhalten der Energie $\epsilon^* = D\epsilon$ (Gleichung 3.9) und der des Flusses $F_{E^*}^* = D^3 F_E$ (Gleichung 3.39) in das $E^* F_{E^*}^*$ -Spektrum ein. Somit hat sich das relativistische Beaming des Spektrums um einen Faktor $(D(\Theta_S^*, \Gamma_0)/D(\Theta_S^*, \Gamma_{100h}))^4 \simeq 26$ verringert. Da das Maximum der Synchrotronstrahlung um mehr als zwei Größenordnungen gesunken ist, zeigt sich, dass die Abnahme des Dopplerfaktors durch den Abbremsprozess ungefähr die Hälfte der Abnahme der gemessenen Leistung der Strahlung verursacht. Ein in etwa ebenso großen Anteil an der Abnahme hat die mit der Abbremsung der Stoßfront verbundene Verringerung der Energie der aufgenommenen Teilchen. Die gleichzeitige Abnahme des Dopplerfaktors und der Energie der neu zugeführten Protonen macht sich auch bei der Energie des Strahlungsmaximums bemerkbar; die der Synchrotronstrahlung ist in etwa eine Größenordnung auf ~ 100 eV zurückgegangen, die der SSC-Komponente um etwas mehr als eine Größenordnung, auf ~ 1 GeV.

Auffällig ist, dass das SSC-Spektrum, das im Vergleich zum Synchrotronspektrum nach einer Stunde noch in etwa die gleichen $E^* F_{E^*}^*$ -Werte liefert, deutlich stärker abgenommen hat. Das Spektrum der inversen Comptonstreuung von Synchrotronphotonen ist von der Abnahme der zugeführten Energie in zweierlei Hinsicht betroffen: Die Abnahme der durch Kühlung geringer werdenden Anzahl hochenergetischer Elektronen wird, aufgrund der Abnahme der Energie der neu aufgenommenen Protonen, zunehmend weniger durch die Erzeugung geladener Pionen und deren Zerfall kompensiert. Dies macht sich sowohl in der Anzahl, als auch in der mittleren Energie der Elektronen bemerkbar; die Energie, die von den Elektronen an die Targetphotonen abgeben werden können, wird also geringer.

Darüber hinaus verringert sich mit der Abnahme der in der Elektronenverteilung vorhandenen Energie gleichfalls die Dichte der Targetphotonen. Mit der Abnahme der Energiedichte in der Verteilung der streuenden Teilchen, d.h. der Elektronen, verringert sich also auch die Energiedichte in der Verteilung der zu streuenden Teilchen, sprich: der Synchrotronphotonen. Daher ist die SSC-Komponente des Multifrequenzspektrums sensibler gegenüber Schwankungen in der Energiedichte der Elektronen als die Synchrotronkomponente; diese quadratische Abhängigkeit von der Energiedichte der Elektronen (ϵ) macht sich gleichfalls beim Anstieg der Strahlungsspektren während des Aufbaus der Elektronenverteilung bemerkbar, wie weiter unten diskutiert wird.

[§]Als dritter Punkt könnte angeführt werden, dass die Stoßfront mit abnehmender Geschwindigkeit weniger Raum durchläuft und daher weniger Materie aufsammelt. Da in den dargestellten numerischen Lösungen auch nach langen Beobachtungszeiträumen stets $\Gamma \gg 1$ gilt, ist $v \simeq c$; es wird also nur unwesentlich weniger Strecke zurückgelegt und der Effekt der Abbremsung macht sich hierbei nicht bemerkbar.

Aus der beschriebenen zweifachen Abhängigkeit der SSC-Strahlungskomponente des Multifrequenzspektrums erklären sich ebenfalls die unterschiedlichen relativen Intensitäten der SSC- und Synchrotronkomponenten in den beiden Spalten von Abbildung 5.3. Durch die Berücksichtigung der elektrostatischen Turbulenz (rechte Spalte) ist die Energieaufnahme in Form von isotropisierten Protonen des interstellaren Mediums um einen Faktor $\sim \Gamma$ reduziert, wie der Vergleich der Gleichungen 5.2 und 5.3 zeigt. Entsprechend weniger Energie steht für die Produktion von Sekundärteilchen zur Verfügung, und die daraus resultierende Verringerung der Energiedichte der relativistischen Elektronen betrifft die inverse Comptonstreuung der gleichfalls verringerten Synchrotronphotonen entsprechend stärker, wie bereits im Zusammenhang mit der zeitlichen Entwicklung der Spektren diskutiert. Daher sind die Intensitäten sämtlicher Strahlungskomponenten des Multifrequenzspektrums in der rechten Spalte von Abbildung 5.3 gegenüber der linken Spalte verringert, und die *relative* Intensität des SSC-Spektrums ist im Vergleich zu den anderen Komponenten ebenfalls geringer als in dem Beispiel der linken Spalte.

5.4.2 Der Einfluss des Beobachtungswinkels Θ_S^* .

Der entscheidende Einfluss des Beobachtungswinkels Θ_S^* auf die zeitliche Entwicklung des Multifrequenzspektrums ist in Abbildung 5.4 ersichtlich. Hier wurde ein Winkel zwischen der Jetachse und der Sichtlinie des Beobachters von $\Theta_S^* = 2^\circ$ gewählt. Darüber hinaus wurde eine Stoßfront größeren Volumens betrachtet und eine höhere äußere Dichte, im Wesentlichen um im Beobachtersystem vergleichbare Flusswerte zu Abbildung 5.3 zu erhalten. Die genauen Werte sind in der Beschreibung von Abbildung 5.4 angegeben.

Als wesentliches Merkmal fällt auf, dass das Spektrum über den gesamten Beobachtungszeitraum ansteigt und dieser mit 1000 Stunden eine Größenordnung länger ist als in dem Beispiel zuvor. Außerdem liegen die Maxima der Strahlungskomponenten bei deutlich kleineren Energien. In der unteren Figur der Abbildung 5.4, nach einer Zeit im Beobachtersystem von $t^* = 1000$ h, erreichen die Spektren ihren Maximalwert; die zeitliche Entwicklung ist also um einen Faktor 1000 langsamer als in der Situation, die in Abbildung 5.3 dargestellt ist. Die deutlich langsamere Entwicklung des Spektrums liegt hauptsächlich in der Transformationseigenschaft der Zeit begründet. Die Zeit im Beobachtersystem berechnet sich mit dem Inversen des Dopplerfaktors, also

$$t^* = \frac{t}{D}. \quad (5.37)$$

Da der Dopplerfaktor für den hier gewählten Beobachtungswinkel Θ_S^* wesentlich kleiner ist, nämlich $D(\Gamma_0 = 300, \Theta_S^* = 2^\circ) \simeq 5.4$, scheint die Entwicklung der Stoßfront für einen Beobachter langsamer abzulaufen. Zum Zeitpunkt $t^* = 0$ entsprechen 5,4 s im Laborsystem 1 s auf der Beobachtungszeitskala; im vorherigen Beispiel der Beobachtung unter einem Winkel von $\Theta_S^* = 0.1^\circ$ hingegen, ergeben zu Beginn 471 s

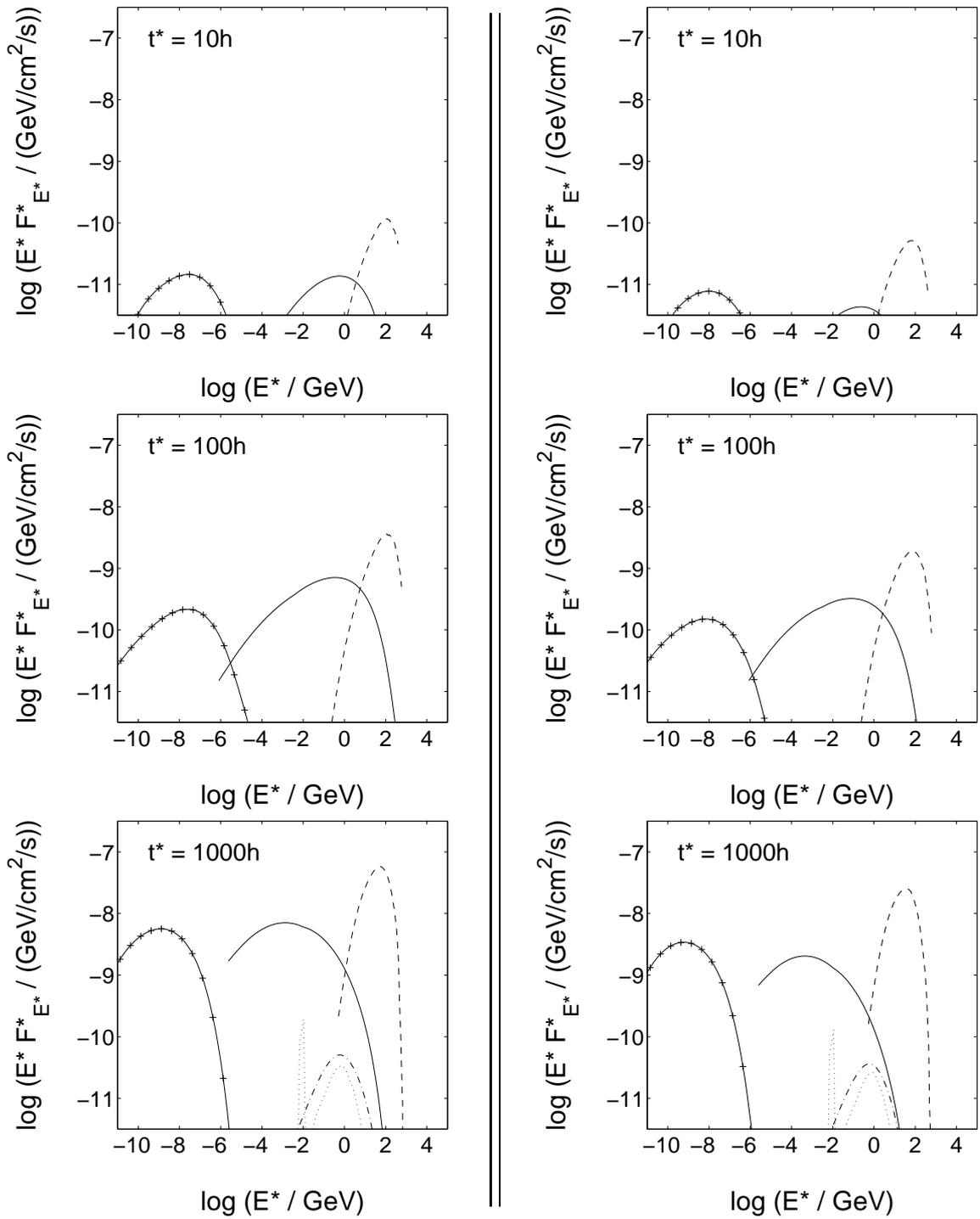


Abbildung 5.4: Das Multifrequenzspektrum eines AGN zu verschiedenen Zeitpunkten; dieselbe Notation wie in Abbildung 5.2. Hier beträgt der Beobachtungswinkel $\Theta_S^* = 2^\circ$, und die konstante Dichte des interstellare Mediums ist $n_1^* = 1.5 \text{ cm}^{-3}$. Die weiteren Parameter sind: $R = 2 \cdot 10^{15} \text{ cm}$, $d = 10^{15} \text{ cm}$, $n_b = 10^8 \text{ cm}^{-3}$ und $B = 2 \text{ G}$. *Linke Seite:* reine elektromagnetische Instabilität. *Rechte Seite:* zusätzliche elektrostatische Instabilität.

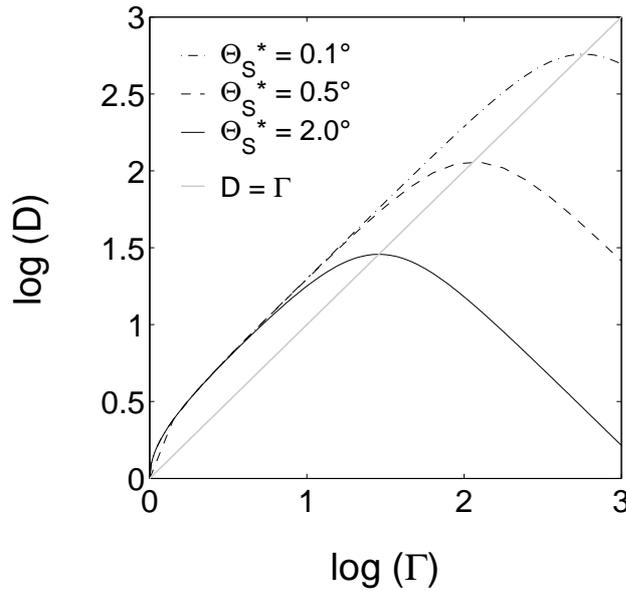


Abbildung 5.5: Der Dopplereffektor D als Funktion des Lorentzfaktors Γ für verschiedene Beobachtungswinkel Θ_S^* . Die Funktion $D(\Gamma, \Theta_S^*)$ hat ein Maximum bei $\Gamma^{\max} = (1 - \mu_S^{*2})^{-1/2}$ und $D(\Gamma^{\max}, \Theta_S^*) = \Gamma^{\max}$ (siehe Gleichung 5.39); dies ist durch die graue Linie angedeutet. Die Bedingung $\Gamma = \Gamma^{\max}$ ist gleichbedeutend mit $B_\Gamma = B_\Gamma^{\max} = \mu_S^*$.

im Laborsystem 1 s im Beobachtersystem. Der geringere Dopplereffektor für $\Theta_S^* = 2^\circ$ führt also gegenüber einem Beobachtungswinkel von $\Theta_S^* = 0.1^\circ$ zu einer um einen Faktor ~ 87 geringeren Verkürzung der Zeitskala. Des Weiteren führen die größeren Werte von d und R zu einer deutlich vergrößerten Gesamtmasse der Stoßfront; dementsprechend wird diese durch die Materieaufnahme weniger stark abgebremst und die Abnahme der Energieaufnahme ist verlangsamt. Aufgrund der größeren Dicke der Stoßfront ist darüber hinaus der Verlust durch diffusives Entweichen geringer (vgl. Gleichung 5.18).

Ferner ist das Multifrequenzspektrum aufgrund des wesentlich kleineren Dopplereffektors weniger stark *blauverschoben*; daher liegen die Maxima der Strahlungskomponenten bei kleineren Energiewerten; so liegt beispielsweise das Maximum der SSC-Komponente in Abbildung 5.4 zum Zeitpunkt $t^* = 10$ h etwas unterhalb von 1 GeV.

Betrachtet man den Dopplereffektor D als Funktion des Lorentzfaktors Γ , so ergibt sich mit der Definition von D aus Gleichung 3.10 und Γ aus Gleichung 3.8

$$\begin{aligned}
 D &= [\Gamma(1 - B_\Gamma \mu_S^*)]^{-1}, \quad B_\Gamma = \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{\Gamma} \\
 \Rightarrow D &= [\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \mu_S^*]^{-1} \Rightarrow \frac{dD}{d\Gamma} = \frac{\Gamma \mu_S^* - \sqrt{\Gamma^2 - 1}}{\sqrt{\Gamma^2 - 1} [\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \mu_S^*]^2} \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow \Gamma^{\max} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_S^{*2}}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{B_\Gamma^{\max} = \mu_S^*} \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_{\Theta_S^*}^{\max} \equiv D(\Gamma^{\max}, \Theta_S^*) = \Gamma^{\max}. \quad (5.39)$$

Der Verlauf des Dopplereffektors D als Funktion des Lorentzfaktors Γ ist in Abbildung 5.5 für verschiedene Beobachtungswinkel dargestellt. Die graue Linie deutet an, dass

sich für den maximalen Dopplerfaktor bei Γ^{\max} gerade $D(\Gamma^{\max}, \Theta_S^*) = \Gamma^{\max}$ ergibt. Der Wert Γ^{\max} wird erreicht wenn $B_\Gamma = B_\Gamma^{\max} = \mu_S^*$ (siehe Gleichung 5.38). Gilt zum Zeitpunkt $t^* = 0$ die Beziehung $B_\Gamma > \mu_S^*$, ist der anfängliche Lorentzfaktor der Stoßfront Γ_0 in Abbildung 5.5 in dem Wertebereich $\Gamma > \Gamma^{\max}$. Bei Werten des Lorentzfaktors die „oberhalb“ des Maximalwertes liegen führt das Abbremsen der Stoßfront also dazu, dass sich das aktuelle $\Gamma(t)$ auf den Wert Γ^{\max} zubewegt; die Verlangsamung der Stoßfront führt somit zu einem *Ansteigen* des Dopplerfaktors und damit zur Verstärkung des relativistischen Beamings.

Während in dem Beispiel von Abbildung 5.3 die Abbremsung der Stoßfront sowohl den Dopplerfaktor, als auch die Quellrate der aufgenommenen Protonen verringert, was beides zu einer Abnahme der messbaren Strahlungsflüsse führt, ergeben sich für das Beispiel in Abbildung 5.4 gegenläufige Effekte: Zum einen wird durch die Verringerung der Geschwindigkeit der Stoßfront ebenfalls die Quellrate \dot{N} , und somit die den Strahlungsprozessen zur Verfügung stehende Energie verringert. Zum anderen vergrößert sich der Dopplerfaktor bis zu seinem Maximalwert

$$D_{2^\circ}^{\max} \simeq 28.7. \quad (5.40)$$

Dies führt zu einer veränderten Zeittransformation, vor allem aber zu einem wesentlich stärkeren relativistischen Beaming, da sich $E^* F_{E^*} \propto D^4$ (s. o.) um einen Faktor ~ 800 vergrößert. Während also im Laborsystem die Flüsse aufgrund der verringerten Energieaufnahme der Stoßfront bereits zurückgehen, steigen die gemessenen Spektren aufgrund der Zunahme des Dopplerfaktors noch an. Diese gegenläufigen Abhängigkeiten führen zu einer scheinbaren Verlangsamung der zeitlichen Entwicklung der Strahlungsquelle. Im Vergleich dazu stellt sich in Abbildung 5.3 für $\Theta_S^* = 0.1^\circ$ die Situation genau entgegengesetzt dar. Da hier $B_\Gamma < \mu_S^*$ gilt, führt die rapide Abnahme der vierten Potenz des Dopplerfaktors mit der Verringerung der Geschwindigkeit der Stoßfront zu einer Abnahme des gemessenen Flusses, noch bevor das Flussmaximum im Laborsystem erreicht wird.

Zur weiteren Verdeutlichung zeigt Abbildung 5.6 das Multifrequenzspektrum aus Abbildung 5.4 (unterste Zeile rechts), wie es sich für einen Beobachter in einem Beobachtungswinkel von $\Theta_S^* = 0.1^\circ$ darstellt; d.h. es zeigt das Multifrequenzspektrum, das zum selben Zeitpunkt im Laborsystem emittiert wird. Die spektrale Form der einzelnen Spektren und ihr Verhältnis zueinander wird durch die Transformation mit den unterschiedlichen Dopplerfaktoren nicht tangiert, wohl aber die Intensität und die Lage auf der Energieskala: Die Strahlung einer Stoßfront, die *im Laborsystem* zum selben Zeitpunkt t emittiert wird, misst ein Beobachter in einem kleinen Beobachtungswinkel also bei größeren Flüssen mit Maxima bei höheren Energien. Aufgrund der ebenfalls unterschiedlichen Zeittransformation ist seit dem Beginn der Beobachtung bei $t^* = 0$ mit $t^* \approx 140h$ deutlich weniger Zeit vergangen als für den Beobachter bei $\Theta_S^* = 2^\circ$.

Eine weitere interessante Eigenschaft der Spektren unter einem Beobachtungswinkel, der das Ansteigen des relativistischen Beamings gewährleistet, ist in Abbildung

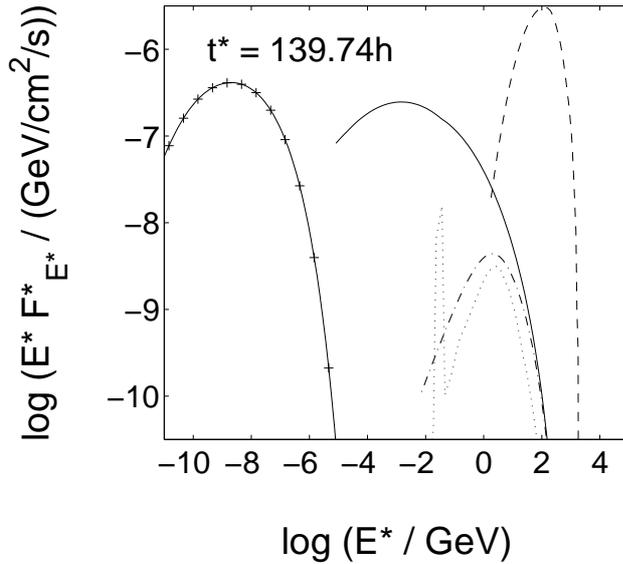


Abbildung 5.6: Dieselbe physikalische Situation wie in der Figur rechts unten in Abbildung 5.4, hier für einen Beobachter mit $\Theta_s^* = 0.1^\circ$. Die spektrale Form der Spektren bleibt erhalten. Der größere Dopplerfaktor vergrößert die gemessenen Intensitäten und verschiebt das Spektrum zu höheren Energien; die Zeitspanne seit dem Beobachtungsbeginn bei $t^* = 0$ ist deutlich verkürzt.

5.4 bei $t^* = 1000$ h zu erkennen. Obwohl die gemessene Intensität gegenüber der Situation bei $t^* = 100$ h zugenommen hat, ist das Maximum zu niedrigeren Energien „gewandert“, und das Gefälle der hochenergetischen Flanke des Spektrums ist deutlich geringer. Das Flussmaximum, das zu diesem Zeitpunkt in etwa erreicht ist, geht einher mit dem Erreichen des maximalen Beamings, also für einen Winkel von $\Theta_s^* = 2^\circ$ mit dem Erreichen eines Lorentzfaktors von ~ 30 . Die zu diesem Zeitpunkt aufgenommenen Protonen besitzen also nur noch 10% der Energie der anfänglich zugeführten Protonen; gleichzeitig sind hochenergetische Protonen vorhanden, die noch nicht zu kleineren Energien gekühlt wurden. Daraus ergibt sich eine Protonenverteilung, deren Maximum durch die Kühlung und die neu aufgenommenen niederenergetischeren Protonen bei kleineren Energien liegt und eine prominente hochenergetische Flanke aufweist. Entsprechend wird eine Elektronenverteilung generiert, deren maximale Energiedichte bei kleineren Energiewerten liegt, als beispielsweise zum Zeitpunkt $t^* = 10$ h; es werden aber ebenfalls hochenergetische Elektronen erzeugt, wie in dem Spektrum des SSC-Prozesses abzulesen ist. Da die relativistische Verstärkung zu dieser späten Phase der Entwicklung der Stoßfront ihr Maximum erreicht, ist die interne Entwicklung des Teilchenspektrums im zeitlichen Maximum des Strahlungsspektrums beobachtbar^h. Die Tatsache, dass dieser Effekt bei der Synchrotronkomponente weit weniger deutlich zu erkennen ist, weist darauf hin, dass der SSC-Prozess nicht nur stärker auf Änderungen der Energiedichte, sondern auch auf Änderungen der spektralen Form der Elektronenverteilung reagiert.

^hWie in Abbildung 5.6 zu erkennen und in der Diskussion erwähnt, ist die spektrale Form der SSC-Komponente unter einem Beobachtungswinkel von $\Theta_s^* = 0.1^\circ$ identisch, ebenso die beschriebenen Gründe für ihr Erscheinungsbild. Da in diesem Fall der Dopplerfaktor kontinuierlich abnimmt, geschieht die beschriebene Entwicklung des Spektrums allerdings bei Flüssen, die circa einen Faktor 100 unter den Maximalwerten liegen, die hier kurz nach dem Beginn der Simulation erreicht werden (vgl. Abbildung 5.3).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass für kleine Beobachtungswinkel die zeitlichen Abläufe in der Stoßfront von einem Beobachter, durch das Transformationsverhalten der Zeit, stark verkürzt wahrgenommen werden.

Ist $B_\Gamma < \mu_S^*$ lässt die Abnahme des Dopplerfaktors im Zuge der Abbremsung der Stoßfront die beobachteten Flüsse schnell abnehmen und die zeitliche Entwicklung der Quelle insofern zusätzlich verkürzt erscheinen.

Für $B_\Gamma > \mu_S^*$ sorgt der im Vergleich zur obigen Situation kleinere Dopplerfaktor dafür, dass die Zeit im Beobachtersystem gegenüber der Zeit im Laborsystem weniger stark verkürzt erscheint; die Zunahme des Dopplerfaktors mit geringer werdender Geschwindigkeit der Stoßfront führt zu einer Zunahme der Flüsse im Beobachtersystem und in sofern zu einer zusätzlichen Verzögerung der zeitlichen Entwicklung des Multifrequenzspektrums.

5.4.3 Ein Heaviside-funktionsförmiges Dichteprofil des interstellaren Mediums.

In den vorhergehenden Beispielen wird ein homogenes interstellares Medium angenommen; mit anderen Worten $n_i^* = \text{konst.}$ Das interstellare Medium ist zum Teil in Wolken konzentriert (z. B. Voigt, 1991), daher soll nunmehr angenommen werden, dass die relativistische Stoßfront zum Beginn der numerischen Berechnung, also zum Zeitpunkt $t^* = 0$, auf eine Wolke der Dicke d_{Wolke} trifft, die von einem Medium vernachlässigbarer Dichte umgeben ist. Das Dichteprofil des externen Mediums lässt sich somit darstellen als

$$n_i^* = \hat{n}_i^* \Theta(d_{\text{Wolke}} - x) , \quad (5.41)$$

wobei x die von der relativistischen Stoßfront durch das externe Medium zurückgelegte Strecke ist und \hat{n}_i^* die Dichte der Wolke. Da die Materie- und damit die Impulsaufnahme beim Durchlaufen einer einzelnen solchen Wolke im Verhältnis zur Gesamtmasse, bzw. zum Gesamtimpuls der Stoßfront vergleichsweise gering ist¹, findet praktisch keine Abbremsung statt. Sowohl das beobachtete Spektrum, als auch die Zeit, werden also mit einem über die Zeit konstanten Dopplerfaktor transformiert; folglich sind nach dem Durchqueren der Wolke das An- und Abswellen der Flüsse allein auf die Kühlprozesse der Verteilung der relativistischen Protonen und dem damit verbundenen Aufbau einer Population relativistischer Elektronen verknüpft.

In Abbildung 5.7 ist das Multifrequenzspektrum, das sich aus diesen Annahmen ergibt, dargestellt. Hier durchläuft die relativistische Stoßfront eine Materiewolke mit $d_{\text{Wolke}} = 5 \cdot 10^{16}$ cm. Da die Stoßfront nur vernachlässigbar abgebremst wird, und aufgrund des großen Lorentzfaktors $B_\Gamma \simeq 1$ gilt, ist die Zeit, die die Stoßfront für die Passage durch die Wolke benötigt, d_{Wolke}/c . Aufgrund der Zeitdilatation ergibt sich

¹Die Durchmesser der hier betrachteten Wolken liegen in der Größenordnung von 10^{17} cm; außerdem gilt $n_b \gg n_i$.

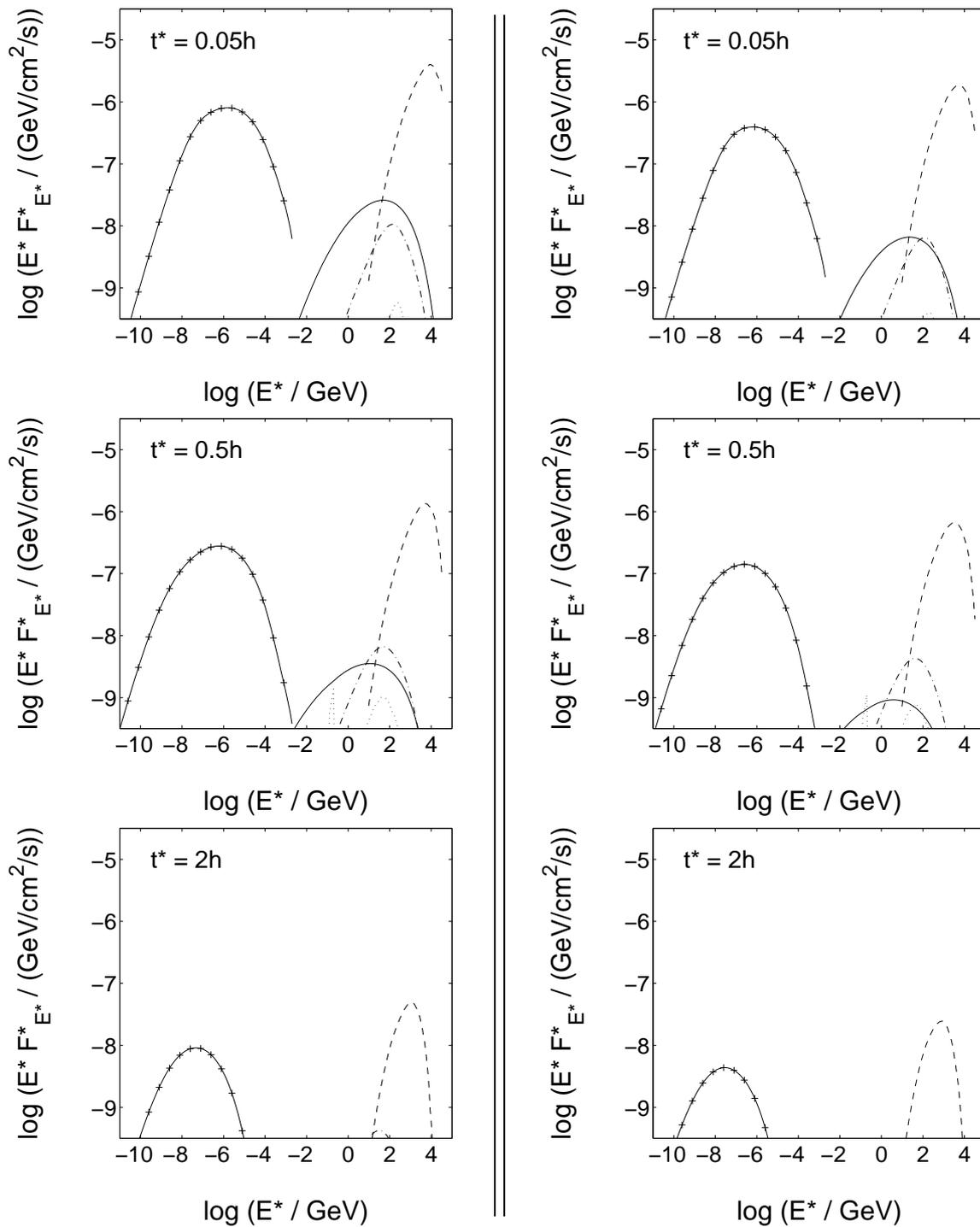


Abbildung 5.7: Das Multifrequenzspektrum eines AGN zu verschiedenen Zeitpunkten; dieselbe Notation wie in Abbildung 5.2. Die Stoßfront bewegt sich durch eine Wolke der Dicke $d_{\text{Wolke}} = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}$ und Dichte $\hat{n}_i^* = 0.2 \text{ cm}^{-3}$. Aufgrund des geringen Impulsübertrages gilt $\Gamma(t^*) \lesssim \Gamma_0 = 300$. Der Beobachtungswinkel beträgt $\Theta_s^* = 0.1^\circ$; die weiteren Parameter sind: $R = 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}$, $d = 10^{14} \text{ cm}$, $n_b = 10^9 \text{ cm}^{-3}$ und $B = 2 \text{ G}$. *Linke Seite:* reine elektromagnetische Instabilität. *Rechte Seite:* zusätzliche elektrostatische Instabilität.

im Laborsystem $t_{\text{Wolke}} = d_{\text{Wolke}}/\Gamma c$; in das Beobachtersystem transformiert, erhält man für die Zeit der Durchquerung

$$t_{\text{Wolke}}^* = \frac{d_{\text{Wolke}}}{D\Gamma c} . \quad (5.42)$$

Für Abbildung 5.7 ergibt dies $t_{\text{Wolke}}^* \simeq 12$ s.

Auch nach der Passage der Materiewolke steigt die Synchrotron- und SSC-Komponente der Strahlung zunächst noch an; die Verteilung relativistischer Protonen, die durch das Aufsammeln und die Isotropisierung der externen Materie entstanden ist, liefert durch fortwährende Proton-Proton-Stöße auch nach dem Verlassen der Wolke hochrelativistische Elektronen. Solange die Protonen noch genügend Energie besitzen, so dass ausreichend hochenergetische Elektronen produziert werden, um die Verluste durch Kühlung zu kompensieren, nimmt die Strahlungsintensität noch zu. Ist die Protonenverteilung durch diesen Energieverlust stark „heruntergekühlt“, können die Verluste der Elektronen nicht mehr durch die neu produzierten Elektronen ausgeglichen werden und das Strahlungsniveau sinkt.

In Abbildung 5.7 bei $t^* = 0.05$ h, also nach der 15-fachen Zeit, die die Stoßfront zur Durchquerung der Materiewolke benötigt, ist das Strahlungsmaximum bereits überschritten. Entsprechend nimmt die Intensität der Spektren mit zunehmender Zeit ab; bereits nach zwei Stunden ist der Fluss der Synchrotronkomponente um zwei Größenordnungen zurückgegangen. Die Maxima der Spektren liegen bei denselben Werten wie in der ersten Zeile von Abbildung 5.3: Da die Stoßfront zu diesem frühen Zeitpunkt nur wenig abgebremst ist, ergibt sich bei gleichem Beobachtungswinkel in etwa der gleiche Dopplerfaktor.

Die geringe Materieaufnahme wirkt sich vorallem auf das Verhältnis der Intensitäten der Strahlungskomponenten aus. Die Parameter sind so gewählt, dass der maximale Fluss der Synchrotronkomponente ungefähr dem aus Abbildung 5.3 entspricht, wenngleich er zu unterschiedlichen Zeiten erreicht wird. Während aber in Abbildung 5.3 die SSC-Komponente beim Erreichen des maximalen Flusses bei $t^* = 1$ h in etwa die gleiche Intensität wie die Synchrotronkomponente aufweist, ist diese in Abbildung 5.7 um mehr als eine Größenordnung geringer. Die Angleichung der Synchrotronflüsse geschieht im Wesentlichen durch die Vergrößerung des Volumens der Stoßfront um einen Faktor zehn; da das größere Volumen in etwa dieselbe gemessene Strahlungsleistung ergibt, ist die Energiedichte der Elektronen in der Stoßfront entsprechend geringer. Wie in der Diskussion von Abbildung 5.3 erörtert, ist der SSC-Prozess quadratisch von der Energiedichte der Elektronen abhängig, da diese auch über die Dichte der Synchrotronphotonen in die Berechnung des SSC-Prozesses Eingang findet; daher ist die SSC-Komponente im Multifrequenzspektrum für die hier gegebene Parameterwahl vergleichsweise schwach.

Abbildung 5.8 zeigt das Beispiel einer, für den relativen Anteil der SSC-Komponente, „günstigeren“ Wahl der Parameter. Dazu wird sowohl die Dicke der Wolke d_{Wolke} als auch ihre Dichte \hat{n}_1^* vergrößert. Auf diese Art wird die Menge der pro Volumen insgesamt aufgenommenen Materie, und somit die Energiedichte der relativisti-

schen Protonen, vergrößert und damit einhergehend die Energiedichte der sekundären Elektronen. Durch die zweifache Abhängigkeit des SSC-Prozesses von der Energiedichte der Elektronen wächst deren Strahlungsniveau quadratisch an und erreicht ein ähnliches Niveau wie das der Synchrotronkomponente. Um die Absolutwerte des Spektrums dem Beispiel aus Abbildung 5.7 anzugleichen, ist die Größe der Stoßfront verkleinert worden, so dass sich die abgestrahlte Gesamtleistung entsprechend verringert.

Die Entwicklung der Protonenpopulation wird auch in den leptonischen Spektren sichtbar. Die Protonen der höchsten Energien sind am stärksten von den verschiedenen Kühlprozessen betroffen; unmittelbar nach dem Abschluss des Aufsammlerprozesses, wenn also die Stoßfront die Materiewolke verlassen hat, werden die höchsten Energien bei der Produktion von Sekundärteilchen, und damit von Elektronen, erreicht. Die Energie, bei der das Maximum der Verteilung der neu generierten Elektronen liegt, verschiebt sich im weiteren Verlauf der Entwicklung zu kleineren Energien. Entsprechend nimmt die Gesamtverteilung der Elektronen, die aus dem durch die Kontinuitätsgleichung 5.16 beschriebenen Wechselspiel aus fortwährend erzeugten Elektronen und deren Kühlung entsteht, einen breiter werdenden Bereich in der Energie ein; die durch die Elektronen erzeugten Spektren überspannen ebenfalls einen größeren Teil des Multifrequenzspektrums. So sieht man in Abbildung 5.8, dass sowohl das Synchrotron- als auch das SSC-Spektrum nach 0.5 h deutlich gegenüber den Spektren nach 0.05 h verbreitert ist. Da nach dem Durchqueren der Wolke interstellaren Mediums keine neuen hochenergetischen Protonen zugeführt werden, verringern sich auch in diesem Fall die Flüsse des Multifrequenzspektrums deutlich schneller als in dem Fall kontinuierlicher Masseaufnahme (vgl. Abbildung 5.3). Die insgesamt aufgenommene Masse $M_{\text{tot}} = \hat{n}_i^* \pi R^2 d_{\text{Wolke}}$ ist in etwa einen Faktor ~ 8 größer als im vorhergehenden Beispiel; da das Energiereservoir der relativistischen Protonenpopulation entsprechend vergrößert ist, ist die Abnahme des Strahlungsniveaus mit der Zeit geringer als in der entsprechenden Situation in Abbildung 5.7.

Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, dass mit dem Verlassen der Materiewolke zwar die Aufnahme neuer relativistischer *Protonen* beendet, die Quellrate \dot{N}_p in der Kontinuitätsgleichung der Protonen 5.8 also identisch gleich Null ist, die Quellrate der *Elektronen* in der Kontinuitätsgleichung der Elektronen 5.16 aber keineswegs. Die bis zum Ende der Materieaufnahme aufgebaute Population an relativistischen Protonen stellt auch weiterhin ein Energiereservoir dar, aus dem durch Proton-Proton-Stöße Elektronen generiert werden. Das „Ausbleiben“ neuer Protonen macht sich erst verzögert bemerkbar, wenn nämlich die Verteilung relativistischer Protonen so stark „ausgekühlt“ ist, dass die Erzeugung sekundärer Elektronen die Strahlungsverluste der Elektronenverteilung nicht mehr kompensieren kann.

In obigem Beispiel (Abbildung 5.8) ist die kürzeste Verlustzeitskala die der inelastischen Streuung; die Zeitskala der Abbremsung der Stoßfront ist in diesem Beispiel irrelevant, da nach der Durchquerung der Wolke keine Impulsaufnahme und damit keine Abbremsung mehr stattfindet. Für die energiereichsten Protonen ($\gamma_p \simeq \Gamma_0 \gg 1$)

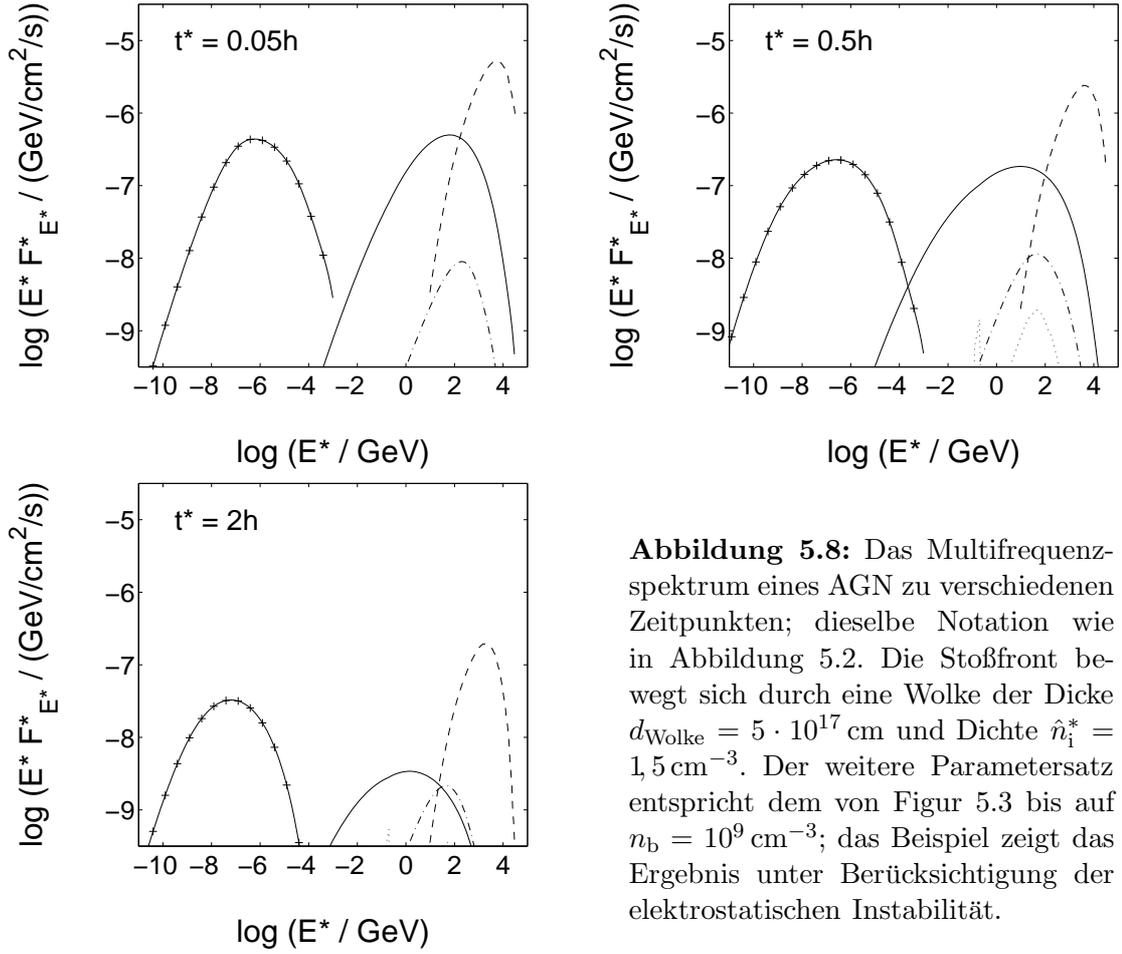


Abbildung 5.8: Das Multifrequenzspektrum eines AGN zu verschiedenen Zeitpunkten; dieselbe Notation wie in Abbildung 5.2. Die Stoßfront bewegt sich durch eine Wolke der Dicke $d_{\text{Wolke}} = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}$ und Dichte $\hat{n}_i^* = 1,5 \text{ cm}^{-3}$. Der weitere Parametersatz entspricht dem von Figur 5.3 bis auf $n_b = 10^9 \text{ cm}^{-3}$; das Beispiel zeigt das Ergebnis unter Berücksichtigung der elektrostatischen Instabilität.

lässt sich die Verlustzeitskala im Beobachtersystem mit Gleichung 5.10 näherungsweise als

$$T_{\text{inel}}^* = \frac{1}{D} \frac{\gamma_p}{\dot{\gamma}_{p,\text{inel}}} \approx 1.4 \cdot 10^7 D^{-1} n_{b,8}^{-1} \text{ s} \quad (5.43)$$

berechnen. Für Abbildung 5.8 ergibt sich $T_{\text{inel}}^* \simeq 0.8\text{h}$. Die Zeitskala für die Abbremsung der Stoßfront erhält man näherungsweise aus Gleichung 5.7, wenn man den quadratischen Term in δP und den relativistischen Anteil an der Gesamtmasse der Stoßfront vernachlässigt, sowie $\Gamma \simeq \Gamma_0 \gg 1$ ansetzt:

$$T_{\text{Brems}}^* = \frac{1}{D} \frac{\Gamma}{\dot{\Gamma}} \simeq \frac{1}{D} \frac{\Gamma}{\frac{\delta\Gamma}{\delta t}} \approx \frac{n_b d}{n_i^* c} \frac{1}{D\Gamma^2}; \quad (5.44)$$

die zeitliche Änderung $\delta\Gamma/\delta t$ des Lorentzfaktors der Stoßfront ergibt sich hierbei aus Gleichung 5.7 mit $\delta\Gamma = \hat{\Gamma} - \Gamma$. Somit ergibt sich für das Beispiel in Abbildung 5.3, bei dem sich die relativistische Stoßfront durch ein konstantes externes Medium bewegt, $T_{\text{Brems}}^* \simeq 16\text{h}$. Das unterschiedliche zeitliche Verhalten lässt sich also qualitativ aus dem Vergleich der jeweils relevanten Zeitskala verstehen.

Im Falle kontinuierlicher Materieaufnahme ergibt der Vergleich der Zeitskalen, dass die Abbremsung die langfristige zeitliche Entwicklung der Stoßfront bestimmt, dass also $T_{\text{Brems}}^* \gg T_{\text{inel}}^*$ solange wie

$$\frac{n_{b,8}^2 d_{13}}{\Gamma_{100}^2 n_{i,0}^*} \gg 4.2 \quad (5.45)$$

gilt. Andernfalls wird die Stoßfront so schnell abgebremst, dass die Kühlung des vorhandenen Protonenspektrums die interne Entwicklung bestimmt. Da in diesem Fall auch der Dopplerfaktor stark variiert, ist der Beobachtungswinkel für die zeitliche Entwicklung der Strahlungsspektren entscheidend.

5.4.4 Die Lichtkurve

Ein diagnostisches Werkzeug zur Untersuchung der Multifrequenzspektren von AGN ist die sogenannte Lichtkurve.

Messinstrumente, die in den verschiedenen Bereichen des elektromagnetischen Spektrums operieren, untersuchen stets ein ganzes Frequenzband. Zum einen ist jeder *Messpunkt* in der Energie tatsächlich durch ein *Energieintervall* realisiert. Zum anderen wird in der Regel in einer ganzen Reihe von aufeinanderfolgenden Energieintervallen gemessen und somit ein weiter Energiebereich abgedeckt, der mehrere Größenordnungen umfassen kann. Da vor allem die zeitliche Variation der Quellen, also ihre zeitliche Entwicklung, Gegenstand der Untersuchung aktiver galaktischer Kerne ist, liegt es nahe, die Entwicklung eines ganzen Frequenzbereiches als Funktion der Zeit zu betrachten. Die Darstellung des Energieflusses, oder einer vergleichbaren Größe, als Funktion der Zeit bezeichnet man als Lichtkurve.

Abbildung 5.9 zeigt die Lichtkurven eines AGN in den drei verschiedenen Energiebändern von 0.1–1 keV, 0.1–1 GeV und 0.1–10 TeV, also in typischen Messbereichen der Röntgen-, γ - und TeV-Astronomie, die durch Satelliten, bzw. erdgebundene Čerenkov-Teleskope, erschlossen werden. Hier wird zunächst der Fall betrachtet, dass die relativistische Stoßfront eine Wolke interstellaren Mediums durchquert; im Folgenden wird die elektrostatische Turbulenz stets berücksichtigt. Wie in den Abbildungen 5.7 und 5.8 gezeigt, sinkt die Leuchtkraft der Strahlungsquelle in allen Frequenzbereichen ab $t^* \gtrsim 0.2$ h, da die Passage durch die Wolke im Beobachtersystem nur 0.2 Stunden dauert und folglich in der Darstellung eines Zeitraumes von 20 Stunden nicht auflösbar ist. Der rechte Teil von Abbildung 5.9 stellt die ersten Minuten der zeitlichen Entwicklung bis zur doppelten Durchquerungszeit fokussiert dar und zeigt das Ansteigen des Strahlungsniveaus zu Beginn der Simulation. Der durch das Ende der Wolke erzeugte „Knick“ in der Lichtkurve bei $t^* = 0.2$ h ist vor allem im TeV-Regime deutlich zu erkennen.

Der unterschiedliche Verlauf der Lichtkurven bei der Variation der inneren Dichte n_b spiegelt wider, dass die Verlustprozesse, denen die relativistischen Protonen unterliegen, proportional zu n_b , bzw. im Falle der diffusiven Verluste, zur Wurzel aus

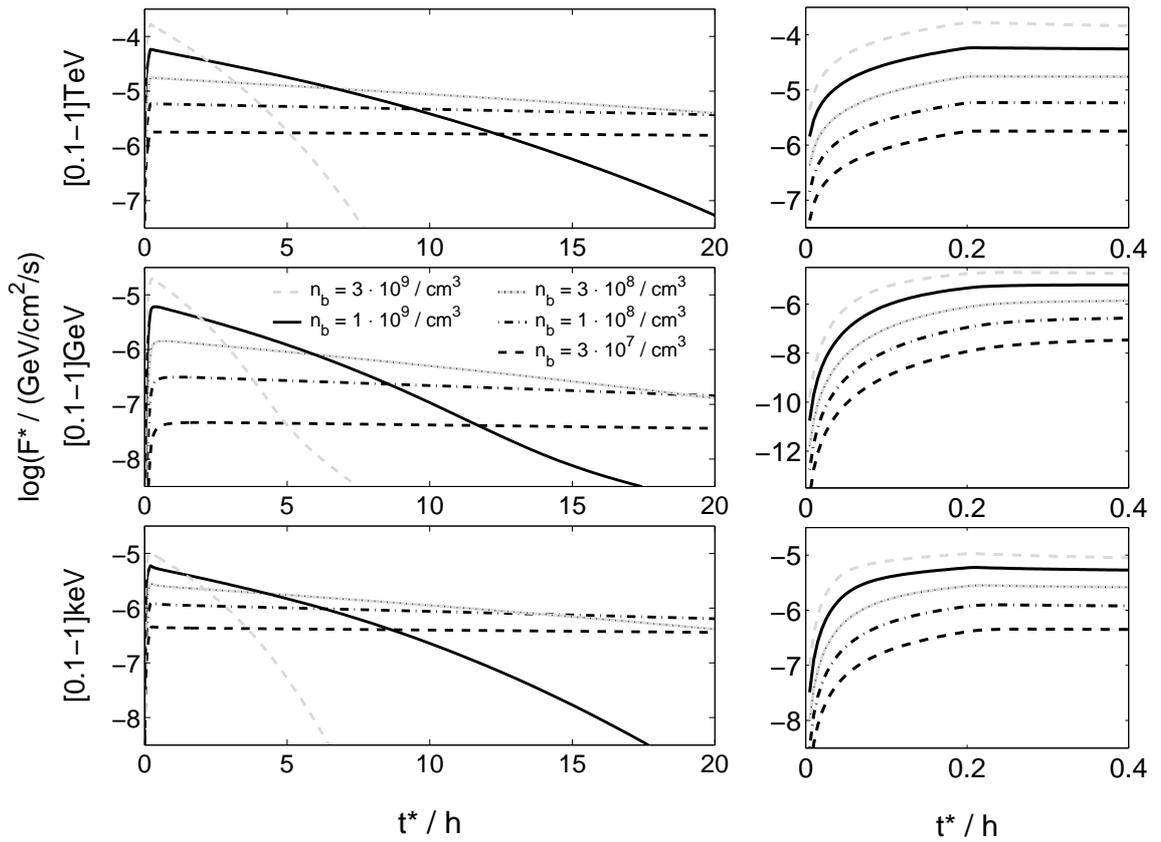


Abbildung 5.9: Die Lichtkurven eines AGN in verschiedenen Energiebändern unter Variation der inneren Dichte n_b . Die Stoßfront bewegt sich durch eine Wolke mit Durchmesser $d_{\text{Wolke}} = 5 \cdot 10^{17}$ cm und Dichte $\hat{n}_1^* = 5.0 \text{ cm}^{-3}$. Die weiteren Parameter sind $d_L = 2.19$ Gpc, $\Theta_S^* = 0.5^\circ$, $R = 3 \cdot 10^{15}$ cm, $d = 2 \cdot 10^{15}$ cm; das Beispiel zeigt das Ergebnis unter Berücksichtigung der elektrostatischen Instabilität. *Linke Spalte:* Die Lichtkurve über den Beobachtungszeitraum von 20 h. *Rechte Spalte:* Dieselbe Lichtkurve wie in der linken Spalte in einem Beobachtungszeitraum bis 0.4 h.

n_b sind (vgl. Gleichungen 5.9, 5.10, 5.12 und 5.18). Mit zunehmender innerer Dichte wird die Population relativistischer Protonen also schneller abgebaut; dementsprechend erzielen die Stoßfronten mit großer innerer Dichte zu Beginn die im Vergleich höchsten Flüsse, die sich im weiteren Verlauf am schnellsten verringern. So ist beispielsweise der Röntgenfluss einer Stoßfront mit $n_b = 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ (graue, gestrichelte Linie) nach 5 Stunden bereits um etwa drei Größenordnungen gesunken. Die Stoßfront mit der geringsten hier dargestellten Dichte von $n_b = 3 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$ (schwarze, gestrichelte Linie) weist einen deutlich geringeren maximalen Fluss auf, der sich im zeitlichen Verlauf nur sehr langsam ändert und über den hier dargestellten Zeitraum nahezu konstant bleibt. Die stärksten Änderungen der Flussmaxima, unter Variation der inneren Dichte n_b , sind im GeV-Regime zu beobachten; da hier im Wesentlichen die SSC-Strahlungskomponente eingeht, ist dieser Strahlungsbereich quadratisch von der Elektronenenergiedichte abhängig. Die Entstehungsrate der re-

lativistischen Elektronen ist von der inneren Dichte der Stoßfront abhängig; somit führen größere innere Dichten zu größeren Elektronenenergiedichten, deren Ansteigen die SSC-Strahlungskomponente quadratisch vergrößert. Da auch andere Kühlprozesse als die Verluste durch inelastische Stöße die in den relativistischen Protonen zur Verfügung stehende Energie beeinflussen, folgt die Zunahme des Strahlungsflusses nicht exakt deren Abhängigkeiten von der inneren Dichte.

Darüber hinaus gilt es zu beachten, dass, wenngleich die wesentlichen Strahlungsmechanismen in den drei gewählten Energiebändern Synchrotronstrahlung, SSC-Streuung und π^0 -Zerfall sind, sich aus ihrem Verlauf nur bedingt Rückschlüsse auf das zeitliche Verhalten des Spektrums des Strahlungsprozesses ziehen lassen:

Zum einen verändern sich mit der Zeit nicht nur die maximalen Flüsse der verschiedenen Strahlungsprozesse, sondern auch die Energie, bei der sie emittiert werden. Die zeitlichen Veränderungen in den einzelnen Energiebändern müssen also nicht die genaue zeitliche Entwicklung der Leistungsabgabe des jeweiligen Strahlungsprozesses nachzeichnen. Sie können stattdessen durch die Verschiebung des Spektrums zu größeren, bzw. kleineren, Energien, aufgrund der Entwicklung des Dopplerfaktors und der Teilchenpopulationen, modifiziert werden. Entsprechend vorsichtig gilt es gemessene Lichtkurven zu interpretieren.

Zum anderen können weitere Strahlungsprozesse wesentlich zu den Lichtkurven beitragen. In einem fortgeschrittenen Entwicklungsstadium der Stoßfront enthält die Elektronenpopulation weniger hochenergetische Elektronen und die Maxima der Synchrotron- und SSC-Strahlung sind entsprechend bei kleineren Energien zu finden. Daher kann beispielsweise die niederenergetische Flanke des SSC-Spektrums in den Röntgenbereich hineinreichen, während das Synchrotronspektrum in diesem Bereich nicht mehr dominant ist. Das SSC-Spektrum nimmt quadratisch mit der Energiedichte der Elektronenverteilung ab; ist diese auf ein Niveau abgefallen, das zu weniger SSC- als Bremsstrahlung führt, übernimmt letztere den entscheidenden Beitrag zur Lichtkurve im GeV-Bereich. Dies ist in der mittleren Figur von Abbildung 5.9 zu erkennen. Wenn der integrierte Fluss in dem Energiebereich von 0.1–1 GeV jeweils einen Wert von in etwa 10^8 GeV/cm²/s unterschreitet, weist die Lichtkurve einen Knick auf, so dass sie im weiteren Verlauf weniger stark abfällt. Dies ist auf den Beitrag der Bremsstrahlung zurückzuführen, in die die Energiedichte der Elektronenverteilung nur linear eingeht, und die daher ab diesem Strahlungsniveau die weitere Entwicklung der Lichtkurve bestimmt.

In Abbildung 5.10 sind die Lichtkurven einer relativistischen Stoßfront, die durch ein Medium konstanter Dichte läuft, in den drei bereits in der vorherigen Abbildung vorgestellten Energiebändern dargestellt; hier wird der anfängliche Lorentzfaktor der Stoßfront $\Gamma_0 \equiv \Gamma(t^* = 0)$ variiert.

Mit zunehmendem „Start“-Lorentzfaktor nimmt der im zeitlichen Verlauf maximal erreichte Fluss zu. Die Rate \dot{N}_p^{ES} , mit der die Protonen des interstellaren Mediums aufgesammelt werden, ist für $\Gamma \gg 1$ unabhängig von dem Lorentzfaktor der relativistischen Stoßfront; die maximale Energie, bei der die Protonen aufgenommen werden,

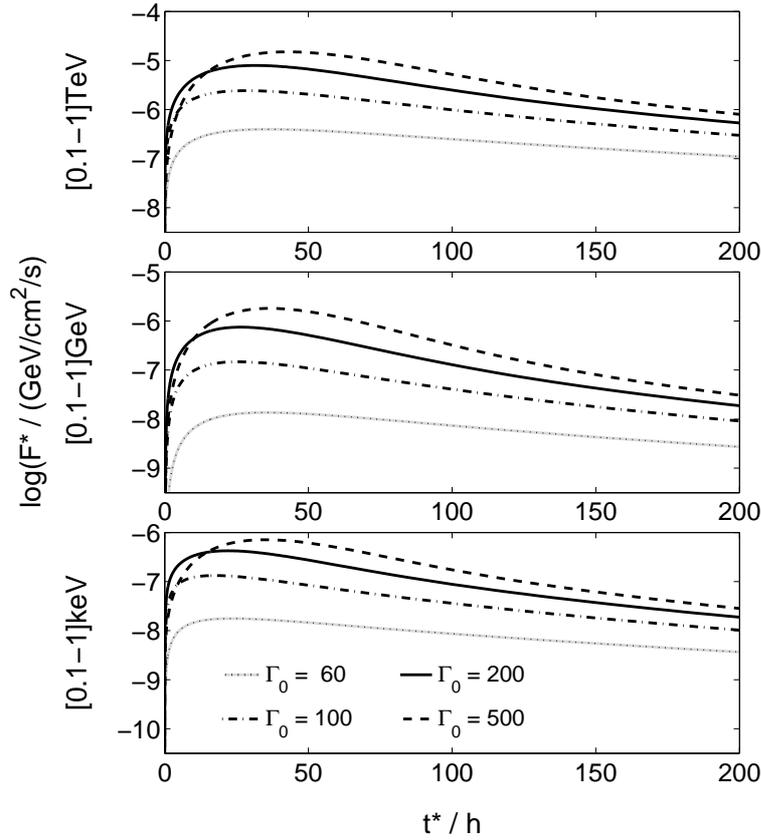


Abbildung 5.10: Die Lichtkurven eines AGN in verschiedenen Energiebändern unter Variation des anfänglichen Lorentzfaktors Γ . Die Stoßfront bewegt sich durch ein Medium konstanter Dichte $n_i^* = 1.5 \text{ cm}^{-3}$. Die weiteren Parameter sind $d_L = 2.19 \text{ Gpc}$, $\Theta_S^* = 0.5^\circ$, $R = 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}$, $d = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}$; das Beispiel zeigt das Ergebnis unter Berücksichtigung der elektrostatischen Instabilität.

nimmt jedoch zu (vgl. Gleichung 5.3), und damit ebenfalls die der Pionen-, bzw. Elektronenproduktion zur Verfügung stehende Energie. Dennoch steigt der maximale Fluss mit zunehmendem Lorentzfaktor ab einem Wert von $\Gamma_0 = 200$ nur noch vergleichsweise gering an. Für den hier gewählten Beobachtungswinkel ist die maximale Dopplerverstärkung bei einem Lorentzfaktor von $\Gamma^{\text{max}} \sim 115$ erreicht; entsprechend wird die gemessene Leuchtkraft oberhalb des Maximalwertes Γ^{max} mit zunehmendem Lorentzfaktor durch die Abnahme des Dopplereffekts verringert (vgl. Abbildung 5.5). Folgerichtig nimmt der maximale Fluss in Abbildung 5.10 in allen Energiebändern für $\Gamma > \Gamma^{\text{max}}$ schwächer zu.

Gleichzeitig ist bei größeren anfänglichen Lorentzfaktoren als $\Gamma^{\text{max}} \sim 115$ die Beobachterzeit $t^* = t/D$ gegenüber der des Laborsystems weniger stark verkürzt; durch das allmähliche Abbremsen der Stoßfront wird der Maximalwert des Dopplereffekts $D(0.5^\circ, \Gamma^{\text{max}})$ zu einem späteren Zeitpunkt durchlaufen, wodurch die zeitliche Entwicklung der Spektren langsamer erscheint.

5.4.5 Die Flussverhältnisse verschiedener Energiebänder

Eine weitere interessante Fragestellung ist, wie sich verschiedene Energiebänder im Verhältnis zueinander mit der Zeit entwickeln.

Abbildung 5.11 zeigt zwei Graphen der Flussverhältnisse

$$R_{\text{keV}}^{X\text{eV}} = \frac{F_{X\text{eV}}^*}{F_{\text{keV}}^*}, \quad (5.46)$$

wobei X für G bzw. T steht, also zwischen dem GeV- und dem keV-Intervall (linke Figur), bzw. dem TeV- und dem keV-Intervall (rechte Figur), aufgetragen gegen die Zeit. Die Intervallgrenzen sind dieselben, die bereits zur Bestimmung der Lichtkurven gewählt wurden (vgl. Beschreibung zu Abbildung 5.9), und die Parameterkonstellation ist dieselbe wie in Abbildung 5.10, d.h. es wurde der Anfangswert des Lorentzfaktors der relativistischen Stoßfront variiert. Die unterschiedlichen Linienfarben, bzw. -formen, stehen für dieselben Werte von Γ_0 wie in Abbildung 5.10.

Diese Form der Darstellung bringt einige Eigenschaften der Strahlungsintervalle zutage, die sich aus den Lichtkurven nicht unmittelbar ablesen lassen: So zeigen beide Flussverhältnisse nach dem Einlaufen der Stoßfront in das Medium mit der konstanten Dichte $n_i^* = 1.5 \text{ cm}^{-3}$ zunächst einen Anstieg; der jeweilige γ -Strahlungsbereich nimmt also relativ zu der Intensität der Röntgenstrahlung zu: Wie sich aus den Lichtkurven in Abbildung 5.10 ablesen lässt, nehmen die jeweiligen Flüsse bis $t^* < 20 \text{ h}$ in allen Energieintervallen und für alle Werte von Γ_0 ebenfalls zu; somit wird deutlich, dass der Fluss in den hochenergetischen Energieintervallen stärker anwächst als im Röntgenbereich.

Das Flussverhältnis $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ (rechte Figur von Abbildung 5.11) nimmt auch noch über den Zeitpunkt $t^* \sim 20 \text{ h}$ hinaus zu; dies liegt im Wesentlichen an der Position des Maximums der π^0 -Komponente, das am oberen Rand des TeV-Intervalls liegt. Die Abnahme des Lorentzfaktors durch die Abbremsung der Stoßfront und die damit verbundene Verringerung der Maximalenergie in der Quellrate der relativistischen Protonenverteilung, führen zu einer Verschiebung des Strahlungsmaximums, hin zu kleineren Energien. *Bei gleichbleibendem Maximalfluss* würde allein dieser Effekt zu einer Erhöhung des Gesamtflusses des Energieintervalls führen. Im Röntgenbereich liegt das Maximum der Synchrotronstrahlung *unterhalb* des Integrationsintervalls. Daher führt allein die Verschiebung des Maximums hin zu kleineren Energien zu sinkenden Gesamtflüssen. Wie aus Abbildung 5.10 entnehmbar, *sinken* die Flüsse in den beiden Energiebändern von $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ für $t^* > 20 \text{ h}$ bereits; das *Verhältnis* der beiden Energieintervalle in Abbildung 5.11 steigt hingegen, aufgrund der oben geschilderten Lage der Flussmaxima in Relation zu den Integrationsintervallen, an.

Der für

$$\Gamma_0 > \Gamma^{\text{max}} = \Gamma(B_\Gamma = \mu_S^*) \stackrel{\Theta_S^* = 0.5^\circ}{\simeq} 115 \quad (5.47)$$

gegenläufige Einfluss des Dopplerfaktors, der, solange $\Gamma > \Gamma^{\text{max}}$ ist, durch die Abbremsung größer wird, und somit das intrinsische Spektrum in der zeitlichen Ent-

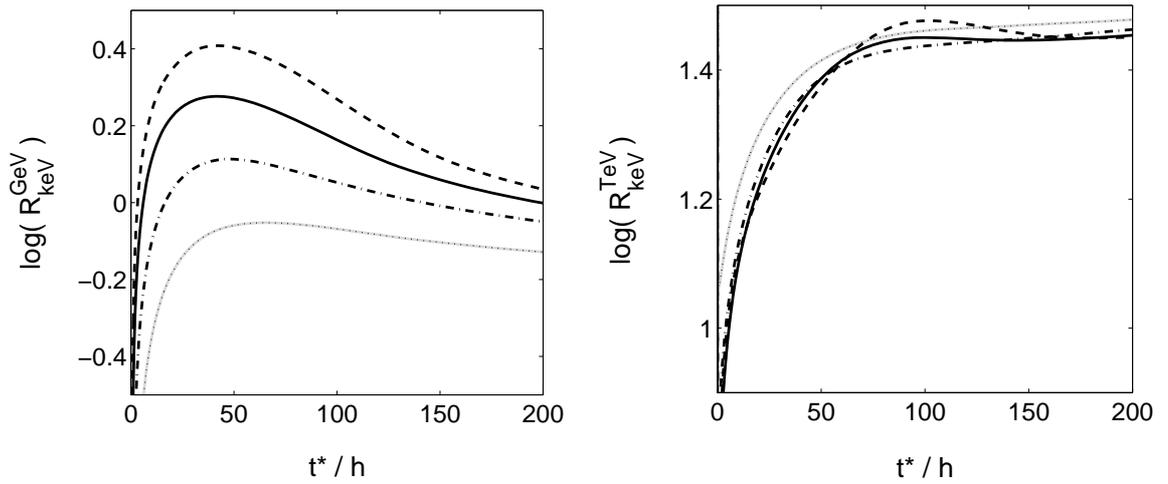


Abbildung 5.11: Die Flussverhältnisse unter Variation des Anfangswertes des Lorentzfaktors der relativistischen Stoßfront Γ_0 . *Linke Seite:* Das Verhältnis der Flüsse im GeV- und keV-Bereich $R_{\text{keV}}^{\text{GeV}}$. *Rechte Seite:* Das Verhältnis der Flüsse im TeV- und keV-Bereich $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$. Die Intervalle entsprechen denen in Abbildung 5.9 diskutierten und die unterschiedlichen Linienfarben bzw. -formen entsprechen den in Abbildung 5.10 zugeordneten Werten von Γ_0 .

wicklung zu größer werdenden Energien verschiebt, führt zur Ausprägung eines Maximums in $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$, da der oben beschriebene Effekt zeitlich verzögert wird. Für die übrigen Werte von Γ_0 nimmt das Flussverhältnis $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ monoton zu; für alle Fälle nähert es sich einem annähernd konstanten Wert unterhalb von $\log(R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}) = 1.5$, und das weitestgehend unabhängig von der Wahl des Anfangs-Lorentzfaktors.

Das Flussverhältnis $R_{\text{keV}}^{\text{GeV}}$ in der linken Figur von Abbildung 5.11 zeigt eine deutlichere Veränderlichkeit unter Variation von Γ_0 . Das Ansteigen des Flussverhältnisses über den Zeitpunkt des Ansteigens der jeweiligen Flüsse in Abbildung 5.10 hinaus geschieht aufgrund desselben Effekts, wie zuvor für das Flussverhältnis $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ beschrieben: Das Maximum der SSC-Komponente des Multifrequenzspektrums liegt in diesem Falle oberhalb des $[0.1-1]\text{GeV}$ Intervalls.

Mit zunehmendem Wert des anfänglichen Lorentzfaktors Γ_0 erhöht sich die Energiedichte der relativistischen Protonenverteilung und damit auch die Energiedichte der Elektronenpopulation. Da der SSC-Strahlungsprozess von der Energiedichte der Elektronen quadratisch abhängt, profitiert diese Strahlungskomponente wesentlich stärker von der größeren Energieaufnahme durch Erhöhung von Γ_0 als die Synchrotronkomponente. Entsprechend wird die Strahlung der relativistischen Stoßfront im Vergleich dieser Energiebereiche „härter“ bei Zunahme der Startwertes des Lorentzfaktors; für die hier gewählten Parameter erreichen die Flüsse im GeV-Bereich, für den größten Anfangswert von Γ_0 , den maximal 2.5-fachen Wert der Flüsse im Röntgenbereich.

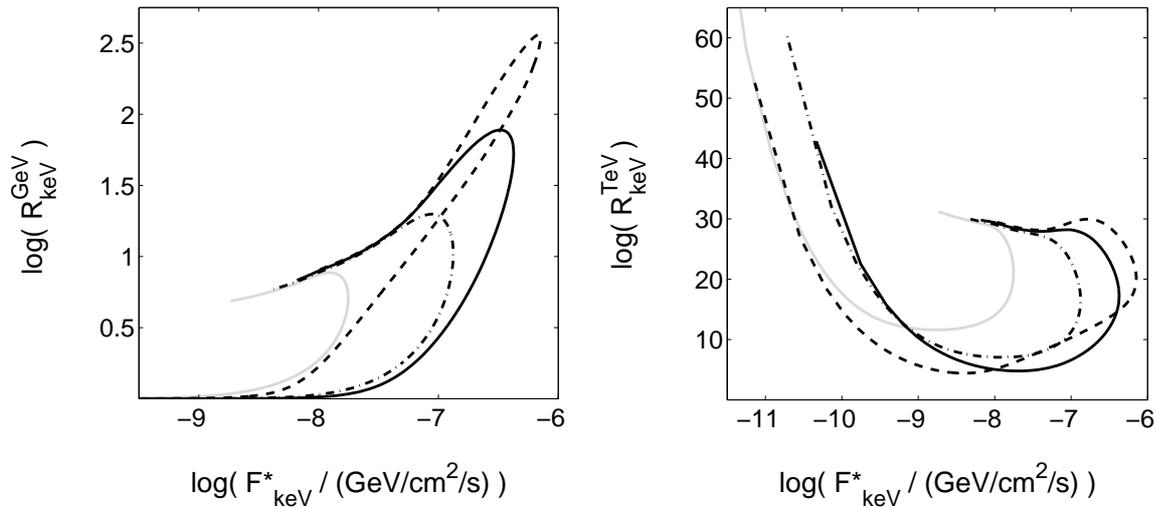


Abbildung 5.12: Die Flussverhältnisse aufgetragen gegen den Fluss unter Variation des Anfangswerts des Lorentzfaktors der relativistischen Stoßfront Γ_0 . *Linke Seite:* Das Verhältnis der Flüsse im GeV- und keV-Bereich $R_{\text{keV}}^{\text{GeV}}$. *Rechte Seite:* Das Verhältnis der Flüsse im TeV- und keV-Bereich $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$. Die Intervalle entsprechen denen in Abbildung 5.9 diskutierten und die unterschiedlichen Linienfarben, bzw. -formen, entsprechen denen in Abbildung 5.10 zugeordneten Werten von Γ_0 .

5.4.6 Die Flussverhältnisse als Funktion des Flusses

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit der Entwicklung der modellierten Spektren ist, das Flussverhältnis gegenüber dem Fluss aufzutragen. In Abbildung 5.12 sind die Flussverhältnisse $R_{\text{keV}}^{\text{GeV}}$ (linke Figur), bzw. $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ (rechte Figur), gegen den Fluss im keV-Band aufgetragen; die Farb-, bzw. Formkodierung der Linien entspricht der aus Abbildung 5.10. Die Kurven werden zeitlich gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Das Flussverhältnis $R_{\text{keV}}^{\text{GeV}}$ (linke Figur in Abbildung 5.12) steigt zunächst mit dem Röntgenfluss an. Mit zunehmendem Anfangs-Lorentzfaktor Γ_0 nehmen sowohl die maximalen, im keV-Band erreichten Flüsse, wie auch die maximal erzielten Flussverhältnisse $R_{\text{keV}}^{\text{GeV}}$, zu. Nach dem Erreichen des maximalen Röntgenflusses steigt das Flussverhältnis weiter an und die Abnahme des Strahlungsflusses im Röntgenbereich vollzieht sich auf einem höheren Niveau des GeV/keV-Flussverhältnisses, als beim Ansteigen des Röntgenflusses. Mit zunehmendem Anfangs-Lorentzfaktor verringert sich allerdings dieser Unterschied: Durch die größere Energieaufnahme bei größeren Werten von Γ_0 wird die Energiedichte der Elektronenverteilung, bei der der Fluss der SSC- den der Synchrotronstrahlung übertrifft, schneller erreicht und der „Hysterese-Bauch“ in der Entwicklung des Flussverhältnisses schwindet.

Die Darstellung des TeV/keV-Flussverhältnisses $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ in der rechten Figur von Abbildung 5.12 offenbart eine, in den vorhergehenden Abbildungen nicht zum Vorschein gekommene Eigenschaft des Spektrums: Das Flussverhältnis weist bei den kleinen, zu Beginn der numerischen Berechnung erzielten Röntgenflüssen, vergleichsweise große Werte auf; da diese auf Zeitskalen $t^* < 1$ h erzielt werden, sind sie in den

Abbildungen 5.10 und 5.11 nicht zu erkennen. Der integrierte Fluss im TeV-Bereich entsteht durch den annähernd instantanen Zerfall neutraler Pionen, die bei Proton-Proton-Stößen entstehen. Die Elektronenpopulation hingegen, die die im Röntgenbereich zu erwartenden Flüsse erzeugt, wird aus der Zerfallskette geladener Pionen generiert. Die damit verbundene Verzögerung des Aufbaus des Synchrotronspektrums sorgt für die anfänglich großen Flussverhältnisse.

Nachdem der minimale Wert von $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ durchlaufen ist, steigen die Flussverhältnisse erneut an und zwar, ähnlich zu den GeV/keV-Flussverhältnissen, auch noch nach dem Erreichen des maximalen Röntgenflusses. Wie im Zusammenhang mit Abbildung 5.11 diskutiert, erklärt sich dieses Verhalten u.a. aus der Lage der Maxima des Synchrotron- und des π^0 -Zerfallspektrums. Bei großen Werten von Γ_0 bildet das Flussverhältnis, nach dem Erreichen des maximalen Röntgenflusses, ein Maximum aus, das auch in Abbildung 5.11 sichtbar ist.

Für beide Flussverhältnisse $R_{\text{keV}}^{\text{GeV}}$ und $R_{\text{keV}}^{\text{TeV}}$ verlaufen die Kurven des Flussverhältnisses, unabhängig von der Wahl des Anfangs-Lorentzfaktors Γ_0 , in der späten Entwicklungsphase der Stoßfront annähernd gleich.

5.4.7 Die Abfolge mehrerer Wolken

Wie in der Einleitung (Kapitel 1) diskutiert, zeichnen sich AGN und insbesondere Blazare durch ein hohes Maß an Variabilität in den beobachteten Strahlungsflüssen aus; sie durchlaufen dabei Phasen geringer Aktivität, die von Phasen erhöhter Strahlungsleistung abgelöst werden. Das Modell der relativistischen Stoßfront führt zu einem solchen Verhalten, wenn das externe, interstellare Medium in einer Vielzahl von Wolken vorhanden ist.

Abbildung 5.13 zeigt ein Beispiel für das Strahlungsverhalten einer relativistischen Stoßfront bei der Passage durch eine Abfolge von Wolken. Diese haben jeweils einen Durchmesser von $d_{\text{Wolke}} = 3 \cdot 10^{17}$ cm und sind in einem konstantem Abstand $\Delta L = 100 d_{\text{Wolke}}$ zueinander angeordnet. Die Dichte der Wolken beträgt $\hat{n}_i^* = 10 \text{ cm}^{-3}$, wohingegen die Dichte zwischen den Wolken als vernachlässigbar angesetzt wird ($\hat{n}_i^* = 0 \text{ cm}^{-3}$).

Auf der Ordinate der oberen Figur in Abbildung 5.13 ist der Fluss, normiert auf den maximalen, in dem jeweiligen Energieband gemessenen Fluss aufgetragen; so können die Flüsse im GeV-Bereich F_{GeV}^* und im TeV-Bereich F_{TeV}^* in einer Figur dargestellt werden. Auf der Abszisse ist die Zeit im Beobachtersystem aufgetragen.

Die starke Variabilität auf kurzen Zeitskalen von ~ 10 h ist auf die Inhomogenität des interstellaren Mediums zurückzuführen. Jeder „Strahlungsausbruch“ der Stoßfront ist mit dem Durchqueren einer Materiewolke verbunden. In der hier gewählten Parameterkonfiguration ist der kurzweiligen noch eine auf mittleren Zeitskalen von ~ 10 d wirkende Variabilität überlagert. Letztere ist mit der Abbremsung der Stoßfront durch den mit der Materieaufnahme verbundenen Impulsübertrag verknüpft. Zunächst steigt die Energiedichte in der Elektronenverteilung, da durch die häufige

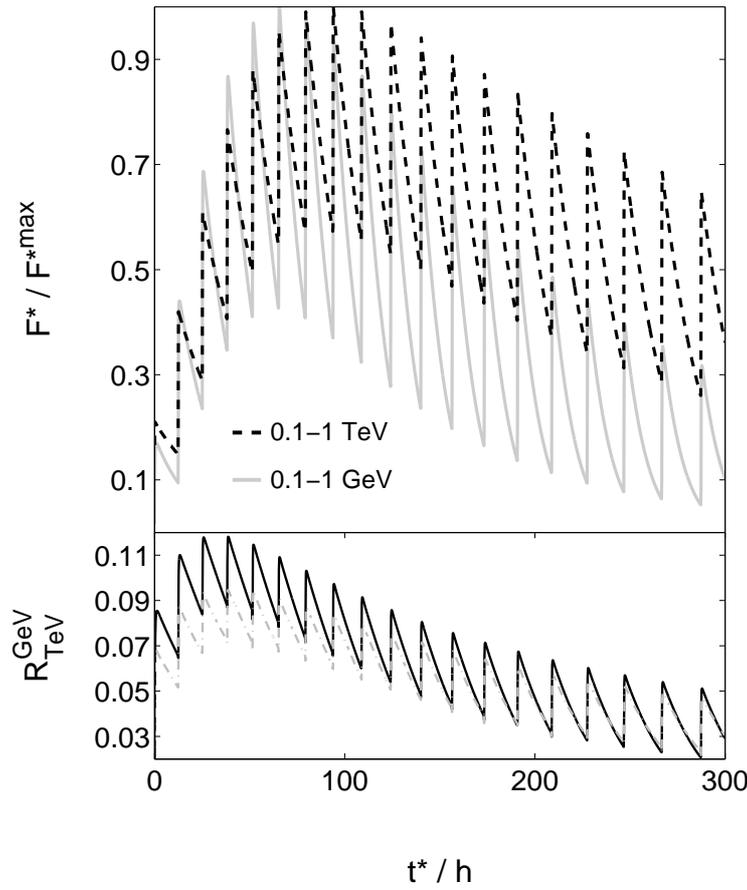


Abbildung 5.13: *Obere Figur:* Die Lichtkurven eines AGN, wie sie sich aus dem Modell der relativistischen Stoßfront ergeben; hier sind die Flüsse im GeV- und TeV dargestellt und auf den Maximalwert, der in dem jeweiligen Energieintervall erreicht wird, normiert. Die Stoßfront durchläuft mehrere Wolken interstellaren Gases, die jeweils eine Dicke von $d_{\text{Wolke}} = 3 \cdot 10^{17}$ cm und einen Abstand von $\Delta L = 100 d_{\text{Wolke}}$ zueinander aufweisen. Die Dichte der Wolken ist ebenfalls konstant bei $\hat{n}_1^* = 10 \text{ cm}^{-3}$; die Dichte zwischen den Wolken sei vernachlässigbar ($\hat{n}_1^* = 0 \text{ cm}^{-3}$). Die weiteren Parameter sind $\Theta_s^* = 0.5^\circ$, $\Gamma_0 = 300$, $d = 10^{14}$ cm, $R = 2 \cdot 10^{14}$ cm und $B = 2$ G. *Untere Figur:* Das Verhältnis $R_{\text{TeV}}^{\text{GeV}}$ der in der oberen Figur darstellten Flüsse (schwarze Linie) sowie das Verhältnis der Maxima des SSC- und π^0 -Strahlungsspektrums (graue, gestrichelte Linie).

Abfolge von Materiewolken der Stoßfront mehr Energie in Form von hochenergetische Protonen zugeführt wird, als durch die in Proton-Proton-Stößen entstehenden sekundären Teilchen abgestrahlt wird. Die Menge der aufgenommenen Teilchen ist dabei bei jeder Durchquerung einer Wolke konstant, durch die Abnahme des Lorentzfaktors Γ der relativistischen Stoßfront verringert sich aber die Menge der aufgenommenen Energie. Dadurch steht auch den Strahlung erzeugenden Teilchen zunehmend weniger Energie zur Verfügung. Da der Dopplereffektor D bei $\Theta_s^* = 0.5^\circ$ und $\Gamma_0 = 300$ durch die Abbremsung der Stoßfront zunimmt (vgl. Abbildung 5.5), steigt der maximale Fluss der einzelnen Strahlungsausbrüche im *Beobachtersystem* im zeitlichen Verlauf länger an als im Laborsystem; es ergibt sich ein langsames Ansteigen und

Abfallen der Maximalflüsse der einzelnen Strahlungsausbrüche, also eine säkulare Variabilität des modellierten AGN, wie sie in Beobachtungen erkennbar zu sein scheint (z.B. Amenomori et al., 2003). Ein wiederholtes Auftreten einer solchen, durch die Abbremsung der relativistischen Stoßfront erzeugten, säkularen Variabilität ist allerdings nicht möglich, da der Dopplerfaktor nur ein Maximum in Abhängigkeit von dem Lorentzfaktor aufweist und darüber hinaus keine Nachbeschleunigung der Stoßfront vorgesehen ist. Finden sich eine Vielzahl von Aktivitätsan- und -abstiegen in der Lichtkurve eines AGN, sind diese nur durch eine Verteilung von Wolken „passender“ Größe und Dichte^j oder durch mehrere Stoßfronten zu erklären. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Annahme eines veränderlichen Beobachtungswinkels, die in dem Modell der relativistischen Stoßfront keinen Eingang findet.

Die zeitlichen Abstände der Strahlungsausbrüche scheinen mit der Intensität zu- und abzunehmen, obwohl die räumlichen Abstände der Wolken konstant sind. Mit der Variation des Dopplerfaktors D ist auch die Zeittransformation veränderlich, da der Dopplerfaktor in die Berechnung der Zeit im Beobachtersystem eingeht ($t^* = t/D$); dementsprechend sind die zeitlichen Abstände der Strahlungsausbrüche bei den größten Flüssen am geringsten.

Auch in diesem Beispiel zeigt sich, dass die SSC-Strahlung, aufgrund der quadratischen Abhängigkeit von der Energiedichte der Elektronen, die größte Variabilität unter den verschiedenen Strahlungsmechanismen aufweist: Sowohl in den einzelnen Strahlungsausbrüchen, als auch in der säkularen Änderung der Flüsse, zeigt die SSC-Komponente, die die Strahlung im GeV-Band bestimmt, eine stärkere, bzw. schnellere, Variabilität als die durch den π^0 -Zerfall generierte TeV-Strahlung. Beispielsweise nach dem Erreichen der maximalen Strahlungsleistung des GeV-Bandes in dem sechsten *flare*, sinkt das Strahlungsniveau auf weniger als die Hälfte des im Maximum erzielten Wertes ab, bevor ein erneuter Strahlungsausbruch erfolgt; die im TeV-Band erzielte Strahlungsleistung sinkt hingegen nur auf ungefähr $\frac{2}{3}$ ihres Maximalwertes. Betrachtet man als Maß für die säkulare Variabilität die Minima der Strahlungsflüsse, sind die im GeV-Bereich erzielten *minimalen* Flüsse bereits nach ~ 200 h auf das Niveau des ersten Strahlungsminimums gesunken, wohingegen dieses Niveau im TeV-Bereich erst außerhalb des dargestellten Zeitraumes, nach schätzungsweise ~ 500 h, erzielt wird.

Die untere Figur von Abbildung 5.13 zeigt das Verhältnis $R_{\text{TeV}}^{\text{GeV}}$ der in der oberen Figur dargestellten Flüsse. Das Maximum des Flussverhältnisses aus GeV- und TeV-Strahlung wird zeitlich vor dem Erreichen des maximalen Flusses im GeV-Band erzielt (vgl. obere Figur); der Anstieg des Strahlungsniveaus im GeV-Bereich des Spektrums ist also bereits vor dem Erreichen des Flussmaximums geringer als der Anstieg der TeV-Strahlung. Hier zeigt sich der bereits oben erwähnte Einfluss des

^jIm Gegensatz zur Veränderung des beobachtbaren Flusses aufgrund der Abnahme des Lorentzfaktors, nehmen hier die Dichte und/oder der Durchmesser der Wolken gerade so zu und anschließend wieder ab, dass die Flussmaxima der einzelnen Strahlungsausbrüche die oben beschriebene säkulare Variabilität aufweisen.

Dopplerfaktors auf den Verlauf der säkularen Variabilität: Die säkulare Variabilität der Flüsse steht mit der Änderung des Dopplerfaktors D über das Transformationsverhalten der Strahlungskomponenten in Zusammenhang: $\int F_{E^*}^* dE^* \propto D^4$; in dem Verhältnis der Flüsse $R_{\text{TeV}}^{\text{GeV}}$ kürzt sich diese Abhängigkeit heraus. Insofern spiegelt die Veränderlichkeit des Flussverhältnisses also die zeitliche Entwicklung der Stoßfront im Laborsystem wider; allerdings geht der Dopplerfaktor auch in die Integrationsgrenzen ein. Um diesen Einfluss zu untersuchen, zeigt die graue, gestrichelte Linie in der unteren Figur von Abbildung 5.13 das Verhältnis der Maxima des SSC- und des π^0 -Spektrums. Da die säkulare Variabilität qualitativ denselben Verlauf zeigt, folgt, dass diese nicht durch die Lage der Integrationsintervalle erzeugt wird, sondern sich aus dem Wechselspiel von Materieakkumulation und Verringerung der Energieaufnahme ergeben muß: Zu Beginn der Berechnung ist die von der relativistischen Stoßfront bei der Passage durch eine Wolke aufgenommene Energie erst teilweise in Form von Strahlung oder durch diffusive Verluste entwichen, wenn sie auf die nächste Materiewolke trifft; entsprechend vergrößert sich die Energiedichte der relativistischen Stoßfront und somit der beobachtbare Fluss bei jeder erneuten Materieaufnahme (siehe obere Figur von Abbildung 5.13). Durch die Abbremsung der Stoßfront nimmt die Energieaufnahme ab, bis sie schließlich die Verluste der relativistischen Protonen nicht mehr kompensieren kann; ab diesem Zeitpunkt nimmt die *intrinsische* Leuchtkraft der Stoßfront ab. Das von dem Dopplerfaktor D unabhängige Flussverhältnis $R_{\text{TeV}}^{\text{GeV}}$ spiegelt diesen Verlauf wider.

Der Einfluss der Lage des Integrationsintervalls in Bezug auf die Strahlungsspektren und deren endliche Ausdehnung macht sich darin bemerkbar, dass das Verhältnis der maximalen Flüsse im GeV- zum TeV-Bereich (graue, gestrichelte Linie in der unteren Figur von Abbildung 5.13) eine weniger starke säkulare Variabilität aufweist: Bis zum Zeitpunkt $t^* \approx 50$ h verbreitert sich das SSC-Spektrum, da die niederenergetische Flanke durch die Kühlung der Elektronen prominenter wird. Des Weiteren liegt das Maximum des π^0 -Spektrums am oberen Rand des Integrationsintervalls im TeV-Bereich (~ 1 TeV): Durch die Verschiebung des Protonenspektrums zu kleineren Energien aufgrund des abnehmenden Lorentzfaktors (Abbremsung), verlagert sich das Maximum der π^0 -Komponente mit zunehmender Zeit in das Integrationsintervall hinein. Daher steigt das Flussverhältnis zunächst stärker an als das Verhältnis der Maxima, um zu einem späteren Zeitpunkt wieder auf einen, mit dem Verhältnis der maximalen Flüsse im GeV- zum TeV-Bereich vergleichbaren Wert abzusinken.

5.4.8 EGRET-Messdaten

Die von dem Messinstrument EGRET an Bord des *Compton Gamma Ray Observatory (CGRO)* in den 90er Jahren gemessenen Spektren zeigen in vielen Fällen Verläufe, die sich mit einem einfachen Potenzgesetz anpassen lassen (Hartmann et al., 1999). Aufgrund der geringen Flüsse im Messbereich, in Verbindung mit der, gegenüber erdgestützten Teleskopen vergleichsweise kleinen effektiven Fläche von EGRET, waren

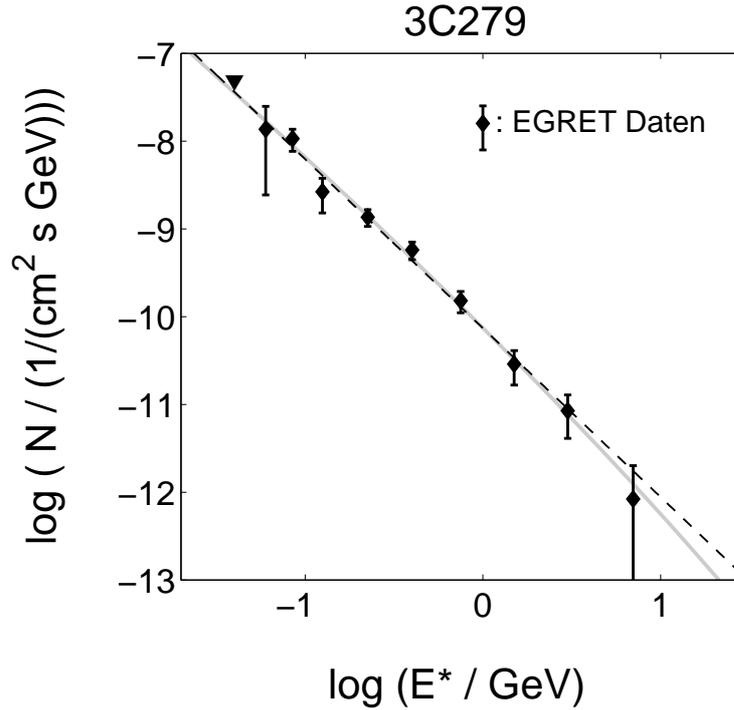


Abbildung 5.14: EGRET-Messdaten mit 3σ -Fehlerbalken; das Dreieck repräsentiert eine obere 3σ -Grenze. Die schwarze gestrichelte Linie zeigt einen potenzgesetzförmigen Verlauf und die graue das zeitintegrierte Spektrum einer relativistischen Stoßfront nach 50 h Beobachtungszeit. Die Stoßfront trifft zum Zeitpunkt $t^* = 0$ h auf eine Wolke interstellaren Mediums der Dichte $\hat{n}_1^* = 1.5 \text{ cm}^{-3}$ und der Dicke $d_{\text{Wolke}} = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}$ und läuft anschließend durch ein Gebiet verschwindend geringer Dichte. Die weiteren Parameter sind $\Theta_S^* = 0.5^\circ$, $\Gamma_0 = 300$, $d = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}$, $R = 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}$, $n_b = 10^8 \text{ cm}^{-3}$ und $B = 2 \text{ G}$.

bei der Aufnahme der Spektren lange Beobachtungszeiten von typischerweise zwei Wochen nötig. Die Spektren sind somit *Fluenz*-, also zeitintegrierte Spektren: Die von Hartmann et al. (1999) angegebenen (Photonen-) Flüsse ergeben sich aus den gemessenen Photonenzahlen, indem durch die Beobachtungszeit geteilt wird. Insofern handelt es sich bei den EGRET-Spektren um zeitgemittelte Spektren, die einen Vergleich mit den berechneten Flüssen nur bedingt erlauben: Wie in dieser Arbeit im Rahmen des Modells der relativistischen Stoßfront gezeigt wird, ergeben sich, durch Inhomogenitäten im interstellaren Medium, Variationen in den gemessenen Flüssen von einer Größenordnung auf Zeitskalen von Stunden (siehe beispielsweise Abbildung 5.8). Da nicht nur die Amplitude der Strahlung durch die Passage von Wolken unterschiedlicher Dichte variieren kann, sondern, durch die Abbremsung der Stoßfront, auch die Energie bei der die maximale Energie empfangen wird, ist eine Anpassung der EGRET-Daten mit „echten“, instantanen Flüssen nur bedingt aussagekräftig.

Im Rahmen des Modells der relativistischen Stoßfront jedoch kann die zeitliche Entwicklung des AGN verfolgt und zeitintegrierte Spektren berechnet werden: Als Ausblick auf weiterführende Arbeiten auf Grundlage der hier präsentierten Ergebnis-

se und als Beispiel für ein Spektrum, das sich aus der Zeitintegration der modellierten Spektren einer relativistischen Stoßfront ergibt, zeigt Abbildung 5.14 Messdaten von EGRET und verschiedene Modellierungen. Dargestellt sind die gemessenen Daten^k der Quelle 3C279 einschließlich der 3σ -Fehlerbalken. Die schwarze gestrichelte Linie zeigt ein einfaches Potenzgesetz, mit dem die Daten für den Photonfluss N angepasst wurden ($N \propto E^{-\alpha}$); der Spektralindex der Photonverteilung ist $\alpha \simeq 2$. Die graue Linie zeigt das Fluenzspektrum, das sich aus dem Modell der relativistischen Stoßfront für die Passage einer einzelnen Wolke, nach einer Integrationszeit von 50 Stunden, ergibt. Die χ^2 -Summe beider Modellspektren liefert in etwa dieselben Werte.

Das Modell der relativistischen Stoßfront vermag also Spektren, wie sie von EGRET gemessen wurden, zu reproduzieren, wenngleich in dem gezeigten Beispiel auf einen Abgleich mit Daten im Röntgenbereich verzichtet wurde. Um qualitativere Aussagen zu machen, muss eine systematische Parametersuche angestrebt werden, die vorallem darauf ausgerichtet ist, die in besserer Zeitaufösung zu erwartenden Daten von GLAST zu untersuchen. In Verbindung mit zeitgleich aufgenommenen Daten in anderen Frequenzbändern ergibt sich die Möglichkeit, das Modell der relativistischen Stoßfront zu verifizieren und aus seinen Vorhersagen die Parameter der Stoßfront, allgemeiner gesprochen: des Jets, deutlich einzugrenzen und damit die Kenntnis über den physikalischen Aufbau der Jets um ein Vielfaches zu verbessern. Des Weiteren kann aus der Intensität und der Häufigkeit der einzelnen Strahlungsausbrüche die Materieverteilung entlang der Jetachse bestimmt werden.

^kDie EGRET-Spektren sind über die Internetseite ftp://gamma.gsfc.nasa.gov/pub/THIRD_CATALOG/spectra/fits/ abrufbar. Die Quelle 3C279 ist hier unter 3EG_J1255-0549 aufgeführt.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem abschließenden Kapitel wird ein kurzes Resümee der vorangegangenen Kapitel gegeben. Insbesondere wird das Modell der relativistischen Stoßfront im Überblick diskutiert und ein Ausblick auf weiterführende Arbeiten gegeben.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Strahlungsprozess der inversen Comptonstreuung und seiner Anwendung in Bezug auf die sogenannten aktiven galaktischen Kerne (AGN). Dazu wird zunächst die Phänomenologie der AGN in der historischen Betrachtung präsentiert sowie das vereinheitlichte Modell radiolauter AGN vorgestellt. Verschiedene Erklärungsmodelle für die Entstehung der Strahlung werden knapp erläutert.

Ein wesentlicher Prozess zur Erzeugung der hochenergetischen Strahlung von AGN ist die inverse Comptonstreuung; dabei werden Photonen niedriger Energie von hochrelativistischen Elektronen zu hohen Energien gestreut. Für das detaillierte Verständnis dieses Prozesses ist die Kenntnis der differentiellen spektralen Photonenverteilung der zu streuenden Photonen (Targetphotonen) unabdingbar. Daher werden verschiedene Quellen, die sich aus dem vereinheitlichten Modell ergeben, beschrieben und ihr Einfluß auf das Photonenfeld diskutiert. Da die Existenz von Synchrotronphotonen aus der Interpretation der Spektren der AGN als gesichert gilt und diese über die gesamte Ausdehnung der Jets in unterschiedlicher Stärke gemessen werden, fokussiert die vorliegende Arbeit auf den *Synchrotron-Self-Compton (SSC)*-Prozess, bei dem die Streuung der von den streuenden Elektronen selbst erzeugten Synchrotronphotonen behandelt wird.

Zum Verständnis des inversen Comptonprozesses werden zunächst die differentielle Streurrate für ein einzelnes Elektron unter Annahme einer isotropen Targetphotonenverteilung, sowie die Kühlrate der Elektronen berechnet. Ferner werden verschiedene, für die Beschreibung des SSC-Prozesses wichtige Größen und ihre Transformationseigenschaften diskutiert; des Weiteren wird die Verbindung der differentiellen Streurrate zur Messgröße des spektralen Flusses hergestellt.

Neben der Kenntnis der Targetphotonenverteilung ist die der Verteilung der streuenden Elektronen nötig, um die vollständige Lösung der inversen Comptonstreuung

zu erhalten. Zunächst wird die Elektronenverteilung als potenzgesetzförmig angesetzt: Da die Elektronenverteilung sich realistischerweise nicht bis zu unendlich hohen Energien erstreckt und eventuell auch eine untere Schranke $\gamma > 1$ aufweist, ist es nötig, die Verteilung durch eine obere und eine untere Grenze zu beschränken; in der vorliegenden Arbeit konnte erstmals im Rahmen dieses phänomenologischen Ansatzes eine analytische Lösung der Beschreibung des SSC-Prozesses für eine auf einen Teil des Energieraumes begrenzte, potenzgesetzförmige Elektronenverteilung hergeleitet werden, die auch die Beschränkungen des Synchrotronspektrums, die sich aus einer solchen Verteilung ergeben, berücksichtigt. Die Eigenschaften der Lösung werden ausführlich und für verschiedenartige potenzgesetzförmige Elektronenverteilungen anhand der Flüsse, die sich von einem „Modell“-AGN für einen Beobachter ergeben, diskutiert. Darüber hinaus wird eine Lösung für das Thomson-Limit vorgestellt und gezeigt, dass die Spektren der hier gefundenen allgemeinen Lösung für Parameterwerte der Elektronenverteilung, die eine Behandlung des SSC-Prozesses im Thomson-Limit erlauben, eine hervorragende Übereinstimmung mit den Spektren der von Blumenthal & Gould (1970) im Thomson-Limit gefundenen Lösung zeigen. Mit Hilfe dieses Ergebnisses können Meßdaten angepasst werden und so Rückschlüsse auf die Elektronenverteilung in den Jets der AGN und über den Dopplerfaktor des Jetelements, bzw. seinen aktuellen Lorentzfaktor und den Beobachtungswinkel gezogen werden. Die hier in diesem Umfang erstmals durchgeführte analytische Behandlung des SSC-Prozesses gewährleistet, dass das Anpassen von Messdaten ein genaueres Abbild der Verhältnisse, die *in situ* gegeben sind, hervorbringt und eröffnet darüber hinaus die Möglichkeit einer analytischen Überprüfung von numerisch erzielten Ergebnissen.

Ein Modell, das die Existenz hochrelativistischer Elektronen in den Jets der AGN zu erklären vermag, die in phänomenologischen Ansätzen bislang zumeist *ad hoc* vorausgesetzt werden, ist das von Pohl & Schlickeiser (2000) vorgestellte Modell der relativistischen Stoßfront. Im Zuge dieser Arbeit gelingt es, das Modell der relativistischen Stoßfront um den für das Hochenergieregime im Bereich von MeV bis GeV äußerst wichtigen SSC-Prozess zu erweitern. Die sich ergebenden Multifrequenzspektren werden für eine Auswahl an Parametern diskutiert, ebenso die sich in verschiedenen Energiebändern ergebenden Lichtkurven, und die Bedeutung der inversen Comptonstreuung für besagten Energiebereich untermauert.

Die hohe Variabilität der AGN in sämtlichen Wellenlängenbereichen macht eine simultane Beobachtung dieser Objekte vom Radio- bis in das TeV-Band unerlässlich. Eine Reihe von Multifrequenzkampagnen sind in den letzten Jahren unternommen worden (z.B. Krawczynski et al., 2004; Takahashi et al., 2000; Maraschi et al., 1999), deren Fokus im Wesentlichen auf der gleichzeitigen Untersuchung des Röntgen- und TeV-Bereichs von den im TeV-Bereich detektierten Blazaren liegt.

Besagte Beobachtungen zeigen insbesondere, dass die im TeV-Bereich abgestrahlte Leistung gleich groß oder geringer ist als die im Röntgenbereich abgestrahlte. Dies steht in scheinbarem Widerspruch zu den aus dem Modell der relativistischen

Stoßfront gewonnenen Spektren, in denen die π^0 -Komponente die der Synchrotronstrahlung um wenigstens eine Größenordnung übertrifft (siehe z. B. Abbildung 5.3). In den hier präsentierten Spektren sind allerdings die Absorptionseffekte durch den *kosmischen Infrarot-Hintergrund (CIB)*^a nicht berücksichtigt. Sowohl die Energiedichte, als auch die spektrale Verteilung des CIB, sind nur sehr unzureichend bekannt, da dessen Messung durch verschiedene Strahlungsquellen aus näherer Umgebung erschwert wird (eine Übersicht über den CIB geben Hauser & Dwek, 2001). Die aus der aktuellen Datenlage gewonnene spektrale Verteilung des infraroten Hintergrunds führt notwendigerweise zu teilweise dramatischen Absorptionen der Strahlung im TeV-Regime der AGN, so dass ein starkes Ansteigen des *intrinsischen*, also *in situ* gegebenen Spektrums notwendig wird, um die gemessenen, durch die Absorption modifizierten Spektren zu erklären. Insbesondere leptonische Modelle bedürfen zusätzlicher Annahmen, um derartige *intrinsische* Spektren zu erklären (Aharonian et al., 2002). Durch diese Unsicherheit in der Beurteilung der TeV-Messdaten wird eine umfassende Verifikation des Modells der relativistischen Stoßfront erst durch die vorliegende Arbeit möglich, da sie mit dem SSC-Prozess das vorhergesagte Spektrum komplettiert und damit zum ersten Mal den entscheidenden Strahlungsmechanismus für den MeV- bis GeV-Energiebereich behandelt.

Aus der Kenntnis des intrinsischen Spektrums lässt sich im Gegenzug der CIB bestimmen (Primack et al., 1999, 2005); das Modell der relativistischen Stoßfront eröffnet also die Möglichkeit, Aussagen über den CIB zu treffen: Gelingt es, Daten einer Multifrequenzkampagne unter Einbeziehung der GLAST-Mission, und damit des Bereiches der durch inverse Comptonstreuung wesentlich beeinflussten Energiebereiches, mit dem Modell der relativistischen Stoßfront zu modellieren, kann aus dem sich daraus ergebenden Fluss der π^0 -Komponente im TeV-Bereich die spektrale Energiedichte des CIB bestimmt werden. Für eine Reihe von Parameterkonstellationen kann die π^0 -Komponente auch im Bereich des GLAST-Energiespektrums sichtbar sein.

Den in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnissen zum SSC-Prozess kommt also eine entscheidende Rolle auf dem Weg zum Verständnis der Jets von AGN zu: Zum einen durch einen, in dieser Arbeit verfeinerten, phänomenologischen Ansatz, der es ermöglicht, gemessene Spektren mit den berechneten zu vergleichen und so Aufschluss über die aktuelle Population von Elektronen zu erlangen. Zum anderen durch das Modell der relativistischen Stoßfront, in dessen Zusammenhang hier erstmals auch der SSC-Prozess diskutiert wird. Die im MeV- bis GeV-Energiebereich angesiedelten SSC-Spektren, die der Absorption durch den CIB nur am oberen Rand marginal unterliegen, können, in Verbindung mit den Synchrotronspektren, sowohl über die Parameter des Jets als auch über die Materieverteilung in der Umgebung des AGN Aufschluss geben. Gelingt es, die zeitliche Entwicklung eines AGN über einen vorgegebenen Zeitraum zu modellieren, kann die Validität des Modells verifiziert, sowie die Dichteverteilung der interstellaren Materie in der Umgebung des AGN bestimmt

^aAus dem Englischen: *cosmic infrared background*.

werden und darüber hinaus – aus der Kenntnis der *intrinsischen* Spektren des AGN – das Photonenfeld des CIB in Dichte und spektraler Verteilung.

Über die Entwicklung einer Analyse-Software zur zeitaufgelösten Untersuchung der AGN-Spektren hat die Arbeit an dem Modell der relativistischen Stoßfront ein großes Entwicklungspotential:

Die Berücksichtigung von *externen* Targetphotonenquellen und die Untersuchung ihres Einflusses auf die inverse Comptonstreuung ist, beispielsweise für Quellen, die große Leuchtkräfte im Infraroten ausweisen, wünschenswert (Arbeiter et al., 2002). Daraus ergibt sich eine indirekte Untersuchungsmöglichkeit der Strahlungsdichten in der Umgebung der AGN.

Die Effekte des Teilchentransports in der Stoßfront können zu Änderungen der vorhergesagten Spektren führen (Vainio et al., 2004). Insbesondere kann sich vor der Stoßfront ein hochrelativistischer Schock ausbilden, der die Aufnahme rate der Teilchen variiert und unter Umständen zu wesentlichen Beschleunigungsprozessen von aufgesammelten Teilchen führen könnte.

Die Berücksichtigung thermischer Teilchenpopulationen kann in das Modell der relativistischen Stoßfront integriert werden (Siewert et al., 2004). Die sich daraus ergebenden Beschränkungen des Parameterraums führen zu einer weiteren Fokussierung des sich aus der Modellierung ergebenden Parametersatzes.

Gelingt mithilfe der vorliegenden Arbeit die Modellierung der AGN-Spektren, insbesondere mit dem Modell der relativistischen Stoßfront, sowie die Reproduktion der Lichtkurven in guter Übereinstimmung mit den Messdaten, ist ein großer Schritt für das Verständnis der Jets der aktiven galaktischen Kerne getan.

Anhang A

Die Transformation von μ

Eine wichtige Relation beschreibt das Transformationsverhalten des Polarwinkelkosinus μ . Dazu betrachtet man zunächst die Transformation von Geschwindigkeitsvektoren. Für die in Kapitel 3.2 beschriebene Situation zweier Bezugssysteme (mit „ $\bar{\cdot}$ “ und „ $\hat{\cdot}$ “ gekennzeichnet), mit parallelen Achsen und einer Relativgeschwindigkeit entlang der \hat{z} -Achse $v_r = \beta c$, gilt entsprechend der Lorentztransformation

$$\hat{t} = \gamma \left(\bar{t} - \frac{\beta}{c} \bar{z} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{x} = \bar{x}, \quad \hat{y} = \bar{y}, \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{z} = \gamma (\bar{z} - \beta c \bar{t}) \quad (\text{A.3})$$

mit dem Lorentzfaktor $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Aus den totalen Differentialen von \hat{t} , \hat{x} und \hat{z} ergeben sich die Komponenten eines Geschwindigkeitsvektors $\hat{\mathbf{v}}$, der in der \hat{x} - \hat{z} -Ebene liegt und mit der \hat{z} -Achse den Winkel $\hat{\Theta}$ aufspannt. Mit $\hat{v} = |\hat{\mathbf{v}}|$ ergibt sich für die Komponenten von $\hat{\mathbf{v}}$

$$\hat{v}_x = \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \frac{d\bar{x}}{\gamma(d\bar{t} - \frac{\beta}{c}d\bar{z})} = \frac{\bar{v}_x}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}\bar{v}_z)}, \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{v}_z = \frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \frac{d\bar{z} - \beta c d\bar{t}}{d\bar{t} - \frac{\beta}{c}d\bar{z}} = \frac{\bar{v}_z - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}\bar{v}_z} \quad (\text{A.5})$$

und damit

$$\hat{\mu} \equiv \cos \hat{\Theta} = \frac{\hat{v}_z}{\hat{v}} = \frac{\hat{v}_z}{\sqrt{\hat{v}_x^2 + \hat{v}_z^2}}. \quad (\text{A.6})$$

Für gegebene Azimutalsymmetrie stellt die geforderte Lage des Vektors in der x - z -Ebene keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Für $\hat{\mu}$ folgt also

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{\bar{v}_z - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}\bar{v}_z}}{\sqrt{\left(\frac{\bar{v}_x}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}\bar{v}_z)}\right)^2 + \left(\frac{\bar{v}_z - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}\bar{v}_z}\right)^2}} = \frac{\bar{v}_z - \beta c}{\sqrt{\bar{v}_x^2(1 - \beta^2) + (\bar{v}_z - \beta c)^2}} \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{\bar{\mu} - \frac{\beta c}{\bar{v}}}{\sqrt{\frac{\beta^2 c^2}{\bar{v}^2} - 2\frac{\beta c}{\bar{v}}\bar{\mu} - \beta^2(1 - \bar{\mu}^2) + 1}}, \quad (\text{A.8})$$

wobei im letzten Schritt $\bar{v}_z = \bar{v}\bar{\mu}$ und $\bar{v}_x = \bar{v}(1 - \bar{\mu}^2)$ verwendet wurde. Es werden Photonen betrachtet; daher kann man für den Geschwindigkeitsbetrag des betrachteten Vektors $\bar{v} = c$ setzen. Daraus folgt

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{\mu} - \beta}{1 - \beta\bar{\mu}}. \quad (\text{A.9})$$

Für das Differential $d\hat{\mu}$ ergibt sich daraus

$$\frac{d\hat{\mu}}{d\bar{\mu}} = \frac{(1 - \beta\bar{\mu}) + (\bar{\mu} - \beta)\beta}{(1 - \beta\bar{\mu})^2} \quad \rightsquigarrow \quad d\hat{\mu} = \frac{d\bar{\mu}}{\gamma^2(1 - \beta\bar{\mu})^2}. \quad (\text{A.10})$$

Ferner gilt für den Azimutalwinkel $\hat{\phi}$, der in einem sphärischen Koordinatensystem dem Polarwinkel $\hat{\Theta} = \arccos \hat{\mu}$ zugeordnet ist,

$$\hat{\phi} = \bar{\phi}, \quad \text{und entsprechend} \quad d\hat{\phi} = d\bar{\phi}, \quad (\text{A.11})$$

da die Ebene des Azimutwinkels per Definition ($\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}_z$) senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung des bewegten Bezugssystems steht. Dementsprechend transformiert sich das Raumwinkelement $d\hat{\Omega}$ gemäß

$$d\hat{\Omega} = \frac{d\bar{\Omega}}{\gamma^2(1 - \beta\bar{\mu})^2}. \quad (\text{A.12})$$

Anhang B

Die Transformation von n

Ist die differentielle spektrale Photonverteilung im Laborsystem isotrop, lässt sie sich mittels der relativistischen Invarianten (vgl. Text zu Gleichung 3.12)

$$\frac{n}{\epsilon^2} = \text{inv.} \quad (\text{B.1})$$

in kompakter Form im Elektronruhesystem darstellen. Da in die Transformation der Energie ϵ in das Elektronruhesystem gemäß Abbildung 3.1 und Gleichung 3.4 der Winkel ψ eingeht, schreibt man die Photonverteilung $n(\epsilon, \Omega_\psi) = dn/(d\epsilon d\Omega_\psi)$ im Laborsystem in der Form

$$n(\epsilon, \Omega_\psi) = \frac{n(\epsilon)}{4\pi} \Theta(1 - \mu_\psi) \Theta(1 + \mu_\psi) \quad (\text{B.2})$$

mit $\mu_\psi = \cos \psi$ und der Heaviside-Funktion $\Theta(x)$ gemäß Definition 3.22; das Produkt der Heaviside-Funktionen begrenzt den Winkelkosinus auf seinen Definitionsbereich zwischen $\mu_\psi = -1$ und $\mu_\psi = 1$. Zusammen mit Gleichung B.1 folgt daraus

$$n'(\epsilon', \Omega'_\psi) = \frac{\epsilon'^2}{\epsilon^2} n(\epsilon, \Omega_\psi) = \frac{\epsilon'^2}{\epsilon^2} \frac{n(\epsilon)}{4\pi} \Theta(1 - \mu_\psi) \Theta(1 + \mu_\psi) . \quad (\text{B.3})$$

Aufgrund der Azimutalsymmetrie kann über ϕ integriert werden:

$$n'(\epsilon', \mu'_\psi) = \frac{\epsilon'^2}{2\epsilon^2} n(\epsilon) \Theta(1 - \mu_\psi) \Theta(1 + \mu_\psi) . \quad (\text{B.4})$$

Mit Hilfe von Gleichung 3.6 lässt sich μ_ψ ebenfalls in das Elektronruhesystem transformieren. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Winkelabhängigkeit in eine Abhängigkeit von der Energie im Laborsystem umzuwandeln. Dazu muß zunächst das Differential von μ'_ψ , mit Hilfe der Transformationsgleichung der Energie aus Gleichung 3.4, in ein Differential von ϵ umgewandelt werden:

$$\epsilon = \gamma \epsilon' (1 + \beta \mu'_\psi) \Rightarrow \mu'_\psi = -\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\epsilon}{\gamma \epsilon'} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\mu_\psi} = \beta \gamma \epsilon' \frac{d}{d\epsilon} \Rightarrow n'(\epsilon', \epsilon) = \frac{1}{\beta \gamma \epsilon'} n'(\epsilon', \mu'_\psi) . \quad (\text{B.6})$$

Entsprechend der Gleichung B.5 lässt sich aus der Energietransformation ein Ausdruck für μ_ψ finden

$$\epsilon' = \gamma\epsilon(1 - \beta\mu_\psi) \quad \Rightarrow \quad \mu_\psi = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\epsilon'}{\gamma\epsilon}\right), \quad (\text{B.7})$$

mit Hilfe dessen die Argumente der Heaviside-Funktionen in Gleichung B.4 umgeformt werden:

$$\boxed{1 - \mu_\psi > 0}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\epsilon'}{\gamma\epsilon}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta - \frac{\epsilon'}{\gamma\epsilon} < 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + \beta)\gamma^2} - \frac{\epsilon'}{\gamma\epsilon} < 0 \quad \stackrel{\beta \approx 1}{\Rightarrow} \quad \epsilon' - \frac{\epsilon}{2\gamma} > 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\boxed{1 + \mu_\psi > 0}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\epsilon'}{\gamma\epsilon}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \beta - \frac{\epsilon'}{\gamma\epsilon} > 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\stackrel{\beta \approx 1}{\Rightarrow} 2\gamma\epsilon - \epsilon' > 0. \quad (\text{B.11})$$

Somit ergibt sich für die differentielle Photonendichte der Targetphotonen im Bezugssystem des Elektrons

$$n'(\epsilon', \epsilon) = \frac{\epsilon'}{2\gamma\epsilon^2} n(\epsilon) \Theta\left(\epsilon' - \frac{\epsilon}{2\gamma}\right) \Theta(2\gamma\epsilon - \epsilon'). \quad (\text{B.12})$$

Die Winkelabhängigkeit wird also zu Gunsten einer Energieabhängigkeit in einem anderen Bezugssystem ausgetauscht, woraus sich eine obere und eine untere Grenze der Photonenergie im Elektronruhesystem ergibt. Anschaulich kann man das so beschreiben, dass die Energie ϵ der Photonen im Elektronruhesystem maximal verstärkt wird, wenn die Photonen sich im Laborsystem entgegengesetzt der Flugrichtung des Elektrons ausbreiten ($\epsilon' = 2\gamma\epsilon$), und maximal abgeschwächt wird, wenn sich die Photonen parallel dazu bewegen ($\epsilon' = \epsilon/2\gamma$).

Anhang C

Die Berechnung der Targetphotonendichte n

Zur Berechnung der inversen Comptonstreuung ist die Kenntnis der Targetphotonendichte zwingend. Betrachtet man den Fall, dass die Streupartner der Elektronen die Synchrotronphotonen sind, die von denselben Elektronen erzeugt werden, lässt sich aus der Elektronenverteilung die Targetphotonenverteilung in mehreren Schritten berechnen: Als erster Schritt wird die spektrale Leistung eines Elektrons genähert. Daraus ergibt sich in einem zweiten Schritt der Emissionskoeffizient der Synchrotronstrahlung. In einem dritten und vierten Schritt wird dieser benutzt, um die Intensität, und daraus schließlich die spektrale Teilchendichte, zu berechnen.

Die über die Polarisationsrichtungen gemittelte, abgestrahlte spektrale Leistung eines Elektrons der Energie γ ist gegeben durch (z.B. Rybicky & Lightman, 1979)

$$P_{\text{sy}}(\epsilon) = \frac{\sqrt{3}e^3 B}{m_e c^2} F(x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \quad (\text{C.1})$$

und

$$\epsilon_c = \frac{3}{4\pi} \frac{e B h}{m_e^2 c^3} \gamma^2 \quad (\text{C.2})$$

sowie

$$F(x) = x \int_x^\infty dz K_{\frac{5}{3}}(z) \approx 1.78 x^{\frac{1}{3}} e^{-x} . \quad (\text{C.3})$$

Hierbei ist $K_{\frac{5}{3}}$ die modifizierte Besselfunktion, aus deren asymptotischen Verhalten (vgl. Gleichung 4.9) sich die von Wallis (1959) eingeführte Näherung ergibt; der Verlauf von F ist in Abbildung C.1 dargestellt. Die genäherte Form aus Gleichung C.3 weicht von der Vergleichskurve ab, die mit Hilfe eines numerischen Integrationsverfahrens berechnet wurde. Der relative Fehler der Näherung in Bezug auf den numerisch integrierten Verlauf ist in der unteren Figur dargestellt; im Maximalfluss ist er kleiner als 4%.

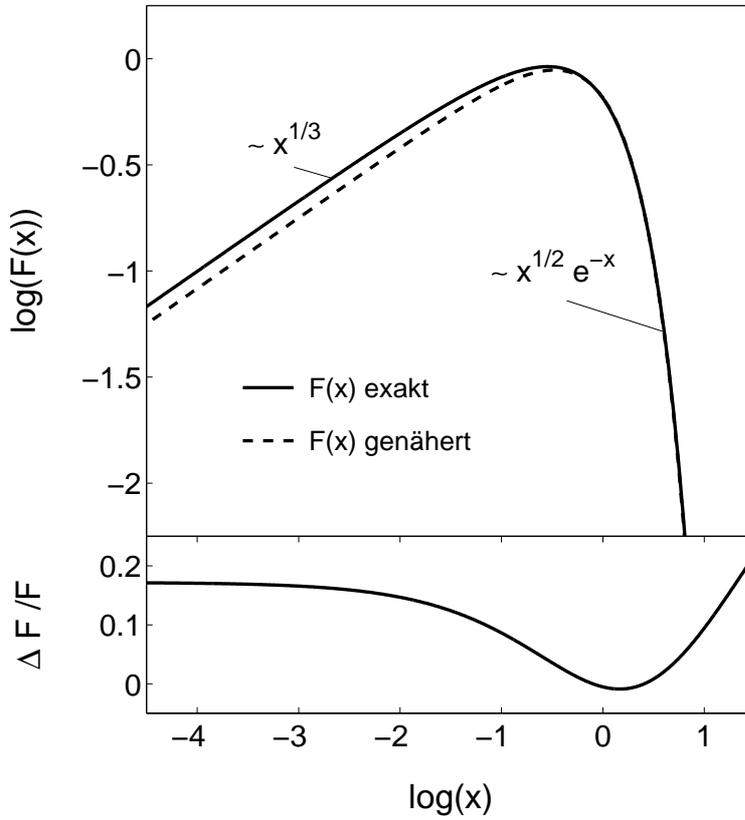


Abbildung C.1: Obere Figur: Die Funktion $F(x)$, genähert (durchgezogene Linie; siehe Gleichung C.3) und numerisch integriert (gestrichelte Linie). An dem Graphen ist das asymptotische Verhalten für kleines und großes x vermerkt. Untere Figur: Der relative Fehler der Näherung in Bezug auf die numerisch ermittelten Werte von F . Bei sehr kleinen und sehr großen Werten von x ist die Näherung von Wallis recht ungenau. Da zur Berechnung des Emissionskoeffizienten j_ϵ die Funktion F mit der Elektronendichte n gefaltet wird (siehe Gleichung C.5), geht im Wesentlichen der Wert des Maximums in das Ergebnis ein. Dieser liegt bei $x \simeq 0.3$; der relative Fehler beträgt dort weniger als 4%.

Für die spektrale Leistung ergibt sich

$$P_{\text{sy}}(\epsilon) \simeq \frac{\sqrt{3}e^3 B}{m_e c^2} 1.78 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right). \quad (\text{C.4})$$

Daraus erhält man den Emissionskoeffizienten einer isotropen Elektronenverteilung

$$j_\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\gamma n_e(\gamma) P_{\text{sy}}(\epsilon). \quad (\text{C.5})$$

Die spektrale Photonendichte berechnet sich aus

$$n(\epsilon) = \frac{u_\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon c} \oint d\Omega I_\epsilon = \frac{1}{\epsilon c} \oint d\Omega \int_0^\ell ds j_\epsilon \quad (\text{C.6})$$

mit der Intensität der Synchrotronstrahlung I_ϵ , die sich, für den Mittelpunkt der Scheibe, gemäß $I_\epsilon = \int_0^\ell ds j_\epsilon$, aus der Integration des Emissionskoeffizienten entlang der Sichtlinie ergibt; hierbei ist ℓ die Strecke bis zu der Randfläche des Emissionsgebietes. Da die, die Synchrotronstrahlung generierende, Elektronenverteilung homogen und isotrop ist, gilt dies auch für j_ϵ . Die Integration über die Sichtlinie s ergibt also ℓ .

Ist Θ_c der Winkel zwischen der Jetachse und dem äußeren Rand der bei $d/2$ liegenden oberen Kreisfläche des Zylindermantels, der das Emissionsgebiet begrenzt ($\tan \Theta_c = R/(d/2)$), wird die Länge ℓ für Winkel $0 < \Theta < \Theta_c$ von der oberen Kreisfläche, für $\Theta_c < \Theta < \pi/2$ von der seitlichen Mantelfläche begrenzt. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \Theta < \Theta_c & : \quad \cos \Theta = \frac{d}{2\ell} \\ \Theta > \Theta_c & : \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Theta \right) = \frac{R}{\ell}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Daraus erhält man

$$\ell = \begin{cases} \frac{d}{2\mu} & \text{für } \Theta < \Theta_c, \quad \text{bzw. } \mu > \mu_c \\ \frac{R}{\sqrt{1-\mu^2}} & \text{für } \Theta > \Theta_c, \quad \text{bzw. } \mu < \mu_c. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Eingesetzt ergibt sich also

$$\begin{aligned} n(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon c} \int_0^{2\pi} d\phi \, 2 \int_0^1 d\mu \left[\frac{d}{2\mu} \Theta(\mu - \mu_c) + \frac{R}{\sqrt{1-\mu^2}} \Theta(\mu_c - \mu) \right] \\ &= \frac{4\pi j_\epsilon d}{\epsilon c} \frac{1}{2} \left[\frac{2R}{d} \underbrace{\arctan \frac{d}{2R}} + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{2R}{d} \right)^2 \right] \right]. \\ &= \frac{d}{2R} - \frac{1}{3} \left(\frac{d}{2R} \right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Hierbei ist $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion (vgl. Gleichung 3.22). Mit der Näherung für den inversen Tangens, die in nullter Ordnung schon ab $d \approx R$ sehr gut erfüllt ist, erhält man schließlich für die zentrale Targetphotonendichte

$$n(\epsilon) \simeq \frac{4\pi j_\epsilon d}{\epsilon c} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{2R}{d} \right)^2 \right] \right] \equiv G(d, R) \frac{j_\epsilon}{\epsilon}. \quad (\text{C.10})$$

Anhang D

Die Berechnung der differentiellen Streurrate \dot{n}_S

Wie bereits in Unterkapitel 3.1 diskutiert, müssen drei verschiedene Bezugssysteme bei der Berechnung des inversen Comptonprozesses unterschieden werden. Es ist bequem, die Berechnung der differentiellen Streurrate \dot{n}_S im Laborsystem durchzuführen, insbesondere da die Verteilungen der Streupartner hier als isotrop angesetzt werden können. Nach Dermer et al. (1992) ist die differentielle Streurrate im Laborsystem gegeben durch (vgl. Unterkapitel 3.3ff)

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) = c \int_1^\infty d\gamma \oint d\Omega_e \int_0^\infty d\epsilon \oint d\Omega (1 - \beta \cos \psi) n(\epsilon, \Omega) n_e(\gamma, \Omega_e) \frac{d^2\sigma}{d\epsilon_S d\Omega_S}. \quad (\text{D.1})$$

Ist sowohl die Elektronen- als auch die Targetphotonenverteilung isotrop, ist es a priori die differentielle Streurrate ebenfalls. Eine Mittelung über den azimuthalen Streuwinkel Ω_S führt in diesem Fall also zu keinerlei Informationsverlust, und die differentielle Streurrate lässt sich formal umformen zu

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) = \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty d\gamma \oint d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e) \times \left[c \oint d\Omega_S \int_0^\infty d\epsilon \oint d\Omega (1 - \beta \cos \psi) n(\epsilon, \Omega) \frac{d^2\sigma}{d\epsilon_S d\Omega_S} \right]. \quad (\text{D.2})$$

$$= \oint d\Omega_S \frac{d^3N}{dt d\Omega_S d\epsilon_S} = \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \quad (\text{D.3})$$

Die isotrope differentielle Streurrate berechnet sich also aus der Faltung der Elektronenverteilung n_e mit der Streurrate $d^2N/(dt d\epsilon_S)$, die für ein einzelnes Elektron und eine isotrope Photonverteilung gilt. Diese wiederum ergibt sich aus

$$\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} = \oint d\Omega_S \frac{d^3N}{dt d\Omega_S d\epsilon_S} = \frac{1}{\gamma} \oint d\Omega'_S \frac{\epsilon'_S}{\epsilon_S} \frac{d^3N}{dt' d\Omega'_S d\epsilon'_S}. \quad (\text{D.4})$$

Im letzten Schritt wird zum einen die Transformationseigenschaft der Energie ausgenutzt, hier

$$\epsilon_S = \gamma \epsilon'_S (1 + \beta \mu'_S) \quad \rightsquigarrow \quad d\epsilon_S = \gamma d\epsilon'_S (1 + \beta \mu'_S) = \frac{\epsilon_S}{\epsilon'_S} d\epsilon'_S, \quad (\text{D.5})$$

sowie die der Zeit

$$t' = \frac{t}{\gamma}. \quad (\text{D.6})$$

Zum anderen folgt aus dem Transformationsverhalten des Differential eines Polarwinkels (siehe Gleichung A.10) und des zugeordneten Azimutwinkels (siehe Gleichung A.11)

$$d\Omega'_S = d\mu'_S d\phi'_S = \frac{d\mu_S}{\gamma^2 (1 - \beta \mu_S)^2} d\phi_S = \frac{d\Omega_S}{\gamma^2 (1 - \beta \mu_S)^2} = \frac{\epsilon_S'^2}{\epsilon_S^2} d\Omega_S. \quad (\text{D.7})$$

Des Weiteren kann ausgenutzt werden, dass das differentielle Raumwinkelement $d\Omega'_{\text{ph}} \equiv d\phi'_{\text{ph}} d\cos\chi'$ (zur Definition von χ siehe Abbildung 3.1) identisch ist mit $d\Omega'_S = d\phi'_S d\mu'_S$, dass also das Raumwinkelement der gestreuten Photonen in Bezug auf die Jetachse $d\Omega'_S$ gleich ist zu dem Raumwinkelement der gestreuten Photonen in Bezug auf die einlaufenden Photonen $d\Omega'_{\text{ph}}$: A priori ist erkennbar, dass das Differential des Raumwinkelements der gestreuten Photonen, also das differentielle Raumwinkelement, dessen Polarwinkel sich auf die Ausbreitungsrichtung der gestreuten Photonen \mathbf{k}_S bezieht, nicht von der Wahl des Bezugspartners für den Polarwinkel (\mathbf{B}_Γ oder \mathbf{k}) abhängen kann; formal lässt sich zeigen, daß die Jacobi-Matrix der Transformation zwischen den beiden Bezugssystemen $\partial(\cos\chi', \phi')/\partial(\mu'_S, \phi'_S)$ gleich 1 ist (Mause, 1996).

Somit erhält man

$$\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} = \frac{1}{\gamma} \oint d\Omega'_{\text{ph}} \frac{\epsilon'_S}{\epsilon_S} \frac{d^3N}{dt' d\Omega'_S d\epsilon'_S}. \quad (\text{D.8})$$

Die Streurrate eines einzelnen Elektrons dN'/dt' im Elektronruhesystem lässt sich nach Blumenthal & Gould (1970) berechnen mit

$$\frac{dN'}{dt'} = c \int \sigma dn'. \quad (\text{D.9})$$

Hier ist σ der Wirkungsquerschnitt. Differentiell erweitert, ergibt sich entsprechend

$$\frac{d^3N}{dt' d\epsilon'_S d\Omega'_S} = c \int \frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S} dn'. \quad (\text{D.10})$$

Dies eingesetzt in Gleichung D.8 ergibt zunächst

$$\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} = \frac{c}{\gamma} \oint d\Omega'_{\text{ph}} \int dn' \frac{\epsilon'_S}{\epsilon_S} \frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S}. \quad (\text{D.11})$$

Da hier die Targetphotonendichte im Elektronruhesystem in der Form $n'(\epsilon', \epsilon)$ gegeben ist (siehe Gleichung 3.21 bzw. B.12), gilt für die differentielle Photonendichte $dn' = n'(\epsilon', \epsilon) d\epsilon' d\epsilon$. Daraus folgt

$$\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} = \frac{c}{\gamma} \int_0^\infty d\epsilon \int_0^\infty d\epsilon' \oint d\Omega'_{\text{ph}} \frac{\epsilon'_S}{\epsilon_S} \frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S} n'(\epsilon', \epsilon). \quad (\text{D.12})$$

Nach Einsetzen der Targetphotonenverteilung n aus Gleichung 3.21, bzw. B.12, und des differentiellen Wirkungsquerschnittes $d^2\sigma/(d\epsilon'_S d\Omega'_S)$ aus Gleichung 3.17 ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} &= \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^2 \epsilon_S} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \int_0^\infty d\epsilon' \int_{-1}^1 d \cos \chi' \left\{ \delta(\epsilon'_S - \epsilon'_0) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\epsilon'_S{}^3}{\epsilon'} \left[\frac{\epsilon'}{\epsilon'_S} + \frac{\epsilon'_S}{\epsilon'} - \sin^2 \chi' \right] \Theta \left(\epsilon' - \frac{\epsilon}{2\gamma} \right) \Theta(2\gamma\epsilon - \epsilon') \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

mit

$$\epsilon'_0 = \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'(1 - \cos \chi')} \quad (\text{D.14})$$

(vgl. Gleichung 3.18). Zunächst soll die Integration über ϵ' ausgeführt werden. Dazu kann die δ -Funktion mit Hilfe der Formel

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|} \quad \text{mit} \quad f(x_i) = 0 \quad (\text{D.15})$$

transformiert werden. Dazu müssen zunächst die Nullstellen ϵ'_i des Arguments $\epsilon'_S - \epsilon'_0$ der δ -Funktion bestimmt werden:

$$\tilde{f} \equiv \epsilon'_S - \frac{\epsilon'_i}{1 + \epsilon'_i(1 - \cos \chi')} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon'_i = \frac{\epsilon'_S}{1 - \epsilon'_S(1 - \cos \chi')}. \quad (\text{D.16})$$

Aus der Ableitung des Arguments ergibt sich

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \epsilon'} \right| = \frac{1 + \epsilon'(1 - \cos \chi') - \epsilon' \cdot (1 - \cos \chi')}{[1 + \epsilon'(1 - \cos \chi')]^2} = [1 + \epsilon'(1 - \cos \chi')]^{-2}. \quad (\text{D.17})$$

Also erhält man

$$\delta(\epsilon'_S - \epsilon'_0) = [1 + \epsilon'(1 - \cos \chi')]^2 \delta \left(\epsilon' - \frac{\epsilon'_S}{1 - \epsilon'_S(1 - \cos \chi')} \right). \quad (\text{D.18})$$

Der Vorfaktor der transformierten δ -Funktion lässt sich noch umschreiben: Aus $f(x)$ $\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$ folgt

$$[1 + \epsilon'(1 - \cos \chi')]^2 \rightsquigarrow \left[1 + \frac{\epsilon'_S(1 - \cos \chi')}{1 - \epsilon'_S(1 - \cos \chi')} \right]^2 = \frac{1}{[1 - \epsilon'_S(1 - \cos \chi')]^2}. \quad (\text{D.19})$$

Durch Einsetzen in Gleichung D.13 und Integration über ϵ' ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} &= \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^2 \epsilon_S} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \int_{-1}^1 d \cos \chi' \left\{ \frac{\epsilon_S'^2}{1 - \epsilon_S'(1 - \cos \chi')} \right. \\ &\times \left[\frac{1}{1 - \epsilon_S'(1 - \cos \chi')} + 1 - \epsilon_S'(1 - \cos \chi') - (1 - \cos^2 \chi') \right] \\ &\times \left. \Theta \left(\frac{\epsilon_S'}{1 - \epsilon_S'(1 - \cos \chi')} - \frac{\epsilon}{2\gamma} \right) \Theta \left(2\gamma\epsilon - \frac{\epsilon_S'}{1 - \epsilon_S'(1 - \cos \chi')} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Bei der nun nachfolgenden Integration über χ' gilt es zu bedenken, dass ϵ_S' aufgrund der Transformationseigenschaften der Energie eine Winkelabhängigkeit beinhaltet. Es gilt

$$\epsilon_S = \gamma \epsilon_S' (1 + \beta \cos \psi_S') \quad (\text{D.21})$$

und weiter, mit dem Kosinussatz der sphärischen Geometrie

$$\cos \psi_S' = \cos \chi' \cos \psi' + \sqrt{(1 - \cos^2 \chi')(1 - \cos^2 \psi')} \cos(\phi_\chi' - \phi_\psi'), \quad (\text{D.22})$$

wobei ϕ_χ' und ϕ_ψ' die den Polarwinkeln χ' und ψ' assoziierten Azimutwinkel sind, betrachtet in einem sphärischen Koordinatensystem mit der Bezugsachse parallel zu \mathbf{k}_S . Um die Integration ausführen zu können, behilft man sich mit der sogenannten *head-on*-Approximation; eine ausführliche Diskussion dieser Näherung findet sich in Anhang F. Anschaulich lässt sich die Situation so darstellen, dass ein relativistisches Elektron durch seine schnelle Relativbewegung alle Photonen „von vorne auf sich zukommen sieht“. Daher kann man den Winkel $\psi' = \pi$ setzen und es folgt unmittelbar aus Gleichung D.22

$$\cos \psi_S' = -\cos \chi'. \quad (\text{D.23})$$

Gleichung D.21 lässt sich damit entsprechend umformen:

$$\epsilon_S \stackrel{\text{head-on}}{\simeq} \gamma \epsilon_S' (1 - \beta \cos \chi'). \quad (\text{D.24})$$

Die Annahme hochrelativistischer Elektronen beinhaltet außerdem $\beta \simeq 1$. Daraus folgt

$$\epsilon_S' \stackrel{\beta=1}{\simeq} \frac{\epsilon_S}{\gamma(1 - \cos \chi')} = \frac{\epsilon_S}{\gamma\eta}, \quad (\text{D.25})$$

wobei die Substitution

$$\eta \equiv 1 - \cos \chi' \quad \Rightarrow \quad \cos \chi' = 1 - \eta \quad \Rightarrow \quad d \cos \chi' = -d\eta \quad (\text{D.26})$$

eingeführt wurde. Eingesetzt ergibt sich damit für Gleichung D.20

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} &= \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^2 \epsilon_S} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \int_{1-\beta}^{1+\beta} d\eta \left\{ \Theta \left[\frac{\frac{\epsilon_S}{\gamma\eta}}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} - \frac{\epsilon}{2\gamma} \right] \Theta \left[2\gamma\epsilon - \frac{\frac{\epsilon_S}{\gamma\eta}}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\epsilon_S}{\gamma\eta} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} \right) \left[\frac{1}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} - 1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} - (1 - (1 - \eta)^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Zur Vereinfachung der Transformationsgrenzen für η wird erneut $\beta \simeq 1$ ausgenutzt, sowie die Umformung

$$1 - \beta = \frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{(1 + \beta)} = \frac{1}{(1 + \beta)\gamma^2} \simeq \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (\text{D.28})$$

Löst man die Bedingungen der beiden Heaviside-Funktionen

$$\frac{\frac{\epsilon_S}{\gamma\eta}}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} - \frac{\epsilon}{2\gamma} > 0 \quad \text{und} \quad 2\gamma\epsilon - \frac{\frac{\epsilon_S}{\gamma\eta}}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} > 0 \quad (\text{D.29})$$

nach η auf, und formt den Integranden um, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} &= \frac{\pi r_0^2 c \epsilon_S}{2\gamma^4} \left[1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \right]^{-1} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \int_{\frac{1}{2\gamma^2}}^2 \frac{d\eta}{\eta^2} \left\{ \left[\eta^2 - 2\eta + 2 + \frac{\frac{\epsilon_S^2}{\gamma^2}}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \Theta \left[\eta - \frac{\frac{\epsilon_S}{\gamma}}{2\gamma^2\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \right)} \right] \Theta \left[\frac{2\epsilon_S}{\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \right)} - \eta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Die Integration läuft also über alle η , für die gilt

$$\eta \in \left[\max \left(\frac{1}{2\gamma^2}, \underbrace{\frac{\epsilon_S}{2\gamma^2\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \right)}}_{\equiv \eta_1} \right), \min \left(2, \underbrace{\frac{2\epsilon_S}{\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \right)}}_{\equiv \eta_2} \right) \right]. \quad (\text{D.31})$$

Die Integrationsgrenzen, die sich aus der substituierten Integration über χ' ergeben, konkurrieren also mit den Beschränkungen durch die Heaviside-Funktionen, die ursprünglich von der Targetphotonendichte herrühren. Es ergeben sich vier verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, nämlich

	I	II	III	
1. Fall:	$\eta_1 < \frac{1}{2\gamma^2}$	$< \eta_2$	< 2	
2. Fall:	$\frac{1}{2\gamma^2} < \eta_1$	< 2	$< \eta_2$. (D.32)
3. Fall:	$\frac{1}{2\gamma^2} < \eta_1$	$< \eta_2$	< 2	
4. Fall:	$\eta_1 < \frac{1}{2\gamma^2}$	< 2	$< \eta_2$	

Jeder Fall besteht aus drei Ungleichungen, die mit den römischen Zahlen I–III nummeriert sind und nun betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
 \text{1. Fall} \quad \text{I:} \quad & \frac{\epsilon_S}{2\gamma^2\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} < \frac{1}{2\gamma^2} \\
 & \Rightarrow \epsilon_S < \epsilon - \epsilon_S \frac{\epsilon}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_S < \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{\gamma}} \simeq \epsilon \\
 \text{II:} \quad & \frac{1}{2\gamma^2} < \frac{2\epsilon_S}{\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} \\
 & \Rightarrow \epsilon - \epsilon_S \frac{\epsilon}{\gamma} < 4\gamma^2\epsilon_S \quad \Rightarrow \quad \epsilon_S > \frac{\frac{\epsilon}{4\gamma^2}}{1 + \frac{\epsilon}{4\gamma^3}} \simeq \frac{\epsilon}{4\gamma^2} \\
 \text{III:} \quad & \frac{2\epsilon_S}{\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} < 2 \\
 & \Rightarrow \epsilon_S < \epsilon - \epsilon_S \frac{\epsilon}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_S < \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{\gamma}} \simeq \epsilon \\
 \\
 \text{2. Fall} \quad \text{I+III:} \quad & \text{analog}^a \text{ 1.I+III} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_S > \epsilon \quad (\text{D.33}) \\
 \text{II:} \quad & 2 > \frac{2\epsilon_S}{\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} \\
 & \Rightarrow \epsilon_S < 4\gamma^2\epsilon - 4\gamma\epsilon\epsilon_S \quad \Rightarrow \quad \epsilon_S < \frac{4\gamma^2\epsilon}{1 + 4\gamma\epsilon} \\
 \\
 \text{3. Fall} \quad \text{I:} \quad & \text{analog}^a \text{ 1.I} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_S > \epsilon \\
 \text{II:} \quad & \frac{\epsilon_S}{2\gamma^2\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} < \frac{2\epsilon_S}{\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} \Rightarrow \quad \frac{1}{4\gamma^2} < 1 \quad \checkmark \\
 \text{III:} \quad & \text{analog}^a \text{ 1.III} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_S < \epsilon \quad \checkmark \text{ (3.I)} \\
 \\
 \text{4. Fall} \quad & \text{analog 3. Fall}
 \end{aligned}$$

^aIn der Gleichung auf die verwiesen wird muß lediglich das jeweilige Relationssymbol \gtrless ausgetauscht werden

Der 3. und der 4. Fall führen also zu Widersprüchen, und sind somit keine realisierbaren Parameterkonstellationen. Aus den ersten beiden Fällen folgt, dass es zwei Energiebereiche in der Energie der gestreuten Photonen gibt, und zwar von

$$\boxed{\frac{\epsilon}{4\gamma^2} < \epsilon_S < \epsilon} \quad \text{und} \quad \boxed{\epsilon < \epsilon_S < \frac{4\gamma^2\epsilon}{1+4\gamma\epsilon}}.$$

Gemäß den Fallunterscheidungen aus den Ungleichungen D.32 läuft die Integration im ersten, dem niederenergetischen Fall ($\epsilon_S < \epsilon$) also von $1/2\gamma^2$ bis η_2 , und im zweiten, dem hochenergetischen Fall ($\epsilon < \epsilon_S$), von η_1 bis 2. Damit ergibt sich aus Gleichung D.30, für den niederenergetische Bereich von ϵ_S , nach der Integration über η

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \right|_{\epsilon_S < \epsilon} &= \frac{\pi r_0^2 c \epsilon_S}{2\gamma^4} \left[1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \right]^{-1} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \\ &\times \left[\eta - 2 \ln \eta - \left(2 + \frac{\frac{\epsilon_S^2}{\gamma^2}}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} \right) \frac{1}{\eta} \right] \frac{\epsilon^{\frac{2\epsilon_S}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}}}}{2\gamma^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Da hier der Fall $\epsilon_S < \epsilon$ betrachtet wird und außerdem $\epsilon \ll \gamma$ angenommen werden darf, gilt $\epsilon_S/\gamma \ll 1$. Somit kann das Verhältnis ϵ_S/γ und dessen Potenzen gegenüber 1 vernachlässigt werden. Es folgt

$$\left. \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \right|_{\epsilon_S < \epsilon} = \frac{\pi r_0^2 c \epsilon_S}{2\gamma^4} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \left[\eta - 2 \ln \eta - \frac{2}{\eta} \right] \frac{2\epsilon_S}{\epsilon} \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (\text{D.35})$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\boxed{\frac{\epsilon}{4\gamma^2} < \epsilon_S < \epsilon} \quad \boxed{\frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \Big|_{\epsilon_S < \epsilon} = \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^4} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \left[\frac{4\gamma^2\epsilon_S}{\epsilon} - 1 + 2\frac{\epsilon_S^2}{\epsilon^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_S} \ln \frac{\epsilon}{4\gamma^2\epsilon_S} \right) \right]}. \quad (\text{D.36})$$

Dies ist identisch zu der Lösung von Jones (1968), wenn hier der dritte Term in der eckigen Klammer vernachlässigt wird.

Um eine Lösung für den hochenergetischen Energiebereich zu erhalten, führt man

zunächst die Größe q ein, mit

$$q \equiv \frac{\epsilon_S}{4\gamma^2\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} \Rightarrow \epsilon_S = \frac{4\gamma^2\epsilon q}{1 + 4\gamma\epsilon q}, \quad (\text{D.37})$$

also $q = \eta_1/2$, gemäß der Definition von η_1 aus Gleichung D.32. Damit ergibt sich aus Gleichung D.30 nach Integration

$$\left. \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \right|_{\epsilon < \epsilon_S} = \frac{2\pi r_0^2 c}{\gamma^2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} q \left[\eta - 2 \ln \eta - \left(2 + \frac{\frac{\epsilon_S^2}{\gamma^2}}{1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}} \right) \frac{1}{\eta} \right]_{2q}^2 \quad (\text{D.38})$$

und schließlich (Jones, 1968)

$$\epsilon < \epsilon_S < 4\gamma^2\epsilon/(1 + 4\gamma\epsilon)$$

$$\left. \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \right|_{\epsilon < \epsilon_S} = \frac{2\pi r_0^2 c}{\gamma^2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \left[2q \ln q - 2q^2 + q + 1 + \frac{1}{2} \frac{(4\gamma\epsilon q)^2}{1 + 4\gamma\epsilon q} (1 - q) \right], \quad (\text{D.39})$$

wobei der Gültigkeitsbereich in der gestreuten Energie ϵ_S gleichbedeutend ist mit der Bedingung

$$\frac{1}{4\gamma^2} < q < 1. \quad (\text{D.40})$$

D.1 Vergleich: Die differentielle Streurrate eines Elektrons $d^2N/(dt d\epsilon_S)$ im Thomson-Limit

Das *Thomson-Limit* ist definiert über die Beschränkung der Targetphotonenenergie im Ruhesystem des Elektrons: $\epsilon' < 1$. Der Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt (Gleichung 3.17)

$$\frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\epsilon_S'^2}{\epsilon'^2} \left[\frac{\epsilon'}{\epsilon'_S} + \frac{\epsilon'_S}{\epsilon'} - \sin^2 \chi' \right] \delta \left(\epsilon'_S - \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'(1 - \cos \chi')} \right) \quad (\text{D.41})$$

vereinfacht sich dadurch erheblich: Vernachlässigt man $\epsilon'(1 - \cos \chi')$ gegenüber eins^b ergibt sich für die δ -Funktion unmittelbar $\delta(\epsilon'_S - \epsilon')$. Da

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0), \quad (\text{D.42})$$

^bDamit zeigt sich, dass das Thomson-Limit erst für $\epsilon' \ll 1$ eine gute Näherung darstellt.

ergibt sich

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\epsilon'_S d\Omega'_S} \right|^{TL} = \frac{r_0^2}{2} [1 + \cos^2 \chi'] \delta(\epsilon'_S - \epsilon'). \quad (D.43)$$

Die Formel D.43, sowie die Formel für eine isotrope Targetphotonenverteilung aus Gleichung 3.21, bzw. B.12, setzt man in Gleichung D.12 ein. Nach der Integration über den Azimutwinkel und über ϵ' ergibt sich

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \right|^{TL} &= \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^2 \epsilon_S} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 d\cos \chi' [1 + \cos^2 \chi'] \epsilon_S'^2 \Theta\left(\epsilon'_S - \frac{\epsilon}{2\gamma}\right) \Theta(2\gamma\epsilon - \epsilon'_S) \\ &= \frac{\pi r_0^2 c \epsilon_S}{2\gamma^2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \\ &\quad \times \int_{1/2\gamma^2}^2 \frac{d\eta}{\eta^2} [2 - 2\eta - \eta^2] \Theta\left(\eta - \frac{\epsilon_S}{2\gamma^2\epsilon}\right) \Theta\left(\frac{2\epsilon_S}{\epsilon} - \eta\right), \quad (D.44) \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt, analog zur Herleitung im allgemeinen Fall, die Näherung und die Substitution aus den Gleichungen D.25ff verwendet werden.

Dieses Zwischenergebnis entspricht der allgemeinen Lösung aus Gleichung D.30, bis auf den letzten Summanden in der eckigen Klammer, für den Übergang

$$1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma} \longrightarrow 1. \quad (D.45)$$

Offensichtlich ist die Gültigkeit der Lösung im Thomson-Limit gleichbedeutend mit der Forderung $\epsilon_S \ll \gamma$.

Für den Energiebereich $\epsilon_S > \epsilon$ ist

$$\frac{\epsilon_S}{2\gamma^2\epsilon} > \frac{1}{2\gamma^2} \quad \text{und} \quad \frac{2\epsilon_S}{\epsilon} > 2. \quad (D.46)$$

Somit sind die obere und untere Integrationsgrenze 2, bzw. $\epsilon_S/2\gamma^2\epsilon$; die Integration über η ergibt unmittelbar

$$\left. \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \right|^{TL} = \frac{\pi r_0^2 c}{2\gamma^4} \int_0^{\epsilon_S} d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \left(2\epsilon_S \ln \frac{\epsilon_S}{4\gamma^2\epsilon} + \epsilon_S + 4\gamma^2\epsilon - \frac{\epsilon_S^2}{2\gamma^2\epsilon} \right). \quad (D.47)$$

Dies entspricht der Lösung von Blumenthal & Gould (1970).

Anhang E

Die Berechnung der Kühlrate $\dot{\gamma}$

Wie in Unterkapitel 3.4 beschrieben, ist die Kenntnis der Kühlrate der inversen Comptonstreuung notwendig für die Beschreibung des zeitlichen Verhaltens einer Elektronenverteilung. Sie errechnet sich aus der differentiellen Streurrate gemäß

$$-\dot{\gamma} = \oint d\Omega_S \int d\epsilon_S \epsilon_S \dot{n}_S^\delta(\epsilon_S, \Omega_S) . \quad (\text{E.1})$$

Der hochgestellte Index δ bei der differentiellen Streurrate deutet an, dass sie für ein einzelnes Elektron berechnet wird, also (Gleichung 3.15)

$$\dot{n}_S^\delta(\epsilon_S, \Omega_S) = \oint d\Omega_e \int d\gamma_e n_e(\gamma_e, \Omega_e) \frac{d^3N}{dt d\epsilon_S d\Omega_S}$$

mit $n_e(\gamma_e, \Omega_e) = \delta(\gamma_e - \gamma) \delta(\Omega_e - \Omega) .$ (E.2)

Aus Gründen der Konsistenz der Darstellung wird, anders als bei der sonst verwendeten Schreibweise, hier γ_e im Argument der differentiellen spektralen Elektronendichte verwendet, um nach der Integration über γ_e in \dot{n}_S^δ wieder γ als Parameter zu erhalten. Eingesetzt in Gleichung E.1 ergibt

$$\begin{aligned} -\dot{\gamma} &= \int d\epsilon_S \epsilon_S \oint d\Omega_e \delta(\Omega_e - \Omega) \int d\gamma_e \delta(\gamma_e - \gamma) \oint d\Omega_S \frac{d^3N}{dt d\epsilon_S d\Omega_S} \\ &= \int d\epsilon_S \epsilon_S \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} . \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Die Kühlrate ergibt sich also aus der Energieintegration der in Anhang D hergeleiteten Streurrate eines Elektrons. Für die Elektronenkühlung wird nur der hochenergetische Fall betrachtet, bei dem die Photonen Energie gewinnen. Der niederenergetische Fall, der einer Heizung der Elektronen gleichkäme, kann gegenüber den Energieverlusten vernachlässigt werden.

Der Ausdruck für $d^2N/(dt d\epsilon_S)$ aus Gleichung D.39, eingesetzt in Gleichung E.3, ergibt

$$-\dot{\gamma} = \frac{2\pi r_0^2 c}{\gamma^2} \int d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \times \int_{\epsilon}^{\frac{4\gamma^2\epsilon}{1+4\gamma\epsilon}} d\epsilon_S \epsilon_S \left[2q \ln q - 2q^2 + q + 1 + \frac{1}{2} \frac{(4\epsilon\gamma q)^2}{1+4\epsilon\gamma q} (1-q) \right], \quad (\text{E.4})$$

$$\text{mit } q = \frac{\epsilon_S}{4\epsilon\gamma^2 \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)}. \quad (\text{E.5})$$

Aus der Definition von q ergibt sich für die Integration über ϵ_S

$$\begin{aligned} \epsilon_S &= \frac{4\gamma^2\epsilon q}{1+4\gamma\epsilon q} \Rightarrow \frac{d\epsilon_S}{dq} = \frac{4\gamma^2\epsilon(1+4\gamma^2\epsilon q) - 4\gamma^2\epsilon q \cdot 4\epsilon q}{(1+4\gamma^2\epsilon q)^2} \\ &\Rightarrow d\epsilon_S = \frac{4\gamma^2\epsilon}{(1+4\gamma\epsilon q)^2} dq. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Setzt man zur besseren Übersicht noch $m \equiv 4\gamma\epsilon$, erhält man

$$-\dot{\gamma} = C \int d\epsilon \epsilon n(\epsilon) \int_{\frac{1}{4\gamma^2}}^1 dq \left[\overset{\textcircled{A}}{\frac{2q^2 \ln q}{(1+mq)^2}} + \overset{\textcircled{B}}{\frac{q+q^2-2q^3}{(1+mq)^3}} + \overset{\textcircled{C}}{\frac{m}{2}} \overset{\textcircled{D}}{\frac{q^3-q^4}{(1+mq)^4}} \right], \quad (\text{E.7})$$

wobei die Vorfaktoren zu $C \equiv 32\pi r_0^2 c \gamma^2 = 12\sigma_T c \gamma^2$ zusammengefasst werden. Hierbei ist σ_T der *Thompson-Wirkungsquerschnitt*. Es gilt also, sechs Integrationen auszuführen, die mit \textcircled{A} – \textcircled{F} gekennzeichnet sind (s. o.). Der Integrand kleinster Ordnung im Zähler lässt sich elementar lösen:

$$\textcircled{B} : \int dq \frac{q}{(1+mq)^3} \quad \text{setze } x \equiv 1+mq \Rightarrow q = \frac{1}{m}(x-1), \quad dq = \frac{1}{m}dx \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{1}{m^2} \int dx \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right] &= \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right] = \frac{1}{2m^2} \frac{1-2x}{x^2} \\ &= - \left[\frac{q}{m} + \frac{1}{2m^2} \right] \frac{1}{(1+mq)^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Die Integrale © bis ƒ lassen sich mit derselben Substitution analog lösen, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \text{©} : \quad \int dq \frac{q^2}{(1+mq)^3} &= \left[\frac{2q}{m^2} + \frac{3}{2m^3} \right] \frac{1}{(1+mq)^2} + \frac{1}{m^3} \ln(1+mq) . \\
 \text{ƒ} : \quad \int dq \frac{q^3}{(1+mq)^3} &= \left[\frac{2q^2}{m^2} + \left(\frac{1}{m} - \frac{2}{m^3} \right) q - \frac{5}{2m^4} \right] \frac{1}{(1+mq)^2} \\
 &\quad - \frac{3}{m^3} \ln(1+mq) . \\
 \text{e} : \quad \int dq \frac{q^3}{(1+mq)^4} &= \left[\frac{3q^2}{m^2} + \frac{9q}{2m^3} + \frac{11}{6m^4} \right] \frac{1}{(1+mq)^3} \\
 &\quad + \frac{1}{m^4} \ln(1+mq) . \\
 \text{f} : \quad \int dq \frac{q^4}{(1+mq)^4} &= \left[\frac{q^4}{m} - \frac{12q^2}{m^3} + \frac{18q}{m^4} - \frac{22}{3m^5} \right] \frac{1}{(1+mq)^3} \\
 &\quad - \frac{4}{m^5} \ln(1+mq) . \tag{E.10}
 \end{aligned}$$

Das erste Integral ist etwas schwieriger zu lösen. Zunächst wird partiell integriert:

$$\begin{aligned}
 \text{A} : \quad \int dq \frac{\overbrace{q^2}^{V'}}{(1+mq)^2} \overbrace{\ln q}^U \\
 \left[\begin{array}{l} V' = \frac{q^2}{(1+mq)^2} \xrightarrow{\text{©}} V = \left[\frac{2q}{m^2} + \frac{3}{2m^3} \right] \frac{1}{(1+mq)^2} + \frac{\ln(1+mq)}{m^3} \\ U' = \frac{1}{q} \longleftarrow U = \ln q \end{array} \right. \\
 = \left[\frac{2q}{m^2} + \frac{3}{2m^3} \right] \frac{\ln q}{(1+mq)^2} + \frac{1}{m^3} \ln q \ln(1+mq) \quad \boxed{\text{III}} \\
 - \int dq \left\{ \underbrace{\frac{2}{m^2} \frac{1}{(1+mq)^2}}_{\boxed{\text{I}}} + \underbrace{\frac{3}{2m^3} \frac{1}{q(1+mq)^2}}_{\boxed{\text{I}}} + \frac{1}{m^3} \overbrace{\frac{\ln(1+mq)}{q}}^{\boxed{\text{III}}} \right\} \tag{E.11} \\
 = m \left[\underbrace{\frac{1}{(1+mq)^2}}_{\boxed{\text{I}}} - \underbrace{\frac{1}{1+mq}}_{\boxed{\text{II}}} - \underbrace{\frac{1}{mq}}_{\boxed{\text{II}}} \right] .
 \end{aligned}$$

Nach der Partialbruchzerlegung des zweiten verbleibenden Integrals lassen sich die beiden, bis auf einen Vorfaktor identischen Integrale $\boxed{\text{I}}$, mit der Substitution aus Gleichung E.8, lösen; die Integrale $\boxed{\text{II}}$ ergeben unmittelbar einen natürlichen Logarithmus

mit dem Nenner als Argument. Das Integral $\boxed{\text{III}}$ lässt sich als *Dilogarithmus-Funktion* darstellen. Diese ist definiert als (Abramowitz & Stegun, 1964)

$$\text{dilog}(x) \equiv - \int_1^x dt \frac{\ln t}{t-1}. \quad (\text{E.12})$$

Das Integral $\boxed{\text{III}}$ muss entsprechend umformuliert und die Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4\gamma^2}}^1 dq \frac{\ln(1+mq)}{q} &= \int_{1+\frac{m}{4\gamma^2}}^{1+m} dx \frac{\ln x}{x-1} \\ &= \text{dilog}(1+m) - \text{dilog}\left(\underbrace{1 + \frac{m}{4\gamma^2}}\right). \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$= 1 + \frac{\epsilon}{\gamma} \simeq 1$$

Hier wird $\epsilon \ll \gamma$ ausgenutzt. Der zweite Dilogarithmus entfällt, da sich aus der Definition $\text{dilog}(1)=0$ ergibt. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{A}} : \int_{\frac{1}{4\gamma^2}}^1 dq \frac{q^2}{(1+mq)^2} \ln q &= \frac{1}{m^3} \text{dilog}(1+m) + \left[\frac{1}{2m^3} \frac{1}{1+mq} + \frac{1}{m^3} \overbrace{\ln q \ln(1+mq)}^{\boxed{1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2m^3} \ln(1+mq) - \frac{1}{m^2} \underbrace{\frac{q \ln q}{(1+mq)^2}}_{\boxed{2}} - \frac{3}{2m^3} \underbrace{\frac{q^2 \ln q}{(1+mq)^2}}_{\boxed{2}} \right]_{\frac{1}{4\gamma^2}}^1. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Mit den Lösungen der Integrale $\textcircled{\text{A}} - \textcircled{\text{F}}$ in den Gleichungen E.9, E.10 und E.14 liegt nunmehr die vollständige Lösung von Gleichung E.7 vor. Um diese etwas kompakter darstellen zu können, wird die schon mehrfach verwendete hochrelativistische Näherung $\gamma \gg 1$ genutzt. Damit kann man die untere Integrationsgrenze $1/4\gamma^2$ zu Null setzen.

Es fällt auf, dass die Terme der Form $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ für $q = 0$ unbestimmte Ausdrücke liefern. Mit Hilfe der Regel von l'Hospital ergibt sich

$$\begin{aligned} \boxed{2} : \quad \lim_{q \rightarrow 0} (q^n \ln q) &= - \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{-\ln q}{\frac{1}{q^n}} \right) \longrightarrow \text{„}\infty\text{“} \\ &= - \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{q}}{\frac{n}{q^{n+1}}} \right) = - \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{q^n}{n} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Zur Untersuchung von Term $\boxed{1}$ wird auf die Reihendarstellung von $\ln(1+x)$ zurückgegriffen:

$$\begin{aligned} \boxed{1}: \quad \lim_{q \rightarrow 0} \left[\ln q \ln(1+mq) \right] &\stackrel{x \equiv mq}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln x \ln(1+x) - \overbrace{\ln m \ln(1+x)}^{x \rightarrow 0 \rightarrow 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^n \ln x \right]}_{= 0, \text{ siehe } \boxed{2}}. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Die zunächst unbestimmten Terme ergeben also Null für die untere Grenze. Setzt man die Grenzen ebenfalls in den Gleichungen E.9, E.10 und E.14 ein, und die dadurch erhaltenen Ausdrücke in Gleichung E.7, ergibt sich für die Kühlrate im hochrelativistischen Fall

$$\begin{aligned} -\dot{\gamma} = 3\sigma_{\text{T}}c\gamma \int d\epsilon n(\epsilon) \frac{1}{m^2} \left\{ \left(\frac{1}{2}m + 6 + \frac{6}{m} \right) \ln(1+m) \right. \\ \left. - \left[\frac{11}{12}m^3 + 8m^2 + 13m + 6 \right] (1+m)^{-2} + 2\text{dilog}(1+m) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

in Übereinstimmung zu dem Ergebnis von Jones (1968).

Im Thomson-Limit gilt $m = 4\gamma\epsilon \ll 1$; somit kann man Funktionen mit dem Argument $1+m$ entwickeln:

$$\ln(1+m) = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} \pm \dots \quad (\text{E.18})$$

$$(1+m)^{-2} = 1 - 2m + 3m^2 - 4m^3 \pm \dots \quad (\text{E.19})$$

Die Reihendarstellung der Dilogarithmusfunktion (Abramowitz & Stegun, 1964) liefert

$$\text{dilog}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^k}{k^2} \quad (\text{E.20})$$

$$\rightsquigarrow \text{dilog}(1+m) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{m^k}{k^2} = -m + \frac{m^2}{4} - \frac{m^3}{9} + \frac{m^4}{16} \mp \dots \quad (\text{E.21})$$

Setzt man als Näherung obige Entwicklungen, bis jeweils zur dritten Ordnung, in Gleichung E.17 ein, erhält man

$$-\dot{\gamma} \simeq 3\sigma_{\text{T}}c\gamma \int d\epsilon n(\epsilon) \frac{1}{m^2} \left\{ \left(\frac{1}{2}m + 6 + \frac{6}{m} \right) \left(m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{11}{12}m^3 + 8m^2 + 13m + 6 \right] (1 - 2m + 3m^2 - 4m^3) \\
& + 2 \left(-m + \frac{m^2}{4} - \frac{m^3}{9} + \frac{m^4}{16} \right) \} \tag{E.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = 3\sigma_{\text{TC}}\gamma \int d\epsilon n(\epsilon) \frac{1}{m^2} \left\{ \left(\cancel{6} + \cancel{3m} - \frac{1}{2}\cancel{m^2} + \frac{1}{4}m^3 \right) \right. \\
& \quad \left. - \left[\cancel{6} + \cancel{m} - \frac{1}{12}m^3 \right] - \cancel{2m} + \frac{1}{2}\cancel{m^2} - \frac{2}{9}m^3 + \frac{1}{16}m^4 \right\} \\
& = \frac{4}{3}\sigma_{\text{TC}}\gamma^2 \int d\epsilon n(\epsilon) \left(\epsilon - \frac{63}{10}\gamma\epsilon^2 \right) \tag{E.23}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -\dot{\gamma} \simeq \underbrace{\frac{4}{3}\sigma_{\text{TC}}\gamma^2}_{\gamma_{\text{TL}}} \frac{u_{\text{tot}}}{m_e c^2} \left(1 - \frac{63}{10} \frac{\gamma \langle \epsilon^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \right) . \tag{E.24}$$

Hierbei ist $u_{\text{tot}} \equiv m_e c^2 \int d\epsilon n(\epsilon) = m_e c^2 \langle \epsilon \rangle$ die totale Energiedichte der Targetphotonen; die spitzen Klammern bezeichnen den Mittelwert des jeweiligen Arguments. Die erste, nicht verschwindende Ordnung in ϵ ergibt also gerade die bekannte Kühlrate im Thomson-Limit γ_{TL} , wie sie in Blumenthal & Gould (1970) zu finden ist.

Anhang F

Die *head-on*-Approximation

Die sogenannte *head-on*-Approximation ist in der Fachliteratur weit verbreitet. Man macht sich dabei zunutze, dass ein relativistisches Elektron durch seine schnelle Relativbewegung „alle Photonen von vorne auf sich zukommen sieht“. Hierbei bedeutet „von vorne“ formal $\psi' \approx \pi \hat{=} 180^\circ$, dass sich also die Photonen antiparallel zur z -Achse ausbreiten, welche in Richtung der Bewegungsrichtung des Bezugssystems ausgerichtet ist (vgl. Abbildung F.1).

Nach Gleichung A.9 gilt für einen Winkelkoinus μ allgemein

$$\mu' = \frac{\mu - \beta}{1 - \beta\mu}, \quad (\text{F.1})$$

oder, mit $\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$,

$$\mu' = \frac{\gamma\mu - \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}\mu}. \quad (\text{F.2})$$

Hier lässt sich direkt ablesen, dass $\mu' \approx -1$ gilt, wenn $\gamma \gg 1$, dass der zugehörige Winkel also ungefähr π ist. Eine Abschätzung des Auftreffwinkels der Photonen im Elektronruhesystem lässt sich durch die Transformation von im Laborsystem seitlich auftreffenden Photonen erzielen. Mit $\mu_\psi = \cos\psi$ ergibt sich aus obiger Transformationsgleichung für $\psi = \pi/2$, also für Photonen, die im Laborsystem im rechten Winkel auf das Elektron treffen, für den Winkelkoinus $\mu_\psi = 0$, und damit für den Winkelkoinus im Elektronruhesystem μ_ψ'

$$\mu_\psi'(\psi = \frac{\pi}{2}) = -\beta$$

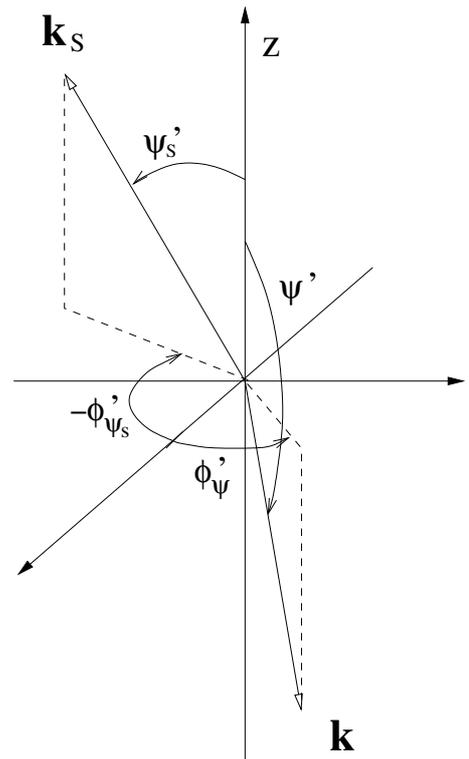


Abbildung F.1: Die Winkelverhältnisse im Ruhesystem des Elektrons. Die z -Achse zeigt in Richtung der Bewegungsrichtung des Elektrons im Laborsystem.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \psi'_{\psi=\frac{\pi}{2}} &= \arccos(-\beta) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\gamma}\right) \\ \Rightarrow \quad \psi'_{\psi=\frac{\pi}{2}} &\approx \pi - \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

Im Elektronruhesystem scheinen also Photonen, die im Laborsystem im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung des Elektrons auftreffen, aus einem Winkel $\pi - \psi'_{\psi=\frac{\pi}{2}} \approx 1/\gamma$ zu kommen. Dies wird nachfolgend ausführlicher diskutiert:

Der Anteil q der in einem Raumwinkelement $\delta\Omega$ vorhandenen Strahlung an der Gesamtstrahlung verhält sich im Falle eines isotropen Strahlungsfeldes wie das Verhältnis des betrachteten Raumwinkelements $\delta\Omega$ zum Gesamtstrahlungswinkel $\Omega_0 = 4\pi$. Betrachtet man die Strahlung aus allen Polarwinkeln zwischen $\psi = \pi$, also der Strahlung, die sich antiparallel zur Bewegungsrichtung des Elektrons ausbreitet und somit direkt „von vorne“ auf das Elektron trifft, und einem Winkel $\psi = \psi_\tau$, ergibt sich mit $\tau \equiv \cos \psi_\tau$

$$q \equiv \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_\psi \int_{-1}^{\tau} d\mu_\psi = \frac{1 + \tau}{2} = \cos^2 \frac{\psi_\tau}{2}. \quad (\text{F.3})$$

Daraus folgt

$$\psi_\tau(q) = 2 \arccos \sqrt{q} \quad \text{bzw.} \quad \tau(q) = 2q - 1. \quad (\text{F.4})$$

Hier ist $\psi_\tau(q)$ derjenige Winkel, bis zu dem man das isotrope Strahlungsfeld integrieren muss, um $q \cdot 100\%$ der Strahlung zu berücksichtigen, und $\tau(q)$ ist der diesem Winkel assoziierte Kosinus. Aus Gleichung F.1 ergibt sich daraus für den Winkelkosinus im Elektronruhesystem

$$\begin{aligned} \tau(q)' &= \frac{2q - 1 - \beta}{1 - \beta(2q - 1)} = -\frac{1 + \beta - 2q}{1 + \beta - 2q\beta} \\ \Rightarrow \quad \psi'_\tau(q) &= \arccos \left[-\frac{1 + \beta - 2q}{1 + \beta - 2q\beta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Oder man erhält mit Hilfe der alternativen Formulierung für das Transformationsverhalten aus Gleichung F.2

$$\psi'_\tau(q) = \arccos \left[-\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1} + \gamma - 2q\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1} + \gamma - 2q\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]. \quad (\text{F.6})$$

Unabhängig von q zeigt sich auch hier, dass für $\gamma \gg 1$ der Auftreffwinkel im Elektronruhesystem $\psi'_\tau(q) \approx \pi$ ist, und dass somit für das Elektron „alle Photonen von vorne zu kommen scheinen“.

Abbildung F.2 zeigt den Winkel $\Theta'_T \equiv 180^\circ - \psi'_\tau$, in Abhängigkeit von q in Prozent, für verschiedene Werte des Elektron-Lorentzfaktors γ . Als Beispiel ergibt sich

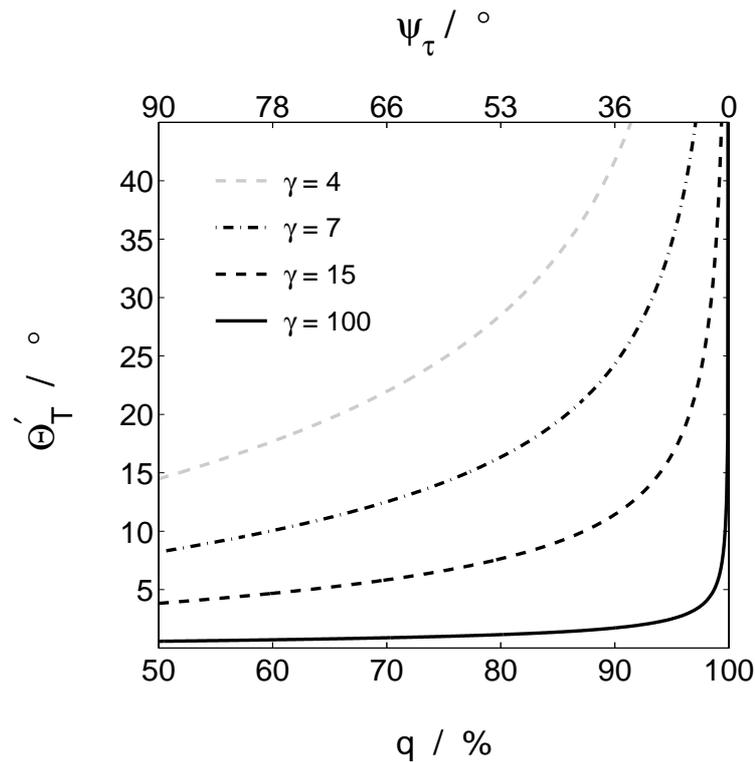


Abbildung F.2: Der Winkel $\Theta'_T \equiv 180^\circ - \psi'_T$, innerhalb dessen sich im Elektronruhesystem der Anteil q der gesamten Strahlungsdichte der Targetphotonen befindet, als Funktion von q (hier angegeben in Prozent). Auf der oberen x-Achse ist der Winkel ψ'_T im Laborsystem angegeben, bis zu dem integriert werden muß, um den entsprechenden Prozentsatz der Strahlung zu berücksichtigen.

für $q = 95\%$ und $\gamma = 100$ der Winkel $\Theta'_T \simeq 2.5^\circ$: Im Elektronruhesystem eines Elektrons, das sich mit einem Lorentzfaktor von $\gamma = 100$ bewegt, was $E_e \simeq 50 \text{ MeV}$ entspricht, kommt 95% der Strahlung also aus einem Winkelbereich von 2.5° zur Bewegungsrichtung des Bezugssystems. Auf der oberen x-Achse ist der Winkel ψ_τ aufgetragen, bis zu dem Photonen im Laborsystem bei der Integration berücksichtigt werden (vgl. Gleichung F.3). Für das Beispiel $\gamma = 100$ zeigt sich, dass nur Photonen, deren Bewegungsrichtung mit der des Elektrons einen Winkel $\psi_\tau \approx 0^\circ$ einschließt, die sich also annähernd parallel zu dem Elektron bewegen, in dem Ruhesystem des Elektrons aus seitlichen Richtungen zu kommen scheinen ($\Theta'_T \gg 0^\circ$)^a.

Es ist somit möglich, für hochrelativistische Elektronen $\psi' \equiv \pi$ zu setzen. Also gilt in der

$$\boxed{\text{head-on-Approximation: } \psi' \equiv \pi \quad \text{für } \gamma \gg 1} \quad . \quad (\text{F.7})$$

^aFür den Fall, dass $\psi_\tau = 0^\circ$ exakt gilt, ist, gemäß Gleichung F.1, auch $\psi'_\tau = 0^\circ$ und entsprechend $\Theta'_T = 180^\circ$

Wie aus Abbildung 3.1 ersichtlich ist und aus dem Kosinussatz der sphärischen Geometrie (Gleichung D.22) folgt, ergibt sich daraus insbesondere

$$\psi' \equiv \pi \quad \Rightarrow \quad \chi' = \pi - \psi'_S,$$

bzw.

$$\boxed{\cos \chi' \stackrel{\text{head-on}}{=} -\cos \psi'_S} \quad . \quad (\text{F.8})$$

Anhang G

Die Berechnung der differentiellen Streurrate \dot{n}_S für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung.

Aus der Definition der differentiellen Streurrate in Gleichung 3.15, bzw. deren Vereinfachung für den Fall isotroper Elektronen- und Targetphotonenverteilungen in Gleichung 3.20, ergibt sich

$$\dot{n}_S = \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty d\gamma \oint d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e) \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} = \frac{n_0}{4\pi} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-s} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S} \quad (\text{G.1})$$

$$= \frac{1}{2} K_1 n_0 r_0^2 c \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} d\epsilon \Theta\left(q - \frac{1}{4\gamma^2}\right) \Theta(1 - q) \times \gamma^{-(s+2)} \epsilon^{-\frac{s+3}{2}} \left[2q \ln q - 2q^2 + q + 1 + \frac{1}{2} \frac{(4\gamma\epsilon q)^2}{1 + 4\gamma\epsilon q} (1 - q) \right] \quad (\text{G.2})$$

mit K_1 aus Gleichung 4.17. In Gleichung G.1 wird die potenzgesetzförmige Elektronenverteilung aus Gleichung 4.1 eingesetzt und über den Raumwinkel integriert. Im nächsten Schritt wird die Streurrate eines Elektrons $d^2N/(dt d\epsilon_S)$, wie sie in Abschnitt 3.3.2 hergeleitet wurde, einschließlich der Verteilung der Synchrotronphotonen (Gleichung 4.16) mit dem Vorfaktor K_1 aus Gleichung 4.17 eingesetzt. Die Beschränkungen von

$$q \equiv \frac{\epsilon_S}{4\epsilon\gamma^2 \left(1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma}\right)} \quad (\text{G.3})$$

durch die Heaviside-Funktionen ergeben sich aus dem Gültigkeitsbereich von $d^2N/(dt d\epsilon_S)$

$$\epsilon < \epsilon_S < \frac{4\epsilon\gamma^2}{1 + 4\epsilon\gamma}. \quad (\text{G.4})$$

Substituiert man

$$x \equiv \frac{\epsilon_S}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{\epsilon_S}{x}, \quad d\gamma = -\epsilon_S \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow q = \underbrace{\frac{1}{4\epsilon_S}}_{\equiv b} \frac{x^2}{1-x} \Rightarrow \boxed{q = b \frac{x^2}{1-x}} \quad (\text{G.5})$$

mit

$$b \equiv \frac{1}{4\epsilon_S} \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{4\epsilon_S b}, \quad d\epsilon = \frac{1}{4\epsilon_S} \frac{db}{b^2} \quad (\text{G.6})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{db}{b}} \quad (\text{G.7})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{n}_S &= \overbrace{2^s K_1 n_0 r_0^2 c \epsilon_S}^{\equiv K(\epsilon_S)} \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} \\ &\times \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}} dx x^s \int_{\frac{1}{4\epsilon_2 \epsilon_S}}^{\frac{1}{4\epsilon_1 \epsilon_S}} db b^{\frac{s-1}{2}} \Theta\left(b \frac{x^2}{1-x} - \frac{1}{4\gamma^2}\right) \Theta\left(1 - b \frac{x^2}{1-x}\right) \\ &\times \left[2b \frac{x^2}{1-x} \left(\ln b + \ln \frac{x^2}{1-x} \right) - 2b^2 \frac{x^4}{(1-x)^2} \right. \\ &\quad \left. + b \frac{x^2}{1-x} + 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x} \left(1 - b \frac{x^2}{1-x} \right) \right]. \quad (\text{G.8}) \end{aligned}$$

G.1 Die Integration über b

Entschließt man sich die Integration über b als erstes auszuführen, müssen die Heaviside-Funktionen entsprechend umformuliert werden:

$$b \frac{x^2}{1-x} > \frac{1}{4\gamma^2} = \frac{x^2}{4\epsilon_S^2} \Rightarrow b > \frac{1-x}{4\epsilon_S^2} \rightsquigarrow \Theta\left(b - \frac{1-x}{4\epsilon_S^2}\right)$$

$$1 > b \frac{x^2}{1-x} \Rightarrow \frac{1-x}{x^2} > b \rightsquigarrow \Theta\left(\frac{1-x}{x^2} - b\right).$$

Sortiert man die Terme mit den neuen Variablen x und b nach Ordnungen von b und fügt die Beschränkungen der Heaviside-Funktionen in die Integrationsgrenzen ein,

erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{n}_S &= K(\epsilon_S) \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}} dx x^s \int_{\max(\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}, \frac{1-x}{4\epsilon_S^2})}^{\min(\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}, \frac{1-x}{x^2})} db \left[A(x) b^{\frac{s+1}{2}} \ln b + B(x) b^{\frac{s+1}{2}} - C(x) b^{\frac{s+3}{2}} + D(x) b^{\frac{s-1}{2}} \right] \\
&= K(\epsilon_S)(\epsilon_S) \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}} dx x^s \left[-A(x) \left(\frac{2}{s+3} \right)^2 b^{\frac{s+3}{2}} \left[1 - \frac{s+3}{2} \ln b \right] \right. \\
&\quad \left. + B(x) \frac{2}{s+3} b^{\frac{s+3}{2}} - C(x) \frac{2}{s+5} b^{\frac{s+5}{2}} + D(x) \frac{2}{s+1} b^{\frac{s+1}{2}} \right]_{\max(\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}, \frac{1-x}{4\epsilon_S^2})}^{\min(\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}, \frac{1-x}{x^2})} \quad (G.9)
\end{aligned}$$

mit

$$A(x) \equiv 2 \frac{x^2}{1-x}, \quad (G.10)$$

$$B(x) \equiv \frac{x^2}{1-x} \left[1 + 2 \ln \frac{x^2}{1-x} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x} \right], \quad (G.11)$$

$$C(x) \equiv 2 \frac{x^4}{(1-x)^2}, \quad (G.12)$$

$$D(x) \equiv 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x}. \quad (G.13)$$

Die Integrationsgrenzen, die von der Substitution der Targetphotonenenergie herühren, konkurrieren mit den Beschränkungen des Integranden, repräsentiert durch die Heaviside-Funktionen, die sich aus der Transformation des isotropen Photonenfeldes in das Elektronruhesystem ergeben. Es muss geklärt werden, ob der Integrand innerhalb des Integrationsintervalls verschieden von Null ist.

Im Fall der oberen Integrationsgrenze kommt die obere Schranke der Heaviside-Funktion zum Tragen, wenn gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1-x}{x^2} < \frac{1}{4\epsilon_S\epsilon_1} &\Rightarrow x^2 + 4\epsilon_S\epsilon_1 x - 4\epsilon_S\epsilon_1 > 0 \\
&\Rightarrow (x - x_a^{(1)})(x - x_b^{(1)}) > 0 \quad (G.14)
\end{aligned}$$

mit

$$x_{a|b}^{(1)} = -2\epsilon_S\epsilon_1 \pm \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} \quad (G.15)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x - x_a^{(1)} > 0 \quad \wedge \quad x - x_b^{(1)} > 0 \\ \vee \quad x - x_a^{(1)} < 0 \quad \wedge \quad x - x_b^{(1)} < 0 \end{array} \right. . \quad (\text{G.16})$$

Da $x - x_b^{(1)}$ immer größer als Null ist, kommt nur die obere Kombination von Ungleichungen in Frage. Also gilt

$$\frac{1-x}{x^2} < \frac{1}{4\epsilon_S\epsilon_1} \quad \Rightarrow \quad x - x_a^{(1)} > 0 . \quad (\text{G.17})$$

Für $x - x_a^{(1)} > 0$ wird also die obere Integrationsgrenze durch $(1-x)/x^2$ ersetzt. Die neue obere Grenze muss größer sein als die untere; andernfalls wäre der Integrand im gesamten Integrationsintervall identisch gleich Null. Es muss also auch gelten

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\epsilon_S\epsilon_2} < \frac{1-x}{x^2} &\Rightarrow x^2 + 4\epsilon_S\epsilon_2x - 4\epsilon_S\epsilon_2 < 0 \\ &\Rightarrow (x - x_a^{(2)})(x - x_b^{(2)}) < 0 \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

$$\text{mit} \quad \boxed{x_{a|b}^{(2)} = -2\epsilon_S\epsilon_2 \pm \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_2(1 + \epsilon_S\epsilon_2)}} \quad (\text{G.19})$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x - x_a^{(2)} > 0 \quad \wedge \quad x - x_b^{(2)} < 0 \\ \vee \quad x - x_a^{(2)} < 0 \quad \wedge \quad x - x_b^{(2)} > 0 \end{array} \right. \quad (\text{G.20})$$

$$\Rightarrow x - x_a^{(2)} < 0 , \quad (\text{G.21})$$

da $x - x_b^{(2)}$ ebenfalls immer größer als Null ist und daher nur die untere Kombination von Ungleichungen in Frage kommt. Somit gibt es drei Bereiche in x

$$\begin{aligned} 0 < x \leq x_a^{(1)} &\Rightarrow \min\left(\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}, \frac{1-x}{x^2}\right) = \frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S} \\ &\rightsquigarrow \Theta(x_a^{(1)} - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_a^{(1)} < x \leq x_a^{(2)} &\Rightarrow \min\left(\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}, \frac{1-x}{x^2}\right) = \frac{1-x}{x^2} \\ &\rightsquigarrow \Theta(x_a^{(2)} - x) \Theta(x - x_a^{(1)}) \end{aligned} \quad (\text{G.22})$$

$$x_a^{(2)} < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Integrand ist Null .}$$

In analoger Vorgehensweise wird die untere Integrationsgrenze in Gleichung G.9 bestimmt. Hier gilt es zu klären, ob

$$\frac{1-x}{4\epsilon_S^2} > \frac{1}{4\epsilon_S\epsilon_2} \quad \Rightarrow \quad x < 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} . \quad (\text{G.23})$$

Damit der Integrand nicht im gesamten Integrationsintervall verschwindet, muss außerdem gelten

$$\frac{1}{4\epsilon_S\epsilon_1} > \frac{1-x}{4\epsilon_S^2} \quad \Rightarrow \quad x > 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1}. \quad (\text{G.24})$$

Man erhält also auch für die untere Grenze drei Intervalle in x .

$$\begin{aligned} 0 < x \leq 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1} &\quad \Rightarrow \quad \text{Integrand ist Null} \\ 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1} < x \leq 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} &\quad \Rightarrow \quad \max\left(\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}, \frac{1-x}{4\epsilon_S^2}\right) = \frac{1-x}{4\epsilon_S^2} \\ &\quad \rightsquigarrow \quad \Theta\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} - x\right) \Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1}\right) \quad (\text{G.25}) \\ 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} < x \leq 1 &\quad \Rightarrow \quad \max\left(\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}, \frac{1-x}{4\epsilon_S^2}\right) = \frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S} \\ &\quad \rightsquigarrow \quad \Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2}\right). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen in G.22 und G.25 ergeben sich vier Kombinationen, so dass sich aus G.9 für die differentielle Streurrate ergibt

$$\begin{aligned} \dot{n}_S = K(\epsilon_S) \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{\min\left(\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}, 1\right)} dx x^s &\quad \left\{ \underbrace{\Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2}\right)}_{\text{a}} \right. \\ &\quad \times \left[\underbrace{\Theta(x - x_a^{(1)}) \Theta(x_a^{(2)} - x)}_{\text{b}} \left[\dots \right]_{\frac{1-x}{4\epsilon_2\epsilon_S}} + \Theta(x_a^{(1)} - x) \left[\dots \right]_{\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}} \right] \\ &\quad + \underbrace{\Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1}\right) \Theta\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} - x\right)}_{\text{c}} \\ &\quad \times \left[\underbrace{\Theta(x - x_a^{(1)}) \Theta(x_a^{(2)} - x)}_{\text{c}} \left[\dots \right]_{\frac{1-x}{4\epsilon_S^2}} + \underbrace{\Theta(x_a^{(1)} - x)}_{\text{d}} \left[\dots \right]_{\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}} \right] \left. \right\}. \quad (\text{G.26}) \end{aligned}$$

Hierbei ist die Bedingung $x \leq 1$ in die obere Integrationsgrenze eingefügt worden. Die Abkürzung $[\dots]$ bezeichnet den Klammerausdruck aus Gleichung G.9 mit den

jeweiligen Grenzen. Die mit Strichen verbundenen Unter- bzw. Überklammerungen kennzeichnen Heaviside-Funktionen, die im nächsten Unterkapitel verglichen werden. Die eingekreisten Buchstaben mit denen die Striche versehen sind, dienen der Unterscheidung der unterschiedlichen Kombinationen.

G.2 Vergleich der Heaviside-Funktionen

Die Heaviside-Funktionen in den vier verschiedenen Fällen ergeben wiederum konkurrierende obere bzw. untere Schranken für die x -Integration. Sie sollen als nächstes verglichen werden.

Untere Grenzen:

Die beiden mit \textcircled{a} gekennzeichneten Heaviside-Funktionen stellen jeweils eine untere Grenze in x dar. Um die x -Integration ausführen zu können, gilt es also zu klären in welchen Energiebereichen der Streuenergie ϵ_S welche Heaviside-Funktion die x -Integration begrenzt, ob also

$$\textcircled{a}: \quad 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} \geq -2\epsilon_S\epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} \quad (\text{G.27})$$

ist. Hierzu werden zunächst die linke und die rechte Seite gleichgesetzt und die Streuenergie ϵ_S bestimmt, bei der beide Seiten gerade gleich groß sind:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} &\stackrel{!}{=} -2\epsilon_S\epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} & (\text{G.28}) \\ \Rightarrow \quad \epsilon_2 - \epsilon_S(1 - 2\epsilon_S\epsilon_1) &= \epsilon_S\sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} \\ \textcircled{*} \quad \epsilon_2^2 - 2\epsilon_S(1 - 2\epsilon_S\epsilon_1) + \epsilon_S^2(1 - 2\epsilon_S\epsilon_1)^2 &= \epsilon_2^2(4\epsilon_S\epsilon_1 + 4\epsilon_S^2\epsilon_1^2) \\ \Rightarrow \quad \epsilon_S^2(1 - 4\epsilon_1\epsilon_2) - 2\epsilon_2\epsilon_S + \epsilon_2^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \epsilon_S^2 - \frac{2\epsilon_2\epsilon_S}{1 - 4\epsilon_1\epsilon_2} + \frac{\epsilon_2^2}{1 - 4\epsilon_1\epsilon_2} &= 0 \\ \rightsquigarrow \epsilon_S^{\text{alb}} &= \frac{\epsilon_2}{1 - 4\epsilon_1\epsilon_2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\epsilon_2}{1 - 4\epsilon_1\epsilon_2}\right)^2 - \frac{\epsilon_2^2}{1 - 4\epsilon_1\epsilon_2}}}_{= \frac{2\epsilon_2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}{1 - 4\epsilon_1\epsilon_2}} \\ &= \frac{\epsilon_2}{1 - 4\epsilon_1\epsilon_2} (1 \pm 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}) \\ \Rightarrow \quad \epsilon_S^{\text{alb}} &= \frac{\epsilon_2}{1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}. & (\text{G.29}) \end{aligned}$$

Die Streuenergien ϵ_S^a und ϵ_S^b sind also die gefundene „–“ und „+“ Lösung von Gleichung G.28. Da die linke Seite von Bedingung ③ als Funktion von ϵ_S monoton fallend ist, und die rechte monoton steigend, wird klar, dass eine der Nullstellen lediglich durch die Quadrierung bei ④ entstanden ist und keine reale Nullstelle von Bedingung ③ darstellt. Einsetzen in Gleichung G.28 ergibt

$$\begin{array}{l|l}
 \text{linke Seite:} & \text{rechte Seite:} \\
 1 - \frac{1}{1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} & -\frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} + \sqrt{\frac{4\epsilon_1^2\epsilon_2^2}{(1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2})^2} + \frac{4\epsilon_1\epsilon_2}{1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}} \\
 = \mp \frac{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}{1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} & \begin{array}{l} 4\epsilon_1^2\epsilon_2^2 + 4\epsilon_1\epsilon_2 - 8\epsilon_1\epsilon_2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \\ = 4\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon_1\epsilon_2 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} + 1) \\ = 4\epsilon_1\epsilon_2(1 \mp \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2})^2 \end{array} \\
 & = -\frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} + \frac{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}(1 \mp \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2})}{1 \mp 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \\
 & = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} - 4\epsilon_1\epsilon_2}{1 - 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} = 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} & , \quad \text{„–“} \\ \frac{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}{1 + 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} & , \quad \text{„+“} \end{cases}
 \end{array}$$

Das Pluszeichen führt also zu dem richtigen Ergebnis. Somit ist die einzige Nullstelle von ③ bei

$$\epsilon_S^{u2} \equiv \epsilon_S^b = \frac{\epsilon_2}{1 + 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}. \quad (\text{G.30})$$

Die Streuenergie ϵ_S^{u2} trennt also die Lösung in zwei Energiebereiche, für die sich die Grenzen der x -Integration unterscheiden. Es ist aber noch nicht klar, welcher Energiebereich welcher Bedingung aus ③ entspricht. Allerdings ist bei obigem Vergleich die Ungleichung G.28 bei $\epsilon_S = \epsilon_S^a$, also bei einer Streuenergie die größer als die Energie der Nullstelle ist, berechnet worden. Fordert man bei dieser Energie, dass die linke Seite der Ungleichung ③ grösser sei als die rechte, erhält man

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}{1 - 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} > 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \\
 \Rightarrow & \begin{cases} -1 > 1 - 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} & \text{für } 1 - 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} > 0 & \Rightarrow & \frac{1}{2} > \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} > 1 & \not\Leftarrow \\ -1 < 1 - 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} & \text{für } 1 - 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} < 0 & \Rightarrow & \frac{1}{2} < \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} < 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Da die obere Bedingung zu einem Widerspruch führt und die untere nur für $\epsilon_0\gamma_1\gamma_2 > 1/2$ erfüllt ist, ist die linke Seite der Ungleichung ③ kleiner als die rechte in dem Energiebereich oberhalb von ϵ_S^{u2} . Es ergibt sich also

$$1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} \geq -2\epsilon_S\epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} \quad \text{für } \epsilon_S \leq \epsilon_S^{u2}. \quad (\text{G.31})$$

Durch Heaviside-Funktionen ausgedrückt bedeutet dies

$$\textcircled{a} \rightsquigarrow \underbrace{\Theta(\epsilon_S - \epsilon_S^{u2}) \Theta(x - x_a^{(1)})}_{\text{I}} + \Theta(\epsilon_S^{u2} - \epsilon_S) \Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2}\right). \quad (\text{G.32})$$

Ebenso gilt es die anderen Heaviside-Funktionen zu vergleichen. Da sich diese Vergleiche aus den Berechnungen für Fall \textcircled{a} durch Ersetzen von ϵ_1 bzw. ϵ_2 leicht herleiten lassen, werden hier nur die Ergebnisse dargestellt

$$\begin{aligned} \textcircled{b}: \quad & 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1} \stackrel{!}{=} -2\epsilon_S\epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} \\ \Rightarrow \quad & \epsilon_S^{u1} \equiv \frac{\epsilon_1}{1 + 2\epsilon_1} \\ \rightsquigarrow \quad & \underbrace{\Theta(\epsilon_S - \epsilon_S^{u1}) \Theta(x - x_a^{(1)})}_{\text{I}} + \Theta(\epsilon_S^{u1} - \epsilon_S) \Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2}\right). \end{aligned} \quad (\text{G.33})$$

Obere Grenzen:

$$\begin{aligned} \textcircled{c}: \quad & 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} \stackrel{!}{=} -2\epsilon_S\epsilon_2 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_2(1 + \epsilon_S\epsilon_2)} \\ \Rightarrow \quad & \epsilon_S^{o2} \equiv \frac{\epsilon_2}{1 + 2\epsilon_2} \\ \rightsquigarrow \quad & \underbrace{\Theta(\epsilon_S - \epsilon_S^{o2}) \Theta\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} - x\right)}_{\text{I}} + \Theta(\epsilon_S^{o2} - \epsilon_S) \Theta(x_a^{(2)} - x). \end{aligned} \quad (\text{G.34})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{d}: \quad & 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} \stackrel{!}{=} -2\epsilon_S\epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} \\ \Rightarrow \quad & \epsilon_S^{o1} \equiv \frac{\epsilon_2}{1 + 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} = \epsilon_S^{u2} \\ \rightsquigarrow \quad & \underbrace{\Theta(\epsilon_S - \epsilon_S^{u2}) \Theta\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} - x\right)}_{\text{I}} + \Theta(\epsilon_S^{u2} - \epsilon_S) \Theta(x_a^{(1)} - x). \end{aligned} \quad (\text{G.35})$$

Der Vergleich der Heaviside-Funktionen führt also zu einer weiteren Aufspaltung des Integranden in Gleichung G.26; da die Grenzenergien ϵ_S^{u1} , ϵ_S^{u2} und ϵ_S^{o2} für eine „vernünftige“ Parameterwahl von γ_1 und γ_2 vergleichsweise klein sind und in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk auf der Erzeugung von Strahlung im Hochenergiebereich des Spektrums liegen soll, werden im Weiteren nur Terme mit $\epsilon_S > \epsilon_2 \gtrsim \epsilon_S^{o2}$ berücksichtigt. Diese sind durch die Unterklammerungen in den Gleichung G.32 – G.35 gekennzeichnet. Somit ergibt sich aus Gleichung G.26 für die differentielle Streurate

$$\dot{n}_S = K(\epsilon_S)\Theta(\epsilon_S - \epsilon_2) \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{\min\left(\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}, 1\right)} dx x^s \left\{ \underbrace{\Theta(x - x_a^{(1)})}_{\text{I}} \underbrace{\Theta(x_a^{(2)} - x)}_{\text{II}} \left[\dots \right] \frac{1-x}{x^2} \frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \Theta(x - x_a^{(1)}) \Theta\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} - x\right) \left[\dots \right] \left. \begin{array}{l} \frac{1-x}{x^2} \\ \frac{1-x}{4\epsilon_S^2} \end{array} \right\} \\
& \quad \boxed{I} \qquad \qquad \qquad \boxed{III} \\
& + \Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1}\right) \Theta\left(1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} - x\right) \left[\dots \right] \left. \begin{array}{l} \frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S} \\ \frac{1-x}{4\epsilon_S^2} \end{array} \right\} \\
& \quad \boxed{IV} \qquad \qquad \qquad \boxed{III} \\
& + \Theta\left(x - 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2}\right) \Theta(x_a^{(1)} - x) \left[\dots \right] \left. \begin{array}{l} \frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S} \\ \frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S} \end{array} \right\} . \qquad \qquad \qquad \boxed{IVa} \qquad \qquad \qquad \boxed{IIa} \qquad \qquad \qquad (G.36)
\end{aligned}$$

G.3 Die Integration über x

Als nächsten Schritt gilt es, die x -Integration durchzuführen. Dazu werden zunächst, wie zuvor bei der Integration über b , die Integrationsgrenzen mit den Grenzen, auf die der Integrand durch die Heaviside-Funktionen beschränkt ist, verglichen. Ist der Integrand aufgrund der Heaviside-Funktionen in Teilen des Integrationsintervall gleich Null, müssen die Integrationsgrenzen durch die Grenzen, die aus den Heaviside-Funktionen folgen, ersetzt werden. Die verschiedenen Heaviside-Funktionen sind in Gleichung G.36 mit \boxed{I} – $\boxed{IV(a)}$ numeriert.

Obere Grenzen:

Wendet man sich als Erstes der oberen Integralgrenze zu, muss eine zusätzliche Fallunterscheidung vorgenommen werden; es soll zunächst der Fall betrachtet werden, dass $\epsilon_S/\gamma_1 < 1$ ist, also

$$\epsilon_2 < \epsilon_S < \gamma_1 . \qquad \qquad \qquad (G.37)$$

Somit ergibt sich als Bedingung dafür, dass die ursprüngliche Integrationsgrenze durch die Grenze, die aus der Heaviside-Funktion \boxed{II} folgt, ersetzt wird (vgl. Gleichung G.36)

$$\begin{aligned}
\boxed{II} : \quad & \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} > x_a^{(2)} = -2\epsilon_S\epsilon_2 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_2(1 + \epsilon_S\epsilon_2)} \\
\Rightarrow \quad & \epsilon_S^2(1 + 2\epsilon_2\gamma_1)^2 > 4\gamma_1^2\epsilon_S\epsilon_2(1 + \epsilon_S\epsilon_2) \\
\Rightarrow \quad & \epsilon_S[(1 + 2\epsilon_2\gamma_1)^2 - 4\epsilon_2^2\gamma_1^2] > 4\epsilon_2\gamma_1^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_S > \frac{4\epsilon_2\gamma_1^2}{1 + 4\epsilon_2\gamma_1} \equiv \epsilon^{12}}. \quad (\text{G.38})$$

Dann muss die neue obere Grenze jedoch größer sein als die untere, also

$$-2\epsilon_S\epsilon_2 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_2(1 + \epsilon_S\epsilon_2)} > \frac{\epsilon_S}{\gamma_2}.$$

Die Rechnung ist völlig analog zur obigen; lediglich das Relationssymbol „dreht sich um“ und γ_1 wird durch γ_2 ersetzt. Man erhält

$$\boxed{\epsilon_S < \frac{4\epsilon_2\gamma_2^2}{1 + 4\epsilon_2\gamma_2} \equiv \epsilon^{22}}. \quad (\text{G.39})$$

Zusammengefasst ergibt sich also für die Terme, die die Heaviside-Funktion \boxed{II} enthalten, für die obere Grenze der x -Integration

$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{II} \\ (\epsilon_S < \gamma_1) \end{array}} : \text{Obere Grenze} \begin{cases} \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} & \text{für } \epsilon_S < \epsilon^{12} \\ x_a^{(2)} & \text{für } \epsilon^{12} < \epsilon_S < \epsilon^{22}. \end{cases} \quad (\text{G.40})$$

Der Fall \boxed{IIa} ist analog zu \boxed{II} ; hier muss lediglich $x_a^{(2)}$ gegen $x_a^{(1)}$ ausgetauscht werden, was im Ergebnis zum Tausch $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_1$ führt.

Zum Austausch der oberen Integrationsgrenze durch die Grenze, die aus der Heaviside-Funktion folgt, kommt es also für die Terme, die die Heaviside-Funktion \boxed{IIa} enthalten, wenn

$$\boxed{IIa} : \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} > x_a^{(1)} = -2\epsilon_S\epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_S > \frac{4\epsilon_1\gamma_1^2}{1 + 4\epsilon_1\gamma_1} \equiv \epsilon^{11}}. \quad (\text{G.41})$$

Dann muss ebenfalls gelten

$$-2\epsilon_S\epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S\epsilon_1(1 + \epsilon_S\epsilon_1)} > \frac{\epsilon_S}{\gamma_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_S < \frac{4\epsilon_1\gamma_2^2}{1 + 4\epsilon_1\gamma_2} \equiv \epsilon^{21}}. \quad (\text{G.42})$$

Also zusammengefasst

$$\boxed{\text{IIa}}_{(\epsilon_S < \gamma_1)} : \text{Obere Grenze} \begin{cases} \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} & \text{für } \epsilon_S < \epsilon^{\text{II}} \\ x_a^{(1)} & \text{für } \epsilon^{\text{II}} < \epsilon_S < \epsilon^{\text{II}}. \end{cases} \quad (\text{G.43})$$

Als letzte Heaviside-Funktion, die die obere Grenze betrifft, gilt es III zu untersuchen. Ein Austausch der Integrationsgrenze durch die Grenze, die sich aus der Heaviside-Funktion ergibt, erfolgt für

$$\begin{aligned} \text{III} : \quad \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} > 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} &\Rightarrow \epsilon_S \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) > 1 \\ \Rightarrow \epsilon_S > \frac{\epsilon_2 \gamma_1}{\epsilon_2 + \gamma_1}. \end{aligned} \quad (\text{G.44})$$

Dann muss auch gelten

$$1 - \frac{\epsilon_S}{\gamma_2} > \frac{\epsilon_S}{\gamma_2} \Rightarrow \epsilon_S < \frac{\epsilon_2 \gamma_2}{\epsilon_2 + \gamma_2}. \quad (\text{G.45})$$

Somit zusammengefasst

$$\boxed{\text{III}}_{(\epsilon_S < \gamma_1)} : \text{Obere Grenze} \begin{cases} \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} & \text{für } \epsilon_S < \frac{\epsilon_2 \gamma_1}{\epsilon_2 + \gamma_1} \\ 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} & \text{für } \frac{\epsilon_2 \gamma_1}{\epsilon_2 + \gamma_1} < \epsilon_S < \frac{\epsilon_2 \gamma_2}{\epsilon_2 + \gamma_2}. \end{cases} \quad (\text{G.46})$$

Hier gilt es zu bemerken, dass die maximale Streuenergie bei Termen, die III enthalten

$$\frac{\epsilon_2 \gamma_2}{\epsilon_2 + \gamma_2} \approx \epsilon_2 \quad (\text{G.47})$$

ist. Da hier Energien $\epsilon_S > \epsilon_2$ betrachtet werden, kann man

Terme, die III enthalten vernachlässigen.

Betrachtet man als nächstes den verbleibenden Energiebereich

$$\epsilon_S > \gamma_1 \quad (\text{G.48})$$

ergibt sich als Bedingung für den Austausch der Integrationsgrenze

$$\begin{aligned} \boxed{II} : \quad 1 > x_a^{(2)} &= -2\epsilon_S \epsilon_2 + \sqrt{4\epsilon_S \epsilon_2 (1 + \epsilon_S \epsilon_2)} \\ \Rightarrow \quad (1 + 2\epsilon_2 \gamma_1)^2 &> 4\epsilon_S \epsilon_2 (1 + \epsilon_S \epsilon_2) \quad \Rightarrow \quad 1 > 0 \quad \checkmark . \end{aligned}$$

Dann muss ebenfalls gelten

$$-2\epsilon_S \epsilon_2 + \sqrt{4\epsilon_S \epsilon_2 (1 + \epsilon_S \epsilon_2)} > \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} \stackrel{\boxed{II}}{\Rightarrow} \epsilon_S < \epsilon^{22} .$$

Die obere Grenze wird in diesem Energiebereich ($\epsilon_S > \gamma_1$) also stets durch die Grenze, die sich aus der Heaviside-Funktion ergibt, ausgetauscht, und das Spektrum ist durch ϵ^{22} begrenzt. Außerdem gilt für $4\epsilon_2 \gamma_2 \gg 1 \rightsquigarrow \epsilon^{22} \simeq \gamma_2$. Die höchsten erzielbaren Energien liegen also im Bereich der maximalen Elektronenenergie.

Für die anderen beiden Fälle ergibt sich

$$\boxed{IIa} : \quad 1 > x_a^{(1)} = -2\epsilon_S \epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S \epsilon_1 (1 + \epsilon_S \epsilon_1)} \stackrel{\text{s.o.}}{\Rightarrow} 1 > 0 \quad \checkmark .$$

$$\text{Dann gilt auch} \quad -2\epsilon_S \epsilon_1 + \sqrt{4\epsilon_S \epsilon_1 (1 + \epsilon_S \epsilon_1)} > \frac{\epsilon_S}{\gamma_2} \stackrel{\substack{\boxed{IIa} \\ (\epsilon_S < \gamma_1)}}{\Rightarrow} \epsilon_S < \epsilon^{21}$$

$$\boxed{III} : \quad 1 > 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} > 0 . \quad \checkmark$$

$$\text{Dann gilt auch} \quad 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} > \frac{\epsilon_S}{\gamma_2} \stackrel{\substack{\boxed{III} \\ (\epsilon_S < \gamma_1)}}{\Rightarrow} \epsilon_S < \frac{\epsilon_2 \gamma_2}{\epsilon_2 + \gamma_2} .$$

Auch hier wird also die Grenze stets getauscht. Alle drei Fälle zusammengefasst ergeben für die obere Grenze der x -Integration:

$$\boxed{\text{Obere Grenze} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{II} : \quad x_a^{(2)} \quad \text{für} \quad \epsilon_S < \epsilon^{22} \\ \boxed{IIa} : \quad x_a^{(1)} \quad \text{für} \quad \epsilon_S < \epsilon^{21} \\ \boxed{III} : \quad 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} \quad \text{für} \quad \epsilon_S < \frac{\epsilon_2 \gamma_2}{\epsilon_2 + \gamma_2} . \end{array} \right.} \quad (\text{G.49})$$

Der letzte Fall liefert wiederum nur für $\epsilon_S \lesssim \epsilon_2$ einen Beitrag und somit außerhalb des relevanten Energiebereiches. Der Vergleich der anderen beiden Fälle mit den

Ergebnissen für $\epsilon_S < \gamma_1$ (siehe G.40 und G.43) zeigt, dass eine Fallunterscheidung $\epsilon_S \leq \gamma_1$ hinfällig wird, da die Grenzen stets vor $\epsilon_S = \gamma_1$ ausgetauscht werden und sich für größere Streuenergien keine weiteren Energiebeschränkungen ergeben.

Untere Grenzen:^a

Ein Austausch der unteren Integrationsgrenze durch die Grenzen, die sich aus den verschiedenen Heaviside-Funktion \boxed{I} , \boxed{IV} und \boxed{IVa} ergeben, wird vorgenommen, wenn (vgl. Gleichung G.36)

$$\boxed{I} : \quad \frac{\epsilon_S}{\gamma_2} < x_a^{(1)} < \frac{\epsilon_S}{\gamma_1} \quad \stackrel{\boxed{IIa}}{(\epsilon_S < \gamma_1)} \Rightarrow \quad \epsilon^{11} < \epsilon_S < \epsilon^{21}, \quad (\text{G.50})$$

$$\boxed{IV} : \quad \frac{\epsilon_S}{\gamma_2} < 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_1} \quad \stackrel{\boxed{III}}{(\epsilon_S < \gamma_1)} \Rightarrow \quad \epsilon_S < \frac{\epsilon_1 \gamma_2}{\epsilon_1 + \gamma_2} \simeq \epsilon_1,$$

$$\boxed{IVa} : \quad \frac{\epsilon_S}{\gamma_2} < 1 - \frac{\epsilon_S}{\epsilon_2} \quad \stackrel{\boxed{III}}{(\epsilon_S < \gamma_1)} \Rightarrow \quad \epsilon_S < \frac{\epsilon_2 \gamma_2}{\epsilon_2 + \gamma_2} \simeq \epsilon_2.$$

Die letzten beiden Fälle liefern also nur Beiträge unterhalb des betrachteten Energieintervalls.

Betrachtet man alle Fallunterscheidungen, so wird deutlich, dass das Spektrum oberhalb von ϵ_2 in bis zu vier Energiebereiche zerfällt. Die Streuenergien, die die verschiedenen Bereiche des Spektrums abgrenzen, sind die oben gefundenen Energien

$$\epsilon_2 < \epsilon^{11} < \epsilon^{12} < \epsilon^{21} < \epsilon^{22}. \quad (\text{G.51})$$

In dem Fall, dass

$$\epsilon_2 > \epsilon^{11} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_0 \gamma_2^2 > \frac{4\epsilon_0 \gamma_1^4}{1 + 4\epsilon_0 \gamma_1^3} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 > \begin{cases} 2\gamma_1^2 & \text{für } 4\epsilon_0 \gamma_1^3 \ll 1 \\ \gamma_1 & \text{für } 4\epsilon_0 \gamma_1^3 \gg 1 \end{cases},$$

zerfällt das SSC-Spektrum oberhalb von ϵ_2 lediglich in drei Intervalle. Für $4\epsilon_0 \gamma_1^3 \gg 1$ trifft dies stets zu; da $\epsilon_0 \simeq 3.4 \cdot 10^{-14}$ B bedeutet das allerdings, beispielsweise für $B = 1$ G, dass $\gamma_1 \gg 3 \cdot 10^4$, was eine sehr hohe Energie für die untere Grenze der

^aDie im Folgenden auftretenden Verweise auf Fallunterscheidungen dienen lediglich dem Bezug auf vorherige Rechnungen; wie oben festgestellt, ist bei der Betrachtung der oberen Integrationsgrenzen keine Unterscheidung in Streuenergien $\epsilon_S \leq \gamma_1$ vonnöten.

Elektronenverteilung darstellt. Für den realistischeren Fall $\gamma_1 \ll 1/\sqrt[3]{4\epsilon_0}$ entscheidet die Wahl von γ_2 über die Form des Spektrums.

Für die differentielle Streurrate erhält man also aus Gleichung G.36 mit den Gleichungen G.40, G.43, G.46 und G.49.

$$\dot{n}_S = K(\epsilon_S) \Theta(\epsilon_S - \max(\epsilon_2, \epsilon^{\text{II}})) \Theta(\epsilon^{\text{I2}} - \epsilon_S) \int_{x_a^{(1)}}^{\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}} dx x^s \left[\dots \right] \frac{1-x}{x^2} \frac{1}{4\epsilon_2 \epsilon_S} \quad (\text{G.52a})$$

$$+ K(\epsilon_S) \Theta(\epsilon_S - \epsilon^{\text{I2}}) \Theta(\epsilon^{\text{2I}} - \epsilon_S) \int_{x_a^{(1)}}^{x_a^{(2)}} dx x^s \left[\dots \right] \frac{1-x}{x^2} \frac{1}{4\epsilon_2 \epsilon_S} \quad (\text{G.52b})$$

$$+ K(\epsilon_S) \Theta(\epsilon_S - \epsilon^{\text{2I}}) \Theta(\epsilon^{\text{22}} - \epsilon_S) \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{x_a^{(2)}} dx x^s \left[\dots \right] \frac{1-x}{x^2} \frac{1}{4\epsilon_2 \epsilon_S} \quad (\text{G.52c})$$

$$+ K(\epsilon_S) \Theta(\epsilon_S - \max(\epsilon_2, \epsilon^{\text{II}})) \Theta(\epsilon^{\text{2I}} - \epsilon_S) \int_{\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}}^{x_a^{(1)}} dx x^s \left[\dots \right] \frac{1}{4\epsilon_1 \epsilon_S} \frac{1}{4\epsilon_2 \epsilon_S} \quad (\text{G.52d})$$

Nachdem geklärt ist, welche Terme in welchem spektralen Bereich relevant sind, wird nun die Ausführung der Integration betrieben. Dazu wird der Klammerausdruck $[\dots]$ aus Gleichung G.9 mit G.10 – G.13 wieder eingeführt und die jeweiligen Grenzen der b -Integration eingesetzt. Die ersten drei Integrale (G.52a – G.52c) sind von der Form

$$\begin{aligned} & \int dx x^s \left[-A(x) \left(\frac{2}{s+3} \right)^2 b^{\frac{s+3}{2}} \left[1 - \frac{s+3}{2} \ln b \right] \right. \\ & \quad \left. + B(x) \frac{2}{s+3} b^{\frac{s+3}{2}} - C(x) \frac{2}{s+5} b^{\frac{s+5}{2}} + D(x) \frac{2}{s+1} b^{\frac{s+1}{2}} \right] \frac{1-x}{x^2} \frac{1}{4\epsilon_2 \epsilon_S} \\ = & \int dx \left\{ 4 \frac{s^2 + 4s + 11}{(s+1)(s+3)^2(s+5)} \underbrace{\frac{(1-x)^{\frac{s+1}{2}}}{x}}_{\mathfrak{J}_1} + \frac{2}{(s+1)(s+3)} \underbrace{x(1-x)^{\frac{s-1}{2}}}_{\mathfrak{J}_2} \right. \\ & - \frac{2}{s+3} (4\epsilon_S \epsilon_2)^{-\frac{s+3}{2}} \left[1 - \frac{4}{s+3} \left[1 + \frac{2}{s+3} \ln(4\epsilon_S \epsilon_2) \right] + 2 \frac{s+3}{s+1} \epsilon_S \epsilon_2 \right] \underbrace{\frac{x^{s+2}}{1-x}}_{\mathfrak{J}_3} \\ & \left. + \frac{4}{s+5} (4\epsilon_S \epsilon_2)^{-\frac{s+5}{2}} \left[1 + 2 \frac{s+5}{s+3} \epsilon_S \epsilon_2 \right] \underbrace{\frac{x^{s+4}}{(1-x)^2}}_{\mathfrak{J}_4} - \frac{2}{s+1} (4\epsilon_S \epsilon_2)^{-\frac{s+1}{2}} \underbrace{x^s}_{\mathfrak{J}_5} \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{4}{s+5} (4\epsilon_s \epsilon_2)^{-\frac{s+3}{2}} \underbrace{\frac{x^{s+2}}{1-x} [2 \ln x - \ln(1-x)]}_{\mathfrak{I6a|b}} \Bigg\} . \quad (\text{G.53})$$

Im Folgenden werden die Integrale $\mathfrak{I1} - \mathfrak{I6b}$ gelöst, bzw. auf bekannte Funktionen zurückgeführt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I1}(x, s) &\equiv \int dx \frac{(1-x)^{\frac{s+1}{2}}}{x}, \quad y \equiv 1-x \Rightarrow x = 1-y, \quad dx = -dy \\ &= - \int dy \frac{y^{\frac{s+1}{2}}}{1-y} = - \sum_{n=0}^{\infty} \int dy y^{\frac{s+1}{2}+n} = -y^{\frac{s+3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{\frac{s+3}{2}+n} \\ &= -(1-x)^{\frac{s+3}{2}} \Phi(1-x, 1, \frac{s+3}{2}) . \end{aligned} \quad (\text{G.54})$$

Im zweiten Schritt wurde $1/(1-z) = \sum z^n$ benutzt; ferner ist Φ die Lerchsche Φ -Funktion mit

$$\Phi(z, r, v) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+v)^r}, \quad |z| < 1 . \quad (\text{G.55})$$

In dem Fall $r = 1$, der hier im Wesentlichen als Lösung in Erscheinung tritt, lässt sich Φ als *Hypergeometrische Funktion* ${}_2F_1$ darstellen:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} \quad (\text{G.56})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} . \quad (\text{G.57})$$

Hierbei ist $(q)_p$ das *Pochhammer Symbol*

$$(q)_p = q(q+1)(q+2) \cdot \dots \cdot (q+p-1) = \frac{(q+p-1)!}{(q-1)!} . \quad (\text{G.58})$$

Daraus ergibt sich

$${}_2F_1(1, v; v+1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{v!} (v)_n}{(v+1)_n \cancel{v!}} z^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v+n-1)!}{(v+n)!} \frac{v!}{(v-1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v}{v+n} z^n \\
\Rightarrow &\boxed{\Phi(z, 1, v) = v^{-1} {}_2F_1(1, v; v+1; z)} . \tag{G.59}
\end{aligned}$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich für $v \equiv k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(z, 1, k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+k} = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{n+k} = \frac{1}{z^k} \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{z^k} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{z^\ell}{\ell} \right] = -\frac{1}{z^k} \left[\ln(1-z) + \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{z^\ell}{\ell} \right], & k \neq 1 \\ \frac{1}{z} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell} \right] = -\frac{\ln(1-z)}{z}, & k = 1. \end{cases} \tag{G.60}
\end{aligned}$$

Lösung \mathfrak{J}_1 lässt sich also beispielsweise für $s = 1$ darstellen als

$$\mathfrak{J}_1(x, 1) = 1 - x + \ln(x) . \tag{G.61}$$

Für die weiteren Integrale ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_2(x, s) &\equiv \int dx x (1-x)^{\frac{s-1}{2}} \\
&\stackrel{P.I.}{=} -\frac{2x}{s+1} (1-x)^{\frac{s+1}{2}} + \underbrace{\frac{2}{s+1} \int dx (1-x)^{\frac{s+1}{2}}}_{= 4 \frac{(1-x)^{\frac{s+3}{2}}}{(s+1)(s+3)}} \\
&= -4 \frac{(1-x)^{\frac{s+1}{2}} [x^{\frac{s+3}{2}} + 1 - x]}{(s+1)(s+3)} \\
&= -4 \frac{1 + \frac{s+1}{2}x}{(s+1)(s+3)} (1-x)^{\frac{s+1}{2}} . \tag{G.62}
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{J}_3(x, s) \equiv \int dx \frac{x^{s+2}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx x^{s+2+n}$$

$$= x^{s+3} \Phi(x, 1, s+3) . \quad (\text{G.63})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_4(x, s) &\equiv \int dx \frac{x^{s+4}}{(1-x)^2} \stackrel{P.I.}{=} \frac{x^{s+4}}{1-x} - (s+4) \int dx \frac{x^{s+3}}{1-x} \\ &= \frac{x^{s+4}}{1-x} - (s+4) \sum_{n=0}^{\infty} \int dx x^{s+3+n} \\ &= \frac{x^{s+4}}{1-x} - (s+4) x^{s+4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{s+4+n} \\ &= \frac{x^{s+4}}{1-x} \left[1 - (s+4)(1-x) \Phi(x, 1, s+4) \right] . \quad (\text{G.64}) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{I}_5(x, s) \equiv \int dx x^s = \frac{x^{s+1}}{s+1} . \quad (\text{G.65})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{6a}(x, s) &\equiv 2 \int dx \frac{x^{s+2}}{1-x} \ln x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int dx x^{s+2+n} \ln x \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{N.R.:} \\ \int dx x^r \ln x = \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{1}{1+r} \int dx x^r \\ = -\frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} [1 - (r+1) \ln x] \end{array} \right. \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{s+3+n}}{(s+3+n)^2} [1 - (s+3+n) \ln x] \\ &= -2x^{s+3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(s+3+n)^2} + 2x^{s+3} \ln x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{s+3+n} \end{aligned}$$

$$= 2x^{s+3} \left[\ln x \Phi(x, 1, s+3) - \Phi(x, 2, s+3) \right] . \quad (\text{G.66})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}6b(x, s) &\equiv \int dx \frac{x^{s+2}}{1-x} \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \int dx x^{s+2+n+m} \\ &= x^{s+3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi(x, 1, s+3+n) . \end{aligned} \quad (\text{G.67})$$

Für das verbleibende Integral G.52d hat man

$$\begin{aligned} \int dx x^s \left[-A(x) \left(\frac{2}{s+3} \right)^2 b^{\frac{s+3}{2}} \left[1 - \frac{s+3}{2} \ln b \right] \right. \\ \left. + B(x) \frac{2}{s+3} b^{\frac{s+3}{2}} - C(x) \frac{2}{s+5} b^{\frac{s+5}{2}} + D(x) \frac{2}{s+1} b^{\frac{s+1}{2}} \right]_{\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}}^{\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}} . \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Grenzen der b -Integration führt also zu keiner zusätzlichen x -Abhängigkeit und ergibt im Einzelnen

$$\begin{aligned} \left[b^{\frac{s+n}{2}} \right]_{\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}}^{\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}} &= (4\epsilon_1\epsilon_S)^{-\frac{s+n}{2}} - (4\epsilon_2\epsilon_S)^{-\frac{s+n}{2}} \\ &= (4\epsilon_1\epsilon_S)^{-\frac{s+n}{2}} \left[1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{s+n} \right] \equiv H_{\frac{s+n}{2}} , \end{aligned} \quad (\text{G.68})$$

$$\begin{aligned} \left[b^{\frac{s+3}{2}} \left[1 - \frac{s+3}{2} \ln b \right] \right]_{\frac{1}{4\epsilon_2\epsilon_S}}^{\frac{1}{4\epsilon_1\epsilon_S}} \\ = (4\epsilon_1\epsilon_S)^{-\frac{s+3}{2}} \left[\left(1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{s+3} \right) \left(1 + \frac{s+3}{2} \ln(4\epsilon_S) \right) \right. \\ \left. + \frac{s+3}{2} \left(\ln \epsilon_1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{s+3} \ln \epsilon_2 \right) \right] \equiv H_L . \end{aligned} \quad (\text{G.69})$$

Nach Einsetzen von $A - D$ aus den Gleichungen G.10 – G.13 und einigem Umsortieren ergibt sich für die Teillösung G.52d

$$\int dx x^s \left[\underbrace{\frac{2}{s+1} H_{\frac{s+1}{2}}}_{\equiv P_1} + \underbrace{\left[\frac{2}{s+1} H_{\frac{s+1}{2}} + \frac{2}{s+3} H_{\frac{s+3}{2}} - 2 \left(\frac{2}{s+3} \right)^2 H_L \right]}_{\equiv P_2} \right] \frac{x^2}{1-x} - \underbrace{\left[\frac{1}{s+3} H_{\frac{s+3}{2}} + \frac{4}{s+5} H_{\frac{s+5}{2}} \right]}_{\equiv P_3} \frac{x^4}{(1-x)^2} + \underbrace{\frac{4}{s+3} H_{\frac{s+3}{2}}}_{\equiv P_4} \frac{x^2}{1-x} \ln \frac{x^2}{1-x} \right]. \quad (\text{G.70})$$

Die Lösungen für die fünf vorkommenden Integrationen sind bereits in der obigen Diskussion vorgestellt worden (vgl. $\mathfrak{J}_3 - \mathfrak{J}6b$).

Mit V1 – V6b seien die zu den entsprechenden Integralen in Gleichung G.53 gehörigen Vorfaktoren definiert. Definiert man nun noch die Lösungsfunktionen

$$L_V(x, s) \equiv V1 \mathfrak{J}_1 + V2 \mathfrak{J}_2 + V3 \mathfrak{J}_3 + V4 \mathfrak{J}_4 + V5 \mathfrak{J}_5 + V6 (\mathfrak{J}6a + \mathfrak{J}6b) \quad (\text{G.71})$$

$$L_P(x, s) \equiv P1 \mathfrak{J}_5 + P2 \mathfrak{J}_3 + P3 \mathfrak{J}_4 + P4 (\mathfrak{J}6a + \mathfrak{J}6b) \quad (\text{G.72})$$

ergibt sich aus Gleichung G.53 mit

- der Definition des Vorfaktors $K(\epsilon_S)$ aus Gleichung G.8 mit Gleichung 4.17
- den Integral-Vorfaktoren V1 – V6, bzw. P1 – P4 aus Gleichung G.53, bzw. Gleichung G.70 mit den Gleichungen G.68 und G.69
- den Lösungen der Integrale $\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}6b$ in den Gleichung G.54 und G.62 – G.67
- den Grenzen der Energiebereiche in der Streuenergie $\epsilon^{11} - \epsilon^{22}$ aus den Gleichungen G.41, G.38, G.42 und G.39
- den Ausdrücken $x_a^{(1|2)}$ aus den Gleichungen G.15 und G.19 sowie
- den Definitionen von n_0 , ϵ_0 , $\epsilon_{1|2}$ und $G(d, R)$ aus den Gleichungen 4.2, 4.10, 4.15 und C.10

für die Gesamtlösung der differentiellen Streurate

$$\begin{aligned}
\dot{n}_S &= 2^{\frac{1}{2}(3s-1)} G(d, R) \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^3 r_0^2}{m_e c h} \frac{n_0^2 B}{s+1} \epsilon_0^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{s}{4} - \frac{1}{12}\right) \\
&\times \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} \left\{ \Theta(\epsilon_S - \max(\epsilon_2, \epsilon^{11})) \Theta(\epsilon^{12} - \epsilon_S) \right. \\
&\quad \times \left[L_V\left(\frac{\epsilon_S}{\gamma_1}, s\right) - L_V\left(x_a^{(1)}, s\right) + L_P\left(x_a^{(1)}, s\right) - L_P\left(\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}, s\right) \right] \\
&\quad + \Theta(\epsilon_S - \epsilon^{12}) \Theta(\epsilon^{21} - \epsilon_S) \\
&\quad \times \left[L_V\left(x_a^{(2)}, s\right) - L_V\left(x_a^{(1)}, s\right) + L_P\left(x_a^{(1)}, s\right) - L_P\left(\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}, s\right) \right] \\
&\quad \left. + \Theta(\epsilon_S - \epsilon^{21}) \Theta(\epsilon^{22} - \epsilon_S) \left[L_V\left(x_a^{(2)}, s\right) - L_V\left(\frac{\epsilon_S}{\gamma_2}, s\right) \right] \right\}. \quad (\text{G.73})
\end{aligned}$$

G.4 Vergleich: Die differentielle Streurate \dot{n}_S für eine potenzgesetzförmige Elektronenverteilung im Thomson-Limit

Mit dem in Anhang D.1 gewonnenen Ausdruck für die Streurate eines Elektrons im Thomson-Limit $d^2N/(dt d\epsilon_S)|^{\text{TL}}$ aus Gleichung D.47 lässt sich analog zur Berechnung des allgemeinen Falles mittels Gleichung 3.20, bzw. G.1, die differentielle Streurate berechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S)|^{\text{TL}} &= \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty d\gamma \oint d\Omega_e n_e(\gamma, \Omega_e) \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S}|^{\text{TL}} = \frac{n_0}{4\pi} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-s} \frac{d^2N}{dt d\epsilon_S}|^{\text{TL}} \\
&= \frac{r_0^2 c n_0}{8\gamma^4} \int_{\max[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}}, \gamma_1]}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-(s+4)} \int_0^{\epsilon_S} d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \left(2\epsilon_S \ln \frac{\epsilon_S}{4\gamma^2 \epsilon} + \epsilon_S + 4\gamma^2 \epsilon - \frac{\epsilon_S}{2\gamma^2 \epsilon} \right), \quad (\text{G.74})
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die potenzgesetzförmige Elektronenverteilung aus Gleichung 4.1 eingesetzt wird und im Dritten $d^2N/(dt d\epsilon_S)|^{\text{TL}}$ aus Gleichung D.47. Die zu treffen-

de Unterscheidung in Bezug auf die untere Integrationsgrenze rührt von der Energiere-
lation für die höchste im Thomson-Limit erzeugbare Streuphotonenenergie $\epsilon_S^{\max} = 4\gamma^2\epsilon$
her^b. Fordert man für die untere Grenze

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}} > \gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon < \frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2} \quad \rightsquigarrow \quad \Theta\left(\frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2} - \epsilon\right) \quad (\text{G.75})$$

und führt zunächst die Integration über γ aus, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}}}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-(s+4)} \left(2\epsilon_S \ln \frac{\epsilon_S}{4\gamma^2\epsilon} + \epsilon_S + 4\gamma^2\epsilon - \frac{\epsilon_S}{2\gamma^2\epsilon} \right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}}}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-(s+4)} \left(2\epsilon_S \ln \frac{\epsilon_S}{4\epsilon} + \epsilon_S + 4\epsilon\gamma^2 - \frac{\epsilon_S}{2\epsilon}\gamma^{-2} - 4\epsilon_S \ln \gamma \right) \\ &\stackrel{s > -3}{=} \left[- \left(2\epsilon_S \ln \frac{\epsilon_S}{4\epsilon} + \epsilon_S \right) \frac{\gamma^{-(s+3)}}{s+3} - 4\epsilon \frac{\gamma^{-(s+1)}}{s+1} + \frac{\epsilon_S^2}{2\epsilon} \frac{\gamma^{-(s+5)}}{s+5} \right. \\ &\quad \left. + 4\epsilon_S \frac{\gamma^{-(s+3)}}{(s+3)^2} \left[1 + (s+3) \ln \gamma \right] \right]_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}}}^{\gamma_2} \equiv I^{\text{TL}} \Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}}}^{\gamma_2}, \quad (\text{G.76}) \end{aligned}$$

unter erneuter Verwendung von

$$\int dx x^\ell \ln x = \frac{x^{\ell+1}}{(\ell+1)^2} [1 + (\ell+1) \ln x]. \quad (\text{G.77})$$

Der größte mögliche Wert der Streuenergie ist $\epsilon_S^{\max} = 4\gamma^2\epsilon$ (s.o.); für ein Elektronen-
ensemble dessen größte Energie γ_2 ist, bedeutet dies $\epsilon_S^{\max} = 4\gamma_2^2\epsilon$. In dem Fall, dass
 $\epsilon_S \ll \epsilon_S^{\max}$, also

$$\gamma_2 \gg \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \gg \frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2}, \quad (\text{G.78})$$

ist der Beitrag der oberen Integrationsgrenze in Gleichung G.76 vernachlässigbar und
die Lösung für die differentielle Streurrate ergibt sich aus der Auswertung der unteren
Integrationsgrenze. Es folgt

$$I^{\text{TL}} \Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}}} = \left(2\epsilon_S \ln \frac{\epsilon_S}{4\epsilon} + \epsilon_S \right) \frac{1}{s+3} \left(\frac{4\epsilon}{\epsilon_S} \right)^{\frac{s+3}{2}} + \frac{4\epsilon}{s+1} \left(\frac{4\epsilon}{\epsilon_S} \right)^{\frac{s+1}{2}}$$

^bAus dem Transformationsverhalten der Photonenenergie aus Gleichung 3.4 folgt für $\beta \simeq 1$
unmittelbar, dass $\epsilon_S^{\max} = 2\gamma\epsilon'_S$. Da wegen $\epsilon' < 1$ im Thomson-Limit $\epsilon'_S \simeq \epsilon'$ gilt (vgl. Gleichung 3.18)
und die transformierte Photonenenergie ebenfalls maximal $\epsilon' = 2\gamma\epsilon$ ergibt, erhält man unmittelbar
 $\epsilon_S^{\max \text{ TL}} = 4\gamma^2\epsilon$ und aus $\epsilon_S < \epsilon_S^{\max}$ wiederum $\gamma > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_S}{\epsilon}}$.

$$\begin{aligned}
& - \frac{\epsilon_S^2}{2\epsilon} \frac{1}{s+5} \left(\frac{4\epsilon}{\epsilon_S} \right)^{\frac{s+5}{2}} - \frac{4\epsilon_S}{(s+3)^2} \left(\frac{4\epsilon}{\epsilon_S} \right)^{\frac{s+3}{2}} \left[1 + (s+3) \ln \frac{4\epsilon}{\epsilon_S} \right] \\
& = \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} \epsilon^{\frac{s+3}{2}} 2^{s+3} \left[\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+5} - \frac{4}{(s+5)^2} \right] \\
& = \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} \epsilon^{\frac{s+3}{2}} 2^{s+4} \frac{s^2 + 4s + 11}{(s+1)(s+3)^2(s+5)} \quad (G.79)
\end{aligned}$$

und damit, eingesetzt in Gleichung G.74 schließlich

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) \Big|_{\text{BG}}^{\text{TL}} \equiv r_0^2 c n_0 2^{s+1} \frac{s^2 + 4s + 11}{(s+1)(s+3)^2(s+5)} \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} \int d\epsilon \epsilon^{\frac{s-1}{2}} n(\epsilon) . \quad (G.80)$$

Bis auf einen Faktor 4π , der daher stammt, dass \dot{n}_S hier differentiell in Ω_S angegeben ist, entspricht obige Lösung der von Blumenthal & Gould (1970); dies ist durch den Index „BG“ angedeutet. Die Vermeidung der expliziten Integralgrenzen kann allerdings zu einer Missinterpretation von Gleichung G.81 führen: Die zur Herleitung benötigten Annahmen, wiedergegeben in den Ungleichungen G.75 und G.78, beschränken das Integrationsintervall über ϵ .

Zur Berechnung der differentiellen Streurrate für die Synchrotronphotonen als Targetphotonenquelle und zum Vergleich mit Gleichung G.73 ist es sinnvoll, die Annahme aus Gleichung G.78 durch die schwächere Form

$$\epsilon_S < \epsilon_S^{\max} = 4\gamma_2^2 \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon > \frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \quad \rightsquigarrow \quad \Theta \left(\epsilon - \frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \right) \quad (G.81)$$

zu ersetzen. Die Integration in Gleichung G.81 wird dann mit dem potenzgesetzförmigen Synchrotronphotonenspektrum aus Gleichung 4.16,

$$n(\epsilon) = K_1 \epsilon^{-\frac{s+1}{2}} \Theta(\epsilon - \epsilon_1) \Theta(\epsilon_2 - \epsilon) , \quad \epsilon_{1|2} = \epsilon_0 \gamma_{1|2}^2 , \quad (G.82)$$

unter Berücksichtigung der Heaviside-Funktionen aus den Bedingungen G.75 und G.81 zu

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\frac{s-1}{2}} n(\epsilon) \Theta \left(\epsilon - \frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \right) \Theta \left(\frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2} - \epsilon \right) = K_1 \int_{\max[\epsilon_1, \epsilon_S/4\gamma_2^2]}^{\min[\epsilon_2, \epsilon_S/4\gamma_1^2]} d\epsilon \epsilon^{-1} \\
& = K_1 \Theta(4\epsilon_0 \gamma_1^2 \gamma_2^2 - \epsilon_S) \ln \left[\frac{\epsilon_S}{4\epsilon_0 \gamma_1^4} \right] - K_1 \Theta(\epsilon_S - 4\epsilon_0 \gamma_1^2 \gamma_2^2) \ln \left[\frac{\epsilon_S}{4\epsilon_0 \gamma_2^4} \right] , \quad (G.83)
\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass

$$\min \left[\epsilon_2, \frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2} \right] = \begin{cases} \frac{\epsilon_S}{4\gamma_1^2}, & \epsilon_S < 4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2 \\ \epsilon_2, & \epsilon_S > 4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2, \end{cases}$$

$$\max \left[\epsilon_1, \frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2} \right] = \begin{cases} \epsilon_1, & \epsilon_S < 4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2 \\ \frac{\epsilon_S}{4\gamma_2^2}, & \epsilon_S > 4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2. \end{cases} \quad (\text{G.84})$$

Als Lösung für die SSC-Streurate im Thomson-Limit ergibt sich also zusammengefasst

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) \Big|_{\text{SSC},0}^{\text{TL}} = r_0^2 c n_0 K_1 2^{s+1} \frac{s^2 + 4s + 11}{(s+1)(s+3)^2(s+5)}$$

$$\times \epsilon_S^{-\frac{s+1}{2}} \left[\Theta(4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2 - \epsilon_S) \ln \left[\frac{\epsilon_S}{4\epsilon_0\gamma_1^4} \right] \right.$$

$$\left. - \Theta(\epsilon_S - 4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2) \ln \left[\frac{\epsilon_S}{4\epsilon_0\gamma_2^4} \right] \right], \quad (\text{G.85})$$

somit insbesondere *kein* potenzgesetzförmiger Verlauf des SSC-Spektrums (Siehe dazu auch Unterkapitel 4.5).

Durch die Abschwächung von Bedingung G.78 muss das Ergebnis der oberen Integralgrenze der γ -Integration ebenfalls berücksichtigt werden: Setzt man also γ_2 in Gleichung G.76 ein, ergibt sich nach Umsortieren

$$I_{\gamma_2}^{\text{TL}} = \epsilon_S \frac{\gamma_2^{-(s+3)}}{s+3} \left(\frac{4}{s+3} + 4 \ln \gamma_2 - 1 - 2 \ln \frac{\epsilon_S}{4} \right)$$

$$+ 2\epsilon_S \frac{\gamma_2^{-(s+3)}}{s+3} \ln \epsilon - 4 \frac{\gamma_2^{-(s+1)}}{s+1} \epsilon + \frac{\epsilon_S^2 \gamma_2^{-(s+5)}}{2(s+5)} \epsilon^{-1}. \quad (\text{G.86})$$

Als Korrektur zu dem Ergebnis aus Gleichung G.85 ergibt sich aus obiger Gleichung und Gleichung G.74 mit Gleichung G.76

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) \Big|_{\text{SSC}}^{\text{TL}} &\equiv \frac{r_0^2 c n_0 K_1}{8} \int_{\max[\epsilon_1, \epsilon_S/4\gamma_2^2]}^{\min[\epsilon_2, \epsilon_S/4\gamma_1^2]} d\epsilon \epsilon^{-\frac{s+5}{2}} \left| I^{\text{TL}} \right|^{\gamma_2} \\
&= \frac{r_0^2 c n_0 K_1}{8} \left[2\epsilon_S \frac{\gamma_2^{-(s+3)}}{s+3} \epsilon^{-\frac{s+3}{2}} \left(1 - \frac{8}{s+3} + \ln \frac{\epsilon_S}{4\epsilon\gamma_2^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 8 \frac{\gamma_2^{-(s+1)}}{s+1} \epsilon^{-\frac{s+1}{2}} - \epsilon_S^2 \frac{\gamma_2^{-(s+5)}}{s+5} \epsilon^{-\frac{s+5}{2}} \right]_{\max[\epsilon_1, \epsilon_S/4\gamma_2^2]}^{\min[\epsilon_2, \epsilon_S/4\gamma_1^2]} . \quad (\text{G.87})
\end{aligned}$$

Das „ Δ “ deutet an, dass $\Delta \dot{n}_S \Big|_{\text{SSC}}^{\text{TL}}$ einen Korrekturterm zu Lösung G.85 darstellt.

Die Korrektur zu Gleichung G.85 zerfällt also ebenfalls in die zwei Bereiche der Streuenergie um $\epsilon_S = 4\epsilon_0\gamma_1^2\gamma_2^2$ (siehe Gleichung G.84).

Die komplette Lösung für die differentielle Streurrate des SSC-Prozesses eines potenzgesetzförmigen Elektronenspektrums im Thomson-Limit ergibt sich also aus Gleichung G.85 zusammen mit der Korrektur aus Gleichung G.87:

$$\dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) \Big|_{\text{SSC}}^{\text{TL}} = \dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) \Big|_{\text{SSC},0}^{\text{TL}} + \Delta \dot{n}_S(\epsilon_S, \Omega_S) \Big|_{\text{SSC}}^{\text{TL}} . \quad (\text{G.88})$$

Die verschiedenen Ergebnisse sind in Unterkapitel 4.5 vergleichend dargestellt. Es gilt festzuhalten, dass Gleichung G.88 die allgemeine Lösung aus Gleichung G.73 für Parameterwerte, die eine Berechnung im Thomson-Limit gestatten, hervorragend reproduziert.

Literaturverzeichnis

- Abramowitz M., Stegun I.A., *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1964
- Aharonian F., Akhperjanian A., Beilicke M. et al., 2003, A&A 410, 813
- Aharonian F.A., Timokhin A.N., Plyasheshnikov A.V., 2002, A&A 384, 834
- Amenomori M., Ayabe S., Cui S.E. et al, 2003, ApJ 598, 242
- Antonucci R., 1993, ARA&A 31, 473
- Arbeiter C., Pohl M., Schlickeiser R., 2002, A&A 386, 415
- Baade W., Minkowski R., 1954, ApJ 119, 215
- Beall J.H., Bednarek W., 1999, ApJ 510, 188
- Begelman M.C., Blandford R.D., Rees M.J., 1984, Rev.Mod.Phys. 56, 255
- Blandford R. D., McKee C. F., 1977, MNRAS 180, 343
- Blandford R.D., Znajek R.L., 1977, MNRAS 179, 433
- Blandford R.D., Rees M.J., in: *Pittsburgh Conf. BL Lac Objects*, Editor A.M. Wolfe, Univ. Pittsburgh Press, Pittsburgh, 1978, S. 328
- Błażejowski M., Sikora M., Moderski R., Madejski G.M., 2000, ApJ 545, 107
- Bloom S.D., Marscher A.P., 1996, ApJ 461, 657
- Blumenthal G.R., Gould R.J., 1970, Rev.Mod.Phys 42, 237
- Böttcher M., 2004, New Ast.Rev. 48, 399
- Böttcher M., Dermer C.D., 2002, ApJ 564, 86
- Böttcher M., Bloom S.D., 2000, A&A 119, 469
- Caccianiga A., Marchã M.J.M., 2004, MNRAS 348, 937
- Catanese M., Weekes T.C., 1999, PASP 111, 1193

- Cohen M.H., Linfield R.P., Moffet A.T. et al., 1977, *Nature* 268, 405
- Curtis H.D., 1917, *PASP* 29, 206
- Curtis H.D., 1918, *Publ.Lick Obs.* 13, 55
- Dar A., Laor A., 1997, *ApJ* 478, L5
- Dermer C.D., Dingus B.L., 2004, *New Ast.Rev.* 48, 537
- Dermer C.D., Gehrels N., 1995, *ApJ* 447, 103
- Dermer C.D., Schlickeiser R., 1993, *ApJ* 416, 458
- Dermer C.D., Schlickeiser R., Mastichiadis A., 1992, *A&A* 256, L27
- Dopita M., 1997, *PASA* 14, 230
- Fossati G., Maraschi L., Celotti A. et al., 1998, *MNRAS* 299, 433
- Gehrels N., Michelson P., 1999, *APh* 11, 277
- Ghisellini G., Celotti A., Fossati G. et al., 1998, *MNRAS* 301, 451
- Gómez J.L., Marscher A.P., Alberdi A. et al., 1998, *ApJ* 499, 221
- Gopal–Krishna, Dhurde S., Wiita P.J., 2004, *ApJ* 615, L81
- Haas M., Chini R., Meisenheimer K. et al., 1998, *ApJ* 503, L109
- Haas M., Müller S.A.H., Chini R. et al., 2000, *A&A* 354, 453
- Hagedorn R., *Relativistic Kinematics*, W.A. Benjamin, Inc., Massachusetts, 1973
- Hartman R.C., Bertsch D.L., Bloom S.D. et al., 1999, *ApJS* 123, 79
- Hauser M. G., Dwek E., 2001, *ARA&A* 39, 249
- Horan D., Weekes T.C., 2004, *New Astr.Rev.* 48, 527
- Jauch J.M., Rohrlich F., *The theory of photons and electrons*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976
- Johnson H.L., Morgan W.W., 1953, *ApJ* 117, 313
- Jones F.C., 1968, *Phys.Rev.* 167, 1159
- Kazanas D., Ellison D.C., 1986, *ApJ* 304, 178
- Kellermann K.I., Sramek R., Schmidt M. et al, 1989, *AJ* 98, 1195

- Krawczynski H., Hughes S.B., Horan D., 2004, ApJ 601, 151
- Lang K.R., *Astrophysical Formulae*, Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1974
- Mannheim K., Biermann P.L., 1992, A&A 253, L21
- Maraschi L., Fossati G., Tavecchio F., 1999, ApJ, 526, L81
- Maraschi L., Ghisellini G., Celotti A., 1992, ApJ 397, L5
- Mause H., *Theoretische Modellierung des Zeitverhaltens und der Breitbandspektren von Gamma–Blasaren*, Dissertation, Mathem.–Naturw.–Fakultät der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität, Bonn, 1996
- Möhring H.–J., Ranft J., 1991, Z.Phys.C 52, 643
- Mukherjee R., Bertsch D.L., Bloom S.D. et al., 1997, ApJ 490, 116
- Padovani P., Perlmutter E.S., Landt H. et al., 2003, ApJ 588, 128
- Pearson T.J., Unwin S.C., Cohen M.H. et al., 1981, Nature 290, 365
- Peterson B.M., Ferrarese L., Gilbert K.M. et al, 2004, ApJ 613, 682
- Pohl M., Lerche I., Schlickeiser R., 2002, A&A 383, 309
- Pohl M., Reich W., Krichbaum T.P. et al., 1995, A&A 303, 383
- Pohl M., Schlickeiser R., 2000, A&A 354, 395
- Primack J.R., Bullock J.S., Somerville R.S. et al., 1999, APh 11, 93
- Primack J.R., Bullock J.S., Somerville R.S., 2005, xxx.lanl.gov/pdf/astro-ph/0502177
- Protheroe R.J., Mücke A., in: *Proceedings of the HEGRA Symposium 2000*, Editor F.A. Aharonian and H.J. Völk, AIP Proceedings 558, New York, 2001, S. 700
- Ranft J., Capella A., Trân Thanh Vân J., 1994, Phys.Lett.B 320, 346
- Rees, M.J., 1966, Nature 211, 468
- Rees M.J., Sciama D.W., 1966, Nature 211, 805
- Reynolds S.P., 1982, ApJ 256, 38
- Rybicky G.B., Lightman A.P., *Radiative Processes in Astrophysics*, John Wiley & Sons, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore, 1979
- Salpeter E.E., 1964, ApJ 140, 796

- Schlickeiser R., *Cosmic ray astrophysics*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 2002
- Schlickeiser R., 2003, A&A 410, 397
- Schlickeiser R., Pohl M., Vainio R., 2003, ApJ 596, 840
- Schmidt M., 1963, Nature 197, 1040
- Schuster C., Pohl M., Schlickeiser R., 2002, A&A 382, 829
- Seyfert C.K., 1943, ApJ 97, 28
- Shakura N.I., Sunyaev R.A., 1973, A&A 24, 337
- Sikora M., Kirk J.G., Begelman M.C. et al, ApJ 320, L81
- Sikora M., Begelman M.C., Rees M.J., 1994, ApJ 421, 153
- Siewert M., Pohl M., Schlickeiser R., 2004, A&A 425, 405
- Swanenburg B.N., Hermsen W., Bennett K. et al, 1978, Nature 275, 298
- Tademaru E., 1969, ApJ 258, 131
- Takahashi T., Kataoka J., Madejski G., et al., 2000, ApJ 542, L105
- Vainio R., Pohl M., Schlickeiser R., 2004, A&A 414, 463
- Urry C.M., Padovani P., 1995, PASP 107, 803
- Voigt H.-H., *Abriß der Astronomie*, BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1991
- von Montigny C., Bertsch D.L., Chiang J. et al., 1995, ApJ 440, 525
- Wallis G., in: *Paris Symposium on Radio Astronomy, IAU Symposium no.9*, Editor R.N. Bracewell, Stanford University Press, Stanford, CA, 1959, S. 595
- Whitney A.R., Shapiro I.I., Rogers A.E.E. et al., 1971, Science 173, 225
- Zdziarski A.A., 1988, ApJ 335, 786

Danksagung

Mein vornehmlicher Dank gilt Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser für die Förderung meines Promotionsstudiums und die angenehme Betreuung während dieser Zeit.

Ein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Martin Pohl für die Bereitstellung des numerischen Codes des Modells der relativistischen Stoßfront, sowie seiner Betreuung der Dissertation.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei allen Mitgliedern des Lehrstuhl TP IV für die angenehme Arbeitsatmosphäre, insbesondere bei Dr. Andreas Kopp, Dr. Claudia Schuster und Angelika Schmitz für die Durchsicht der Arbeit.

Ein weiterer Dank geht an meine Familie und Freunde, die mich in diesem Lebensabschnitt begleitet haben.