

**Auswirkung magnetohydrodynamischer  
Turbulenz und  
Welle-Teilchen-Wechselwirkung in  
relativistischen Ausflüssen**

Dissertation zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften

der

Fakultät für Physik und Astronomie  
der Ruhr-Universität Bochum

von

Claudia Schuster

Bochum

September 2004



# Inhaltsverzeichnis

<b>Jets aktiver galaktischer Kerne</b>	<b>1</b>
<b>Energiekonversion durch eine Zweistrominstabilität</b>	<b>9</b>
<b>Evolution von Protonen in einem hadronischen Jet</b>	<b>19</b>
Berechnung der Gesamtmasse des Jets . . . . .	21
Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Masse . . . . .	21
Integration der Massenfunktion $I(\Gamma)$ . . . . .	24
Diskussion weiterer Näherungen . . . . .	29
Die Protonenverteilungsfunktion . . . . .	31
Die charakteristischen Teilchenpfade . . . . .	32
Analytische Darstellung der Protonenverteilung . . . . .	38
<b>Produktion von Sekundärteilchen</b>	<b>47</b>
Berechnung des Photonenspektrums . . . . .	50
Variabilität der Quellen . . . . .	59
<b>Weiterentwicklungen des ursprünglichen Modells</b>	<b>63</b>
Änderungen durch eine inhomogene Dichtefunktion . . . . .	63
Die elektrostatische Instabilität . . . . .	67
<b>Reproduzierbarkeit von Lichtkurven</b>	<b>73</b>
Ausdünnung durch den infraroten Hintergrund . . . . .	73
Spektren und Lichtkurven verschiedener Blasare . . . . .	79
<b>Zusammenfassung der Ergebnisse</b>	<b>87</b>

<b>Anhänge</b>	<b>91</b>
Anhang A: Die Abbremsung des Plasmas . . . . .	91
Anhang B: Die Ableitung der Protonenverteilung . . . . .	93
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>106</b>

# Jets aktiver galaktischer Kerne

*Mit dem signifikanten Zuwachs astronomischen Datenmaterials wächst auch der Anspruch an die Modelle, die im Rahmen der theoretischen Astrophysik entwickelt werden. Im Mittelpunkt des Interesses stehen dabei Mechanismen, die eine befriedigende Erklärung für komplexe astrophysikalische Phänomene liefern können. Ein prominentes Beispiel dafür sind die Jets aktiver galaktischer Kerne, die eine Teilregion eines komplexen symbiotischen Systems darstellen. Die Jets fungieren dabei als Verbindungsglied zwischen der Kernregion einer aktiven Galaxie und ihren äußeren Strukturen, den Radioblasen. In diesem einführenden Kapitel werden grundlegende astronomische Beobachtungsergebnisse vorgestellt, sowie theoretische Modelle dieser astrophysikalischen Phänomene beschrieben.*

Bedingt durch die ständige technische Verbesserung astronomischer Beobachtungsmethoden im Laufe des letzten Jahrhunderts hat sich heute ein stark verändertes und detailreiches astrophysikalisches Weltbild ergeben.

Während man sich bis vor achtzig Jahren noch nicht sicher war, ob es sich bei den sogenannten Spiralnebeln nicht um Objekte innerhalb der eigenen Milchstraße handelt<sup>1</sup>, ist man mit heutigen Methoden in der Lage auch Einzelheiten weit entfernter Objekte aufzulösen. Die dabei sichtbar werdenden Strukturen erfordern neue theoretische Erklärungen der zugrunde liegenden Mechanismen. Eines der interessantesten Beispiele dafür sind aktive galaktische Kerne (AGN) und die dazugehörigen Jets.

Schon in den frühen fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurden Radioquellen

---

<sup>1</sup>Neben anderen Autoren fand Öpik (1922) durch die Abschätzung der Entfernung zum Andromeda Nebel (M31), dass es sich bei diesen Objekten um eigenständige Galaxien handelt.

als extragalaktische Galaxien<sup>2</sup> identifiziert (Baade & Minkowski 1954). Die komplexen physikalischen Vorgänge, die diesen Objekten zugeschrieben werden, sind spätestens seit der Entdeckung der ersten Quasare durch Schmidt (1963) und Hazard (1963) Gegenstand heftiger Diskussionen. Inzwischen haben sich aber in den jeweiligen Teilbereichen verschiedene Theorien durchgesetzt und zu Paradigmen in ihrem Gebiet entwickelt.

Quasare und Seyfert-Galaxien (Seyfert 1943) werden heute unter dem Stichwort AGN zusammengefasst. Diese Unterklassen werden nach spektralen Unterschieden, Luminositäten und weiteren physikalischen Eigenschaften in verschiedenen Systeme eingeteilt. Diese Systeme zu vereinheitlichen gelingt, indem man den Aufsichtswinkel zur Klassifikation benutzt. Dabei geht man davon aus, dass die Unterschiede in den Eigenschaften von unterschiedlichen Aufsichtswinkeln herrühren, es sich im Grunde aber immer um die gleiche Klasse von Objekten handelt (Urry & Padovani 1995, Antonucci 1993, Orr & Browne 1982).

Die hohe zeitliche Variabilität (auf Zeitskalen von Tagen bis Minuten) der Quellen lässt auf räumlich sehr kleine Quellgebiete<sup>3</sup>, verbunden mit dem hohen Energieausstoß (bis zu  $10^{46}$  erg/s) sogar auf sehr kompakte Zentralobjekte schließen (Begelman 1984). Die Beobachtung „super-luminaler Bewegung“, der scheinbaren Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit, (Rees 1966, Blandford et al. 1977, Cohen et al. 1977) einzelner Komponenten der Quelle (sogenannter „knots“) und die Tatsache, dass bei vielen Objekten nur ein Jet oder der sogenannte Counter-Jet nur schwach sichtbar ist (Begelman 1984), nimmt man als Hinweis dafür, dass es sich bei den Jetstrukturen um relativistische Plasmen handelt (Barthel 1989).

Ausgehend von diesen Beobachtungen lässt sich ein einheitliches Modell für das symbiotische System AGN-Jet formulieren: Im Zentrum eines solchen Objektes befindet sich ein schwarzes Loch mit einer Masse von ca.  $10^6$  bis  $10^{10}$  Sonnenmassen (zur Massenabschätzung siehe z.B. Kormendy 1988). Der zentrale Kern ist umgeben von einer Akkretionsscheibe<sup>4</sup> aus Gas, senkrecht dazu lassen sich ein oder zwei (entgegengesetzte) Jets beobachten. Die Bildung der Akkretionsscheibe ist ein in der Literatur viel diskutierter Prozess, der z.B. einem relativistischen Effekt (Spinwinkelgeschwindigkeit

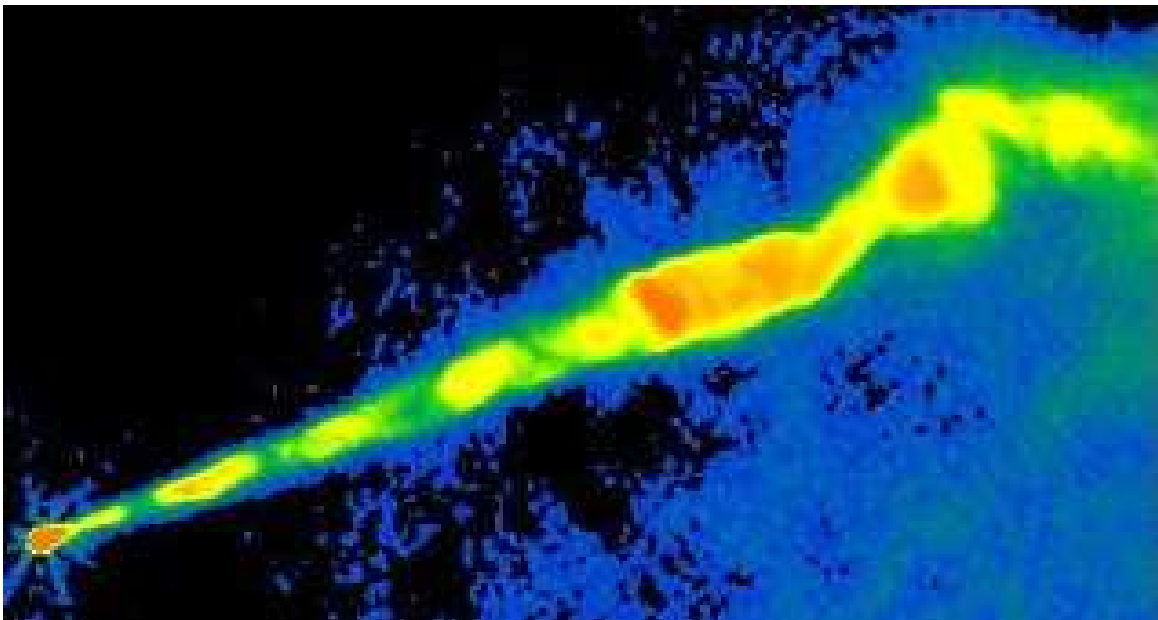
---

<sup>2</sup>Baade und Minkowski prägten 1954 auch den Begriff „Jet“ an der Radiogalaxie M87. Sie zeigt einen 20 Bogensekunden weiten Auswurf.

<sup>3</sup>Die Abschätzung erfolgt mit dem Argument, dass  $R \leq c \delta t$  sein muss, wobei mit  $\delta t$  die zeitliche Variabilität bezeichnet wird.

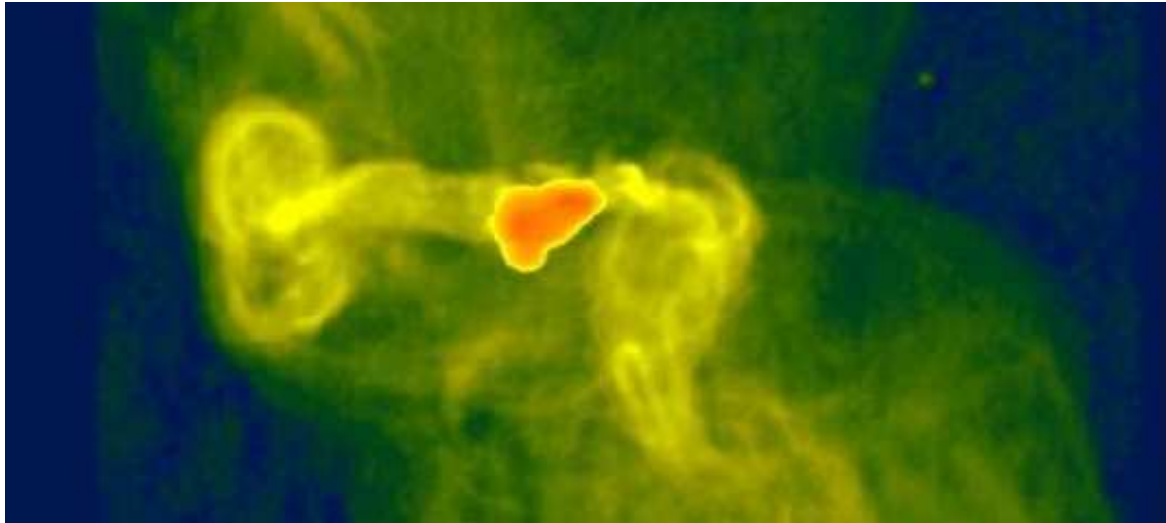
<sup>4</sup>Die Idee der Materieakkretion durch Objekte mit Massen  $M > 10^6$  Sonnenmassen wurde schon von Salpeter (1969) propagiert.

$\Omega \neq 0$ ) zugeschrieben werden könnte, der besagt, dass die Geometrie von einer sphärischen abweicht und sich eine dynamisch stabile Umlaufbahn (in der äquatorialen Ebene) ausbilden kann (Blandford 1999). Diskutiert werden in der Literatur auch verschiedene dynamische, thermische und elektromagnetische Instabilitäten innerhalb der Akkretionsscheiben, die zur Aufrechterhaltung der Akkretionsrate durch radialen Transport des Drehmoments und damit zu ihrer Stabilität beitragen (z. B. Balbus & Hawley 1998). Für die Umsetzung der vorhandenen Rotationsenergie in einen relativistischen Ausfluss („outflowing wind“), also dem Jet, wird der Blandford-Znajek Prozess (Blandford & Znajek 1977) verantwortlich gemacht, bei dem sphäroide Ausflüsse, die so genannten Poynting-Flüsse, die sich nahe am Ereignishorizont des Schwarzen Loches bilden, zu Jets kollimiert werden.



**Abbildung 1.1:** Die VLA-Aufnahme zeigt den Jet von M87 bei einer Wellenlänge von 2 cm. Gut zu beobachten ist hier die Knotenstruktur. Die Gesamtausdehnung des Jets beträgt ca. 2 kpc. Die Jetstruktur endet in einer der Radioblasen, den „inner lobes“ (Owen 1989).

Die von den Jets erreichten Ausmaße liegen im Kiloparsecbereich. Als Beispiel sei hier die elliptische Galaxie M87 (NGC 4486, Virgo A) gezeigt, deren beobachtbarer Jet ca. 2 kpc lang ist (siehe auch Abb. 1.1). Beobachtbar ist mit modernen Teleskopen auch die Substruktur der Jets, die sogenannten Knoten. Im Fall von M87 kann man beobachten, dass die Jetstruktur, die in einem sogenannten „inner lobe“ endet, von



**Abbildung 1.2:** Auf dieser Aufnahme sieht man die Gesamtstruktur: Der in Abb. 1.1 gezeigte Jet liegt innerhalb eines Halos, dessen Ausdehnung über 80 kpc. beträgt. Die „inner lobes“ liegen innerhalb der inneren roten Struktur (Owen, Eilek & Kassim 2000).

einem blasenartigen Radiohalo umgeben ist, dessen Durchmesser 80 kpc beträgt<sup>5</sup>.

Die niederenergetische (Radio-/optische-/UV-) Strahlung von Quellen wie z. B. Blazaren<sup>6</sup> wird identifiziert mit der Synchrotronemission nicht-thermischer Jetelektronen. Zur Erklärung der hochenergetischen Komponente werden zwei alternative Klassen von Modellen diskutiert.

Die sogenannten leptonischen Modelle schlagen als Ursprung der Röntgen- und Gammastrahlung (inverse) Comptonstreuung an den erwähnten Synchrotronelektronen vor. Dabei kommen als Photonen sowohl die generierten Synchrotronphotonen in Frage, diese Modelle werden als SSC (Synchrotron-Self-Compton) Modelle bezeichnet (Bloom & Marscher 2002, Maraschi 1992), als auch ausserhalb des Jet generierte Photonen (External-Inverse-Compton Modelle), wie zum Beispiel in einem äußeren Staubring erzeugte Infrarotphotonen (Arbeiter et al. 2002), Photonen aus dem Bereich der Akkretionsscheibe (Dermer, Schlickeiser & Mastichiadis 1992, Dermer & Schlickeiser 1993) oder durch externe Wolken gestreute Strahlung der zentralen Quelle (Sikora, Begelman & Rees 1994)

---

<sup>5</sup>Siehe dazu <http://www.aoc.nrao.edu/~fowen/M87halo.html>.

<sup>6</sup>Blazare gehören zur Klasse der radiolauten Objekte und umfassen sowohl die Subklasse der Bl Lacertae Objekte wie auch die Subklasse der „optically violent variable“ (OVV) sowie der „flat spectrum radio“ Quasare (FSRQ).



in Frage.

Alternativ dazu wird in hadronischen Modellen vorgeschlagen, den hochenergetischen Teil der Strahlung durch Wechselwirkung schwererer Teilchen (z. B. Protonen), zu erklären. So werden zum Beispiel in einem Modell von Bednarek (1993) inelastische Zusammenstöße eines (schockbeschleunigten) Protonstrahls mit Materie einer dicken Akkretionsscheibe als Erzeugungsprozess für Pionen vorgeschlagen, die wiederum in Elektronen bzw. Photonen zerfallen. Zusätzlich zur dadurch erzeugten Strahlung wird inverse Comptonstreuung der UV-Photonen der Akkretionsscheibe mit sekundären Elektronen berücksichtigt.

Mannheim (Mannheim 1993, Mannheim & Biermann 1992) untersucht die Konsequenzen, die sich durch eine zusätzliche Protonenkomponente in einem konischen, relativistischen Jet ergeben, wobei die Protonen mit den von der Elektronenkomponente beschleunigten Synchrotronphotonen wechselwirken. Eine von den Protonen initiierte Kaskade erzeugt schließlich ein Photonenspektrum im Energiebereich von keV bis TeV durch Pion- und Photopaarproduktion.

In dem davon leicht abweichenden Synchrotron Protonen Blasar (SPB)-Modell (Mücke & Protheroe 1999, Mücke & Protheroe 2000, Mücke et al. 2002) wird die Hochenergiekomponente als Synchrotronstrahlung (schock-)beschleunigter Protonen, die mit den Synchrotronphotonen mitbeschleunigter Elektronen wechselwirken, erklärt. Für die niederenergetische Komponente wird direkt die Synchrotronstrahlung der mitbeschleunigten Elektronen verantwortlich gemacht. Im Kontext dieses Modells lässt sich unter Annahme von starken magnetischen Feldern der Hochenergiepeak in HBLs<sup>7</sup> als Synchrotronstrahlung der Protonen deuten, während in LBLs der Hochenergieanteil durch Pionenphotoproduktion und eine anschließende Kaskade erklärt wird.

Hochenergetische Neutrinos, die in hadronischen Modellen durch Sekundärteilchenprozesse erzeugt werden, bieten ein Entscheidungskriterium, ob in den Jets Protonen vorhanden sind. In Planung und Bau befindliche Detektoren z.B. IceCube sind dazu geeignet, in dieser Frage eine Antwort zu ermöglichen (Ahrens et al. 2004). Die meisten der existierenden Modelle sind sehr unspezifisch in Bezug auf den Transfermechanismus der kinetischen Energie der Schockwelle in Strahlung. Im Rahmen dieser Arbeit soll anhand eines Modells (Pohl & Schlickeiser 2000), das sich speziell mit diesem Punkt beschäftigt,

---

<sup>7</sup>Die HBLs (high-frequency peaked BL Lacs) unterscheiden sich von den LBLs (low-frequency peaked BL Lacs) dadurch, dass das Maximum der Strahlung bei höheren Frequenzen liegt.

mittels analytischer Lösungen untersucht werden, welche Auswirkungen die Ausbildung elektromagnetischer Turbulenz im Plasma eines Jets hat und inwiefern beobachtbare Strukturen mit Hilfe dieses Modells reproduziert werden können. Dabei sei anzumerken, dass mit dem Begriff „Blast Wave Model“ (der in der Arbeit von Pohl & Schlickeiser (2000) für dieses Modell ursprünglich benutzt wird) oft die Charakteristiken hydrodynamischer Modelle assoziiert werden. Daher wird zur Abgrenzung von diesen Modellen inzwischen der Begriff „relativistic collision front model“ für das in den folgenden Kapiteln untersuchte Modell benutzt.

Allerdings bilden hydrodynamische Schockwellenszenarios historische Vorläufer des im weiteren zugrunde gelegten Modelles, daher soll im Folgenden kurz darauf eingegangen werden. Um die beobachtete Strahlung zu erklären, bieten sich Szenarios an, bei denen hydrodynamische Schockwellen (Blast Waves) durch ein äußeres Medium propagieren und dabei die kinetische Energie des (Blast Wave-) Plasmas auf die Plasmateilchen übertragen, die diese Energie wieder abstrahlen.

Die Anwendung des Schockszenarios auf aktive galaktische Kerne wurde von Blandford & McKee (1976, 1977) vorangetrieben<sup>8</sup>. Dabei wurde untersucht, welche Lösungen sich unter Anwendung des Konzeptes der Ähnlichkeitslösungen („similarity solutions“) zur Beschreibung relativistischer Schocks<sup>9</sup> ergeben. Unter Annahme symmetrischer Geometrie (hervorgerufen z. B. durch eine unspezifisch angenommene Explosion oder Instabilität) und nur für schwache magnetische Felder wurden verschiedene Lösungen einer durch ein äußeres Medium expandierenden adiabatischen Schockwelle vorgestellt, die abhängig von der zugeführten Energie variieren. Dabei wurde der Term „adiabatisch“ in dem Sinne benutzt, dass kein Energiefluss durch die durch den Schock definierte Grenze vorhanden ist, aber Lösungen zugelassen werden, die sich bei fortdauerender Energiezufuhr ergeben. Zusätzlich wurden die Konsequenzen eines externen Dichtegradienten<sup>10</sup> diskutiert und der alternative Fall einer radiativen (in dem Sinne also nicht mehr adiabatischen) Blast Wave vorgestellt. Interessant an diesen Lösungen ist, dass, sofern nach einmaliger Injektion keine weitere Energie zugeführt wird, sich die gesamte Energie in einer Schale der Dicke (scale height)  $R/\Gamma^2$  konzentriert (wobei  $\Gamma$  der Lorentz-

---

<sup>8</sup>Vorläufer waren Arbeiten von Colgate & Johnson (1960) sowie Johnson & McKee (1971), die allerdings im Hinblick auf andere astrophysikalische Anwendungen ausgeführt wurden.

<sup>9</sup>Eine Weiterentwicklung der nicht-relativistischen Sedovlösungen (Sedov 1969).

<sup>10</sup>Allerdings ist durch das Konzept der similarity solutions die Variation der Dichte auf Potenzen des Radius  $n \sim R^{-k}$  beschränkt.

faktor und  $R$  der Radius des Schocks ist) mit dem Schock<sup>11</sup> mitbewegt, was daran liegt, dass die „downstream“ Teilchen abkühlen. Problematisch an diesem Szenario ist, dass die Beschleunigung der Teilchen selbst in dem Fall, dass ständig Energie zugeführt wird, *ad hoc* angenommen werden muss.

Jones & Tobin (1977) wiesen darauf hin, dass die beobachtbaren schnellen Variationen des spektralen Flusses nicht mit einem solchen Modell reproduzierbar sind, welches ausschließlich abbremsende Schockwellen beschreibt. Auch lassen sich reale Beobachtungen (insbesondere das „alignment“ vieler Jets) nur schwer unter Annahme einer sphärischen Geometrie erklären. Daher wurde eine Erweiterung auf achsensymmetrische Modelle (2D-Modell) von Shapiro (1979) vorgeschlagen. Shapiro diskutiert zusätzlich, unter welchen Bedingungen (vornehmlich an das externe Medium) Blast Waves produziert werden könnten, die nach einer Bremsphase wieder beschleunigen. Allerdings können auch mit diesen Modellen die beobachteten Flussvariationen nicht korrekt reproduziert werden (Marscher & Scott 1980).

Eine Erweiterung des Schockwellenszenarios vornehmlich im Hinblick auf die Anwendung auf Gamma Ray Bursts (GRBs) und Blazare wurde von Dermer & Chiang (1998) diskutiert. Auch hier wird ein relativistisches, magnetisiertes Plasma betrachtet, welches Materie aus dem interstellaren Medium aufnimmt und dadurch selbst abbremst. Dabei wird auch das externe Medium als vollständig ionisiertes Elektronen-Protonen Plasma angenommen, wodurch ein äußeres Elektron-Proton-Paar im Plasmoid eingefangen wird, sobald der Protonen Larmor-Radius in der Größe der Plasmoidabmessungen liegt. Anfänglich soll der Plasmoid aus thermischen Leptonen (Elektronen und Positronen) und Protonen bestehen. Dabei wird angenommen, dass sich der relativistische Ausfluss mit dem Lorentzfaktor  $\Gamma(x)$  entlang der  $x$ -Achse bewegt. Die Gleichungen für die Plasmoiddynamik<sup>12</sup> ( $P^{-1}\partial P/\partial x$ ) sind in diesem Modell durch die Verteilungsfunktionen  $N(p, x(t))$  der relativistischen Protonen bzw. Elektronen im mitbewegten<sup>13</sup> System bestimmt. Für die asymptotischen Bereiche, d.h. im nicht-radiativen Regime (man vernachlässigt dabei die Abstrahlung  $\dot{\gamma}$ ) sowie im radiativen Bereich, für den man annimmt, dass die kinetische Energie der aufgenommenen Teilchen sofort wieder abgestrahlt wird,

---

<sup>11</sup>Im Gegensatz zum nicht-relativistischen Fall, wo die Energie nahezu gleichmäßig über das betrachtete Volumen verteilt ist.

<sup>12</sup>Mit  $P = B\Gamma$  ist der dimensionslose Impuls des abbremsenden Systems gemeint, wobei  $Bc$  die Geschwindigkeit des Plasmas bezeichnet. Analog bezeichnet  $p = \beta\gamma$  den dimensionslosen Impuls der in das Plasma aufgenommenen, sogenannten nicht-thermischen Teilchen.

<sup>13</sup>Also im Ruhesystem des Plasmas.

können die Ausdrücke für die Teilchenverteilungsfunktionen direkt angegeben werden. Allerdings wird die Mikrophysik des Energietransfers von den Protonen zu den Elektronen nicht weiter diskutiert, sondern die Konsequenzen der Annahmen, dass ein gewisser Anteil der Energie instantan (bzw. auf einer Zeitskala  $\tau_{pe}$ ) transferiert wird, betrachtet.

Bei der Anwendung dieses Modells auf Blazare sind verschiedene Anforderungen an das externe Medium zu berücksichtigen, die den erlaubten Parameterbereich einschränken. So müssen die Dichteänderungen im externen Medium auf räumlich kurzen Skalen stattfinden, um die hohe Variabilität erklären zu können, aber auch zahlreich genug, um die häufigen Änderungen im Signal zu erklären, mit der zusätzlichen Anforderung, dass die Dichte hoch genug sein muss, um einen effizienten Energietransfer zu gewährleisten.

# Energiekonversion durch eine Zweistrominstabilität

*Allen weiteren Untersuchungen wird ein Modell von Pohl & Schlickeiser (2000) zugrunde gelegt, bei dem ein Teil des Jet als gebündelter Strahl (Plamoid) betrachtet wird, in dem niederfrequente, magnetohydrodynamische Alfvén- und Whistlerwellen durch aus der Umgebung aufgesammelte relativistische Protonen und Elektronen angeregt werden. Zunächst soll eine kurze Einführung in die theoretischen Grundlagen einen Überblick über die Voraussetzungen des Modells geben.*

Der Jet, bestehend aus einem kalten<sup>1</sup> Plasma aus Elektronen und Protonen, bewegt sich mit dem Lorentzfaktor  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$  (wobei V die Geschwindigkeit des Plasmoids bezeichnet) durch die ihn umgebende Materie, die selbst Protonen und Elektronen enthält. Vom Ruhesystem des Jets aus gesehen bewegen sich diese Teilchen mit  $\Gamma$  in das Jetplasma hinein.

Man betrachtet also ein Plasma, das aus zwei Komponenten besteht: Ein isotropes Hintergrundplasma (der Jet) und einen Teilchenstrahl, gegeben durch die Teilchen der äußeren Materie. Dies sind die Voraussetzungen für eine klassische Zweistrominstabilität.

Unter Zweistrominstabilität versteht man die Erzeugung von Langmuirwellen (Elektronenplasmawellen), die entstehen, wenn ein Teilchenstrahl mit hoher Geschwindigkeit und niedriger Teilchenanzahldichte sich durch ein Hintergrundplasma bewegt (Melrose 1980).

---

<sup>1</sup>In der „kalten Plasma“-Approximation vernachlässigt man den Einfluss der Temperatur auf die Wellenausbreitung (z.B. räumliche Dispersion).

Formal beschreibt man die Eigenschaften von Plasmawellen durch Dispersionsrelationen (für die jeweilige Wellenmode), die ihrerseits die Lösungen<sup>2</sup> der Dispersionsgleichung

$$\det[\Lambda_{i,j}^h(\mathbf{k}, \omega)] = 0 \quad (2.1)$$

darstellen, wobei der Maxwelloperator  $\Lambda_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)$  über

$$\Lambda_{i,j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} (\kappa_i \kappa_j - \delta_{i,j}) + \epsilon_{i,j}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.2)$$

mit dem (normalisierten) Wellenvektor  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$  definiert ist und

$$\epsilon_{i,j}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{i,j} + 4\pi i \sigma_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)/\omega \quad (2.3)$$

den Dielektrizitätstensor darstellt, während  $\sigma_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)$  den Leitfähigkeitstensor bezeichnet. Dabei ist  $\omega$  die (komplexe) Wellenfrequenz. Der hermitesche Anteil des Dielektrizitätstensors<sup>3</sup>

$$\epsilon_{i,j}^h(\mathbf{k}, \omega) = 1/2 [\epsilon_{i,j}(\mathbf{k}, \omega) + \epsilon_{i,j}^*(\mathbf{k}, \omega)] \quad (2.4)$$

beschreibt das (lineare) Reaktionsverhalten des Mediums auf eine Störung. Der allgemeine Zusammenhang der Dispersionsgleichung mit der homogenen Wellengleichung ist durch

$$\Lambda_{i,j}^h(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (2.5)$$

gegeben, wobei Gl. (2.1) eine notwendige Bedingung für die Existenz von Lösungen der Wellengleichung darstellt. Es lässt sich also zusammenfassen, dass man die Wellenmoden der dispersiven<sup>4</sup> Medien über die Dispersionsrelationen  $\omega(\mathbf{k})$  bzw. über den Brechungsindex  $N = kc/\omega$  darstellen kann, die sich wiederum via Leitfähigkeitstensor  $\sigma_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)$  bzw. dielektrischen Tensor  $\epsilon_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)$  berechnen lassen.

Alternativ zu diesem z.B. von Melrose (1980) vorgestellten Ansatz ist es genauso möglich, den allgemeinen Ausdruck für die Dispersionsrelation bzw. den Leitfähigkeitstensor unter Benutzung der kinetischen Theorie (d.h. der linearisierten Vlasov Gleichungen) herzuleiten (siehe z.B. Montgomery und Tideman 1964, Swanson 1989, Schlickeiser 2002).

Da schräg zum Magnetfeld laufende Wellen stark gedämpft werden (Kennel & Wong 1967, Tadamaru 1969) genügt es, die weitere Diskussion auf parallele Wellen ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ ) zu beschränken.

---

<sup>2</sup> $\Lambda_{i,j}^h$  bezeichnet den hermiteschen Anteil eines Tensors.

<sup>3</sup>Der  $\star$  beschreibt die komplex konjugierte, transponierte Größe.

<sup>4</sup>Medien, in denen der Dielektrizitätstensor eine Funktion von  $\omega$  ist, nennt man dispersiv.

Zur Berechnung des Dielektrizitätstensors  $\epsilon_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)$  kann man den Leitfähigkeitstensor  $\sigma_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)$  in der Form

$$\sigma_{i,j}(k_{\parallel}, k_{\perp} = 0, \omega) = \frac{2\pi}{i} \sum_a e_a^2 n_a \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p_{\perp} T}{\omega - k_{\parallel} V - n \Omega_a} dp_{\perp} dp_{\parallel} \quad (2.6)$$

benutzen mit  $T_{i,j}$  gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} \frac{n^2 J_n^2(z)}{z^2} v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & \frac{i n J_n(z) J_n'(z)}{z} v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & 0 \\ \frac{-i n J_n(z) J_n'(z)}{z} v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & (J_n'(z))^2 v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & J_n^2(z) v_{\parallel} \mathbf{W} f_a^{(0)} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

und

$$\mathbf{U} f_a^{(0)} = \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma m_a \omega} \left( p_{\perp} \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\perp}} \right), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{W} f_a^{(0)} = \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} - \frac{n \Omega_a}{p_{\perp} \omega} \left( p_{\perp} \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\perp}} \right), \quad (2.9)$$

sowie

$$z = \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\Omega_a}, \quad (2.10)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass die Restriktion  $k_{\perp} = 0$  die vereinfachte Form des Tensors mit

$$T_{13} = T_{23} = T_{31} = T_{32} = 0 \quad (2.11)$$

zur Folge hat. Die Funktionen  $J_n(z)$  bezeichnen Besselfunktionen erster Art der Ordnung  $n$  und  $J_n'(z) = \partial J_n(z) / \partial z$  ihre erste Ableitung. Die erste Summation über den Index  $a$  in Gl. (2.6) berücksichtigt die beteiligten Teilchenspezies und  $\Omega_a = e_a B / (\gamma_a m_a c)$  bezeichnet die zugehörige relativistische Gyrofrequenz.

Die Phasenraumdistribution  $f(p, t = 0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  für das kalte Plasma des Jets im Ruhesystem des Plasmoids lässt sich darstellen durch:

$$f_a^{(0)} = [n_i \delta(p_{\perp}) \delta(p_{\parallel} + P) + n_b \delta(p_{\perp}) \delta(p_{\parallel})] / (2\pi n_b p_{\perp}), \quad (2.12)$$

wobei berücksichtigt wird, dass sich die Teilchen der äußeren Materie  $n_i$  für einen Beobachter im Plasmasystem mit dem Lorentzfaktor des Jets  $\Gamma = P/(mV)$  in das Plasma hinein bewegen, während sich für einen äußeren Beobachter<sup>5</sup> der Jet mit der Teilchendichte  $n_b^* = n_b \Gamma$  durch die ruhende äußeren Materie bewegt. Damit wird der dielektrische

<sup>5</sup>Die Größen im Laborsystem (das Ruhesystem der externen Materie) werden mit einem \* gekennzeichnet.

Tensor für diese Verteilung beschrieben durch:

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

mit den Elementen

$$S = \sum_{a=e,p} 1 - \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega^2} \left[ \frac{n_i (\omega + k_{\parallel} V)^2}{n_b \Gamma (\omega + k_{\parallel} V)^2 - \Omega_a^2} - \frac{\omega^2}{\Omega_{0a}^2 - \omega^2} \right] \quad (2.14)$$

$$D = \sum_{a=e,p} \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega^2} \left[ \frac{n_i (\omega + k_{\parallel} V) \Omega_a}{n_b \Gamma (\omega + k_{\parallel} V)^2 - \Omega_a^2} - \frac{\omega \Omega_{0a}}{\Omega_{0a}^2 - \omega^2} \right] \quad (2.15)$$

$$P = \sum_{a=e,p} 1 - \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega^2} - \frac{n_i \omega_{p,e}^2}{n_b \Gamma^3 (\omega + k_{\parallel} V)^2}, \quad (2.16)$$

wobei  $\omega_{p,a} = \sqrt{4\pi e^2 n_a / m_a}$  die Plasmafrequenz und  $\Omega_{0a} = |e_a| B / (m_a c)$  die nicht relativistische Gyrofrequenz der Teilchenspezies  $a$  beschreibt.

Über die implizite Dispersionsgleichung

$$P [(S - N^2)^2 - D^2] = 0 \quad (2.17)$$

erhält man die Dispersionsrelationen für die verschiedenen Moden. Die longitudinale Mode ( $P = 0$ ) ergibt die Dispersionsrelation für elektrostatische Wellen (Pohl et al. 2002):

$$0 = \omega^2 - \omega_{p,e}^2 - \omega_{p,p}^2 - \frac{n_i \omega^2}{n_b \Gamma^3 [\omega + k_{\parallel} V]^2} (\omega_{p,e}^2 + \omega_{p,p}^2). \quad (2.18)$$

Die Konsequenzen dieser Dispersionsrelationen auf das Plasmoidmodell werden im Kapitel „Weiterentwicklungen des ursprünglichen Modells“ ausführlicher diskutiert. Die transversalen Moden  $N^2 = S \pm D$  ergeben die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= \omega^2 - \frac{\omega \omega_{p,e}^2}{\omega \pm \Omega_{0e}} - \frac{\omega \omega_{p,p}^2}{\omega \pm \Omega_{0p}} - \frac{n_i}{n_b \Gamma} \left[ \frac{\omega_{p,e}^2 (\omega + k_{\parallel} V)}{(\omega + k_{\parallel} V) \pm \Omega_e} + \frac{\omega_{p,p}^2 (\omega + k_{\parallel} V)}{(\omega + k_{\parallel} V) \pm \Omega_p} \right] \\ &:= J(\omega) + i K(\omega). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Da beide Lösungen sich nur durch  $\Omega_a \rightarrow -\Omega_a$  unterscheiden, erhält man die zweite Lösung nach Kenntnis der ersten durch Substitution der entsprechenden Vorzeichen.



Die Lösungen des Gl. (2.19) entsprechenden Polynoms mit reellen Koeffizienten können reell sein bzw. in komplex konjugierten Paaren auftreten, wobei sich die zugehörigen exponentiell wachsenden oder abnehmenden Lösungen als Instabilitäten bzw. Dämpfungsterme interpretieren lassen.

In Abwesenheit von äußerer Materie ( $n_i = 0$ , ungestörte Lösung), findet man nur reelle Nullstellen, das heißt die Konfiguration ist stabil. Komplexe Lösungen können dadurch auftreten, dass die Nullstellen der ungestörten Lösung überlagert werden von den Singularitäten der Strahlbeiträge. Damit lassen sich die Resonanzbedingungen für Gl. (2.19) angeben als:

$$\omega_R = -kV + (\Omega_e/\Gamma), \quad \omega_R = -kV + (\Omega_p/\Gamma), \quad (2.20)$$

wobei mit  $\omega_R$  der Realteil von  $\omega$  bezeichnet wird.

Für einen einen schwachen Strahl, also mit dem Argument, dass die äußere Dichte  $n_i$  im Verhältnis zur inneren Dichte  $n_b$  vernachlässigbar gering ist, also  $n_i/n_b \ll 1$  gilt, lässt sich zeigen, dass die Beiträge der relativistischen Teilchen zu  $J(\omega)$  vernachlässigbar sind und somit  $J(\omega) \sim J(\omega_R)$  gilt, solange  $\omega_R \gg \psi$ , wobei  $\psi$  die Wachstumsrate bezeichnet (vgl. auch Achatz 1990).

Für niederfrequente Wellen  $|\omega| \ll |\Omega_e|$  lässt sich die Dispersionsrelation entwickeln als:

$$J(\omega_R) = k^2 c^2 = \omega_R^2 \left[ 1 + \omega_{p,e}^2 / \Omega_e^2 + \omega_{p,e}^2 / ([\omega_R - \Omega_p] \Omega_e) \right]. \quad (2.21)$$

Als Lösungen der Gl. (2.21) erhält man vier verschiedene Typen Alfvénwellen: Vorwärts ( $\omega_R/k > 0$ ) und rückwärts ( $\omega_R/k < 0$ ) laufende, sowie rechtshändig ( $\omega_R < 0$ ) bzw. linkshändig ( $\omega_R > 0$ ) polarisierte Wellen:

$$\omega_R^2 = V_A^2 k^2 \quad \text{mit} \quad |\omega_R| \ll \Omega_p, \quad (2.22)$$

wobei die Frequenz  $\omega_R$  unterhalb der nicht relativistischen Protonengyrofrequenz  $\Omega_p = eB/(m_p c)$  liegt und  $V_A = B/\sqrt{4\pi m_p n_b}$  die Alfvéngeschwindigkeit bezeichnet. Zusätzlich werden auch Whistlerwellen

$$\omega_R = \Omega_{0e} k^2 c^2 / \omega_{p,e}^2, \quad \text{mit} \quad \Omega_e < \omega_R < \Omega_p \quad (2.23)$$

angeregt.

Die Wachstumsrate  $\psi$  sowie das Verhalten der Intensitäten  $I(k, t)$  der Wellen lässt sich bestimmen durch:

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} = \pm \psi I_{\pm}, \quad (2.24)$$

wobei  $I_+$  die Intensität der vorwärts laufenden Wellen und  $I_-$  die der rückwärts laufenden Wellen beschreibt (Lerche 1967, Lee & Ip 1987). Die Wachstumsrate  $\psi$  lässt sich darstellen als:

$$\psi \approx - \frac{K(\omega_R, 0)}{\partial J(\omega_R, 0) / \partial \omega_R} \quad (2.25)$$

(Achatz 1990, Krall und Trivelpiece 1973) mit dem um  $\psi = 0$  entwickeltem Anteil:

$$K(\omega_R, 0) = -\pi^2 \sum_{a=e,p} \omega_{p,a}^2 (m_a c)^3 \frac{n_i}{n_b} \int_{E_a}^{\infty} \frac{E^2 - 1 - (\frac{E}{N} - x_a)^2}{\sqrt{E^2 - 1}} \frac{\partial f_a}{\partial \mu} \delta \left( \mu - \frac{(x_a - \frac{E}{N})}{\sqrt{E^2 - 1}} \right) dE,$$

wobei  $E_a = \sqrt{1 + x_a^2}$  mit  $x_a = \Omega_{0a}/kc$  und  $\mu = p_{||}/p$  den Kosinus der Pitchwinkels der Teilchen bezeichnet.

Der Brechungsindex  $N \gg 1$ , was darauf hindeutet, dass der mit dem magnetischen Feld assoziierte Anteil der Lorentzkraft, die elektrische Komponente übertrifft. Das ist gleichbedeutend mit einer Streuung im Pitchwinkel unter Beibehaltung der Teilchenenergie, was wiederum garantiert, dass die Teilchen auf kürzester Zeitskala isotropisiert werden.

Die Beeinflussung des Strahls durch die von ihm erzeugten transversalen Wellen, also die Veränderung der (ensemble-gemittelten) Verteilungsfunktion, wird durch die quasilineare Fokker-Planck Gleichung beschrieben, wobei mit obigem Argument nur der Fokker-Planck Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  relevant ist, so dass die Fokker-Planck Gleichung für die Phasenraumdichte in der Form

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ D_{\mu\mu} \frac{\partial F_a}{\partial \mu} \right] \quad (2.26)$$

mit dem Pitchwinkel-Diffusionskoeffizient

$$D_{\mu\mu} = \sum_{n=\pm} \frac{\pi \Omega_{0a}^2 (1 - \mu^2)}{2B^2} \int_{-\infty}^{\infty} I_n(k) \delta(\omega_R - kv\mu - \Omega_{0a}) dk \quad (2.27)$$

benutzt werden kann.

Die Multiplikation der beiden Gleichungen (2.24) und anschließende Integration führt zu

$$\frac{\partial I_+(t) I_-(t)}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad I_+(t) I_-(t) = I_+(t_0) I_-(t_0), \quad (2.28)$$

während die Subtraktion der Gleichungen bei anschließender Integration zu

$$\frac{\partial(I_+(t) - I_-(t))}{\partial t} = \psi[I_+(t) + I_-(t)] \quad \rightarrow \quad Z(k) = [I_+(t) - I_-(t)] - [I_+(t_0) - I_-(t_0)] \quad (2.29)$$

führt, mit  $Z = \int_{t_0}^t \psi[I_+(t') + I_-(t')] dt'$  also:

$$Z(k) = \frac{2B^2b(|k|)}{\pi v} \sum_{a=e,p} \Theta(|k| - \frac{v}{\Omega_a}) \frac{n_i m_e}{n_b m_a} \frac{\Omega_a^2}{v^2} \sum_{\pm} \Theta(1 - |\mu_a^{\pm}|) |\mu_a^{\pm}| \int_{-1}^{\mu_a^{\pm}} F_a(\tilde{\mu}, t) - F_a(\tilde{\mu}, 0) d\tilde{\mu}, \quad (2.30)$$

wobei  $b(|k|) = \pi \omega_{p,e}^2 / (2\Gamma |\partial J / \partial \omega_R|)$  und  $\mu_a^{\pm}(k) = (\omega_R^{\pm} - \Omega_a) / (kv)$  sind,  $\Theta$  die Heavisidefunktion darstellt und die normalisierte Phasenraumdichte mit

$$f_a = \frac{\delta(E - \Gamma) F_a(\mu, t)}{2\pi (m_a c)^3 \Gamma (\Gamma^2 - 1)^{1/2}} \quad (2.31)$$

benutzt wurde.

Die Gl. (2.30) erhält man unter Benutzung der quasi-linearen Fokker-Planck Gleichung für die Phasenraumdichte und anschließender Integration von Gl. (2.26) über den Winkel  $\mu$  und Auswertung bei  $\mu^{\pm}$  (siehe Schlickeiser et al. 2001).

Die Gleichungen (2.28) und (2.29), die die zeitliche Entwicklung der Teilchenverteilungsfunktionen  $F_a$  unter dem Einfluss selbstangeregter Wellen beschreiben, lassen sich zusammenfassen zur allgemeinen Lösung der Gleichungen (2.24) zur Zeit  $t = T$ :

$$I_{\pm}(k, T) = \pm (Z + I_+(0) - I_-(0)) / 2 + \sqrt{I_+(0)I_-(0) + [Z + I_+(0) - I_-(0)]^2 / 4} \quad (2.32)$$

Gilt  $I(0) \equiv I(k, 0) \ll |Z(k)|$ , d.h. die selbstangeregte Turbulenz ist viel stärker als die anfängliche Turbulenz und gilt weiterhin ( $I_{\pm}(k, 0) = I(k, 0)$ ), lassen sich die Lösungen der Gleichungen (2.24) vereinfachen zu:

$$I_{\pm}(k, T) \simeq (|Z| \pm Z) / 2 + I^2(k, 0) / |Z|, \quad (2.33)$$

wobei die Näherung  $\sqrt{1 + I/|Z|} = 1 + I/(2|Z|)$  benutzt wird.

Das Einsetzen geeigneter Randbedingungen ( $F_{p,e}(\mu, t = 0) = \delta(\mu + 1)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , sowie  $F_{p,e}(\mu, T_{end}) = 1/2$  beim völlig isotropisierten Strahl) in Gleichung (2.30) ermöglicht die weitere Auswertung der Turbulenz, wobei die Integration über  $\tilde{\mu}$  die Darstellung von  $Z(k)$  als:

$$Z(k) = -\frac{B^2b(|k|)}{\pi v} \sum_{a=e,p} \Theta(|k| - v/\Omega_a) \frac{n_i m_e}{n_b m_a} (\Omega_a/v)^2 \sum_{\pm} |\mu_a^{\pm}| (1 - |\mu_a^{\pm}|) \Theta(1 - |\mu_a^{\pm}|) \quad (2.34)$$

ergibt.

Da  $Z(k)$  negativ ist, lässt sich Gl. (2.33) vereinfachen zu:

$$I_+(k, T) \simeq I^2(k, 0)/|Z(k)| \quad (2.35)$$

bzw.

$$I_-(k, T) \simeq |Z(k)|, \quad (2.36)$$

woran man sieht, dass der Strahl hauptsächlich rückwärts laufende magnetohydrodynamische Wellen erzeugt.

Die wesentliche Turbulenz wird durch die selbstangeregten Alfvénwellen generiert. Aufgrund ihrer größeren Masse tragen die Protonen der in den Plasmoid hereinfliegenden interstellaren Teilchen den Hauptimpuls und sind damit energetisch wichtiger als die Elektronen.

Assoziiert wird mit dem Ende der Isotropisierungsphase die Längenskala der Isotropisierung  $\lambda_i$ . Nur wenn diese Länge  $\lambda_i$  viel kleiner ist als die Dicke  $d$  des Plasmoids, wird der Strahl der äußeren Teilchen effektiv isotropisiert.

Nach Durchlaufen einer Weglänge, die durch die Längenskala

$$\lambda_i = \frac{3v}{8} \int_{-1}^1 (1 - \mu^2)^2 / D_{\mu\mu} d\mu \quad (2.37)$$

gegeben ist sind dann die in den Plasmoid hereinfliegenden interstellaren Teilchen als Konsequenz der Pitchwinkelstreuung gemäß der quasi-linearen Theorie (Schlickeiser 1989) isotrop verteilt.

Unter der Voraussetzung, dass das initiale Turbulenzspektrum z. B. die Form  $I(k, 0) = I_0 k^{-2}$  hat, lässt sich der Fokker-Planck Koeffizient für den Pitchwinkel  $D_{\mu\mu}$  aus Gl. (2.27) angeben als:

$$D_{\mu\mu} = \frac{\pi |Z_0| (1 - \mu^2)}{2B^2} [ |v\mu + V_A| + |v\mu - V_A| (I_0/|Z_0|)^2 ]. \quad (2.38)$$

Die Gl. (2.37) ist gültig für Streulängen  $\lambda_i \gg R_p$  für Protonen und  $\lambda_i \gg R_e$  für Elektronen, wobei  $R_a$  den Gyroradius der Teilchenspezies  $a$  beschreibt.

Für typische Parameter erhält man die Streulänge

$$\lambda_i \simeq 10^{11} n_{b,8}^{1/2} / (\Gamma_2 n_i^*) \text{ [cm]}, \quad (2.39)$$

was zu einer Zeitskala

$$t_R = \lambda_i/c \simeq 3.5 n_{b,8}^{1/2}/(\Gamma_2 n_i^*) \text{ [s]} \quad (2.40)$$

korrespondiert<sup>6</sup>. Die (Relaxations-) Zeit  $t_R$ , in der die hereinfliegenden interstellaren Protonen und Elektronen isotropisieren, muss die Bedingung  $t_R \ll d/c$  erfüllen, um eine isotrope Distribution zu gewährleisten.

Zusätzlich kann man unter Benutzung des räumlichen Diffusionskoeffizienten  $\kappa = v \lambda_i/3$  die Zeitskala angeben, mit der die Teilchen aus dem Plasma herausdiffundieren:

$$T_E = \frac{3d^2}{\lambda_i \beta c} \simeq 10^6 \frac{n_i^* d_{13}^2 \Gamma_2^{3/2}}{\sqrt{n_{b,8}^*}} \simeq 1.67 \cdot 10^{-19} \frac{d^2 \Gamma_0 n_i^*}{\sqrt{n_b}}. \quad (2.41)$$

Im Prinzip sind die bisher diskutierten Ergebnisse sowohl auf Gamma-Ray-Bursts wie auch auf AGN anwendbar. Da allerdings die alfvénische Turbulenz nicht geeignet ist, die Elektronen genügend zu beschleunigen, um die Strahlungssignaturen der GRB zu erklären, beschränken sich alle weiteren Untersuchungen auf AGN.

Zusammenfassend wurde in diesem Kapitel nachvollzogen, dass das interstellare Plasma (betrachtet vom (Ruhe-)System eines durchfliegenden Plasmoids mit hoher innerer Dichte) als Teilchenstrahl aus Elektronen und Protonen betrachtet werden kann. Dieser Teilchenstrahl regt dann in dem Plasmoid magnetohydrodynamische Wellen an, was auf einer Zeitskala von  $t \equiv 3 \cdot 10^3 \text{ s}$  zur Isotropisierung der Strahlteilchen im Plasmoid führt. Die Konsequenzen, die sich daraus für die Verteilungsfunktionen der relativistischen in den Plasmoid hereinfliegenden Teilchen ergeben, werden im nächsten Kapitel diskutiert.

---

<sup>6</sup>Die in astrophysikalischer Literatur angegebenen Abschätzungen werden oft in der indizierten Notation  $A_{i,z}$  angegeben, wodurch angegeben werden soll, dass der verwendete Term  $A_i$  in der Größenordnung von  $10^z$  liegt.



# Evolution von Protonen in einem hadronischen Jet

*Die Auswirkung der mikrophysikalischen Details auf die Verteilungsfunktion von Protonen und Elektronen in einem stark kollimierten hadronischen Jet wurde in der Arbeit von Pohl & Schlickeiser (2000) durch numerische Rechnungen bestimmt. Sowohl für Protonen als auch für Elektronen wurden die verschiedenen Zerfallskanäle untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass die beobachteten hohen Variabilitäten der Quellen mit den berechneten Ergebnissen verträglich sind und durch die Annahme eines variablen Dichteprofiles des äußeren Mediums erklärt werden können. In diesem Kapitel wird die in Pohl & Schlickeiser (2000) numerisch berechnete Teilchenverteilungsfunktion analytisch am Beispiel der Protonenverteilung hergeleitet.*

Der hadronische Jet<sup>1</sup> wird als ein thermisches Plasma mit Dichten der Größenordnung  $n_b = 10^8 \text{ cm}^{-3}$  modelliert, dass sich mit einem Lorentzfaktor  $\Gamma$  durch externe Materie mit typischen Dichten<sup>2</sup> von  $n_i^* = 0.1 \text{ cm}^{-3}$  bewegt. Die Geometrie des Jets wird als zylindrische Scheibe der Dicke  $d$  aufgefasst, wobei  $d$  klein ist gegenüber dem Radius  $R$  der Scheibe. Vom Ruhesystem des Plasmoids aus gesehen dient das externe Medium als Quelle nicht thermischer Teilchen mit der Rate

$$\tilde{N}(\gamma, t) = \pi R^2 c n_i^* \sqrt{\Gamma(t)^2 - 1} \delta(\gamma - \Gamma(t)), \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Unter hadronisch soll hier ein aus Protonen und Elektronen bestehender Jet verstanden werden, während leptonisch sich auf einen Jet bezieht, der aus Elektron-Positronpaaren besteht.

<sup>2</sup>Alle Berechnungen sollen im Ruhesystem des Plasmoids ausgeführt werden. Die Größen im Laborsystem (das Ruhesystem der externen Materie) werden mit einem \* gekennzeichnet.

also der Anzahl der Protonen, die pro Sekunde in das Plasma aufgenommen werden. Dem zuvor beschriebenen Isotropisierungsprozess wird hier durch die Diracsche Delta-distribution Rechnung getragen, wobei mit  $\gamma$  der Lorentzfaktor der Teilchen bezeichnet wird.

Durch die Wechselwirkung<sup>3</sup> der Kollisionsfront mit dem externen Medium ändert sich der Lorentzfaktor des Plasmas gemäß:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = - \frac{m_p \pi R^2 c n_i^* (\Gamma(t)^2 - 1)^{3/2}}{M(t)}. \quad (3.2)$$

Die zeitabhängige Gesamtmasse  $M(t)$  des Systems setzt sich zusammen aus der Masse der thermischen Teilchen des Plasmoids und dem Anteil der Teilchen, die zusätzlich aus dem externen Medium aufgenommen werden. Die Masse aller nicht-thermischen Teilchen lässt sich dabei durch

$$M_{\text{nth}} = m_p \pi R^2 d \int_1^\infty \gamma n(\gamma, t) d\gamma \quad (3.3)$$

berechnen, wobei die Größe  $n(\gamma, t)$  die auf das Volumen  $V = \pi R^2 d$  normierte Verteilungsfunktion  $N(\gamma, t)/V$  darstellt. Vom System des Plasmoids aus gesehen befinden sich die thermischen Teilchen nahezu in Ruhe, was durch formale Einführung der normierten thermischen Energie  $\epsilon = kT/(m_p c^2) \ll 1$  beschrieben werden kann:

$$N_{\text{th}} = \pi R^2 d n_b \delta(\gamma - [1 + \epsilon]). \quad (3.4)$$

Also ergibt sich für die zeitabhängige Gesamtmasse:

$$M(t) = m_p V \left[ n_b (1 + \epsilon) + \int_1^\infty \gamma n(\gamma, t) d\gamma \right]. \quad (3.5)$$

Die Teilchenverteilungsfunktion  $N(\gamma, t)$  beschreibt die sich zeitlich ändernde Anzahlverteilung der relativistischen Protonen (im Raum der Lorentzfaktoren) und genügt der Gleichung

$$\frac{\partial N(\gamma, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (N(\gamma, t) \dot{\gamma}) + \frac{N(\gamma, t)}{T_E} + \frac{N(\gamma, t)}{T_N} = \tilde{N}(\gamma, t). \quad (3.6)$$

Die in Gl. (3.6) auftretende Größe  $\dot{\gamma}$  beschreibt die Energieverluste durch elastische und inelastische Stöße. Wie in Pohl & Schlickeiser (2000) diskutiert, lassen sich für relativistische Protonen diese Verluste in guter Näherung über funktionale Abhängigkeiten wie

$$\dot{\gamma}_{\text{el}} \sim \tau_{\text{el}}^{-1} \gamma (\gamma^2 - 1)^{-1/2} \quad (3.7)$$

---

<sup>3</sup>Es genügt die Annahme der Impulserhaltung beim „Zusammenstoß“ des externen Mediums mit dem Plasmoid, um die Abbremsung des letzteren zu berechnen (Vgl. Anhang A).



bei Verlusten durch elastische Stöße mit der für den Strahlungsprozess charakteristischen Zeitskala  $\tau_{\text{el}} = 3.3 \cdot 10^{15}/n_b$  [sec], sowie

$$\dot{\gamma}_{\text{inel}} \sim \tau_{\text{inel}}^{-1} \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma + 1} \quad (3.8)$$

für inelastische Wechselwirkungen mit  $\tau_{\text{inel}} = 1.4 \cdot 10^{15}/n_b$  [sec] ausdrücken, wobei die innere Dichte  $n_b$  typischerweise in der Größenordnung  $10^8 \text{ cm}^{-3}$  liegt. Für hohe Energien  $\gamma \gg 1$  rechtfertigt dies für die analytische Berechnung in guter Näherung einen konstanten, beziehungsweise linearen Ansatz für die Strahlungsverluste. Die mit  $T_E$  und  $T_N$  bezeichneten Terme in Gl. (3.6) beschreiben die Teilchenverlustprozesse durch Diffusion und Umwandlung der Protonen in Neutronen. Für die analytische Berechnung wird zur Berechnung der Verluste durch Neutronen  $T_N \simeq 3 \cdot 10^{15}/n_b$  [sec] aus Pohl & Schlickeiser (2000) übernommen, sowie Gl. (2.41) für die Zeitskala, mit der die Teilchen aus den Plasma herausdiffundieren, benutzt.

## Berechnung der Gesamtmasse des Jets

Das hier angewandte Lösungsverfahren beruht auf der Idee, mit Hilfe von Gleichung (3.6) zuerst eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Masse aufzustellen. Der analytische Ausdruck für die Masse kann in Gl. (3.2) eingesetzt werden. Die daraus resultierende Kenntnis über die Funktion  $\Gamma(t)$  erlaubt wiederum die Bestimmung der Teilchenverteilungsfunktion durch Lösung der Gl. (3.6).

### Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Masse

Die Integrierbarkeit der Differentialgleichung für die Masse  $M$  hängt wesentlich von den Annahmen über die Strahlungsverluste  $\dot{\gamma}$  ab. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich unter Annahme linearer Strahlungsverluste

$$\dot{\gamma} = -\frac{\gamma}{\tau} \quad (3.9)$$

die Masse durch einen analytischen Ausdruck approximieren lässt. Aus den Gleichungen (3.7) und (3.8) kann man schließen, dass diese Annahme gerechtfertigt erscheint, solange  $\gamma \gg 1$  ist. Der Ansatz

$$N(\gamma, t) = N(\gamma, \Gamma(t)) \quad (3.10)$$

wird gerechtfertigt durch die monotone Abhängigkeit des Lorentzfaktors  $\Gamma$  von der Zeit, die man anhand von Gl. (3.2) überprüfen kann. Dadurch lässt sich Gl. (3.6) ausdrücken als

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial N}{\partial \Gamma} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma N)}{\partial \gamma} + N (1/T_E + 1/T_N) = \pi R^2 c n_i^* \sqrt{\Gamma^2 - 1} \delta(\gamma - \Gamma), \quad (3.11)$$

wobei  $\Gamma$  als zeitabhängige Funktion  $\Gamma(t)$  zu verstehen ist. Wir teilen diese Gleichung durch das Volumen  $V = \pi R^2 d$ :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial n}{\partial \Gamma} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} + n (1/T_E + 1/T_N) = \frac{c n_i^*}{d} \sqrt{\Gamma^2 - 1} \delta(\gamma - \Gamma). \quad (3.12)$$

Die Konstantenkombination  $c n_i^*/d$  wird mit  $\lambda$  abgekürzt. Im nächsten Schritt wird die gesamte Gleichung mit  $\gamma$  multipliziert

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \Gamma} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma \partial(\gamma n))}{\partial \gamma} + \gamma n (1/T_E + 1/T_N) = \lambda \gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1} \delta(\gamma - \Gamma). \quad (3.13)$$

Da der Lorentzfaktor  $\gamma$  der Teilchen vom Lorentzfaktor  $\Gamma$  des Jets unabhängig ist, kann die Variable in die partielle Ableitung nach  $\Gamma$  gezogen werden. Danach wird über  $\gamma$  in der Grenzen von  $1 \leq \gamma \leq \infty$  integriert:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial \int_1^\infty (\gamma n) d\gamma}{\partial \Gamma} - \frac{1}{\tau} \int_1^\infty \frac{\gamma \partial(\gamma n)}{\partial \gamma} d\gamma + \int_1^\infty \gamma n d\gamma (1/T_E + 1/T_N) = \lambda \Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1}. \quad (3.14)$$

Eine partielle Integration des zweiten Terms auf der linken Seite ergibt:

$$\int_1^\infty \frac{\gamma \partial(\gamma n)}{\partial \gamma} d\gamma = \gamma^2 n \Big|_1^\infty - \int_1^\infty \gamma n d\gamma = - \int_1^\infty \gamma n(\gamma, \Gamma) d\gamma. \quad (3.15)$$

Die zweite Gleichung ergibt sich, da die Verteilungsfunktion  $n(\gamma, \Gamma)$  sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze verschwindet (es gibt weder ruhende Teilchen ( $\gamma = 1$ ), noch welche, die mit Lichtgeschwindigkeit ( $\gamma = \infty$ ) fliegen). Wir kürzen das Integral  $\int \gamma n(\gamma, \Gamma) d\gamma$ , das sich nach Gl. (3.3) auch als  $M_{\text{nth}}/(m_p V)$  darstellen lässt, als  $J(\Gamma)$  ab.

Setzt man die Abbremsung  $\partial \Gamma / \partial t$  des Plasmas unter zusätzlicher Berücksichtigung von Gl. (3.5) in die Gl. (3.14) ein, lässt sich deutlich machen, warum dieses Verfahren besonders gut für lineare Strahlungsverluste anwendbar ist:

$$\frac{-\lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{n_b(1 + \epsilon) + J(\Gamma)} \frac{\partial J(\Gamma)}{\partial \Gamma} + J(\Gamma) \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_N} \right) = \lambda \Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1}. \quad (3.16)$$

Die partielle Integration (3.15) liefert als Ergebnis den Term, der in der Gleichung implizit durch Gl. (3.2) schon vorhanden ist.

Mit Gl. (3.16) erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Größe  $J(\Gamma)$ . Für die weitere Berechnung erweist es sich als Vorteil die Gleichung weiter umzuformen, um eine Differentialgleichung für die Masse  $M$  zu erhalten. Wir kürzen dazu den Term  $1/\tau + 1/T_E + 1/T_N$  mit  $H$  ab und addieren den konstanten Term  $n_b H(1 + \epsilon)$  auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\frac{-\lambda(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{n_b(1 + \epsilon) + J(\Gamma)} \frac{\partial J(\Gamma)}{\partial \Gamma} + [n_b(1 + \epsilon) + J(\Gamma)]H = \lambda\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 1} + n_b H(1 + \epsilon). \quad (3.17)$$

Auf diese Weise kann man Gl. (3.17) als Differentialgleichung für die Funktion  $I(\Gamma) = n_b(1 + \epsilon) + J(\Gamma)$  darstellen:

$$\frac{-\lambda(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{I(\Gamma)} \frac{\partial I(\Gamma)}{\partial \Gamma} + I(\Gamma)H = \lambda\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 1} + n_b H(1 + \epsilon). \quad (3.18)$$

Durch Vergleich mit Gleichung (3.5) sehen wir, dass sich die Größe  $I(\Gamma)$  wie gewünscht auch als  $M(\Gamma)/(m_p V)$  darstellen lässt. Die Auflösung der Gleichung (3.18) nach  $\partial I(\Gamma)/\partial \Gamma$  ergibt:

$$\frac{\partial I(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{I(\Gamma)^2 H}{\lambda(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{(\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 1} + n_b H(1 + \epsilon)/\lambda) I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}. \quad (3.19)$$

Definiert man nun noch  $H/\lambda$  als neue Konstante  $T$  und kürzt  $n_b(1 + \epsilon)$  als  $Z$  ab so erhält man schließlich:

$$\frac{\partial I(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{I(\Gamma)^2 T}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{(\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 1} + ZT) I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}. \quad (3.20)$$

Somit erhält man eine Bernoulli'sche Differentialgleichung, die sich mittels Division durch  $-I(\Gamma)^2$  in eine lineare Differentialgleichung für  $1/I(\Gamma)$  überführen<sup>4</sup> lässt:

$$\frac{1}{I(\Gamma)} \frac{ZT + \Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial \Gamma} \frac{1}{I(\Gamma)} = \frac{T}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}. \quad (3.21)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (3.21) ermöglicht eine analytische Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Masse. Diese wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

---

<sup>4</sup>Man beachte, dass  $\partial [I(\Gamma)^{-1}]/\partial \Gamma = -I(\Gamma)^{-2} \partial I(\Gamma)/\partial \Gamma$  ist.

## Integration der Massenfunktion $I(\Gamma)$

Die Differentialgleichung (3.21) lässt sich formal durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{I(\Gamma)} = & - T \int_a^\Gamma \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(s^2 - 1)^2} \exp\left(\frac{ZTs}{\sqrt{s^2 - 1}} - \frac{ZT\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}\right) ds \\ & + C \sqrt{\Gamma^2 - 1} \exp\left(-\frac{ZT\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

lösen<sup>5</sup>, wobei die Konstanten  $a$  und  $C$  über die Anfangsbedingungen festzulegen sind. Wir wählen  $a$  derart, dass beim Start ( $t = 0$ )  $\iff (\Gamma = \Gamma_0)$  der Wert des Integrals in Gl. (3.22) Null ist. Folglich setzen wir  $a = \Gamma_0$ . Wir erinnern uns, dass  $I(\Gamma) = Z + J(\Gamma)$ , wobei  $J(\Gamma)$  den Anteil der thermischen Teilchen beschreibt. Formal ist aber  $J(\Gamma_0) = 0$ , da am Anfang nur thermische Teilchen vorhanden sind. Also ergibt die Auflösung nach der Konstanten  $C$ :

$$C = \exp\left(ZT\Gamma_0/\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}\right) / \left(Z\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}\right). \quad (3.23)$$

Das in Gl. (3.22) auftretende Integral ist nicht mehr elementar lösbar, da es sich um ein Integral der Form  $\int g(x) \exp(f(x)) dx$ , also um ein im allgemeinen „transzendentes“ Integral handelt. Als ersten Schritt wird man also versuchen, eine Näherung innerhalb der Exponentialfunktion durchzuführen. Betrachten wir dazu die Funktion im Exponenten des Integranden

$$ZT \left( \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} - \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} \right).$$

Eine Taylorentwicklung von  $s$  um  $\Gamma$  des Terms  $(s/\sqrt{s^2 - 1} - \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1})$  bis zur ersten Ordnung ergibt:

$$\frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} - \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} \simeq \frac{(\Gamma - s)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}. \quad (3.24)$$

Nach Einsetzen der Taylorentwicklung im Exponenten lässt sich die Stammfunktion darstellen als:

$$\begin{aligned} - \int \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(s^2 - 1)^2} \exp\left[-\frac{ZT(s - \Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}\right] ds = & 1/4 \left[ (P_1 H_1 - P_2 H_2) \sqrt{\Gamma^2 - 1} \right. \\ & \left. + \frac{2s P_3 \sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(s^2 - 1)} - \frac{ZT(P_2 H_2 + P_1 H_1)}{(\Gamma^2 - 1)} \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

---

<sup>5</sup>Die allgemeine Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen findet man z. B. in Bronstein (1989).

wobei die Abkürzungen für die elliptischen Integrale

$$H_1 = \text{Ei} \left[ \frac{ZT(s+1)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \right] = \int_1^\infty \exp \left[ -\frac{ZT(s+1)u}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \right] /u \, du \quad (3.26)$$

und

$$H_2 = \text{Ei} \left[ \frac{ZT(s-1)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \right] = \int_1^\infty \exp \left[ -\frac{ZT(s-1)u}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \right] /u \, du \quad (3.27)$$

benutzt werden, sowie die Abkürzungen

$$P_1 = \exp \left[ \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1} ZT}{(\Gamma + 1)(\Gamma - 1)^2} \right], \quad P_2 = \exp \left[ \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1} ZT}{(\Gamma - 1)(\Gamma + 1)^2} \right] \quad (3.28)$$

und

$$P_3 = \exp \left[ \frac{ZT(\Gamma - s)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \right].$$

Wie schon anhand von Gl. (3.22) zu sehen war, lässt sich die normierte<sup>6</sup> aufgenommene Masse  $I/Z = M/M_0$  des Systems über den dimensionslosen Parameter

$$ZT = n_b(1 + \epsilon) \frac{d}{c n_i^*} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_N} \right) \quad (3.29)$$

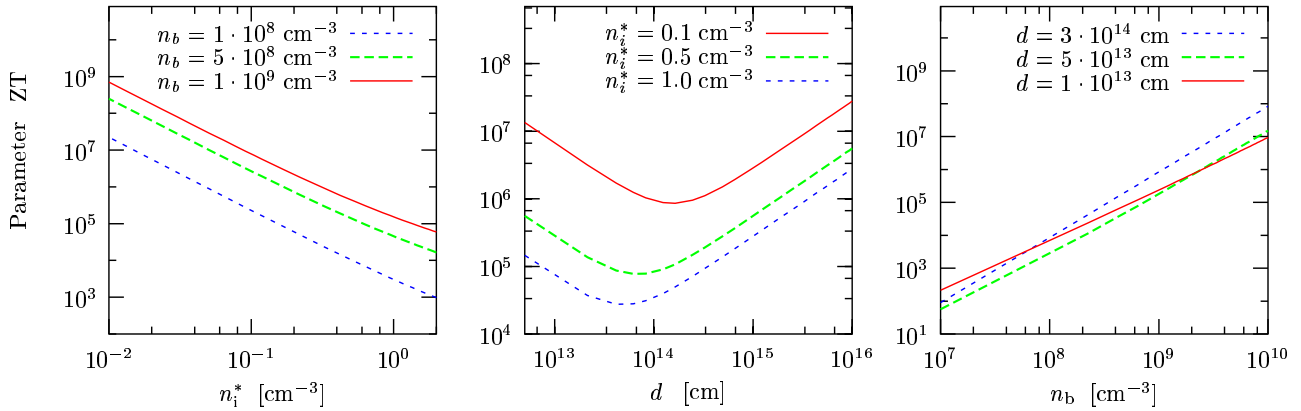
klassifizieren, wobei die Zeitskala  $T_E$  für das Entweichen der Teilchen durch Gl. (2.41) festgelegt wurde. Generell ergeben sich kleine Werte des Parameters  $ZT$  bei sehr kleinen Verhältnis  $n_b/n_i^*$  der inneren zur äußeren Dichte. In Abbildung 3.1 wird der Zusammenhang zwischen den physikalischen Parametern  $n_i^*$ ,  $n_b$ ,  $d$  und  $ZT$  illustriert.

Dabei wird klar, dass es für fest gewählte innere und äußere Dichten immer eine Scheibendicke  $d$  gibt, die  $ZT$  minimal werden lässt. Wir beschränken uns deshalb in den folgenden Beispielen für die Massenfunktion auf eine Scheibendicke von  $d = 3 \cdot 10^{13}$  cm. Weiterhin ist zu bemerken, dass der Radius  $R$  der Scheibe nur über das Volumen den Massenzuwachs beeinflusst, nicht aber die vom Radius unabhängige normierte Masse  $M/M_0$ . Anhand von Abbildung 3.1 ist auch leicht zu sehen, dass verschiedene Kombinationen der physikalischen Parameter auf den gleichen Wert für  $ZT$  führen können.

In Abbildung 3.2 wird die numerisch berechnete Entwicklung der Jet-Masse exemplarisch für verschiedene  $ZT$  in Abhängigkeit vom Lorentzfaktor  $\Gamma$  des Jets gezeigt. Der

---

<sup>6</sup>Wir kürzen hier  $(m_p V Z)$  mit  $M_0$  ab.



(a) Für eine fest gewählte Scheibendicke  $d = 3 \cdot 10^{13}$  cm sind die Werte des Parameters  $ZT$  in Abhängigkeit von der äußeren Dichte  $n_i^*$  am Beispiel verschiedener innerer Dichten  $n_b$  angegeben.

(b) Für verschiedene äußere Dichten  $n_i^*$  und eine feste innere Dichte von  $n_b = 10^8$  cm $^{-3}$  wird die Abhängigkeit der Scheibendicke  $d$  von  $ZT$  dargestellt.

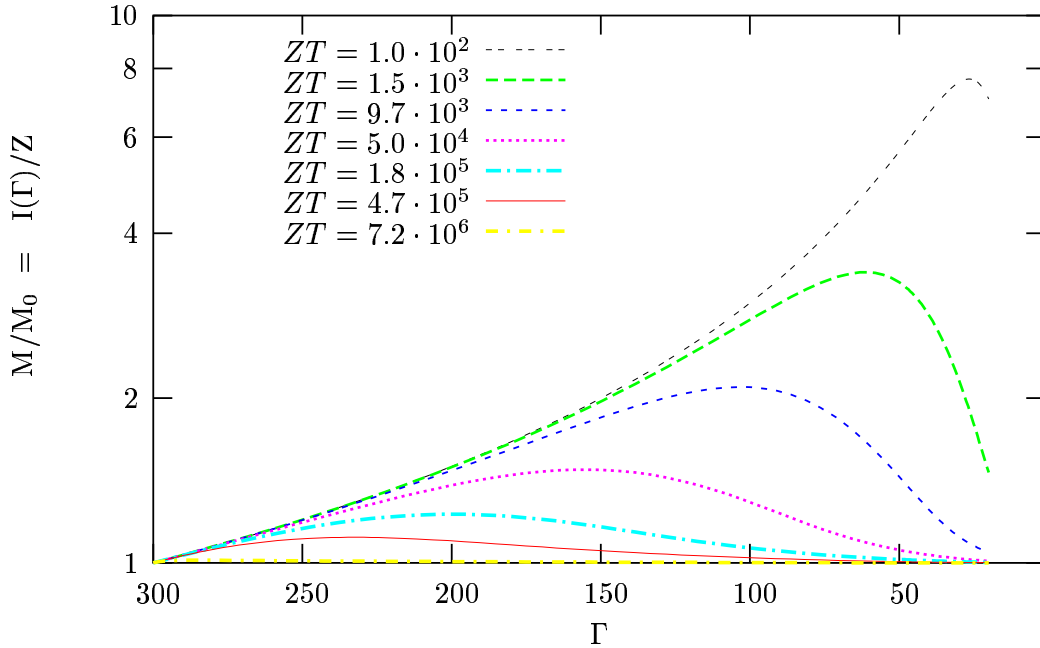
(c) Die Werte  $ZT$  in Abhängigkeit von der inneren Dichte  $n_b$  bei fest gewählter äußerer Dichte  $n_i^* = 1$  cm $^{-3}$  für verschiedene Scheibendicken  $d$ .

**Abbildung 3.1:** Zusammenhang zwischen den physikalischen Parametern  $n_i^*$ ,  $n_b$ ,  $d$  und dem für den Verlauf der Massenfunktion verantwortlichen Parameter  $ZT$ . Bei sehr großen und sehr kleinen Scheibendicken nimmt der Parameter  $ZT$  immer hohe Werte an; nur wenn die Dicke  $d$  im Bereich von  $5 \cdot 10^{13}$  cm liegt, sind kleine Werte  $ZT$  möglich.

Startpunkt wurde zu  $\Gamma_0 = 300$  gewählt. Während des Massenzuwachses durch Aufnahme von Teilchen aus der Umgebung verlangsamt sich der Jet auf kleinere Lorentzfaktoren. Deutlich zu erkennen ist dabei, dass der Teilchenaufnahmeprozess bei kleineren Werten des Parameters  $ZT$  bis zu niedrigerem  $\Gamma$  (also bis zu einem späteren Zeitpunkt) fortgeführt wird und die Gesamtmassenaufnahme größer ist.

Der Funktionsverlauf, der sich mit der Näherung (3.24) ergibt, wird dem numerisch berechneten Funktionsverlauf von  $I(\Gamma)$  in den Abbildungen 3.3 und 3.4 gegenüber gestellt. Es ergeben sich abhängig von der Wahl des Parameters  $ZT$  Abweichungen, die bis zu 30 Prozent betragen. Nachteilig ist auch, dass diese Funktion sich nicht ohne weitere Näherungen in der Gl. (3.6) verwenden lässt.

Eine deutlich bessere Näherung gelingt, indem man im Integranden der Gleichung



**Abbildung 3.2:** Darstellung der Funktion, die die zeitliche Entwicklung der Masse aller relativistischen Teilchen (normiert auf die Gesamtmasse) beschreibt. Die physikalisch relevanten Parameter lassen sich zum Gesamtparameter  $ZT$  (vergleiche dazu Gl. (3.29)) zusammenfassen, der allein für den Verlauf der Massenfunktion verantwortlich ist. Bei einer fest gewählten Dicke der Jetscheibe (hier  $3 \cdot 10^{13}$  cm) wird der Verlauf der Massenfunktion vollständig durch das Verhältnis der inneren zur äußeren Dichte  $n_b/n_i^*$  bestimmt. Die Abbildung zeigt die Funktionsverläufe des numerisch berechneten Integrals (3.22), die in Abb. 3.3 und Abb. 3.4 als Referenz verwendet werden. Für die numerische Berechnung wurde dabei ein Runge-Kutta Verfahren benutzt.

(3.22) die Integrationsvariable durch  $u = s/\sqrt{(s^2 - 1)}$  substituiert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{I(\Gamma)} &= T\sqrt{\Gamma^2 - 1} \int_{\Gamma_0/\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}}^{\Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1}} \exp\left(ZT \left[u - \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1}\right]\right) \sqrt{u^2 - 1} du \\ &+ \frac{1}{Z} \sqrt{\frac{\Gamma^2 - 1}{\Gamma_0^2 - 1}} \exp\left(\frac{ZT \Gamma_0}{\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}} - \frac{ZT \Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Diese Substitution hat den Vorteil, dass man die Näherung<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Diese Näherung ist völlig unkritisch, da  $u$  sehr nahe an 1 liegt: Bei  $u(s = 300) = 1.0000056$  und  $u(s = 20) = 1.00125$ .

$$\sqrt{u^2 - 1} = \sqrt{(u-1)(u+1)} \simeq \sqrt{(u-1)(1+1)} = \sqrt{2u-2} \quad (3.31)$$

außerhalb der Exponentialfunktion durchführen kann. Von Vorteil ist dabei, dass diese Näherung unabhängig vom Parameter  $ZT$  ist. Die Stammfunktion des Integrals lautet nach der Substitution:

$$\begin{aligned} \int \exp\left(ZT \left[ u - \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1} \right]\right) \sqrt{2u-2} du &= \frac{1}{ZT} \exp\left(ZT \left[ 1 - \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1} \right]\right) \\ &\times \left[ \sqrt{2u-2} \exp(ZT(u-1)) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{-ZT(u-1)}\right)}{\sqrt{-ZT}} \right], \end{aligned}$$

wobei  $\operatorname{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x \exp(-t^2) dt$  die Gaußsche Errorfunktion darstellt. Durch die Verwendung der imaginären Errorfunktion  $\operatorname{erfi}(z) = -i \operatorname{erf}(iz)$  vereinfacht sich der betreffende Term zu:

$$\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{-ZT(u-1)}\right)}{\sqrt{-ZT}} = \frac{\operatorname{erfi}\left(\sqrt{ZT(u-1)}\right)}{\sqrt{ZT}}. \quad (3.32)$$

Führt man die Akürzung  $x(\Gamma) = [\Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1} - 1]$  ein, so lässt sich die Funktion in die folgende Form bringen:

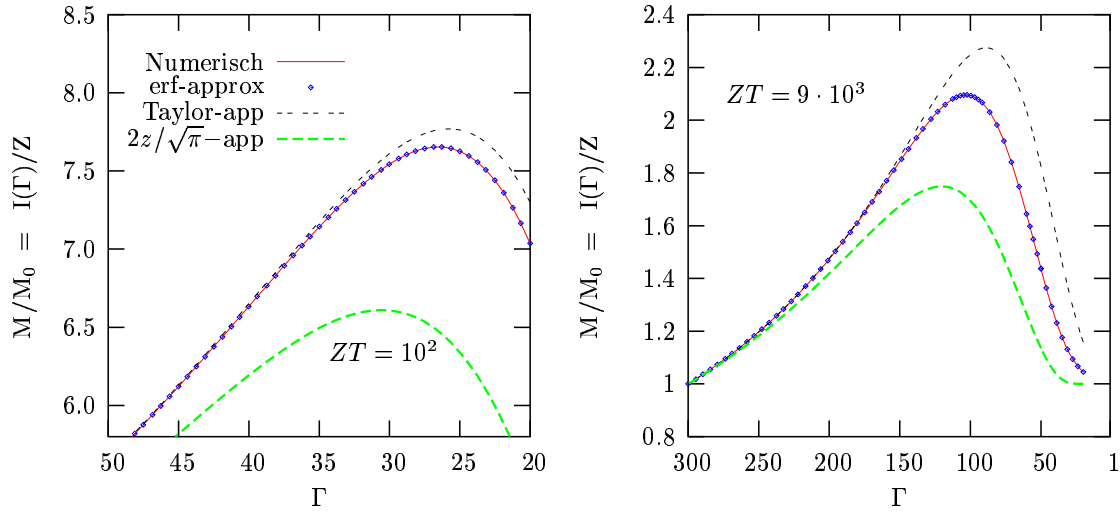
$$\frac{1}{I(\Gamma)} = \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{Z} \left[ \sqrt{2x(\Gamma)} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{ZT x(\Gamma)}\right)}{\exp[ZT x(\Gamma)] \sqrt{2ZT}} - \frac{K(\Gamma_0)}{\exp(ZT [x(\Gamma) - x(\Gamma_0)])} \right] \quad (3.33)$$

mit der vom Startwert  $\Gamma_0$  abhängigen Funktion:

$$K(\Gamma_0) = \sqrt{2x(\Gamma_0)} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{ZT x(\Gamma_0)}\right)}{\sqrt{2ZT} \exp[ZT x(\Gamma_0)]} - 1/\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}. \quad (3.34)$$

Wie in den Abbildungen 3.3 und 3.4 zu sehen ist, unterscheidet sich der Funktionsverlauf von Gl. (3.33) zum numerisch berechneten Äquivalent um weniger als 0.1% für alle gewählten Parameterwerte  $ZT$ . Während die Funktion aus Gl. (3.33) für alle Parameter  $ZT$  ohne sichtbare Abweichungen bleibt, ergibt die Näherung durch Taylorentwicklung einen vom Wert des Parameters  $ZT$  abhängigen relativen Fehler von bis zu 26% (für  $ZT = 9 \cdot 10^3$ ). Noch stärkere Abweichungen ergeben sich durch die hier mit  $2z/\sqrt{\pi}$  bezeichnete Näherung, die im nächsten Abschnitt diskutiert wird. Die Abweichungen treten für beide Näherungen bei um so kleineren Lorentzfaktoren  $\Gamma$  auf, je kleiner der Wert für  $ZT$  ist.





**Abbildung 3.3:** Vergleich der verschiedenen Näherungen für die Massenfunktion für kleine Parameter  $ZT$ . In den Abbildungen ist jeweils zusätzlich zur numerisch berechneten Funktion die Näherung (3.33) sowie die approximierte Funktion (3.38) zu sehen. Die Näherung, die hier mit  $2z/\sqrt{\pi}$ -app bezeichnet ist, wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

## Diskussion weiterer Näherungen

Mit der Gleichung (3.33) ist eine Darstellung für die Masse gefunden. Im nächsten Schritt ist es notwendig, die Gaußsche Errorfunktion durch eine passende (Reihen-) Darstellung zu ersetzen, um eine weitere Verwendung der Massenfunktion in Gl. (3.6) möglich zu machen. Für große Argumente der Errorfunktion benutzen wir die asymptotische Reihenentwicklung  $\operatorname{erfi}(z) \simeq \exp(z^2)/z\sqrt{\pi}$  und erhalten:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{erfi}(\sqrt{ZTx})}{\sqrt{ZT}} \simeq \frac{\exp(ZTx)}{ZT\sqrt{2x}}. \quad (3.35)$$

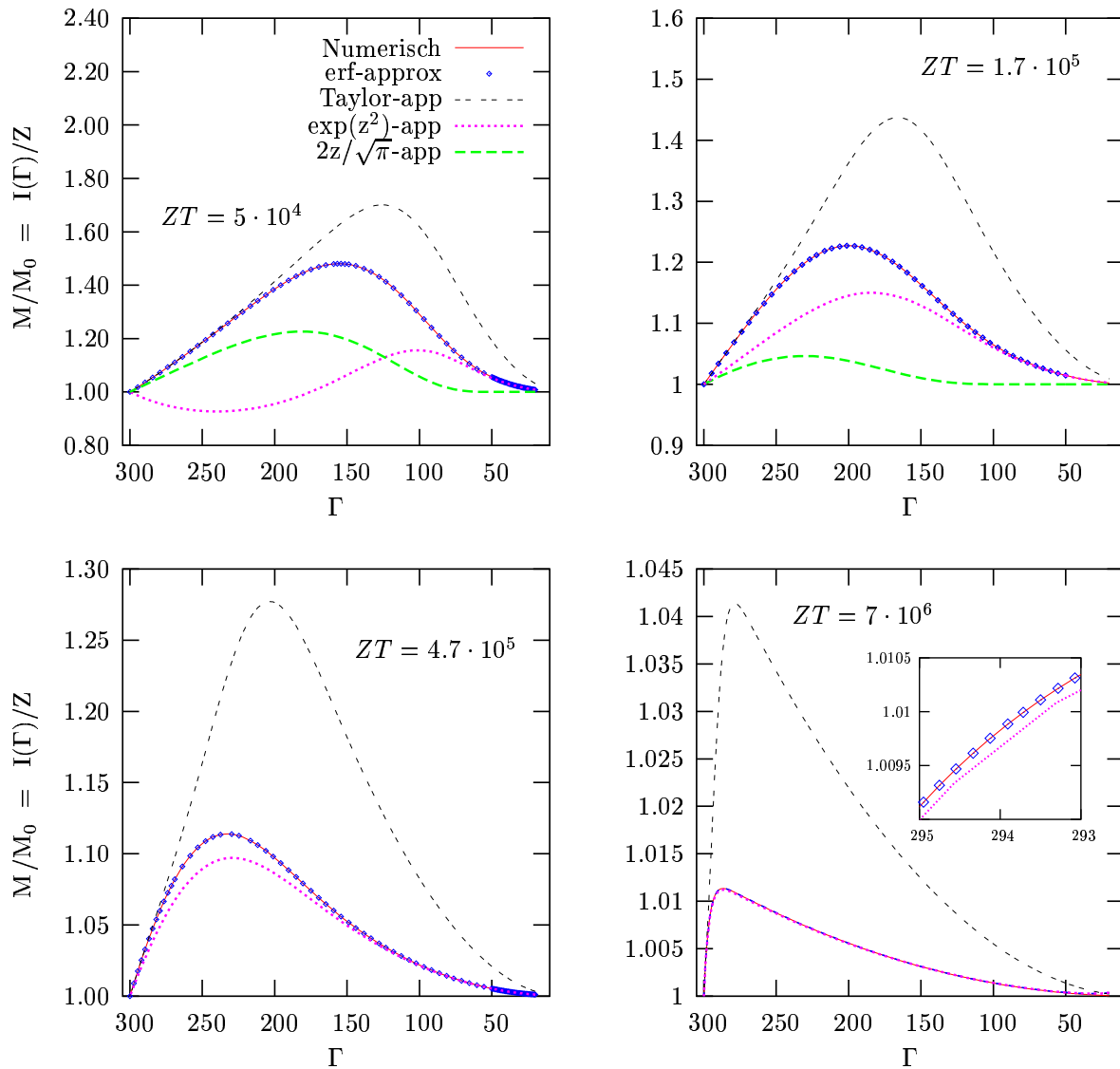
In diesem Fall lässt sich die Funktion  $1/I(\Gamma)$  schreiben als

$$\frac{1}{I(\Gamma)} = \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{Z} \times \left[ \sqrt{2x(\Gamma)} - 1/(ZT\sqrt{2x(\Gamma)}) - \frac{K(\Gamma_0)}{\exp(ZT[x(\Gamma) - x(\Gamma_0)])} \right] \quad (3.36)$$

mit der Funktion

$$K(\Gamma_0) = \sqrt{2x(\Gamma_0)} - 1/(ZT\sqrt{2x(\Gamma_0)}) - 1/\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}. \quad (3.37)$$

Die Abweichungen durch diese Näherung liegen unter 5% solange die Parameterkombination  $ZT \geq 2 \cdot 10^5$  ist (siehe dazu auch Abbildung 3.4).



**Abbildung 3.4:** Auch bei höheren Werten des Parameters  $ZT$  bleibt die Abweichung durch die Näherung (3.33) immer unterhalb von 0.1%. Zusätzlich wird hier die Näherung (3.36) gezeigt, deren Abweichungen um so kleiner sind, je größer  $ZT$  ist, während die Näherung durch Taylorentwicklung immer einen vom numerischen Funktionsverlauf abweichenden Wert ergibt.

Betrachten wir für kleine Werte des Parameters  $ZT$  noch die Entwicklung der Errorfunktion um Null, so dass man  $erfi(z)$  durch  $\simeq 2z/\sqrt{\pi}$  darstellt. In diesem Fall lässt

sich  $1/I(\Gamma)$  darstellen als

$$\frac{1}{I(\Gamma)} = \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{Z} \times \left[ \sqrt{2x(\Gamma)} (1 - \exp[-ZT x(\Gamma)]) - \frac{K(\Gamma_0)}{\exp(ZT [x(\Gamma) - x(\Gamma_0)])} \right] \quad (3.38)$$

mit

$$K(\Gamma_0) = \sqrt{2x(\Gamma_0)} (1 - \exp[-ZT x(\Gamma_0)]) - 1/\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}. \quad (3.39)$$

Wie in Abbildung 3.3 zu sehen ist, sind auch hier die Abweichungen abhängig vom Parametersatz  $ZT$ .

## Die Protonenverteilungsfunktion

Kehren wir zu unserem Ausgangsproblem, der Lösung der Gleichung (3.6), zurück. Dazu starten wir im Wesentlichen mit Gl. (3.13), wobei wir  $\partial\Gamma/\partial t$  einsetzen

$$-\frac{\lambda(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{I(\Gamma)} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial\Gamma} - \frac{1}{\tau} \frac{\gamma \partial(\gamma n)}{\partial\gamma} + \gamma n (H - 1/\tau) = \lambda\gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1} \delta(\gamma - \Gamma), \quad (3.40)$$

die Abkürzung  $H = 1/\tau + 1/T_E + 1/T_N$  benutzen und die Funktion  $\gamma n(\gamma, \Gamma)$  mit  $G(\gamma, \Gamma)$  abkürzen. Wir dividieren durch den ersten Koeffizienten von Gl. (3.40)

$$\frac{\partial G(\gamma, \Gamma)}{\partial\Gamma} + \frac{\gamma I(\Gamma)}{\tau \lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \frac{\partial G(\gamma, \Gamma)}{\partial\gamma} = \frac{G(\gamma, \Gamma) I(\Gamma) (T - 1/\lambda\tau)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{\gamma I(\Gamma) \delta(\gamma - \Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)}, \quad (3.41)$$

wobei wir wieder die Definition  $T = H/\lambda$  benutzen.

Um die Differentialgleichung für  $G(\gamma, \Gamma)$  zu lösen, betrachten wir die Funktion in Abhängigkeit von einem frei wählbaren Parameter  $s$  :

$$G(s) = G(\gamma(s), \Gamma(s)). \quad (3.42)$$

Durch die Berechnung der totalen Ableitung von  $G$  nach  $s$

$$\frac{dG}{ds} = \frac{\partial G}{\partial\gamma} \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\partial G}{\partial\Gamma} \frac{d\Gamma}{ds} \quad (3.43)$$

sieht man, dass sich die Koeffizienten aus Gl. (3.41) als Ableitungen nach dem beliebigen Parameter  $s$  darstellen lassen, sofern man den Parameter  $s$  als  $\Gamma$  identifiziert

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\Gamma} &= \frac{\gamma I(\Gamma)}{\lambda\tau(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \\ \frac{d\Gamma}{d\Gamma} &= 1 \\ \frac{dG}{d\Gamma} &= \frac{(T - 1/\lambda\tau)I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} G(\Gamma) - \frac{\gamma I(\Gamma) \delta(\gamma - \Gamma)}{\Gamma^2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die Lösung dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen entspricht einer Umparometrisierung, bei der die vormals freie Variable  $\gamma$  zu einer Funktion  $\gamma(\Gamma)$  wird, also ein Pfad im  $(\gamma, \Gamma)$ -Raum, auf dem man die Teilchenpopulation bei abnehmendem Lorentzfaktor verfolgt. Dabei wird der Verlauf des Pfades durch den Koeffizienten  $d\gamma/ds$  bestimmt.

## Die charakteristischen Teilchenpfade

Wir benutzen die im letzten Abschnitt vorgestellte Methode und lösen als erstes die Gleichung

$$\frac{d}{d\Gamma} \gamma(\Gamma) = \frac{I(\Gamma)}{\lambda\tau(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \gamma(\Gamma) \quad (3.45)$$

mit der formalen Lösung

$$\gamma(\Gamma) = C_1 \exp \left[ \frac{1}{\tau} \int I(\Gamma)/(\Gamma^2 - 1)^{3/2}/\lambda d\Gamma \right]. \quad (3.46)$$

Wir setzen  $I(\Gamma)$  aus Gl. (3.33) ein und benennen die Integrationskonstante  $C_1$  mit  $\gamma_0$

$$\gamma(\Gamma, \gamma_0) = \gamma_0 \exp \left[ \frac{Z}{\lambda\tau} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} 1/[F(\tilde{\Gamma}) (\tilde{\Gamma}^2 - 1)^2] d\tilde{\Gamma} \right], \quad (3.47)$$

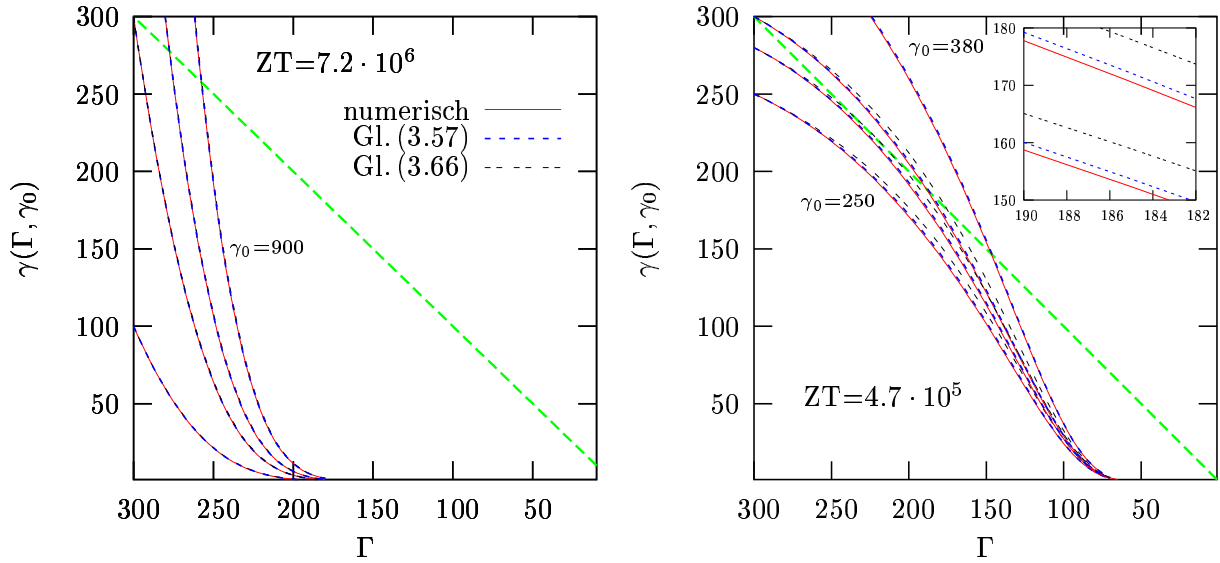
wobei  $F(\tilde{\Gamma})$  die Abkürzung für die folgende Funktion darstellt:

$$F_1(\tilde{\Gamma}) = \sqrt{2x(\tilde{\Gamma})} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(\sqrt{ZT x(\tilde{\Gamma})})}{\exp[ZT x(\tilde{\Gamma})] \sqrt{2ZT}} - \frac{K(\Gamma_0)}{\exp(ZT [x(\tilde{\Gamma}) - x(\Gamma_0)])}. \quad (3.48)$$

Wir benutzen hier wieder die Abkürzung  $x(\tilde{\Gamma}) = (\tilde{\Gamma}/\sqrt{\tilde{\Gamma}^2 - 1} - 1)$  und  $K(\Gamma_0)$  aus Gl. (3.34). Durch die Wahl von  $\Gamma_0$  als unterer Integrationsgrenze entspricht  $\gamma_0$  beim Startwert  $\Gamma_0$  gerade dem Anfangswert eines charakteristischen Pfades.

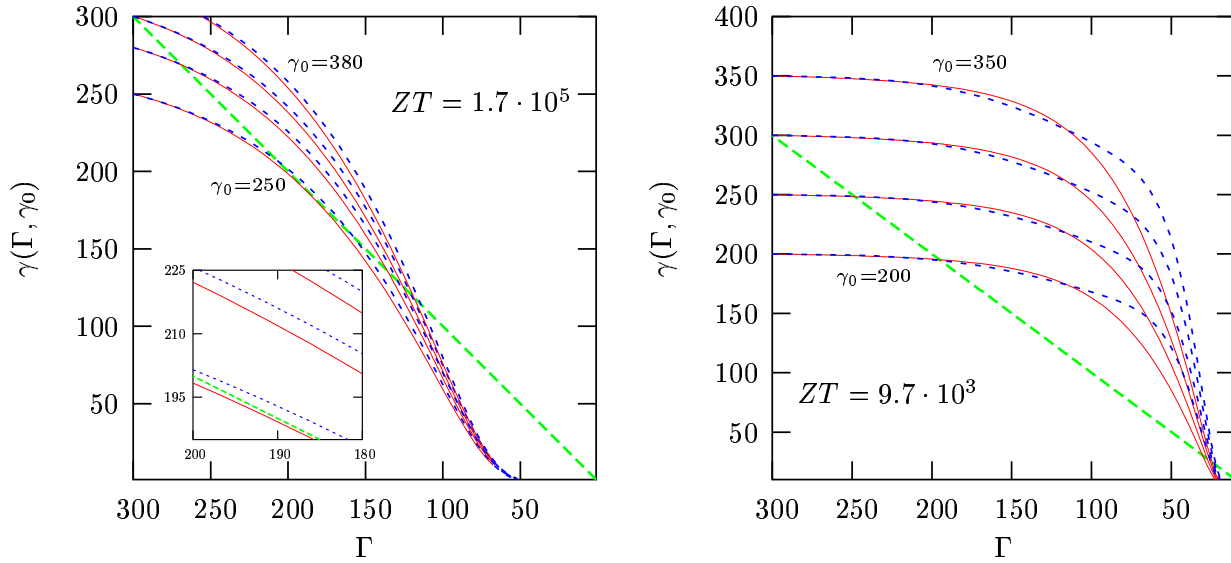
In den Abbildungen 3.5 bis 3.7 werden Pfade  $\gamma(\gamma_0, \Gamma)$  für verschiedene Beispielparameter  $ZT$  gezeigt. Man sieht den Verlauf der spezifischen charakteristischen Pfade mit den jeweiligen Näherungen den Resultaten numerischer Berechnungen gegenübergestellt.

Bei diesen Abbildungen ist für den Strahlungsverlust  $\tau$  beispielhaft der Wert  $2 \cdot 10^{15}$  s gewählt worden.



**Abbildung 3.5:** Darstellung verschiedener charakteristischer Teilchenpfade  $\gamma(\gamma_0, \Gamma)$  für große Parameter  $ZT$ : Bei sehr hohen Werten von  $ZT$  verläuft der Teilchenpfad wie eine Exponentialfunktion. Als Beispiel für  $ZT = 7 \cdot 10^6$  werden die charakteristischen Pfade  $\gamma_0 = 900$ ,  $\gamma_0 = 500$ ,  $\gamma_0 = 300$  und  $\gamma_0 = 100$  gezeigt. In dem Beispiel  $ZT = 4.7 \cdot 10^5$  sind die Pfade für  $\gamma_0 = 380$ ,  $\gamma_0 = 300$ ,  $\gamma_0 = 280$  und  $\gamma_0 = 250$  gezeigt. In allen Bildern ist jeweils die numerisch berechnete Funktion im Vergleich zur Näherung (3.57) zu sehen, die für hohe Werte von  $ZT$  keine merkliche Abweichung zeigt. Für alle Pfade im zweiten Beispiel ist zusätzlich die Näherung Gl. (3.66) eingezeichnet. Weiterhin ist in allen Abbildungen die Funktion  $\gamma = \Gamma$  (lang-gestrichelt) zu sehen. Nur an Schnittpunkten der Pfade mit dieser Geraden erfolgt das Mitreißen der Teilchen.

Zusätzlich ist auf diesen Abbildungen die Funktion  $\gamma = \Gamma$  (die Winkelhalbierende) abgebildet, an deren Schnittpunkten mit den Pfaden jeweils das Mitreißen der Teilchen erfolgt. Nur ab dem Punkt  $\Gamma$ , bei dem ein Pfad erstmals die Winkelhalbierende schneidet, existieren auf diesem Pfad auch Teilchen. Es schneiden bei sehr hohem Wert von  $ZT$  nur Pfade mit  $\gamma_0 > 300$ . Verkleinert man den Parameter  $ZT$  (in unserem Beispiel auf  $5 \cdot 10^5$ ), so schneiden Pfade mit  $\gamma_0 \leq 300$  die Winkelhalbierende sogar zweifach, was impliziert, dass es einen Pfad gibt, der die Winkelhalbierende nur berührt; alle kleineren  $\gamma_0$  schneiden die Winkelhalbierende dann nicht mehr. Die Konstante  $\lambda = c n_i^* / d$  ändert sich in den verschiedenen Beispielen bei fester Dicke  $d = 3 \cdot 10^{13}$  cm nicht stark, da die äußere Dichte  $n_i^*$  höchstens um eine Größenordnung variiert. Die zu integrierende Funktion  $\gamma(\Gamma)$  lässt sich mit einer zum letzten Paragraphen analogen Substitution



**Abbildung 3.6:** Exemplarischer Verlauf der Teilchenpfade  $\gamma(\gamma_0, \Gamma)$  für die Parameterbeispiele  $ZT = 1.7 \cdot 10^5$  und  $ZT = 9 \cdot 10^3$ . Gezeigt sind hier die Pfade für  $\gamma_0 = 380$ ,  $\gamma_0 = 300$ ,  $\gamma_0 = 280$  sowie  $\gamma_0 = 250$  im Beispiel  $ZT = 1.7 \cdot 10^5$  und  $\gamma_0 = 350$ ,  $\gamma_0 = 300$ ,  $\gamma_0 = 250$  und  $\gamma_0 = 200$  für den Parameter  $ZT = 9.7 \cdot 10^3$ . Wieder ist jeweils die numerisch berechnete Funktion im Vergleich zur Näherung (3.57) dargestellt, wobei man wie erwartet sieht, dass bei kleinerem Parameter  $ZT$  die Näherung (3.57) größere Abweichungen zeigt. Allerdings setzen die Abweichungen bei kleinerem Parameter auch erst bei einem niedrigerem Wert des Lorentzfaktors  $\Gamma$  ein.

$u = \Gamma / \sqrt{(\Gamma^2 - 1)}$  darstellen als

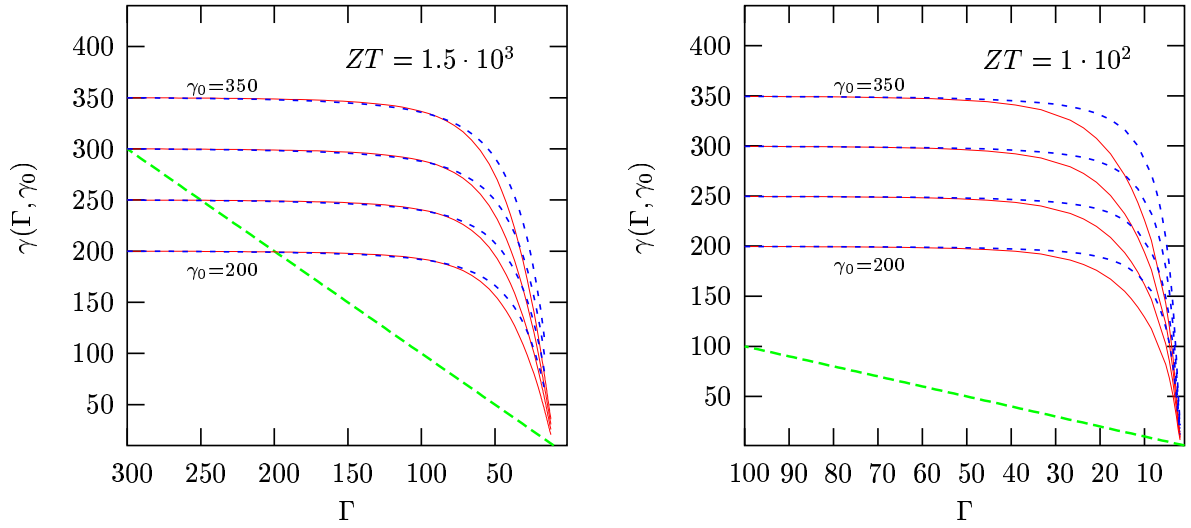
$$\gamma(\Gamma, \gamma_0) = \gamma_0 \exp \left[ -Z/\lambda\tau \int_{1/\beta_0}^{1/\beta} \sqrt{u^2 - 1} / F_2(u) du \right], \quad (3.49)$$

mit der Funktion

$$F_2(u) = \sqrt{2u - 2} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(\sqrt{ZT}[u - 1])}{\exp(ZT[u - 1])\sqrt{2ZT}} - K(\Gamma_0) \exp(ZT[1/\beta_0 - u]), \quad (3.50)$$

wobei als Abkürzung in den Integrationsgrenzen  $\beta_0$  für  $\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}/\Gamma_0$  und  $\beta = \sqrt{\Gamma^2 - 1}/\Gamma$  verwendet wurde. Die in Gl. (3.31) schon einmal durchgeführte Näherung  $\sqrt{u^2 - 1} \simeq \sqrt{2u - 2}$  liefert:

$$\gamma(\Gamma) = \gamma_0 \exp \left[ \frac{Z}{\lambda\tau} \int_{1/\beta}^{1/\beta_0} \frac{1}{1 - \epsilon(u)} du \right] \quad (3.51)$$



**Abbildung 3.7:** Für sehr kleine Parameter  $ZT$  sind die Pfade  $\gamma(\gamma_0, \Gamma)$  bis zu kleinen Lorentzfaktoren  $\Gamma$  nahezu konstant. Hier wird für die Näherung die Gl. (3.63) verwendet, die Abweichungen im Bereich kleiner Werte  $\Gamma$  zeigt. In beiden Abbildungen sind jeweils die Pfade  $\gamma_0 = 350$ ,  $\gamma_0 = 300$ ,  $\gamma_0 = 250$  sowie  $\gamma_0 = 200$  dargestellt.

mit der Abkürzung

$$\epsilon(u) = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(\sqrt{ZT(u-1)})}{2 \exp(ZT[u-1]) \sqrt{ZT(u-1)}} + \frac{K(\Gamma_0) \exp(ZT[1/\beta_0 - u])}{\sqrt{2u-2}}. \quad (3.52)$$

Da  $\epsilon(u) < 1$  für alle  $u$  und alle Parameter  $ZT$  (siehe dazu auch Fig. 3.8) lässt sich die Funktion  $\epsilon$  approximieren:

$$1/(1 - \epsilon(u)) \simeq 1 + \epsilon(u) + \epsilon(u)^2. \quad (3.53)$$

Allerdings ist aufgrund der imaginären Errorfunktion die Gl. (3.51) auch mit der Approximation (3.53) nicht integrierbar. Wir greifen daher auf die Näherung (3.35) zurück. Für große Parameter  $ZT$  gilt dann:

$$\epsilon(u) = \frac{1}{2ZT(u-1)} + \frac{K(\Gamma_0) \exp(ZT[1/\beta_0 - u])}{\sqrt{2u-2}}. \quad (3.54)$$

Mit der Stammfunktion von  $\epsilon(u)$

$$\int \epsilon(u) du = \frac{K(\Gamma_0) \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{ZT(u-1)})}{\sqrt{2ZT} \exp(ZT[1 - 1/\beta_0])} + \frac{\ln(u-1)}{2ZT} \quad (3.55)$$

und der Stammfunktion des quadratischen Terms

$$\int \epsilon(u)^2 du = -\frac{K(\Gamma_0)^2 \text{Ei}[2ZT(u-1)]}{2 \exp(ZT[1-1/\beta_0])^2} - \frac{2K(\Gamma_0)}{ZT \exp(ZT[1-1/\beta_0])} \\ \times \left[ \frac{1}{\exp[ZT(u-1)] \sqrt{2(u-1)}} + \sqrt{\frac{\pi ZT}{2}} \text{erf}(\sqrt{ZT(u-1)}) \right] - \frac{1}{(2ZT)^2 (u-1)} \quad (3.56)$$

ergibt sich für den charakteristischen Teilchenpfad:

$$\gamma(\gamma_0, \Gamma) = \gamma_0 \exp(Z F_3(\Gamma) / \lambda \tau) \quad (3.57)$$

mit der von  $\Gamma$  abhängigen Funktion

$$F_3(\Gamma) = \frac{\beta - \beta_0}{(2ZT)^2 (\beta - 1)(\beta_0 - 1)} + \frac{1}{2ZT} [\ln(1/\beta_0 - 1) - \ln(1/\beta - 1)] \\ - \frac{H(\Gamma_0) \sqrt{\pi}}{\sqrt{2ZT}} \left[ \text{erfi}(\sqrt{ZT(1/\beta_0 - 1)}) - \text{erfi}(\sqrt{ZT(1/\beta - 1)}) \right] \\ + 1/\beta_0 - 1/\beta - \frac{H(\Gamma_0)^2}{2} \left[ \text{Ei}[2ZT(1/\beta_0 - 1)] - \text{Ei}[2ZT(1/\beta - 1)] \right] \\ + \frac{\sqrt{2} H(\Gamma_0) \exp[ZT(1 - 1/\beta)]}{ZT \sqrt{(1/\beta - 1)}} - \frac{\sqrt{2} K(\Gamma_0)}{ZT \sqrt{(1/\beta_0 - 1)}}, \quad (3.58)$$

wobei wir für  $H(\Gamma_0)$  folgende Abkürzung gewählt haben:

$$H(\Gamma_0) = \frac{K(\Gamma_0)}{\exp(ZT[1-1/\beta_0])} \quad (3.59) \\ = \frac{\sqrt{2} (1/\beta_0 - 1)}{\exp(ZT[1-1/\beta_0])} - \frac{\exp(ZT[1/\beta_0 - 1])}{ZT \sqrt{2} (1/\beta_0 - 1)} - \frac{\exp(ZT[1/\beta_0 - 1])}{\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}}.$$

Für kleine Parametersätze  $ZT$  dagegen ergibt sich mit der Näherung  $\text{erfi}(z) \simeq 2z/\sqrt{\pi}$ :

$$\epsilon(u) = \exp(ZT[1-u]) + \frac{K(\Gamma_0) \exp(ZT[1/\beta_0 - u])}{\sqrt{2u-2}}. \quad (3.60)$$

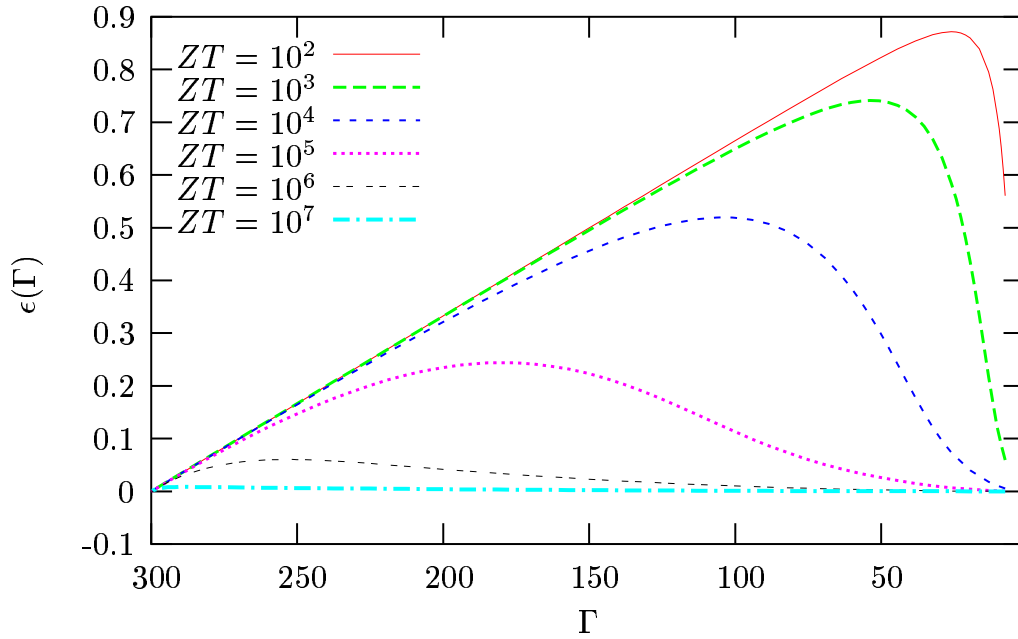
Die Stammfunktionen lassen sich dann darstellen als:

$$\int \epsilon(u) du = \frac{\sqrt{\pi} H(\Gamma_0) \text{erf}(\sqrt{ZT(u-1)})}{\sqrt{2ZT}} - \frac{\exp(ZT(1-u))}{ZT} \quad (3.61)$$

sowie für den quadratischen Term

$$\int \epsilon(u)^2 du = \frac{\sqrt{\pi} H(\Gamma_0) \text{erf}(\sqrt{2ZT(u-1)})}{\sqrt{ZT}} \quad (3.62) \\ - \frac{H(\Gamma_0)^2 \text{Ei}[2ZT(u-1)]}{2} - \frac{\exp[ZT(1-u)]^2}{2ZT}.$$





**Abbildung 3.8:** Darstellung der Funktion  $\epsilon(u(\Gamma))$  : Wie man in der Abbildung sieht, ist die Funktion kleiner als eins für alle Parameter  $ZT$ . Aus diesem Grund ist die Entwicklung (3.53) gerechtfertigt. Die Näherung ist dabei um so besser, desto größer der Parameter  $ZT$  ist. Da für große Parameter  $ZT$  die Funktion  $\epsilon(\Gamma)$  sehr nahe bei Null liegt, reduziert sich Gl. (3.51) auf eine Funktion der Form  $\gamma_0 \exp(C_b \Gamma / \sqrt{\Gamma^2 - 1} + C_a)$ , wie in Abbildung 3.5 illustriert ist.

Für sehr kleine Parameter eignet sich also die Funktion:

$$\gamma(\gamma_0, \Gamma) = \gamma_0 \exp(Z F_4(\Gamma) / \lambda \tau), \quad (3.63)$$

wobei mit  $F_4(\Gamma)$  die Funktion

$$\begin{aligned} F_4(\Gamma) &= 1/\beta_0 - 1/\beta + \frac{\sqrt{\pi} H(\Gamma_0)}{\sqrt{2ZT}} \\ &\times \left[ \operatorname{erf}(\sqrt{ZT(1/\beta_0 - 1)}) + \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2ZT(1/\beta_0 - 1)}) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf}(\sqrt{ZT(1/\beta - 1)}) - \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2ZT(1/\beta - 1)}) \right] \\ &+ H(\Gamma_0)^2/2 \left( \operatorname{Ei}[2ZT(1/\beta - 1)] - \operatorname{Ei}[2ZT(1/\beta_0 - 1)] \right) \\ &+ [\exp(ZT(1 - 1/\beta)) - \exp(ZT(1 - 1/\beta_0))] / ZT \\ &+ [\exp(ZT(1 - 1/\beta))^2 - \exp(ZT(1 - 1/\beta_0))^2] / 2ZT \end{aligned} \quad (3.64)$$

abgekürzt wird. Für die Konstante  $H(\Gamma_0)$  gilt dann:

$$H(\Gamma_0) = \frac{K(\Gamma_0)}{\exp(ZT[1 - 1/\beta_0])} \quad (3.65)$$

$$= \frac{\sqrt{2(1/\beta_0 - 1)}}{\exp(ZT[1 - 1/\beta_0])} - \sqrt{2(1/\beta_0 - 1)} - \frac{\exp(ZT[1/\beta_0 - 1])}{\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}}.$$

Wie in Abbildung 3.8 sichtbar, liegt  $\epsilon$  für sehr große Werte von  $ZT$  sehr nahe an Null, dass sich die Pfade dann in guter Näherung durch

$$\gamma(\Gamma, \gamma_0) = \gamma_0 \exp \left[ Z/(\lambda\tau) [\Gamma_0/\sqrt{\Gamma_0^2 - 1} - \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1}] \right] \quad (3.66)$$

darstellen lassen, was anhand von Abbildung 3.5 illustriert wird. Wir bemerken noch, dass im Gegensatz zur normierten Massenfunktion  $I(\Gamma)/Z$  die charakteristischen Pfade  $\gamma(\Gamma, \gamma_0)$  nicht allein vom Parameter  $ZT$  abhängen, sondern in diese Funktion explizit die Zeitskala der Strahlungsverluste  $\tau$  eingeht.

## Analytische Darstellung der Protonenverteilung

Nun bleibt noch die Lösung der Differentialgleichung (3.44) für die Verteilung  $G(\Gamma)$

$$\frac{dG(\Gamma)}{d\Gamma} = \frac{(T - 1/\lambda\tau)I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} G(\Gamma) - \frac{\gamma I(\Gamma) \delta(\gamma - \Gamma)}{\Gamma^2 - 1}, \quad (3.67)$$

wobei mit  $\gamma$  die Pfade<sup>8</sup>  $\gamma(\Gamma, \gamma_0)$  gemeint sind. Wir bestimmen zuerst die homogene Lösung durch Integration:

$$G_h(\Gamma) = C_2 \exp \left[ (T - 1/\lambda\tau) \int I(\Gamma)/(\Gamma^2 - 1)^{3/2} d\Gamma \right]. \quad (3.68)$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (3.67) lässt sich schreiben als

$$G(\Gamma) = G_h(\Gamma) \left( \int f(\Gamma) \delta(\gamma - \Gamma) d\Gamma + C_3 \right), \quad (3.69)$$

mit der Abkürzung

$$f(\Gamma) = -\frac{\gamma(\Gamma) I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1) G_h(\Gamma)}. \quad (3.70)$$

Bis auf unterschiedliche Konstanten entspricht die Gleichung (3.68) der formalen Lösung Gl. (3.46) der charakteristischen Pfade. Somit lässt sich die Funktion  $f(\Gamma)$  darstellen als:

$$f(\Gamma) = -\frac{C_1 I(\Gamma)}{C_2(\Gamma^2 - 1)} \exp \left[ (2/\lambda\tau - T) \int I(\Gamma)/(\Gamma^2 - 1)^{3/2} d\Gamma \right]. \quad (3.71)$$

---

<sup>8</sup>Vergleiche Gl. (3.46) und (3.47).

Die Werte der drei Integrationskonstanten sind von der Wahl der jeweiligen Integrationsgrenzen abhängig. Die Konstante  $C_1$  ist in Gl. (3.47) bei gleichzeitiger Wahl der unteren Integralgrenze  $\Gamma_0$  zu  $\gamma_0$  bestimmt worden. Wählt man hier analog die untere Integralgrenze als  $\Gamma_0$  und führt die Abkürzung

$$A(\Gamma) = \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} I(\tilde{\Gamma})/(\tilde{\Gamma}^2 - 1)^{3/2} d\tilde{\Gamma} \quad (3.72)$$

ein, so ergibt sich für die Gesamtlösung:

$$G(\Gamma, \gamma_0) = \exp[(T - 1/\lambda\tau) A(\Gamma)] \left[ \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-\gamma_0 I(\tilde{\Gamma}) \delta(\gamma - \tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1) \exp[(T - 2/\lambda\tau) A(\tilde{\Gamma})]} d\tilde{\Gamma} + C_3 C_2 \right]. \quad (3.73)$$

Erinnert man sich an die Bedeutung von  $G(\Gamma_0) = \gamma(\Gamma_0) n(\gamma(\Gamma_0), \Gamma_0)$  und berücksichtigt, dass es am Startpunkt ( $t = 0$ )  $\iff \Gamma_0$  keine relativistischen Teilchen gibt, und somit also  $G(\Gamma_0) = 0$  ist, so erzwingt die Wahl von  $\Gamma_0$  als untere Integrationsgrenze, dass  $C_3 C_2 = 0$  ist.

Zur Integration der Gleichung (3.73), die sich dank der Dirac'schen Distribution auf eine Nullstellenbestimmung reduziert, formt man die Deltadistribution um, wobei die verschiedenen Nullstellen von  $\gamma(\Gamma, \gamma_0) - \Gamma$  mit  $\nu_i = \nu_i(\gamma_0)$  bezeichnet werden

$$\delta(\gamma(\Gamma) - \Gamma) = \sum_i \delta(\Gamma - \nu_i) / |\partial\gamma(\nu_i)/\partial\Gamma - 1| \quad (3.74)$$

und die Summation über die verschiedenen Nullstellen (mit Index  $i$ ) läuft. Unter Benutzung dieser Bezeichnungen ergibt die Integration von Gl. (3.73)

$$G(\Gamma, \gamma_0) = -\gamma_0 \exp[(T - 1/\lambda\tau) A(\Gamma)] \quad (3.75)$$

$$\times \sum_i \frac{I(\nu_i) [\Theta(\Gamma - \nu_i) - \Theta(\Gamma_0 - \nu_i)]}{\exp[(T - 2/\lambda\tau) A(\nu_i)] (\nu_i^2 - 1) |\partial\gamma(\nu_i)/\partial\Gamma - 1|}, \quad (3.76)$$

wobei mit  $\Theta$  die Heavisidefunktion bezeichnet ist. Wir werten mit Hilfe von Gl. (3.46) den Term  $\partial\gamma/\partial\Gamma$  aus und erhalten unter Benutzung der Abkürzung (3.72) die Steigung des Teilchenpfades im  $\Gamma$ -Raum ausgewertet an der Nullstelle  $\nu_i(\gamma_0)$ :

$$\frac{\partial\gamma(\nu_i)}{\partial\Gamma} = \frac{\gamma_0 I(\nu_i) \exp(A(\nu_i)/\lambda\tau)}{\lambda\tau (\nu_i^2 - 1)^{3/2}}. \quad (3.77)$$

Also lässt sich die Teilchenverteilung darstellen als

$$G(\Gamma, \gamma_0) = -\gamma_0 \exp[(T - 1/\lambda\tau) A(\Gamma)] \times \sum_i F_5(\nu_i, \gamma_0, \Gamma), \quad (3.78)$$

wobei für die Hilfsfunktion  $F_5(\nu_i, \gamma_0, \Gamma)$  gilt:

$$F_5(\nu_i, \gamma_0, \Gamma) = \frac{I(\nu_i) \exp[(2/\lambda\tau - T)A(\nu_i)] [\Theta(\Gamma - \nu_i) - \Theta(\Gamma_0 - \nu_i)]}{(\nu_i^2 - 1) |\gamma_0 I(\nu_i) \exp(A(\nu_i)/\lambda\tau) / [\lambda\tau(\nu_i^2 - 1)^{3/2}] - 1|}. \quad (3.79)$$

Entlang eines Pfades, also bei konstantem  $\gamma_0$ , ist der gesamte Funktionsverlauf nur durch dem Term  $\exp[(T - 1/\lambda\tau) A(\Gamma)]$  bestimmt, während durch die Heavisidefunktionen festgelegt wird, ob auf dem Pfad an der betreffenden Stelle  $\Gamma$  überhaupt eine Teilchenpopulation mit von Null verschiedener Dichte existiert.

Im nächsten Schritt wollen wir auf die Variablen  $\gamma$  und  $t$  rücksostituieren. Die Umkehrtransformation von Gl. (3.47) lautet:

$$\gamma_0(\gamma, \Gamma) = \gamma \exp(-A(\Gamma)/\lambda\tau). \quad (3.80)$$

Damit ergibt sich die Teilchenverteilung

$$G(\Gamma, \gamma) = -\gamma \exp[(T - 2/\lambda\tau) A(\Gamma)] \times \sum_i F_5(\nu_i, \gamma, \Gamma) \quad (3.81)$$

mit

$$F_5(\nu_i, \gamma, \Gamma) = \frac{I(\nu_i) \exp[(2/\lambda\tau - T)A(\nu_i)] [\Theta(\Gamma - \nu_i) - \Theta(\Gamma_0 - \nu_i)]}{(\nu_i^2 - 1) |\gamma I(\nu_i) \exp[(A(\nu_i) - A(\Gamma))/\lambda\tau] / [\lambda\tau(\nu_i^2 - 1)^{3/2}] - 1|}. \quad (3.82)$$

Zum Schluss benutzen wir die Definition  $n(\gamma, \Gamma) = G(\gamma, \Gamma)/\gamma$  und erhalten:

$$n(\gamma, \Gamma) = -\exp[(T - 2/\lambda\tau) A(\Gamma)] \times \sum_i F_5(\nu_i, \gamma, \Gamma). \quad (3.83)$$

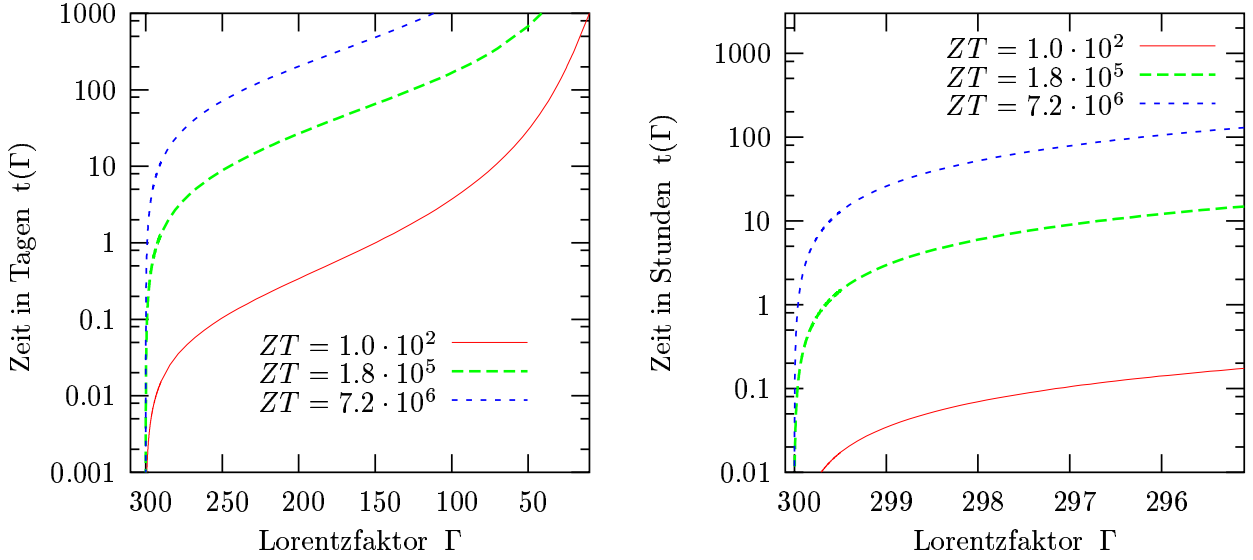
Um den Zusammenhang zwischen den Parametern  $t$  und  $\Gamma$  darzustellen, betrachten wir die Abbremsung des Plasmoids (3.2), wobei wir die Definition von  $I(\Gamma) = M(\Gamma)/(m_p V)$  benutzen:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\frac{c n_i^* (\Gamma(t)^2 - 1)^{3/2}}{d I(\Gamma(t))}. \quad (3.84)$$

Die Umformung der Gleichung ergibt unter Berücksichtigung von  $c n_i^*/d = \lambda$ :

$$t(\Gamma) = -1/\lambda \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{I(\tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1)^{3/2}} d\tilde{\Gamma} = -A(\Gamma)/\lambda, \quad (3.85)$$

wobei wir sehen, dass die Integrationskonstante Null ist, wenn wir die untere Integrationsgrenze als  $\Gamma_0$  wählen, da dann die Anfangsbedingung  $t(\Gamma_0) = 0$  erfüllt ist. Es ist möglich, für einen gegebenen Lorentzfaktor  $\Gamma$ , die zugehörige Zeit  $t$  im Plasmasystem zu berechnen, obwohl die Umkehrfunktion  $\Gamma(t)$  aufgrund der Komplexität der Gl. (3.58)



**Abbildung 3.9:** Verlauf der Funktion  $t(\Gamma)$ . In den Bildern ist die Zeit im Ruhesystem des Plasmas als Funktion des Lorentzfaktors  $\Gamma$  dargestellt. In allen Beispielen besitzt das Plasma zum Zeitpunkt  $t = 0$  einen Lorentzfaktor von  $\Gamma_0 = 300$ . Exemplarisch wird die Abhängigkeit für verschiedene Werte des Parameters  $ZT$  gezeigt. Auf dem rechten Bild ist der anfängliche Funktionsverlauf zu sehen. Ein System mit einem großen Wert  $ZT$  braucht länger, um einen bestimmten (kleineren) Lorentzfaktor zu erreichen.

und (3.64) nicht mehr explizit angegeben werden kann. Allein im Fall sehr hoher Parameter  $ZT$  lässt sich die Massenfunktion als  $I(\Gamma) \simeq Z$  approximieren und durch

$$t(\Gamma) = Z/\lambda \left( \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} - \frac{\Gamma_0}{\sqrt{\Gamma_0^2 - 1}} \right) \quad (3.86)$$

darstellen. Die Auflösung nach dem Lorentzfaktor ergibt:

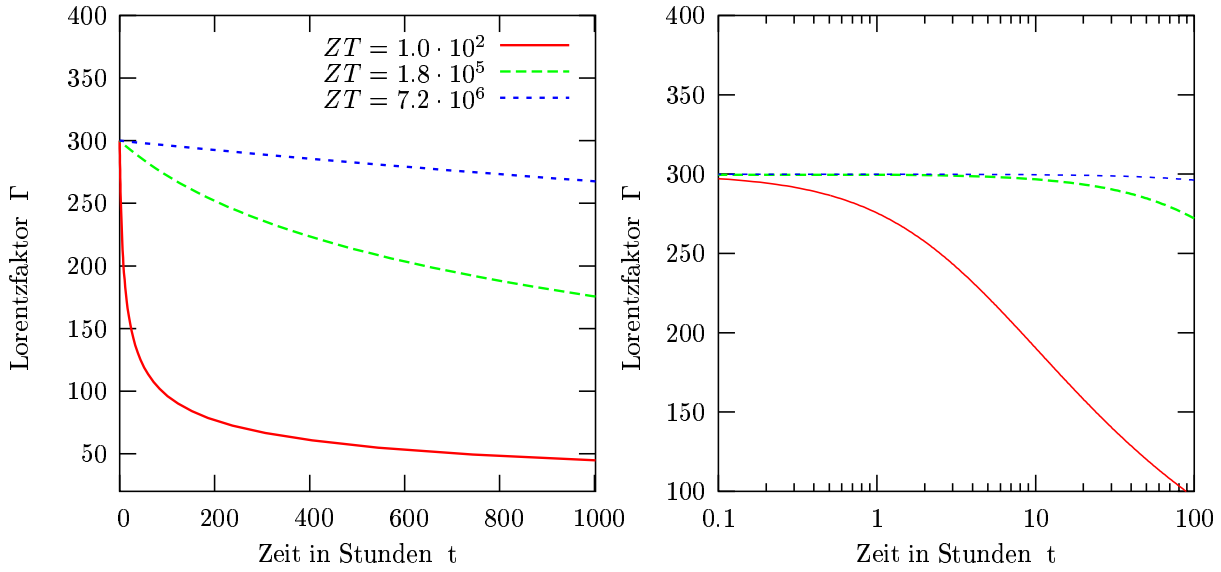
$$\Gamma(t) = \frac{t \lambda + Z\Gamma_0/(\Gamma_0^2 - 1)}{t^2 \lambda^2(\Gamma_0^2 - 1) + t 2 Z \lambda \Gamma_0 \sqrt{\Gamma_0^2 - 1} + Z^2}. \quad (3.87)$$

Nach Einsetzen der Gl. (3.85) ergibt sich für die Teilchenverteilung:

$$n(\gamma, t) = \sum_i \frac{-I(\nu_i) \exp[(2/\tau - T\lambda)(t - t_{\nu_i})] [\Theta(\Gamma(t) - \nu_i) - \Theta(\Gamma_0 - \nu_i)]}{(\nu_i^2 - 1) |\gamma \exp([t - t_{\nu_i}]/\tau) I(\nu_i) / [\lambda\tau(\nu_i^2 - 1)^{3/2}] - 1|}, \quad (3.88)$$

wobei

$$t_{\nu_i} = -A(\nu_i)/\lambda \quad (3.89)$$

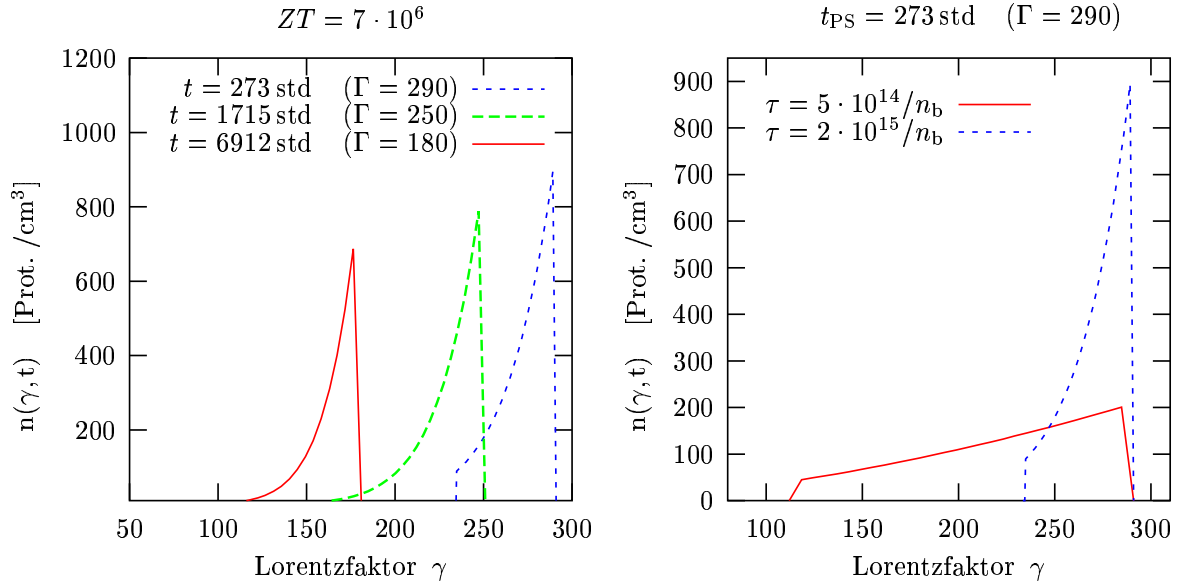


**Abbildung 3.10:** Darstellung der Umkehrfunktion von Gl. (3.85). Auf den Bildern ist die Entwicklung des Lorentzfaktors  $\Gamma(t)$  zu sehen, die durch numerische Bestimmung der Werte gewonnen wurde. Auch hier ist auf dem rechten Bild der anfängliche Funktionsverlauf (für sehr kleine Zeiten  $t$ ) zu sehen. Ein System mit einem kleinen Wert  $ZT$  erreicht einen kleinen Lorentzfaktor innerhalb einer kürzeren Zeit als ein Plasma mit hohem Wert  $ZT$ . Ein  $\Gamma$ -Wert von 200 wird bei  $ZT = 100$  innerhalb der ersten 10 Stunden erreicht, in dieser Zeit hat sich der Lorentzfaktor  $\Gamma$  im Fall  $ZT = 7.2 \cdot 10^6$  nur auf 299.585 verringert.

die Zeit definiert, die bis zum Erreichen der jeweiligen Nullstelle im Plasmasystem vergeht. Mit den Definitionen  $T = H/\lambda$  und  $H = 1/\tau + 1/T_E + 1/T_N$  und  $I(\nu_i) = M(\nu_i)/(m_p V)$  kann die Verteilung geschrieben werden als:

$$n(\gamma, t) = \sum_i \frac{M(\nu_i) \exp[(1/\tau - 1/T_E - 1/T_N)(t - t_{\nu_i})] [\Theta(\Gamma_0 - \nu_i) - \Theta(\Gamma(t) - \nu_i)]}{m_p V (\nu_i^2 - 1) |\gamma \exp([t - t_{\nu_i}]/\tau) M(\nu_i) / [m_p V \lambda \tau (\nu_i^2 - 1)^{3/2}] - 1|}. \quad (3.90)$$

Die Nullstellen  $\nu_i(\gamma_0(\gamma, t))$  sind mit Hilfe der Transformationsgleichung (3.80) numerisch bestimmbar. Die Darstellung (3.90) enthält bis auf die von den Nullstellen abhängige Größe  $t_{\nu_i}$  keine weiteren Integrale mehr. Mit der Funktion  $M(\nu_i)$  geht die Gesamtmasse ein, die das System hatte, als die Teilchen, die inzwischen den Lorentzfaktor  $\gamma$  haben, mitgerissen (also in den Plasmoid aufgenommen) wurden. Deutlich zu sehen ist, dass der zeitabhängige Funktionsverlauf von Gl. (3.90) allein durch das Wechselspiel der Zeitskalen der Strahlungs- und Teilchenverluste  $\tau, T_E$  und  $T_N$  bestimmt ist. Der erste



**Abbildung 3.11:** Darstellung der Verteilung  $n(\gamma, t)$  der relativistischen Protonen im Plasmasystem. In der linken Abbildung sieht man die Verteilung für verschiedene Zeiten  $t$  bei einem hohen Wert  $ZT$ . Nach ca. 6900 Stunden Zeit im Ruhesystem des Jets (Plasmasystem PS) ist der Plasmoid auf einen Lorentzfaktor von  $\Gamma = 180$  abgebremst worden. Setzt man wie in der rechten Abbildung die Zeitskala für die Strahlungsverluste auf einen kleineren Wert (modelliert man also eine stärkere Abstrahlung), erhält man eine Verteilung, die weniger hochenergetische Teilchen enthält als vergleichbare Funktionskurven bei großem  $\tau$ . Für die weiteren Abbildungen benutzen wir den Wert  $\tau = 2 \cdot 10^{15}$  Sekunden für die Zeitskala der Strahlungsverluste.

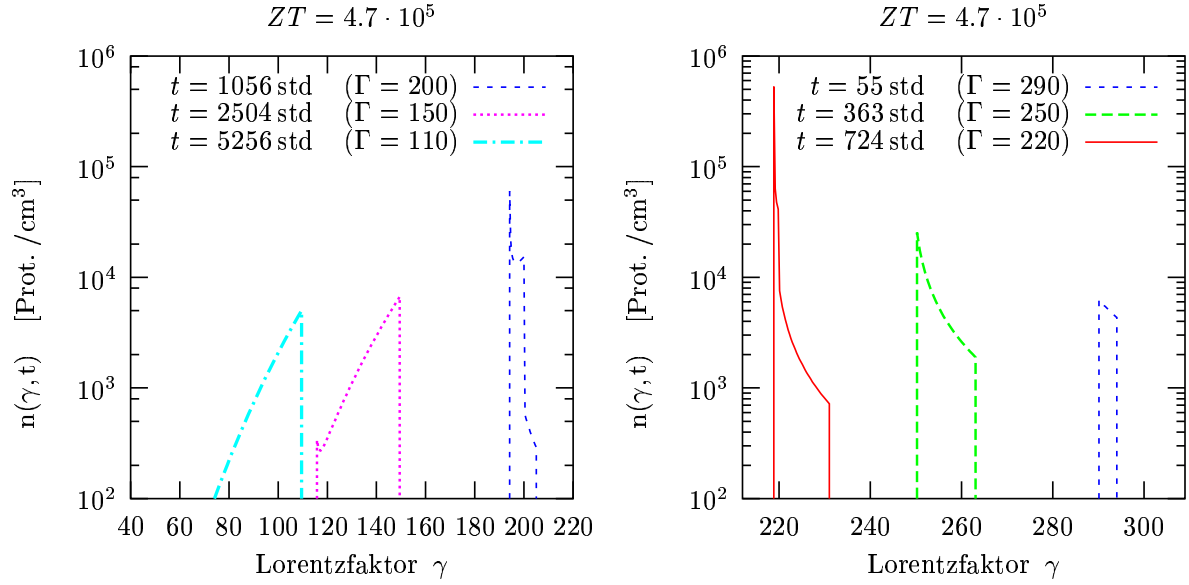
Term in dem Ausdruck

$$\left| \frac{\gamma \exp([t - t_{\nu_i}]/\tau) M(\nu_i)}{m_p V \lambda \tau (\nu_i^2 - 1)^{3/2}} - 1 \right| \quad (3.91)$$

stellt die Änderung (die Steigung) des Teilchenpfades an der Nullstelle dar, und der Gesamtausdruck (3.91) wird immer kleiner, je näher der erste Term bei Eins liegt; im Nenner der Funktion (3.90) ist er verantwortlich für einen starken Anstieg der Verteilung. Die Verteilungsfunktion steigt also „effektiver“, je mehr sich ein Pfad an der Nullstelle  $\nu_i$  der Winkelhalbierenden ( $\gamma = \Gamma$ ) anpasst.

Besitzt ein Pfad  $\gamma(\gamma_0, \Gamma)$  eine doppelte Nullstelle, so berührt er die Winkelhalbierende nur noch. Mathematisch gesehen hat die Funktion an dieser Stelle eine Singularität, allerdings bleibt die Verteilung integrierbar und bis auf eine einzige Stelle im Raum der Lorentzfaktoren  $\Gamma$  wird die Teilchendichte nicht beeinflusst.

In einem solchen Szenario haben Pfade mit sehr kleinem Wert  $\gamma_0$  keine Nullstellen,



**Abbildung 3.12:** Darstellung von Teilchenverteilungen für einen Parameter  $ZT$ , der zu den charakteristischen Pfaden der Abb. 3.5 (rechtes Bild) korrespondiert. Betrachtet man Verteilungen, bei denen der Jet auf einen Lorentzfaktor abgebremst hat, der kleiner ist als die doppelte Nullstelle des kritischen Pfades, sieht man eine Stufe, die daher rührt, dass ein Teil der Pfade schon zweimal von der Winkelhalbierenden ( $\gamma = \Gamma$ ) geschnitten wird, der andere aber nur mit einer Nullstelle beiträgt. Für das physikalische Szenario bedeutet dies: Teilchen, die zu einem früheren Zeitpunkt mitgerissen wurden (erste Nullstelle) dienen erneut als Target, um weitere Teilchen aufzusammeln.

vergrößert man  $\gamma_0$ , so besitzt der erste Pfad, mit Nullstelle eine doppelte. Bei weiterer Vergrößerung des Pfadparameters  $\gamma_0$  besitzen alle Pfade zwei immer weiter voneinander entfernt liegende Nullstellen, von denen ab dem Wert  $\gamma_0 > \Gamma_0$  nur noch die kleinere für unsere Berechnung relevant ist. Da wir wissen, dass für die Nullstellen des kritischen Pfades (mit der doppelten Nullstelle)  $\partial\gamma(\nu_i)/\partial\Gamma = 1$  gilt, ergibt sich unter Benutzung von Gl. (3.77):

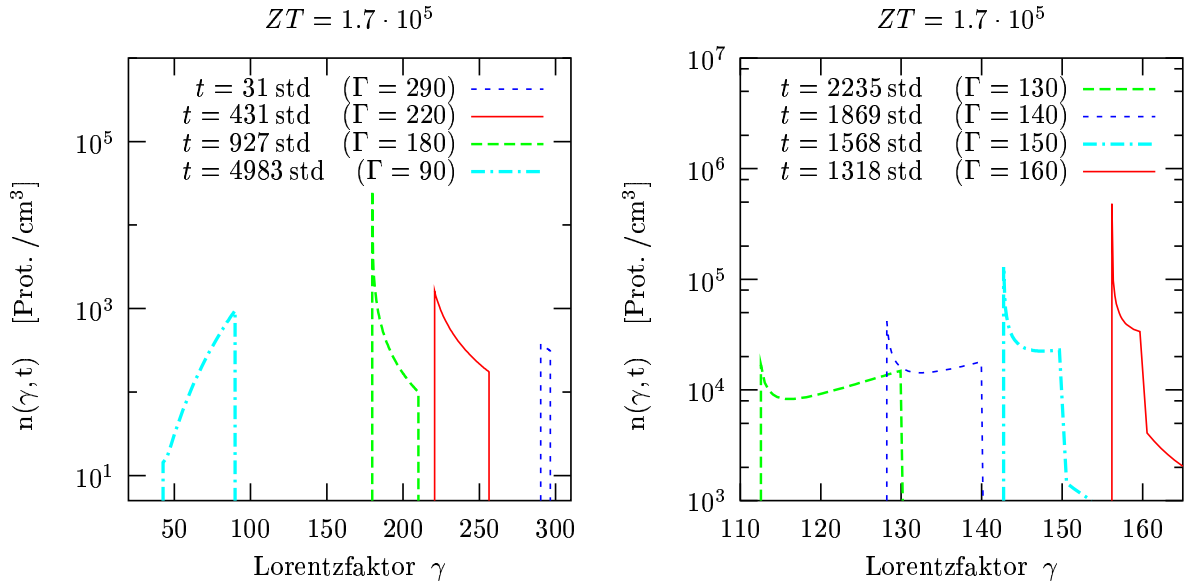
$$M(\nu_{\text{krit}}) \gamma/\tau = m_p \pi R^2 c n_i^* (\nu_{\text{krit}}^2 - 1)^{3/2}. \quad (3.92)$$

Dieses führt zu einer einfachen neuen Interpretation des physikalischen Sachverhaltes, wie man leicht durch Umschreiben der Gl. (3.92) deutlich macht :

$$\frac{\gamma}{\tau} = \frac{m_p V \lambda (\nu_{\text{krit}}^2 - 1)^{3/2}}{M(\nu_{\text{krit}})} \iff \dot{\gamma} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t}. \quad (3.93)$$

Nun hat es also mit zwei konkurrierenden Prozessen zu tun, die am Singularitätspunkt gleich “effektiv” sind: Die Abbremsung des Jets  $\dot{\Gamma}$  entspricht den Strahlungsverlusten  $\dot{\gamma}$ .



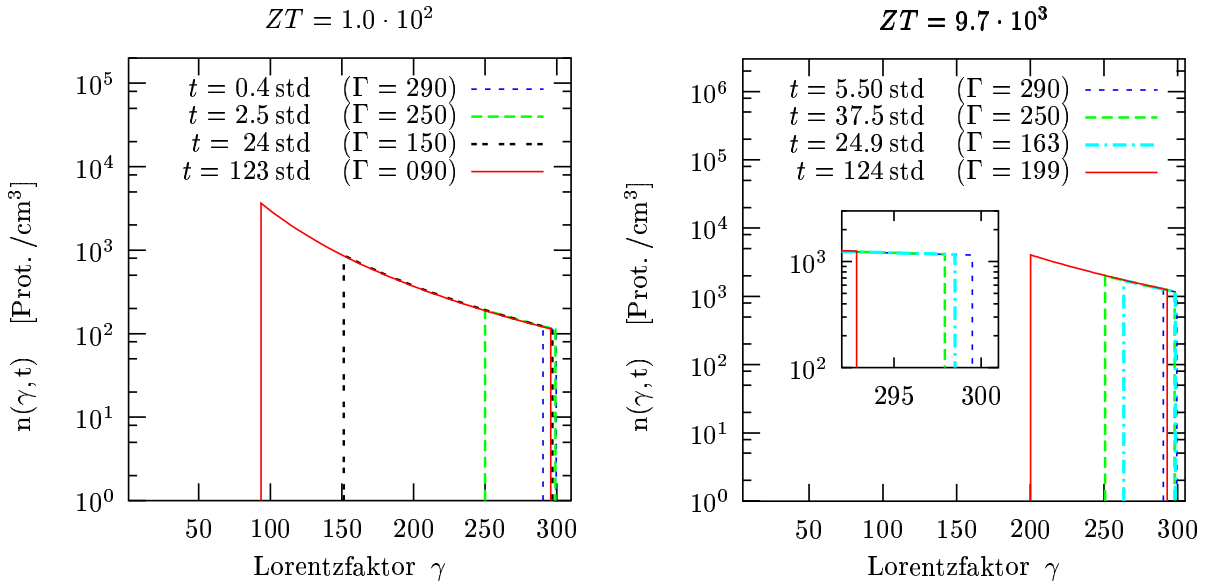


**Abbildung 3.13:** Die Entwicklung der Stufe am Beispiel der zu Abb. 3.6 (linkes Bild) korrespondierenden Pfade. Es ist deutlich zu erkennen wie die Spitze der Verteilung, die, solange der Lorentzfaktor  $\Gamma$  groß ist, bei kleinen Lorentzfaktoren  $\gamma$  liegt, sich für spätere (kleinere)  $\Gamma$  bei größeren Lorentzfaktoren  $\gamma$  ausprägt. Man sieht auch, dass die Stufe sich erst ausbildet, wenn der Jet auf einen niedrigeren Lorentzfaktor  $\Gamma$  abgebremst ist als bei vergleichbaren Verteilungen mit höheren Werten  $ZT$  wie in der Abb. 3.12. Dies geschieht in Übereinstimmung mit Abb. 3.6, da der kritischen Pfad erst bei einem kleineren  $\Gamma$  die Winkelhalbierende berührt.

In den Abbildungen 3.11 bis 3.14 zeigen wir, korrespondierend zu den zuvor besprochenen Beispielen für die charakteristischen Pfade der Teilchen, die Verteilungen  $n(\gamma, t)$  im Ruhesystem des Plasmas. Mit der obigen Interpretation (3.93) lässt sich das globale Verhalten dieser Funktionen systematisch beschreiben: Da das Aufsammeln der Protonen immer bei  $\gamma = \Gamma$  erfolgt, sieht man, dass die Abkühlung  $\dot{\gamma}$  der langsamere Prozess ist, sofern die Singularität noch nicht erreicht wurde. Es ergeben sich Spektren wie sie in Abb. 3.14 zu sehen sind.

Eine andere spektrale Form (wie zum Beispiel in Abb. 3.11) ergibt sich, wenn die Abbremsung  $\partial\Gamma/\partial t$  im Vergleich zur Abkühlung der langsamere Prozess ist. Die zuvor aufgesammelten Teilchen sind bei niedrigeren Energien zu finden als die neu hereinfliegenden Teilchen.

Es ist leicht zu sehen, dass die Funktion (3.90) die Dimension einer Teilchendichte besitzt, wenn man beachtet, dass  $\lambda$  die Dimension  $[\text{cm}^{-3} \text{sec}^{-1}]$  besitzt. Auch die An-



**Abbildung 3.14:** Darstellung von Teilchenverteilungen, die zu den Pfaden der Abbildungen 3.7 und 3.6 (jeweils rechtes Bild) korrespondieren. Stufen können sich in diesen Fällen nur für sehr kleine Lorentzfaktoren  $\Gamma$  ausbilden. Für größere Lorentzfaktoren trägt immer nur eine Nullstelle zum Teilchenzuwachs bei.

fangsbedingung  $n(\gamma, t_0) = 0$  ist erfüllt, da  $\Gamma(t = 0) = \Gamma_0$  ist und die Heavisidefunktionen dann Null ergeben.

Schwieriger zu sehen ist, dass die Lösung (3.90) auch tatsächlich die zu lösende Differentialgleichung erfüllt. Dies wird im Anhang B gezeigt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass durch die in diesem Kapitel hergeleiteten Ausdrücke für die Masse sowie für die Verteilung der aufgesammelten relativistischen Protonen der Einfluss der verschiedenen physikalischen Parameter deutlich wird. Im folgenden Kapitel werden die hier gewonnenen Funktionen benutzt, um einen weiteren analytischen Ausdruck für die hochenergetische Strahlung, die aufgrund des Zerfalls von neutralen Pionen entsteht, herzuleiten. Mit Hilfe der zeitlichen Ableitung dieses Terms lassen sich Aussagen über die Variabilität der Strahlungsspektren in Abhängigkeit der physikalischen Parameter der Quellen ableiten.

# Produktion von Sekundärteilchen

*Der Zerfall neutraler Pionen, die durch die Stöße der Protonen entstehen, führt zu hochenergetischer Strahlung. In diesem Kapitel wird ein analytischer Ausdruck für die Intensität dieser Strahlung entwickelt. Aussagen über die Variabilität der Strahlungsspektren in Abhängigkeit zu den physikalischen Parametern der Quellen werden anhand der zeitlichen Ableitung dieses Terms diskutiert.*

Die energiereichen Protonen, deren Verteilung im letzten Kapitel berechnet wurde, verursachen durch inelastische Kollisionen mit dem Hintergrundplasma die Produktion von neutralen  $\pi_0$ -Mesonen, die wiederum nach einer mittleren Lebensdauer von  $9 \cdot 10^{-17}$  s in zwei hochenergetische Photonen zerfallen.

Die Anzahl der Photonen, die pro Volumeneinheit, pro Sekunde und pro Energieeinheit produziert werden, gewinnt man durch die Photonenquellfunktion

$$q_\gamma(E_\gamma) = 2 \int_{E_{\min}}^{\infty} \frac{Q_\pi(E_\pi)}{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2 c^4}} dE_\pi \quad (4.1)$$

mit Hilfe der Quellfunktion  $Q_\pi(E_\pi)$  neutraler Pionen, wobei  $E_{\min}$  die Abkürzung für die untere Integralgrenze  $E_\gamma + [(m_\pi c^2)^2 / (4E_\gamma)]$  ist. Die Quellfunktion der neutralen Pionen selbst ist wiederum gegeben durch:

$$Q_\pi(T_\pi) = c n_H \int_{T_{\min}}^{\infty} \beta n_p(T) \frac{d\sigma(T, T_\pi)}{dT_\pi} dT, \quad (4.2)$$

wobei  $\beta = v/c$  die Geschwindigkeit und  $n_p(T)$  das Energiespektrum der nichtthermischen Teilchen pro Energie- und Volumeneinheit beschreibt. Mit  $n_H$  ist hier die Dichte

der thermischen Teilchen bezeichnet worden. Als untere Integrationsgrenze dient die minimale kinetische Energie der Protonen, die zur Produktion eines Pions der Energie  $T_\pi$  nötig ist. Der hier eingehende differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma(T, T_\pi)/dT_\pi$ , der die Produktion eines Pions der kinetischen Energie  $T_\pi$  durch Kollision eines Protons der kinetischen Energie  $T_p$  mit einem thermischen Proton im Ruhesystem des Plasmas beschreibt, steht mit dem experimentell zugänglichen inklusiven Wirkungsquerschnitt  $\langle \zeta \sigma_\pi(T) \rangle$  der Reaktion „ $p + p = \pi_o + \dots$ “<sup>1</sup> in Zusammenhang durch:

$$\frac{d\sigma(T, T_\pi)}{dT_\pi} = \langle \zeta \sigma_\pi(T) \rangle \frac{dN(T, T_\pi)}{dT_\pi} \quad (4.3)$$

wobei mit  $dN(T_p, T_\pi)/dT_\pi$  das normalisierte Spektrum der produzierten Pionen darstellt, also der Bedingung

$$\int_0^\infty dT_\pi \frac{dN(T, T_\pi)}{dT_\pi} = 1 \quad (4.4)$$

genügt (vgl. Dermer (1986) und Pohl (1994)) und mit  $\zeta$  die Multiplizität bezeichnet wird. Die Quellfunktion repräsentiert auch in diesem Fall die Anzahl der pro Volumeneinheit, pro Sekunde und pro Energieeinheit produzierten Pionen. Für die Berechnung der Pionenquellfunktion sind verschiedene Modelle in der Literatur vorgeschlagen worden.

Stecker (1970) diskutiert ein Modell<sup>2</sup>, in welchen zwei Moden der Pionenproduktion dominieren: Die isobare<sup>3</sup> Komponente, die dominant ist bei Energien der nichtthermischen Protonen im unteren GeV-Bereich, sowie die sogenannte Feuerball („fireball“) Komponente, die die Pionenproduktion durch höherenergetische nichtthermische Teilchen repräsentiert. Im Konzept dieser Feuerballkomponente nimmt man an, dass sich ein thermisches „Gas“ aus Pionen bildet, dass einer Maxwell-Boltzmannverteilung folgt. Ab einer Photonenenergie von 6 TeV werden in diesem Modell hauptsächlich Zerfälle von Hyperonen<sup>4</sup> und nuklearen Isobaren für das Spektrum verantwortlich gemacht. Die so berechneten Pionenspektren repräsentieren die experimentellen Daten sehr gut für Energien im Bereich bis zu einem GeV (vgl. Dermer (1986)).

Für den höherenergetischen Bereich existieren verschiedene sogenannte „Scaling“

---

<sup>1</sup>Bei inelastischen p-p Reaktionen entstehen neben den neutralen auch geladene Pionen und je nach Reaktionskanal z.B. Neutronen

<sup>2</sup>Dieses sogenannte I+F Modell wird im Hinblick auf Wechselwirkung durch kosmische Höhenstrahlung diskutiert.

<sup>3</sup>also mit gleicher Anzahl von Nukleonen im Kern

<sup>4</sup>Kurzlebige Elementarteilchen, dessen Masse größer als die des Neutrons ist.

Skalierungs-Modelle. Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung des Modell von Stephens und Badhwar (1981). Hierbei wird aufbauend auf experimentellen Daten der Pionenproduktion für Protonenenergien  $\leq 24$  GeV der Lorentz-invariante Wirkungsquerschnitt angepasst. Im hochenergetischen Limit sagen sowohl das I+F Modell wie auch das Skalierungsmodell den spektralen Index des Sekundärspektrums als dem primären Spektralindex folgend voraus (vgl. Stecker (1979)).

Ein anderer Zugang erfolgt über das „Dual Parton Model“ (siehe Capella et al. (1994) für einen ausführlichen Übersichtsartikel), bei dem mit einem nicht-störungstheoretischen Ansatz der QCD die Wirkungsquerschnitte für hochenergetische Stöße über eine topologische Expansion ausgedrückt werden können. Dabei weist man jedem Feynmangraphen eine zweidimensionale orientierbare Oberfläche zu. Die einzelnen Terme der Expansion werden dabei über die Anzahl ihrer Farben gewichtet, wobei die Anzahl der sog. Löcher und Henkel der Oberfläche im Exponenten eingeht, so dass komplizierte Oberflächen unterdrückt sind. Jedes Diagramm dieser Expansion unterliegt einer Fragmentation der „colored objects“ in  $2k$  Ketten wobei  $k$  die Anzahl der Wechselwirkungen repräsentiert, die für den Wirkungsquerschnitt  $\sigma_k$  relevant sind. Für die detaillierte Analyse der einzelnen hadronischen Ketten ist allerdings eine Monte-Carlo Beschreibung notwendig. Im Weiteren werden deshalb Ergebnisse benutzt, die mit Hilfe des Monte-Carlo Programms DTUNUC V2.2 (Möhring & Ranft 1991, Ranft et al. 1994, Ferrari et al. 1996, Engel et al. 1997) im Rahmen der Arbeit von Pohl & Schlickeiser (2000) gewonnen wurden.

Für die weitere Diskussion eignet sich die Photonenquellfunktion<sup>5</sup> am besten in der substituierten Form

$$q(E_s, t) = 2 n_b \int_1^\infty n(\gamma_p, t) \int_{T_{\pi \min}}^\infty \frac{\beta c}{\sqrt{T_\pi^2 + 2 T_\pi m_\pi c^2}} \frac{d\sigma(T_\pi)}{dT_\pi} dT_\pi d\gamma_p, \quad (4.5)$$

wobei die Zeitabhängigkeit der Quellfunktionen aus der Zeitabhängigkeit der Teilchenverteilung  $n(\gamma, t)$  resultiert. Die untere Integrationsgrenze ist dann gegeben durch:

$$T_{\pi \min} = E_s - m_\pi c^2 + \frac{(m_\pi c^2)^2}{4 E_s}. \quad (4.6)$$

Ein charakteristisches Merkmal des Photonenspektrums ist ein auf einer logarithmischen Skala symmetrisches Spektrum mit einem Maximalwert bei  $E_s = m_\pi c^2/2 \approx 0.0675$  GeV, für den die untere Integrationsgrenze verantwortlich ist.

---

<sup>5</sup> $E_s$  bezeichnet die Energie des Sekundärteilchens, also hier die des Photons.

## Berechnung des Photonenspektrums

Die Sekundärteilchenproduktion lässt sich, wie im letzten Abschnitt diskutiert, im Prinzip auf die Berechnung eines Integrals der Form

$$q(E_s, t) = 2 n_b \int_1^{\infty} n(\gamma_p, t) Q(E_s, \gamma_p) d\gamma_p, \quad (4.7)$$

mit

$$Q(E_s, \gamma_p) = \int_{T_{\pi \min}}^{\infty} \frac{\beta c}{\sqrt{T_{\pi}^2 + 2 T_{\pi} m_{\pi} c^2}} \frac{d\sigma(T_{\pi})}{dT_{\pi}} dT_{\pi} \quad (4.8)$$

zurückführen. Die Verteilungen  $n(\gamma_p, t)$  der relativistischen Protonen in Abhängigkeit zu den physikalischen Parametern sind aus dem letzten Kapitel bekannt. Für die Funktion  $Q(E_s, \gamma_p)$  benutzen wir im Folgenden eine analytische Approximation numerisch berechneter Daten, die mit Hilfe des Monte-Carlo Programms DTUNUC (V2.2) gewonnen wurden:

$$Q(E_s, \gamma_p) \approx a \cdot 10^{-15} \exp[-2/\gamma_p - b(\log(E_s) + 1.2)^2]. \quad (4.9)$$

wobei  $E_s$  die Sekundärteilchenenergie in GeV bezeichnet. Die Parameter  $a$  und  $b$  dienen zur Anpassung an die Daten und variieren im Bereich von 4.3 bis 5 für  $a$  und 0.9 bis 1.5 für  $b$ . Damit wird den Schwankungen der Monte-Carlo Daten Rechnung getragen (vgl. Abb. 4.1).

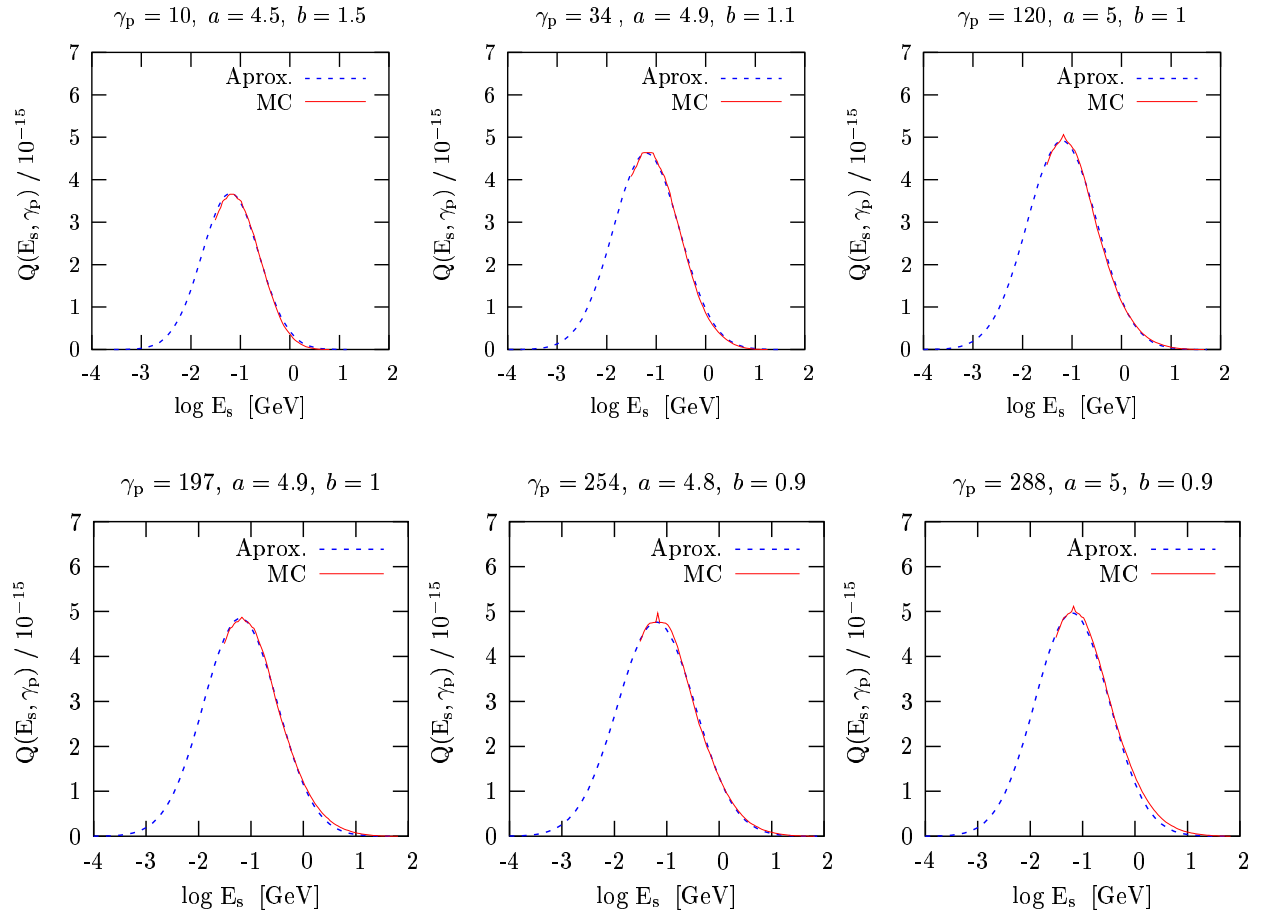
Da das Integral (4.7) sich nicht direkt bestimmen lässt, multiplizieren wir Gl. (3.12) mit  $Q(E_s, \gamma_p)$ , wobei  $n(\gamma, \Gamma)$  die auf das Volumen der Plasmamasse normierte Funktion  $N(\gamma, \Gamma)/V$  darstellt

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial(Qn)}{\partial \Gamma} - \frac{Q}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} + Qn [1/T_E + 1/T_N] = Q \lambda \sqrt{\Gamma^2 - 1} \delta(\gamma - \Gamma). \quad (4.10)$$

Analog zur Ableitung im vorherigen Kapitel wird im Folgenden ein Weg entwickelt Gl. (4.10) in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung darzustellen.

Zu diesem Zweck integrieren wir die Gl. (4.10) über  $\gamma$  in der Grenzen von  $1 \leq \gamma \leq \infty$  :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \int_1^{\infty} (Qn) d\gamma - \int_1^{\infty} \frac{Q}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} d\gamma + \int_1^{\infty} Qn d\gamma \left[ \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_N} \right] = Q(\Gamma) \lambda \sqrt{\Gamma^2 - 1} \Theta(\Gamma - 1). \quad (4.11)$$



**Abbildung 4.1:** Vergleich von Daten der Monte-Carlo Simulation mit der durch Gl. (4.9) gegebenen Testfunktion. Anhand mehrerer Beispiele für unterschiedliche Lorentzfaktoren  $\gamma_p$  wird die Anpassung durch die Parameter  $a$  und  $b$  dargestellt. Für alle weiteren Rechnungen und Beispiele wählen wir die Parameter  $a = 5$  und  $b = 0.9$ .

Dadurch erhält man eine Gleichung, in der das Integral  $\int Q n d\gamma$ , das zur Bestimmung der Quellfunktion  $q(E_s, t)$  benötigt wird, enthalten ist. Allein der mittlere Term verlangt eine weitere Auswertung, daher führt man wieder eine partielle Integration des mittleren Terms durch:

$$\int_1^{\infty} \frac{Q(E_s, \gamma)}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} d\gamma = (\gamma n) \frac{Q}{\tau} \Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \gamma n / \tau \frac{\partial Q}{\partial \gamma} d\gamma. \quad (4.12)$$

Der erste Term verschwindet wieder (mit der zu Gl. (3.15) analogen Begründung, dass die Verteilungsfunktion an beiden Grenzen verschwindet), und die Ableitung der Test-

funktion ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \gamma} &= a \cdot 10^{-15} \exp[-b(\log(E_s) + 1.2)^2] \exp[-2/\gamma] (2/\gamma^2) \\ &= 2Q(E_s, \gamma) / \gamma^2.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Also ergibt sich insgesamt aus der partiellen Integration:

$$-\int_1^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma n / \tau d\gamma = -2 \int_1^{\infty} Q n / (\gamma \tau) d\gamma.\quad (4.14)$$

Für  $(\tau \gamma) \gg 1$  wird dieser Term gegen die anderen vernachlässigbar klein, und in diesem Fall bleibt von der Differentialgleichung (4.11)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial \Omega(E_s, \Gamma)}{\partial \Gamma} + \Omega(E_s, \Gamma) [1/T_E + 1/T_N] = Q(E_s, \Gamma) \lambda \sqrt{\Gamma^2 - 1},\quad (4.15)$$

wobei wir für  $\int_1^{\infty} Q(E_s) n(\gamma, \Gamma) d\gamma$  die Abkürzung  $\Omega(E_s, \Gamma)$  wählen und die Heaviside Funktion ausgewertet haben. Die Auflösung der Gleichung nach  $\Omega$  ergibt:

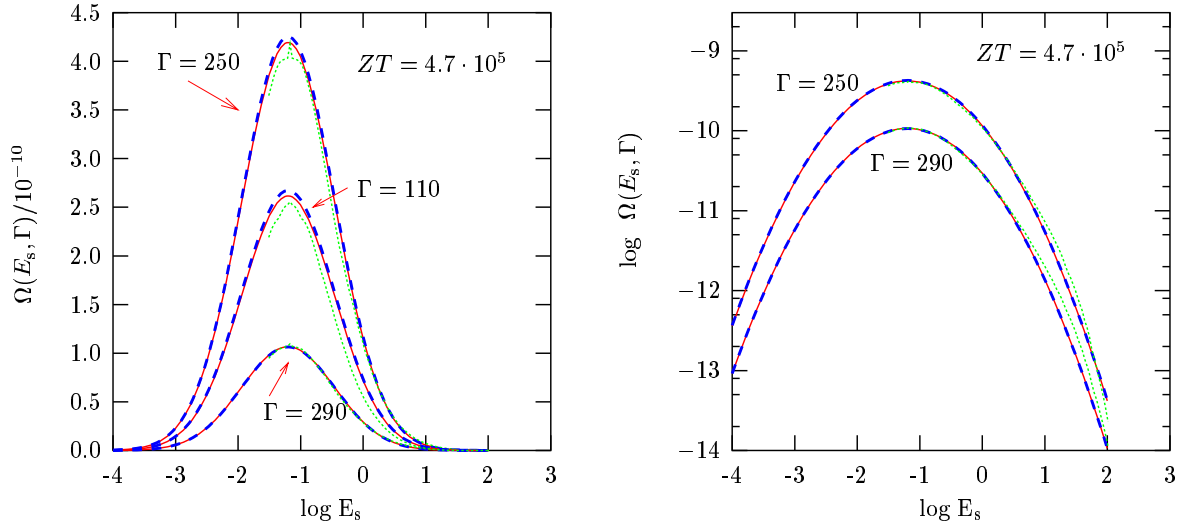
$$\frac{\partial \Omega(E_s, \Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{\kappa \Omega(E_s, \Gamma) I(\Gamma)}{\lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{Q(E_s, \Gamma) I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)},\quad (4.16)$$

wobei wir  $[1/T_E + 1/T_N]$  mit  $\kappa$  abkürzen und die Abbremsung des Plasmoids (3.2) einsetzen.

In der Abb. 4.2 sind numerisch berechnete Lösungen dieser Differentialgleichung dargestellt. Zum Vergleich werden zusätzlich durch numerische Integration der Funktion  $\int_1^{\infty} Q(E_s, \gamma) n(\gamma, \Gamma) d\gamma$  berechnete Kurven dargestellt. Diese wurden unter Verwendung der analytischen Verteilungsfunktion  $n(\gamma, \Gamma)$  aus Gl. (3.83) gewonnen. Bei der Berechnung der Lösungen wurde in beiden Fällen die Funktion  $Q(E_s, \gamma)$  in der Form (4.9) mit den Parametern  $a = 5$  und  $b = 0.9$  benutzt.

Die Abweichungen, die allein durch Verwendung der Funktion (4.9) im Gegensatz zu den Monte-Carlo Daten auftreten, sind in Abbildung 4.2 ebenfalls abgebildet worden. Man sieht, dass die Abweichungen, die durch die Verwendung der Testfunktion Gl. (4.9) hervorgerufen werden, im Bereich  $\Gamma = 100$  schon deutlich größer sind, als die Unterschiede zwischen der numerischen Lösung der Differentialgleichung und der direkten Integration (4.7). Obwohl die Verwendung einer einzigen Testfunktion derartige Abweichungen zu den Daten hervorruft, ist es nur mit einer solchen Funktion möglich, eine geschlossene analytische Darstellung für die Sekundärteilchenproduktion zu finden, die





**Abbildung 4.2:** Vergleich numerischer Lösungen (hier die durchgezogenen Linien) der Differentialgleichung (4.16) mit entsprechenden Kurven (gestrichelt), die durch numerische Integration der normierten Funktion (4.7) berechnet wurden. Die Abweichung, die allein durch die Verwendung der Quellfunktion (4.9) auftritt, wird durch eine weitere numerische Integration, die unter Verwendung der Monte-Carlo Daten berechnet wurde (punktierte Kurven), sichtbar. Auf der zweiten Abbildung wurde eine logarithmische Darstellung gewählt, um die Abweichungen im hochenergetischen Teil des Spektrums deutlich zu machen.

notwendig ist, wenn systematische Abhängigkeiten des Modells von den physikalischen Parametern untersucht werden sollen.

Zur weiteren Lösung der Differentialgleichung teilen wir Gl. (4.16) durch den von  $\gamma_p$  unabhängigen Anteil der Quellfunktion

$$Q_{E_s} = a \cdot 10^{-15} \exp[-b(\log(E_s) + 1.2)^2], \quad (4.17)$$

wobei wir den von  $\gamma$  abhängigen Anteil des Integrals  $\int_1^\infty \exp[-2/\gamma] n(\gamma, \Gamma) d\gamma$  mit  $\Xi(\Gamma)$  abkürzen:

$$\frac{\partial \Xi(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{\kappa \Xi(\Gamma) I(\Gamma)}{\lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{\exp[-2/\Gamma] I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)}. \quad (4.18)$$

Die formale Lösung der Differentialgleichung (4.18) lautet:

$$\Xi(\Gamma) = \Xi(\Gamma)_{\text{hom}} \left[ \int \frac{-\exp[-2/\Gamma] I(\Gamma)}{\Xi(\Gamma)_{\text{hom}} (\Gamma^2 - 1)} d\Gamma + C \right], \quad (4.19)$$

wobei die homogene Lösung  $\Xi(\Gamma)_{\text{hom}}$  sich als

$$\Xi(\Gamma)_{\text{hom}} = C_{\text{hom}} \exp \left[ \frac{\kappa}{\lambda} \int \frac{I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} d\Gamma \right] \quad (4.20)$$

mit  $C_{\text{hom}}$  als Integrationskonstante schreiben lässt. Die übliche Wahl der Integrationsgrenzen legt wieder die Integrationskonstanten fest. Wir wählen:

$$\Xi(\Gamma)_{\text{hom}} = C_{\text{hom}} \exp \left[ \frac{\kappa}{\lambda} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{I(\tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1)^{3/2}} d\tilde{\Gamma} \right] \quad (4.21)$$

für die homogene Lösung sowie

$$\Xi(\Gamma) = \exp \left[ \frac{\kappa}{\lambda} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{I(\tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1)^{3/2}} d\tilde{\Gamma} \right] \left[ \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-C_{\text{hom}} \exp[-2/\tilde{\Gamma}] I(\tilde{\Gamma})}{\Xi(\tilde{\Gamma})_{\text{hom}} (\tilde{\Gamma}^2 - 1)} d\tilde{\Gamma} + C_{\text{hom}} C \right] \quad (4.22)$$

für die Gesamtlösung. Damit die Anfangsbedingung

$$\Xi(\Gamma_0) = \int_1^{\infty} \exp[-2/\Gamma] n(\gamma, \Gamma_0) d\gamma = 0 \quad (4.23)$$

erfüllt<sup>6</sup> ist, muss  $C_{\text{hom}} C = 0$  sein. Multiplizieren wir die Gl. (4.22) wieder mit dem nur von der Energie  $E_s$  abhängigen Anteil der Quellfunktion  $Q_{E_s}$  lässt sich nach Einsetzen der Definition (3.85) die Größe  $\Omega(E_s, \Gamma)$  darstellen als:

$$\Omega(E_s, \Gamma) = \exp[-\kappa t(\Gamma)] \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-Q(E_s, \tilde{\Gamma}) I(\tilde{\Gamma})}{\exp[-\kappa t(\tilde{\Gamma})] (\tilde{\Gamma}^2 - 1)} d\tilde{\Gamma}. \quad (4.24)$$

Die Abbildung 4.3 zeigt die numerische Auswertung des Integrals für verschiedene Parametersätze. Sichtbar wird hier, dass das Integral von der normierten Massenfunktion  $I(\Gamma)/Z$  geprägt wird, also die Funktionsverläufe denjenigen der Abb. 3.2 ähneln.

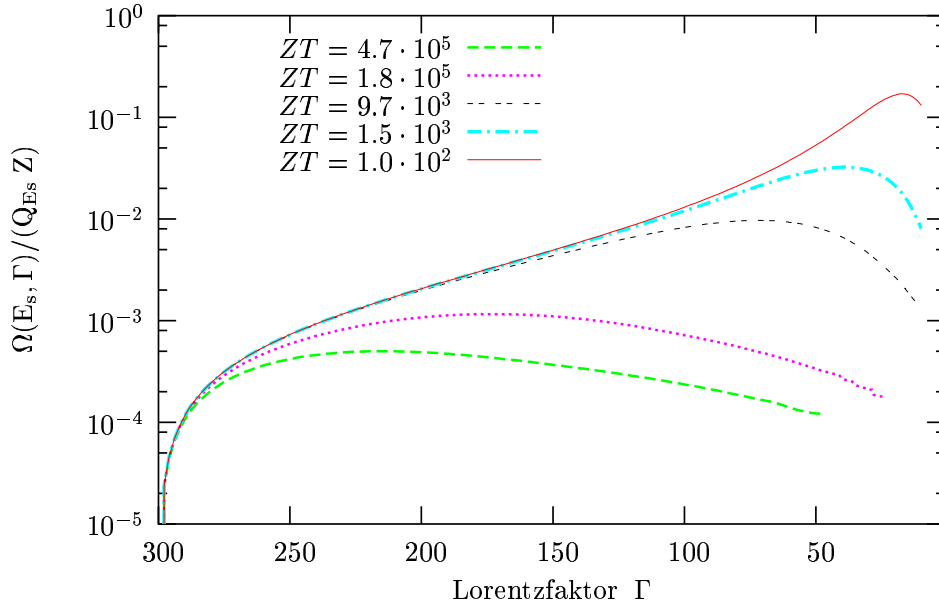
Das Integral (4.24) lässt sich analytisch nur mit weiteren Näherungen lösen. Wir greifen daher nun auf eine Näherung aus dem vorherigen Kapitel zurück: Anhand eines Vergleiches von Gl. (3.46) mit Gl. (3.85) kann man feststellen, dass sich bei analoger Nutzung der Argumente die zu Gl. (3.66) führen, die Funktion  $\exp[-\kappa t(\Gamma)]$  für sehr große Parameter  $ZT$  auf

$$\exp[-\kappa t(\Gamma)] = \exp \left[ \kappa Z [\Gamma_0/\sqrt{\Gamma_0^2 - 1} - \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1}]/\lambda \right] \quad (4.25)$$

reduzieren lässt, da diese bis auf die unterschiedlichen Konstanten mit Gl. (3.66) identisch ist. Man erinnere sich, dass zur Herleitung der Gl. (3.66) die Tatsache benutzt

---

<sup>6</sup>Beim Startpunkt  $\Gamma_0$  sind noch keine relativistischen Teilchen vorhanden.



**Abbildung 4.3:** Numerische Auswertung des Integrals (4.24) bei festem Wert für die Energie des Sekundärteilchens. In diesen Beispielen wurde der Wert  $E_s = 0.1 \text{ GeV}$  benutzt. Das charakteristische, von den physikalischen Parametern abhängige Verhalten der errechneten Funktionsverläufe gleicht denjenigen, die für den Verlauf der normierten Massen (Abb. 3.2 bis 3.4) typisch sind.

wurde, dass die Funktion  $\epsilon(u)$  für alle  $u$  nahe bei Null liegt, was gleichbedeutend damit ist, dass die normierte Massenfunktion  $I(\Gamma)/Z$  immer nahe bei Eins liegt. Mit dieser Approximation lässt sich Gl. (4.24) als

$$\begin{aligned} \Omega(E_s, \Gamma) &= -Z Q_{E_s} \exp \left[ \kappa Z \left[ \Gamma_0 / \sqrt{\Gamma_0^2 - 1} - \Gamma / \sqrt{\Gamma^2 - 1} \right] / \lambda \right] \\ &\times \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{\exp \left[ -\kappa Z \left[ \Gamma_0 / \sqrt{\Gamma_0^2 - 1} - \tilde{\Gamma} / \sqrt{\tilde{\Gamma}^2 - 1} \right] / \lambda \right] \exp[-2/\tilde{\Gamma}]}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1)} d\tilde{\Gamma} \end{aligned} \quad (4.26)$$

schreiben, wobei wir den nur von der Energie der Sekundärteilchen abhängigen Anteil wieder mit  $Q_{E_s}$  abgekürzt haben. Im nächsten Schritt führen wir die Substitution  $u = \tilde{\Gamma} / (\tilde{\Gamma}^2 - 1)^{1/2}$  durch, die analog schon im vorherigen Kapitel benutzt wurde:

$$\Omega(E_s, \Gamma) = Z Q_{E_s} \int_{1/\beta_0}^{1/\beta} \exp \left[ -\kappa Z \left[ \Gamma / \sqrt{\Gamma^2 - 1} - u \right] / \lambda \right]$$

$$\times \exp[-2\sqrt{u^2 - 1}/u] \sqrt{1/(u^2 - 1)} du.$$

Als zweite Näherung benutzen wir nun Gl. (3.31), die ebenfalls zuvor schon erfolgreich eingesetzt wurde. Zusätzlich lässt sich  $1/u$  im zweiten Exponentialterm vernachlässigen, da  $u$  immer nahezu Eins ist. Dann lässt sich die Integration ausführen mit der Stammfunktion

$$\begin{aligned} & \int_{1/\beta_0}^{1/\beta} \exp \left[ -2\sqrt{2u - 2} - \kappa Z \left[ \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1} - u \right] / \lambda \right] / \sqrt{2u - 2} du \\ &= \sqrt{\pi} \exp \left[ \kappa Z \left( 1 - \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1} \right) / \lambda - 2\lambda / (\kappa Z) \right] \\ & \times \operatorname{erfi} \left[ \sqrt{\kappa Z (u - 1) / \lambda} - \sqrt{2\lambda / (\kappa Z)} \right] / \sqrt{2 \kappa Z / \lambda} \end{aligned} \quad (4.27)$$

als Resultat. Mit den Abkürzungen  $V_1(\Gamma) = \kappa Z (\Gamma/\sqrt{\Gamma^2 - 1} - 1)/\lambda$  und  $V_2 = 2\lambda/(\kappa Z)$  lässt sich die Gesamtfunktion darstellen als:

$$\begin{aligned} \Omega(E_s, \Gamma) &= -Z Q_{\text{Es}} \sqrt{\pi V_2} / 2 \exp[-V_1(\Gamma) - V_2] \\ & \times \left( \operatorname{erfi}[\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1(\Gamma)}] - \operatorname{erfi}[\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1(\Gamma_0)}] \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Für kleinere Parameter  $ZT$  gilt natürlich weiterhin Gl. (4.24). Allerdings müssen bei einer analogen Benutzung der in den Gleichungen (3.58) und (3.64) dargestellten Näherungsfunktionen  $F_3(\Gamma)$  und  $F_4(\Gamma)$  sowohl deren Abweichungen wie auch weitere (zur Integration unvermeidbare) Näherungen in Betracht gezogen werden. Andererseits sind hohe Werte des Parameters  $ZT$  bei genügend hohen inneren Dichten  $n_b$  immer gegeben, so dass wir hier auf eine ausführliche Untersuchung der Näherungen für verschiedene Parameter  $ZT$  verzichten.

Zu berücksichtigen bleibt schließlich noch, dass sich der Zusammenhang zwischen der Funktion  $\Omega(E_s, \Gamma)$  und der Sekundärteilchenproduktion (4.7) einfach als  $q(E_s, \Gamma(t)) = 2 n_b \Omega(E_s, \Gamma(t))$  darstellen lässt.

Trotz der Näherungen bietet die Funktion (4.28) eine gute Beschreibung für das hochenergetische Photonenspektrum, solange der Parameter  $ZT \geq 5 \cdot 10^5$ , wie am Beispiel in Abbildung 4.4 dargestellt wird.

In diesem Beispiel werden Parameterwerte von  $R = 10^{14}$  cm als Radius der Plasm Scheibe, einer Scheibendicke  $d = 3 \cdot 10^{13}$  cm sowie einem initialen Lorentzfaktor  $\Gamma_0 = 300$  verwendet. Die Berechnungen wurden mit einer inneren Dichte von  $n_b = 5 \cdot 10^8$  cm<sup>-3</sup>

und  $n_i^* = 0.2 \text{ cm}^{-3}$  als angenommener äußerer Dichte ausgeführt. Das entspricht nach Gl. (3.29) einem Parameter  $ZT = 7.48 \cdot 10^6$ .

Anhand der Abbildung 4.4 wird klar, dass die Abweichung der numerischen Monte-Carlo Daten viel größer ist, als die Unterschiede zwischen der analytischen Form (4.28) und dem Ausdruck (4.16), der ebenfalls numerisch, unter Verwendung eines Runge-Kutta Verfahrens berechnet wurde. Mit anderen Worten: Die Abweichungen zu den mittels Monte-Carlo Prozesses gewonnenen Berechnungen sind allein auf die Verwendung der Approximation der Quellfunktion (4.9) zurückzuführen. Diese Quellfunktion ist aber unabhängig von dem in dieser Arbeit untersuchten Modell, d.h die Verwendung einer analytischen Approximation aus dem Bereich der Teilchenphysik, die die Photonproduktion aus neutralen Pionen akkurat beschreibt, sich aber gleichzeitig geschlossen darstellen lässt, könnte das Ergebnis weiter verbessern. Die zeitliche Abhängigkeit wird unangetastet von diesem Punkt gut reproduziert.

Für die in Abb. 4.4 gezeigten Kurven wurde die Darstellung im System eines äußeren Beobachters gewählt. Bei der Transformation ins Beobachtersystem<sup>7</sup> geht der Aufsichtswinkel  $\theta$ , der in Abbildung 4.4 zu  $\theta_{\text{obs}} = 0.1^\circ$  gewählt wurde, sowie die Distanz zur Quelle (angegeben über die Rotverschiebung, die hier als  $z = 0.5$  angenommen wurde) in folgender Weise ein:

$$q^*(E_s^*, \Gamma) = \frac{1}{4\pi D_L^2} \frac{q(E_s(E_s^*), \Gamma)}{(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \cos \theta)^2}, \quad (4.29)$$

wobei für die Energie  $E_s^*$  des Sekundärteilchens im System des äußeren Beobachters der Zusammenhang

$$E_s^* = \frac{E_s}{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \cos \theta} \quad (4.30)$$

besteht und die Variable  $q(E_s, t)$  in Gl. (4.7) definiert wurde. In allen folgenden dargestellten Rechnungen benutzen wir die (Helligkeits)- Entfernung  $D_L$  für ein Einstein-de Sitter Modell

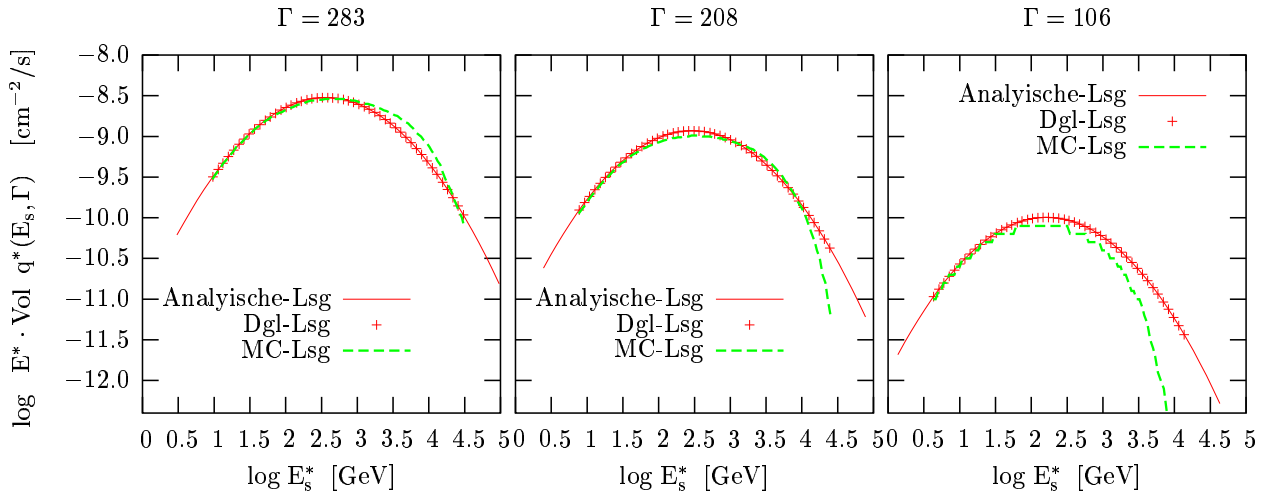
$$D_L = \frac{2c(1+z)}{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right], \quad (4.31)$$

mit einem Wert für die Hubblekonstante von  $H_0 = 75 \text{ km}/(\text{s Mpc})$ .

Die hier angewandte Methode (das zu berechnende Integral als Lösung einer Differentialgleichung zu betrachten) lässt sich auch auf andere Funktionen  $Q(E_s, \gamma)$  erweitern.

---

<sup>7</sup>Eine Diskussion des sog. „Lorentzboost“ findet sich bei Schuster (2000).



**Abbildung 4.4:** Vergleich der analytischen Funktion (4.28) (durchgezogene Linie) mit numerischen Lösungen (Kreuze) der Differentialgleichung. Die Abweichung, die durch Verwendung der Quellfunktion (4.9) auftritt, wird durch die durch numerische Integration gewonnenen (gestrichelten) Kurven sichtbar, die unter Verwendung der Monte-Carlo Daten berechnet wurden. Eine weitere Verringerung der Abweichungen zu den Monte-Carlo Daten liesse sich durch Variation der Parameter  $a$  und  $b$  in Gl. (4.9) erreichen. Es wurden zur Berechnung physikalische Parameter gewählt, die mit den Parametern der Fig. 4 Pohl & Schlickeiser (2000) identisch sind. Das entspricht dem Parameter  $ZT = 7.48 \cdot 10^6$ . Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurde ins Beobachtersystem transformiert, wobei der Aufsichtswinkel zu  $\theta_{\text{obs}} = 0.1^\circ$  gewählt wurde. Die  $\Gamma$ -Werte entsprechen damit Zeiten im Beobachtersystem von 1, 10 und 100 Stunden.

Zur Aufstellung der Differentialgleichung genügte es, als Anforderung an die Quellfunktion  $Q(E_s, \gamma)$  zu verlangen, dass die Ableitung

$$\frac{\partial Q(E_s, \gamma)}{\partial \gamma} = C Q(E_s, \gamma) / \gamma^m \quad (4.32)$$

mit  $m \geq 1$  erfüllt. Im Falle  $m = 1$  erweitert sich lediglich die nicht von  $\Gamma$  abhängige Funktion  $\kappa$  um den Faktor  $C/\tau$ . Das heißt, dass alle Quellfunktionen, die die Bedingung (4.32) erfüllen, mit dem hier benutzten Verfahren verträglich sind und sich durch Gl. (4.16) ausdrücken lassen.

## Variabilität der Quellen

Ein interessante Eigenschaft der Blasare ist die schnelle optische Variabilität der Quellen, die auf Zeitskalen von Stunden bis Tagen abläuft (siehe z.B. Hartman 1997, Aharonian 1999). Im Rahmen des hier diskutierten Modelles soll untersucht werden, inwiefern zeitliche Änderungen, die sich in diesem Modell ergeben, in Abhängigkeit zu den physikalischen Parametern stehen.

Die Variabilität, also die zeitliche Änderung einer Quelle, die ein äußerer Beobachter sehen würde, ergibt sich gemäß:

$$\frac{\partial \Omega^*(\Gamma)}{\partial t^*} = \frac{\partial \Omega^*(\Gamma)}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial t^*}, \quad (4.33)$$

wobei der erste Faktor sich laut Gl.(4.29) darstellen lässt als:

$$\frac{\partial \Omega^*(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left[ \frac{\Omega(E_s, \Gamma)}{(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \cos \theta)^2} \right]. \quad (4.34)$$

Mit der Abkürzung  $L(\Gamma, \theta) = (\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \cos \theta)$  für den Lorentzboost lautet die formale Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \left[ \frac{\Omega(\Gamma)}{L(\Gamma, \theta)^2} \right] = \frac{\partial \Omega(\Gamma)}{\partial \Gamma} \frac{1}{L(\Gamma, \theta)^2} - \frac{2 \Omega(\Gamma)}{L(\Gamma, \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\cos \theta \Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} \right], \quad (4.35)$$

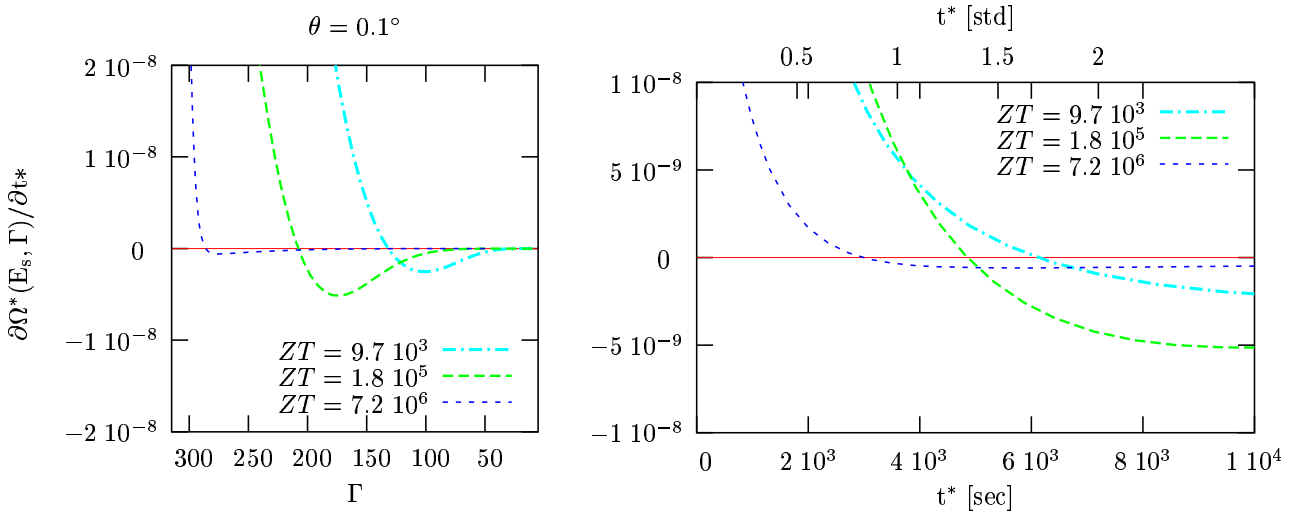
wobei die Variable  $E_s$  unterdrückt wurde. Die Transformation in das System eines äußeren Beobachters kann durch

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t^*} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = -\frac{\lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{I(\Gamma)} \times L(\Gamma, \theta)^{-1} \quad (4.36)$$

ausgedrückt werden, wobei der erste Faktor die Abbremsung des Jets und der zweite Faktor die relativistische Bewegung des Plasmasystems gegen das Beobachtersystem berücksichtigt. Die Ableitung der Funktion  $\Omega$  ist durch Gl. (4.16) gegeben, so dass sich die gesamte zeitliche Änderung allgemein schreiben lässt als:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega^*(E_s, \Gamma)}{\partial t^*} = & \left[ -\kappa \Omega(E_s, \Gamma) + \lambda Q(E_s, \Gamma) \sqrt{\Gamma^2 - 1} \right. \\ & \left. + \frac{2 \lambda \Omega(E_s, \Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{-1} I(\Gamma)} \times \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1} - \Gamma \cos \theta}{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \cos \theta} \right] \times L(\Gamma, \theta)^{-3}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Der Lorentzfaktor  $\Gamma$  ist dabei als eine von der Zeit abhängige Funktion zu verstehen, wobei die Abhängigkeit  $\Gamma(t)$  in Abb. 3.9 bzw. Abb. 3.10 dargestellt und für große Werte

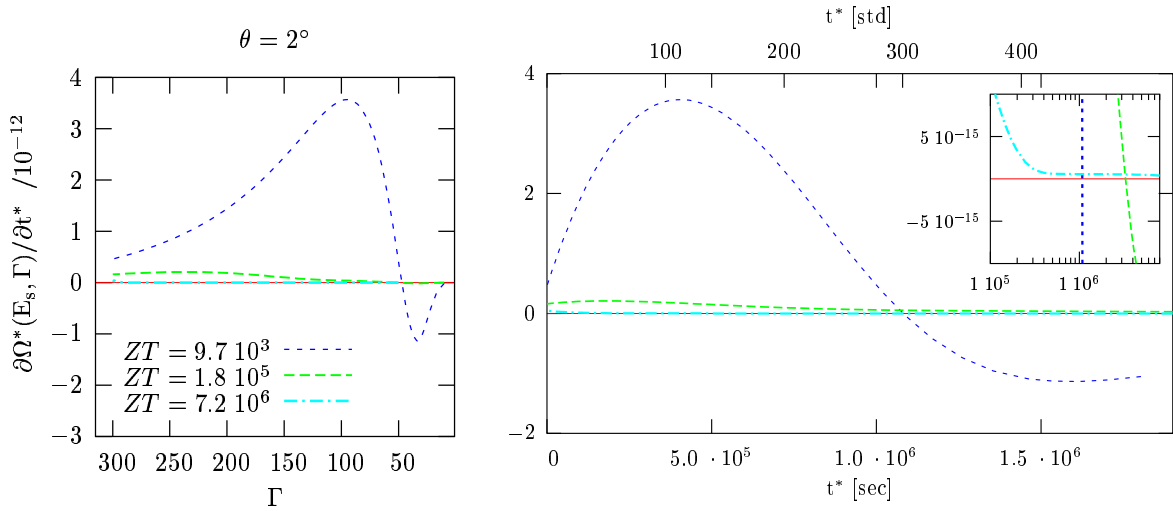


**Abbildung 4.5:** Variabilitäten der Quellen bei kleinem Winkel und verschiedenen Parametern. Im linken Bild ist das Verhalten in Abhängigkeit zum Lorentzfaktor dargestellt, während auf der rechten Seite die Abhängigkeit zur Beobachterzeit illustriert wird. Bei kleinen Winkeln steigen die Intensitäten der Quellen nur kurze Zeit an, um je nach Parameterwert, nach spätestens wenigen Stunden zu sinken. Je höher der Wert des Parameters  $ZT$  (oder äquivalent je kleiner das Dichteverhältnis  $n_i^*/n_b$ ), desto früher ist das Intensitätsmaximum erreicht. In allen Beispielen wurde eine konstante Scheibendicke  $d = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^3$  angenommen.

des Parameters  $ZT$  in Gl. (3.87) explizit angegeben wurde. Während die ersten zwei Terme auf der rechten Seite der Gl. (4.37) nur von den Modellparametern  $\kappa$  und  $\lambda$ , dem Lorentzfaktor des Jets, sowie den Pionen- und Photonquellenfunktionen  $Q(E_s, \Gamma)$  und  $\Omega(E_s, \Gamma)$  abhängig sind, geht in den dritten Faktor noch explizit die Abhängigkeit des Aufsichtswinkels  $\theta$  ein. Da die Funktion  $L(\Gamma, \theta)$ , zusätzlich mit der dritten Potenz in Gl.(4.37) eingeht, machen sich zeitliche Änderungen der Intensität bei kleinerem Aufsichtswinkel wesentlich stärker bemerkbar.

Betrachtet man die beiden Faktoren der rechten Seite, die der Variabilität des Systems selbst und nicht dem Lorentzboost zugeschrieben werden können, so kann man abschätzen, dass der Einfluss des zweiten Faktors mit wachsendem Parameter  $ZT$  fällt. Die von physikalischen Parametern abhängige Konstante  $\lambda = n_i^* c/d$  wird kleiner bei größer werdendem  $ZT$ , da, wie man anhand von Gl.(3.29) sieht, unter der Annahme gleicher Dicke  $d$  zu größeren Werten  $ZT$  geringere äußere Dichten korrespondieren. Gleichzeitig wächst der Parameter  $\kappa$  mit steigendem  $ZT$  bei festgehaltener Scheibendicke  $d$ , da zur Berechnung der Konstanten  $\kappa = 1/T_E + 1/T_N$  die Entweichzeitskala



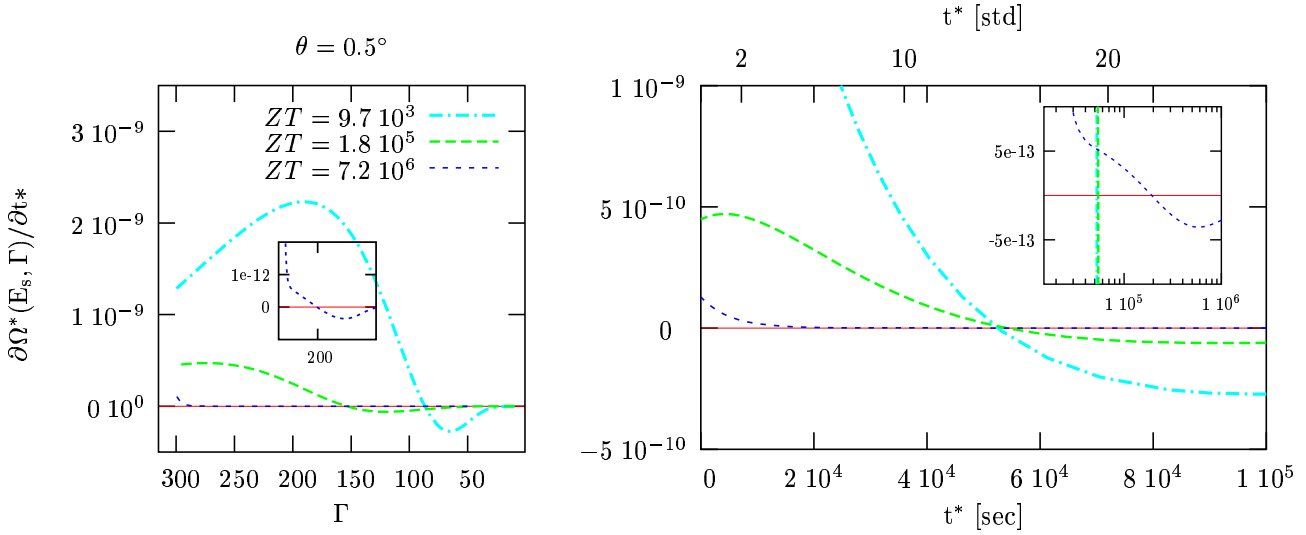


**Abbildung 4.6:** Vergleich der Intensitätsänderungen verschiedener Parameter  $ZT$  bei größeren Winkeln. Bedingt durch den Lorentzboost sind im Fall großer Winkel  $\theta$  die Variabilitäten wie erwartet für alle Parameter geringer. Im Gegensatz zu Systemen mit kleinem Aufsichtswinkel erreicht hier die Quelle mit dem geringsten Wert des Parameters  $ZT$  (also mit dem größten Dichteverhältnis  $n_i^*/n_b$ ) zuerst das Intensitätsmaximum.

$1/T_E \propto \sqrt{n_b}/n_i^*$  berücksichtigt werden muss. Orientiert man sich an den bisher betrachteten Beispielen und berücksichtigt Gl. (3.29), wird bei  $ZT \simeq 10^2$  das Verhältnis der Dichten  $n_i^*/n_b \simeq 10^{-7}$  sein, während bei  $ZT \simeq 10^7$  die Dichteverhältnisse eher im Bereich  $n_i^*/n_b \simeq 10^{-10}$  liegen.

Ein entscheidender Einfluss wird allerdings durch den Boostfaktor gegeben. Der Einfluss des Lorentzboost bei kleinem Winkel  $\theta$  wird anhand der Abbildung 4.5 illustriert, während in Abbildung 4.6 die Wirkung bei größeren Winkeln dargestellt wird. Bei großen Winkeln  $\theta$  steigen die Intensitäten für alle Parametersätze  $ZT$  über einen längeren Zeitraum als im Falle kleiner Aufsichtswinkel. Allerdings liegt die Intensitätsänderungen um Größenordnungen unterhalb derer sehr kleiner Winkel. In allen Abbildungen wird auf der linken Seite jeweils das Verhalten in Abhängigkeit zum Lorentzfaktor und auf der rechten Seite die Abhängigkeit zur Beobachterzeit gezeigt, wobei der Zusammenhang zwischen den beiden Größen durch Gl. (4.36) bestimmt ist.

Charakteristisch für den Funktionsverlauf ist ein anfängliches, von den Parametern bestimmtes Ansteigen der Intensitäten, gefolgt von einer Abnahme der Strahlung im weiteren Verlauf. Die Stelle der maximalen Intensität ist von den jeweiligen Parametern



**Abbildung 4.7:** In dieser Darstellung wurde ein intermediärer Winkel gewählt, um den Einfluss des Lorentzboost auf die Funktion  $\partial\Omega^*/\partial t^*$  zu illustrieren. Das System mit dem kleinsten Parameter  $ZT$  hat sein Intensitätsmaximum auch beim kleinsten Lorentzfaktor  $\Gamma$ , da die Zeitskala aber mit dem Lorentzboost skaliert, braucht dieses System dafür nicht länger als eins mit größerem  $ZT$ .

$ZT$  wie auch vom Aufsichtswinkel  $\theta$  abhängig. Anhand der Beispiele lässt sich feststellen, dass unter einem festen Winkel  $\theta$  die Änderungen am stärksten bei kleinen Parameterwerten  $ZT$  sind. Bei kleinen Winkeln ist der Maximalwert der Intensitätsänderung für kleine Werte  $ZT$  zu einem späteren Zeitpunkt zu beobachten. Bei großen Winkeln ist es im Gegensatz dazu so, dass die Abnahme der Intensität zuerst für Systeme mit kleinen Parameterwerten stattfindet.

Zusammenfassend lässt sich somit feststellen, dass unter der Voraussetzung konstanter Dichteverhältnisse schnelle und starke Änderungen nur bei großen Parametern  $ZT$  und dementsprechend kleinen Dichteverhältnissen  $n_i^*/n_b$ , sowie unter kleinen Aufsichtswinkeln  $\theta$  erreichbar sind. Die Auswirkungen einer nicht konstanten Dichtefunktion sollen im nächsten Kapitel untersucht werden.

# Weiterentwicklungen des ursprünglichen Modells

*In den vorherigen Kapiteln wurden analytische Ausdrücke für die mögliche Verteilungsfunktion der Protonen im Jet eines AGN sowie eine analytische Beschreibung der sich daraus ergebenden Produktionsraten hochenergetischer Photonen vorgestellt. Dabei wurde das Modell von Pohl & Schlickeiser (2000) benutzt, um die Verteilungsfunktion herzuleiten. In diesem Kapitel sollen nun Änderungen der Verteilungsfunktion untersucht werden, die sich durch die Berücksichtigung weiterer Aspekte ergeben.*

In den letzten Kapiteln wurde deutlich, dass allein die Verteilungsfunktion der relativistischen Teilchen verantwortlich ist für die Spektren hochenergetischer Strahlung. Berücksichtigt man weitere Gesichtspunkte, die zu einer Modifikation der Verteilungsfunktion führen, hat dies auch sukzessive Änderungen der Sekundärteilchenproduktion zu Folge. Wir betrachten deshalb in diesem Kapitel die Änderungen, die sich unter Annahme einer inhomogenen Dichtefunktion ergeben, sowie die Modifikationen, die sich durch die Berücksichtigung der Dispersionsrelation Gl. (2.18) für elektrostatische Wellen ergeben.

## Änderungen durch eine inhomogene Dichtefunktion

In den bisherigen Kapiteln haben wir angenommen, dass die Dichte  $n_1^*$  des interstellaren Mediums konstant ist. Nimmt man jedoch eine sich zeitlich verändernde äußere Dichte

(zum Beispiel durch Gaswolken) an, so ändert dies die Verteilung der relativistischen Teilchen, deren Quelle die interstellaren Protonen sind.

Erinnern wir uns an die letzten Kapitel und betrachten die Auswirkungen genauer: Der Ansatz einer sich zeitlich verändernden Dichte  $n_i^*(\Gamma(t))$  hat unter der Voraussetzung, dass der Strahl schwach ist, keine Auswirkung auf den reellen Anteil  $J(\omega_R)$  der Dispersionsrelation (vgl. Gl. (2.19)). Die Stärke der selbstangeregten Turbulenz  $Z(k)$  ist allerdings linear vom Dichteverhältnis abhängig, wie man anhand von Gl. (2.21) feststellen kann. Die Zeitskala der Isotropisierung wird von der Streulänge im Plasmoid bestimmt. Das Verhältnis von initialer zu selbstgenerierter Turbulenz geht zwar nur schwach in die Streulänge ein. Allerdings ist die Streulänge in direkter Weise von der äußeren Dichte abhängig. Es werden also immer noch (hauptsächlich rückwärts laufende) Alfvénwellen erzeugt, man muss allerdings berücksichtigen, dass

$$n_i^* > 1400/(d^2 \sqrt{n_b}) \quad (5.1)$$

erfüllt sein muss, um eine Isotropisierung der relativistischen Teilchen im Plasmoid zu gewährleisten.

Unter dieser Voraussetzung führt der Ansatz einer sich zeitlich verändernden Dichte  $n_i^*(\Gamma(t))$  zu einer zu Gleichung (3.21) analogen Formulierung der Differentialgleichung für die normierte Massenfunktion  $I(\Gamma)$  mit dem Unterschied, dass die bisherige Konstante  $T$  zeitabhängig wird und die Zeitabhängigkeit durch  $T(\Gamma) = (1/\tau + 1/T_E(\Gamma) + 1/T_N)/\lambda(\Gamma)$  gegeben ist.

Damit lautet aber die allgemeine Integraldarstellung der linearen Differentialgleichung (3.21):

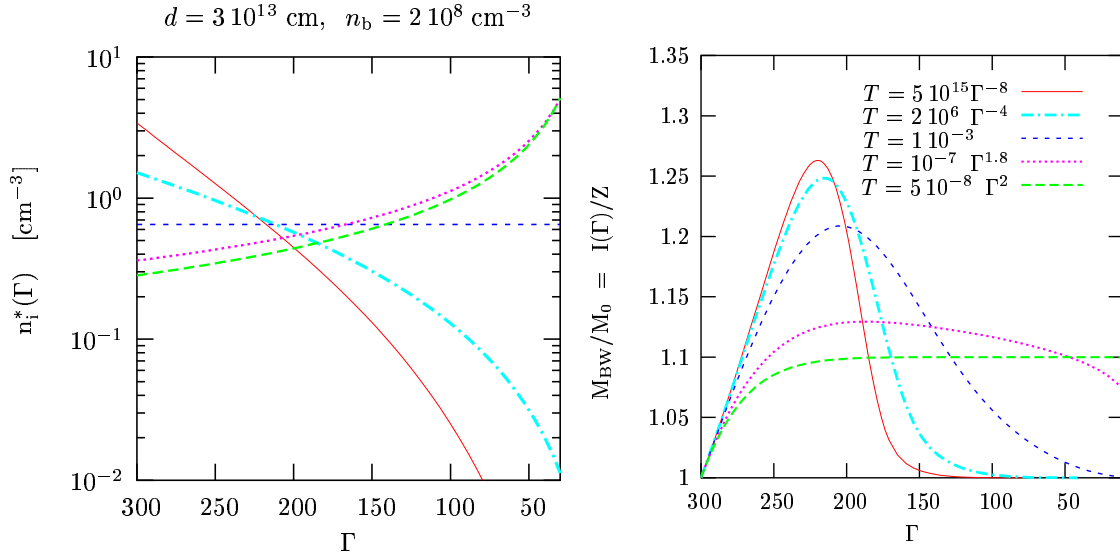
$$\frac{1}{I(\Gamma)} = - \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{T(s) \exp[f(\Gamma) - f(s)]}{(s^2 - 1)^{3/2}} ds + \exp[f(\Gamma) - f(\Gamma_0)]/Z, \quad (5.2)$$

die Gleichung (3.22) als Spezialfall konstanter Dichte enthält. Um die Funktion

$$f(\Gamma) = \int \left[ \Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1} + ZT(\Gamma) \right] / (\Gamma^2 - 1)^{3/2} d\Gamma \quad (5.3)$$

auszuwerten, muss die Zeitabhängigkeit der äußeren Dichte bekannt sein. Nimmt man zum Beispiel eine polynomiale Abhängigkeit für  $T(\Gamma) \sim \Gamma^k$  an, lässt sich die Funktion  $f(\Gamma)$  auswerten als:

$$f(\Gamma) = \frac{ZT \Gamma^{(k+1)}}{i(k+1)} {}_2F_1\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{(k+1)}{2}\right], \left[\frac{(k+3)}{2}\right], \Gamma^2\right) - \ln(1 - \Gamma^2)/2 \quad (5.4)$$



**Abbildung 5.1:** Darstellung der normierten Massenfunktion bei verschiedenen Annahmen für die Zeitabhängigkeit der äußeren Dichte  $n_i^*$ . Neben der Lösung mit konstanter Dichte ( $k = 0$ ) werden zwei Funktionsverläufe für die Masse bei steigenden Dichten ( $k = 1.8, k = 2$ ) sowie zwei Lösungen für kleiner werdende Dichten ( $k = -4, k = -8$ ) dargestellt.

wobei wir mit  ${}_2F_1([a, b], [c], z)$  die hypergeometrische Funktion bezeichnen.

Mit der künstlichen Festlegung eines angenommenen Funktionsverlaufes  $T(\Gamma)$  wird auch das Verhalten der Dichtefunktion  $n_i^*(\Gamma)$  festgelegt. Es ist natürlich auch umgekehrt möglich, die Variationen in der Dichtefunktion  $n_i^*(\Gamma)$  durch  $T(\Gamma)$  darzustellen. Der künstliche Weg über die Funktion  $T(\Gamma)$  hat lediglich den Vorteil, dass sich die Lösungen in geschlossener Form in den Rahmen der bisherigen Diskussion einfügen.

Durch die Abhängigkeit (3.29) mit einer Entweichzeit  $T_E(\Gamma)$ , die durch Gl. (2.41) bestimmt ist, lässt sich die äußere Dichte durch

$$n_i(\Gamma) = \frac{d}{2c T(\Gamma)} \left[ \kappa_n + \sqrt{\kappa_n^2 + 4c T(\Gamma)/(P d)} \right] \quad (5.5)$$

darstellen, wobei die Zeitskalen  $1/\tau + 1/T_N = \kappa_n$  und  $1.67 \cdot 10^{-19} d^2 \Gamma_0 / \sqrt{n_b} = P$  abgekürzt wurden.

In Abbildung 5.1 werden die Auswirkungen einer zeitabhängigen Dichtefunktion dargestellt. Die dort abgebildete Lösung für konstante Dichte entspricht physikalischen Parametern, die der vormals erhaltenen Lösung  $ZT \sim 1.8 \cdot 10^5$  gleicht. Bei kleiner werdender Dichte während der Abbremsung des Plasmoids erfolgt die Massenaufnahme nur

bei großen Lorentzfaktoren. Steigende Dichten haben eine längere Massenaufnahme zur Folge.

Da die Abbremsung des Plasmoids von der Masse abhängt, ergeben sich für alle diese und alle weiteren Formeln, in die die Massenfunktion eingeht, sukzessive die gleichen Änderungen. So behält für die charakteristischen Pfade nur noch die allgemeine Formel (3.46) ihre Gültigkeit, mit dem Unterschied, dass  $\lambda$  als vom Lorentzfaktor abhängige Funktion  $\lambda(\Gamma)$  eingeht. Da sich die Funktion  $t(\Gamma)$  im ganz allgemeinen Fall durch

$$t(\Gamma) = - \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{I(\tilde{\Gamma})}{\lambda(\tilde{\Gamma}) (\tilde{\Gamma}^2 - 1)^{3/2}} d\tilde{\Gamma} \quad (5.6)$$

bestimmen lässt, bleibt allerdings der Zusammenhang

$$\gamma(\Gamma) = \gamma_0 \exp[-t(\Gamma)/\tau] \quad (5.7)$$

gültig.

Für die Verteilung der Protonen selbst gilt weiterhin die Differentialgleichung (3.67), wobei die Massenfunktion in der Form (5.2) eingeht und  $\lambda$  und  $T$  zeitabhängig sind. Die Lösung lässt sich deshalb immer noch in der Form

$$n(\gamma, t) = \sum_i \frac{M_{\text{BW}}(\nu_i) \exp [A_n(\Gamma) - A_n(\nu_i) + 2/\tau (t - t_{\nu_i})] [\Theta(\Gamma_0 - \nu_i) - \Theta(\Gamma - \nu_i)]}{m_p V (\nu_i^2 - 1) |\gamma \exp([t - t_{\nu_i}]/\tau) M_{\text{BW}}(\nu_i) / [m_p V \lambda(\nu_i) \tau (\nu_i^2 - 1)^{3/2}] - 1|} \quad (5.8)$$

darstellen, wobei das Integral

$$A_n(\Gamma) = \int T(\Gamma) I(\Gamma)/(\Gamma^2 - 1)^{3/2} d\Gamma \quad (5.9)$$

seine Bedeutung durch die Abhängigkeit  $T = T(\Gamma)$  leicht verändert hat.

Ein sehr ähnliches Argument lässt sich auch für die Sekundärteilchenproduktion verwenden: Die Differentialgleichung für  $\Xi(\Gamma)$  gilt mit der veränderten Bedeutung von  $\lambda$ ,  $\kappa$  und  $T$  analog zu Gl. (4.18). Da

$$\kappa/\lambda = [1/T_E + 1/T_N]/\lambda = T - 1/(\lambda\tau), \quad (5.10)$$

lässt sich in diesem Fall das Analogon zu Gl. (4.24) schreiben als:

$$\Omega(E_s, \Gamma) = \exp [A_n(\Gamma) + t(\Gamma)/\tau] \left[ \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-Q(E_s, \tilde{\Gamma}) I(\tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1) \exp [A_n(\tilde{\Gamma}) + t(\tilde{\Gamma})/\tau]} d\tilde{\Gamma} \right]. \quad (5.11)$$

## Die elektrostatische Instabilität

Bisher wurden für die Berechnung der Verteilungsfunktion der Protonen nur die Konsequenzen der elektromagnetischen Instabilität berücksichtigt. Weitere Modifikationen ergeben sich, sobald man die Dispersionsrelation (2.18) für longitudinale Wellen mitberücksichtigt. Zunächst stellen wir hier die in Pohl et al. (2002) diskutierten Modifikationen vor, um danach die Auswirkungen auf die Teilchenverteilungsfunktion genauer zu untersuchen.

Die Dispersionsrelation (2.18) für longitudinale Wellen lässt sich auch in der Form

$$1 = \Omega^2 \left[ \frac{1}{\omega^2} + \frac{\delta}{(\omega + kV)^2} \right] = L \quad (5.12)$$

darstellen, wobei man die Abkürzungen  $\delta = n_i/(n_b \Gamma^3)$  und  $\Omega^2 = w_{p,p}^2 + w_{p,e}^2$  benutzt.

Wie schon von Buneman (1959) und Achatz (1990) diskutiert, sind immer mindestens zwei der vier Lösungen reell und zwar im Bereich  $\omega < 0$  und  $0 < \omega < kV$ . Komplex konjugierte Lösungen, die das Auftreten einer Instabilität kennzeichnen, erhält man unter der Bedingung, dass das Minimum der Funktion im Bereich  $0 < \omega < kV$  größer als Eins ist, wobei sich das Minimum  $\omega_{min}$  durch

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{min}} = -2\Omega^2 \left[ \frac{1}{\omega_{min}^3} + \frac{\delta}{(\omega_{min} + kV)^3} \right], \quad (5.13)$$

also als

$$\omega_{min} = -kV (\delta^{1/3} + 1)^{-1} \quad (5.14)$$

angeben lässt. Die Lage des Minimums lässt sich durch Einsetzen  $\omega_{min}$  in die Gleichung (5.12) bestimmen:

$$L_{min} = \Omega^2 / (V^2 k_{min}^2) (\delta^{1/3} + 1)^3 \quad (5.15)$$

Da Instabilitäten im Bereich  $L_{min} > 1$  auftreten, ist dieser bestimmt als:

$$k^2 \leq k_{min}^2 = \Omega(1 + \delta^{1/3})^3 / V^2 \quad (5.16)$$

Das Verhalten der Intensitäten wird durch Gl. (2.24) beschrieben. In diesem Fall, da wir es mit longitudinalen Wellen<sup>1</sup> zu tun haben, kann man die Fokker-Planck Gleichung in der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_{||}} \left[ D \frac{\partial f}{\partial p_{||}} \right] \quad (5.17)$$

---

<sup>1</sup>Diese wechselwirken nur mit dem elektrischen Feldvektor.

mit dem Fokker-Planck Diffusionskoeffizienten

$$D = 16\pi^2 e^2 \int_{k_{min}}^0 I(k)/|k|\delta(v_{||} - a_R)dk \quad (5.18)$$

benutzen.

Wie in Pohl et al. (2002) gezeigt wurde, ist die Wachstumsrate  $\psi$  am stärksten im Bereich nahe  $k_{min}$ , aber nahezu unabhängig von der Phasengeschwindigkeit  $a_R = \omega_R/k$ . Das Spektrum der Intensität bezogen auf die Phasengeschwindigkeit

$$I(a_R) = I(k)dk/da_R \quad (5.19)$$

kann daher als flach innerhalb des Bereiches von  $a_{max}$  (korrespondierend zu  $k = 0$ ) bis  $a_{min} = -V (\delta^{1/3} + 1)^{-1}$  und als Null außerhalb angenommen werden.

Ein solches Wellenspektrum verursacht eine plateau-artige Verteilung zwischen  $v_{||} = -V$  und  $v_{||} = a_{min}$ . Der Intensitätsanstieg geschieht sehr viel schneller als die Entspannung des Strahls, daher kann man das Intensitätenspektrum abschätzen als Verhältnis der Energie (die vom Strahl während der Relaxation verloren wird) zum Bereich der Phasengeschwindigkeit  $\Delta a_R \simeq \delta^{1/3} V$ , in dem das effektive Wachstum stattfindet.

Damit lässt sich das Spektrum abschätzen als:

$$I(a_R) \simeq \frac{\Delta E}{\Delta a_R} \simeq \frac{n_i m_p c^2 \Gamma^3}{2V}. \quad (5.20)$$

Den Diffusionskoeffizienten kann man mit diesem Spektrum berechnen als:

$$D(p_{||}) = 2\pi m_e m_p c^2 \Gamma^3 \Omega n_i / n_b, \quad (5.21)$$

wobei benutzt wurde, dass im Resonanzbereich  $k \simeq k_{min} \simeq -V/\Omega$  gilt.

Die Zeit, die der Strahl braucht, um zur Plateauverteilung zu gelangen, kann über

$$\tau \simeq P^2/D \simeq \frac{m_p n_b}{2\pi m_e n_i \Omega \Gamma} \simeq 5 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{n_b}}{\Gamma n_i} \quad (5.22)$$

abgeschätzt werden und liegt damit um zwei Größenordnungen unter der entsprechenden Abschätzung (2.40) für die elektromagnetische Instabilität. Der Strahl ist allerdings danach immer noch instabil im Hinblick auf die elektromagnetische Instabilität.



Die Konsequenz der elektrostatischen Instabilität ist eine Veränderung im Spektrum der aufgesammelten relativistischen Teilchen. So ergibt sich im Gegensatz zu Gl. (3.1) eine neue Quellrate:

$$\tilde{N}(\gamma) = \pi R^2 c n_i^* \Theta(\Gamma - \gamma) \sqrt{\Gamma^2 - 1} / (\Gamma - 1). \quad (5.23)$$

Diskutieren wir zuerst die Auswirkungen anhand der Ergebnisse des letzten Kapitels auf die Produktion von Sekundärteilchen. Stellt man die zu (4.10) analoge Gleichung auf:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial(Qn)}{\partial \Gamma} - \frac{Q}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} + Q n [1/T_E + 1/T_N] = Q \lambda \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(\Gamma - 1)} \Theta(\Gamma - \gamma), \quad (5.24)$$

sieht man, dass sich nach der Integration über  $\gamma$  in der Grenzen von  $1 \leq \gamma \leq \infty$  die Differentialgleichung in die im letzten Kapitel aufgestellte Gl. (4.15) übergeht, da die integrierte rechte Seite in beiden Fällen

$$\int_1^\infty N_0 \delta(\gamma - \Gamma) d\gamma = \int_1^\infty \frac{N_0}{(\Gamma - 1)} \Theta(\Gamma - \gamma) d\gamma = N_0 \Theta(\Gamma - 1) \quad (5.25)$$

identisch ist. Es wurde dabei ausgenutzt, dass die Stammfunktion der Heavisidefunktion  $\gamma \Theta(\Gamma - \gamma) + \Gamma \Theta(\gamma - \Gamma)$  ist und die Abkürzung  $\lambda \sqrt{\Gamma^2 - 1} = N_0$  benutzt. Somit gelten alle weiteren bei der Diskussion der Sekundärteilchen vorgestellten Ableitungen, wobei allerdings die normierte Massenfunktion  $I(\Gamma)$  von ihrer alten Form abweicht und sich dadurch die Lösungen von den bisher erhaltenen unterscheiden.

Bei der Ableitung der Massenfunktion, die analog zu der Berechnung der Masse in den vorherigen Kapiteln durchgeführt werden kann, ergeben sich folgende Änderungen:

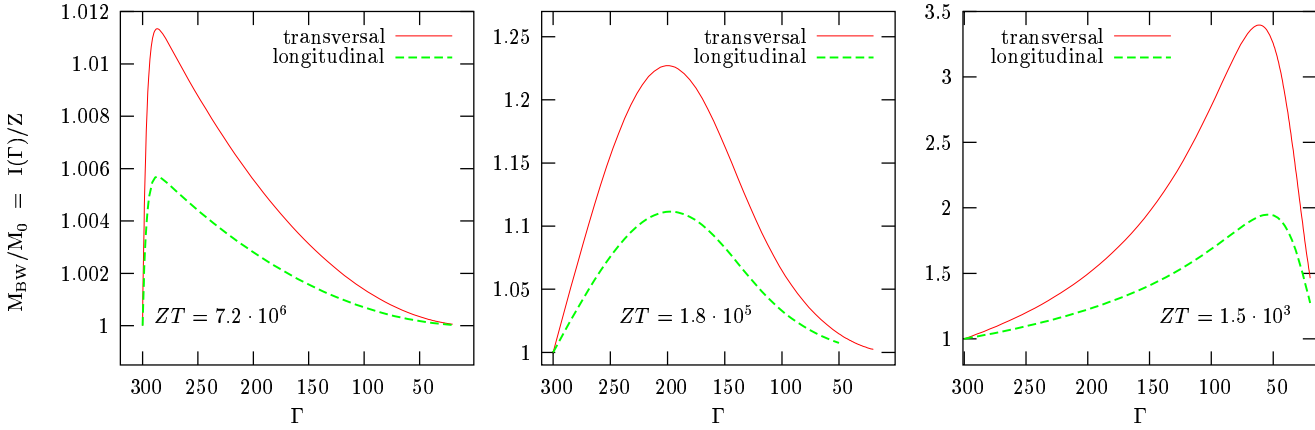
Benutzt man die Differentialgleichung (3.11) mit neuer rechter Seite:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial N}{\partial \Gamma} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma N)}{\partial \gamma} + N (1/T_E + 1/T_N) = \pi R^2 c n_i^* \sqrt{\Gamma^2 - 1} / (\Gamma - 1) \Theta(\Gamma - \gamma), \quad (5.26)$$

so erhält man bei der Integration über  $\gamma$  in der Grenzen von  $1 \leq \gamma \leq \infty$  :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial \int_1^\infty (\gamma n) d\gamma}{\partial \Gamma} - \frac{1}{\tau} \int_1^\infty \frac{\gamma \partial(\gamma n)}{\partial \gamma} d\gamma + \int_1^\infty \gamma n d\gamma (1/T_E + 1/T_N) = \lambda \frac{\sqrt{\Gamma + 1}}{\sqrt{\Gamma - 1}} \int_1^\infty \gamma \Theta(\Gamma - \gamma) d\gamma. \quad (5.27)$$

wobei man wie zuvor durch das Volumen  $V = \pi R^2 d$  geteilt, die Konstantenkombination  $c n_i^* / d$  mit  $\lambda$  abgekürzt und die gesamte Gleichung mit  $\gamma$  multipliziert hat. Die rechte



**Abbildung 5.2:** Die normierten Massenfunktion  $I(\Gamma)/Z$  für elektrostatische Wellen im Vergleich mit Resultaten für elektromagnetische Wellen. Bei jeweils gleichen physikalischen Parametern reduziert sich die Massenaufnahme auf die Hälfte. Die durch die jeweiligen Parameter bestimmte Funktionscharakteristik bleibt erhalten.

Seite lässt sich integrieren mit dem Ergebnis:

$$\int_1^{\infty} \gamma \Theta(\Gamma - \gamma) d\gamma = (\Gamma^2 - 1) \Theta(\Gamma - 1)/2, \quad (5.28)$$

da die Stammfunktion  $[\Theta(\gamma - \Gamma) (\Gamma^2 - \gamma^2) + \gamma^2]/2$  ist, wobei die Regel benutzt wurde, dass  $\Theta(x) = 1 - \Theta(-x)$  ist. Also ergibt sich insgesamt:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial \int_1^{\infty} (\gamma n) d\gamma}{\partial \Gamma} + \frac{1}{\tau} \int_1^{\infty} \gamma n d\gamma + \int_1^{\infty} \gamma n d\gamma (1/T_E + 1/T_N) = \frac{\lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{2 (\Gamma - 1)}. \quad (5.29)$$

Hier wurde die Heavisidefunktion unterdrückt, da  $\Gamma > 1$  immer erfüllt ist und somit  $\Theta = 1$  gilt. Unter Verwendung der üblichen Abkürzung  $1/\tau + 1/T_E + 1/T_N = H$  lässt sich die zu Gl. (3.18) analoge Differentialgleichung für die Funktion  $I(\Gamma) = n_b(1 + \epsilon) + \int \gamma n(\gamma, \Gamma) d\gamma$  in der Form

$$\frac{-\lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2} \partial I(\Gamma)}{I(\Gamma) \partial \Gamma} + I(\Gamma)H = \frac{\lambda (\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{2 (\Gamma - 1)} + n_b H (1 + \epsilon) \quad (5.30)$$

aufstellen. Das Einsetzen der Abbremsung  $\partial \Gamma / \partial t$  und die Auflösung der Gleichung nach  $\partial I(\Gamma) / \partial \Gamma$  ergibt:

$$\frac{\partial I(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{I(\Gamma)^2 T}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{(ZT) I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{I(\Gamma)}{2 (\Gamma - 1)}, \quad (5.31)$$

wobei wieder  $H/\lambda = T$  sowie  $n_b(1 + \epsilon) = Z$  verwendet wurde.

Die Gl. (3.21) entsprechende lineare Differentialgleichung für  $1/I(\Gamma)$  lässt sich dann darstellen als:

$$\frac{1}{I(\Gamma)} \frac{ZT + (\Gamma + 1)\sqrt{\Gamma^2 - 1}/2}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial \Gamma} \frac{1}{I(\Gamma)} = \frac{T}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}. \quad (5.32)$$

Mit Gl. (5.32) hat man unter Berücksichtigung der elektrostatischen Instabilität eine Differentialgleichung für die normierte Massenfunktion  $I(\Gamma)$  aufgestellt, die sich lediglich geringfügig im ersten Term durch

$$\frac{\Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \longrightarrow \frac{(\Gamma + 1)\sqrt{\Gamma^2 - 1}/2}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \quad (5.33)$$

von der entsprechenden Gleichung (3.21) unterscheidet. Solange der Lorentzfaktor  $\Gamma \gg 1$  besteht der Unterschied durch den Faktor  $1/2$ , was auch anhand von Abb. 5.2 zu verfolgen ist. Die Folge ist eine auf die Hälfte reduzierte Strahlungseffizienz unter Beibehaltung der funktionalen Charakteristiken, die durch die jeweiligen physikalischen Parameter bestimmt werden.

Da die Sekundärteilchenproduktion sich formal wie zuvor durch Gl. (4.24) beschreiben lässt, besteht bei Anregung durch longitudinale Wellen der Unterschied ausschließlich in der durch die Masse auf die Hälfte reduzierten Strahlungseffizienz, solange die Bedingung  $\Gamma \gg 1$  erfüllt ist. Alle zuvor durch die unterschiedlichen Massenfunktionen induzierten Charakteristiken der Lösungen bleiben auch unter Annahme einer elektrostatischen Instabilität erhalten.



# Vergleich mit beobachteten Spektren

*Bisher wurden die Spektren hochenergetischer Strahlung, die durch Zerfall neutraler Pionen in Blasar Jets entstehen, untersucht. Die entstehenden Quellphotonen sind allerdings nicht direkt der Beobachtung zugänglich, sie unterliegen auf ihrem Weg zum Beobachter Paarabsorption durch intergalaktische infrarote Strahlung, die zu einer Änderung der beobachteten Spektren führt. In diesem Kapitel wird zusätzlich die Modulation der Quellspektren durch Photonen des Hintergrunds berücksichtigt.*

Die Photonenspektren realer Quellen werden durch Stöße mit Hintergrundphotonen im Optischen und Infrarotbereich moduliert, während sie das intergalaktische Medium durchqueren. Die Kollisionen mit den niederenergetischen Photonen führen zur Paarproduktion  $\gamma + \gamma_{\text{H}} \rightarrow e^+ + e^-$  (Nikishov 1962, Jelley 1966, Gould & Schröder 1966). Die Ausdünnung der intrinsischen Spektren durch diesen Prozess muss also berücksichtigt werden, um die beobachtbaren Spektren zu reproduzieren.

## Ausdünnung durch den infraroten Hintergrund

Der kosmische infrarote Hintergrund (CIB) ist nach dem kosmischen Mikrowellenhintergrund (CMB) die dominierende Hintergrundstrahlung und schließt sich im Bereich von 1 bis 1000  $\mu\text{m}$  ( $1.24 \text{ eV} - 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ ) an letzteren an.

Die tatsächliche Absorption durch Hintergrundphotonen ist allerdings durch Messungen schwer zu bestimmen, da hier verschiedene Vordergrundeffekte wie Zodiakallicht, Streulicht heller Vordergrundquellen und Strahlung durch die Meßinstrumente vom tatsächlichen intergalaktischen infraroten Hintergrund zu unterscheiden sind. Der größte

Beitrag der Vordergrundquellen entsteht durch den interplanetaren Staub.

Seit der ersten Himmelsdurchmusterung im infraroten Bereich, die 1983 vom *Infrared Astronomical Satellite* (IRAS) durchgeführt wurde, existieren datenbezogene Hinweise auf eine Hintergrundkomponente. Obwohl IRAS zur Erkennung von diskreten Quellen konzipiert wurde, zeigten die Daten eine diffuse Komponente in großem Maßstab (Low et al. 1984). Satellitengestützte Meßdaten sind erst seit der *Cosmic Background Explorer* Mission (COBE) 1998 verfügbar. Diese sind allerdings mit weiterhin Unsicherheiten behaftet, so bestanden z.B. nur die 140  $\mu\text{m}$  und 240  $\mu\text{m}$  Daten den Isotropietest (Hauser & Dwek 2001).

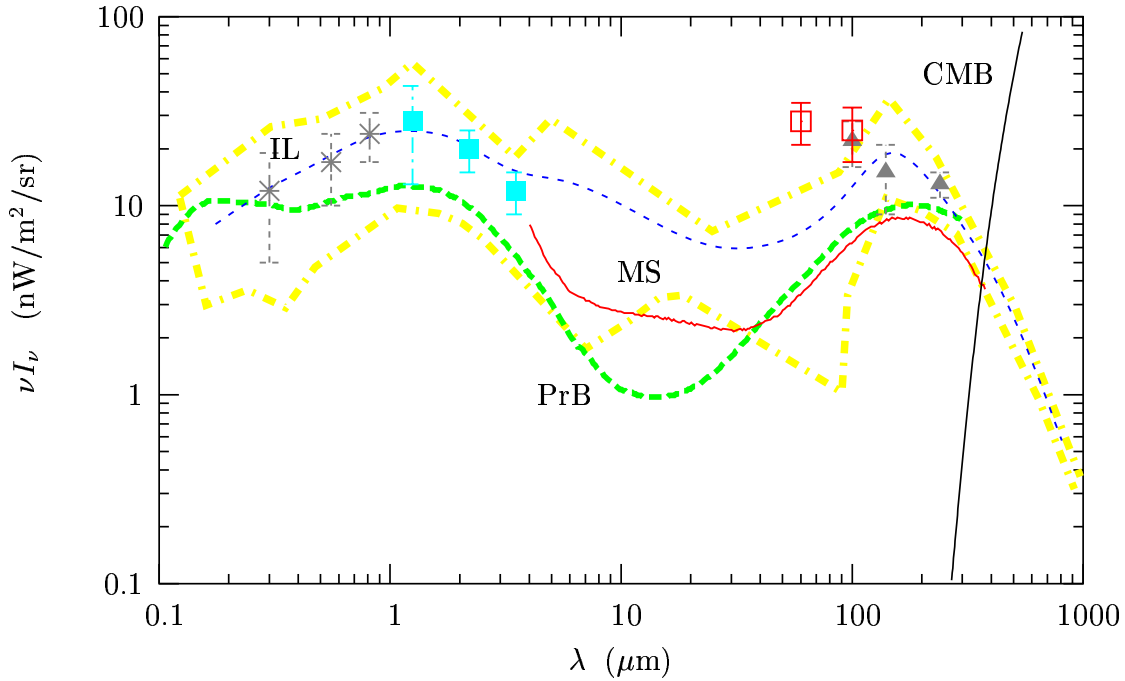
Da man den CIB mit Bildung der Objekte aus (primordialer) Materie assoziiert, erhält man aus Zählungen von Galaxien (*galaxy counts*) eine untere Grenze für die Hintergrundstrahlung (Puget et al. 1999, Matsuhara 2000).

Eine prinzipielle Möglichkeit obere Grenzen für den CIB zu bestimmen besteht darin, unter Verwendung *angenommener* intrinsischer Spektren von hochenergetischen Strahlungsquellen (z.B. Blasaren) den CIB zu modellieren (Stecker et al. 1992 (anhand von C3 279), Stecker & de Jager 1993, Biller et al. 1995 (beide mit Mkn 421)). Die dabei bestimmten Grenzen sollten allerdings im Rahmen dieser Untersuchung nicht benutzt werden, da Annahmen über das Quellspektrum eingehen, während hier das theoretisch berechnete intrinsische Spektrum benutzt wird.

Verschiedene Modelle zur Berechnung der Absorption sind in der Literatur diskutiert worden (für einen Überblick ist der Artikel von Hauser und Dwek (2001) zu empfehlen). Wir beschränken uns bei der folgenden Untersuchung exemplarisch auf zwei unterschiedliche Ansätze, deren Resultate in Abbildung 6.1 dargestellt sind.

Primack et al. (1999, 2001) präsentieren ein semi-analytisches Modell, in dem der intergalaktische Hintergrund durch Formation von Galaxien simuliert wird. Unter der Annahme einer *cold dark matter* (CDM) Kosmologie wird die hierarchische Strukturbildung bis zum heutigen Universum berücksichtigt, angefangen bei der durch Gravitation bedingten Bildung von Protogalaxien über die Bildung von Sternen bis hin zur Entwicklung der stellaren Population sowie Absorption als auch Re-emission des Sternenlichts durch Staub. Allerdings gehen auch hier viele unbekannte Faktoren ein, wobei u.a. die gewählte *initial mass function* (IMF) und die Effektivität der Umwandlung von kaltem Gas in Sterne sensitive Parameter darstellen.

Auf Basis eines empirischen Modells benutzen Malkan und Stecker (1998 (MS98),



**Abbildung 6.1:** Die spektrale Energieverteilung (SED) des infraroten Hintergrunds für verschiedene Modelle. Die mit „PrB“ gekennzeichnete Kurve (gestrichelt) bezieht sich auf das Modell von Primack et al. (1999, 2001), während die durchgezogene Linie (MS) das „backward evolution“ Modell von Malkan und Stecker (1998, 2001) illustriert. Hier wird beispielhaft der Fall  $Q=3$ ,  $z_{\text{flat}} = 2$  gezeigt. Die strichpunktierten Linien kennzeichnen den Bereich, der durch die derzeitigen messtechnischen Grenzen des Hintergrunds, wie sie in Hauser & Dwek (2001) diskutiert werden, festgelegt ist. Die mit „IL“ benannte Kurve (dünn gestrichelt) besteht aus willkürlich gewählten intermediären Werten innerhalb dieser Grenzen. Die hier ausgewählten Daten (alle mit  $1\sigma$  Fehlergrenzen) stammen von: (*Stern*) Bernstein (1999), (*Quadrat, gefüllt*) Wright & Reese (2000), Wright (2001), (*Dreieck*) Hauser (1998) (*Quadrat, offen*) Finkbeiner et al. (2000). Die schwarze Linie bezeichnet den Mikrowellenhintergrund (CMB). Die Abbildung wurde adaptiert aus Hauser & Dwek (2001).

2001(MS01)) IRAS-Daten zur Bestimmung einer Luminositätsfunktion (LF) von Galaxien. Die Berechnung des diffusen infraroten Hintergrunds erfolgt im wesentlichen durch eine Integration der galaktischen LF über die Rotverschiebung  $z$ . Dabei wird angenommen, dass die systematische Abhängigkeit<sup>1</sup> der Infrarotspektren der Galaxien von der

<sup>1</sup>MS benutzen die Ergebnisse von Spinoglio (1995) um anhand der Beziehung zwischen der bolometrischen Luminosität und den Luminositäten bei einzelnen Wellenlängen (z.B.  $60 \mu\text{m}$ ) die spektrale Form der Galaxien als Funktion ihrer Luminositäten bei diesen Wellenlängen zu definieren.

Luminosität auch für frühere Zeiträume gültig ist. Die LF-Daten für Galaxien mit kleiner Rotverschiebung werden extrapoliert bis zur Rotverschiebung der initialen Galaxienformation. Dabei wird eine Entwicklung der Form  $L(z) = L_0(1+z)^Q$  angenommen, wobei in MS98 zwei Fälle vorgestellt werden, die sich dadurch unterscheiden, dass die Entwicklung entweder bis  $z_{\text{flat}} = 1$  oder bis  $z_{\text{flat}} = 2$  berücksichtigt wird. In MS01 wird auf das Ergebnis mit dem Evolutionsindex  $Q = 3.1$  und  $z_{\text{flat}} = 2$  als „baseline-model“ bezogen, während das Resultat für  $z_{\text{flat}} = 1$  bei  $Q = 3.1$  die Bezeichnung „lower limit model“ trägt. Zusätzlich wird noch das sogenannte „fast forward model“ vorgestellt, das sich dadurch unterscheidet, dass das der Evolutionsindex auf  $Q = 4.1$  gesetzt und die Entwicklung bis  $z_{\text{flat}} = 1.3$  berücksichtigt wird.

Zusätzlich zu diesen Resultaten wird beispielhaft eine „willkürliche“ Energieverteilung für das Hintergrundspektrum benutzt, die lediglich der Anforderung genügt, innerhalb der heute durch Meßdaten gegebenen Grenzen für den infraroten Hintergrund zu liegen.

Die Energieschwelle für Paarproduktion durch Kollision eines hochenergetische Photons mit der Energie  $E$  mit einem niederenergetischen Photon der Energie  $\epsilon$  liegt bei

$$E\epsilon > (m_e c^2)^2. \quad (6.1)$$

Solange der Betrag des intergalaktischen magnetischen Feldes  $B$  nicht kleiner ist als  $10^{-16}$  G kann die Bildung von Photonen durch Sekundärelektronen und Positronen (über inverse Comptonstreuung am Mikrowellenhintergrund) vernachlässigt werden (vgl. Guy et al. 2000) und der im Detektor beobachtbare Fluss lässt sich darstellen als:

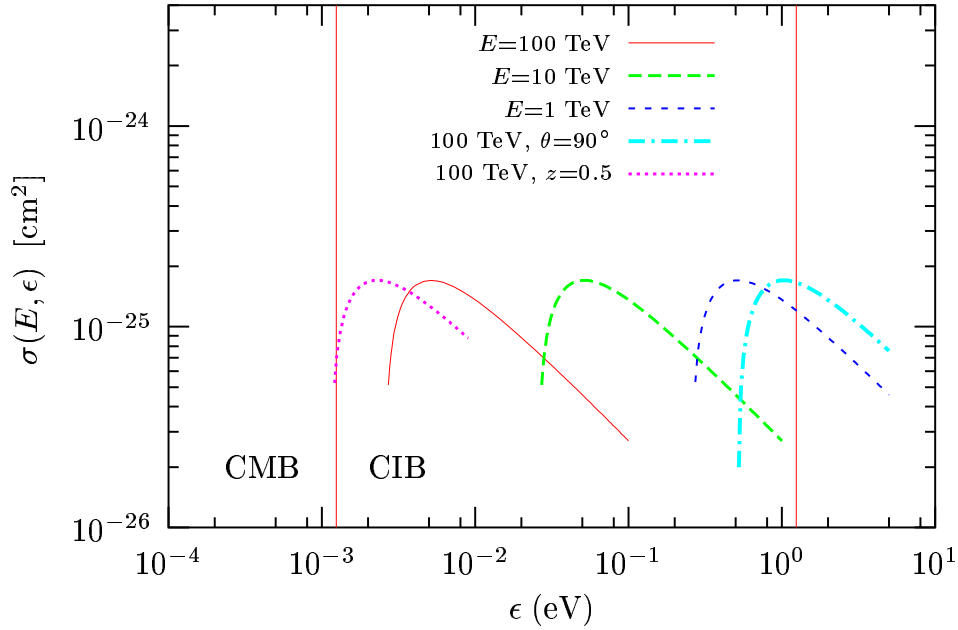
$$J_{\text{obs}}(E) = J_0(E) \exp[-\tau(E)], \quad (6.2)$$

wobei  $J_0(E)$  den intrinsischen Fluss der Quelle bezeichnet. Zur weiteren Berechnung soll dem Ansatz von Stecker und de Jager (1993) gefolgt werden, nach dem sich die optische Tiefe  $\tau(E)$  darstellen lässt als:

$$\tau(E) = c/H \int_0^{z_q} (1+z)^{1/2} \int_0^2 x/2 \int_{\epsilon_1}^{\infty} n(\epsilon) \sigma(E, \epsilon, x, z) d\epsilon dx dz, \quad (6.3)$$

wobei die untere Integralgrenze als  $\epsilon_1 = 2m^2 c^4 / [Ex(1+z)^2]$  abgekürzt wurde,  $z$  die Rotverschiebung,  $n(\epsilon)$  das Spektrum der Hintergrundphotonen sowie  $\sigma(E, \epsilon, x, z)$  den Wechselwirkungsquerschnitt kennzeichnet und  $x = (1 - \cos\theta)$  mit  $\theta$  als Photonenzwischenwinkel benutzt wird. Auch in diesem Kapitel wird für alle folgenden Berechnungen die Hubblekonstante mit einem Wert von  $H = 75$  km/(s Mpc) angenommen.





**Abbildung 6.2:** Bereiche maximaler Absorption für verschieden hochenergetische Photonen für  $z = 0$  und  $\theta = 180^\circ$ . Zusätzlich werden zwei weitere Beispiele für Quellphotonen mit 100 TeV abgebildet, wobei in einem der Beispiele der Photonenzwischenwinkel  $\theta$  für  $90^\circ$  benutzt, sowie in dem zweiten Beispiel mit einer Rotverschiebung von  $z = 0.5$  gerechnet wurde. Für Quellphotonen im TeV-Bereich liegt das Absorptionsmaximum im infraroten Bereich.

Die Energieschwelle für die Paarerzeugung durch ein hochenergetisches Photon der Energie  $E(1+z)$  mit einem niederenergetischen Photon der Energie  $\epsilon(1+z)$  liegt entsprechend bei

$$E\epsilon(1+z)^2x > 2(m_e c^2)^2. \quad (6.4)$$

Der Wirkungsquerschnitt der Reaktion kann durch

$$\sigma(E, \epsilon, x, z) = \frac{1}{2}\pi r_0^2 (1 - \beta^2) \times \left[ 2\beta(\beta^2 - 2) + (3 - \beta^4) \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \right] \text{ cm}^2 \quad (6.5)$$

beschrieben werden, wobei  $r_0 = e^2/(m_e c^2) = 2.8 \cdot 10^{-13}$  cm den klassischen Elektronenradius bezeichnet und für die Geschwindigkeit des Elektrons (Positrons) in seinem Schwerpunktsystem

$$\beta = \sqrt{1 - 2(m_e c^2)^2/[E\epsilon x(1+z)^2]} \quad (6.6)$$

gilt. Die Abbildung 6.2 zeigt die Bereiche maximaler Absorption für verschieden hochenergetische Photonen. Leicht zu sehen ist, dass Photonen mit 1 TeV Energie oder größer

ihr Absorptionsmaximum im infraroten Bereich ( $1 - 1000\mu\text{m}$ ) haben. Auch sieht man, dass der „cut-off“ durch den CMB nicht unter 100 TeV Quellphotonenenergie liegt.

Benutzt man für das Hintergrundphotonenspektrum, gegeben durch die spektrale Anzahldichte der Photonen  $n(\epsilon)$ , den Ansatz  $n(\epsilon) = k \epsilon^\alpha$ , führt dies zusammen mit der Substitution

$$s = 1/(1 - \beta^2) = E\epsilon x(1 + z)^2/(2(m_e c^2)^2) \quad (6.7)$$

in Gleichung (6.3) auf

$$\begin{aligned} \tau(E) = & \frac{k \pi e^2 (m_e c^2)^{2\alpha+1} c}{2 E^{\alpha+1} H(-\alpha + 1)} \frac{(1 + z)^{[2\alpha+1/2]} - 1}{(1 + z)^{[2\alpha+1/2]} (4\alpha + 1)} \\ & \times \int_1^\infty s^{\alpha-1} \left[ 2\sqrt{1 - \frac{1}{s}} \left( -1 - \frac{1}{s} \right) + \left( 3 - \left( 1 - \frac{1}{s} \right)^2 \right) \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 1/s}}{1 - \sqrt{1 - 1/s}} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (6.8)$$

(vergleiche auch Stecker & de Jager 1993).

Die Konversion der spektralen Energieverteilungen (SEDs) der Abbildung 6.1 in die Energiedichte  $\epsilon^2 n(\epsilon)$  erfolgt unter Benutzung der Beziehung  $E = h\nu$  durch:

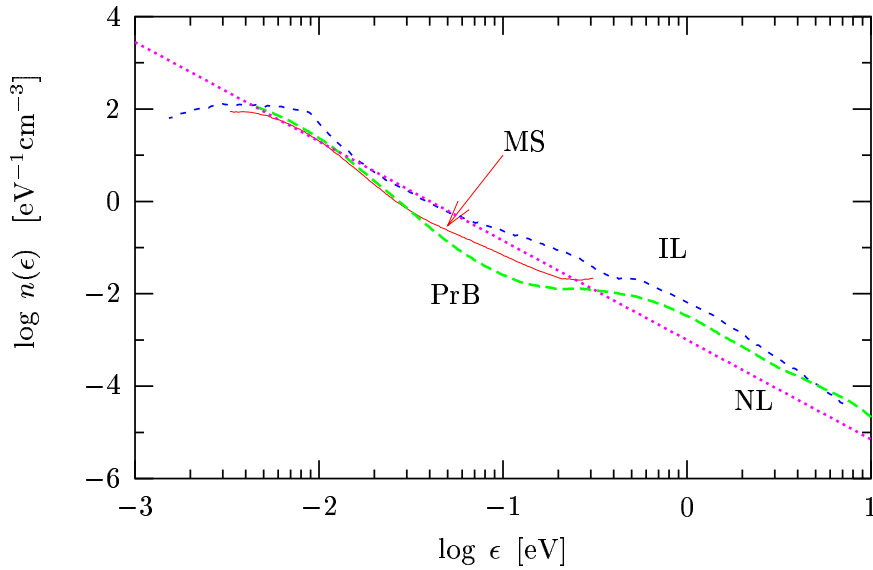
$$\epsilon^2 n(\epsilon) \text{ [eV/cm}^3] = 2.62 \cdot 10^{-4} \nu I_\nu \text{ [nW/m}^2/\text{sr]} \quad (6.9)$$

wobei  $I_\nu$  die spektrale Intensität (bezogen auf die Frequenz) bezeichnet und die Photonenenergie  $\epsilon$  in eV angegeben wird.

Für die verschiedenen in Abb. 6.1 vorgestellten Modelle ergeben sich damit spektrale Anzahldichten, die in Abb. 6.3 dargestellt werden. Zusätzlich ist hier eine Näherungsgrade, wie sie zur Lösung der Gl. (6.8) benutzt wird, angegeben. Die resultierenden optischen Tiefen  $\tau(E)$  werden für verschiedene Rotverschiebungen  $z$  in Abb. 6.4 dargestellt.

Im nächsten Schritt benutzen wir Gl. (6.2), um die beobachtbare Verteilung  $J_{\text{obs}}$ , die sich unter Benutzung des in dieser Arbeit diskutierten Modells ergibt, zu berechnen, wobei sich der intrinsische Fluss durch Gl. (4.29) darstellen lässt.

In Abb. 6.5 werden beobachtbare Photonenflüsse, die sich unter verschiedenen Annahmen für die Rotverschiebung ergeben, dargestellt. In den beiden oberen Abbildungen wird der Photonenfluss bei einer Rotverschiebung von  $z = 0.031$  gezeigt, während in den unteren Bildern exemplarisch die resultierenden Flüsse bei  $z = 0.3$  dargestellt sind. Wir benutzen für das gezeigte Beispiel einen Wert für die innere Dichte des Jets  $n_b = 5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$  und eine angenommene äußere Dichte  $n_i^* = 0.2 \text{ cm}^{-3}$ , sowie eine Scheibendicke von  $d = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}$ . Das entspricht nach Gl. (3.29) einem Wert des Parameters



**Abbildung 6.3:** Die spektralen Energiedichten  $n(\epsilon)$  der zuvor vorgestellten Modelle. Zusätzlich wird eine Näherungslösung, die sich für die analytische Darstellung (6.8) eignet, in der mit „NL“ bezeichneten Gerade  $n(\epsilon) = 10^{-3}\epsilon^{-2.15}$  dargestellt.

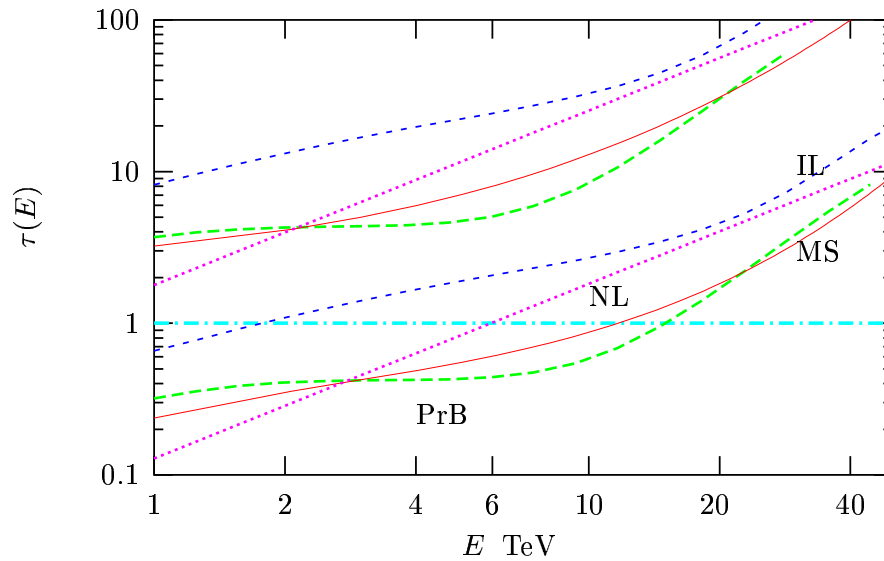
$ZT \sim 7 \cdot 10^6$ . Der Sichtwinkel zu Quelle wird erneut als  $\theta_{\text{obs}} = 0.1^\circ$  gewählt, um eine Vergleichbarkeit mit Abb. 4.4 zu ermöglichen. In den linken Bildern ist jeweils der resultierende Fluss nach 10 Stunden, in den beiden rechten Abbildungen nach 100 Stunden dargestellt.

Die mit JS und SJ gekennzeichneten Kurven beziehen sich auf die Ergebnisse von Stecker und de Jager (1998), de Jager und Stecker (2002), die zusätzlich parametrische Darstellungen der optischen Tiefe angeben, die auf dem Modell von Malkan und Stecker basieren. Die Kurve JS bezieht sich dabei auf das „fast forward model“.

Im nächsten Abschnitt werden die bisher erhaltenen Ergebnisse mit Daten aus Blasar-Quellen verglichen.

## Spektren und Lichtkurven verschiedener Blasare

Unter Berücksichtigung der zuvor vorgestellten Modelle für die Ausdünnung durch den infraroten Hintergrund lassen sich die beobachteten Spektren und Lichtkurven mit dem hier vorgestellten Modell für den Jet eines AGN berechnen und mit vorliegendem Da-

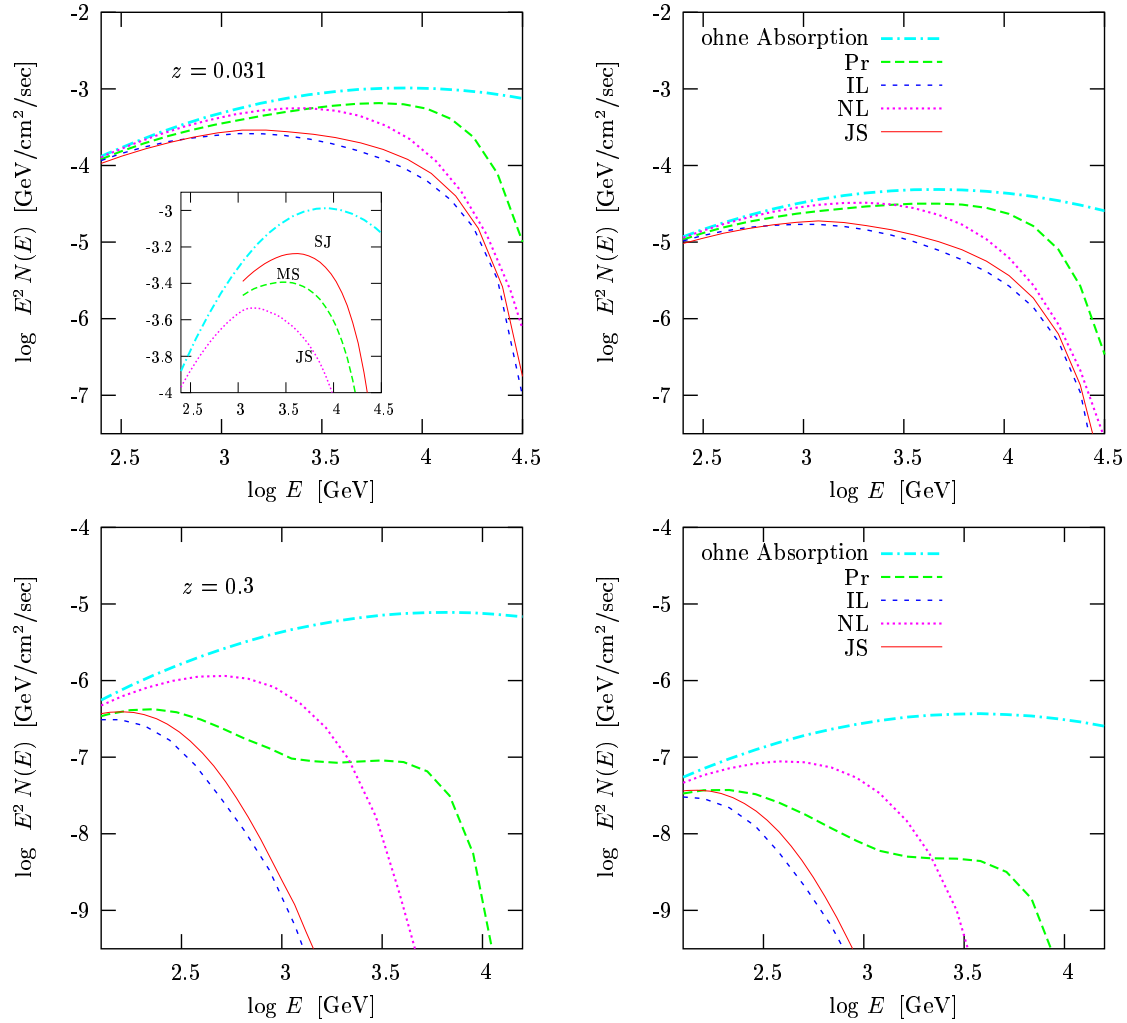


**Abbildung 6.4:** Darstellung der optischen Tiefe  $\tau$  für die zuvor diskutierten Modelle einschließlich des analytischen Ergebnisses (6.8) durch die mit „NL“ bezeichnete Gerade. Die unteren vier Graphen stellen die optischen Tiefen für eine Rotverschiebung von  $z = 0.031$  (wie sie von Makarian 421 erreicht wird) dar, während sich die oberen Ergebnisse auf eine Rotverschiebung  $z = 0.3$  beziehen.

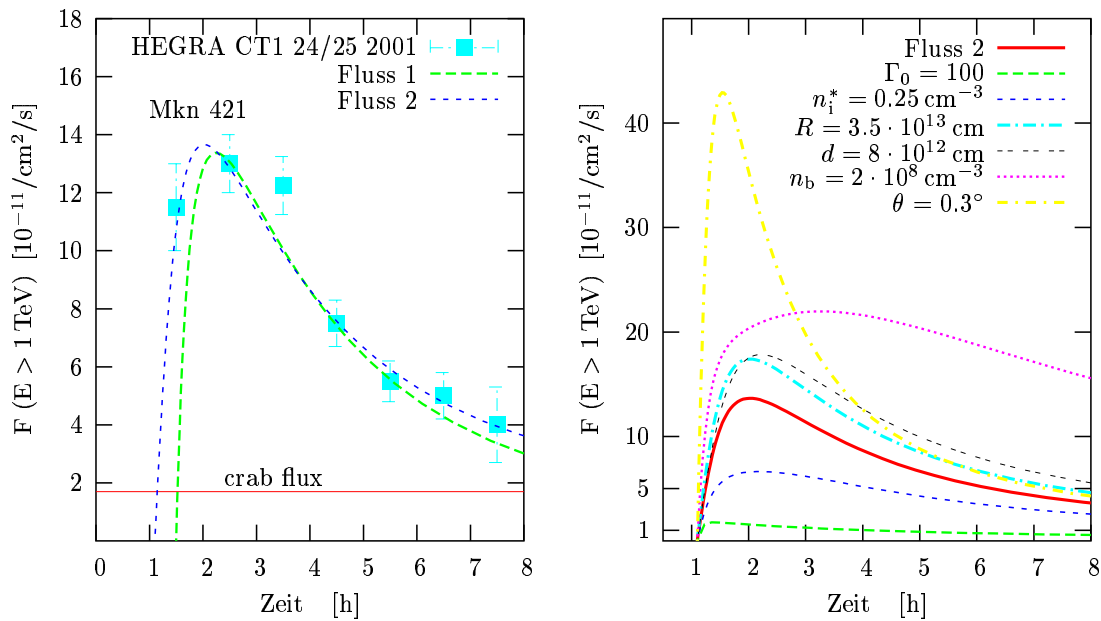
tenmaterial verschiedener Quellen vergleichen. In dem folgenden Abschnitt diskutieren wir ausschließlich Blasare, die sich typischerweise durch ein flaches Radiospektrum, hohe Variabilität (sowohl im Optischen, wie auch im Radiobereich), sowie hohe Luminosität im Hochenergiebereich kennzeichnen lassen.

Wie schon in Pohl & Schlickeiser (2000) ausführlich diskutiert wurde, erscheint das Plasmasystem durch die hier angenommene scheibenartige Geometrie in Richtung der Schockwellenebene optisch dick, quer zur Scheibe allerdings ist die optische Tiefe der Quelle klein. Aufgrund der hohen Lorentzfaktoren, die das Modell annimmt, genügen schon geringe Photonendichten um eine Ausdünnung durch Photonenpaarproduktion innerhalb der Quelle zu kompensieren. Sind Messdaten zeitintegrierte Daten, so ist bei einem Vergleich mit den Messungen zu berücksichtigen, dass sich im Verlauf der Messung der Dopplereffekt geändert haben wird. Allerdings ist oft in der Literatur nur die Gesamtzeit der Messperiode angegeben.

Zwei der am meisten beobachteten Quellen sind Markarian 421 (Mkn421) und Markarian 501 (Mkn501), da sie die kleinsten Rotverschiebungen (also somit die geringste Ent-



**Abbildung 6.5:** Ein Beispiel für den beobachtbaren Fluss nach 10 Stunden (jeweils linke Abbildung) und 100 Stunden (rechte Abbildungen) bei verschiedenen Modellen für die Absorption. In den beiden oberen Abbildungen wird der resultierende Photonfluss bei einer Rotverschiebung  $z = 0.031$  gezeigt, während auf den unteren Bildern die Resultate für  $z = 0.3$  illustriert sind. Erwartungsgemäß setzt die Absorption im TeV-Bereich ein, während im GeV-Bereich sind die Spektren nahezu (unabhängig vom jeweiligen Absorptionsmodell) unbeeinflusst sind. Die dargestellten Ergebnisse beziehen sich auf die zuvor vorgestellten Absorptionsmodelle: Primack et. al. (1999)(Pr), de Jager und Stecker (2002), fast forward model (JS), datengestützte Kurve (IL) sowie das Ergebnis der Gleichung (6.8) bei  $k = 10^{-3}$  und  $\alpha = -2.15$  (NL). In dem kleineren Bildausschnitt sind die zusätzlich zu der mit JS gekennzeichnete Kurve Ergebnisse mit den parametrischen Darstellungen aus Stecker und de Jager (1998) dargestellt, wobei die mit SJ gekennzeichneten Kurve sich auf  $z_{\text{flat}} = 1$  bezieht, während das Ergebnis (MS) die Absorption bei einer Entwicklung bis  $z_{\text{flat}} = 2$  darstellt.



**Abbildung 6.6:** Die Lichtkurve eines Ausbruchs vom 24. Februar 2001, beobachtet mit dem HEGRA CT1 Detektor (Aharonian et al. 2003b) lässt sich mit verschiedenen Parametern des Modells reproduzieren (linke Abbildung). Zwei beispielhafte Datensätze, deren Parameterwerte im Text angegeben sind, wurden hier benutzt, um die theoretischen Lichtkurven zu modellieren. Der Einfluss auf eine solche Lichtkurve durch Änderungen der Parameterwerte ist in der rechten Abb. zu sehen.

fernung zum Beobachter) aufweisen. Mkn 421 ist mit einer Rotverschiebung  $z = 0.031$  der Blasar, der uns am nächsten liegt. Diese Quelle war der erste bestätigte TeV-Blasar (Punch et al. 1992). Ihr durchschnittlicher Fluss liegt bei 30 bis 50 Prozent des Krebs-Nebels. Das BL Lac Objekt ist bisher die Quelle mit den schnellsten beobachteten Fluss-Variationen. Eine Flussverdoppelung innerhalb von 15 Minuten ist (z.B. während eines Ausbruchs („flares“) am 15.Mai 1996) beobachtet worden (Aharonian 1999b).

Ein Vergleich der Spektren und Lichtkurven von Mkn 421 mit Daten wird anhand der folgenden Abbildungen 6.6 und 6.7 diskutiert, wobei für den Vergleich Daten aus Aharonian et al. (2003b) benutzt wurden.

Die linke Seite der Abb. 6.6 zeigt die Lichtkurve eines Ausbruchs, der in der Nacht vom 24. auf den 25. Februar 2001 mit dem CT1 des HEGRA Detektors beobachtet wurde (Aharonian et al. 2003b). Berücksichtigt wird dabei der gesamte Fluss bei Energien, die größer sind als 1 TeV.

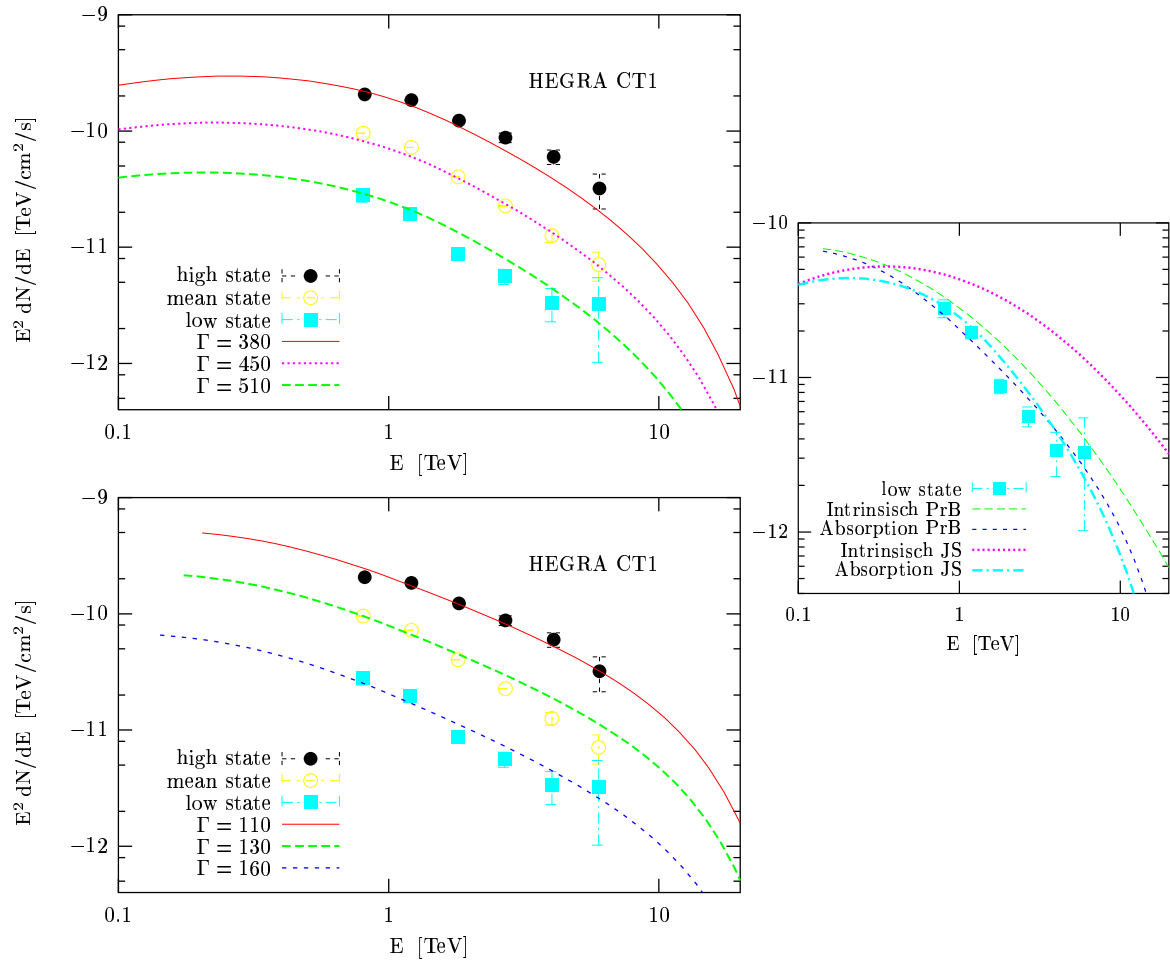
Zusätzlich zu dem beobachteten integralen Fluss sind zwei verschiedene, anhand des in dieser Arbeit untersuchten Modells berechnete, theoretische Lichtkurven zu sehen. Die Werte der physikalischen Parameter wurden dabei willkürlich ausgewählt, um zu demonstrieren, wie die verschiedenen Änderungen die Lösung beeinflussen.

Die gewählten Parameter für das erste Spektrum sind als Wert des Radius  $R = 10^{12}$  cm, der Scheibendicke  $d = 1 \cdot 10^{13}$  cm, der internen Dichte  $n_b = 1 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$  sowie der externe Dichte  $n_i^* = 0.6 \text{ cm}^{-3}$  benutzt worden. Das Beispiel wurde mit einem Aufsichtswinkel  $\theta = 0.1^\circ$  modelliert. Als Startbedingung wurde  $\Gamma_0 = 300$  angenommen. Die zweite Kurve, die auf eine ähnliche Lichtkurve führt, wurde mit den Parameterwerten  $R = 3 \cdot 10^{13}$  cm für den Radius, einer Scheibendicke  $d = 7 \cdot 10^{12}$  cm, einer internen Dichte  $n_b = 7 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$  und einer externen Dichte  $n_i^* = 0.36 \text{ cm}^{-3}$  modelliert. Als Startbedingung wurde auch hier  $\Gamma_0 = 300$  angenommen. Der Aufsichtswinkel beträgt in diesem Beispiel dagegen  $\theta = 0.4^\circ$ . Da es sich um relativ nahe Quellen handelt, wurden beide Kurven ohne eine zusätzliche Berücksichtigung der Ausdünnung durch den infraroten Hintergrund berechnet.

Anhand dieser Resultate sieht man sehr deutlich, dass sich aufgrund der Anzahl der in dem Modell relevanten Parameter keine eindeutigen Ergebnisse erzielen lassen, solange der Bereich einzelner Parameter nicht durch (weitere) Beobachtungen eingeschränkt werden kann. Die rechte Seite der Abb. 6.6 zeigt den Einfluss der einzelnen Parameter auf die resultierende Lichtkurve. Dabei sind alle Parameter, bis auf den jeweilig angegebenen, mit denen der zweiten modellierten Kurve identisch. Auch hier wird deutlich, dass der Aufsichtswinkel sowie der Dopplerfaktor in entscheidendem Maße das Ergebnis beeinflussen.

Die Energiespektren auf verschiedenen Flussniveaus (gemessen mit dem CT1 des HEGRA Detektors) sind ebenso in Aharonian et al. (2003b) dargestellt. Anhand von Abb. 6.7 lässt sich gut erkennen, dass die beobachteten Spektren sich auch unter Annahme der verschiedenen Absorptionsmodelle reproduzieren lassen. Dazu wurden die Modellspektren beispielhaft mit folgenden physikalischen Parametern berechnet: Im oberen Beispiel (PrB) wurden zur Berechnung für den Radius  $R = 2 \cdot 10^{15}$  cm, für die Scheibendicke  $d = 5 \cdot 10^{13}$  cm, für die interne Dichte  $n_b = 1 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$  sowie für die konstante externe Dichte  $n_i^* = 1.5 \text{ cm}^{-3}$  willkürlich gewählt. Der Aufsichtswinkel beträgt in diesem Beispiel  $\theta = 3^\circ$  und als Startbedingung wurde wieder  $\Gamma_0 = 300$  angenommen.

Im zweiten Beispiel (JS) wurde für den Radius  $R = 3 \cdot 10^{15}$  cm benutzt, für die Scheibendicke wurde  $d = 6 \cdot 10^{12}$  cm angenommen. Die interne und externe Dichte wurde

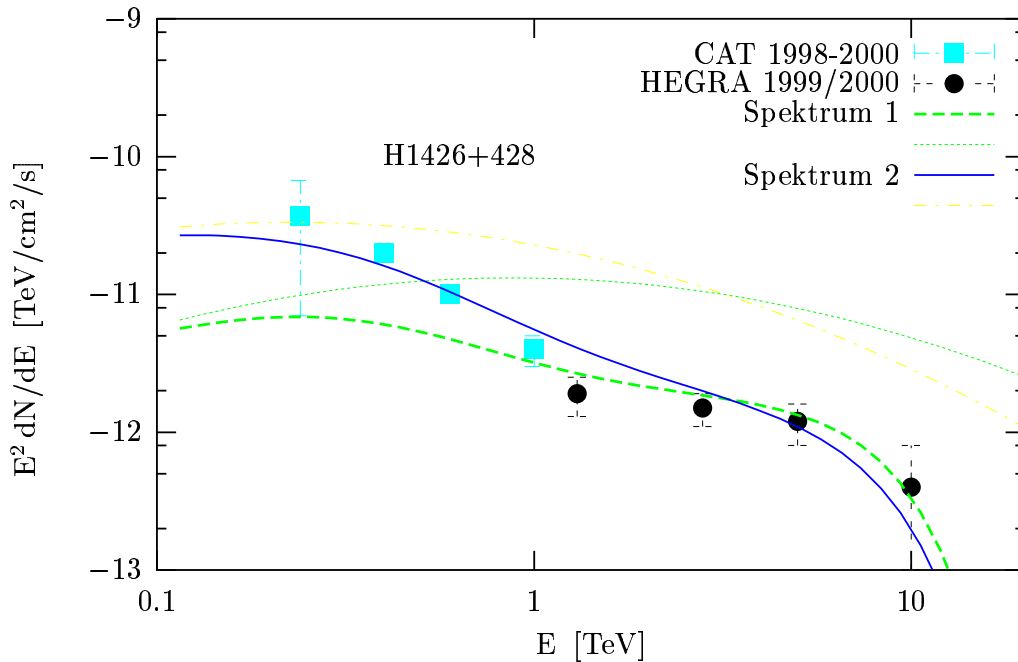


**Abbildung 6.7:** Die Energiespektren von Mkn 421 von 2000/01 (Aharonian et al. 2003b) lassen sich mit unterschiedlichen Absorptionsmodellen reproduzieren. Zur Berechnung wurden hier Werte für die physikalischen Parameter angenommen, die im Text beschrieben sind. In der oberen Abb. sind Spektren dargestellt, die das Resultat unter Benutzung des zuvor diskutierten Absorptionsmodells von Primack et al. (1999) sind. In der unteren Abb. sieht man Ergebnisse, die mit Hilfe des Modells de Jager und Stecker (2002) produziert wurden. Die Unterschiede der intrinsischen Spektren werden in der rechten Abb. zusätzlich dargestellt.

als  $n_b = 5 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$  bzw.  $n_i^* = 0.2 \text{ cm}^{-3}$  modelliert. Der Aufsichtswinkel beträgt in diesem Beispiel dagegen  $\theta = 3^\circ$ . Die Startbedingung ist in diesem Fall  $\Gamma_0 = 600$ . Die unterschiedlichen Spektren wurden hier unter Beibehaltung aller gegebenen Parameter bei verschiedenen momentanen Lorentzfaktoren berechnet.

Das in Aharonian et al. (2002) diskutierte spektrale „hardening“ (die Änderung der spektralen Form bei höherem Flussniveau), dass sich (nicht in allen) beobachteten Daten erkennen lässt, kann evtl. innerhalb des Modells dadurch erreicht werden, dass Pa-





**Abbildung 6.8:** Das Energiespektrum der Quelle H1426 lässt sich unter Berücksichtigung des Absorptionsmodells von Primack et al. (2001) reproduzieren. Hier werden zwei Modellspektren gezeigt, die von verschiedenen Parametersätzen herrühren. Zusätzlich werden die intrinsischen Quellspektren, die unter Annahme des jeweiligen Parametersatzes resultieren, dargestellt.

rametervariationen (wie z.B. Änderungen der externen Dichte) zusätzlich berücksichtigt werden.

Das BL-Lac Objekt H1426+428 wurde in den Jahren 1999, 2000 und 2002 mit dem Cherenkov-Air-Imaging-System HEGRA 270 Stunden beobachtet (Horns et al. 2004, Aharonian et al. 2003). Weiterhin wurde das Spektrum dieser TeV-Quelle auch aus Daten des Jahres 2001 von der VERITAS Kollaboration rekonstruiert (Petry et al. 2002). Daten von CAT stehen aus den Jahren 1998 bis 2000 zur Verfügung (Djannati-Ataï et al. 2002). Das Objekt weist eine Rotverschiebung von  $z = 0.129$  auf und ist somit eine der weit entferntesten, beobachteten Quellen. Im Gegensatz zu nahen Quellen wie Mkn 421 ist der Effekt der Ausdünnung durch den infraroten Hintergrund nicht zu vernachlässigen.

Die Abbildung 6.8 zeigt das aus Aharonian et al. (2003) adaptierte Spektrum zusammen mit Modellspektren, die unter Berücksichtigung des Modells von Primack et al.

(2001) resultieren (hier wurde der Salpetertyp verwendet). Es wurden für die Modellierung der zwei Spektren willkürlich verschiedene physikalische Parameter ausgewählt, um zu demonstrieren, dass keine eindeutige Lösung hinsichtlich der Parameterwahl existiert.

Zur Modellierung des ersten Spektrums wurden für den Radius  $R = 10^{14}$  cm, für die Scheibendicke  $d = 3 \cdot 10^{13}$  cm, sowie  $n_b = 5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$  für die interne Dichte und  $n_i^* = 0.2 \text{ cm}^{-3}$  für die konstante externe Dichte gewählt. Der Aufsichtswinkel beträgt in diesem Beispiel  $\theta = 0.7^\circ$ . Als Startbedingung wurde in beiden Beispielen  $\Gamma_0 = 300$  angenommen. Im zweiten Beispiel wurden die Parameter dahingehend geändert, dass hier der Radius auf  $R = 10^{15}$  cm vergrößert wurde, die Scheibendicke  $d = 5 \cdot 10^{13}$  cm beträgt und die interne Dichte auf  $n_b = 6 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$  vergrößert wurde. Die externe Dichte ist hier als  $n_i^* = 0.8 \text{ cm}^{-3}$  gewählt worden. Der Aufsichtswinkel beträgt in diesem Beispiel dagegen  $\theta = 3^\circ$ . Unter Verwendung dieser Parametersätze erhält man zwei Spektren, die beide die beobachteten Daten annähernd reproduzieren.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich sowohl der hochenergetische Anteil der Energiespektren wie auch Lichtkurven verschiedener Quellen mit dem in dieser Arbeit untersuchten hadronischen Modell reproduzieren lassen. Eine Einschränkung der physikalischen Parameter durch Beobachtungen ist aber trotzdem unerlässlich, um eindeutige Aussagen über die jeweiligen Quellen zu machen.

# Zusammenfassung der Ergebnisse

In der vorliegenden Arbeit wurde die Auswirkung magnetohydrodynamischer Turbulenz im Jet eines AGN untersucht, die entsteht, wenn die den Jet umgebende Materie durch den beschleunigten (Jet-)Plasmoid aufgesammelt wird. Die (vom Plasmoidsystem aus gesehen) in den Jet relativistisch schnell hereinfliegenden Teilchen werden, wie schon zuvor bekannt war, innerhalb kurzer Zeit isotropisiert.

Die aufgrund dieser Isotropisierung gegebene, sich zeitlich veränderliche Verteilung von Protonen in einem AGN-Jet konnte in dieser Arbeit durch eine analytische Funktion dargestellt werden.

In dem zugrunde liegenden Modell wird berücksichtigt, dass die Masse des Plasmoids ansteigt und sich der Jet dadurch verlangsamt. Die Verteilung der relativistisch hereinfliegenden Protonen wird dabei durch Abstrahlung und Verluste durch Diffusion und Umwandlung in Neutronen verändert.

Um die Verteilung der Protonen zu bestimmen, wurde zuerst die zeitlich veränderliche Masse des Jets berechnet, die sich als Lösung einer linearen Differentialgleichung (3.21) darstellen ließ. Hierbei konnten die relevanten physikalischen Parameter zu einem einzigen dimensionslosen Parameter zusammengefasst werden, was eine einfache Einteilung möglich macht, die das Verhalten der Jetmasse in Abhängigkeit von diesem Parameter beschreibt.

Je größer der Wert dieses Parameters, desto weniger Masse (im Bezug auf die Anfangsmasse) wird aufgesammelt. Zu beachten ist dabei, dass, obwohl sich jeder dieser Werte durch verschiedene Kombinationen der physikalischen Parameter darstellen lässt, sich kleine Werte und damit eine entsprechende Charakteristik der zeitabhängigen Massenfunktion nur dann ergeben, wenn die Scheibendicke der relativistischen Kollisionsfront in der Nähe von  $d = 3.5 \cdot 10^{13}$  cm liegt.

Verschiedene Näherungen für die Integraldarstellung der Massenfunktion wurden verglichen, wobei eine analytische Darstellung (3.33) gefunden wurde, die eine weitere Verwendung im Verfahren zur Bestimmung der Verteilung der relativistischen Protonen zuließ.

Die Verteilung der Protonen wurde durch eine Umparametrisierung bestimmbar, da sich dank dieser Methode die zu lösende partielle Differentialgleichung durch drei gewöhnliche Differentialgleichungen ausdrücken ließ. Die sogenannten charakteristischen Teilchenpfade, die sich als Lösung einer dieser Differentialgleichungen ergaben, ermöglichten das unterschiedliche Abkühlverhalten der relativistischen Protonen zu studieren.

Anhand der analytischen Darstellung (3.90) der Verteilungsfunktion der relativistischen Protonen, die sich als Lösung der zuvor aufgestellten Differentialgleichung bestimmen ließ, war es möglich, den Funktionsverlauf in Bezug auf den schon bei der Charakterisierung der Massenfunktion eingeführten Parameter zu klassifizieren.

Die analytische Lösung hat den zusätzlichen Vorteil, dass im Gegensatz zu allen numerischen Rechnungen eine vorhandene (wenn auch integrierbare) Singularität erkennbar ist. Diese hat ihre natürliche Interpretation als Resultat konkurrierender physikalischer Prozesse.

Während der singuläre Punkt dadurch gekennzeichnet ist, dass die Zeitskalen für Abstrahlung  $\dot{\gamma}$  und Abbremsung  $\partial\Gamma/\partial t$  der Schockwelle gleich groß sind, dominiert die Abstrahlung nach Erreichen der Singularität, sobald die Zeitskala auf der der Plasmoid verlangsamt, kleiner ist als die der Abstrahlung. Dadurch wird die Form der Spektren eindeutig bestimmt.

In einem weiteren Kapitel wurden die Auswirkungen der zeitabhängigen Protonenverteilungen auf die Produktion von Sekundärteilchen am Beispiel des Zerfalls von neutralen Pionen studiert. Der bekannte und in der Literatur ausführlich diskutierte Prozess wurde hier benutzt, um zu zeigen, dass die Änderung der Protonenverteilung der ausschlaggebende Faktor für die resultierenden Photonenspektren ist. Es wurden numerische Daten benutzt, um eine analytische Testfunktion zu konstruieren. Dadurch war es möglich die Sekundärteilchenproduktion analytisch durch eine Differentialgleichung (4.16) zu beschreiben. Die dabei angewandte Methode lässt sich für eine ganze Klasse solcher Testfunktionen erweitern, da die Anforderungen an diese relativ gering sind.

Die Lösung der Differentialgleichung lässt sich durch ein Integral beschreiben, dessen Struktur derjenigen der Protonenverteilung sehr ähnlich ist. Bemerkenswerterweise

geht (zusätzlich zu elementaren Funktionen) die zuvor berechnete Massenfunktion als charakteristischer Bestandteil in dieses Integral ein. Mittels numerisch berechneter Funktionsverläufe lässt sich bestätigen, dass die Lösungsfunktionen des Integrals der anfangs berechneten Charakteristiken der Massenfunktion folgt.

Die Variabilitäten der Quellen sind vom experimentellen Standpunkt aus interessant. Die zeitabhängige Änderung der Quellen ließ sich mit Hilfe des oben berechneten Integrals kompakt beschreiben. In dieser geschlossenen Form war es auch leicht möglich, den Einfluss des sogenannten Lorentz-Boostes, des Effekts, der durch die Transformation in das System eines Beobachters entsteht, abschätzen. Bei sehr kleinen Aufsichtswinkeln und einem kleinen Dichteverhältnis  $n_i^*/n_b$  oder äquivalent einem großen Wert des Parameters  $ZT$  ist das Erreichen des Intensitätsmaximums innerhalb von weniger als einer Stunde möglich.

In einem weiteren Abschnitt wurden Konsequenzen der Annahme einer inhomogenen Dichtefunktion untersucht. Um im Rahmen der analytischen Diskussion zu bleiben, wurde ein Ansatz gewählt, bei dem die äußere Dichte  $n_i^*$  und damit der Parameter der Zeitskalen  $T$  als vom Lorentzfaktor  $\Gamma(t)$  abhängige Funktionen betrachtet werden. Da die funktionale Abhängigkeit der äußeren Dichte  $n_i^*$  nicht bekannt ist, können a priori nur systematische Auswirkungen auf das zuvor beschriebene System untersucht werden. Es konnte gezeigt werden, dass auch für zeitabhängige Dichtefunktionen  $n_i^*(\Gamma(t))$  sich sowohl die Protonenverteilung wie auch die Sekundärteilchenproduktion völlig analog zu den vorher diskutierten jeweiligen Funktionen, die unter Annahme einer homogenen Dichte berechnet wurden, beschreiben lassen. Das charakteristische Verhalten des Systems hängt allein von der Massenfunktion ab, die allerdings wie zu erwarten durch die nunmehr zeitabhängige Dichtefunktion verändert wird.

Die Auswirkungen der longitudinalen Wellen auf das System wurden in einem weiteren Abschnitt diskutiert. Die Konsequenz der um zwei Größenordnungen schneller wachsenden Instabilität ist ein veränderter Quellterm in der Differentialgleichung zur Beschreibung der Protonenverteilung. Die Sekundärteilchenproduktion, die durch eine longitudinale Instabilität bewirkt wird, lässt sich völlig analog zur Sekundärteilchenproduktion aufgrund elektromagnetischer Wellen analytisch darstellen. Der einzige Unterschied besteht in einer um 50 % reduzierten Strahlungseffizienz, wie sich anhand der nur leicht veränderten Differentialgleichung (5.32) für die Massenfunktion leicht abschätzen lässt.

Abschließend wurden die Ergebnisse mit vorliegenden Daten realer Quellen vergli-

chen. Dabei konnte gezeigt werden, dass sowohl Energiespektren wie auch Lichtkurven verschiedener Quellen sich mit dem in dieser Arbeit untersuchten hadronischen Modell reproduzieren lassen. Aufgrund der hohen Anzahl physikalischer Modellparameter sind signifikante Aussagen aber nur nach Einschränkung der relevanten Parameter durch Korrelation mit weiteren zukünftigen Beobachtungsergebnissen möglich.

Weitere Aussagen sind unter Einbeziehung der Ergebnisse von Multiwellenlängenkampagnen möglich. Dazu ist allerdings eine weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehende Einbindung der Prozesse der von den Protonen erzeugten sekundären Elektronen nötig. Interessant ist auch die weiterführende Behandlung eines analogen Modellszenarios, bei dem eine vernachlässigbare Protonenkomponente angenommen wird. Eine eindeutige Entscheidung zwischen hadronischen und leptonischen Modellen wird allerdings erst durch Ergebnisse der in Planung und Bau befindlichen Neutrinoobservatorien möglich sein.

# Anhänge

## A: Die Abbremsung des Plasmas

Die Verlangsamung des Plasmas durch die Aufnahme der externen Materie lässt sich schon durch einfache Überlegungen verdeutlichen. Vor der Aufnahme ruht die Masse im System des Plasmas. Die Teilchen des Laborsystems, d.h die Masse  $\delta M$  der äußeren Materie, kommen ihr mit der Geschwindigkeit  $v$  entgegen (siehe Abb. A1). Nach der Aufnahme bewegen sich die äußeren Teilchen zusammen mit der Plasmamasse in einem neuen Inertialsystem  $x', y'$ , dem Ruhesystem der neuen Gesamtmasse  $M$ . Für einen Beobachter im alten  $x, y$  System bewegt sie sich mit  $v''$  von ihm fort.

Der Impulsübertrag  $\delta\Pi$  durch die Aufnahme der äußeren Materie kann somit beschrieben werden durch:

$$\delta\Pi = \Gamma'' M v'' = \Gamma'' M c \beta'' \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\delta\Pi}{M c} = \Gamma'' \beta'' = \sqrt{\Gamma''^2 - 1} \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma'' = \sqrt{\frac{\delta\Pi}{M c} + 1} \quad (\text{A.3})$$

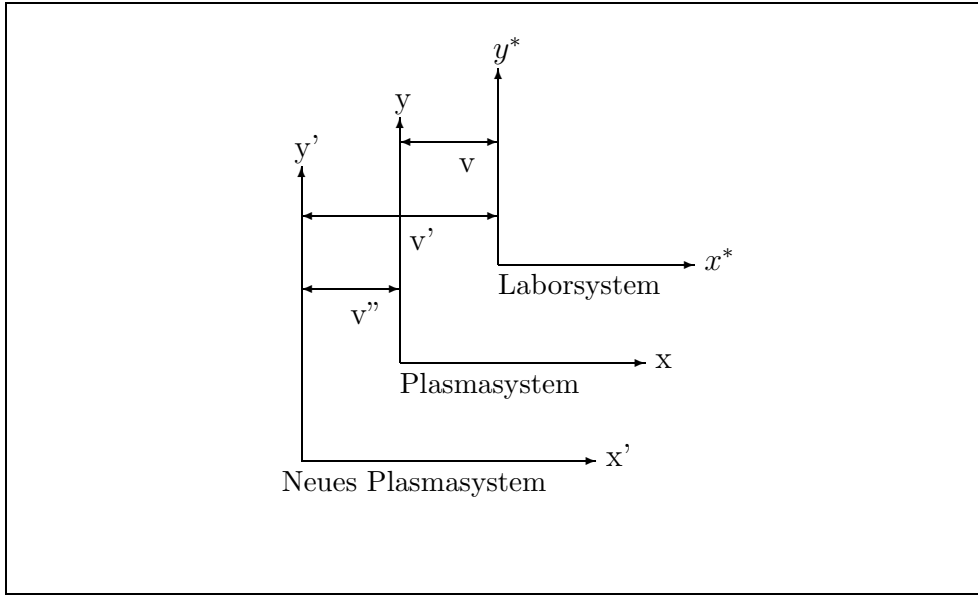
Zusammen mit dem Additionstheorem für Lorentzfaktoren

$$\Gamma' = \Gamma \Gamma'' - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \sqrt{\Gamma''^2 - 1} \quad (\text{A.4})$$

führt das zu

$$\Gamma' = \Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{\delta\Pi}{M c}\right)^2} - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \frac{\delta\Pi}{M c} \quad (\text{A.5})$$

in Übereinstimmung mit Pohl & Schlickeiser (2000).



**Abbildung A.1:** Verlangsamung des Plasmas durch die Aufnahme der externen Materie. Vor der Aufnahme zusätzlicher externer Teilchen ruht die Masse im System des Plasmas. Die Teilchen des Laborsystems haben die Geschwindigkeit  $v$ . Nach der Aufnahme bewegen sich die externen Teilchen zusammen mit der bisherigen Plasmamasse in einem neuen Inertialsystem  $x', y'$ , das sich für einen Beobachter im alten  $x, y$  System mit  $v''$  von ihm fortbewegt.

Die Abbremsung des Plasmas lässt sich dann berechnen als:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Gamma' - \Gamma}{\delta t} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{\delta \Pi}{M c}\right)^2} - \sqrt{\Gamma^2 - 1} \frac{\delta \Pi}{M c} - \Gamma}{\delta t} \quad (\text{A.7})$$

Hier kann die Regel von de l' Hospital angewandt werden, da der Limes von Zähler sowie Nenner Null ist, die Ableitungen aber endliche Grenzwerte besitzen.

Wir berücksichtigen zusätzlich, dass

$$\delta \Pi = \Gamma \delta M v = \Gamma c \beta m_p \int \tilde{N}(\gamma, t) d\gamma \delta t = D c (\Gamma^2 - 1) \delta t \quad (\text{A.8})$$

die Impulsänderung durch die während der Zeit  $\delta t$  aufgenommenen Teilchen ist. Dabei wird  $m_p \pi R^2 c n_i^*$  mit  $D$  abgekürzt.



Für die Ableitung des Zählers ergibt sich dann:

$$\frac{d}{d(\delta t)} \left( \Gamma \sqrt{1 + \left[ \frac{D(\Gamma^2 - 1)}{M} \delta t \right]^2} - \frac{D(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{M} \delta t - \Gamma \right) \quad (\text{A.9})$$

und damit für die Abbremsung des Plasmas

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Gamma D^2 (\Gamma^2 - 1)^2 \delta t}{M^2 \sqrt{1 + \left[ \frac{D(\Gamma^2 - 1)}{M} \delta t \right]^2}} - \frac{D(\Gamma^2 - 1)^{3/2}}{M} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Bei der Grenzwertbildung fällt der erste Term weg und es bleibt:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = - \frac{m_p \pi R^2 c n_i^* (\Gamma(t)^2 - 1)^{3/2}}{M(t)} \quad (\text{A.11})$$

in Übereinstimmung mit Gl.(3.2), die die Abbremsung des Plasmoids beschreibt.

## B: Die Ableitung der Protonenverteilung

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Lösung (3.90) auch tatsächlich die zu lösende Differentialgleichung (3.6) erfüllt.

Betrachten wir zuerst die Ableitungen der Nullstellenfunktion  $\nu_i$ , die sich darstellen lassen als

$$\frac{\partial \nu_i(\gamma_0(\gamma, t))}{\partial \gamma} = \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma_0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma} = \exp(t/\tau) \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma_0} \quad (\text{B.1})$$

und

$$\frac{\partial \nu_i(\gamma_0(\gamma, t))}{\partial t} = \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma_0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = \gamma \exp(t/\tau) / \tau \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma_0}, \quad (\text{B.2})$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass sich  $\gamma_0(\gamma, t)$  nach Gl. (3.80) mit Gl. (3.85) als  $\gamma \exp(t/\tau)$  schreiben lässt. Diese benutzen wir in den Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Theta(\Gamma_0 - \nu_i) - \Theta(\Gamma(t) - \nu_i)] = -\delta(\Gamma(t) - \nu_i) \left[ \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t} - \frac{\partial \nu_i}{\partial t} \right] - \delta(\Gamma_0 - \nu_i) \left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial t} \right] \quad (\text{B.3})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} [\Theta(\Gamma_0 - \nu_i) - \Theta(\Gamma(t) - \nu_i)] = \delta(\Gamma(t) - \nu_i) \left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma} \right] - \delta(\Gamma_0 - \nu_i) \left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Nun können wir den folgenden Term betrachten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\gamma, t)}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} &= -\frac{n(\gamma, t)}{\tau} \\
&+ \left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial t} - \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma} \right] \frac{n(\gamma, t)}{I(\nu_i)} \frac{\partial I}{\partial \nu_i} - \left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial t} - \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma} \right] \frac{2 \nu_i n(\gamma, t)}{(\nu_i^2 - 1)} \\
&+ \left( [\delta(\Gamma(t) - \nu_i) - \delta(\Gamma_0 - \nu_i)] \left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial t} - \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma} \right] - \delta(\Gamma(t) - \nu_i) \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right) \\
&\times \frac{n(\gamma, t)}{\Theta(\Gamma_0 - \nu_i) - \Theta(\Gamma(t) - \nu_i)} - \left( \frac{\partial I}{\partial \nu_i} + \frac{3 \nu_i I(\nu_i)}{(\nu_i^2 - 1)} \right) \left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial t} - \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma} \right] \\
&\times \operatorname{sgn}[h(\gamma, t)] \frac{\gamma \tau \exp([t - t_{\nu_i}]/\tau)}{\tau^2 \lambda (\nu_i^2 - 1)^{3/2}} \frac{n(\gamma, t)}{h(\gamma, t)} + \left[ \frac{1}{\tau} - \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_N} \right] n(\gamma, t),
\end{aligned} \tag{B.5}$$

wobei wir die Abkürzung

$$h(\gamma, t) = \left| \frac{\gamma \exp([t - t_{\nu_i}]/\tau) I(\nu_i)}{\lambda \tau (\nu_i^2 - 1)^{3/2}} - 1 \right| \tag{B.6}$$

benutzt haben. Da aber nach Gl. (B.1) und Gl. (B.2) gilt

$$\left[ \frac{\partial \nu_i}{\partial t} - \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial \nu_i}{\partial \gamma} \right] = 0, \tag{B.7}$$

reduziert sich die Gleichung auf

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\gamma, t)}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} &= - \left( \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_N} \right) n(\gamma, t) \\
&+ \left[ -\delta(\Gamma(t) - \nu_i) \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] \frac{n(\gamma, t)}{[\Theta(t_0 - \nu_i) - \Theta(\Gamma(t) - \nu_i)]}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Wir setzen nun  $n(\gamma, t)$  aus Formel (3.90) wieder ein:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\gamma, t)}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} + \left( \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_N} \right) n(\gamma, t) &= \\
- \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \sum_i \frac{I(\nu_i) \delta(\Gamma(t) - \nu_i) \exp[(1/\tau - 1/T_E - 1/T_N)(t - t_{\nu_i})]}{(\nu_i^2 - 1) |\gamma \exp([t - t_{\nu_i}]/\tau) I(\nu_i) / [\lambda \tau (\nu_i^2 - 1)^{3/2}] - 1|}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Als nächstes wird die Gl. (3.74) benutzt, um das Argument der Delta Distribution zu substituieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\gamma, t)}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} + \left( \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_N} \right) n(\gamma, t) &= \\
- \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \exp[(1/\tau - 1/T_E - 1/T_N)(t - t_{\Gamma})] \frac{I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)} \delta(\gamma - \Gamma(t)),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

wobei  $t_\Gamma = t(\Gamma(t)) = t$  ist, so dass der Exponentialterm Eins ergibt. Wir benutzen nun noch Gl. (3.84) und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\gamma n)}{\partial \gamma} + \left( \frac{1}{T_E} + \frac{1}{T_N} \right) n &= \frac{\lambda(\Gamma^2 - 1)^{(3/2)} I(\Gamma)}{I(\Gamma) (\Gamma^2 - 1)} \delta(\gamma - \Gamma(t)) \\ &= \lambda \sqrt{\Gamma(t)^2 - 1} \delta(\gamma - \Gamma(t)). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Nach Multiplikation mit dem Volumen  $V$  erhält man die ursprüngliche Differentialgleichung (3.6).

In nächsten Abschnitt soll abschließend mit einem alternativen Beweis gezeigt werden, dass  $G(\Gamma, \gamma)/\gamma$  eine korrekte Repräsentation der Verteilungsfunktion der relativistischen Protonen ist. Wir starten dazu nochmals mit der ursprünglich abgeleiteten Gleichung (3.73) in der Form

$$G(\Gamma, \gamma_0) = \exp[(T - 1/\lambda\tau) A(\Gamma)] \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-\gamma_0 \exp[(1/\lambda\tau)A(\tilde{\Gamma})] I(\tilde{\Gamma}) \delta(\gamma_F - \tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1) \exp[(T - 1/\lambda\tau)A(\tilde{\Gamma})]} d\tilde{\Gamma}, \quad (\text{B.12})$$

wobei mit dieser Schreibweise betont werden soll, dass  $\gamma$  hier die Bedeutung einer Funktion  $\gamma_F = \gamma_0 \exp[(1/\lambda\tau)A(\tilde{\Gamma})]$  hat und nicht etwa die einer Variablen  $\gamma_V$ , die in der Funktion  $G(\Gamma, \gamma)/\gamma$  benötigt wird.

Um die Funktion (B.12) in Abhängigkeit von  $\gamma_V$  darzustellen, muss man beachten, dass diese immer noch vom Pfad  $\gamma_0$  abhängt, dass also die derzeitige Variable  $\gamma_0$  dann zur Funktion wird, die man über die Rücktransformation (3.80), also über  $\gamma_0(\gamma, \Gamma) = \gamma_V \exp(-A(\Gamma)/\lambda\tau)$  erhält. Mit dieser Interpretation ergibt sich:

$$\begin{aligned} G(\Gamma, \gamma_0) &= \exp[(T - 1/\lambda\tau) A(\Gamma)] \\ &\times \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-\gamma_V \exp[(1/\lambda\tau)(A(\tilde{\Gamma}) - A(\Gamma))]}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1) \exp[(T - 1/\lambda\tau)A(\tilde{\Gamma})]} I(\tilde{\Gamma}) \delta(\gamma_F - \tilde{\Gamma}) d\tilde{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

mit der Delta Distribution in der Form

$$\delta(\gamma_F - \tilde{\Gamma}) = \delta(\gamma_V \exp[(1/\lambda\tau)(A(\tilde{\Gamma}) - A(\Gamma))] - \tilde{\Gamma}). \quad (\text{B.14})$$

Wir kürzen die Funktion  $\exp[(T - 2/\lambda\tau) A(\Gamma)]$  mit  $B(\Gamma)$  ab:

$$G(\Gamma, \gamma_V) = B(\Gamma) \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-\gamma_V I(\tilde{\Gamma}) \delta(\gamma_F - \tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1) B(\tilde{\Gamma})} d\tilde{\Gamma} \quad (\text{B.15})$$

und integrieren nun über die Variable  $\gamma_V$  in der Grenzen von  $1 \leq \gamma_V \leq \infty$  :

$$\int_1^\infty G(\Gamma, \gamma_V) d\gamma_V = B(\Gamma) \int_1^\infty \int_{\Gamma_0}^\Gamma \frac{-\gamma_V I(\tilde{\Gamma}) \delta(\gamma_V - \tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1)B(\tilde{\Gamma})} d\tilde{\Gamma} d\gamma_V. \quad (\text{B.16})$$

Da sowohl die Integrationsvariablen  $\gamma_V$  und  $\tilde{\Gamma}$  als auch die Integralgrenzen voneinander unabhängig sind, vertauschen wir die Reihenfolge der Integrationen

$$\int_1^\infty G(\Gamma, \gamma_V) d\gamma_V = B(\Gamma) \int_{\Gamma_0}^\Gamma \int_1^\infty \frac{-\gamma_V I(\tilde{\Gamma}) \delta(\gamma_V - \tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1)B(\tilde{\Gamma})} d\gamma_V d\tilde{\Gamma}. \quad (\text{B.17})$$

Unter dieser Voraussetzung kann das Integral in der Form

$$\int_1^\infty G(\Gamma, \gamma) d\gamma = B(\Gamma) \int_{\Gamma_0}^\Gamma \frac{-I(\tilde{\Gamma})}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1)B(\tilde{\Gamma})} \int_1^\infty \gamma_V \delta(\gamma_V f(\tilde{\Gamma}) - \tilde{\Gamma}) d\gamma_V d\tilde{\Gamma} \quad (\text{B.18})$$

dargestellt werden, wobei wir  $\exp\left[(1/\lambda\tau)(A(\tilde{\Gamma}) - A(\Gamma))\right]$  mit  $f(\tilde{\Gamma})$  abkürzen. Die Auswertung des inneren Integrals ergibt dann

$$\int_1^\infty \gamma_V \delta(\gamma_V f(\tilde{\Gamma}) - \tilde{\Gamma}) d\gamma_V = \tilde{\Gamma} \Theta(\tilde{\Gamma} - f(\tilde{\Gamma}))/f(\tilde{\Gamma})^2 \quad (\text{B.19})$$

$$\int_1^\infty G(\Gamma, \gamma_V) d\gamma_V = B(\Gamma) \int_{\Gamma_0}^\Gamma \frac{-I(\tilde{\Gamma}) \tilde{\Gamma} \Theta(\tilde{\Gamma} - f(\tilde{\Gamma}))}{f(\tilde{\Gamma})^2 (\tilde{\Gamma}^2 - 1) B(\tilde{\Gamma})} d\tilde{\Gamma} \quad (\text{B.20})$$

wobei mit  $\Theta$  wieder die Heavisidefunktion bezeichnet ist. Addiert man auf beiden Seiten  $Z$  und berücksichtigt, dass sich  $G(\Gamma, \gamma)$  seiner Definition nach als  $\gamma n(\gamma, \Gamma)$  ausdrücken lässt, so ergibt sich

$$I(\Gamma) = Z + \int_1^\infty G(\Gamma, \gamma) d\gamma = Z + B(\Gamma) \int_{\Gamma_0}^\Gamma \frac{-I(\tilde{\Gamma}) \tilde{\Gamma} \Theta(\tilde{\Gamma} - f(\tilde{\Gamma}))}{f(\tilde{\Gamma})^2 (\tilde{\Gamma}^2 - 1) B(\tilde{\Gamma})} d\tilde{\Gamma}. \quad (\text{B.21})$$

Wir vereinfachen

$$\frac{B(\Gamma)}{f(\tilde{\Gamma})^2 B(\tilde{\Gamma})} = \exp[T A(\Gamma)] \exp[-T A(\tilde{\Gamma})] \quad (\text{B.22})$$

und erhalten für die Massenfunktion  $I(\Gamma)$  :

$$I(\Gamma) = Z + \int_1^\infty G(\Gamma, \gamma) d\gamma = Z + \exp[T A(\Gamma)] \int_{\Gamma_0}^\Gamma \frac{-I(\tilde{\Gamma}) \tilde{\Gamma} \Theta(\tilde{\Gamma} - f(\tilde{\Gamma}))}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1) \exp[T A(\tilde{\Gamma})]} d\tilde{\Gamma}. \quad (\text{B.23})$$

Leiten wir diese Gleichung nach  $\Gamma$  ab, ergibt sich

$$\frac{\partial I(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{T I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \exp[T A(\Gamma)] \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{-I(\tilde{\Gamma}) \tilde{\Gamma} \Theta(\tilde{\Gamma} - f(\tilde{\Gamma}))}{(\tilde{\Gamma}^2 - 1) \exp[T A(\tilde{\Gamma})]} d\tilde{\Gamma} + \frac{-I(\Gamma) \Gamma}{(\Gamma^2 - 1)}. \quad (\text{B.24})$$

Wir benutzen Gl. (B.23) und erhalten

$$\frac{\partial I(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{T I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} (I(\Gamma) - Z) + \frac{-I(\Gamma) \Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \quad (\text{B.25})$$

oder umgeformt

$$\frac{\partial I(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{T I(\Gamma)^2}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{ZT I(\Gamma)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} - \frac{I(\Gamma) \Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1}}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} \quad (\text{B.26})$$

was Gleichung (3.20) entspricht.



# Literaturverzeichnis

Achatz, U., Lesch, H. & Schlickeiser, R., 1990, *Jets and hot spots in extragalactic radio sources*, A&A, 233, 391

Aharonian, F. A. et al., 1999, *The temporal characteristics of the TeV gamma-radiation from Mkn 501 in 1997*, A&A, 342, 69

Aharonian, F. A., 1999, *TeV gamma radiation of BL Lac objects Mkn 421 and Mkn 501* Astron. Nachr., 4/5, 222

Aharonian, F. A. et al., 2003, *Observations of H1426+428 with HEGRA*, A&A, 403, 523

Aharonian, F. A., 2002, *Variations of the TeV energy spectrum at different flux levels of Mkn 421 observed with the HEGRA system of Cherenkov telescopes*, A&A, 393, 89

Aharonian, F. A. et al., 2003, *TeV gamma-ray light curve and energy spectrum of Mkn 421 during its 2001 flare as measured with HEGRA CT1*, A&A, 410, 813

Ahrens, J. et al., 2004, *Status of the IceCube Neutrino Observatory*, New Astron. Rev., 48, 519

Antonucci, R., 1993, *Unified models for active galactic nuclei and quasars*, ARA&A, 31, 473

Arbeiter, C., Pohl, M., & Schlickeiser, R., 2002, *The influence of dust on the inverse Compton emission from jets in Active Galactic Nuclei*, A&A, 386, 415

Baade, W. & Minkowski, R., 1954, *On the Identification of Radio Sources*, ApJ, 119, 215

- Balbus, S. A. & Hawley J. F., 1998, *Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks*, RoMP, 70, 1
- Barthel, P. D., 1989, *Is every quasar beamed?* ApJ, 336, 606
- Bednarek, W., 1993, *On the gamma-ray emission from 3C 279*, ApJ, 402, L29
- Begelman, M. C., Blandford, R. D. & Rees, M., 1984, *Theory of extragalactic radio sources*, RoMP, 56, 255
- Bernstein, R. A., 1999, *HST/LCO Measurements of the Optical Extragalactic Background Light*, ASP Conference Proceedings, Vol. 193, 487
- Biller, S. D., Akerlof, C. W., Buckley, J. et al., 1995, *An upper limit to the infrared background from observations of TeV gamma rays*, ApJ, 445, 227
- Blandford, R. D., McKee, C. F., 1976, *Fluid dynamics of relativistic blast waves*, Phys. Fluids, 19, 1130
- Blandford, R. D., McKee, C. F. & Rees, M., 1977, *Super-luminal expansion in extragalactic radio sources*, Nature, 267, 211
- Blandford, R. D., McKee, C. F., 1977, *Radiation from relativistic blast waves in quasars and active galactic nuclei*, MNRAS, 180, 343
- Blandford, R. D., Znajek, R. L., 1977, *Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes*, MNRAS, 179, 433
- Blandford, R. D., 1999, *Recent Results on Active Galactic Nuclei*, Ap&SS, 261, 245
- Bloom, S. D., Marscher, A. P., 1996, *An Analysis of the Synchrotron Self-Compton Model for the Multi-Wave Band Spectra of Blazars*, ApJ, 461, 657
- Böttcher, M., Dermer, C. D., 2002, *An Evolutionary Scenario for Blazar Unification*, ApJ, 564, 86
- Bronstein, I. N. et al., *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, 1989
- Buneman, O., 1959, *Dissipation of Currents in Ionized Media*, Phys. Rev., 115, 503
- Capella, A., Sukhatme, U., Tan, C-I., Trần Tranh Vân, J., 1994, *Dual parton model*, Phys. Rep. 236, 227



- Cohen, M., H. et al., 1977, *Radio sources with superluminal velocities*, Nature, 268, 405
- Colgate, S. A. & Johnson, M. H., 1960, *Hydrodynamic origin of cosmic rays*, Phys. Rev. Letters, 5, 235
- De Jager, O. C. & Stecker, F. W., 2002, *Extragalactic gamma-ray absorption and the intrinsic spectrum of Markarian 501 during the 1997 flare*, ApJ, 566, 738
- Dermer, C. D., 1986, *Secondary production of neutral pi-mesons and the diffuse galactic gamma radiation*, A&A, 157, 223
- Dermer, C. D., Schlickeiser, R. & Mastichiadis, A. 1992, *High-energy gamma radiation from extragalactic radio sources*, A&A, 256, L27
- Dermer, C. D. & Schlickeiser, R., 1993, *Model for the high-energy emission from blazars*, ApJ, 416, 458
- Dermer, C. D., Chiang, J., 1998, *Electron acceleration and synchrotron radiation in decelerating plasmoids*, New Astron. 3, 157
- Djannati-Ataï et al. 2002, *Detection of the BL Lac object 1ES 1426+428 in the Very High Energy gamma-ray band by the CAT Telescope from 1998-2000*, A&A, 391, L25
- Engel R., Ranft, J., Roesler, S., 1997, *Photoproduction off nuclei and pointlike photon interactions. I. Cross sections and nuclear shadowing*, Phys. Rev. D, 55, 6957
- Ferrari, A., Sala, P. R., Ranft, J., Roesler, S., 1996, *Cascade particles, nuclear evaporation, and residual nuclei in high energy hadron-nucleus interactions*, Z. Phys. C, 70, 413
- Finkbeiner, D. P.; Davis, M., Schlegel, D. J., 2000 *Detection of a Far-Infrared Excess with DIRBE at 60 and 100 Microns*, ApJ, 544, 81
- Gould, R. J & Schréder, G., 1966, *Opacity of the universe to high-energy photons*, Phys. Rev. Lett., 16, 252
- Guy, J., et al., 2000, *Constraints on the cosmic infra-red background based on BeppoSAX and CAT spectra of Markarian 501*, A&A, 359, 419
- Hartman, R. C., Collmar, W., von Montigny, C. & Dermer, C. D., 1997, *Gamma-ray blazars*, Proceedings of the Fourth Compton Symposium ed. Dermer, Strickman & Kurffess, AIP Conf. Proc., 410, 307

- Hauser, M. G. et al., 1998, *The COBE Diffuse Infrared Background Experiment Search for the Cosmic Infrared Background. I. Limits and Detections*, ApJ, 508, 25
- Hauser, M. G., & Dwek, E., 2001, *The Cosmic Infrared Background: Measurements and Implications*, ARA&A, 39, 249
- Hazard, C. et al., 1963, *Investigation of the radio source 3C 273 by the method of lunar occultations*, Nature, 197, 1037
- Horns, D., Aharonian, F. A., Costamante, L., 2004, *TeV observations of H1426+428 with HEGRA*, New Astron. Rev., 48, 387
- Jelley, J. V., 1966, *High-energy  $\gamma$ -ray absorption in space by a  $3.5^\circ$  K microwave field*, Phys. Rev. Lett., 16, 479
- Johnson, M. H. & McKee, C. F., 1971, *Relativistic hydrodynamics in one dimension*, Phys. Rev. D, 3, 858
- Jones, T. W., & Tobin, W., 1977, *Restrictions on models for superlight flux variations in radio sources* ApJ, 215, 474
- Kennel, C. F. & Wong H. V., 1967, *Resonant particle instabilities in a uniform magnetic field*, J. Plasma Phys., 1, 75
- Kormendy, J., 1988, *Evidence for a central dark mass in NGC 4594 (the sombrero galaxy)*, ApJ, 335, 40
- Krall, N. A. & Trivelpiece A.W., 1973, *Principles of Plasma Physics* Wiley, New York
- Lee, M. A. & Ip, W. H., 1987, *Hydromagnetic Wave Excitation by Ionized Interstellar Hydrogen and Helium in the Solar Wind*, JGRA, 92, 11041
- Lerche, I., 1967, *Unstable magnetosonic waves in a relativistic plasma*, ApJ, 147, 689
- Low, F. J. et al., 1984, *Infrared cirrus: New components of the extended infrared emission* ApJ, 278, L19
- Malkan, M. A. & Stecker, F. W., 1998, *An empirically based calculation of the extragalactic infrared background*, ApJ, 496, 13

- Malkan, M. A. & Stecker, F. W., 2001, *An empirically based model for predicting luminosity function, deep infrared galaxy counts, and the diffuse infrared background*, ApJ, 555, 641
- Mannheim, K., Biermann, P. L., 1992, *Gamma-ray flaring of 3C 279, a proton-initiated cascade in the jet?*, A&A, 253, L21
- Mannheim, K., 1993, *The proton blazar*, A&A, 269, 67
- Maraschi, L., Ghisellini, G. & Celotti, A., 1992, *A jet model for the gamma-ray-emitting Blazar 3C 279*, ApJ, 397, L5
- Marscher, A. P. & Scott, J. S., 1980, *Superluminal motion in compact radio sources*, PASP, 92, 127
- Matsuhara, H. et al., 2000, *ISO deep far-infrared survey in the "Lockman Hole"* A&A, 361, 407
- Melrose, D. B., 1980, *Nonthermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas*, Gordon & Breach
- Möhring, H.-J., Ranft, J., 1991, *Dual parton model with complete formation zone intranuclear cascade for the description of particle production in hadron-nucleus and nucleus-nucleus interactions*, Z. Phys. C., 52, 643
- Montgomery M. D. & Tideman, D. A., 1964, *Plasma kinetic theory*, Mc Graw-Hill, New York
- Mücke, A. & Protheroe, R. J., 1999, *Modeling the April 1997 Flare of Mkn 501*, GeV-TeV Gamma Ray Astrophysics Workshop , Utah, 13-16 August 1999, AIP, 2000, AIP Conference Proceedings, 515, 149
- Mücke, A. & Protheroe, R. J., 2000, *A Proton Synchrotron Blazar Model for Flaring in Makarian 501*, Astropart. Phys., 15, 121
- Mücke, A. et al., 2002, *BL LaC Objects in the Synchrotron Blazar Model*, Astropart. Phys., 18, 593
- Nikishov A. I., 1962, *Absorption of high-energy photons in the universe*, Sov. Phys. JETP, 14, 393

- Öpik, E. J., 1922, *An estimate of the distance of the andromeda nebula*, ApJ., 55, 406
- Orr, M. J. L., Browne, I. W. A., 1982, *Relativistic beaming and quasar statistics*, MNRAS, 200, 1067
- Owen, F. N., Hardee, P. E., and Cornwell, T. J., 1989, *High-resolution, high dynamic range VLA images of the M87 jet at 2 centimeters*, ApJ, 340, 698
- Owen, F. N., Eilek, J. A., Kassim, N. E., 2000, *M87 at 90 centimeters: A different picture*, ApJ, 543, 611
- Petry et al., 2002 *The TeV Spectrum of H1426+428*, ApJ, 580, 104
- Pohl, M., 1994, *On the predictive power of the minimum energy condition*, A&A, 287, 453
- Pohl, M. & Schlickeiser, R., 2000, *On the conversion of the blast wave energy into radiation in active galactic nuclei and gamma-ray bursts*, A&A, 354, 395
- Pohl, M., Lerche, I. & Schlickeiser, R., 2002, *Channeled blast wave behavior based on longitudinal instabilities*, A&A, 383, 309
- Primack, J. R. et al., 1999, *Probing galaxy formation with TeV gamma ray absorption*, Astropart. Phys., 11, 93
- Primack, J. R. et al., 2001, *Probing galaxy formation with high energy gamma rays*, API Conf. Proc., 558, 463
- Puget, J. L., Lagache, G. et al., 1999, *Firback*, A&A, 345, 29
- Punch, M. et al., 1992, *Detection of TeV photons from the active galaxy Markarian 421*, Nature, 358, 477
- Ranft, J., Roesler, S., 1994, *Single diffractive hadron-nucleus interactions within the dual parton model*, Z. Phys. C., 62, 329
- Rees, M., 1966, *Appearance of relativistically expanding radio sources*, Nature, 211, 468
- Salpeter, E. E., 1969, *Accretion of interstellar matter by massive objects*, ApJ, 140, 796
- Schlickeiser, R., 1989, *Cosmic-ray transport and acceleration. I Derivation of the kinetic equation and application to cosmic rays in static cold media*, ApJ, 336, 243

- Schlickeiser, R. et al., 2000, *Kinetic theory of relativistic jets in active galactic nuclei*, (AIP) Proceedings Published by American Institute of Physics, Melville, New York, 558, 312
- Schlickeiser, R., 2002, *Cosmic Ray Astrophysics*, Springer Verlag, Heidelberg, Chap 11
- Schmidt, M., 1963, *A star-like object with large redshift*, Nature, 197, 1040
- Schuster, C., Diplomarbeit, 2000, *Neutrino-Emission von aktiven galaktischen Kernen*, Universität Bielefeld
- Sedov, L., 1969, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic, New York, Chap IV
- Seyfert, C. K., 1943, *Nuclear emission in spiral nebulae*, ApJ, 97, 28
- Shapiro, P. R., 1979, *Relativistic blast waves in two dimensions I: The adiabatic case*, ApJ, 233, 831
- Sikora, M., Begelman, M. C. & Rees, M. J., 1994, *Comptonization of diffuse ambient radiation by a relativistic jet: The source of gamma rays from blazars?*, ApJ, 421, 153
- Spinoglio, L. et al., 1995, *Multiwavelength Energy Distributions and Bolometric Luminosities of the 12 Micron Galaxy Sample*, ApJ, 453, 616
- Stecker, F. W., 1970, *The cosmic  $\gamma$ -ray spectrum from secondary particle production in cosmic-ray interactions*, Ap&SS, 6, 377
- Stecker, F. W., 1979, *Diffuse fluxes of cosmic high-energy neutrinos*, ApJ, 228, 919
- Stecker F. W., De Jager, O. C., Salamon, M. H., 1992, *TeV gamma rays from 3C 279: A possible probe of origin and intergalactic infrared radiation fields*, ApJ, 390, L49
- Stecker F. W., & De Jager, O. C., 1993, *New upper limits on intergalactic infrared radiation from high-energy astrophysics*, ApJ, 415, L71
- Stecker F. W., & De Jager, O. C., 1998, *Absorption of very high energy gamma-ray by intergalactic infrared radiation: A new determination*, A&A, 334, L85
- Stephens, S. A., Badhwar, G. D., 1981, *Production spectrum of gamma rays in interstellar space through neutral pion decay*, Ap&SS, 76, 213

- Stix, T.H., 1962, *The Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, New York
- Swanson, D. G., 1989, *Plasma Waves*, Academic Press, New York
- Tademaru, E., 1969, ApJ, *Plasma instabilities of streaming cosmic rays*, 258, 131
- Urry, C. M., Padovani, P., 1995, *Unified schemes or radio-loud active galactic nuclei*, PASP, 107, 803
- Wright, E. L., Reese, E. D., 2000, *Detection of the Cosmic Infrared Background at 2.2 and 3.5 Microns Using DIRBE Observations*, ApJ, 545, 43
- Wright, E. L., 2001, *DIRBE minus 2MASS: Confirming the Cosmic Infrared Background at 2.2 Microns*, ApJ, 553, 538