

PLASMAGLEICHGEWICHTE IN EINER
KERR-METRIK

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik und Astronomie
der Ruhr-Universität Bochum

von

Yauhen Kot
aus Minsk

Bochum (2003)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Flusserhaltungstheorem	7
2.1	Allgemeine Lösung der Gleichung $\Omega_{\mu\nu}u^\nu = 0$	8
2.2	Flusserhaltungssatz in einem MHD-Plasma	18
2.3	Flusserhaltungssatz in einem isothermen Mehrflüssigkeitsplasma	22
3	Plasmagleichungen	29
3.1	Gleichungen für das Mehrflüssigkeitsplasma in einem Rotations- symmetrischen Gleichgewicht	31
3.2	Das Variationsprinzip	38
3.3	Quasineutralität	42
3.4	Gleichgewichtsbedingungen für ein schwach dissipatives Plasma	50
3.4.1	Quasineutrales Plasma mit Reibung und Ringspannung	54
4	Numerische Lösung	65
4.1	Der Lösungsalgorithmus	65
4.2	Numerische Realisierung	70
4.2.1	χ -Gleichung	71
4.2.2	Dichte-Gleichung	80
5	Das Programm	83

5.1	Test des Programms	83
5.2	Geschlossenes System	89
5.3	Offenes System	107
6	Zusammenfassung und Ausblick	117

Kapitel 1

Einleitung

Durch Beobachtungen der modernen Astronomie/Astrophysik sind kompakte massive Objekte (kollabierte Sterne, aktive galaktische Kerne) in den letzten Jahren besonders interessant geworden. Die letzten Erkenntnisse der Astrophysik liefern immer mehr Indizien, dass diese „Schwarzen Löcher“ wirklich existieren [1], [2]. In diesem Zusammenhang rückt auch das Verhalten der Materie im starken Gravitationsfeld dieser Objekte immer mehr in den Mittelpunkt des Interesses. Auch wenn die beobachteten Signale oft Schwankungen mit kurzer Zeitskala ausweisen und damit auf eruptive Prozesse hindeuten, stellt sich hierbei vor allem die Frage, ob es Plasmagleichgewichte, also stationäre Strömungen von Plasma in der unmittelbaren Umgebung eines Schwarzen Lochs geben kann. Dies würde mit den Erfahrungen der gewöhnlichen Plasmaphysik übereinstimmen, wonach schnelle zeitliche Veränderungen, wie z.B. Eruptionen auf der Sonne oder Instabilitäten im Laborplasma, ein globales Gleichgewicht zwar stören können, aber nicht immer beseitigen müssen.

Somit steigt das Bedürfnis an theoretischen Konzepten und Modellen, die solche Gleichgewichte beschreiben, bzw. mögliche Entwicklungen der Materie voraussagen können. Das bisherige Vorgehen zur Berechnung solcher Gleichgewichte in der Nähe eines Schwarzen Lochs bestand darin, zwei Traditionslinien zusammenzuführen: Auf der einen Seite kennt man seit 1963 die Gravitati-

onskraft, die ein rotierendes Schwarzes Loch auf seine Umgebung ausübt. Sie wird durch die Kerr-Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen gegeben [3], [8]. Auf der anderen Seite sind die Gleichgewichtsbedingungen eines gewöhnlichen Plasmas bekannt, wenn es als ideale Flüssigkeit mit Magnetfeld (im Rahmen der Magnetohydrodynamik) beschrieben wird. Es lag also nahe, diese Gleichgewichtsbedingungen für die Kerr-Geometrie abzuleiten und numerisch zu lösen. Die meisten Arbeiten [12]-[20] beschäftigten sich dabei mit der Beschreibung eines ideal leitendes MHD-Plasmas in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Ein resistives MHD-Plasma wurde von Bekenstein und Oron [4] diskutiert und später in Ref. [21]-[24] auf die Akkretionsscheiben um ein Kerr-Loch angewendet. Für ein ideal leitendes Gleichgewichtsplasma hat sich jedoch gezeigt, dass der Rahmen der Magnetohydrodynamik zu eng ist, um das Plasma in der Nähe eines rotierenden Schwarzen Lochs widerspruchsfrei zu beschreiben. Die charakteristische Eigenschaft der MHD-Beschreibung ist der Erhaltungssatz des magnetischen Flusses in dem mitbewegten Koordinatensystem¹. Diese Gleichung wurde für die relativistischen stationären und rotationssymmetrischen Plasmen zum ersten Mal von Bekenstein und Oron [4] integriert. Die Diskussionen über den Flussershaltungssatz eines MHD-Plasmas um ein Schwarzes Loch wurden bei Camenzind [15], Mobarry und Lovelace [5], Nitta, Takahashi Tomimatsu [6] und Beskin und Par'ev [19] fortgeführt. Das wichtigste Ergebnis war dabei, dass die Komponenten des Viererpotentials A_0 und A_1 auf den Flächen konstanten magnetischen Flusses auch konstant sein müssen, und demnach auch Funktionen voneinander sind. Dies wird aber in der Kerr-Geometrie durch den gravitomagnetischen Effekt verhindert. Die Kerr-Metrik ist nämlich zwangsläufig nichtdiagonal, da das Element $g_{t\varphi}$ sich unter keinen Transformationen zu Null bringen läßt [7]. Dadurch werden die Poisson- und Amperegleichung gekoppelt, was im Widerspruch zur MHD steht. Somit ist man auf die Mehrflüssigkeitgleichungen eines Plasmas angewiesen,

¹d.h. in einem Koordinatensystem, das sich mit der Vierergeschwindigkeit u^μ des Fluidschwerpunkts bewegt

in denen die starre Bindung des elektrischen Potentials an die magnetische Flussfunktion aufgehoben ist. Der nächste logische Schritt, den man in dieser Richtung unternehmen müsste, ist die Modellierung eines Zweiflüssigkeitsplasmas in der Kerr-Geometrie, das aus dem Fluss der Elektronen und der einfach geladenen Ionen besteht. Genau dies stellt auch den Schwerpunkt dieser Arbeit dar.

Das zweite Kapitel ist dem Flusserhaltungssatz gewidmet. Der Flusserhaltungssatz ist ein äußerst wirksames Instrument bei der Suche nach einem Plasmagleichgewicht und ist der Dreh- und Angelpunkt der gesamten Theorie, die die Grundlage für das in dieser Arbeit beschriebene Modell liefert. Das dritte Kapitel steht im Zentrum der Arbeit. Hier wird das eigentliche Zweiflüssigkeitsmodell in der Kerr-Geometrie zunächst für ein ideales Plasma vorgestellt, und anschließend auf den schwach dissipativen Fall erweitert. Das vierte Kapitel stellt das Verfahren für die numerische Lösung des Plasmagleichgewichts in dem erwähnten Modell vor.

In dem fünften Kapitel werden die Ergebnisse der numerischen Computersimulation für das Zweiflüssigkeitsmodell in der Kerr-Geometrie vorgestellt. Dabei gingen die Simulationen in zweierlei Richtungen: Zum einen wurde versucht, die Frage über die Existenz, Berechenbarkeit und Form eines Plasmagleichgewichts in einem geschlossenen System (also ohne Materieaustausch mit der Umgebung) zu beantworten. Zum anderen wurden offene Systeme simuliert. Hierbei stellte sich vor allem die Frage, ob ein Plasmagleichgewicht möglich ist, das die aus den Diskussionen in der Astrophysik bekannten sogenannten „Jets“ (schnelle Strömungen des Plasmas entlang der Rotationsachse) [1],[44],[43] beschreiben könnte.

Kapitel 2

Flusserhaltungstheorem

Das in dieser Arbeit behandelte Modell bezieht sich auf ein rotationssymmetrisches, stationäres Plasmagleichgewicht in einer Kerr-Metrik für ein nahezu ideal leitendes, schwach dissipatives Plasma.

Für ein ideales Fluid läßt sich immer ein Flusserhaltungssatz konstruieren, der in dem Viererraum die Form

$$\Omega_{\mu\nu}u^\nu = 0 \tag{2.1}$$

erhält. Geht man den gewöhnlichen Weg und behandelt das Plasma im Rahmen der idealen MHD-Beschreibung, die auf der Bewegungsgleichung eines magnetisierten Fluids und dem Ohmschen Gesetz für ein ideal leitendes Plasma basiert:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

so ergeben sich dabei fünf Flussfunktionen [32]. Allerdings sind deren Beziehungen zu den Erhaltungssätzen noch nicht zufriedenstellend aufgeklärt, und man erhält keinen Vorteil aus dem Flusserhaltungssatz. Außerdem, wie es später gezeigt wird, ist die ideale MHD-Beschreibung zu eng, um das Plasma um

ein rotierendes Schwarzes Loch widerspruchsfrei zu beschreiben. Angemessene Ausgangsbasis scheint deshalb das Mehrflüssigkeitsplasma zu sein. Die Erweiterung der MHD-Beschreibung für ein Zweiflüssigkeitsplasma sowie das generalisierte Ohmsches Gesetz wurde in Ref. [35] für den 3+1 Split der Kerr-Metrik gegeben. In dieser Arbeit wird aber von einem allgemeinen Mehrflüssigkeitsmodell des Plasmas in einem 2+2 Split der Kerr-Metrik ausgegangen, das für ein Zweiflüssigkeitsplasma spezifiziert wird.

Die Gleichung (2.1) ist dabei eine der Hauptgleichungen, die sowohl für die MHD- als auch für die Mehrflüssigkeitsbeschreibung benutzt wird, und verdient daher besondere Aufmerksamkeit. In diesem Kapitel werden die Flusserhaltungssätze für ein MHD- und Mehrflüssigkeitsplasma diskutiert. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich zunächst mit der allgemeinen Lösung des (4-dimensionalen) Flusserhaltungssatzes für das Magnetfeld eines ideal leitenden Plasmas. Aus der Lösung für diesen speziellen Fall ergibt sich dann die allgemeine Lösung des Flusserhaltungssatzes (2.1) durch Umbenennung der entsprechenden Größen.

2.1 Allgemeine Lösung der Gleichung $\Omega_{\mu\nu}u^\nu = 0$ in einem rotationssymmetrischen, stationären Gleichgewicht am Beispiel für ein ideal leitendes Plasma

In einem rotationssymmetrischen, stationären Plasmagleichgewicht sind alle physikalischen Größen unabhängig von der Zeit t und dem toroidalen Winkel φ . Diese Eigenschaften sind insbesondere auch für den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ gültig. Als Koordinatensystem wählen wir (x^μ) mit $x^0 = ct$ ($c = 1$), $x^1 = \varphi$ und zwei Koordinaten x^2, x^3 in der Poloidalebene. Ferner erscheint es bei der Beschreibung eines rotierenden Mediums als sinnvoll anzunehmen, dass alle physikalischen Größen unter der gleichzeitigen Koordinatentransformation

$\begin{pmatrix} t & \rightarrow & -t \\ \varphi & \rightarrow & -\varphi \end{pmatrix}$ invariant sind. Unter allen diesen Annahmen hat der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ die Gestalt [8]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & 0 & 0 \\ g_{10} & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

was zum Linienelement der Form

$$(ds)^2 = g_{rs} dx^r dx^s + g_{ab} dx^a dx^b \quad (2.3)$$

führt. Dabei verlaufen die Indizes r, s vom 0 zu 1 und a, b von 2 bis 3¹.

Der elektromagnetische Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

läßt sich mit den Vektoren des elektrischen $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ und magnetischen $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ Feldes auch wie folgt ausdrücken [27]:

$$F_{\mu\mu} = 0, \quad F_{i0} = E_i, \quad B_i = F_{jk} \quad (2.5)$$

Es ist auch eine weitere Darstellung des $F_{\mu\nu}$ durch das Viererpotential möglich:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (2.6)$$

wobei das Komma die partielle Ableitung bedeutet. Wir konstruieren die Komponenten zweier Vierervektoren \tilde{E}_μ und \tilde{B}_μ , die sich beim Übergang in ein

¹diese Wahl der Indices wird in der ganzen Arbeit beibehalten

anderes Koordinatensystem nach den bekannten Regeln ändern [9]. In dem momentan mitbewegten System werden die zeitlichen Komponenten gleich 0 gesetzt, während die räumlichen identisch mit den entsprechenden Komponenten des elektrischen bzw. magnetischen Feldes sind:

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{E}'_0 = 0 \\ \tilde{E}'_i = F'_{i0} \end{array} \right) \text{ und } \left(\begin{array}{l} \tilde{B}'_0 = 0 \\ \tilde{B}'_i = F'_{jk} \end{array} \right)$$

Durch den Strich wird hier stets das momentan mitbewegte System gekennzeichnet. An dieser Stelle muss betont werden, dass die Übereinstimmung der räumlichen Komponenten von \tilde{E}_μ und \tilde{B}_μ mit den Komponenten des elektrischen bzw. magnetischen Feldes auf diese Weise nur in dem momentan mitbewegten System möglich ist. Beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem verlieren die Vierervektoren \tilde{E}_μ und \tilde{B}_μ den Bezug zu den physikalischen Vektoren \vec{E} und \vec{B} .

Durch die so konstruierten Vierervektoren läßt sich nun die Lösung für das behandelte Problem herstellen. Als erstes läßt sich hierbei leicht überprüfen, dass die folgenden Beziehungen zwischen den Vierervektoren \tilde{E}_μ und \tilde{B}_μ und dem Tensor $F_{\mu\nu}$ gültig sind:

$$\tilde{E}_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu \quad (2.7)$$

$$\tilde{B}_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\nu F^{\rho\sigma} \quad (2.8)$$

$$F_{\mu\nu} = \tilde{E}_\mu u_\nu - \tilde{E}_\nu u_\mu - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho \tilde{B}^\sigma \quad (2.9)$$

Dabei ist der Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$ und $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist das Levi-Civita-Symbol

² Diese Beziehungen sind offenbar in einem mitbewegten, also mit $(u^\mu) =$

$${}^2\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & (\mu, \nu, \rho, \sigma) = \text{gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & (\mu, \nu, \rho, \sigma) = \text{ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(1, 0, 0, 0)$, System gültig. Da sie aber bereits in der Tensorschreibweise dargestellt sind, sind diese Ausdrücke auch allgemein, also in einem beliebigen Inertialsystem gültig. Auf diese Weise haben wir die kovariante Darstellung für die von uns konstruierten Vierervektoren \tilde{E}_μ und \tilde{B}_μ , sowie die Darstellung des Tensors $F_{\mu\nu}$ durch \tilde{E}_μ und \tilde{B}_μ erhalten.

Die Annahme eines ideal leitenden Plasmas schließt ein, dass der elektrische Widerstand im Plasma vernachlässigbar klein ist. Damit aber das betrachtete Problem physikalisch sinnvoll bleibt, darf der Strom nicht unendlich groß werden, was sicherlich in Anwesenheit eines elektrischen Feldes der Fall wäre. Dies kann in dem Modell nur vermieden werden, indem man verlangt, dass das elektrische Feld in einem mitbewegten System verschwindet: $\tilde{E}'_\mu = 0$. Da der Vektor \tilde{E}_μ ein Vierervektor ist, können wir diese Gleichung allgemein für ein beliebiges Koordinatensystem übernehmen:

$$\tilde{E}_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad (2.10)$$

Somit vereinfacht sich die allgemeine Darstellung des Tensors $F_{\mu\nu}$ (2.9) zu:

$$F_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho \tilde{B}^\sigma \quad (2.11)$$

Aus (2.10) und (2.11) folgt also, dass in einem ideal leitenden Plasma der Tensor $F_{\mu\nu}$ orthogonal sowohl zur Vierergeschwindigkeit u^ν als auch zum Vierervektor \tilde{B}^μ ist. Um nun die Komponenten des Tensors $F_{\mu\nu}$ in einem bestimmten Geschwindigkeitsfeld (u^μ) ausrechnen zu können braucht man nur die Lösung für den Vierervektor \tilde{B}^μ zu finden.

Wir führen die Einheitsvektoren, die sogenannten Killingvektoren, ξ^μ ein:

$$\xi^\mu = k^\mu \equiv (1, 0, 0, 0); \quad \xi^\mu = m^\mu \equiv (0, 1, 0, 0)$$

Für die beiden Vektoren gilt, dass in dem betrachteten Problem (rotationssymmetrisch, stationär) die Ableitung einer beliebigen physikalischen Größe A in die Richtung (ξ^μ) verschwindet:

$$\xi^\mu A_{,\mu} = 0 \quad (2.12)$$

Ferner nehmen wir an, dass diese Eigenschaft auch für das Viererpotential A_μ gilt.

Wir können nun die Gleichung für \tilde{B}^μ konstruieren. Dafür betrachten wir zunächst die Komponenten F_{ra} des elektromagnetischen Feldstärketensors. Für sie gilt offenbar in der gegebenen Symmetrie:

$$F_{ra} = A_{a,r} - A_{r,a} = -A_{r,a} \quad (2.13)$$

Leitet man diese Beziehung zusätzlich nach x^b ab, so bekommt man: $F_{ra,b} = -A_{r,ab} = -A_{r,ba} = F_{rb,a}$. Damit ergibt sich für \tilde{B}^μ nach (2.11) die folgende Gleichung:

$$0 = F_{ra,b} - F_{rb,a} = \tilde{\epsilon}_{rsab} \left[\left(\sqrt{-g} u^s \tilde{B}^b \right)_{,b} - \left(\sqrt{-g} u^b \tilde{B}^s \right)_{,b} + \left(\sqrt{-g} u^s \tilde{B}^a \right)_{,a} - \left(\sqrt{-g} u^a \tilde{B}^s \right)_{,a} \right] \quad (2.14)$$

In dieser Gleichung sind alle Indizes fixiert. Es wird hier nicht über a und b summiert. Führt man die Summenkonvention wieder ein, so läßt sich die Gleichung (2.14) wie folgt umschreiben:

$$\left(\sqrt{-g} u^s \tilde{B}^a \right)_{,a} - \left(\sqrt{-g} u^a \tilde{B}^s \right)_{,a} = 0, \quad s = 0, 1 \quad (2.15)$$

Aus (2.8) sehen wir, dass \tilde{B}^μ senkrecht zur Eulerschen Vierergeschwindigkeit u_μ ist. Dies können wir zugleich als Nebenbedingung für die Gleichung (2.15) interpretieren:

$$\tilde{B}^\mu u_\mu = 0 \quad (2.16)$$

Für die Lösung der Gleichung (2.15) benutzen wir den Ansatz:

$$\tilde{B}^\mu = \alpha u^\mu + b^\mu \quad (2.17)$$

wobei b^μ wiederum eine Lösung von (2.15) ist. Wegen der Nebenbedingung (2.16) erhalten wir

$$0 = \tilde{B}^\mu u_\mu = \alpha u^\mu u_\mu + u_\mu b^\mu = \alpha + u_\mu b^\mu$$

und daraus für die Konstante α :

$$\alpha = -u_\mu b^\mu.$$

Da mit dem Ansatz (2.17) für \tilde{B}^μ die Gleichung (2.15) linear in b^μ wird, können wir sie getrennt für den poloidalen und symmetrischen Teil behandeln. Die Lösung in der poloidalen Ebene ergibt sich aus der Betrachtung der Komponenten F_{rs} ($r, s = 0, 1$) des elektromagnetischen Feldstärketensors. Einerseits sind alle diese Komponenten wegen der Symmetrieannahmen gleich Null, auf der anderen Seite gilt die allgemeine Darstellung (2.11) für $F_{\mu\nu}$. Man erhält somit die Bedingung:

$$0 = F_{rs} = -\epsilon_{rsab} u^a B^b$$

Damit sie erfüllt ist, muss $B^b \sim u^b$ sein. In dem gewählten Ansatz hat es zur Folge, dass der poloidale Teil von b^μ verschwindet. Somit ergibt sich die Lösung für b^a :

$$b^a = 0 \quad (2.18)$$

Folglich liegt der Vektor b^μ in der Symmetrie-Ebene. Da sich aber jeder Vektor in der Symmetrie-Ebene durch die Linearkombination beider Killingvektoren darstellen lässt, können wir für die Lösung der verbliebenen Gleichung in der Symmetrie-Ebene

$$\left(\sqrt{-g} u^a b^s\right)_{,a} = 0 \quad (2.19)$$

den Ansatz für b^μ in folgender Form schreiben:

$$b^\mu = -n C K^\mu = -nC (k^\mu + \beta m^\mu) \quad (2.20)$$

Hier wurde der Vektor $K^\mu \equiv k^\mu + \beta m^\mu$ mit noch zu bestimmendem Skalar β eingeführt. Durch den Faktor n wird es später ermöglicht, die Gleichung für b^μ mit Hilfe des Massenerhaltungssatzes zu vereinfachen. Die Lösung wird somit durch die beiden Koeffizienten C und β bestimmt.

Die beiden Koeffizienten sind natürlich Flussfunktionen. Dies folgt aus der Gleichung (2.19) und dem Massenerhaltungssatz. Betrachtet man z.B. die Gleichung (2.19) für $s = 0$, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\sqrt{-g} u^a b^0\right)_{,a} = \left(\sqrt{-g} u^a n C\right)_{,a} \\ &= \left(\sqrt{-g} n u^a\right)_{,a} C + \left(\sqrt{-g} n u^a\right) C_{,a} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Wegen des Massenerhaltungssatzes, der sich in unserem Problem auf die poloidale Ebene reduzieren lässt $\left(\left(\sqrt{-g} n u^\mu\right)_{,\mu} = \left(\sqrt{-g} n u^a\right)_{,a} = 0\right)$, verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Um die Gleichung (2.21) zu erfüllen, muss dann auch der zweite Term gleich Null sein oder:

$$u^a C_{,a} = 0 \quad (2.22)$$

Die analoge Bedingung für den anderen Koeffizienten

$$u^a \beta_{,a} = 0 \quad (2.23)$$

erhält man, wenn man die Gleichung (2.19) für $s = 1$ betrachtet.

Die Bedingung (2.22) bzw. (2.23) ist die notwendige und ausreichende Bedingung für eine Flussfunktion. Damit werden die beiden Koeffizienten C und β konstant entlang der poloidalen Flusslinien.

Wir können jetzt die Grössen \tilde{E}_μ , \tilde{B}^μ und $F_{\mu\nu}$ für ein vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld u^μ durch diese zwei Parameter C und β darstellen:

$$\tilde{E}_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad (2.24)$$

$$\tilde{B}^\mu = \alpha u^\mu + b^\mu = -nC \left[K^\mu - (K^\lambda u_\lambda) u^\mu \right] \quad (2.25)$$

$$F_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho \tilde{B}^\sigma = nC \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho K^\sigma \quad (2.26)$$

Dabei ist nur eine der Funktionen willkürlich. Die Funktion β läßt sich aus der Bedingung bestimmen, dass $F_{\mu\nu}$ orthogonal zu u^μ und \tilde{B}^μ bzw. zu u^μ und K^μ ist. Mit der Definition von K^μ und $F_{\mu\nu}$ aus (2.26) bekommt man die Gleichung für β nach der expliziten Ausrechnung der Bedingung $K^\mu F_{\mu\nu} = 0$:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho (k^\sigma + \beta m^\sigma) (k^\mu + \beta m^\mu) = 0$$

Noch anschaulicher läßt sich die Bedingung für β darstellen, wenn man von der Potentialdarstellung für den Tensor $F_{\mu\nu}$ ausgeht:

$$0 = K^\mu F_{\mu\nu} = K^\mu (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) = - (A_{0,\nu} + \beta A_{1,\nu}) \quad (2.27)$$

$$\nu = 0, 1, 2, 3$$

Diese Gleichung kann nur dann erfüllt werden wenn die beiden Potentiale A_0 und A_1 voneinander abhängig sind. Da außerdem β eine Flussfunktion ist, müssen auch sie Flussfunktionen und damit konstant entlang den Strömungslinien sein. Mit anderen Worten, die Potentiale A_0 und A_1 sind Konstanten der Bewegung. Dies folgt auch unmittelbar aus der Annahme idealer Leitfähigkeit und der damit verbundenen Bedingung (2.10), wenn man sie für $\mu = r = 0, 1$ betrachtet:

$$0 = F_{r\nu}u^\nu = -A_{r,\nu}u^\nu = -A_{r,a}u^a \quad (2.28)$$

Als Beispiel wenden wir die erreichten Ergebnisse auf ein konkretes Modell an. Es wird eine Flussfunktion Ψ eingeführt. Damit sind die Linien $\Psi = \text{const}$ auch die Strömungslinien. In der poloidalen Ebene führen wir die Koordinaten $x^2 = \Psi$, $x^3 = \theta$ ein. θ definiert man dabei als eine winkelartige Koordinate.

Da nach (2.28) die A_r , ($r = 0, 1$) die Flussfunktionen sind, müssen sie auch die Funktionen von Ψ sein: $A_r = A_r(\Psi)$. Die noch verbliebene Eichfreiheit von A_r nutzen wir an dieser Stelle aus, um eine von den Komponenten, z. B. A_1 , mit der Koordinate Ψ zu identifizieren, während die andere Komponente sich dann aus der Gleichung (2.27) bestimmen läßt:

$$A_1 \equiv \Psi, \quad \beta = -\frac{dA_0(\Psi)}{d\Psi} \quad (2.29)$$

Aus der Potentialdarstellung des elektromagnetischen Feldstärketensors und (2.29) bekommen wir für F_{13} und F_{12} sofort:

$$F_{13} = 0; \quad F_{12} = -1$$

Außerdem ist unter den von uns gewählten Koordinaten $u^2 = 0$. Setzt man $F_{12} = -1$ in die Darstellung für $F_{\mu\nu}$ (2.26) ein, so bekommt man den folgenden Ausdruck für die Konstante C :

$$C = \frac{1}{\sqrt{-gn}u^3} \quad (2.30)$$

Mit (2.26) und (2.30) erhalten wir nun für F_{23} :

$$F_{23} = \frac{\beta u^0 - u^1}{u^3} \quad (2.31)$$

Die übrigen nicht trivialen Werte von $F_{\mu\nu}$, F_{0a} $a = 2, 3$ bekommt man aus der Gleichung (2.27) und den schon bekannten Werten von F_{12} und F_{13} , wenn man berücksichtigt, dass wegen der Symmetrieanahmen $F_{ra} = -A_{r,a}$, ($r = 0, 1$) ist:

$$F_{0a} = -\beta F_{1a} \quad (2.32)$$

Demnach haben wir alle Komponenten des Tensors $F_{\mu\nu}$ und somit auch des Vektors \tilde{B}^μ für die vorgegebene Geometrie (n , $g_{\mu\nu}$) und das Geschwindigkeitsfeld u^μ mittels einer einzigen Flussfunktion β dargestellt.

2.2 Flusserhaltungssatz in einem MHD-Plasma

Flusserhaltungssätze gelten normalerweise in einem Plasma, in dem keine Dissipationsprozesse stattfinden. Das klassische Beispiel hierfür ist das Kelvin-Helmholtz Theorem in einem neutralen Fluid mit der Zustandsgleichung $p = p(\rho)$. Die kräftefreie Eulersche Bewegungsgleichung hat in diesem Fall die Form [36]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad (2.33)$$

Mit dem durch $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ definierten Wirbel läßt sich die linke Seite schreiben

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Die Eulersche Bewegungsgleichung wird damit zu

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \quad (2.34)$$

In einem dissipationsfreien Plasma gilt für die Entropie $ds = 0$. Der Term $\frac{1}{\rho}\nabla p$ aus (2.34) läßt sich damit aus der bekannten thermodynamischen Beziehung

$$\frac{1}{\rho}dp = dh - Tds \quad (2.35)$$

ausdrücken, wobei h die Enthalpie pro Masse und T die Temperatur ist. Mit $ds = 0$ wird damit $\frac{1}{\rho}dp = dh$ oder:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h$$

so, dass wir endgültig für die Eulersche Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla U = 0 \quad (2.36)$$

bekommen, wobei die Bernoulli-Funktion $U = \frac{1}{2}v^2 + h$ eingeführt worden war. Die Helmholtzgleichung erhält man nun, indem man die Rotation von (2.36) bildet:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (2.37)$$

Diese Gleichung ist ein spezieller Fall der Gleichung für ein eingefrorenes Vektorfeld $\boldsymbol{\Omega} \equiv \nabla \times \mathbf{V}$, das sich mit der Fluidgeschwindigkeit \mathbf{v} bewegt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0; \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \nabla \times \mathbf{V} \quad (2.38)$$

Die Gleichung für \mathbf{V} erhält man dabei durch die Integration von (2.38):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nabla \Phi = 0 \quad (2.39)$$

mit einem skalaren Potential Φ . Wählt man $\mathbf{V} = \mathbf{A}$ und dementsprechend $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}$, so bekommt man mit dem bekannten Ausdruck $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$ für das elektrische Feld ($c = 1$) die Gleichung:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.40)$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Gleichung der nichtrelativistische Limes von (2.10) ist. Wie wir aber im letzten Abschnitt gesehen haben ist die Gleichung (2.10) eine Folge der Annahme eines ideal leitenden Plasmas. Somit gilt auch (2.40) nur in einem solchen Plasma. Hier haben wir aber (2.40) als

die Helmholtz-Gleichung für das magnetische Feld \mathbf{B} erhalten. Damit wird der Fluss des magnetischen Feldes durch eine mitbewegte Schleife erhalten. Vielmehr kann man behaupten, dass die ideale Leitfähigkeit die notwendige und ausreichende Bedingung für die Erhaltung des magnetischen Flusses durch eine mitbewegte Schleife ist. Das Kelvin-Helmholtz Theorem läßt sich auch für die anderen Modelle eines idealen Fluids finden. Meistens haben aber die entsprechenden Vektoren \mathbf{V} und $\mathbf{\Omega}$ eine viel kompliziertere Gestalt.

Ein weiteres Problem bei der MHD-Beschreibung, der sich nicht zufriedenstellend zu lösen scheint, rührt von der starren Bindung des elektrischen Potentials an die magnetische Flussfunktion her. Wie wir bereits gesehen haben, folgte aus (2.27), dass die Funktionen A_0 und A_1 die Flussfunktionen sind, und damit voneinander abhängig. Zu einer kompletten Beschreibung des Plasmas in einer Kerr-Metrik gehören außer der Gleichung für die Bestimmung der Flussfunktion χ und der Normierungsgleichung auch die Ampere-Gleichung, durch die das Viererpotential A_μ bestimmt werden soll. Wie es in den späteren Kapiteln gezeigt wird, lassen sich dabei die daraus resultierenden vier Gleichungen getrennt für die poloidale Ebene und für die Symmetrie-Ebene behandeln. Das System zweier Gleichungen für $\mu = r = 0, 1$ setzt aber zwei voneinander unabhängigen Funktionen A_r voraus, was im Widerspruch mit (2.27) steht.

Es ist daher zweckvoll die MHD-Beschreibung zu verlassen, und das Plasma im Rahmen der Mehrflüssigkeitstheorie zu behandeln. Der erste Schritt, den man hierbei machen kann, ist ein Plasma zu beschreiben, das aus zwei Flüsse besteht, dem Fluss der Elektronen e und dem Fluss der Ionen i . Für jede Teilchensorte gilt dabei die Bewegungsgleichung:

$$\rho_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_j \nabla \right) \mathbf{v}_j + \nabla p_j = e_j n_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) \quad (2.41)$$

wobei die beiden Flüsse durch das elektromagnetische Feld miteinander wech-

selwirken.

Es gibt hierbei die formale Brücke vom Zweiflüssigkeitsplasma mit Elektronen und einfach geladenen Ionen zu dem MHD-Plasma [27]. Vernachlässigt man die Elektronenmasse ($m_e \sim \rho_e \rightarrow 0$) so wird die Ionengeschwindigkeit \mathbf{v}_i zugleich auch die Schwerpunktschwindigkeit \mathbf{v} . Nimmt man zusätzlich die Quasineutralität ($n_e = n_i = n$) an, so läßt sich die Elektronengeschwindigkeit \mathbf{v}_e wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{|e|n} \quad (2.42)$$

Die Summe beider Bewegungsgleichungen ergibt die aus der MHD-Theorie mit $p = p_i + p_e$ bekannte Bewegungsgleichung, während die Bewegungsgleichung der Elektronen zum generalisierten Ohmschen Gesetz anstelle von (2.40) führt:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{|e|n} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \quad (2.43)$$

2.3 Flusserhaltungssatz in einem isothermen Mehrflüssigkeitsplasma

In allen Modellen einer idealen Flüssigkeit hängt die exakte Form des Flusserhaltungssatzes in erster Linie von der jeweiligen Zustandsgleichung $p = p(\rho, s)$ ab. Die im nichtrelativistischen Fall meist verbreitete Annahme konstanter Entropiedichte im ganzen Flüssigkeitsvolumen führt zur gewöhnlichen Helmholtz-Gleichung (2.37). Die entsprechende Gleichung im Rahmen der ART wurde vom Taub [25] abgeleitet. Soll die Entropiedichte im Flüssigkeitsvolumen sich im Laufe der Zeit ändern, so benötigt man ein raffinierteres Vorgehen. Diese Situation wurde bereits bei Eckart [26] und später bei Elsässer [28] diskutiert. Das Ergebnis war, dass der Vektor \mathbf{V} , dessen Wirbel erhalten bleibt, sich von der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch den Vektor $(-r\nabla s)$ unterscheidet. Betrachtet man nun das nichtrelativistische Mehrflüssigkeitsplasma, so muss man für \mathbf{V} den Ansatz

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{v}_j - r_j \nabla s_j + \frac{e_j}{m_j} \mathbf{A} \quad (2.44)$$

wählen. Damit wird, entsprechend den drei Sumanden des Vektors \mathbf{V} , das „drei-Wirbel Theorem“ festgelegt. In der ART hat man für jede Teilchensorte anstelle von (2.39) (die zu (2.38) führt) die Gleichungen, die (2.10) und (2.6) entsprechen:

$$u^\nu \Omega_{\mu\nu} = 0 \quad (2.45)$$

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv V_{\nu,\mu} - V_{\mu,\nu} \quad (2.46)$$

Für ein dissipationsfreies ($s = \text{const}$) Mehrflüssigkeitsplasma wurde der Vierervektor V_ν bei Lichnerowicz [33] und Carter [34] gegeben. Für ein Plasma, in dem die Entropie nicht erhalten bleibt, wurde der Vektor V_ν in [37] gegeben und zwar:

$$V_\mu = \frac{\sigma}{\rho} u_\mu + r s_{,\mu} + \frac{e}{m} A_\mu \quad (2.47)$$

wobei σ die relativistische Enthalpie pro Volumen und u^μ die Eulersche Vierergeschwindigkeit ist.

In dieser Arbeit wurde aber eine etwas andere Situation betrachtet, die vor allem für die Diskussionen in der Astrophysik interessant erscheinen dürfte. Es wird angenommen, dass das Strahlungsfeld um das Plasma herum wie ein Wärmebehälter für die Elektronen und Ionen wirkt, wodurch ihre konstante Temperatur gewährleistet ist.

Zur Ableitung der Flusserhaltungsgleichung (2.45) beginnen wir mit dem Energie-Impuls Tensor T_μ^ν für ein ideales Elektronen- bzw. Ionenfluid. Die beiden Fluide wechselwirken miteinander nur über das elektromagnetische Feld, so dass die relativistische Bewegungsgleichung für jede Teilchensorte sich wie folgt

$$T_{\mu;\nu}^\nu = enF_{\mu\nu}u^\nu \quad (2.48)$$

schreiben läßt. Mit dem Semikolon wird hierbei die kovariante Ableitung bezeichnet. Die Kopplung der beiden Flüsse durch das elektromagnetische Feld auf der rechten Seite von (2.48) hat jetzt zur Folge, dass der magnetische Fluss weder für die Bewegung der Elektronen noch der Ionen erhalten bleibt.

Die Form des Energie-Impuls Tensors in einer idealen Flüssigkeit ist von vielen theoretischen Büchern bekannt (z.B. [38], [36], [9]):

$$T_\mu^\nu = \sigma u_\mu u^\nu - p \delta_\mu^\nu \quad (2.49)$$

Der letzte Term in dieser Gleichung ist das skalare Druck p in dem mitbewegten System multipliziert mit dem Kronekersymbol. Der Skalar σ hängt von der

jeweiligen Zustandsgleichung ab. Um den zu bestimmen, betrachten wir die kovariante Divergenz des Energie-Impuls-Tensors:

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = \left(\frac{\sigma}{\rho}u_{\mu}\right)_{;\nu} \rho u^{\nu} + \frac{\sigma}{\rho}u_{\mu}(\rho u^{\nu})_{;\nu} - p_{,\mu} \quad (2.50)$$

Dabei haben wir zunächst den ersten Term auf der rechten Seite von (2.49) gleichzeitig mit der Dichte ρ multipliziert und geteilt. Wegen des Massenerhaltungssatzes verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von (2.50). Betrachten wir nun das Produkt $T_{\mu;\nu}^{\nu}u^{\mu}$. Wegen (2.48) muss es gleich Null sein, auf der anderen Seite haben wir mit der Normierung $u_{\mu}u^{\mu} = c^2$ und (2.50):

$$T_{\mu;\nu}^{\nu}u^{\mu} = c^2\rho \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_{;\nu} u^{\nu} + \sigma u_{\mu;\nu}u^{\mu}u^{\nu} - u^{\mu}p_{,\mu} \quad (2.51)$$

wegen der Normierung ist außerdem

$$(u_{\mu}u^{\mu})_{;\nu} = 2u_{\mu;\nu}u^{\mu} = 2u_{\mu}u_{;\nu}^{\mu} = 0 \quad (2.52)$$

wonach der zweite Term auf der rechten Seite von (2.51) verschwindet, so dass wir die Bedingung für σ erhalten:

$$c^2\rho \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_{;\nu} u^{\nu} - u^{\mu}p_{,\mu} = 0 \quad (2.53)$$

Führt man die Eigenzeit τ ein, so wird diese Bedingung mit $u^{\nu}p_{,\nu} \equiv \frac{dp}{d\tau}$ und $u^{\nu} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_{;\nu} \equiv \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)$ zu:

$$d \left(\frac{\sigma}{\rho}\right) = \frac{1}{c^2\rho} dp \quad (2.54)$$

Um nun (2.54) integrieren zu können, muss die rechte Seite als totales Differential dargestellt werden. Das lässt sich in gewissen Fällen durch die thermodynamischen Potentiale machen. So haben wir für die Enthalpie h bzw. für die freie Enthalpie μ die bekannten thermodynamischen Beziehungen [10]:

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp \quad (2.55)$$

$$d\mu = -sdT + \frac{1}{\rho}dp \quad (2.56)$$

Damit können wir (2.54) für ein adiabatisches ($ds = 0$) bzw. ein isothermes ($dT = 0$) Plasma integrieren:

$$\sigma = \begin{cases} \rho \left(1 + \frac{h}{c^2}\right); & \text{adiabatisches Plasma} \\ \rho \left(1 + \frac{\mu}{c^2}\right); & \text{isothermes Plasma} \end{cases} \quad (2.57)$$

In anderen Fällen würde ein zusätzliches Clebschpotential benötigt.

Hierbei haben wir für die Integrationskonstante 1 gewählt. Damit erhält σc^2 im Falle $h = 0$ bzw. $\mu = 0$ den physikalischen Sinn der Ruhenergie. In einem isothermen Plasma wird σ somit die relativistische freie Enthalpie pro Volumen in einem mitbewegten System (mit $c = 1$).

Den Flusserhaltungssatz erhalten wir jetzt aus der Gleichung (2.48), indem wir für den Tensor $F_{\mu\nu}$ die Potentialdarstellung einsetzen und für die linke Seite den Ausdruck aus der Bewegungsgleichung (2.50) nehmen. Geteilt durch die Dichte ρ ergibt sich daraus mit $\rho = mn$

$$u^\nu \left(\left(\frac{\sigma}{\rho} u_\mu \right)_{;\nu} + \frac{e}{m} A_{\mu;\nu} - \frac{e}{m} A_{\nu;\mu} \right) - \frac{1}{\rho} p_{,\nu} = 0 \quad (2.58)$$

Mit (2.54) und diesmal $c = 1$ erhalten wir

$$\frac{1}{\rho} p_{,\mu} = \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)_{,\mu} = u^\nu \left(\frac{\sigma}{\rho} u_\nu \right)_{;\mu} \quad (2.59)$$

wobei wir in dem letzten Schritt die Normierung für u^ν ausgenutzt haben. Mit (2.59) läßt sich (2.58) umschreiben:

$$u^\nu \left(\left(\frac{\sigma}{\rho} u_\mu + \frac{e}{m} A_\mu \right)_{;\nu} - \left(\frac{\sigma}{\rho} u_\nu + \frac{e}{m} A_\nu \right)_{;\mu} \right) = 0 \quad (2.60)$$

was der Gleichung der Form

$$\Omega_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad (2.61)$$

mit

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv V_{\nu;\mu} - V_{\mu;\nu} = V_{\nu,\mu} - V_{\mu,\nu} \quad (2.62)$$

und

$$V_\mu \equiv \frac{\sigma}{\rho} u_\mu + \frac{e}{m} A_\mu \quad (2.63)$$

entspricht. Für jede Symmetrierichtung $\mu = r$ gilt dabei:

$$u^\nu \Omega_{r\nu} = -u^a V_{r,a} \equiv -\frac{dV_r}{d\tau} \quad (2.64)$$

Auf diese Weise haben wir den Vierervektor V_μ konstruiert, für dessen Wirbel $\Omega_{\mu\nu}$ der Flusserhaltungssatz (2.61) gilt. Schreibt man diese Gleichung für die räumlichen Komponenten der kanonischen Geschwindigkeit V^i ($\mu = i$) in

einem spezialrelativistischen Fall (ohne Gravitation) um, so lassen sich diese drei Gleichungen ($i = 1, 2, 3$) wie folgt zusammenfassen:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nabla U = 0 \quad (2.65)$$

mit $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$, $\boldsymbol{\Omega} \equiv \nabla \times \mathbf{V}$ und $U \equiv cV_0$ - der relativistischen Bernoulli-Funktion. Diese Gleichung ist die Helmholtz-Gleichung (vgl. (2.39)), so dass der Fluss des räumlichen Wirbels $\boldsymbol{\Omega}$ durch eine mitbewegte Schleife erhalten bleibt. Es muss dabei betont werden, dass, da die durchschnittliche Geschwindigkeiten der Elektronen und Ionen unterschiedlich sind, die Flusserhaltungssätze ihrer kanonischen Wirbel in verschiedenen Koordinatensystemen gelten.

Die Lösung von (2.61) für ein rotationssymmetrisches Gleichgewicht erfolgt nun genauso wie es in dem vorigen Kapitel beschrieben wurde, wobei man $F_{\mu\nu}$ durch $\Omega_{\mu\nu}$ und A_μ durch V_μ ersetzt.

Kapitel 3

Plasmagleichungen

Für die Beschreibung des Plasmas definieren wir die folgenden Größen [27]:

- n - die Teilchendichte
- u^a, u_r - die Fluidgeschwindigkeit in der poloidalen Ebene bzw. in der Symmetrierrichtungen.
- σ - die relativistische freie Enthalpie wie sie in dem vorigen Kapitel eingeführt worden war.
- χ - die Flussfunktion, also die Funktion, die konstante Werte entlang der Strömungslinien annimmt. Es erweist sich als sehr bequem, die Plasma-parameter durch eine solche Funktion darzustellen.
- $V_r(\chi)$ - die Komponenten der kanonischen Geschwindigkeit in den Symmetrierrichtungen, die sich als Flussfunktionen und somit als Funktionen von χ zeigen.
- A_μ - die Komponenten des Viererpotentials.

Jede der Teilchensorten und damit der Flüsse besitzt dabei einen eigenen Satz dieser Größen.

Für die Bestimmung der Zusammenhänge zwischen diesen Größen stehen uns zur Verfügung die folgenden Gleichungen [30]:

- Der Massenerhaltungssatz. Mit Hilfe des Massenerhaltungssatzes werden die poloidalen Komponenten der Fluidgeschwindigkeit u^a durch die Flussfunktion χ ausgedrückt.
- Die Normierungsgleichung. Die Normierungsgleichung, die die Tatsache beschreibt, dass in einem Viererraum das Skalarprodukt der Vierergeschwindigkeit mit sich selbst eine feste konstante Größe für alle Objekte ist, wird im folgenden als die Dichte-Gleichung, also die Gleichung für die Bestimmung der Teilchendichte n , bei bekannten Werten der Vierergeschwindigkeit u_μ interpretiert werden.
- Die Bewegungsgleichung. Die Bewegungsgleichung ist die Schlüsselgleichung, in der alle obengenannten Plasmagrößen auftreten. Sind die Abhängigkeiten der Plasmagrößen von der Flussfunktion χ bekannt, so läßt sich die Bewegungsgleichung zur χ -Gleichung umformen.
- Die Zustandsgleichung. Die Zustandsgleichung liefert den Zusammenhang zwischen der relativistischen freien Enthalpie und der Teilchendichte. Für die Zustandsgleichung wurde in dieser Arbeit das Modell eines idealen Gases angenommen.
- Ferner stehen für die Bestimmung der elektromagnetischen Größen die folgenden beiden Gleichungen zur Verfügung:
 - Die Kontinuitätsgleichung für die Ladungsdichte. Die Kontinuitätsgleichung wird ähnlich wie der Massenerhaltungssatz durch die Einführung einer passenden Stromfunktion Ψ gelöst. Nach der Annahme eines bestimmten Modells wird dann später der Zusammenhang zwischen dieser Stromfunktion mit den Flussfunktionen χ_j verschiedener Teilchenflüsse ermittelt.

- Die Ampere-Gleichung. Die Ampere-Gleichung dient grundsätzlich für die Bestimmung des Viererpotentials A_μ . Die Annahme der Quasineutralität erlaubt jedoch später die Betrachtung der Ampere-Gleichung zu vermeiden, indem man sie durch die einfacheren algebraischen Gleichungen ersetzt [29].

3.1 Gleichungen für das Mehrflüssigkeitsplasma in einem Rotationssymmetrischen Gleichgewicht

Für jede Flüssigkeitssorte läßt sich die Lösung des Massenerhaltungssatzes

$$\left(\sqrt{-g}nu^\mu\right)_{,\mu} = \left(\sqrt{-g}nu^a\right)_{,a} = 0 \quad (3.1)$$

in einem rotationssymmetrischen Gleichgewicht durch die Wahl einer geeigneten Flussfunktion χ darstellen [27]:

$$u^a = \frac{1}{\sqrt{-g}n} \tilde{\epsilon}^{1ab} \chi_{,b} \quad (3.2)$$

mit $\tilde{\epsilon}^{1ab}$ dem Permutationssymbol. Die poloidalen Flusslinien sind demnach durch $\chi = \text{Const}$ gegeben.

In der Symmetrieebene $\mu = r = 0, 1$ wird die Helmholtzgleichung (2.61) zu:

$$0 = -V_{r,\nu} u^\nu = -V_{r,a} u^a \quad (3.3)$$

Ähnlich wie in der Gleichung (2.28) konstatieren wir, dass die Komponenten V_r Flussfunktionen, und damit Funktionen von χ , sind:

$$V_r = V_r(\chi)$$

Zusammen mit den entsprechenden Komponenten von A_ν legen die beiden Flussfunktionen bis auf den Faktor $\frac{\sigma}{\rho}$ die beiden Komponenten der Vierergeschwindigkeit u_ν in die Symmetrierichtungen fest:

$$u_r = \frac{\rho}{\sigma} \left(V_r(\chi) - \frac{e}{m} A_r \right) \quad (3.4)$$

Der Zusammenhang zwischen $\frac{\sigma}{\rho}$ und der Teilchendichte n wird aus der Zustandsgleichung abgeleitet. Für das Modell eines idealen Gases ist die Zustandsgleichung durch

$$p = nk_B T \quad (3.5)$$

bzw. $p = Const \cdot \rho^\gamma$, $\gamma = C_p/C_v$ für den adiabatischen Prozess gegeben [11]. Zusammen mit den Beziehungen (2.54) bzw. (2.56) und $\rho \equiv mn$ erhält man die einfachen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dh &= Const \cdot \gamma m^{\gamma-1} n^{\gamma-2} dn; & \text{adiabatisches Plasma} \\ d\mu &= \frac{k_B T}{m} \frac{dn}{n}; & \text{isothermes Plasma} \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit der offensichtlichen Lösung:

$$h = Const \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} m^{\gamma-1} n^{\gamma-1} \quad (3.7)$$

für ein adiabatisches Plasma bzw.

$$\mu = \frac{k_B T}{m} \ln \frac{n}{n_0} \quad (3.8)$$

für ein isothermes Plasma. Zusammen mit (2.57) bekommt man endgültig die Beziehung:

$$\frac{\sigma}{\rho} = \begin{cases} 1 + \frac{h}{c^2} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho c^2}; & \text{adiabatisches Plasma} \\ 1 + \frac{\mu}{c^2} = 1 + \frac{k_B T}{mc^2} \ln \frac{n}{n_0}; & \text{isothermes Plasma} \end{cases} \quad (3.9)$$

Nimmt man jetzt an, dass die Funktionen χ und A_ν bekannt sind, so lässt sich die Normierungsgleichung als die Gleichung für die Dichte n interpretieren:

$$1 = g^{rs} u_r u_s + g_{ab} u^a u^b \quad (3.10)$$

wobei die Komponenten der Vierergeschwindigkeit u_ν nach (3.4) Funktionen der Dichte n sind.

Damit werden die Flussparameter bis auf die Flussfunktion χ und die Vorgabe von V_r durch die Gleichungen (3.2), (3.4) und (3.10) festgelegt. Unter anderem werden auch alle Komponenten von $\Omega_{\mu\nu}$ bis auf Ω_{ab} bestimmt:

$$\Omega_{rs} = 0; \quad \Omega_{ra} = -V_{r,a} = -V'_r \chi_{,a} \quad (3.11)$$

wobei der Strich die Ableitung nach χ bedeutet. Allerdings gibt es analog zu (2.26) und (2.27) auch die allgemeine Lösung für $\Omega_{\mu\nu}$:

$$\Omega_{\mu\nu} = nC(\chi) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho K^\sigma \quad (3.12)$$

$$\beta = -\frac{V'_0(\chi)}{V'_1(\chi)} \quad (3.13)$$

Dabei wurden die Koeffizienten von (2.26) und (2.27) übernommen. Vergleicht man diese Lösung mit den Ergebnissen (3.2) und (3.11), so findet man den Zusammenhang:

$$C(\chi) = -V'_1(\chi) \quad (3.14)$$

Speziell für $\mu = 2$ und $\nu = 3$ ergibt sich damit die allgemeine Lösung für $\Omega_{\mu\nu}$:

$$\Omega_{23} = \sqrt{-g} n V_r'(\chi) u^r \quad (3.15)$$

Auf der anderen Seite ist $\Omega_{\mu\nu}$ durch (2.62) und V_μ durch (2.63) definiert, so dass gilt:

$$\Omega_{23} \equiv \left(\frac{\sigma}{\rho} u_3 \right)_{,2} - \left(\frac{\sigma}{\rho} u_2 \right)_{,3} + \frac{e}{m} F_{23} \quad (3.16)$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für Ω_{23} (3.15) und (3.16) gleich, so bekommt man die Gleichung für die Bestimmung der Flussfunktion χ .

Der komplette Satz der Gleichungen (3.2), (3.4), (3.10) und (3.15)-(3.16) für die Bestimmung der unbekanntenen Variablen u_r , n und χ ¹ ist damit für ein beliebiges Koordinatensystem gegeben, so dass eine beliebige Anzahl der Teilchensorte erlaubt bleibt.

Für eine komplette Beschreibung des Plasmas müssen noch das Viererpotential A_ν und die Flussfunktionen V_r bestimmt werden. Die Flussfunktionen V_r lassen sich dabei im Rahmen eines idealen Modells des Plasmas nicht eindeutig festlegen. Es wird hierfür ein Dissipationsmodell benötigt. Darauf wird in dieser Arbeit später eingegangen.

Das Viererpotential A_ν lässt sich aus der Ampere-Gleichung ermitteln, wobei wir noch die Freiheit haben, ein bestimmtes Koordinatensystem und eine bestimmte Eichung zu wählen. Zu diesem Zweck führen wir in der poloidalen Ebene die neue Funktion Ψ ein, und zwar so, dass die Linien $\Psi = Const$ die Projektionen des Viererstroms j^μ auf diese Ebene sind. Ψ wird damit eine Stromfunktion. Weiterhin wählen wir das Koordinatensystem so aus, dass x^2

¹die Funktionen A_ν und $V_\nu(\chi)$ werden hier als bekannt vorausgesetzt

die „radiale“ Koordinate mit $x^2 = \Psi$ wird, während x^3 eine winkelartige Koordinate ist.

Es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\left(\sqrt{-g}j^\nu\right)_{,\nu} = 0 \quad (3.17)$$

die ähnlich wie der Massenerhaltungssatz durch die Einführung einer Stromfunktion $\tilde{I} \equiv -\frac{I(\Psi)}{4\pi}$ gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} j^2 &= \tilde{\epsilon}^{123} \frac{1}{\sqrt{-g}} \tilde{I}_{,3} = 0 \\ j^3 &= \tilde{\epsilon}^{132} \frac{1}{\sqrt{-g}} \tilde{I}_{,2} = \frac{1}{4\pi\sqrt{-g}} I'(\Psi) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Stromfunktion $I(\Psi)$ hängt natürlich in gewisser Weise von den Flussfunktionen verschiedener Teilchensorten ab. Für den Viererstrom j^μ haben wir nach der Definition den Ausdruck:

$$j^\mu = \sum_j enu^\mu \quad (3.19)$$

Zusammen mit den Gleichungen (3.18) und (3.2) ergibt sich daraus die folgende Beziehung zwischen der Stromfunktion $I(\Psi)$ und den Flussfunktionen χ_j :

$$\sum_j e\chi = -\frac{I(\Psi)}{4\pi} + const \quad (3.20)$$

wobei über alle Teilchensorten summiert wird. Für das Viererpotential A_ν erscheint es bequem, die Eichung zu wählen, in der das Vektorpotential \mathbf{A} tangential zu den Oberflächen des konstanten Ψ ist:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi = 0 \quad (3.21)$$

Ist Ψ eine radiale Koordinate, so läßt sich diese Gleichung normalerweise durch die Wahl einer geeigneten Eichfunktion erfüllen. Damit wird

$$A_2 = 0 \text{ und } F_{23} = A_{3,2} \quad (3.22)$$

Nun können wir zur Ampere-Gleichung übergehen:

$$\left(\sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma}) \right)_{,\nu} = -4\pi \sqrt{-g} j^\mu \quad (3.23)$$

um die Komponenten von A_ν zu bestimmen. In der Symmetrieebene ($\mu = r = 0, 1$) entkoppelt sich diese Gleichung von den poloidalen Komponenten des Viererpotentials A_ν . Drückt man j^r durch die Flussgrößen aus, so bekommt man aus der Ampere-Gleichung für $\mu = r = 0, 1$ einen Satz aus zwei Gleichungen für die Bestimmung der zwei Komponenten des Viererpotentials A_s ($s = 0, 1$):

$$\left(\sqrt{-g} g^{rs} g^{ab} A_{s,b} \right)_{,a} = 4\pi \sqrt{-g} g^{rs} \sum_j e n \frac{\rho}{\sigma} \left(V_s(\chi) - \frac{e}{m} A_s \right) \quad (3.24)$$

während in der poloidalen Ebene die Ampere-Gleichung (3.23) sich alleine mit den Indizes a, b, c, d , die nur von 2 bis 3 laufen, umschreiben läßt:

$$\left(\sqrt{-g} g^{ab} g^{cd} F_{bd} \right)_{,c} = -4\pi \sqrt{-g} j^a \quad (3.25)$$

Die linke Seite kann man dabei wegen der Antisymmetrie von F_{bd} leicht abschätzen. Dafür werden zunächst die Determinanten von g_{ab} und g_{rs} eingeführt:

$$g_{pol} \equiv \det(g_{ab}); \quad g_{sym} \equiv \det(g_{rs}) \quad (3.26)$$

Mit diesen Bezeichnungen wird die Ampere-Gleichung für $a = 2$ zu:

$$\left(\sqrt{-\frac{g_{sym}}{g_{pol}}} F_{23} \right)_{,3} = -4\pi \sqrt{-g} j^2 \quad (3.27)$$

und für $a = 3$

$$-\left(\sqrt{-\frac{g_{sym}}{g_{pol}}} F_{23} \right)_{,2} = -4\pi \sqrt{-g} j^3 \quad (3.28)$$

Setzt man hier die Lösung der Kontinuitätsgleichung (3.18) ein, so kann man den Ausdruck in Klammern als die Stromfunktion $I(\Psi)$ identifizieren:

$$\sqrt{-\frac{g_{sym}}{g_{pol}}} F_{23} = I(\Psi) \quad (3.29)$$

Somit kommen wir dem physikalischen Sinn der Stromfunktion $I(\Psi)$ näher: in einem nichtrelativistischen Fall ist diese Funktion die kovariante toroidale Komponente des magnetischen Feldes.

Die Komponente A_3 läßt sich aus den Gleichungen (3.29) und (3.22) ermitteln. Die ist keine Stromfunktion und kommt in den anderen Gleichungen sowieso nicht vor, so dass auf sie verzichtet werden kann.

Auf diese Weise haben wir die Gleichungen für die Beschreibung eines ideal leitenden Plasmas konstruiert. Sind die Flussfunktionen $V_r(\chi)$ vorgegeben, so lassen sich alle übrigen Plasmamparameter, wie χ , n , u_μ und A_μ , durch die Gleichungen (3.2), (3.4), (3.10), (3.15)-(3.16) und (3.23) eindeutig bestimmen. Die eindeutige Festlegung der Flussfunktionen $V_r(\chi)$ ist für ein ideales Plasma nicht möglich, und wird später im Rahmen eines schwachdissipativen Plasmas eingeführt.

3.2 Das Variationsprinzip

Die numerische Lösung der Potentialgleichungen (3.15), (3.16) für χ und (3.24) für A_r kann mit Hilfe des Variationsprinzips erheblich vereinfacht werden. Es wird dabei nach einem Funktional W von χ , A_r und σ gesucht, das in einem Gleichgewicht stationär ist, d.h. es gilt $\delta W = 0$, wenn man W in Bezug auf diesen Größen variiert. Die Variation in Bezug auf χ bzw. A_r führt hier zu χ -Gleichung (3.15) und (3.16) bzw. zur Ampere-Gleichung (3.24). Durch die Variation in Bezug auf die freie Enthalpie σ soll hier die Normierungsbedingung (3.10) generiert werden. Die Teilchendichte, die bei den Variationen als konstant angenommen wird, ermittelt man später aus der Zustandsgleichung.

Fangen wir mit der Normierungsbedingung (3.10) an. Die poloidale Geschwindigkeit u^a ist dabei durch (3.2) und die Komponenten der Vierergeschwindigkeit in die Symmetrierichtung u_r sind durch (3.4) gegeben. Variiert man die letzte Gleichung nach σ , χ und A_r , so erhält man für die Variation von u_r :

$$\delta u_r = -\frac{1}{\sigma} u_r \delta \sigma + \frac{\rho}{\sigma} V'_r(\chi) \delta \chi - \frac{en}{\sigma} \delta A_r \quad (3.30)$$

Die Variation von u^a hängt dagegen nur von $\delta \chi$ ab:

$$\delta u^a = \frac{1}{\sqrt{-gn}} \tilde{\epsilon}^{1ab} (\delta \chi)_{,b} \quad (3.31)$$

Es läßt sich damit leicht überprüfen, dass das gesuchte Funktional von der Form:

$$W(\sigma, \chi, A_r) = \int d^2x \sqrt{-g} \sum_j \frac{\sigma}{2} (g_{ab} u^a u^b - g^{rs} u_r u_s - 1) + \dots \quad (3.32)$$

sein muss, wobei die durch „...“ angedeuteten Terme von σ unabhängig sind. Nach der Variation des Funktionals (3.32) ergibt der Faktor vor $\delta\sigma$ nämlich gerade die Normierungsbedingung. Die Integration wird hierbei über einen festen Bereich in der poloidalen Ebene (x^2, x^3) durchgeführt. Bemerkenswert ist hier, dass die Invariante $u_\mu u^\mu$ aus der Normierungsbedingung in dem Funktional durch den Ausdruck $u_a u^a - u_s u^s$ ersetzt wird, der nur unter den Transformationen in der poloidalen Ebene invariant ist. Ein ähnliches Verfahren kann man anwenden, um den Teil des Funktionals abzuleiten, deren Variation die Ampere-Gleichung wiedergeben soll [27]. Hierbei gehen wir von der Invariante $-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ aus. Mit (3.29) sowie den Beziehungen $F_{rs} = 0$ und $F_{ar} = A_{r,a}$ erhalten wir dafür:

$$-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\frac{I^2(\Psi)}{(-g_{sym})} - \frac{1}{8\pi}g^{rs}g^{ab}A_{r,a}A_{s,b} \quad (3.33)$$

Nun wechseln wir das letzte Vorzeichen und „hängen“ dies an unser Funktional an:

$$W(\sigma, \chi, A_r) = \int d^2x \sqrt{-g} \left[\sum_j \frac{\sigma}{2} (g_{ab}u^a u^b - g^{rs}u_r u_s - 1) - \frac{1}{8\pi}\frac{I^2(\Psi)}{(-g_{sym})} + \frac{1}{8\pi}g^{rs}g^{ab}A_{r,a}A_{s,b} \right] \quad (3.34)$$

Bei der Variation dieses Funktionals in Bezug auf χ und A_r wird ggf. die partielle Integration angewendet, wobei die Werte von χ und A_r an der Grenze des betrachteten Gebiets festgehalten werden (wodurch $\delta\chi$ und δA_r am Rande verschwinden). Für die Variation von $I(\Psi)$ bekommen wir entsprechend der Gleichung (3.20):

$$\delta I(\Psi) = (-4\pi e)\delta\chi \quad (3.35)$$

Die totale Variation des Funktionals $W(\sigma, \chi, A_r)$ ergibt dann:

$$\begin{aligned} \delta W = \int d^2x \sqrt{-g} & \left\{ \sum_j \frac{1}{2} (g_{ab} u^a u^b + g^{rs} u_r u_s - 1) \delta \sigma \right. \\ & + \sum_j \frac{1}{(-g_{sym})} [\tilde{\Delta} \chi + eI(\Psi) + g_{sym} \rho u^r V_r'(\chi)] \delta \chi \\ & \left. + \left[\sum_j e n u^r - \frac{1}{4\pi \sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{rs} g^{ab} A_{s,b})_{,a} \right] \delta A_r \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

mit dem sogenannten Grad-Shafranov Operator

$$\tilde{\Delta} \chi \equiv \sqrt{-\frac{g_{sym}}{g_{pol}}} \sum_{a,b} (\tilde{g}_{ab} \chi_{,b} - \tilde{g}_{bb} \chi_{,a})_{,a} \quad (3.37)$$

$$\tilde{g}_{ab} \equiv \frac{\sigma}{\sqrt{-g} n^2} g_{ab} \quad (3.38)$$

Da die Variationen $\delta \sigma$, $\delta \chi$ und δA_r unabhängig voneinander und i. a. ungleich Null sind, muß die Bedingung $\delta W = 0$ bedeuten, dass die Koeffizienten vor $\delta \sigma$, $\delta \chi$ und δA_r gleich Null sein müssen. Die Bedingungen, dass die Koeffizienten vor $\delta \sigma$ und δA_r verschwinden können dabei leicht mit der Normierungsbedingung bzw. mit der Ampere-Gleichung in der Symmetrieebene ($\mu = r = 0, 1$) identifiziert werden. Um die Bedingung für das Verschwinden des Faktors vor $\delta \chi$ interpretieren zu können, betrachten wir zunächst die Gleichungen (3.2), (3.16) und (3.29), wonach folgt:

$$m\Omega_{23} = \sum_{a,b} (\tilde{g}_{ab} \chi_{,b} - \tilde{g}_{bb} \chi_{,a})_{,a} + e \sqrt{-\frac{g_{pol}}{g_{sym}}} I(\Psi) \quad (3.39)$$

Setzen wir das in die Gleichung (3.15), so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\tilde{\Delta} \chi + eI(\Psi) + g_{sym} \rho u^r V_r'(\chi) = 0 \quad (3.40)$$

Unter der Annahme, dass g_{sym} endlich in jedem Punkt ist, ist das genau die Bedingung, dass der Koeffizient vor $\delta\chi$ verschwindet, bzw., dass das von uns konstruierter Funktional $W(\sigma, \chi, A_r)$ stationär in Bezug auf die Variationen von χ ist.

3.3 Quasineutralität

Die Beziehung (3.24) stellt ein Gleichungssystem dar, woraus man bei den sonst bekannten Plasmaparametern i.a. die Komponenten A_s ($s = 0, 1$) des Viererpotentials ermittelt. Die Suche nach der Lösung des Systems gestaltet sich dabei äußerst mühsam, da hier viele Abhängigkeiten der Plasmaparameter voneinander auftreten. Dieses Problem kann jedoch dadurch umgangen werden, dass man die Annahme der Quasineutralität voraussetzt. Explizit gestaltet sich die Lösung des Systems (3.24) besonders einfach. Wie wir weiter unten sehen werden, sind die Voraussetzungen für eine solche Annahme in dieser Arbeit auf jeden Fall gegeben und sehr gut erfüllt.

An dieser Stelle sollen die Folgen dieser Annahme erläutert, sowie die daraus folgende Lösung für das Gleichungssystem (3.24) gegeben werden.

Die Annahme der Quasineutralität ist von den nichtrelativistischen Plasmen bekannt [49]. Wir gehen von der typischen konstanten Teilchendichte n_0 der Elektronen bzw. Ionen, der konstanten Elektronentemperatur T_e und dimensionslosem elektrischen Potential $\tilde{\Phi}$ [29]:

$$\tilde{\Phi} \equiv \frac{e\Phi}{k_B T_e} \quad (3.41)$$

aus. Das elektrische Potential Φ wird dabei so gewählt, dass $\tilde{\Phi}$ von der Ordnung 1 ist.

Die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho_{el} \quad (3.42)$$

läßt sich nach der Einführung der sogenannten „Skintiefe“ (skin depth) $\frac{c}{\omega_{pe}} \equiv \sqrt{\frac{m_e c^2}{4\pi n_0 e^2}}$ und der durch die Skintiefe ausgedrückten Debye-Länge [49] $\lambda_D^2 \equiv \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \left(\frac{c}{\omega_{pe}}\right)^2$ wie folgt umschreiben:

$$\lambda_D^2 \nabla^2 \tilde{\Phi} = \frac{n_e - n_i}{n_0} \quad (3.43)$$

Dabei ist n_j - die Teilchendichte der Sorte j , $j = i, e$. Betrachtet man ein Plasma, dessen Ausdehnung groß verglichen mit der Debye-Länge λ_D ist, so kann man die linke Seite der Poisson-Gleichung vernachlässigen, wodurch man die einfache algebraische Gleichung $n_e = n_i$ erhält. Zusammen mit den Fluidgleichungen legt sie das elektrische Potential fest.

In dem relativistischen Fall mit der Kerr-Metrik ($g_{01} \neq 0$) werden die Komponenten des Viererpotentials A_μ , u.a. für $\mu = r = 0, 1$, durch die Ampere-Gleichung in der entsprechenden Form bestimmt (vgl. (3.24)):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} g^{rs} g^{ab} A_{s,b} \right)_{,a} = \frac{4\pi}{c} j^r \quad (3.44)$$

Multipliziert man (3.44) zunächst mit dem Faktor $\frac{|e|}{m_e c^2}$, so erhält man auf der rechten Seite der Gleichung:

$$\frac{4\pi}{c} j^r \frac{|e|}{m_e c^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \sum_j (-1)^j \frac{n_j}{n_0} \frac{u_j^r}{c} \quad (3.45)$$

wobei der Symbol:

$$(-1)^j \equiv \begin{cases} +1 & \text{für } j = i \\ -1 & \text{für } j = e \end{cases} \quad (3.46)$$

eingeführt worden war. Für $r = 0$ ist die rechte Seite von (3.45) von der Ordnung des Quadrates der reziproken Skintiefe. Dies gibt offensichtlich den Maßstab für die linke Seite von (3.44) an, wobei A_s durch

$$\tilde{A}_s \equiv \frac{|e|}{m_e c^2} A_s \quad (3.47)$$

ersetzt wird. In einem zweidimensionalen Bereich in der poloidalen Ebene, der sowohl von dem Horizont als auch von der Rotationsachse weit genug entfernt ist, darf man für die Abschätzung der Größenordnung $g^{00} = O(1)$, $g^{01} = O(1/r)$, $g^{11} = O(1/r^2)$ annehmen. Für die linke Seite von (3.44) ergibt sich damit in den gewöhnlichen Boyer-Lindquist Koordinaten die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} \left(\tilde{A}_0 + \frac{1}{r} \tilde{A}_1 \right); \quad t - \text{Komponente} \\ \frac{1}{rL^2} \left(\tilde{A}_0 + \frac{1}{r} \tilde{A}_1 \right); \quad \varphi - \text{Komponente} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die Abschätzung des Betrags von \tilde{A}_1 erfolgt am einfachsten durch das aus der Tokamak-Literatur bekannte poloidale magnetische Feld $B_{pol} \equiv \left| \frac{A_1}{Ra} \right|$ mit R und a - den entsprechenden äusseren und inneren Radien [50]. In unserem Fall ersetzen wir die beiden Radien durch r und erhalten mit der durch $\Omega_{g\,pol} \equiv \frac{B_{pol}|e|}{m_e c}$ definierten Gyrofrequenz die folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{r} |\tilde{A}_1| \simeq \frac{r \Omega_{g\,pol}}{c} = \frac{r}{r_{g\,pol}} v_{th} \quad (3.49)$$

Hier ist $r_{g\,pol}$ der entsprechende Gyroradius und

$$v_{th}^2 \equiv \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \quad (3.50)$$

die dimensionslose thermische Geschwindigkeit.

Das Plasmagleichgewicht hängt entscheidend von der Größenordnung der einzelnen Terme in (3.48) ab. Für die Existenz einer Lösung des Gleichungssystems (3.44) erscheint es natürlich (wenn nicht sogar notwendig) zu sein, dass

die beiden Terme in den Klammern von (3.48) von der gleichen Größenordnung sein müssen. Diese Größenordnung können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als 1 annehmen. Somit erhalten wir für die linke Seite von (3.44) die folgende Abschätzung ²: $\frac{1}{L^2}O(1)$ für $r = 0$ bzw. $\frac{1}{rL^2}O(1)$ für $r = 1$. Ferner nehmen wir an, dass für die beiden Teilchensorten $u^0 \simeq c$, $ru^1 \equiv r\frac{d\varphi}{d\tau} \simeq c$ gilt. Multipliziert man nun die Gleichung (3.44) zusätzlich mit $\frac{c^2}{\omega_{pe}^2}$, so bekommt man:

$$\left(\frac{c}{\omega_{pe}L}\right)^2 O(1) = \sum_j (-1)^j \frac{n_j}{n_0} O(1) \quad (3.51)$$

Damit erhalten wir die folgende Formulierung der Quasineutralität:

Plasmagleichgewichte, deren räumliche Skala in der poloidalen Ebene groß verglichen mit der Skintiefe $\frac{c}{\omega_{pe}}$ ist, sind quasineutral in dem Sinne, dass

$$j^r = 0 \text{ oder } j_r = 0; \quad r = 0, 1 \quad (3.52)$$

In *cgs*-Einheiten haben wir:

$$\frac{c}{\omega_{pe}} = 5.31 \times 10^5 n_e^{-1/2} [cm]$$

so, dass die Skintiefe $5km$ für $n_e = 1$ beträgt, und viel kleiner für $n_e \gg 1cm^{-3}$ wird.

Im folgenden wird das Plasma zwischen zwei konzentrischen Sphären betrachtet, wobei die innere Sphäre außerhalb des Ereignishorizonts und die äußere

²nach der Multiplikation mit $\frac{|e|}{m_e c^2}$

immer noch in dem Bereich mit genügend großer Teilchendichte ³ liegt. Die Beziehungen (3.52), (3.19) und (3.4) geben damit zwei algebraischen Gleichungen für die Darstellung von \tilde{A}_s (und damit auch A_s) durch die Flussfunktionen $V_r^i(\chi_i)$ und $V_r^e(\chi_e)$ der Ionen und Elektronen sowie ihre Teilchendichte an. Das Ergebnis läßt sich am besten durch die Einführung der „generalisierten Teilchendichte“ N für die beiden Teilchensorten j :

$$N \equiv \left(\frac{n}{n_0}\right) \left(\frac{\rho}{\sigma}\right) = \left(\frac{n}{n_0}\right) \left(1 + v_{th}^2 \ln\left(\frac{n}{n_0}\right)\right)^{-1} \quad (3.53)$$

sowie der generalisierten Geschwindigkeit U_r statt u_r :

$$U_r \equiv \frac{\sigma}{\rho} u_r \quad (3.54)$$

$$U_r U^r = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2 u_r u^r \equiv \left(1 + v_{th}^2 \ln\left(\frac{n}{n_0}\right)\right)^2 (1 - u_a u^a) \quad (3.55)$$

darlegen. Hierbei haben wir die Zustandsgleichung für das Modell eines idealen Gases (3.9) verwendet.

Somit erhalten wir

$$\tilde{A}_r = \frac{N_i V_r^i(\chi_i) - N_e V_r^e(\chi_e)}{N_e + \frac{m_e}{m_i} N_i} \quad (3.56)$$

$$U_r^j = \hat{N}_j \frac{V_r^i(\chi_i) + \frac{m_e}{m_i} V_r^e(\chi_e)}{N_e + \frac{m_e}{m_i} N_i} \quad (3.57)$$

$$\hat{N}_j \equiv \begin{cases} N_e & \text{für } j = i \\ N_i & \text{für } j = e \end{cases} \quad (3.58)$$

³damit die Quasineutralitätsannahme immer noch gültig ist

Für die Abschätzung der χ -Gleichung für ein quasineutrales Plasma gehen wir von der Gleichung (3.40) aus, die natürlich auch unter der Annahme der Quasineutralität gültig bleibt. Um die einzelnen Terme von (3.40) einfacher abschätzen zu können, wählen wir die poloidalen Koordinaten mit der Dimension einer Länge (z.B. Zylinderkoordinaten R und z) aus. In diesem Fall ist g_{pol} dimensionslos, während $\sqrt{-g_{sym}}$ und $\sqrt{-g}$ die Dimension einer Länge haben. Es ist dann offensichtlich, dass $\left(\frac{n^2}{\sigma}\right) \tilde{\Delta}\chi$ die Dimension von $\frac{\chi}{L^2}$ hat, wobei L eine typische Länge ist, auf der die Metrik bzw. die Flussgrößen sich wesentlich ändern. Wir nehmen an, dass L für alle Parameter gleich ist. Mit $c = 1$ =dimensionslos und u^a aus (3.2) sehen wir sofort, dass χ die Dimension von $n_0 L^2$ hat. Damit können wir die dimensionslose Funktion

$$\tilde{\chi} \equiv \frac{\chi}{n_0 L^2} \quad (3.59)$$

eingeführen. Multipliziert man nun die Gleichung (3.40) mit $\frac{n^2}{\sigma \omega_{pe}^2 n_0 L^2}$, so erhält man mit $\tilde{\chi}_- \equiv \tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_e$ für jede Teilchensorte j die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{pe}^2} \frac{n_j^2}{\sigma_j} \tilde{\Delta}_j \tilde{\chi}_j &= (-1)^j \frac{m_e}{m_j} N_j \left(\tilde{\chi}_- - \frac{\Omega_{g tor}}{\omega_{pe}} \cdot \frac{1}{\omega_{pe} L} \right) \\ &+ \frac{1}{\omega_{pe}^2 L^2} \cdot \left(\frac{-g_{sym}}{L^2} \right) (N)_j^2 (U^r)_j \frac{d}{d\chi_j} V_r^j(\tilde{\chi}_j) \end{aligned} \quad (3.60)$$

mit $\Omega_{g tor} \equiv \frac{|e|I_0}{Lm_e}$ der Gyrofrequenz der Elektronen in dem toroidalen magnetischen Vakuumfeld.

Es ist bequem, die Gleichungen für die Beschreibung des Plasmagleichgewichts durch einen Kleinheitsparameter $\epsilon \equiv \frac{1}{\omega_{pe} L}$ darzustellen, der das Verhältnis der Skintiefe zu den Abmessungen des Plasmas angibt und somit ein geeignetes Maß dafür ist, wie gut die Quasineutralitätsannahme erfüllt wird. Hierfür

führen wir in der Gleichung (3.60) die Koordinatentransformation $x^a \rightarrow \frac{x^a}{L}$ durch. Die linke Seite von (3.60) verändert sich demnach zu

$$\frac{1}{\omega_{pe}^2} \frac{n_j^2}{\sigma_j} \tilde{\Delta}_j \tilde{\chi}_j \rightarrow \frac{1}{(\omega_{pe} L)^2} \frac{n_j^2}{\sigma_j} \tilde{\Delta}_j \tilde{\chi}_j \quad (3.61)$$

damit läßt sich die Abschätzung für die χ -Gleichung (3.60) wie folgt darstellen:

$$\epsilon^2 \cdot \frac{n_j^2}{\sigma_j} \tilde{\Delta}_j \tilde{\chi}_j = (-1)^j \frac{m_e}{m_j} N_j \cdot \tilde{\chi}_- + \epsilon^2 \cdot \frac{-g_{sym}}{L^2} N_j^2 U_j^r \frac{d}{d\chi_j} V_r^j(\chi_j) \quad (3.62)$$

Unter anderem folgt daraus, dass $|\tilde{\chi}_-| = O(\epsilon^2)$ oder

$$\tilde{\chi}_e = \tilde{\chi}_i + O(\epsilon^2) \quad (3.63)$$

ist.

Für die Darstellung der Ampere-Gleichung (3.44) erhalten wir mit (3.45), (3.47) und der obengenannten Koordinatentransformation:

$$\epsilon^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} g^{rs} g^{ab} \tilde{A}_{s,b} \right]_{,a} = \sum_{j=e,i} (-1)^j \frac{n_j}{n_0} (u^r)_j \quad (3.64)$$

Vollständigkeits halber führen wir hier noch die Normierungsbedingung vor, die allerdings auch unter der Quasineutralitätsannahme die gleiche Gestalt wie im allgemeinen Fall hat:

$$1 = g^{rs} u_r u_s + g_{ab} u^a u^b \quad (3.65)$$

Die Quasineutralitätsannahme hat die Abschätzung der χ -Gleichung (3.40) sowie der Ampere-Gleichung in der Symmetrieebene ($\mu = r = 0, 1$) ermöglicht. Diese Abschätzung wurde in (3.62) und (3.64) durch den Kleinheitsparameter ϵ dargestellt, der als ein Maß dafür angesehen werden kann, wie gut die Quasineutralitätsannahme realisiert ist, wobei $\epsilon \rightarrow 0$ dem Fall entspricht, in dem diese Annahme ideal erfüllt wird. Die für die Bestimmung der Teilchendichte notwendige Normierungsgleichung (3.10) bleibt dabei allerdings unverändert.

Für den Zusammenhang der Flussfunktionen χ der Ionen und Elektronen folgte dabei unter der Annahme der Quasineutralität die Beziehung (3.63). Laut (3.63) sieht man, dass man, je besser die Quasineutralitätsannahme für ein Zweiflüssigkeitsplasma erfüllt ist, desto sicherer behaupten kann, dass die beiden Flussfunktionen gleich sind.

Ferner wird mit (3.56) die durch die Quasineutralitätsannahme möglich gewordene analytische Lösung für \tilde{A}_r (und damit auch für A_r) gegeben, so dass die explizite Lösung der Ampere-Gleichung (3.64) in diesem Fall nicht mehr notwendig ist.

Die Flussfunktionen $V_r(\chi)$ müssen auch hier entweder vorgegeben oder aus einem schwach dissipativen Modell ermittelt werden.

3.4 Gleichgewichtsbedingungen für ein schwach dissipatives Plasma

Das Modell eines idealen (nichtdissipativen) Plasmas setzt die bekannten Abhängigkeiten der Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ voraus. Sind die $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ vorgegeben, so werden die übrigen Plasmamparameter durch die Ampere-, Normierungs-, Zustands- und χ -Gleichung festgelegt. Allerdings liefert das Modell eines idealen Plasmas keine Erkenntnisse über die Form von $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$. Damit das gegebene Modell auch die Aussagen über diese Funktionen machen kann, muss es auf nichtideale, schwach dissipative Plasmen erweitert werden. Mit anderen Worten legt der Dissipationsmechanismus, der in dem Plasma stattfindet, die Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ fest.

Wie in den früheren Abschnitten, fangen wir mit der Bewegungsgleichung (2.48) an, die wir diesmal folgendermaßen schreiben:

$$\left(T_{\mu}^{\nu} + \Delta T_{\mu}^{\nu}\right)_{;\nu} = 0 \quad (3.66)$$

Dabei ist T_{μ}^{ν} der Energie-Impuls Tensor einer idealen Flüssigkeit und ΔT_{μ}^{ν} enthält alle Terme, die die äusseren Kräfte sowie die Dissipation beschreiben [38]. In dem in dieser Arbeit behandelten Modell eines schwach dissipativen Zweiflüssigkeitsplasma der Elektronen und einfach geladenen Ionen stellt die Divergenz von ΔT_{μ}^{ν} für die beiden Flüsse die Summe dar, die aus der nichtdissipativen Lorentzkraft und einem allgemeinen Ausdruck F_{μ} für die Beschreibung der dissipativen sowie äusseren Kräfte besteht.

$$T_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = \rho \frac{e}{m} u^{\nu} F_{\mu\nu} + F_{\mu} \quad (3.67)$$

In dem zweiten Kapitel wurde bereits die Lösung für ein ideales Flüssigkeitsmodell ($F_\mu = 0$) angegeben. Wie man dort sieht, erhält man die Lösung mit Hilfe der Kelvin-Helmholtz Darstellung (2.61). Berücksichtigt man nun die Dissipationskräfte, so muss man die Gleichung (2.61) durch

$$-\rho u^\nu \Omega_{\mu\nu} = F_\mu \quad (3.68)$$

ersetzen. Die Kraft F_μ kann dabei aber nicht willkürlich sein. Wie jede andere Kraft, darf sie die Erhaltung der Normierung nicht verletzen bzw. es muss gelten ⁴:

$$u^\mu F_\mu = 0 \quad (3.69)$$

Eine weitere Bedingung für F_μ erhalten wir für jede Symmetrierichtung r , wenn wir die Gleichung (3.68) für $\mu = r$ mit $\sqrt{-g}$ multiplizieren und anschließend über ein Gebiet D_2 integrieren [31]. Sind die Linien $\chi = \text{const}$ entweder geschlossen oder offen, jedoch ohne Ergodizität in einem beliebigen Gebiet, so ergibt sich für die linke Seite mit (2.64), (3.1) und dem Gauss'schen Satz (mit $d^2x \equiv dx^2 dx^3$):

$$-\int_{D_2} d^2x \sqrt{-g} \rho u^\nu \Omega_{r\nu} = \oint_{\partial D_2} df_a \sqrt{-g} \rho u^a V_r \quad (3.70)$$

wobei df_a ein nach außen gerichtetes eindimensionales Oberflächenelement der Domänegrenze ∂D_2 ist. Die Bedingung für F_μ in einer beliebigen Domäne läßt sich damit in der folgenden Form darstellen:

⁴dies folgt auch unmittelbar aus (3.68)

$$\int_{D_2} d^2x \sqrt{-g} F_r = \oint_{\partial D_2} df_a \sqrt{-g} \rho u^a V_r \quad (3.71)$$

Wählt man die Domänen D_2 in Abhängigkeit von der χ -Funktion so aus, dass sie entweder von der Linie $\chi = \text{const}$ oder, im Falle einer offenen χ -Linie, von der Linie $\chi = \text{const}$ und einer imaginären Linie in der Unendlichkeit eingeschlossen sind, so sieht man, dass wegen $df_a \sim \chi_{,a}$ und (3.2) die rechte Seite von (3.71) verschwindet. In diesem Fall können wir $x^2 = \chi$ als die radiale und $x^3 = \theta$ als die winkelartige Koordinate, die von 0 bis 2π verläuft, wählen. Durch das Differenzieren von (3.71) nach χ erhalten wir demnach für die geschlossenen χ -Linien:

$$\int_{\chi=\text{const}} d\theta \sqrt{-g} F_r = 0 \quad (3.72)$$

Für die offenen χ -Linien ist eine analoge Abschätzung von (3.71) möglich, wenn die Integranden für $r \rightarrow \infty$ genügend schnell gegen Null gehen, bzw. für das Vakuum in dem asymptotischen Bereich. In diesem Fall ist die Gleichung (3.72) wieder korrekt, wobei die Integration diesmal zwischen den asymptotischen Werten von θ vorgenommen werden muss. Sollte der asymptotische Bereich die Materie enthalten, so muss man über eine endliche Domäne integrieren, die durch eine Flusslinie $\chi = \text{const}$ einerseits, und einem abschliessenden Teil $C(\chi)$ andererseits eingeschlossen ist. In diesem Fall ergibt sich für die rechte Seite von (3.71) allerdings ein nichtverschwindender Beitrag. Ein solcher Fall wurde aber in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Das allgemeine Verfahren für die Berechnung eines schwach dissipativen Plasmas ist dann das folgende: Als erstes wird die Gleichung (3.68) für $F_\mu = 0$ gelöst, wobei man für die Flussfunktionen einen Ansatz macht, den man für

das betrachtete Modell erwartet. Für $\mu = a$ ergibt sich dabei die χ -Gleichung, die man zusammen mit der Ampere- und Normierungsgleichung mit Hilfe des Variationsprinzips numerisch lösen kann. Als nächstes wird die daraus resultierende Lösung für χ in (3.72) für das angenommene Dissipationsmodell eingesetzt, woraus sich die entsprechenden Gleichungen für $V_r(\chi)$ ergeben. Löst man diese Gleichungen, so bekommt man den neuen Ansatz für $V_r(\chi)$ den man in die χ -Gleichung einsetzt und die neue χ -Funktion ermittelt. Mit dem neuen χ geht man dann wieder in (3.72) und führt diese Iterationen solange fort, bis man eine selbstkonsistente Lösung erzielt. Das Ergebnis ist dann ein ideales Gleichgewicht, dessen Flussfunktionen $V_r(\chi)$ durch die „Lösbarkeitsbedingung“ (3.72) festgelegt sind.

3.4.1 Quasineutrales Plasma mit Reibung und Ringspannung

In diesem Abschnitt wird ein Versuch unternommen, das einfachstmögliche Modell zu entwerfen, das die eindeutige Festlegung aller Plasmagrößen um ein Kerr-Loch erlaubt. Es wird hierfür von einem quasineutralen, isothermen Zweiflüssigkeitsplasma der Elektronen und einfach geladenen Ionen (mit $m^{(e)} \ll m^{(i)}$) ausgegangen. Die Bedingung für die Quasineutralität verlangt, dass das Verhältnis der Skintiefe zu den Abmessungen des Plasmas $\epsilon \equiv \frac{c}{\omega_{pe}L}$ eine vernachlässigbar kleine Größe ist. Wie in dem Abschnitt 2.3 gezeigt worden ist, ist diese Voraussetzung in unserem Beispiel auf jeden Fall gegeben. Die weitere Annahme eines isothermen Plasmas kann in dem Modell erfüllt werden, wenn man sich das Plasma in einem Feld der Photonen denkt, das als ein Wärmereservoir wirkt. In diesem Fall ist es plausibel, als Dissipationsmodell die Reibung der Ionen mit den Photonen anzunehmen. Ferner braucht man für einen stabilen Gleichgewichtszustand eine Energiequelle, um den Energieverlust infolge der Dissipation auszugleichen. Dies wird in dem Modell durch die Einführung einer sogenannten Ringspannung erreicht.

Geht man von einem quasineutralen Plasma aus, so hat man wegen (3.63) $\chi^{(i)} \approx \chi^{(e)} \equiv \chi$. Zusammen mit der Lösung des Massenerhaltungssatzes (3.2), ergibt sich daraus, dass die Teilchenflüsse der Elektronen und der Ionen in der poloidalen Ebene gleich sein müssen: $(nu_a)^{(e)} = (nu_a)^{(i)}$. Wir verallgemeinern dies auch auf die Symmetrierichtungen und betrachten damit den für die Quasineutralitätsannahme charakteristischen Fall eines Plasmas, in dem kein elektrischer Strom vorhanden ist:

$$(nu_\mu)^{(e)} = (nu_\mu)^{(i)} \tag{3.73}$$

Für die beiden Teilchenflüsse gilt natürlich die Normierungsbedingung:

$$(u_\mu u^\mu)^{(i)} = (u_\mu u^\mu)^{(e)} = 1 \quad (3.74)$$

Teilt man (3.73) durch $n^{(e)}$ und bildet das Skalarprodukt mit $u^\mu{}^{(i)}$ so bekommt man:

$$\frac{n^{(i)}}{n^{(e)}} = u_\mu^{(e)} u^\mu{}^{(i)} \equiv g^{\mu\nu} u_\mu^{(e)} u_\nu^{(i)} \quad (3.75)$$

Analog erhält man auch:

$$\frac{n^{(e)}}{n^{(i)}} = u_\mu^{(i)} u^\mu{}^{(e)} \equiv g^{\mu\nu} u_\mu^{(i)} u_\nu^{(e)} \quad (3.76)$$

Die rechten Seiten von (3.75) und (3.76) sind offensichtlich gleich. Damit müssen auch die linken Seiten gleich sein, oder es muss gelten:

$$\frac{n^{(i)}}{n^{(e)}} = \frac{n^{(e)}}{n^{(i)}} \quad (3.77)$$

Dies ist aber nur dann der Fall, wenn

$$n^{(i)} = n^{(e)} \equiv n \quad (3.78)$$

ist. Somit müssen in unserem Modell die Teilchendichten der Ionen und Elektronen gleich sein. Die relativistische freie Enthalpie $\frac{\sigma}{\rho}$ wird hingegen aus der Zustandsgleichung (3.9) ermittelt:

$$\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(j)} = 1 + \frac{k_B T}{m^{(j)} c^2} \ln \left(\frac{n}{n_0}\right)^{(j)} \quad (3.79)$$

und sind i.a. für die verschiedenen Teilchensorten mit verschiedenen Massen $m^{(j)}$ unterschiedlich.

Ferner folgt aus (3.73) und (3.78) sofort:

$$u_{\mu}^{(i)} = u_{\mu}^{(e)} \equiv u_{\mu} \quad (3.80)$$

Normiert auf die Konstante n_0 kann man den Teilchenstrom für die beiden Teilchensorten durch die generalisierte Dichte $N^{(j)}$ (3.53) wie folgt darstellen:

$$\frac{n^{(j)}}{n_0} u_r^{(j)} = N^{(j)} \left(V_r^{(j)}(\chi) - \frac{e^{(j)}}{m^{(j)}} A_r \right) \quad (3.81)$$

Sind die Größen $N^{(e)}$, $N^{(i)}$ und $V_r^{(e)}(\chi)$, $V_r^{(i)}(\chi)$ von der selben Ordnung, so können wir die Gleichung (3.81) wie folgt lösen:

$$\tilde{A}_r \equiv \frac{|e|}{m^{(e)}} A_r = \frac{N^{(i)}}{N^{(e)}} V_r^{(i)}(\chi) - V_r^{(e)}(\chi) \quad (3.82)$$

Diese Lösung ist wieder von der Größenordnung von $V_r^{(j)}(\chi)$. Daraus folgt für die Größenordnung von A_r :

$$O(A_r) = \frac{m^{(e)}}{|e|} O(V_r^{(j)}(\chi)) \quad (3.83)$$

Für den Teilchenfluss der Ionen ($j = i$) hat es zur Folge, dass der Beitrag vom „elektromagnetischen“ Anteil (der zweite Term auf der rechten Seite von (3.81)) um $\frac{m^{(e)}}{m^{(i)}}$ mal kleiner als der Gesamtfluss ist, und somit nur eine untergeordnete Rolle bei der Behandlung der Ionen spielt. Die Bewegung der Ionen

erfolgt damit in der niedrigsten Ordnung unabhängig von \tilde{A}_r und folglich auch von der Bewegung der Elektronen.

Im folgenden werden nur die Gleichungen für die Ionen betrachtet und der Index (i) wird unterlassen. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$U^2 \equiv \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 (-u_a u^a) = \frac{1}{-g} \sum_{a,b} [g_{ab} \chi_{,a} \chi_{,b} - g_{bb} (\chi_{,a})^2] \quad (3.84)$$

$$V^2 \equiv \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2 u_r u^r = g^{rs} V_r(\chi) V_s(\chi) \quad (3.85)$$

$$y \equiv \frac{\sigma}{\rho} = 1 + v_{th}^2 \ln\left(\frac{n}{n_0}\right) \quad (3.86)$$

$$v_{th}^2 \equiv \frac{k_B T}{m^{(i)} c^2} \quad (3.87)$$

wobei die Gleichungen (3.2), (3.79) und (3.81) für $j = i$ benutzt wurden. Die Normierungsbedingung läßt sich damit umschreiben:

$$1 = u_r u^r + u_a u^a = \frac{V^2}{y^2} - \frac{U^2}{(n/n_0)^2} \quad (3.88)$$

oder

$$F(y, U^2) \equiv y \cdot \sqrt{1 + \frac{U^2}{(n/n_0)^2}} = \sqrt{V^2} \quad (3.89)$$

$$\frac{n}{n_0} \equiv \exp\left[\frac{y-1}{v_{th}^2}\right] \quad (3.90)$$

Ist die Flussfunktion χ (und $V_r(\chi)$) bekannt, so können wir die Gleichung (3.89) in Bezug auf y lösen und daraus $\frac{n}{n_0}$ bzw. N ausrechnen. Die entsprechende Gleichung für χ erhalten wir durch die Variation des Funktionals (3.34) in

Bezug auf χ , wobei die Metrik und N festgehalten werden. Wir schreiben das Funktional wie folgt um:

$$\begin{aligned} W(\chi) &= \int \int dx^2 dx^3 \sqrt{-g} \frac{\sigma}{mn_0} \cdot \frac{1}{2} (u_r u^r - u_a u^a) \\ &= \int \int dx^2 dx^3 \sqrt{-g} \cdot \frac{1}{2} \left(NV^2 + \frac{1}{N} U^2 \right) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Da die Lösung ausserhalb des Ereignishorizonts gesucht wird, sind die beiden Terme in Klammern von (3.91) positiv. Die Minimierung des Funktionals $W(\chi)$ erfolgt nach der Methode der finiten Elemente, die in dem nächsten Kapitel vorgestellt wird. Durch die Iterationen der Gleichungen (3.90) und (3.91) erhält man die vorläufige Lösung bei einem gegebenen $V_r(\chi)$.

Die Flussfunktionen $V_r(\chi)$ werden nun durch die Lösbarkeitsbedingung (3.72) mit Hilfe der Dissipations- und Zwangskräfte festgelegt. Diese Kräfte stellen die Divergenz von ΔT_μ^ν in (3.66) dar.

Der allgemeine Ausdruck für ΔT_μ^ν aus (3.66) ist aus [38] bekannt. Mit dem Schertensor $W_{\alpha\beta} \equiv u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} - \frac{2}{3} g_{\alpha\beta} u_\lambda^\lambda$, dem Wärmeflussvektor $Q_\alpha \equiv T_{,\alpha} + T u_{\alpha,\beta} u^\beta$ und dem Projektionstensor auf die zu u^α normale Hyperfläche $H_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ würde ΔT_μ^ν zu

$$\Delta T_\mu^\nu = -\eta H_\mu^\gamma H^{\nu\delta} W_{\gamma\delta} - \lambda \left(H_\mu^\gamma u^\nu + H^{\nu\gamma} u_\mu \right) Q_\gamma - \zeta H_\mu^\nu u_\gamma^\gamma \quad (3.92)$$

mit den Koeffizienten der Wärmeleitung λ , Scherviskosität η und Volumenviskosität ζ bestimmt. In einem Fluss, der mit den Photonen mit der mittleren Zeit τ zwischen den Stößen wechselwirkt, sind diese Koeffizienten laut [39]:

$$\lambda = \frac{4}{3} a T^3 \tau \quad (3.93)$$

$$\eta = \frac{4}{15} a T^4 \tau \quad (3.94)$$

$$\zeta = 4aT^4\tau \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n \right]^2 \quad (3.95)$$

mit der Stefan-Boltzman Konstante a .

Für das in dieser Arbeit behandelte Modell scheint es aber einfacher, die Zwangskraft F_μ direkt zu konstruieren. Für die Reibungskraft wird der Ansatz $(-\rho\nu u_1)$ gewählt, wobei ν die konstante Frequenz der Stöße der Ionen mit Photonen ist. Die Ringspannung U , die für die zum Ausgleich des Energieverlusts infolge der Dissipation benötigt wird, verlangt ein zeitabhängiges magnetisches Feld entlang der Rotationsachse, das natürlich nicht immer gegeben ist. Falls die Ringspannung nicht vorhanden ist, würde das Gleichgewicht sich dann langsam auflösen. In diesem Modell wird aber eine Ringspannung angenommen, um die Reibungskraft zu kompensieren und damit einen stabilen Gleichgewichtszustand zu erzielen.

Vernachlässigt man die poloidalen Komponenten F_a , so wird nur eine Komponente, z.B. F_1 , benötigt. Die andere Komponente läßt sich dann durch die Gleichung (3.69) festlegen.

Ein konstantes elektrisches Feld

$$F_{10}^{ext} \equiv E_1^{ext} = -U = const \quad (3.96)$$

führt zu der folgenden äußeren Kraft für die Ionen:

$$F_r^{ext} = \rho \frac{|e|}{m} U \begin{cases} u^1 & \text{für } r = 0 \\ -u^0 & \text{für } r = 1 \end{cases} \quad (3.97)$$

die offensichtlich orthogonal zu u^r ist. Für die toroidale Reibungskraft der Ionen bekommen wir mit (3.69) und (3.10):

$$R_r = -\rho\nu \begin{cases} \frac{u_0 u^0 - 1}{u^0} & \text{für } r = 0 \\ u_1 & \text{für } r = 1 \end{cases} \quad (3.98)$$

Die gesamte Kraft ist durch

$$F_r = R_r + F_r^{ext} \quad (3.99)$$

gegeben. Laut (3.72) erhalten wir somit die Lösbarkeitsbedingung für $r = 0$ und $r = 1$

$$\int d\theta \sqrt{-g\rho} \left[-\nu \frac{u_0 u^0 - 1}{u^0} + \frac{|e|}{m} U u^1 \right] = 0 \quad (3.100)$$

$$\int d\theta \sqrt{-g\rho} \left[-\nu u_1 - \frac{|e|}{m} U u^0 \right] = 0 \quad (3.101)$$

Wie bereits erwähnt worden ist, gestaltet sich die Bewegung der Ionen in der niedrigsten Ordnung unabhängig von dem elektromagnetischen Feld, welches die Bewegung der Elektronen an diejenige der Ionen ankoppelt. Folglich kann man bei der Betrachtung der Gleichungen für die Ionen in dieser Ordnung die Abschätzung

$$\frac{m^{(e)}}{m^{(i)}} \tilde{A}_r = 0 \quad (3.102)$$

vornehmen. Für die niedrigste Ordnung folgt dies auch aus (3.82), wenn man die Größen $N^{(e)}$, $N^{(i)}$ und $V_r^{(e)}(\chi)$, $V_r^{(i)}(\chi)$ von derselben Ordnung annimmt.

Damit wird die Vierergeschwindigkeit der Ionen u_r zu:

$$u_r = \frac{\rho}{\sigma} V_r(\chi) \quad (3.103)$$

$$u^r = g^{rs} \frac{\rho}{\sigma} V_s(\chi) \quad (3.104)$$

Die unbekanntenen Flussfunktionen sind konstant entlang des Integrationsweges in (3.100) und (3.101), so dass man eine einfache algebraische Beziehung für sie bekommt. Das Ergebnis läßt sich am besten durch die gewichteten Mittelwerte

$$\langle(\dots)\rangle \equiv \frac{\int d\theta \sqrt{-g} \left(\frac{\rho^2}{\sigma}\right) (\dots)}{\int d\theta \sqrt{-g} \left(\frac{\rho^2}{\sigma}\right)} \quad (3.105)$$

und eine für die Messung der Ringspannung eingeführte Größe

$$l = \frac{|e|}{m\nu} U \quad (3.106)$$

darstellen. Teilt man die Gleichung (3.101) durch $\nu V_0(\chi)$ und löst sie anschließend für das Verhältnis $v_1(\chi) \equiv \frac{V_1(\chi)}{V_0(\chi)}$ auf, so bekommt man:

$$v_1(\chi) \equiv \frac{V_1(\chi)}{V_0(\chi)} = -\frac{l \langle g^{00} \rangle}{1 + l \langle g^{01} \rangle} \quad (3.107)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Ringspannung in einem solchen Modell von der Reibungskraft abhängt. Wäre keine Reibungskraft vorhanden ($\nu \rightarrow 0$), so würde wegen (3.101) auch die Ringspannung U verschwinden. Der reibungsfreie Fall wird hier durch $\nu \rightarrow 0$ bzw. $U \rightarrow 0$ beschrieben.

Setzt man das Ergebnis (3.107) für $v_1(\chi)$ in (3.100) ein, so folgt daraus der Ausdruck für $[V_0(\chi)]^2$:

$$[V_0(\chi)]^2 = \frac{1}{1 - l \langle g^{10} \rangle - l v_1(\chi) \langle g^{11} \rangle} \cdot \left\langle \frac{(\sigma/\rho)^2}{g^{00} + g^{01} v_1(\chi)} \right\rangle \quad (3.108)$$

Man bekommt eine Lösung für $V_0(\chi)$ nur, wenn der Ausdruck $1 - l \langle g^{10} \rangle - l v_1(\chi) \langle g^{11} \rangle$ positiv ist. Ist l positiv, so ist $v_1(\chi)$ laut (3.107) negativ. Für nicht zu grosse l ist damit die rechte Seite von (3.108) positiv, und $V_0(\chi)$ läßt sich in diesem Fall bestimmen.

Für den Fall $l \rightarrow 0$ erhält man wegen (3.107) auch $v_1(\chi) \rightarrow 0$ und demnach $V_1(\chi) = 0$. Die Bewegung findet in diesem Fall rein poloidal statt.

Sind die Strömungslinien offen und verlaufen ins Unendliche, so lassen sich die Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ bereits auf dem analytischen Wege leicht ausrechnen. Für ein quasineutrales Plasma gilt in dem asymptotischen Bereich $\frac{n}{n_0} \rightarrow 1$ und damit wegen (3.79) $\frac{\sigma}{\rho} \rightarrow 1$ (mit $v_{th} \equiv \frac{k_B T}{mc^2} = 1$). Die asymptotische Werte der Kerr-Metrik sind unter anderem: $g^{00} \rightarrow 1$, $g^{01} \rightarrow 0$, $g^{11} \rightarrow 0$. Damit erhält man für die offenen Strömungslinien:

$$\langle g^{00} \rangle = 1; \quad \langle g^{01} \rangle = 0; \quad \langle g^{11} \rangle = 0$$

Für $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ ergibt sich somit der folgende Ausdruck:

$$V_0(\chi) = 1; \quad V_1(\chi) = -l V_0(\chi) = -l \quad (3.109)$$

Für die offenen Strömungslinien erhalten wir damit unabhängig von der Größe der Reibungskraft die konstante Flussfunktion $V_0(\chi) = 1$, während $V_1(\chi)$ al-

leine durch das Verhältnis der Ringspannung zur Reibungskraft festgelegt wird.

Für die geschlossenen Strömungslinien sind die Ausdrücke für $\langle g^{00} \rangle$, $\langle g^{01} \rangle$, $\langle g^{11} \rangle$ sowie $\frac{\sigma}{\rho}$ nicht mehr trivial, und man ist auf die numerische Durchführung der Integration angewiesen.

Kapitel 4

Numerische Lösung

4.1 Der Lösungsalgorithmus

Für die Bestimmung des Plasmagleichgewichts stehen uns die χ -Gleichung (3.40), die Dichte-Gleichung (3.89), die Lösbarkeitsbedingung (3.100), (3.101) und die Zustandsgleichung zur Verfügung. Während die Zustandsgleichung alleine von der Teilchendichte $\frac{n}{n_0}$ und der relativistischen freien Enthalpie $\frac{p}{\rho}$ abhängt und damit eine feste Beziehung zwischen den beiden Größen angibt, ist die Situation bei den anderen drei Beziehungen komplizierter. Alle drei Gleichungen enthalten nämlich χ , $\frac{n}{n_0}$ und $V_r(\chi)$ als Parameter. Damit gibt die Lösung der χ -Gleichung die Flussfunktion χ in Abhängigkeit von $\frac{n}{n_0}$ und $V_r(\chi)$, die Lösung der Dichte-Gleichung $\frac{n}{n_0}$ in Abhängigkeit von χ und $V_r(\chi)$ und die Lösung der Lösbarkeitsbedingung die $V_r(\chi)$ in Abhängigkeit von χ und $\frac{n}{n_0}$ an. Da wegen der komplizierten Struktur der Gleichungen die Lösung eines solches Systems aber analytisch nicht möglich ist, ist man auf das numerische Verfahren angewiesen. Für den Algorithmus bietet sich hierfür das zweifach verschachtelte Iterationsverfahren an (Abb.4.1). Ausgegangen wird dabei zuerst von der nullten Näherung $\chi^{(0)}$, $\frac{n}{n_0}^{(0)}$, $V_r(\chi)^{(0)}$. In der inneren Iteration i wird danach die Lösung der χ - und Dichte-Gleichung bei den bestimmten, vorgege-

benen Flussfunktionen $V_r(\chi)$ gesucht. Man löst dabei erst die χ -Gleichung für $\frac{n}{n_0}^{(0)}$, $V_r(\chi)^{(0)}$ auf. Die Lösung $\chi^{(1)}$ setzt man danach in die Dichte-Gleichung ein, wonach die Teilchendichte für $\chi^{(1)}$, $V_r(\chi)^{(0)}$ bestimmt wird. Die neue Teilchendichte $\left(\frac{n}{n_0}\right)^{(1)}$ setzt man nun wieder in die χ -Gleichung ein und löst sie wieder auf. Mit dem neuen χ geht man nun wieder in die Dichte-Gleichung usw. Diese Prozedur wird solange fortgesetzt, bis das System selbstkonsistent ist, d.h. bis die Unterschiede zwischen den alten und neuen Werten der χ -Funktion und der Teilchendichte vernachlässigbar klein sind ($\left\| \left(\frac{n}{n_0}\right)^{(i+1)} - \left(\frac{n}{n_0}\right)^{(i)} \right\| < \epsilon$, wobei ϵ die Größe des erlaubten Fehlers darstellt).

Ist die Lösung für χ und $\frac{n}{n_0}$ auf diese Weise gefunden, so wird sie in die Lösbarkeitsbedingung (3.100) und (3.101) eingesetzt, die anschließend nach $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ aufgelöst wird. Für die neuen Flussfunktionen $V_r(\chi)$ wird danach die innere Iteration wieder durchgeführt. Diese zweite (äußere) Iteration erfolgt damit ähnlich wie die innere, diesmal jedoch zwischen der χ -Gleichung und der Dichte-Gleichung einerseits und der Lösbarkeitsbedingung andererseits. Die Bedingung für die Beendigung der äußeren Iteration ist demnach $\|V_r^{(j+1)}(\chi) - V_r^{(j)}(\chi)\| < \epsilon$.

Damit der Iterationsprozess angefangen werden kann, muss man die Anfangswerte, die nullte Näherung für χ , $\frac{n}{n_0}$ und $V_r(\chi)$, vorgeben. Bei der Wahl der nullten Näherung sollte man dabei darauf achten, dass sie einerseits möglichst nah an der zu erwartenden Lösung liegt, andererseits aber auch konsistent mit den Gleichungen (3.40) und (3.89) ist.

Für die grobe Abschätzung der erwarteten Lösung, die man als nullte Näherung annehmen könnte, sind die folgenden Überlegungen hilfreich: Betrachtet man ein nichtrelativistisches Plasma, so gilt für die Komponenten der Vierergeschwindigkeit: $u^0 \approx 1$, $u^i \approx \epsilon$, mit ϵ - einer kleinen Größe. Laut (3.2) ist aber $u^a \sim \chi$. Auch wenn es nicht zwingend sein müsste, erscheint die Annahme eines kleinen $\chi \approx \epsilon$ als sinnvoll. Daraus ergibt sich die naheliegende grobe

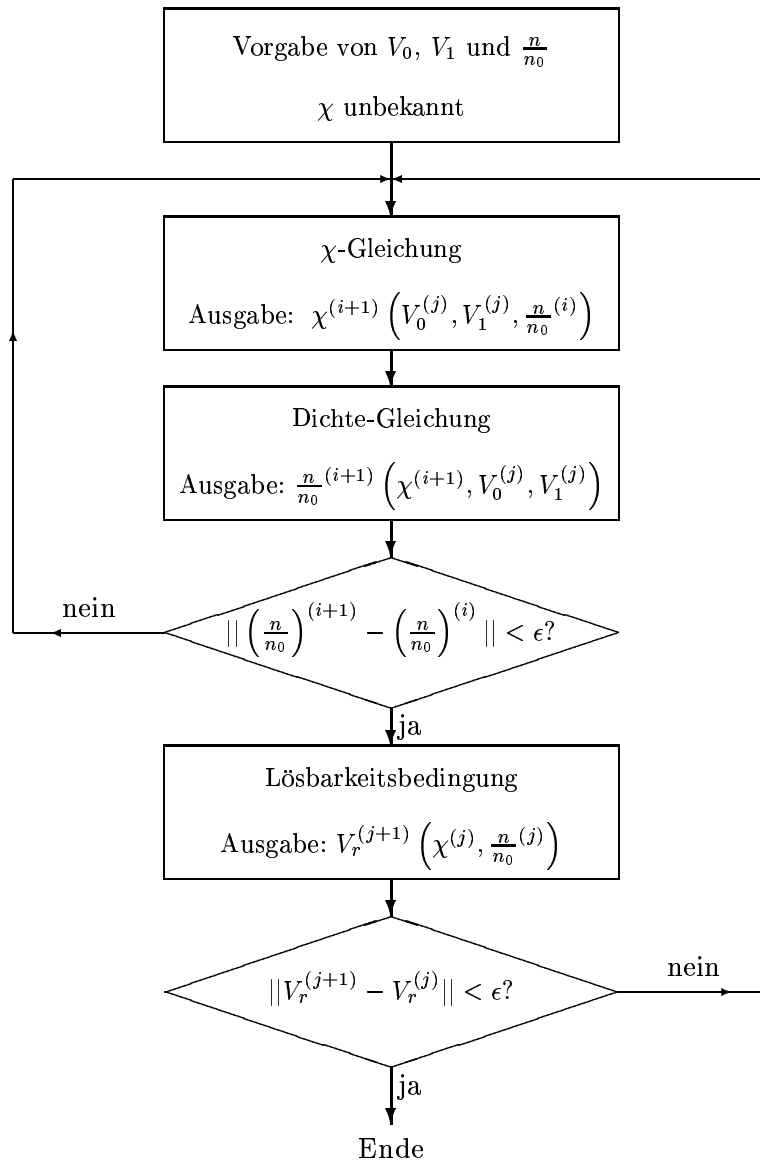


Abbildung 4.1: Der Algorithmus.

Abschätzung bzw. nullte Näherung für χ

$$\chi^{(0)} = 0 \tag{4.1}$$

Die Art der Abhängigkeit der Flussfunktionen V_r von χ ist für die offenen Strömungslinien bereits analytisch abgeleitet worden (vgl. (3.109)). Bei der Suche nach der Lösung für das offene Strömungslinienbild entfällt damit die äußere Iteration.

Für das geschlossene Strömungslinienbild erscheint die Wahl der Flussfunktionen $V_r(\chi)$ in der Theorie völlig offen. Es ist aber zweckmäßig, von dem Fall der offenen Strömungslinien auszugehen und den Ansatz für die nullte Näherung von $V_r(\chi)$ in kleinen Variationen von (3.109) zu suchen. Ein sinnvoller Ansatz wäre hier zum Beispiel:

$$V_0(\chi) = 1, \quad V_1(\chi) = k\chi \tag{4.2}$$

mit nicht zu großem k . Wird die nullte Näherung für χ laut (4.1) gewählt, so folgt daraus für die Flussfunktionen $V_r(\chi)$:

$$V_0(\chi)^{(0)} = 1, \quad V_1(\chi)^{(0)} = 0 \tag{4.3}$$

Mit (4.1) und (4.3) erhält man ferner aus (3.88) für die nullte Näherung der relativistischen freien Enthalpie (mit $U^2 = 0$ und $y \equiv \frac{\sigma}{\rho}$):

$$\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{(0)} = \sqrt{V^2} = \sqrt{g^{00}} \tag{4.4}$$

und aus der Zustandsgleichung (3.86) die entsprechende Näherung für die Teilchendichte:

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^{(0)} = \exp\left(\frac{\sqrt{g^{00}} - 1}{v_{th}^2}\right) \quad (4.5)$$

Die eindeutige Lösung für das Plasmagleichgewicht erhält man jedoch erst dann, wenn die Randbedingungen - die Werte der χ -Funktion an den Rändern des betrachteten Gebiets - vorgegeben sind. Dies ist auch zugleich ein wirksames Instrument dafür, die möglichen Gleichgewichtssysteme zu simulieren. Auch die Teilung der Systeme in offene und geschlossene erfolgt maßgeblich durch die Vorgabe der Randbedingungen. Ein geschlossenes System wird dabei durch die Vorgabe eines konstanten Wertes an den Rändern des betrachteten Gebiets simuliert. In diesem Fall sind die Ränder zugleich auch die Strömungslinien, so dass die Materie weder in das System einfließt noch aus dem System austritt. Für die Simulation eines offenen Systems bieten sich verschiedene Möglichkeiten. Ein vielversprechender Ansatz wäre hierfür $\chi \sim \sin(2\vartheta)$ mit ϑ - dem Winkel zur Rotationsachse. Für die r -Komponente der Vierergeschwindigkeit ergibt sich damit (mit $u^r = u^2 \sim \chi_{,\vartheta}$) $u^r < 0$ für die Äquatorebene und $u^r > 0$ auf den Polen. Damit wäre es denkbar, mit diesem Ansatz ein System zu simulieren, das auf der Äquatorebene die Materie einsammelt und entlang der Rotationsachse sie wieder ausstößt.

4.2 Numerische Realisierung

Die numerische Realisierung des Problems erfolgt mit Hilfe der Methode der finiten Elemente [42], [48]. Auf das betrachtete Gebiet wird dabei ein Gitter angelegt, wodurch das Gebiet in viele sogenannte „finite Elemente“ unterteilt wird. Auf den Eckpunkten des Gitters werden alle relevanten Größen ausgerechnet und gespeichert. Die Werte der Größen in einem beliebigen Punkt des Gebiets werden mit einem geeigneten Ansatz aus den Werten an den Eckpunkten des jeweiligen finiten Elements angenähert [40], [41].

Da die Kerr-Metrik die einfachste Form in den „Boyer-Lindquist“ Koordinaten $(t, \varphi, r, \vartheta)$ hat, werden diese für das Koordinatensystem gewählt. In der poloidalen Ebene ergeben sich dadurch die Polarkoordinaten $(x^2 = r, x^3 = \vartheta)$. Die Kerr-Metrik wird in diesen Koordinaten durch die folgenden Beziehungen bestimmt [8], [45]:

$$\begin{aligned}
 g^{00} &= \frac{\Sigma^2}{\rho^2 \cdot \Delta}; & g^{01} &= g^{10} = \frac{2raM}{\rho^2 \cdot \Delta} \\
 g^{11} &= \frac{1}{\Sigma^2 \cdot \rho^2 \cdot \Delta^2} \left(4r^2 a^2 M^2 - \frac{\rho^4 \cdot \Delta}{\sin^2 \vartheta} \right) \\
 g_{22} &= \frac{-\rho^2}{\Delta}; & g_{33} &= -\rho^2; & g_{23} &= g_{32} = 0
 \end{aligned}$$

mit

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta \quad (4.6)$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \vartheta \quad (4.7)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (4.8)$$

In dem hier beschriebenen Modell wurden die Werte $a = 0.3$ und $M = 0.5$

gewählt. Der Ereignishorizont (bei dem $\Delta = 0$ gilt) ergibt sich daraus für $r = 0.9$.

4.2.1 χ -Gleichung

Das Gitter

Ein rotationssymmetrisches Gleichgewicht läßt sich vollständig durch die Beschreibung in einer poloidalen Halbebene darstellen, die auf einer Seite von der Drehachse beschränkt wird. Die einfachste mögliche Form des betrachteten Gebiets in Boyer-Lindquist-Koordinaten ist dabei die Form, die von zwei Halbkreisen und der Drehachse begrenzt wird. Der Radius des inneren Kreises r_1 wird, um die Singularitäten am Horizont zu vermeiden, leicht über den Horizontradius (z. B. bei $r_1 = 1$) gewählt. Der Radius des äußeren Halbkreises r_2 wird so gewählt, dass einerseits die zu erwartenden Veränderungen der Plasmamaparameter in dem Gebiet zwischen r_1 und r_2 merklich sind, andererseits das Problem numerisch realisierbar bleibt. In diesem Zusammenhang hat sich der Wert $r_2 = 2$ als angemessen erwiesen. Eine weitere Singularität der Kerr-Metrik, die allerdings nur auf die Wahl der Boyer-Lindquist Koordinaten zurückzuführen ist, ergibt sich für g^{11} auf der Rotationsachse. Um die daraus resultierenden Probleme bei der numerischen Realisierung des Gleichgewichts zu vermeiden, wird ein kleiner Winkel $\tau \approx 0.01$ von der Rotationsachse ausgespart.

Somit wird das Gitter, bestehend aus NS Schalen und NB Gitterpunkten in einer Schale, auf das Gebiet zwischen $r = r_1$ und $r = r_2$ sowie $\vartheta = \tau$ und $\vartheta = \pi - \tau$ angelegt ¹ (Abb. 4.2)

Die Nummerierung der Gitterpunkte erfolgt entlang der Schalen. Angefangen

¹der Winkel ϑ wird vom Nordpol gerechnet

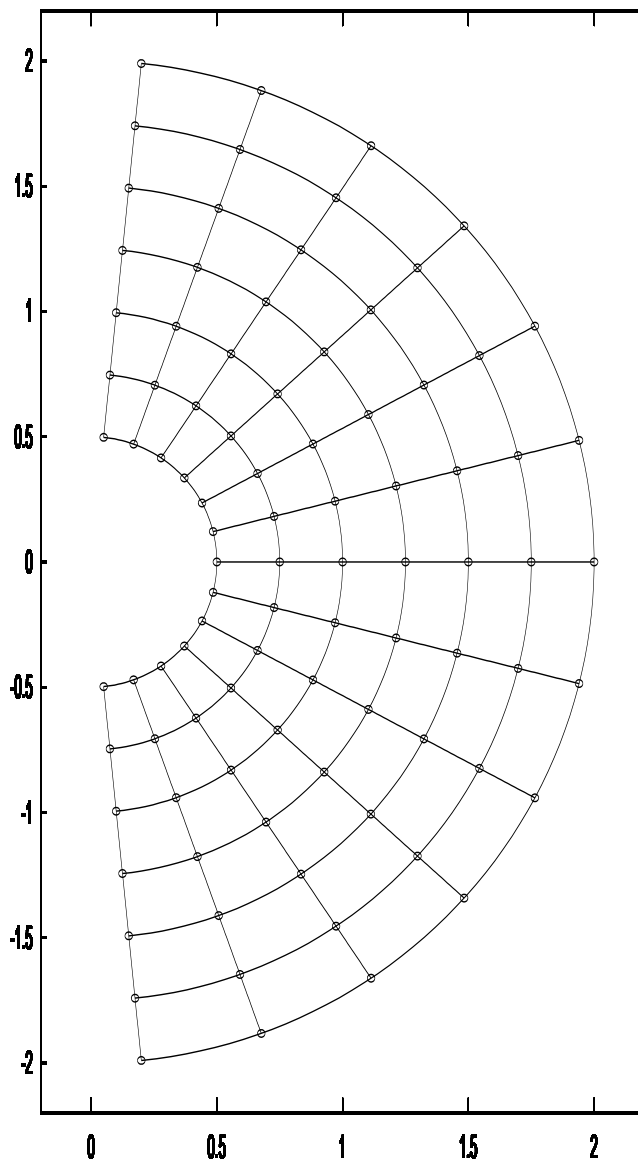


Abbildung 4.2: Das Gitter. Schematische Darstellung in der (x, y) -Ebene

wird mit dem Gitterpunkt $i = 1$ ganz oben auf der Drehachse, d.h. bei $\vartheta = \tau$ und $r = r_2$. Nachdem alle NB Punkte der ersten Schale durchnummeriert sind, wird mit der Nummerierung der Punkte auf der nächsten Schale begonnen. Auf diese Weise werden alle Gitterpunkte bis $i = NB \cdot NS$ bei $\vartheta = \pi - \tau$ und $r = r_1$ durchnummeriert.

Die finiten Elemente, die sich aus dem oben beschriebenen Gitter ergeben, haben zwangsläufig krummlinige Grenzen. Die numerischen Integrationen auf solchen finiten Elementen gestalten sich aber sehr schwierig. Für die numerische Behandlung ist es daher zweckmäßig, mit einer geeigneten lokalen Koordinatentransformation die krummlinigen finiten Elemente in Einheitsquadrate umzuwandeln [40]. Für jedes finite Element wird dabei parallel zur globalen Nummerierung eine lokale Nummerierung erzeugt. Die lokale Nummerzuweisung erfolgt dabei (Abb.4.3) nach dem Muster: $i \rightarrow 1$, $i+1 \rightarrow 2$, $i+1+NB \rightarrow 3$, $i+NB \rightarrow 4$. Die Positionsangaben in dem transformierten finiten Element werden durch die Parameter s und t festgelegt. Die s -Achse verläuft dabei in die 1 – 2 Richtung und die t -Achse in die 1 – 4 Richtung. Mit dieser Konstruktion wird die Benutzung nicht-rechteckiger Gitter ermöglicht.

Stützfunktionen

Zwecks der Diskretisierung der Funktionen wird für jeden Gitterpunkt i eine Stützfunktion h_i eingeführt. Man definiert diese Funktion so, dass sie auf dem entsprechenden Gitterpunkt den Wert 1 annimmt, und monoton gegen Null auf der Grenze zum nächsten finiten Element abfällt. Der tatsächliche Verlauf der Stützfunktionen wird durch den Verlauf der lokalen Stützfunktionen N_j , $j = 1, 2, 3, 4$ in dem transformierten finiten Element definiert. Die lokalen Stützfunktionen sind dabei:

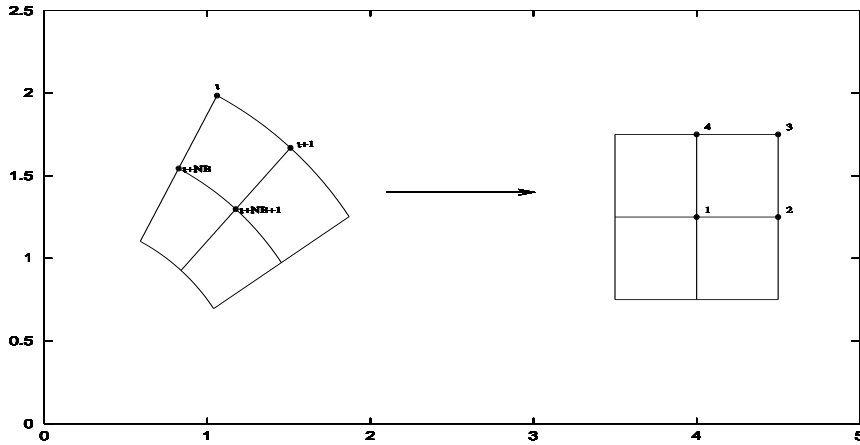


Abbildung 4.3: Das Transformationsmuster des finiten Elements zu einem Quadrat

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1 - s) \cdot (1 - t) \\
 N_2 &= s \cdot (1 - t) \\
 N_3 &= s \cdot t \\
 N_4 &= (1 - s) \cdot t
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Die Stützfunktionen h_i am globalen Gitterpunkt i wird dann durch die lokale Stützfunktion N_j am entsprechenden Eck des Einheitsquadrats repräsentiert.

Ableitungen der Stützfunktionen

Es gilt für die Ableitungen der Stützfunktionen die allgemeine Formel:

$$h_{i,a} \equiv \frac{\partial h_i}{\partial x^a} = \frac{\partial N_j}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x^a} + \frac{\partial N_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^a}
 \tag{4.10}$$

wobei N_j die entsprechende lokale Stützfunktion in dem transformierten finiten Element ist. Die Ableitungen $\frac{\partial N_j}{\partial s}$ und $\frac{\partial N_j}{\partial t}$ bekommt man aus (4.9):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial s} &= t - 1 & \frac{\partial N_1}{\partial t} &= s - 1 \\
\frac{\partial N_2}{\partial s} &= 1 - t & \frac{\partial N_2}{\partial t} &= -s \\
\frac{\partial N_3}{\partial s} &= t & \frac{\partial N_3}{\partial t} &= s \\
\frac{\partial N_4}{\partial s} &= -t & \frac{\partial N_4}{\partial t} &= 1 - s
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Für die Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial x^a}$ und $\frac{\partial t}{\partial x^a}$ benötigt man den Diskretisierungsansatz für die Funktionen.

Diskretisierung der Funktionen

Für die numerische Behandlung wird jede Größe A durch den Diskretisierungsansatz

$$A = \sum_{i=1}^N A_i h_i(r, \vartheta) \equiv \sum_{j=1}^4 A_j N_j(s(r, \vartheta), t(r, \vartheta)) \tag{4.12}$$

dargestellt. Die Werte A_i auf den Gitterpunkten werden in der speziellen Matrix gespeichert. In der globalen Nummerierung findet die Summation formal über alle Gitterpunkte statt. Mit der obenbeschriebenen Wahl der Stützfunktionen sind aber in einem beliebigen Punkt des Gebiets maximal nur vier Stützfunktionen ungleich Null, und zwar diejenigen, die zu den Eckpunkte des finiten Elements gehören, in dem sich der Punkt befindet. Deshalb erfolgt in der lokalen Nummerierung j die Summation nur über die Eckpunkte des jeweiligen finiten Elements.

Für die χ -Funktion und ihren Ableitungen bzw. Variationen ergibt sich damit der folgende Ansatz:

$$\chi = \sum_{i=1}^N \chi_i h_i \quad (4.13)$$

$$\chi_{,a} = \sum_{i=1}^N \chi_i h_{i,a} \quad (4.14)$$

$$\delta\chi = \sum_{i=1}^N \delta\chi_i h_i \quad (4.15)$$

$$(\delta\chi)_{,a} = \sum_{i=1}^N \delta\chi_i h_{i,a} \quad (4.16)$$

Der gleiche Ansatz gilt natürlich auch für die anderen Größen, unter anderem für die Koordinaten r und ϑ . In der lokalen Schreibweise erhält man mit (4.9) für die Darstellung von r bzw. ϑ :

$$x^a = x_1^a \cdot (1-s) \cdot (1-t) + x_2^a \cdot s \cdot (1-t) + x_3^a \cdot s \cdot t + x_4^a \cdot (1-s) \cdot t \quad (4.17)$$

wobei $x^a = r$ bzw. ϑ ist. Die Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial x^a}$ und $\frac{\partial t}{\partial x^a}$ kann man damit wie folgt ausrechnen: Man rechnet zunächst mit Hilfe von (4.17) die Ableitungen $\frac{\partial x^a}{\partial t}$ und $\frac{\partial x^a}{\partial s}$ aus. Danach bildet man die Jacobideterminante $J \equiv \frac{D(r,\vartheta)}{D(s,t)}$. Die Umkehrung der Ableitungen erfolgt nun nach der Formel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial r} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial t} J^{-1} \\ \frac{\partial s}{\partial \vartheta} &= -\frac{\partial r}{\partial t} J^{-1} \\ \frac{\partial t}{\partial r} &= -\frac{\partial \vartheta}{\partial s} J^{-1} \\ \frac{\partial t}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial r}{\partial s} J^{-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Setzt man (4.18) und (4.11) in (4.10) ein, so erhält man die Ableitungen der Stützfunktionen nach r bzw. ϑ .

χ -Gleichung

Die χ -Gleichung wird mit Hilfe des Variationsprinzips gelöst. Wie es bereits in dem vorigen Kapitel plausibel gemacht wurde, wird die χ -Gleichung durch die χ -Funktion gelöst, bei der das Funktional (3.91) ein Minimum hat bzw. bei der die Variation dieses Funktionals in Bezug auf χ verschwindet. Da in dem Funktional $W(\chi)$ nur die Funktionen V^2 und U^2 von χ abhängig sind, können wir die Bedingung $\delta W = 0$ wie folgt schreiben:

$$\delta W(\chi) = \int d^2x \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(N \delta(V^2) + \frac{1}{N} \delta(U^2) \right) = 0 \quad (4.19)$$

und die Variationen $\delta(V^2)$ und $\delta(U^2)$ getrennt behandeln. Mit der Definition (3.85) von V^2 erhalten wir für $\delta(V^2)$:

$$\delta(V^2) = 2g^{rs} V_r(\chi) V'_s(\chi) \delta\chi \quad (4.20)$$

Für $\delta(U^2)$ ergibt sich aus (3.84):

$$\delta(U^2) = \frac{2}{-g} \sum_{a,b} (g_{ab} \chi_{,a} \delta(\chi_{,b}) - g_{bb} \chi_{,a} \delta(\chi_{,a})) \quad (4.21)$$

Zusammen mit dem Diskretisierungsansatz für χ (4.16) und $\delta(\chi_{,a}) = (\delta\chi)_{,a}$ erhalten wir daraus für die Variation des Funktionals W :

$$\delta W = \sum_{j=1}^N \int d^2x \left[\sqrt{-g} N g^{rs} V_r(\chi) V'_s(\chi) h_j \right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-g}N} \sum_{a,b} \sum_{i=1}^N (g_{ab}h_{i,b}h_{j,a} - g_{bb}h_{i,a}h_{j,a}) \chi_i \Big] \delta\chi_j \quad (4.22)$$

Damit die Bedingung $\delta W = 0$ erfüllt ist, muss also für jedes j gelten:

$$\int d^2x \left[\sqrt{-g}N g^{rs} V_r(\chi) V'_s(\chi) h_j \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{-g}N} \sum_{a,b} \sum_{i=1}^N (g_{ab}h_{i,b}h_{j,a} - g_{bb}h_{i,a}h_{j,a}) \chi_i \right] = 0 \quad (4.23)$$

da die Variationen $\delta\chi_j$ i.a. ungleich Null sind. (4.23) ist die Gleichung, deren Spezialisierungen für verschiedene Abhängigkeiten $V_r(\chi)$ auch später in dem Programm numerisch gelöst werden. Die letzte Frage, die dabei noch zu klären bleibt, ist die Form der Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$.

Offenes System:

Die Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ wurden für ein offenes System im vorigen Kapitel abgeleitet (3.109). Das Ergebnis war, dass die beiden Flussfunktionen in einem offenen System einen konstanten Wert überall im betrachteten Gebiet annehmen und somit von χ unabhängig sind. Folglich verschwindet auch die Variation von V^2 in Bezug auf χ :

$$\delta V^2 = 0$$

Damit wird (4.23) zu

$$\sum_{i=1}^N \int d^2 \frac{1}{\sqrt{-g}N} \sum_{a,b} (g_{ab}h_{i,b}h_{j,a} - g_{bb}h_{i,a}h_{j,a}) \chi_i = 0 \quad (4.24)$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\sum_{i=1}^N M_{ji} \chi_i = 0 \quad (4.25)$$

Die Gleichung (4.25) hat natürlich die triviale Lösung $\chi_i = 0$. Allerdings gilt die Form (4.25) nur für die inneren Gitterpunkte. Durch die Vorgabe der Randwerte wird die triviale Lösung der Gleichung (4.24) verhindert.

Geschlossenes System:

Analytisch ist es nicht möglich, die Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ für ein geschlossenes System zu ermitteln. Man ist deshalb auf das Iterationsverfahren (Abschnitt 4.1) angewiesen. Der Weg dabei soll sein, für die nullte Näherung einen Ansatz zu wählen, der der Lösung für ein offenes System ähnlich ist, und im Laufe der Iterationen ihn auf das gegebene geschlossene System anzupassen. Ein möglicher Ansatz, der im Rahmen dieser Arbeit ausgiebig erprobt wurde, ist: $V_0(\chi) = 1$ und $V_1(\chi) = -k \cdot \chi$ mit nicht zu großem k . Für δV^2 erhält man demnach:

$$\delta(V^2) = 2(g^{01} k \delta\chi + g^{11} k^2 \chi \delta\chi) \quad (4.26)$$

und die χ -Gleichung wird mit dem Diskretisierungsansatz (4.13)-(4.16) zu

$$\sum_{i=1}^N \int d^2x \left[\sqrt{-g} N g^{11} k^2 h_i h_j + \sum_{a,b} \frac{1}{\sqrt{-g} N} (g_{ab} h_{i,b} h_{j,a} - g_{aa} h_{i,a} h_{j,a}) \right] \chi_i = - \int d^2x \sqrt{-g} N g^{01} k h_j \quad (4.27)$$

was dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^N M_{ji} \chi_i = B_j \quad (4.28)$$

entspricht, mit

$$M_{ij} = \int d^2x \left[\sqrt{-g} N g^{11} k^2 h_i h_j + \sum_{a,b} \frac{1}{\sqrt{-g} N} (g_{ab} h_{i,b} h_{j,a} - g_{bb} h_{i,a} h_{j,a}) \right]$$

$$B_j = - \int d^2x \sqrt{-g} N g^{01} k h_j$$

Das Gleichungssystem läßt sich zum Beispiel mit der Gauß-Methode oder durch die Matrixinversion lösen [46], [47].

4.2.2 Dichte-Gleichung

Die Normierungsbedingung (3.65), die hier in der Form (3.89)-(3.90) geschrieben wird, wird zusammen mit (3.9) als die Gleichung für die Bestimmung der Teilchendichte $\frac{n}{n_0}$ interpretiert. Dies ist eine transzendente Gleichung und aus diesem Grunde analytisch nicht lösbar. Deshalb ist man auch hier auf die numerische Lösung angewiesen. Die numerische Lösung der Dichte-Gleichung wurde in dieser Arbeit zum Teil nach dem Newtonschen Verfahren, aber auch durch die Tabellierung der Funktion $F(y, U^2)$ durchgeführt. Dabei geht man folgendermaßen vor: Zunächst wird versucht, (3.89) in Bezug auf $y \equiv \frac{\sigma}{\rho}$ nach dem Newtonschen Verfahren aufzulösen. Als die nullte Näherung nimmt man dabei stets $y^{(0)} = 0$ an. Ist die i -te Näherung $y^{(i)}$ bekannt, so erhält man $y^{(i+1)}$ nach der Formel:

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \Delta y^{(i)}$$

$$\Delta y^{(i)} = \frac{\sqrt{V^2} - F(y^{(i)}, U^2)}{F'(y^{(i)}, U^2)} \quad (4.29)$$

Dieses Verfahren funktioniert aber nur für monotone Funktionen. Hat $F(y, U^2)$ ein lokales Extremum, so gilt in der Nähe des Extremums $F'(y, U^2) \rightarrow 0$ und (4.29) ist nicht mehr brauchbar. Abhängig von den Parametern U^2 , V^2 und v_{th} kann die Funktion $F(y, U^2)$ eine der in Abb.:4.4-4.7 dargestellten Formen haben. Daraus sieht man, dass die Funktion entweder monoton steigend ist, oder zwischendurch ein lokales Maximum und ein lokales Minimum hat, bevor sie asymptotisch gegen $f(y) = y$ übergeht. Ferner ist $\lim_{y \rightarrow 0} F'(y, U^2) \neq 0$, so dass $y = 0$ ein geeigneter Startpunkt bei der Suche nach der Lösung der Dichte-Gleichung (3.89) darstellt. Ist die Funktion monoton steigend, oder liegt das lokale Minimum über $\sqrt{V^2}$, so erhält man problemlos die Lösung nach dem Newtonschen Verfahren (4.29). Im anderen Fall muss man die „unbequemen“ Stellen mit $|F'(y, U^2)| < \epsilon$ tabellieren. Dafür wird in dem Programm für jedes $y^{(i)}$ überprüft, ob $F'(y, U^2) < \epsilon$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird die Funktion $F(y, U^2)$ weiter tabelliert bis $F'(y, U^2) > \epsilon$ gilt. Ist die „unbequeme“ Stelle überwunden und die Lösung immer noch nicht gefunden, so rechnet man nach dem Newtonschen Verfahren weiter. Diese Kombination von dem Newtonschen Verfahren und der Tabellierung ermöglicht es immer, die erste Lösung der Dichte-Gleichung (3.89) zu finden.

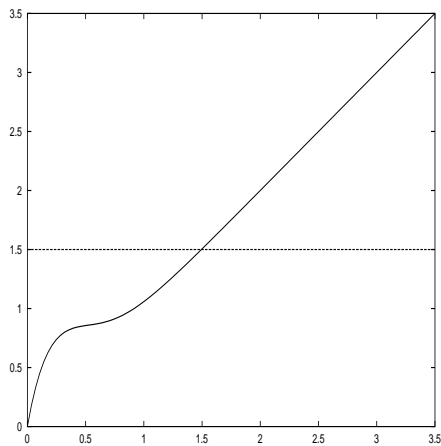


Abbildung 4.4: Graphische Darstellung zur transzendenten Dichte-Gleichung (3.89) mit $v_{ih}^2 = 0.36$, $U^2 = 0.12$, $\sqrt{V^2} = 1.5$. Die Lösung der Gleichung erhält man für diejenigen y , bei denen die Funktion $F(y, U^2)$ die waagerechte Linie (entspricht $\sqrt{V^2}$) überschneidet

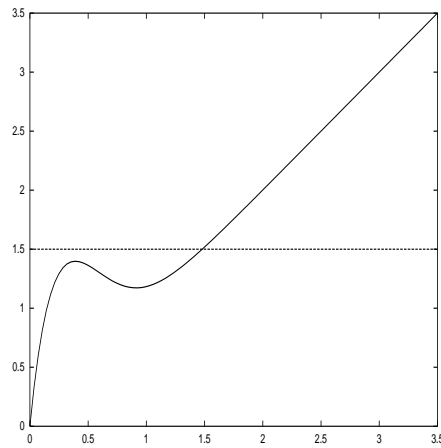


Abbildung 4.6: Graphische Darstellung zur transzendenten Dichte-Gleichung (3.89) mit $v_{ih}^2 = 0.36$, $U^2 = 0.4$, $\sqrt{V^2} = 1.5$. Die Lösung der Gleichung erhält man für diejenigen y , bei denen die Funktion $F(y, U^2)$ die waagerechte Linie (entspricht $\sqrt{V^2}$) überschneidet

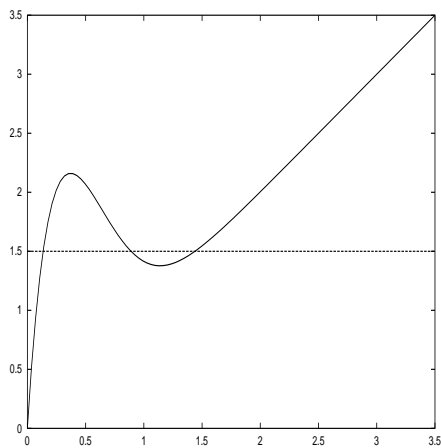


Abbildung 4.5: Graphische Darstellung zur transzendenten Dichte-Gleichung (3.89) mit $v_{ih}^2 = 0.36$, $U^2 = 1.0$, $\sqrt{V^2} = 1.5$. Die Lösung der Gleichung erhält man für diejenigen y , bei denen die Funktion $F(y, U^2)$ die waagerechte Linie (entspricht $\sqrt{V^2}$) überschneidet

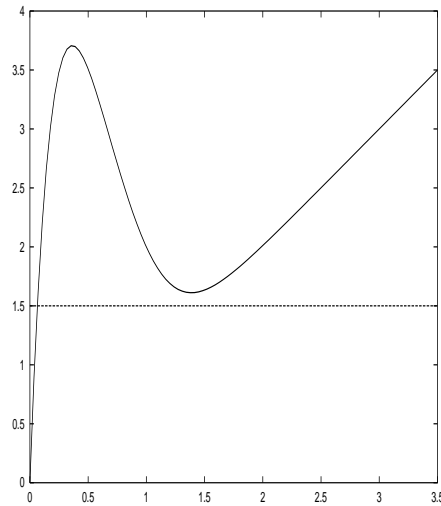


Abbildung 4.7: Graphische Darstellung zur transzendenten Dichte-Gleichung (3.89) mit $v_{ih}^2 = 0.36$, $U^2 = 3.0$, $\sqrt{V^2} = 1.5$. Die Lösung der Gleichung erhält man für diejenigen y , bei denen die Funktion $F(y, U^2)$ die waagerechte Linie (entspricht $\sqrt{V^2}$) überschneidet

Kapitel 5

Das Programm

Die numerische Computersimulation der Plasmagleichgewichte um ein Kerr-Loch wurde mit Hilfe des im Rahmen dieser Arbeit angefertigten Programms in C++-Programmiersprache durchgeführt. Um sicher zu sein, dass der numerische Code auch die gesuchten, physikalisch interessanten, Lösungen produziert, wurde das Verfahren an einer bekannten analytischen Lösung getestet. Anschließend wurden die Gleichgewichte für ein offenes und ein geschlossenes System simuliert.

5.1 Test des Programms

Der Teil des Programms, der die Lösung für die Funktion χ produziert, wurde an der Gleichung:

$$\int d^2x \Delta \chi \delta \chi = \int d^2x H \delta \chi \quad (5.1)$$

getestet, wobei Δ der Laplace-Operator und $H \equiv \Delta \chi$ für eine bestimmte Testfunktion χ ist. Als Testfunktion wurde

$$\chi = \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} \quad (5.2)$$

gewählt. Für H ergibt sich damit

$$H = \Delta\chi = -\frac{2 \cos(2\vartheta)}{r^4} \quad (5.3)$$

Wenn man die Werte der Testfunktion χ an den Rändern des betrachteten Gebiets festhält, so ergibt die linke Seite von (5.1) nach einer partiellen Integration:

$$\int d^2x \Delta\chi \delta\chi \equiv \int d^2x \nabla(\nabla\chi) \delta\chi = - \int d^2x (\nabla\chi) \cdot \delta(\nabla\chi) \quad (5.4)$$

Ferner gilt in Polarkoordinaten

$$\nabla\chi = \chi_{,r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \chi_{,\vartheta} \vec{e}_\vartheta \quad (5.5)$$

so dass für das Skalarprodukt $(\nabla\chi) \cdot \delta(\nabla\chi)$ gilt:

$$(\nabla\chi) \cdot \delta(\nabla\chi) = \chi_{,r} \delta(\chi_{,r}) + \frac{1}{r^2} \chi_{,\vartheta} \delta\chi_{,\vartheta} \quad (5.6)$$

Mit dem Diskretisierungsansatz (4.13)-(4.16) kann man also die linke Seite von (5.1) wie folgt umschreiben:

$$\int d^2x \Delta\chi \delta\chi = - \int d^2x \sum_{i,j=1}^N \left[h_{i,r} h_{j,r} + \frac{1}{r^2} h_{i,\vartheta} h_{j,\vartheta} \right] \chi_i \delta\chi_j \quad (5.7)$$

$$\chi_i = \frac{\cos^2 \vartheta_i}{r_i^2}$$

Für die rechte Seite von (5.1) erhält man demnach:

$$\int d^2x H \delta\chi = \int d^2x \sum_{l,j=1}^N H_l h_l h_j \delta\chi_j \quad (5.8)$$

$$H_l = -\frac{2 \cos(2\vartheta_l)}{r_l^4}$$

Damit ergibt sich eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^N M_{ij} \chi_i = B_j$$

mit

$$M_{ij} = \int d^2x \left(h_{i,r} h_{j,r} + \frac{1}{r^2} h_{i,\vartheta} h_{j,\vartheta} \right)$$

$$B_j = - \int d^2x \sum_{l=1}^N H_l h_l h_j$$

Diese Gleichung wurde numerisch anhand des Programms auf dem obenbeschriebenen Gitter (Abb. 4.2) gelöst. Das Ergebnis für die inneren Gitterpunkte gab für ein Gitter mit $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.0$, bestehend aus $NS = 35$ Schalen mit $NB = 100$ Gitterpunkten pro eine Schale, die maximale Abweichung von dem analytischen Wert weniger als 1.0% und war damit zufriedenstellend. Allerdings stieg der Fehler an den Randpunkten sehr schnell bis zu 10% an. Um dies zu verhindern, wurde das Gitter 4.2 durch ein modifiziertes Gitter ersetzt (Abb.5.1). In dem neuen Gitter werden zusätzlich vier Schalen und vier radiale Linien eingeführt, und zwar im Abstand von den äußeren Rändern, der 0.1 bzw. 0.4 des sonst üblichen Abstandes zwischen den Gitterpunkten beträgt. Mit dieser neuen Konstruktion betrug die maximale Abweichung des im

Programm errechneten Wertes der Testfunktion von der analytisch bekannten Lösung 4.15% und der mittlere quadratische Fehler wurde mit 0.31% gemessen. Damit zeigte das numerische Verfahren für das verbesserte Gitter auf dem betrachteten Gebiet eine sehr gute Genauigkeit, so dass man sich auch weiter sicher sein kann, dass die numerischen Fehler in dem Programm-Code eine unbedeutende Rolle spielen, und deshalb auch die richtige physikalische Lösung in den späteren Anwendungen produziert wird.

In Abb.5.2 sind die numerische und analytische Lösung der Testgleichung auf dem Gebiet $r \in [1; 2]$, $\vartheta \in [0; \pi]$ gegenübergestellt. Für das Gitter wurde die verbesserte Version (Abb. 5.1) mit $NS = 35$ und $NB = 100$ gewählt. Mit den Kreuzen ist dabei die numerische und mit Linien die analytische Lösung dargestellt. Mit dem bloßen Auge sind die Unterschiede beider Lösungen nicht auszumachen, was auch mit dem mittleren quadratischen Fehler der numerischen Lösung konsistent ist.

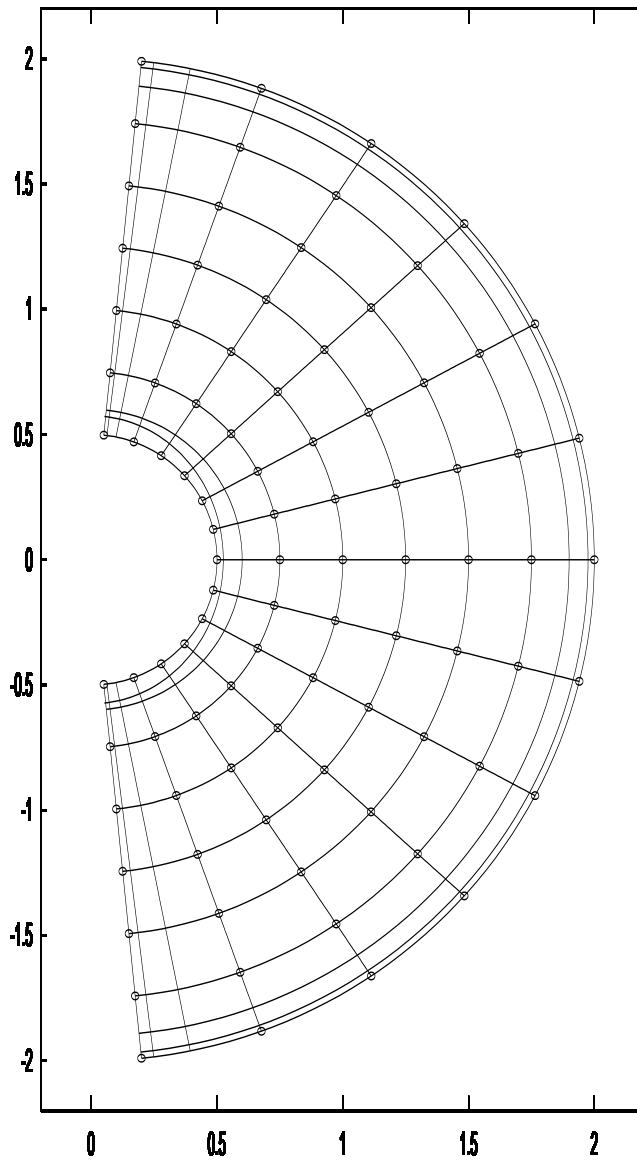


Abbildung 5.1: Das verbesserte Gitter. Das in der Abb.:4.2 vorgestellte Gitter wurde zwecks Fehlerminimierung durch die Einführung zusätzliche Schalen und radiale Linien entlang des Randes verbessert.

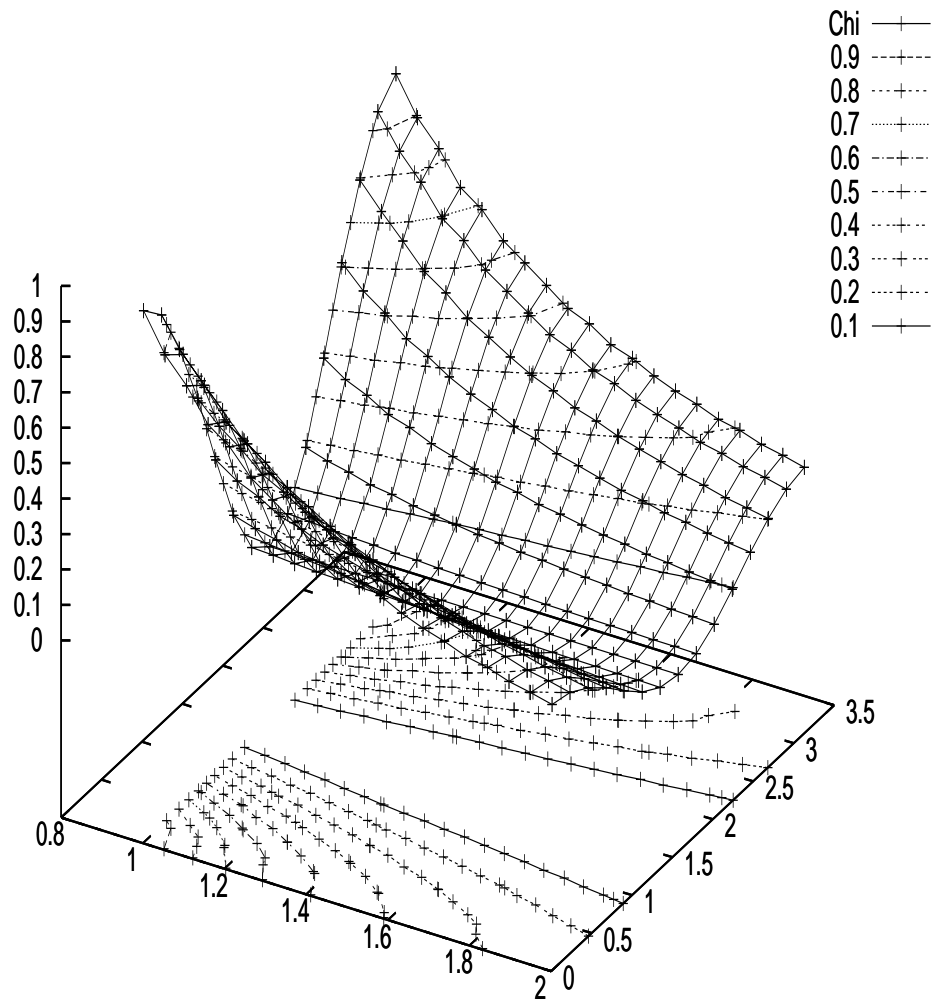


Abbildung 5.2: Die Testlösung ausgerechnet auf dem verbesserten Gitter (Abb.:5.1) mit $NS = 35$, $NB = 100$, $r \in [1.0; 2.0]$, $\vartheta \in [0.0; \pi]$ Kreuze: Die numerische Lösung als die Funktion von (r, ϑ) . Linien: analytische Lösung.

5.2 Geschlossenes System

Nach dem bisher vorgestellten Modell gilt für ein offenes System $V_0(\chi) = 1$, $V_1(\chi) = -l$, wobei l ein Maß für die zur Reibung passende Ringspannung angibt. Ein dissipationssfreier Fall wird dabei durch $l = 0$ beschrieben, und für ein schwach dissipatives Plasma ist l nicht zu groß. Eine genaue Aussage über die Form der Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ für ein geschlossenes System ist aber analytisch nicht möglich. Bei der Betrachtung eines schwach dissipativen sowie eines idealen Plasmas in einem geschlossenen System scheint es jedoch sinnvoll zu sein, von den bekannten Lösungen für ein offenes System auszugehen und den Ansatz für $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ durch eine Störung der bekannten Lösung zu konstruieren. In der ersten Näherung ergeben sich dabei die folgenden möglichen Modelle:

1. $V_0(\chi) = 1$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. V_0 wird wie in einem offenen System gewählt, für die V_1 wird die erste (lineare) Näherung genommen. Damit das Plasma schwach dissipativ bleibt, muss $k_1\chi$ klein sein.
2. $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = 0$. Wie wir oben gesehen haben, beschreibt $V_1 = 0$ den reibungsfreien Fall. Für die Abweichung von V_0 von der entsprechenden Flussfunktion in einem offenen System wird ein linearer Ansatz gewählt. Damit die Abweichung nicht zu groß wird, muss $k_0\chi$ klein sein.
3. $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1$. Auch dies ist ein Modell für die Beschreibung eines schwach dissipativen Plasmas. Wie in einem offenen System wird die Reibung durch einen konstanten, nicht zu großen Koeffizienten k_1 berücksichtigt. Der Ansatz für V_0 wird wie im Punkt 2 gewählt. Auch hier muss also $k_0\chi$ klein sein.
4. $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. Dieser Fall beschreibt ein schwach dissipatives Plasma. Der Ansatz für V_0 wird aus dem Punkt 2 übernommen,

für V_1 aus dem Punkt 1. Sowohl $k_0\chi$ als auch $k_1\chi$ müssen dabei klein sein.

Für ein nichtrelativistisches Plasma erwartet man für die poloidale Geschwindigkeit $|u^a| \ll u^0$. Da die Normierung so gewählt ist, dass in einem mitbewegten System $u^0 = 1$ gilt, so folgt aus der Annahme eines nichtrelativistischen Plasmas, dass $u^a \ll 1$ gilt. Da aber die poloidalen Geschwindigkeiten im Wesentlichen von den Ableitungen der χ -Funktion nach den Koordinaten in der poloidalen Ebene abhängig sind, ist natürlich bei den Computersimulationen auch für die Randwerte der χ -Funktion die Näherung $|\chi| \ll 1$ anzunehmen. Infolge dessen wurde der Wert $\chi|_{Rand} = 0.035$ für die Randbedingungen in allen Simulationen für ein geschlossenes System angenommen.

Während der Computersimulation hat sich herausgestellt, dass für alle vier obengenannten Modelle sich Koeffizienten k_0 und k_1 finden lassen, bei denen die innere Iteration konvergiert. Die Konvergenz verläuft dabei meistens sehr schnell, so dass bereits nach 2 Iterationen eine Vorstellung über das Flussbild gewonnen werden kann. Dies wird in der Abb.:5.3 und Abb.:5.4 am Beispiel für das zweite Modell mit $k_0 = 0.2$ deutlich gemacht. In der Abb.:5.3 wurden die Ergebnisse für die χ -Funktion nach 2 und 15 inneren Iterationen gegenübergestellt. Mit den Linien wird dabei die richtige Lösung (χ -Funktion nach 15 Iterationen) und mit Kreuzen die Lösung nach 2 Iterationen dargestellt. Auch wenn der Fehler nach zwei Iterationen an manchen Gitterpunkten über 300% betrug, vermittelt die χ -Funktion das Bild, das sehr nah an dem tatsächlichen Aussehen der Lösung liegt. In der Abb.:5.4 werden die Ergebnisse für die χ -Funktion nach 6 und 15 Iterationen dargestellt. Auch hier wurde die richtige Lösung mit Linien und die Lösung nach 6 Iterationen mit Kreuzen gezeichnet. Man sieht, dass bereits nach 6 Iterationen das gesamte Strömungslinienbild festgelegt ist. Die Verbesserungen nach 15 Iterationen sind im Bild nicht mehr zu erkennen, obwohl der Fehler auch nach 6 Iterationen an manchen Gitterpunkten immer noch sehr groß war (über 90%).

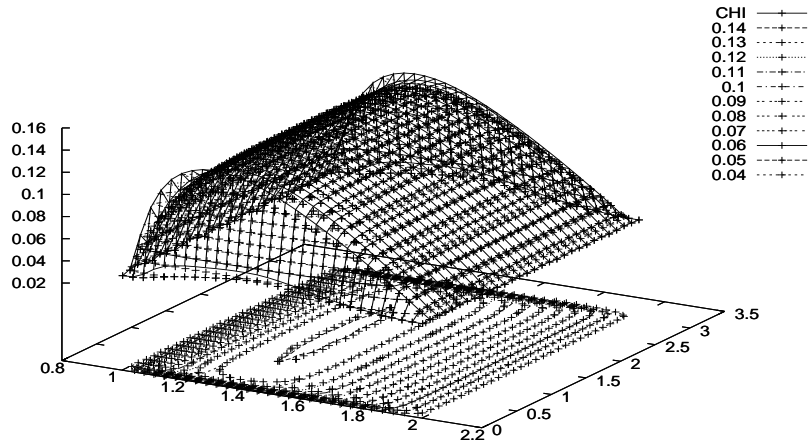


Abbildung 5.3: Vergleich der Lösung der χ -Gleichung nach 2 und 15 Iterationen in der (r, ϑ) -Ebene. Kreuze: Die Lösung nach 2 Iterationen. Linien: die richtige Lösung (nach 15 Iterationen). Ausgerechnet für ein geschlossenes System mit $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = 0$; $k_0 = 0.2$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$.

Auf den Abb.:5.5-5.8 sind die Ergebnisse der numerischen Simulation für die χ -Funktionen in einem geschlossenen System für die erwähnten Modelle in der (r, ϑ) -Ebene dargestellt. Das betrachtete Gebiet wurde durch die Koordinatenlinien $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.0$ und $\vartheta_1 = 0.01$, $\vartheta_2 = \pi - 0.01$ definiert. Für das Gitter wurde das verbesserte Modell Abb.:5.1 mit $NB = 100$ und $NS = 35$ gewählt. Alle Simulationen wurden mit $v_{th} = 1$ durchgeführt. Das geschlossene System wurde dabei durch einen konstanten vorgegebenen Wert von χ an den Rändern des betrachteten Gebiets simuliert:

$$\chi|_{Rand} = 0.035 \quad (5.9)$$

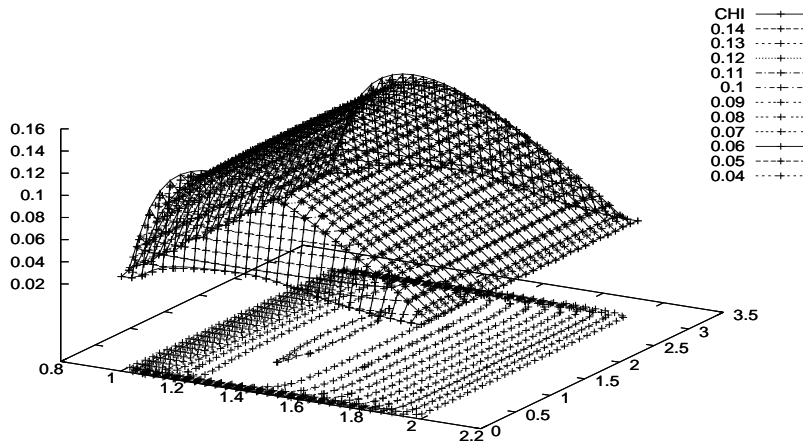


Abbildung 5.4: Vergleich der Lösung der χ -Gleichung nach 6 und 15 Iterationen in der (r, ϑ) -Ebene. Kreuze: Die Lösung nach 6 Iterationen. Linien: die richtige Lösung (nach 15 Iterationen). Ausgerechnet für das gleiche System wie in der Abb.:5.3.

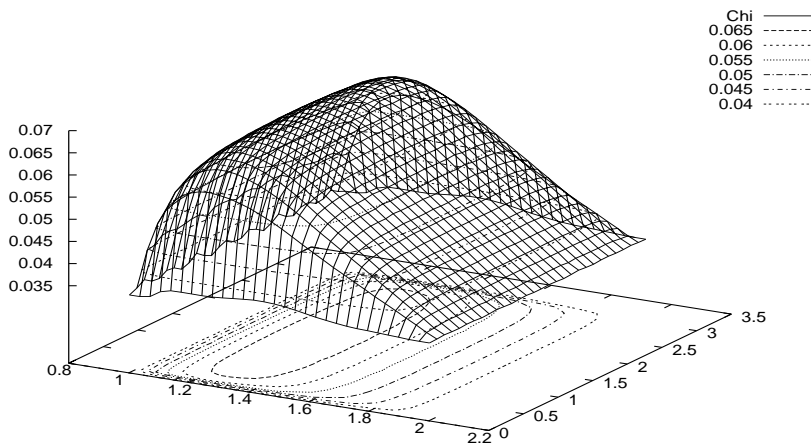


Abbildung 5.5: χ -Funktion in einem geschlossenen System. Modell 1: $V_0(\chi) = 1$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_1 = 0.5$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

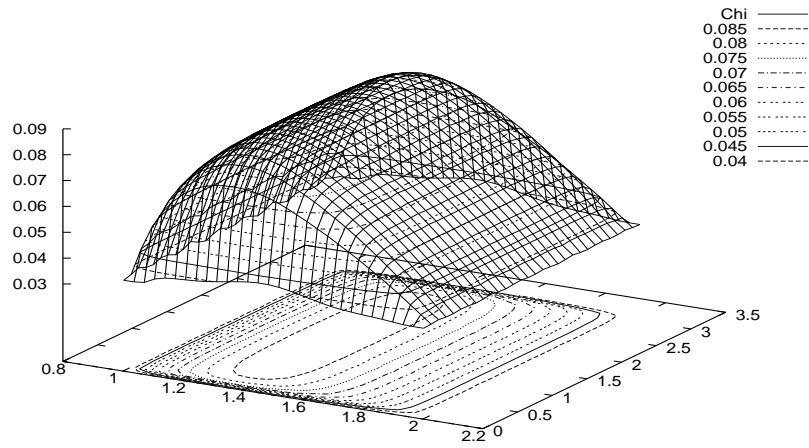


Abbildung 5.6: χ -Funktion in einem geschlossenen System Modell 2: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = 0$. $k_0 = 0.1$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

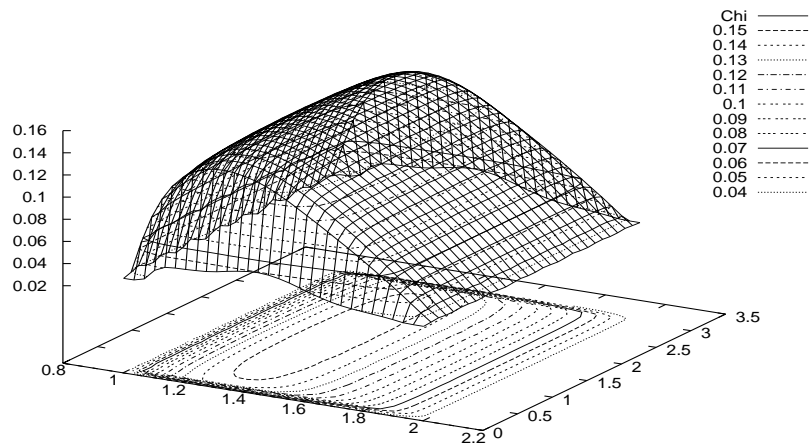


Abbildung 5.7: χ -Funktion in einem geschlossenen System Modell 3: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1$. $k_0 = 0.1$, $k_1 = 0.02$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

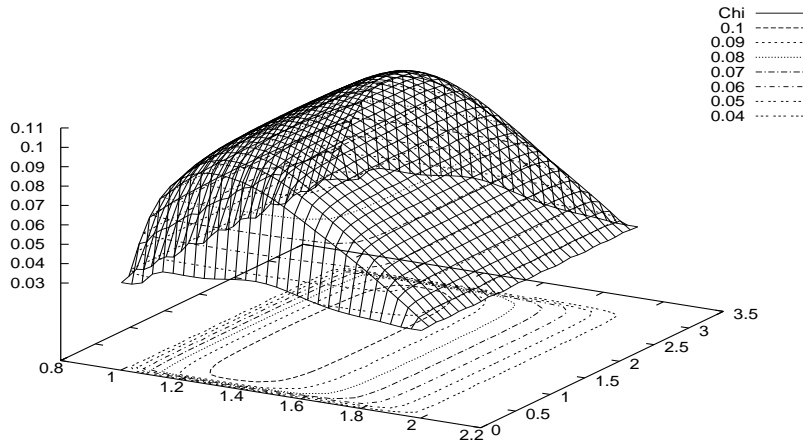


Abbildung 5.8: χ -Funktion in einem geschlossenen System Modell 4: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_0 = 0.1$, $k_1 = 0.3$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

Damit wird erreicht, dass der Rand des betrachteten Gebiets eine Strömungslinie darstellt.

In der Tab.:5.1 werden die relevanten Parameter für diese Simulationen angegeben. In allen vier Modellen wurde nach dem kompletten Lauf der inneren Iteration für nicht zu große Störungen das gleiche topologische Bild für die χ -Funktion erzeugt. Es ergibt sich dabei immer ein „Berg“, mit dem Maximum der χ -Funktion, das zum inneren Rand von der Mitte des betrachteten Gebiets verschoben ist. Für die Plasmabewegung bedeutet es, dass ein Wirbel in der Mitte des Gebiets entsteht, wobei die Bewegung im Uhrzeigersinn erfolgt (da $u^\vartheta \sim -\chi_{,r}$ ist).

Turbulenzen

Die Höhe des Berges hängt in entscheidender Weise von dem Störungsterm in dem Ansatz für V_0 und V_1 , der die Abweichung von dem idealen Fall (beschrie-

Tabelle 5.1: Lösung der χ -Gleichung für verschiedene Modelle in einem geschlossenen System nach 6 Iterationen. Für alle Modelle ist $v_{th} = 1.0$, $\chi_{Rand} = 0.035$.

Modell	k_0	k_1	Maximaler Fehler ϵ_{abs} , %	Quadratischer Fehler ϵ_{quad} , %	χ_{max}
$V_0(\chi) = 1$ $V_1(\chi) = -k_1\chi$	-	0.5	0.032	0.001	0.0684
$V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$ $V_1(\chi) = 0$	0.1	-	0.710	0.001	0.0887
$V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$ $V_1(\chi) = -k_1$	0.2	0.02	96.8	0.068	0.1561
$V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$ $V_1(\chi) = -k_1\chi$	0.1	0.3	25.7	0.012	0.1078

Tabelle 5.2: Maximale Werte von k_0 und k_1 für verschiedene Modelle in einem geschlossenen System, bei denen die Einwirbel-Topologie zusammenbricht. Für alle Modelle ist $v_{th} = 1.0$, $\chi_{Rand} = 0.035$.

Modell	k_{0max}	k_{1max}	χ_{max}
$V_0(\chi) = 1$ $V_1(\chi) = -k_1\chi$	-	0.69	0.0783
$V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$ $V_1(\chi) = 0$	0.20	-	0.1407
$V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$ $V_1(\chi) = -k_1$	0.2	0.027	0.1561
$V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$ $V_1(\chi) = -k_1\chi$	0.1	0.43	0.1160
$V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$ $V_1(\chi) = -k_1\chi$	0.2	0.049	0.1437

ben durch $V_0 = 1, V_1 = 0$) angibt. Die Lösung für den idealen Fall $\chi = const$ wird durch die Einführung dieser Terme in den Modellen gestört, wodurch anfangs für die nicht zu großen Störungsterme für alle Modelle das gleiche topologische Bild entsteht, und zwar mit einem „Berg“ in dem betrachteten Gebiet. Das Plasma bewegt sich in einem solchen Strömungsbild als ein großer Wirbel um den Mittelpunkt des Berges. Wird der Störungsterm größer, so steigt auch die Höhe des Berges und somit die Geschwindigkeit der Bewegung, bis irgendwann der Punkt erreicht wird, an dem die bestehende Topologie zusammenbricht, und aus dem Einwirbel- ein Mehrwirbel- Strömungsbild entsteht. Die Entstehung solcher Turbulenzen mit steigendem Störungsterm wird in den Abb.:5.9-5.12 am Beispiel für das 2. Modell ($V_0(\chi) = 1 - k_0\chi, V_1(\chi) = 0$) deutlich gemacht. Die Bilder zeigen die Projektionen der Plasmabewegung auf die poloidale Ebene in kartesischen Koordinaten für vier verschiedene Werte von k_0 . Für $k_0 = 0.1$ entsteht das gewöhnliche Strömungslinienbild mit nur einem Wirbel. Für $k_0 = 0.2$ entsteht zwar immer noch nur ein Wirbel, die Geschwindigkeit der Bewegung wird jedoch größer, was man an der Dichte der Strömungslinien erkennen kann. Für $k_0 = 0.25$ kann man neben dem ursprünglichen, das gesamte Gebiet umfassenden Wirbel die Entstehung zweier neuen Wirbel in der Nähe der Rotationsachse an dem inneren Radius beobachten. Diese neue Wirbel werden bei $k_0 = 0.3$ deutlich ausgeprägter. Die viel höhere Dichte der Strömungslinien an dieser Wirbel deutet dabei auf die hier viel größere Rotationsgeschwindigkeit der Materie hin. Die kritische Werte von k_0 und k_1 , bei denen die Einwirbel-Topologie zusammenbricht, sind für verschiedene Modelle in der Tabelle 5.2 angegeben.

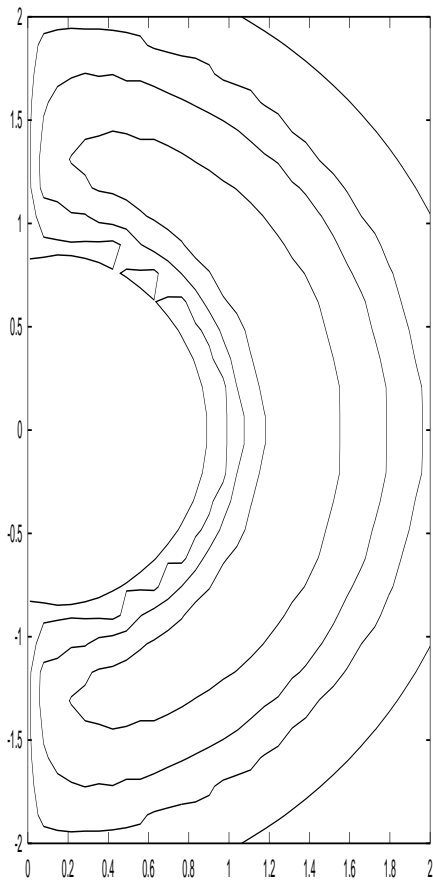


Abbildung 5.9: Entstehung der Turbulenzen am Beispiel für das 2. Modell mit $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (x, y) -Ebene. Hier: $k_0 = 0.1$

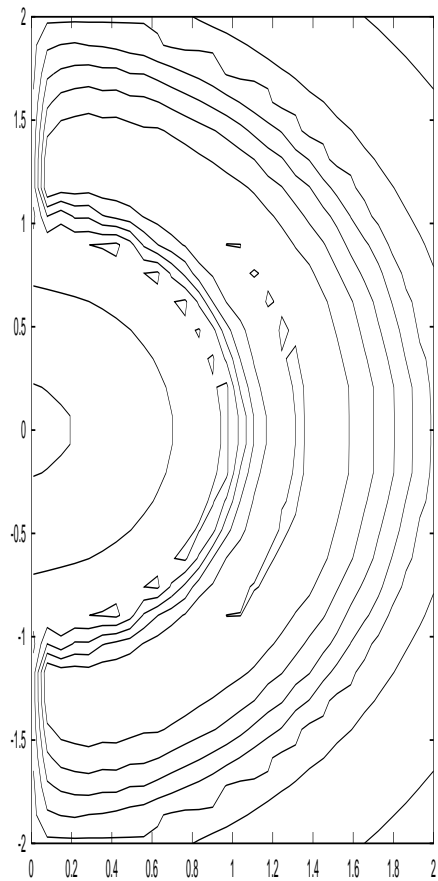


Abbildung 5.10: Entstehung der Turbulenzen am Beispiel für das 2. Modell mit $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (x, y) -Ebene. Hier: $k_0 = 0.2$

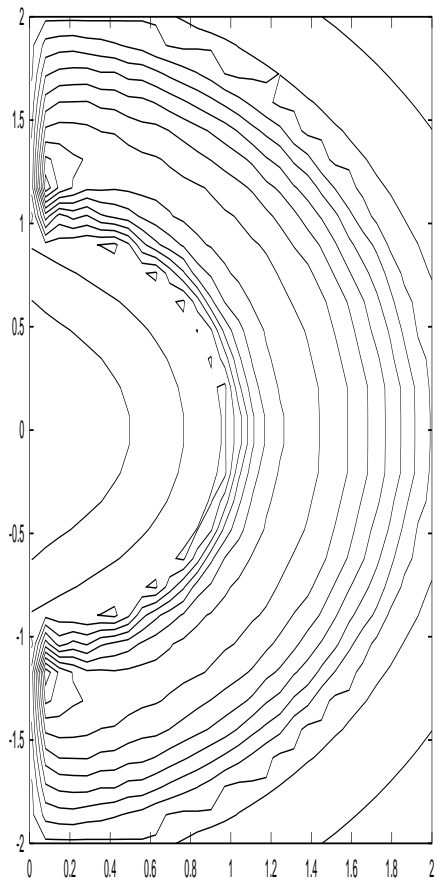


Abbildung 5.11: Entstehung der Turbulenzen am Beispiel für das 2. Modell mit $v_{th} = 1.0, \chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (x, y) -Ebene. Hier: $k_0 = 0.25$

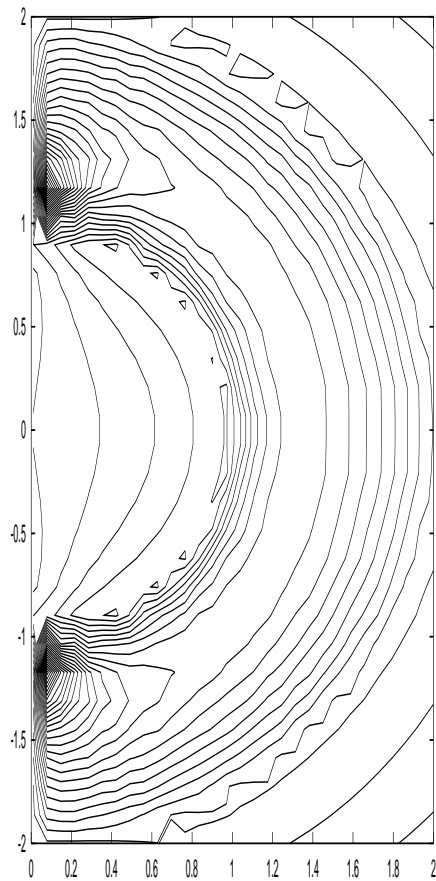


Abbildung 5.12: Entstehung der Turbulenzen am Beispiel für das 2. Modell mit $v_{th} = 1.0, \chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (x, y) -Ebene. Hier: $k_0 = 0.3$

Poloidale Geschwindigkeit und Teilchendichte

Der Mittelpunkt der Betrachtung in dieser Arbeit lag jedoch auf den Störungen, die noch klein genug sind, um nur ein Einwirbel-Strömungsbild zu verursachen. Hierbei gilt: Auch wenn die Strömungslinien zwischen dem inneren Radius und dem Mittelpunkt des Wirbels viel dichter liegen als zwischen dem Wirbelmittelpunkt und dem äußeren Radius, deutet dies nur auf die größere Ableitung von χ in diesem Gebiet, aber nicht auf eine höhere Geschwindigkeit hin. Die Abschätzung $|u^b| \sim |\chi_{,a}|$ darf hier nämlich nicht eins zu eins übernommen werden. Vielmehr muss man für die Geschwindigkeitsabschätzung von der Beziehung (3.2) ausgehen. In den Abb.:5.13-5.16 wird der Betrag der poloidalen Geschwindigkeit in (r, ϑ) -Ebene für die vorgestellten Modelle dargestellt. Entgegen den Erwartungen, die man aus der Lösung für die χ -Funktion (Abb.:5.5-5.8) vermuten könnte, ist die Geschwindigkeit der Teilchen an dem inneren Radius niedrig verglichen mit den Geschwindigkeiten an der Achse oder dem äußeren Radius. Überraschenderweise ist die Geschwindigkeit der Teilchen am größten in der Äquatorebene auf dem äußeren Radius, an der Stelle wo die Dichte der Strömungslinien am niedrigsten ist. Solche Diskrepanz zwischen der Dichte der Strömungslinien und der Teilchengeschwindigkeit lässt sich durch das Verhalten der Teilchendichte erklären, die in Abb.:5.17-5.20 für die erwähnten Modelle dargestellt ist. Man sieht auf diesen Bildern, dass die Teilchendichte in dem Bereich zwischen dem Mittelpunkt des Wirbels und dem äußeren Radius nahezu konstant ist, steigt aber sehr deutlich zwischen dem Mittelpunkt und dem inneren Radius. Am Horizont erfährt die Teilchendichte gar eine Singularität. Da aber wegen (3.2) $|\chi_{,b}| \sim \frac{n}{n_0}|u^a|$ gilt, muss in dem Bereich hoher Teilchendichte die Geschwindigkeit der Bewegung niedrig sein und umgekehrt. Eine weitere charakteristische Eigenschaft für das Verhalten der Teilchendichte in allen vier Modellen ist der starke Abfall der Teilchendichte an der Drehachse, der eine sehr hohe Geschwindigkeit entlang der Drehachse verursacht.

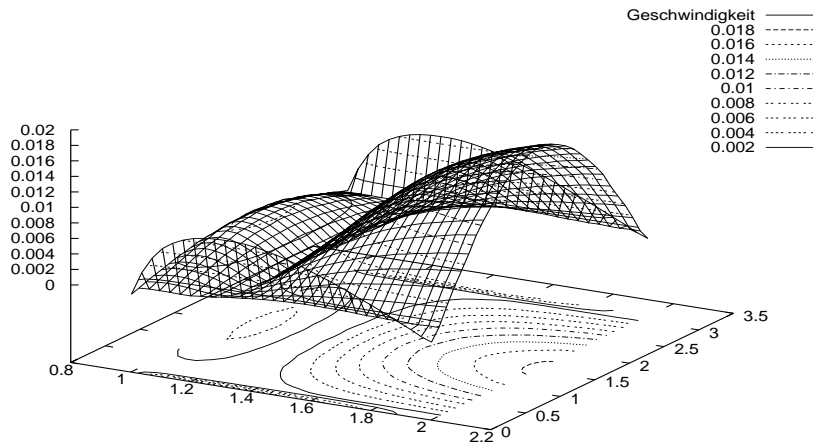


Abbildung 5.13: Betrag der poloidalen Geschwindigkeit in einem geschlossenen System. Modell 1: $V_0(\chi) = 1$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_1 = 0.5$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

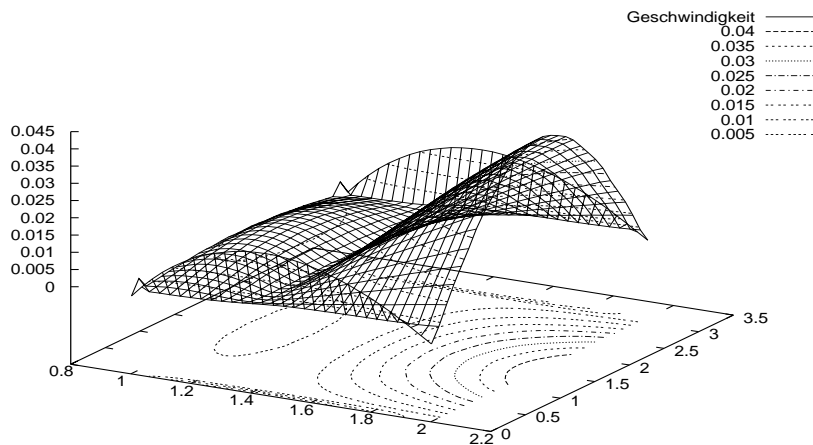


Abbildung 5.14: Betrag der poloidalen Geschwindigkeit in einem geschlossenen System. Modell 2: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = 0$. $k_0 = 0.1$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

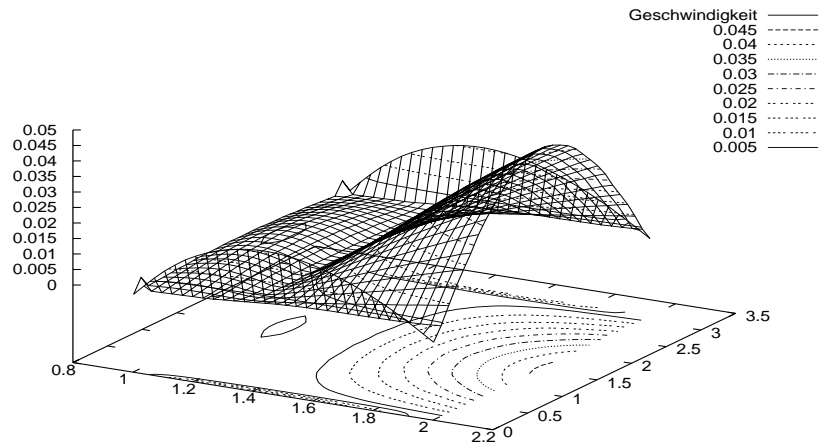


Abbildung 5.15: Betrag der poloidalen Geschwindigkeit in einem geschlossenen System. Modell 3: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1$. $k_0 = 0.2$, $k_1 = 0.02$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

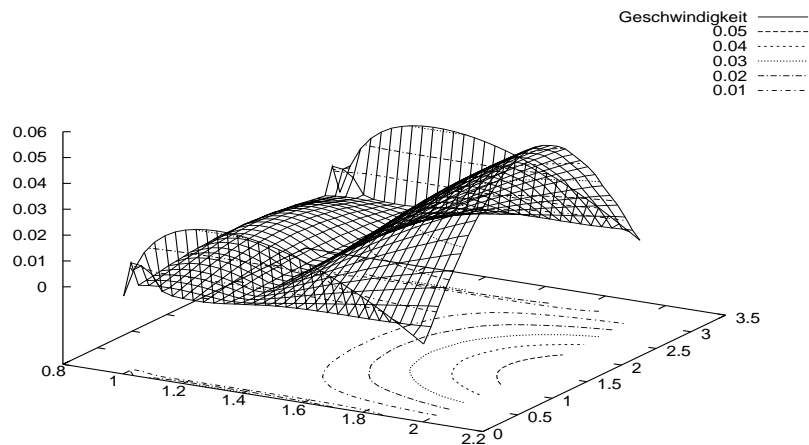


Abbildung 5.16: Betrag der poloidalen Geschwindigkeit in einem geschlossenen System. Modell 4: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_0 = 0.1$, $k_1 = 0.3$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

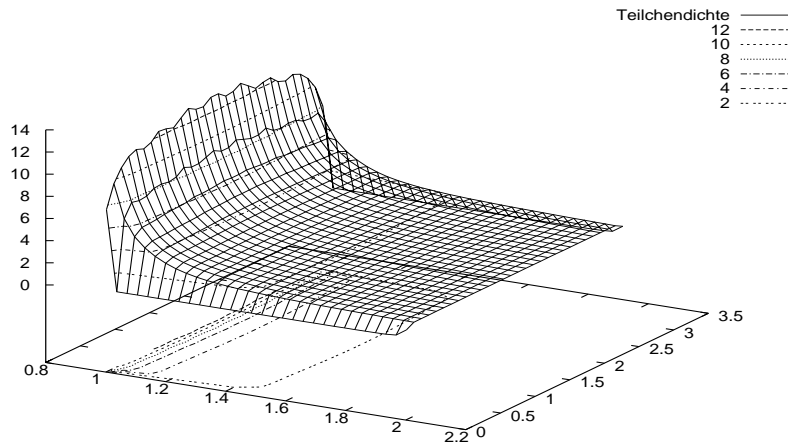


Abbildung 5.17: Teilchendichte $\frac{n}{n_0}$ in einem geschlossenen System. Modell 1: $V_0(\chi) = 1$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_1 = 0.5$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

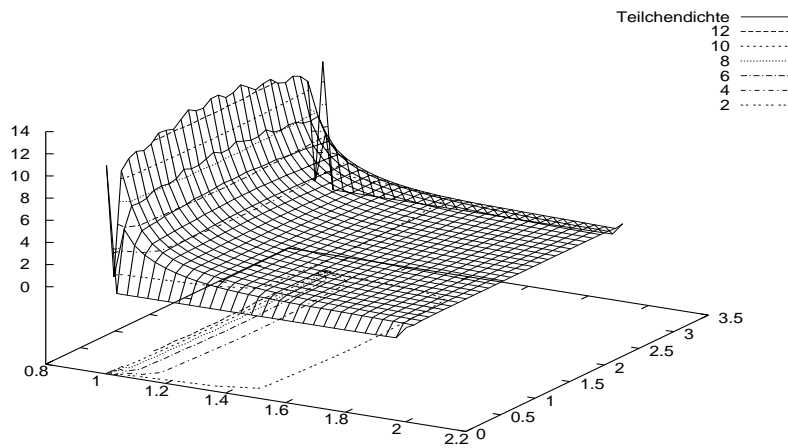


Abbildung 5.18: Teilchendichte $\frac{n}{n_0}$ in einem geschlossenen System. Modell 2: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = 0$. $k_0 = 0.1$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

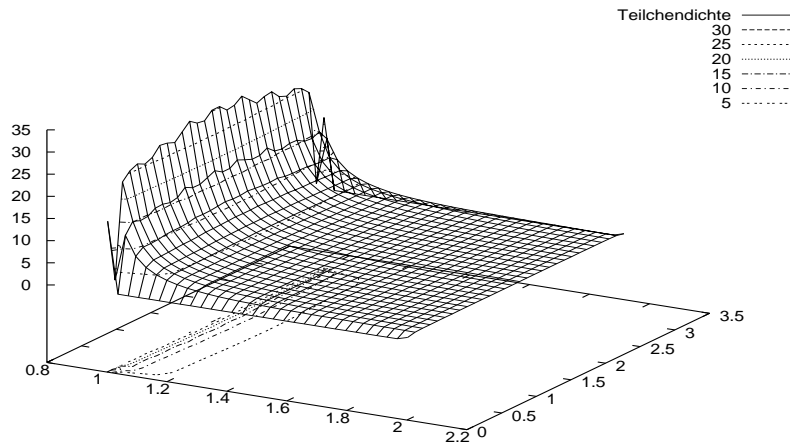


Abbildung 5.19: Teilchendichte $\frac{n}{n_0}$ in einem geschlossenen System. Modell 3: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1$. $k_0 = 0.2$, $k_1 = 0.02$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

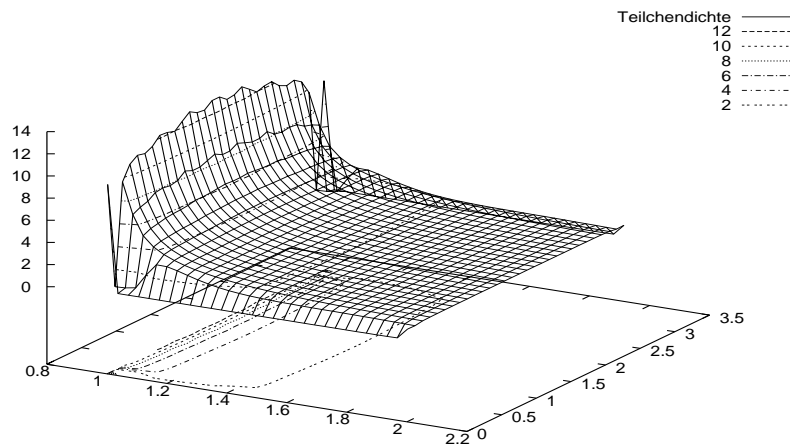


Abbildung 5.20: Teilchendichte $\frac{n}{n_0}$ in einem geschlossenen System. Modell 4: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_0 = 0.1$, $k_1 = 0.3$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

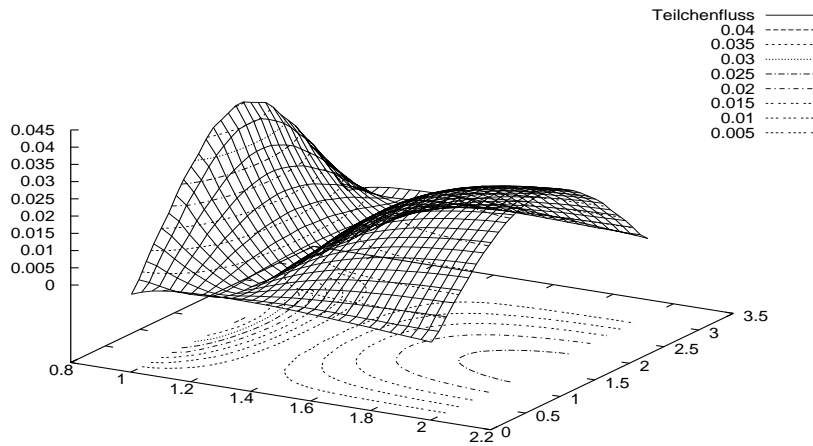


Abbildung 5.21: Poloidaler Teilchenfluss in einem geschlossenen System. Modell 1: $V_0(\chi) = 1$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_1 = 0.5$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

Teilchenstrom

In den Abb.:5.21-5.24 sind die Ergebnisse für den Teilchenfluss in der poloidalen Ebene $\frac{n}{n_0} \sqrt{(u^r)^2 + (u^\vartheta)^2}$ für die behandelten Modellen dargestellt. Da das betrachtete System geschlossen ist, wird die Materie weder in das System gebracht, noch kann sie aus dem System austreten. Damit muss die Erhaltung der Materie in dem gesamten System gelten. Die Bilder für den Teilchenfluss zeigen, dass das Gleichgewicht so entsteht, dass der Teilchenstrom auf beiden Seiten von dem Mittelpunkt des Wirbels ähnlich groß ist. Die „Natur“ des Teilchenstroms ist aber in beiden Fällen unterschiedlich. Während es an dem äußeren Rand relativ wenige, dafür aber schnell bewegte Teilchen gibt, erfolgt dagegen die Bewegung von sehr viel Materie am inneren Rand langsam. Der resultierende Teilchenstrom bleibt dabei in den beiden Fällen etwa gleich.

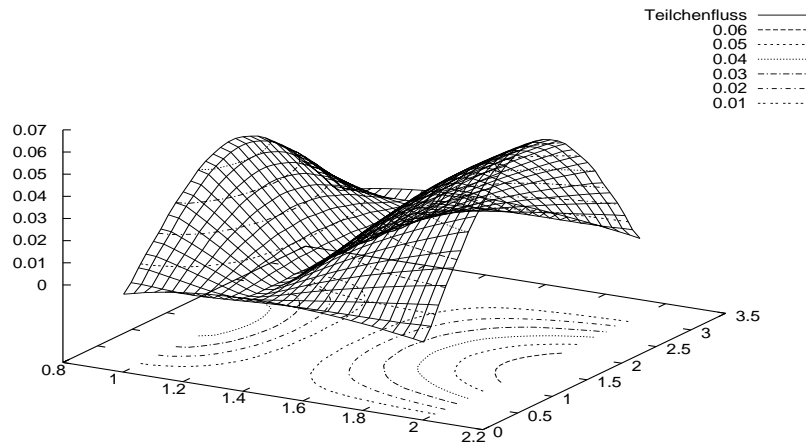


Abbildung 5.22: Poloidaler Teilchenfluss in einem geschlossenen System. Modell 2: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = 0$. $k_0 = 0.1$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

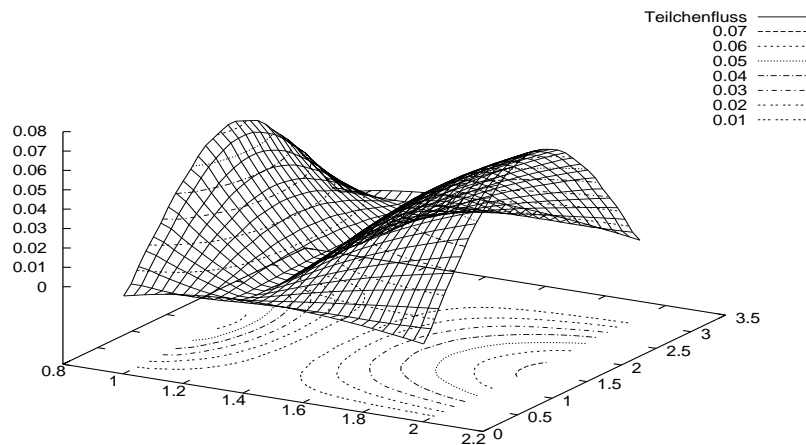


Abbildung 5.23: Poloidaler Teilchenfluss in einem geschlossenen System. Modell 3: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1$. $k_0 = 0.2$, $k_1 = 0.02$, $v_{th} = 1.0$, $\chi_{|Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

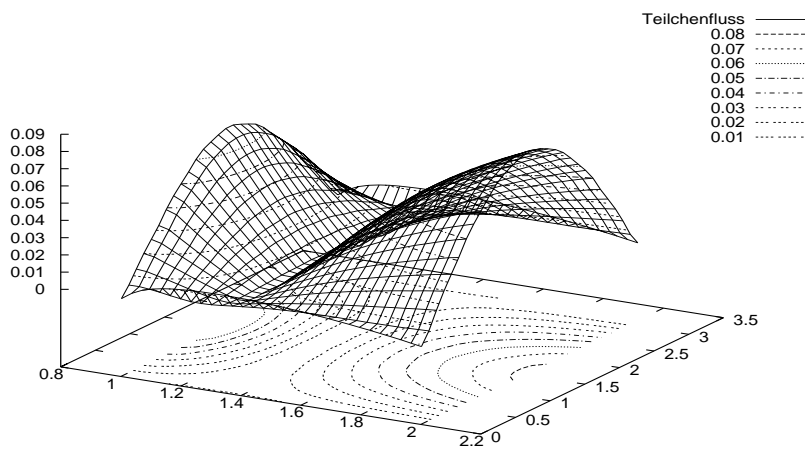


Abbildung 5.24: Poloidaler Teilchenfluss in einem geschlossenen System. Modell 4: $V_0(\chi) = 1 - k_0\chi$, $V_1(\chi) = -k_1\chi$. $k_0 = 0.1$, $k_1 = 0.3$, $v_{th} = 1.0$, $\chi|_{Rand} = 0.035$. Dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

5.3 Offenes System

Unter einem offenen System wird hier ein Plasmagleichgewicht verstanden, in dem ein Materieaustausch mit der Umgebung stattfindet. In einem solchen Plasmagleichgewicht beginnen und enden die Strömungslinien in der Regel am Rande des betrachteten Gebiets und verlaufen ins Unendliche. Wie es im Abschnitt 3.4.1 gezeigt worden ist, lassen sich die Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ in einem offenen System auf analytischem Wege ableiten. Für sie gilt dabei die Beziehung (3.109), wonach sie einen konstanten Wert annehmen und somit eigentlich von der Flussfunktion χ unabhängig sind. Dies hat zur Folge, dass die χ -Gleichung nach dem Einsetzen des Diskretisierungsansatzes die Form (4.25) erhält. Die Teilchendichte $\frac{n}{n_0}$ tritt dabei in den Matrixelementen M_{ij} nur als Faktor auf, und hat deshalb keinen Einfluß mehr auf die χ -Gleichung. Demzufolge entkoppeln sich die χ -Gleichung und die Dichte-Gleichung voneinander, und es wird kein Iterationsverfahren mehr benötigt. Die Computersimulation eines Plasmagleichgewichts um ein Kerr-Loch in einem offenen System gestaltet sich damit nach dem folgenden Muster:

1. Es wird der Parameter l vorgegeben, der die Reibung im Plasma beschreibt.
2. Es wird der Ansatz für die Randwerte von χ gewählt.
3. Die χ -Gleichung wird gelöst.
4. Die Lösung der χ -Gleichung wird in die Dichte-Gleichung eingesetzt und die dazugehörige Dichte ermittelt.

Ausschlaggebend für das Gleichgewicht in einem offenen System ist hier die Wahl der Randbedingungen. Im Gegensatz zum geschlossenen System, in dem die χ -Funktion auf den Rändern einen konstanten Wert annehmen muss, ist die

Wahl der Randwerte für die χ -Funktion in einem offenen System mathematisch gesehen nur durch die Bedingung eingeschränkt, dass die χ -Funktion stetig und stetig differenzierbar sein muss. Man kann damit durch eine geeignete Wahl der Randbedingungen verschiedene physikalische Prozesse simulieren.

Der Schwerpunkt der Simulationen in dieser Arbeit wurde den sogenannten „Jets“ - schnellen Ausströmungen des Plasmas entlang der Rotationsachse gewidmet. Die Jets wurden bereits oft in der astrophysikalischen Literatur diskutiert [1],[44] und man hat sich dabei auf das Modell geeinigt, wonach die Materie auf der Äquatorebene (Akkretionsscheibe) aufgesammelt und anschließend in der Form schneller Strömungen entlang der Rotationsachse ausgestoßen wird [43]. Im Folgenden werden zwei Ansätze für die Randbedingungen von χ vorgestellt, die die Entstehung solcher Jets beschreiben könnten.

Bevor man zum ersten Ansatz übergeht, ist es angebracht einige allgemeine Überlegungen über die Form der χ -Funktion am Rande des betrachteten Gebiets zu machen. Aus (3.2) folgt, dass $u^a \sim \tilde{\epsilon}^{1ab}\chi_{,b}$ ist. Dies kann man als Ausgangspunkt bei der Suche nach dem geeigneten Ansatz für die Randbedingungen interpretieren. Hierfür betrachten wir zunächst die Randpunkte bei $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}$ und π . Die Randpunkte mit $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ entsprechen der Rotationsachse. Um die Vorstellung zu verwirklichen, dass die Jets entlang der Rotationsachse verlaufen, muss die Rotationsachse eine Strömungslinie sein, d.h. es muss hier $\chi = const$ gelten. Ferner erfolgt die Bewegung auf der Rotationsachse offenkundig nur in die r -Richtung, so dass $u^\vartheta = 0$ ist, und, da die Materie aus dem Gebiet ausströmt, muss auch $u^r > 0$ gelten. Auf der Äquatorebene, bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, strömt die Materie dagegen in das betrachtete Gebiet ein, so dass hier $u^\vartheta = 0$ und $u^r < 0$ gilt. Damit erhalten wir die Bedingungen, die die Randwerte von χ auf jeden Fall erfüllen müssen:

$$u^r > 0, \quad u^\vartheta = 0; \quad \vartheta = 0, \pi$$

$$u^r < 0, \quad u^\vartheta = 0; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad (5.10)$$

Der einfachste Ansatz für die χ -Funktion, der die Bedingung (5.10) erfüllen läßt, ist offensichtlich $\chi \sim \sin(2\vartheta)$.

Der erste Ansatz

Der erste Ansatz für die Randbedingungen von χ , der hier vorgestellt wird, stellt den einfachsten denkbaren Ansatz dar, der die Materie auf der Äquatorebene aufsammeln und auf der Rotationsachse ausstoßen läßt:

$$\chi|_{Rand} = C + \frac{1}{2k} \sin(2\vartheta) \left(\frac{r}{r_2} \right)^n \quad (5.11)$$

Die Abb.:5.25 zeigt die Lösung in der (r, ϑ) -Ebene für die χ -Funktion, die sich für den Ansatz (5.11) in einem offenen System ergeben hat. Für die Parameter wurden dabei $n = 3$, $k = 2.5$, $C = 0.4$ und $l = 0.02$ gewählt. An den Projektionen der Linien $\chi = const$ auf die (r, ϑ) -Ebene erkennt man deutlich, dass die Bewegung entlang der r -Richtung bei $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ verläuft. Die Ableitungen der χ -Funktion nach ϑ an diesen Strömungslinien zeigen, dass die Bewegung auf der Äquatorebene in und entlang der Rotationsachse aus dem betrachteten Gebiet stattfindet. Damit sind die Grundvoraussetzungen für das die Jets beschreibende Modell erfüllt. Die Abb.:5.26 zeigt den Betrag der poloidalen Geschwindigkeit auf der (r, ϑ) -Ebene. Man sieht, dass bei dieser Wahl der Randbedingungen die Teilchen entlang der Rotationsachse bei $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}$ sich wesentlich schneller bewegen, als in der unmittelbaren Umgebung. Allerdings am schnellsten erfolgt die Bewegung nicht aus sondern in das Gebiet in der Äquatorebene. Auf der Abb.:5.27 ist die Lösung für die Teilchendichte ebenfalls in der (r, ϑ) -Ebene dargestellt. Hierbei sieht man, dass, ähnlich wie in einem geschlossenen System, die Teilchendichte für $r \rightarrow r_1$ sehr schnell

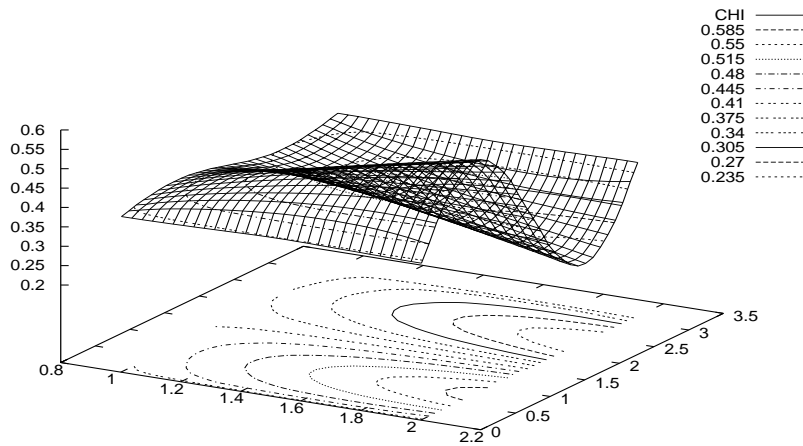


Abbildung 5.25: Lösung der χ -Gleichung in einem offenen System mit $v_{th} = 1.0$, $V_1 = 0.02$ dargestellt in (r, ϑ) -Ebene. Ansatz für die Randbedingungen: $\chi|_{Rand} = C + \frac{1}{2k} \sin(2\vartheta) \left(\frac{r}{r_2}\right)^n$ mit $C = 0.4$, $k = 2.5$, $n = 3$.

ansteigt, während in dem gesamten Gebiet sie nahezu konstant ist. Auf dem Ereignishorizont wird die Teilchendichte offenkundig gar singulär, was auch die Einschränkung für die Anwendbarkeit der numerischen Lösung darstellt. Auf der Rotationsachse fällt die Dichte dagegen sehr schnell ab und nimmt niedrige Werte an. Kombiniert man die Abb.:5.26 mit der Abb.:5.27, so bekommt man die Lösung für den Teilchendichtefluss, die in der Abb.:5.28 dargestellt ist. Man sieht hier vor allem, dass trotz der großen Teilchengeschwindigkeit auf der Rotationsachse nur sehr wenig Materie, verglichen mit der Äquatorebene, hier entlang transportiert wird.

Der zweite Ansatz

Ein anderer Ansatz für die Randwerte der χ -Funktion ist:

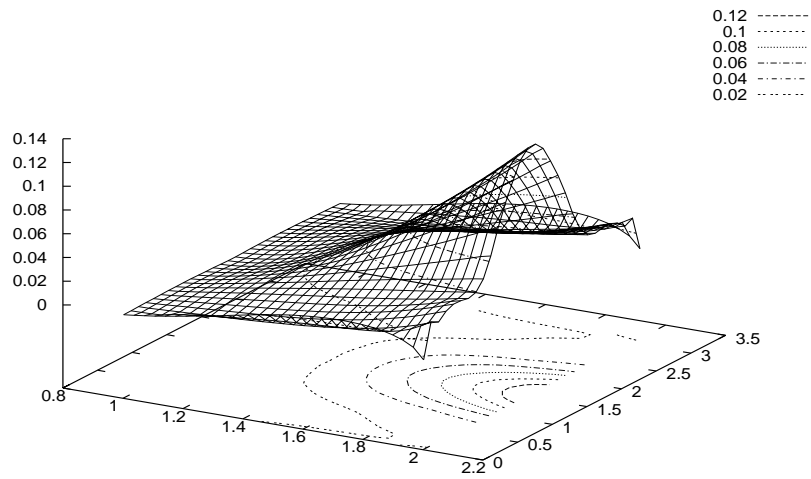


Abbildung 5.26: Poloidale Geschwindigkeit der Teilchen in einem offenen System, das in Abb.:5.25 beschrieben wird, dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

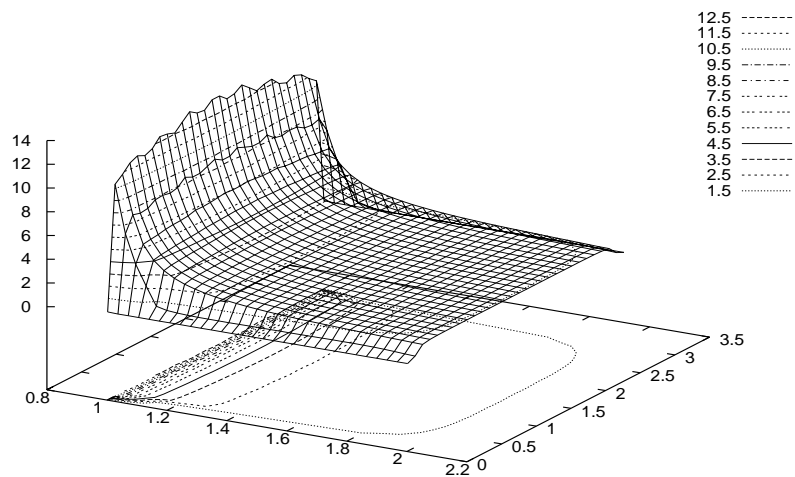


Abbildung 5.27: Teilchendichte in einem offenen System, das in Abb.:5.25 beschrieben wird, dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

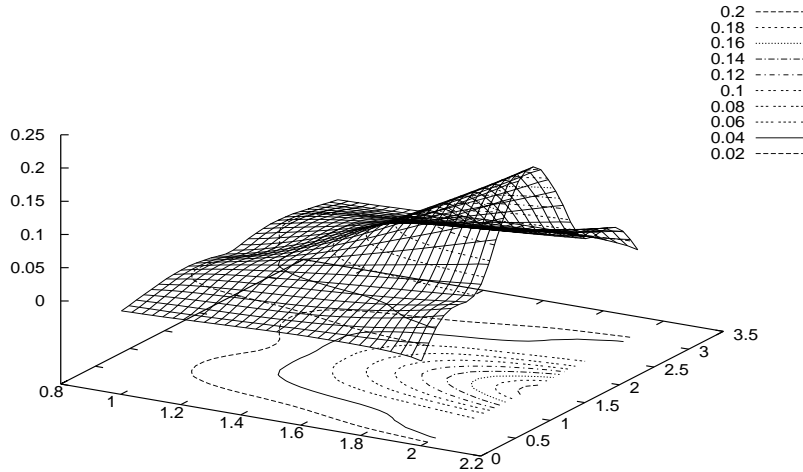


Abbildung 5.28: Poloidaler Teilchenfluss in einem offenen System, das in Abb.:5.25 beschrieben wird, dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

$$\chi|_{Rand} = C + \frac{1}{2k} \sin(2\vartheta) \frac{1}{r^n} \left| \frac{\pi}{2} - \vartheta \right| \quad (5.12)$$

Dieser Ansatz erscheint besonders interessant für die Systeme zu sein, in denen man die schnellere Bewegung am inneren Rand und entlang der Rotationsachse erwartet, und kommt dem Modell näher, in dem die Materie nur langsam auf der Äquatorebene aufgesammelt und dann in Form schneller Strömungen entlang der Rotationsachse ausgestoßen wird. Die Abb.:5.29-5.33 zeigen die Ergebnisse in der (r, ϑ) -Ebene für ein offenes System mit dem Ansatz (5.12) für die Randwerte der Flussfunktion χ . Es wurden dabei die folgenden Parameter gewählt: $n = 1$, $l = 0.02$, $C = 0.4$, $k = 2.5$. Die Abb.:5.29 stellt die Lösung für die χ -Funktion dar. Besonders interessant erscheinen dabei die Projektionen der Linien $\chi = const$ auf die poloidale Ebene, die das Strömungslinienbild wiedergeben. Dies wird ausführlich in der Abb.:5.30 dargestellt. Man sieht hier,

dass in einem Bereich um die Äquatorebene herum (etwa $1.0 \leq \vartheta \leq 2.2$) die Materie sich nahezu radial bewegt. Da in diesem Gebiet $\chi_{,\vartheta} < 0$ ist (das sieht man z.B. in der Abb.:5.29) ist auch die radiale Komponente der Vierergeschwindigkeit negativ, und die Materie strömt in diesem Bereich in das Gebiet ein. In der Nähe der Rotationsachsen bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ findet auch fast nur die radiale Bewegung statt. Diesmal ist jedoch $\chi_{,\vartheta} > 0$, so dass auch $u^r > 0$ und die Materie aus dem betrachteten Gebiet ausströmt. Die sehr große Dichte der Flusslinien entlang der Rotationsachse deutet außerdem auf die hohe poloidale Geschwindigkeit in diesem Bereich hin. Dies wird auch in der Abb.:5.31 bestätigt, wo der Betrag der poloidalen Geschwindigkeit in der (r, ϑ) -Ebene dargestellt wird. Man sieht hier unter anderem, dass die poloidale Geschwindigkeit auf der Rotationsachse sehr schnell ansteigt. Im Gegensatz zum ersten Ansatz bilden sich in dem Bereich zwischen der ein- und ausströmenden Materie zusätzlich die sogenannten „Blasen“ - Flusslinien, die an dem inneren Rand anfangen und enden. Die Abb.:5.32 zeigt die Teilchendichte in dem betrachteten Gebiet. Die Lösung für die Teilchendichte sieht qualitativ völlig ähnlich der entsprechenden Lösung für den ersten Ansatz aus. Auch hier ist charakteristisch ein sehr schneller Abfall der Teilchendichte auf der Rotationsachse. Dies ist natürlich ein Indiz dafür, dass trotz der sehr großen Teilchengeschwindigkeit an der Rotationsachse, nur ein kleiner Teil der Materie dort ausströmt. Dies sieht man auch in der Abb.:5.33 sehr deutlich, wo die Teilchenstromdichte in der (r, ϑ) -Ebene dargestellt wird.

Mit diesem zweiten Ansatz haben wir ein Modell konstruiert, das in Betracht gezogen werden kann, wenn es um die theoretische Beschreibung von den Jets - schnellen Ausströmungen der Materie entlang der Rotationsachse - geht. Die wichtigsten Merkmale eines solchen Modells, wie etwa Aufsammeln der Materie auf der Äquatorebene und schnelle Ausströmungen auf der Rotationsachse, werden in diesem Beispiel gut erfüllt.

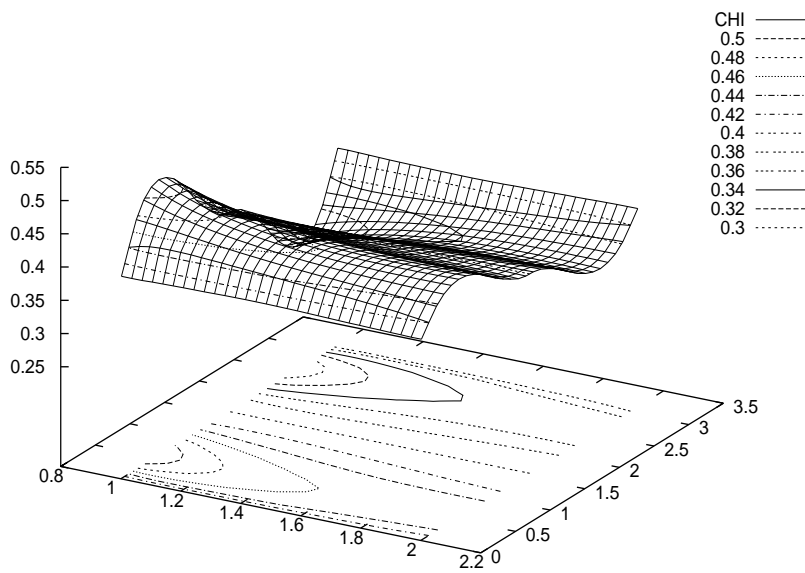


Abbildung 5.29: Lösung der χ -Gleichung in einem offenen System mit $v_{th} = 1.0$, $V_1 = 0.02$ dargestellt in (r, ϑ) -Ebene. Ansatz für die Randbedingungen: $\chi|_{Rand} = C + \frac{1}{2k} \sin(2\vartheta) \frac{1}{r} \frac{|\frac{\pi}{2} - \vartheta|}{\pi/2}$ mit $C = 0.4$, $k = 2.5$.

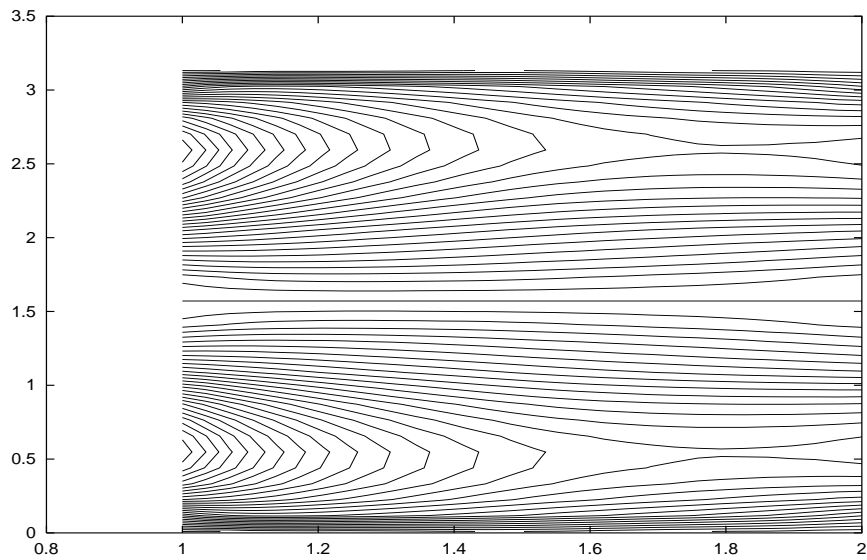


Abbildung 5.30: Flusslinien in einem offenen System, das in Abb.:5.29 beschrieben wird, dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

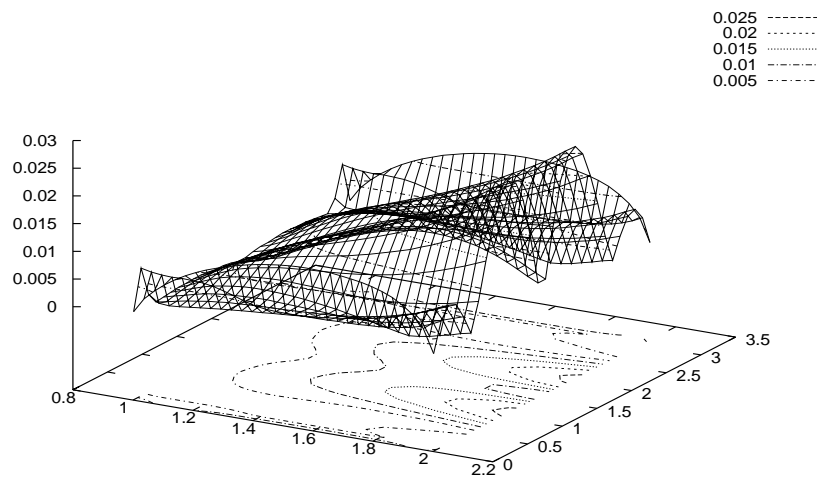


Abbildung 5.31: Poloidale Geschwindigkeit der Teilchen in einem offenen System, das in Abb.:5.29 beschrieben wird, dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

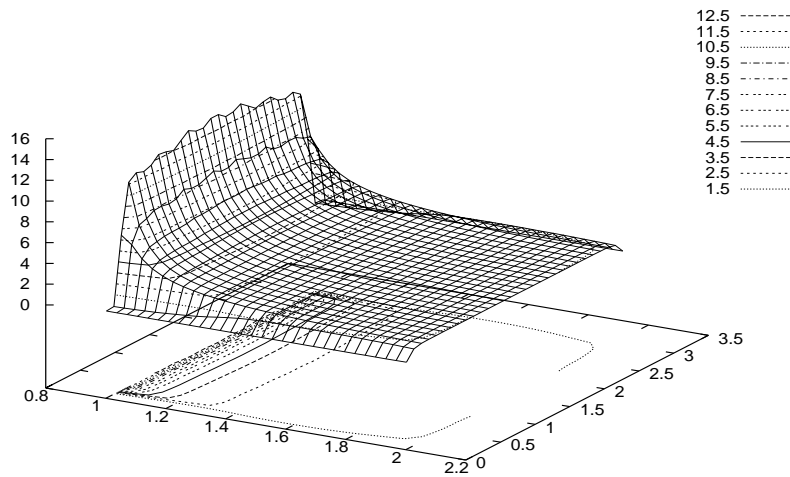


Abbildung 5.32: Teilchendichte in einem offenen System, das in Abb.:5.29 beschrieben wird, dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

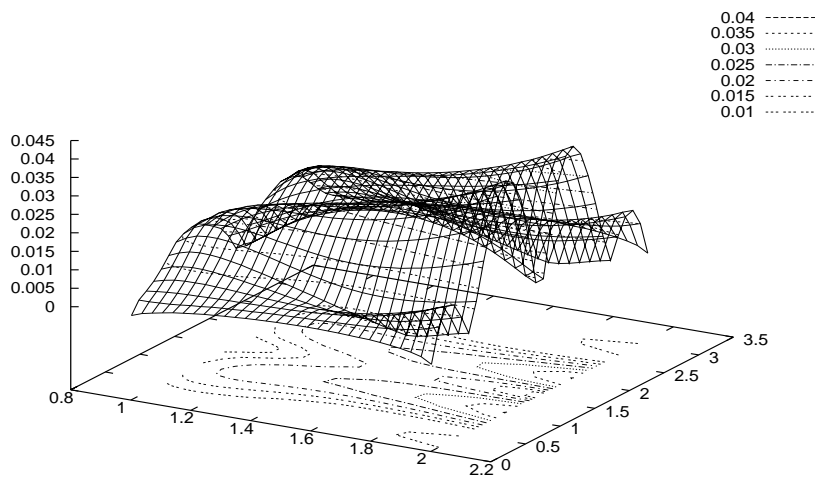


Abbildung 5.33: Poloidaler Teilchenfluss in einem offenen System, das in Abb.:5.29 beschrieben wird, dargestellt in (r, ϑ) -Ebene.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit liefert die Grundlagen für die Beschreibung eines Plasmagleichgewichts um ein rotierendes Schwarzen Loch (Kerr-Loch).

Das in dieser Arbeit beschriebene Modell bezieht sich auf mathematisch gesehen den einfachsten Fall des Mehrflüssigkeitsplasmas, in dem das Plasmagleichgewicht widerspruchsfrei beschrieben werden kann. Es handelt sich dabei um ein Zweiflüssigkeitsplasma, das aus dem Fluss der Elektronen und dem Fluss der einfach geladenen Ionen besteht.

Betrachtet man ein ideales Fluid, so läßt sich immer ein Vierervektor (kanonische Vierergeschwindigkeit) V_μ finden, deren Wirbelfluss durch eine mitbewegte Schleife erhalten bleibt: $\Omega_{\mu\nu}u^\nu \equiv (V_{\nu,\mu} - V_{\mu,\nu})u^\nu = 0$ (Flusserhaltungssatz). Entsprechend der Kerr-Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen erwartet man auch, dass das Plasmagleichgewicht um ein Kerr-Loch rotations-symmetrisch stationär ist. In einem solchen Gleichgewicht lassen sich sämtliche Komponenten des kanonischen Wirbels $\Omega_{\mu\nu}$ sowie der Vierergeschwindigkeit u^μ alleine durch eine einzige Flussfunktion χ ausdrücken [27]. Außerdem folgt für ein rotationssymmetrisches Gleichgewicht, dass die Komponenten der kanonischen Vierergeschwindigkeit V_0 und V_1 konstant auf den Flusslinien sind, und damit Flussfunktionen sind.

Setzt man zusätzlich die Annahme der Quasineutralität voraus, die in einem solchen Plasma auch sehr gut erfüllt wird [29], so erhält man ein Modell für das Plasmagleichgewicht, das durch die folgenden drei Gleichungen eindeutig festgelegt wird:

- die χ -Gleichung zur Bestimmung der Flussfunktion χ , die sich aus der Eulerschen Bewegungsgleichung ableiten läßt.
- die Normierungsbedingung zur Bestimmung der Teilchendichte (Dichte-Gleichung),
- und die Lösbarkeitsbedingung für die Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$, die sich allerdings erst bei der Betrachtung eines schwach dissipativen Plasmas ergibt. Die entsprechende Lösung für ein ideales Plasma ergibt sich dann aus der Lösung für ein schwach dissipatives Plasma, indem man die Dissipationskräfte gleich Null setzt.

Dabei sind alle drei Gleichungen i.a. gekoppelt und lassen sich nicht getrennt lösen. Die Lösbarkeitsbedingung läßt sich jedoch für das Plasmagleichgewicht in einem offenen System, in dem die Flusslinien ins Unendliche verlaufen, analytisch getrennt von den anderen Gleichungen lösen.

Allgemein ist aber die analytische Lösung eines solchen Gleichungssystems nicht möglich. Deshalb ist man in diesem Punkt auf die numerische Lösung der Gleichungen angewiesen. Als Lösungsverfahren wurde in dieser Arbeit eine zweifach verschachtelte Iteration vorgeschlagen. Die innere Iteration erfolgt dabei zwischen der χ -Gleichung und der Dichte-Gleichung, die äußere Iteration zwischen der inneren Iteration und der Lösbarkeitsbedingung.

Das beschriebene Modell wurde mit Hilfe des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten C++-Programms für verschiedene Systeme numerisch simuliert. Der Schwerpunkt lag dabei auf den folgenden Fragen:

- Gibt es ein Plasmagleichgewicht in einem geschlossenen System, also einem System ohne Materieaustausch mit der Umgebung, und wie sieht ein solches Gleichgewicht aus?
- Kann man die in der astrophysikalischen Literatur in der letzten Zeit oft diskutierten „Jets“ durch die Computersimulation des Plasmagleichgewichts in einem offenen System modellieren?

Das Plasmagleichgewicht in einem geschlossenen System hängt in erster Linie davon ab, inwieweit die Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ von der Lösung für ein ideales Plasma abweichen. Für nicht zu große Abweichungen ergibt sich dabei ein Einwirbel-Gleichgewicht. In einem solchen Gleichgewicht rotiert das Plasma als Ganzes um einen bestimmten Punkt in der poloidalen Ebene bzw. um eine toroidale Kreislinie, falls $V_1(\chi) \neq 0$. Steigt die Abweichung von dem idealen Fall weiter, so bricht diese Topologie zusammen, und es entstehen mehrere Wirbel.

Für die Form des Plasmagleichgewichts in einem offenen System ist die Vorgabe der Randbedingungen ausschlaggebend. Es wurden in dieser Arbeit die Ansätze für die Randbedingungen gefunden, die zur Entstehung schneller Strömungen (Jets) entlang der Rotationsachse führen. Charakteristisch ist dabei, dass, auch wenn die Geschwindigkeit der Teilchen entlang der Rotationsachse überdurchschnittlich groß sein mag, nur sehr wenige Teilchen verglichen mit dem Teilchentransport im Inneren des Gebiets hierdurch transportiert werden.

Das liegt vor allem an der extrem schnell abfallenden Teilchendichte in der Nähe der Rotationsachse. In allen Simulationen ergab sich die gleiche Form des Teilchendichtebildes. Während die Teilchendichte in dem gesamten Gebiet beinahe konstant war, stieg sie an dem Ereignishorizont sehr schnell an und ging in die Singularität über. Gleichzeitig fiel sie stark in der Nähe der Rotationsachse ab.

Ausblickend kann festgestellt werden, dass das vorgestellte Modell zahlreiche Möglichkeiten der Erweiterung bietet. Zum Beispiel kann man den in dieser Arbeit angedeuteten Weg der äußeren Iteration für die Bestimmung der Flussfunktionen $V_0(\chi)$ und $V_1(\chi)$ in einem geschlossenen System beschreiten. Es wäre auch denkbar die Lösbarkeitsbedingung für den allgemeinen Fall abzuleiten und zu verwenden, indem die Dissipationsterme durch die Beziehung (3.92) gegeben werden.

Literaturverzeichnis

- [1] F.W. Hehl, C. Kiefer, R.J.K. Metzler *Black Holes: Theory and Observation* Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [2] H. Böhringer, G.E. Morfill, J.E. Trümper *Seventeenth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology* The New York Academy of Sciences, New York (1995).
- [3] R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).
- [4] J.D. Bekenstein and E. Oron, Phys. Rev. D **18**, 1809 (1978).
- [5] C.M. Mobarry and R.V.E. Lovelace, Astrophys. J. **309**, 455 (1986).
- [6] S. Nitta, M. Takahashi and A. Tomimatsu, Phys. Rev. D **44**, 2295 (1991).
- [7] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [8] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* Clarendon, Oxford (1992).
- [9] T. Fließbach *Allgemeine Relativitätstheorie* Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg Berlin (1998).
- [10] G. Kluge, G. Neugebauer *Grundlagen der Thermodynamik* Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg (1994).

- [11] C. Kittel, *Physik der Wärme* Oldenbourg, München (1993).
- [12] R.D. Blandford, R.L. Znajek, Mon. Not. R. Astron. Soc. **179**, 433 (1977).
- [13] E.S. Phinney, PhD thesis, Univ. Cambridge (1983).
- [14] J. Bekenstein, D. Eichler, ApJ. **298**, 493 (1985).
- [15] M. Camenzind, Astron. Astrophys. **156**, 137 (1986).
- [16] M. Camenzind, Astron. Astrophys. **184**, 341 (1987).
- [17] M. Takahashi, S. Nitta, Y. Tatematsu, A. Tomimatsu, ApJ. **363**, 206 (1990).
- [18] I. Okamoto, Mon. Not. R. Astron. Soc. **254**, 192 (1992).
- [19] V.S. Beskin and V.I. Par'ev, Phys. Usp. **36**, 529 (1993) [Sov. Phys. Usp. **164**, 95 (1993)].
- [20] C. Fendt, Astron. Astrophys. **319**, 1025 (1997).
- [21] R. Khanna, M. Camenzind, ApJ. **435**, L129 (1994).
- [22] R. Khanna, M. Camenzind, Astron. Astrophys. **307**, 665 (1996a).
- [23] R. Khanna, M. Camenzind, Astron. Astrophys. **313**, 1028 (1996b).
- [24] T. Kudoh, O. Kaburaki, ApJ. **460**, 199 (1996).
- [25] A.H. Taub, Arch. Ration. Mech. Anal. **3**, 312 (1959).
- [26] C. Eckart, Phys. Fluids **3**, 421 (1960).
- [27] K. Elsässer, Phys. Rev. D **62**, 44007 (2000).
- [28] K. Elsässer, Phys. Plasmas **1**, 3161 (1994).

- [29] K. Elsässer, Phys. Rev. D **65**, 024015 (2001).
- [30] K. Elsässer, Phys. Scripta **T98**, 24 (2002).
- [31] K. Elsässer, Y. Kot unpublished.
- [32] L. Woltjer, Astrophys. J. **130**, 405 (1959).
- [33] A. Lichnerowicz *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics* Benjamin, New York (1967).
- [34] B. Carter, in *Active Galactic Nuclei*, edited by C.Hazard and S.Mitton, Cambridge University Press, Cambridge (1979), p. 275.
- [35] R. Khanna, Mon. Not. R. Astron. Soc. **294**, 673-681 (1998).
- [36] L.D. Landau, E.M. Lifschitz *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Bd. VI (Hydrodynamik), Akademie-Verlag, Berlin (1974).
- [37] K. Elsässer and S.Popel, Phys. Plasmas **4**, 2348 (1997).
- [38] S. Weinberg *Gravitation and Cosmology* New York, (1972).
- [39] S. Weinberg, Ap. J., **168**, 175 (1971).
- [40] A. Heimsoth *Tokamakgleichgewichte mit Dissipation* Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1989).
- [41] A. Heimsoth, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1986).
- [42] H.R. Schwarz *Methode der finiten Elemente* B.G. Teubner, Stuttgart (1984).
- [43] S.K. Chakrabarti *Accretion Processes on a Black Hole* Elsevier, Amsterdam (1996).

- [44] *Observational Evidence for Black Holes in the Universe*: Proceedings of a Conference Held in Calcutta, India, (January 10-18, 1998).
- [45] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler *Gravitation* Freeman, New York (1995).
- [46] E. Castillo *Orthogonal Sets and Polar Methods in Linear Algebra* Wiley, New York (1999).
- [47] R. Banett *Templates for the Solution of Linear Systems* Cambridge University Press, New York (1979).
- [48] A.J. Baker *Finite Element Computational Fluid Mechanics* McGraw-Hill, New York (1983).
- [49] F.F. Chen *Introduction to Plasma Physics* Plenum Press, New York (1974).
- [50] R.B. White *Theory of Tokamak Plasmas* North-Holland, Amsterdam (1989).

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Yauhen Kot
Geburtsdatum: 01.01.1975
Geburtsort: Minsk
Staatsangehörigkeit: weißrussisch
Familienstand: ledig

Schulbildung

1981-1990 Grundschole in Minsk
1990-1992 Gymnasium in Minsk

Studium

WS 1992/93 - SS 1995 Studium der Physik
an der weißrussischen Staatsuniversität Minsk
WS 1995/96 - WS 1996/97 Deutsche Sprachkurse
an der Ruhr-Universität Bochum
SS 1997 - WS 1999/00 Studium der Physik
an der Ruhr-Universität Bochum
Februar 2000 Diplom

Berufliche Tätigkeit

April 1998 - Februar 2000 Studentische Hilfskraft
an der Fakultät für Physik und Astronomie
März 2000 - Dezember 2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Lehrstuhl für Theoretische Physik

Dissertation eingereicht am: 18.06.2003

Tag der Disputation: 20.10.2003

Referent: Prof. Dr. Elsässer

Korreferent: Prof. Dr. Schlickeiser