

---

# **Kopplung globaler Eigenschwingungen der Sonne durch Konvektion**

---

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

FAKULTÄT FÜR PHYSIK

der

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT,  
FREIBURG IM BREISGAU

vorgelegt von

**Markus Roth**

aus

Rust am Rhein

2 0 0 2

---

Dekan:	Prof. Dr. K. Königsmann
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. M. Stix
Referent:	Prof. Dr. M. Stix
Korreferent:	Prof. Dr. T. Heinzel
Tag der Verkündigung des Prüfungsergebnisses:	22. Juli 2002

---

Im Rahmen dieser Arbeit sind folgende Veröffentlichungen entstanden:

#### **Referierte Publikationen**

- Roth, M., Stix, M., 1999, *Astronomy and Astrophysics*, v.351, p.1133  
Nesis, A., Hammer, R., Roth, M., Schleicher, H., Soltau, D., Staiger, J., 2001, *Solar Physics*, v. 200, p. 11  
Nesis, A., Hammer, R., Roth, M., Schleicher, H, 2001, *Astronomy and Astrophysics*, v. 373, p. 307  
Roth, M., 2001, *The Astrophysical Journal*, Volume 559, Issue 2, p. 1165  
Roth, M., Howe, R., Komm, R., 2002, *Astron. Astrophys.* (im Druck)

#### **Nicht-referierte Publikationen**

- Roth, M., Stix, M., 1999, *GONG '99 Abstracts*, 4.8  
Roth, M., Stix, M., 1999, *AG Abstract Services*, vol. 15, p. 11  
Nesis, A., Hammer, R., Roth, M., Schleicher, H., 2000, *American Astronomical Society*, SPD meeting #32, #01.01  
Roth, M., Stix, M., 2000, *American Astronomical Society*, SPD meeting #32, #01.10  
Howe, R., Hill, F., Basu, S., Christensen-Dalsgaard, J., Komm, R. W., Munk Larsen, R., Roth, M., Schou, J., Thompson, M. J., Toomre, J., 2001, in: A. Wilson (ed.): "Proceedings of the SOHO 10/GONG 2000 Workshop: Helio- and asteroseismology at the dawn of the millennium", ESA SP-464, p. 137  
Roth, M., Stix, M., 2001, in: A. Wilson (ed.): "Proceedings of the SOHO 10/GONG Workshop: Helio- and asteroseismology at the dawn of the millennium", ESA SP-464, p. 243  
Nesis, A., Hammer, R., Roth, M., Schleicher, H., 2001, *American Geophysical Union*, Spring Meeting 2001, #SP41B-03  
Roth, M., 2001, *American Geophysical Union*, Spring Meeting 2001, #SP31A-09  
Roth, M., Howe, R., Komm, R. W., 2001, *American Geophysical Union*, Spring Meeting 2001, #SP31A-08



*Es kommt die Zeit, wo man zurück-  
blickt und sich wundert,  
“Habe ich das alles wirklich erlebt?”*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>9</b>
<b>Teil 1. Überblick</b>	<b>11</b>
<b>Kapitel 1. Helioseismologie – ein Blick in das Innere der Sonne</b>	<b>13</b>
<b>Teil 2. Theoretische Überlegungen</b>	<b>19</b>
<b>Kapitel 2. Globale solare Oszillationen</b>	<b>21</b>
2.1. Grundlagen	21
2.2. Das Gleichgewichtsmodell	23
2.3. Störung des Gleichgewichts	24
2.4. Die Oszillationsgleichungen	25
2.5. Lineare, adiabatische Oszillationen	28
2.5.1. Randbedingungen	29
2.5.2. p- und g-Modi	30
2.6. Abhängigkeit der Frequenzen vom Gleichgewichtsmodell	33
2.6.1. Abhängigkeiten der Oszillationen vom inneren Aufbau	33
2.6.2. Tiefe der Konvektionszone	34
<b>Kapitel 3. Konvektion auf der Sonne</b>	<b>37</b>
3.1. Längenskalen der solaren Konvektion	37
3.2. Parametrisierung des Geschwindigkeitsfeldes	38
3.2.1. Tiefenabhängigkeit	40
3.3. Zeitabhängige Geschwindigkeitsfelder	42
<b>Kapitel 4. Störungstheorie</b>	<b>45</b>
4.1. Störungstheorie nicht-entarteter Zustände	46
4.2. Störungstheorie entarteter Zustände	46
4.2.1. Störung solarer entarteter Eigenschwingungen	47
4.2.2. Einfluß differentieller Rotation	49
4.3. Störungstheorie quasi-entarteter Zustände	51
4.3.1. Störung solarer quasi-entarteter Eigenzustände	53
4.3.1.1. Das allgemeine Matrixelement und die Supermatrix in der Störungstheorie quasi-entarteter Zustände	54
4.3.1.2. Auswahlregeln	56
4.3.1.3. Besetzung der Supermatrix	57
4.3.1.4. Differentielle Rotation	58
4.3.1.5. Poloidale Geschwindigkeitskomponenten	59
4.3.1.6. Abschätzungen	62
4.3.2. Der allgemeine Zustand	67

<b>Kapitel 5. Theorie zeitabhängiger Störungen</b>	<b>73</b>
5.1. Iteratives Lösungsverfahren	74
5.1.1. Nullte Ordnung	74
5.1.2. Erste Ordnung	75
5.1.3. Zweite Ordnung	75
5.2. Das Zwei-Koppler-System	76
5.2.1. Kritische Frequenzen	78
5.2.1.1. $\omega_1 = \omega_2$	78
5.2.1.2. $\Omega = \omega_1 - \omega_2$	80
5.3. Gekoppelte Pendel	81
5.4. Ergebnisse	82
<b>Zusammenfassung des Theorieteils</b>	<b>87</b>
<b>Teil 3. Abschließende Betrachtungen</b>	<b>89</b>
<b>Kapitel 6. Praktische Anwendungen</b>	<b>91</b>
6.1. Differentielle Rotation	91
6.2. Poloidale Strömungsfelder	93
6.3. Numerisches Experiment	94
6.3.1. Simulierte Oszillationsdaten	94
6.3.2. Ergebnisse	94
6.3.2.1. Sektorale zellulare Strömungen	94
6.3.2.2. Zonale meridionale Strömungen	96
6.3.2.3. Übersprechen	96
6.3.3. Nachweisgrenze für großskalige Konvektion	98
6.4. Energieschwankungen	99
6.4.1. Diskussion	103
6.5. Zusammenfassung	105
<b>Anhang A. Mathematischer Anhang</b>	<b>107</b>
A.1. Horizontaler Anteil von Gradientoperator, Divergenz und Laplace-Operator	107
A.2. Generalisierte Kugelflächenfunktionen	107
A.3. Die Wigner-3j-Symbole	108
A.3.1. Eigenschaften der Wigner-3j-Symbole	108
<b>Anhang B. Bestimmung des allgemeinen Matrixelements</b>	<b>111</b>
B.1. Das allgemeine Matrixelement $V_{nn',ll'}^{mm'}$	111
B.1.0.1. Vektorfelder in generalisierten Kugelflächenfunktionen	112
B.1.0.2. Der Winkelanteil	112
B.1.0.3. Hermitezität der Supermatrix	114
B.2. Das allgemeine Matrixelement $C_{nn',ll'}^{mm'}$	115
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>117</b>
<b>Danksagung</b>	<b>121</b>



## Zusammenfassung

Wir untersuchen in dieser Arbeit den Einfluß von großskaligen Strömungskomponenten auf globale adiabatische solare Oszillationen mit störungstheoretischen Methoden. Dabei unterscheiden wir zwischen stationären und zeitabhängigen Strömungskomponenten.

Auf Grund der betrachteten Geschwindigkeitskomponenten kommt es zur Kopplung der solaren Oszillationen, sofern bestimmte Auswahlregeln erfüllt sind. Für ein stationäres großskaliges Geschwindigkeitsfeld führt die Kopplung zu Frequenzverschiebungen. Im Fall der differentiellen Rotation der Sonne werden dadurch die entarteten Frequenzen in Multipletts aufgespalten. Zur Beschreibung dieses Sachverhalts verwendet man die Störungstheorie entarteter Zustände.

Stationäre poloidale Geschwindigkeitskomponenten resultieren in weiteren Frequenzverschiebungen. Die Ursache dafür ist die Kopplung von Eigenzuständen aus verschiedenen Multipletts, die wir mit der Störungstheorie quasi-entarteter Zustände untersuchen. Die gefundenen Frequenzverschiebungen sind abhängig von der Amplitude der Strömung und der Differenz der Frequenzquadrate der Kopplungspartner. Bei zwei Kopplungspartnern sind die Frequenzverschiebungen vom Betrag her gleich, haben aber unterschiedliches Vorzeichen. Für eine Amplitude von 100 m/s ist der Effekt in der Größenordnung von 100 nHz. Zusätzlich ist die Kopplung von der Geometrie der poloidalen Komponenten abhängig. Wir finden, daß eine meridionale Strömung zu einer symmetrischen Frequenzverschiebung innerhalb der Multipletts führt. Alle anderen poloidalen Strömungskomponenten resultieren in asymmetrischen Frequenzverschiebungen.

Für die gekoppelten solaren Oszillationen finden wir ein Analogon in den gekoppelten mathematischen Pendeln. Auf diese Weise können wir den Energieübetrag zwischen den solaren Oszillationen beschreiben.

Für die Untersuchung der Kopplung durch zeitlich variable Geschwindigkeitsfelder verwenden wir ebenfalls die Störungstheorie. Wir finden, daß es im zeitabhängigen Fall zu einer Umverteilung in der spektralen Leistungsdichte der solaren Oszillationen kommt. Koppeln zwei Oszillationen mit den Frequenzen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  durch eine mit der Frequenz  $\Omega$  variierende poloidale Geschwindigkeitskomponente, treten Seitenbänder an den Stellen  $\nu_1 + n(\nu_1 - \nu_2) \pm m\Omega$  bzw. spiegelbildlich zu  $(\nu_1 + \nu_2)/2$  bei  $\nu_2 + n(\nu_2 - \nu_1) \pm m\Omega$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  auf. Die Höhe der Seitenpeaks hängt wiederum von der Amplitude des Geschwindigkeitsfeldes und der Differenz der Frequenzquadrate ab. Für eine Amplitude von 100 m/s sind die ersten Nebenpeaks einen Faktor 100 kleiner als das Hauptmaximum. Insgesamt ist deshalb der Peak eines Modus in der spektralen Leistungsdichte erniedrigt, asymmetrisch und verbreitert. Zusätzlich ist der Schwerpunkt gegenüber dem Peak eines ungestörten Oszillationsmodus verschoben. Mit diesem Ergebnis sind wir in der Lage, die beobachtete Form und Struktur der spektralen Leistungsdichte solarer Oszillationen zu erklären.

In einer Anwendung der theoretischen Überlegungen untersuchen wir die mögliche Nachweisbarkeit großskaliger Strömungen in der Konvektionszone. Mit Hilfe eines numerischen Experiments leiten wir eine Obergrenze von 10 m/s für die maximale Geschwindigkeit von großskaligen Komponenten ab. Des weiteren bestimmen wir aus Beobachtungsdaten die Variation in der spektralen Leistungsdichte und daraus die Korrelationen zwischen den Modi. Auf Grund eines Trends von bis zu 1.6-mal mehr Antikorrelationen weisen wir einen möglichen Energieaustausch zwischen den Oszillationen nach, wie er durch die Resultate der Störungstheorie beschrieben werden kann.



**Teil 1**

**Überblick**



# Helioseismologie – ein Blick in das Innere der Sonne

*You love the sun. But we love it more – we chase it. We want to see it everytime, even at night. So we have built a network of observatories around the world.*

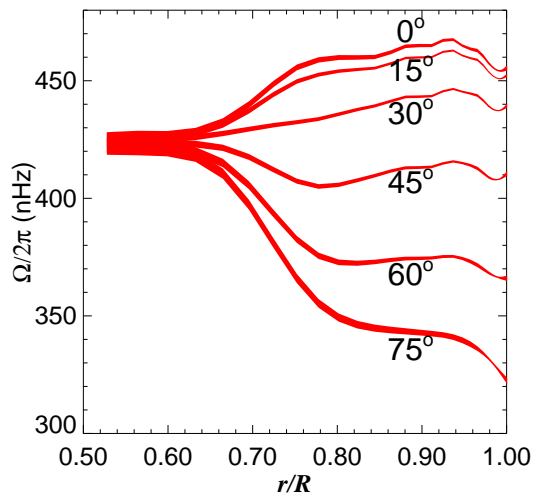
*(Douglas Gough zum Bürgermeister von Santa Cruz de Tenerife, Teneriffa, Oktober 2000)*

Seismologie auf der Sonne scheint bei einer ersten unvoreingenommenen Betrachtungsweise schwer vorstellbar, schließlich kennt man die Methode der Seismologie im Allgemeinen in ihrer Anwendung nur bei der Erforschung des Erdinnern. Hier nutzt man entweder Erdbebenwellen oder künstlich erzeugte Schallwellen aus, die den Erdmantel durchlaufen, um aus deren Laufzeit-Laufstrecken-Relation Rückschlüsse über den inneren Aufbau der Erde zu gewinnen. So gelingt es, die Dicke des Erdmantels mit einer Unsicherheit von nur etwa 1 km festzulegen (Shearer, 1999).

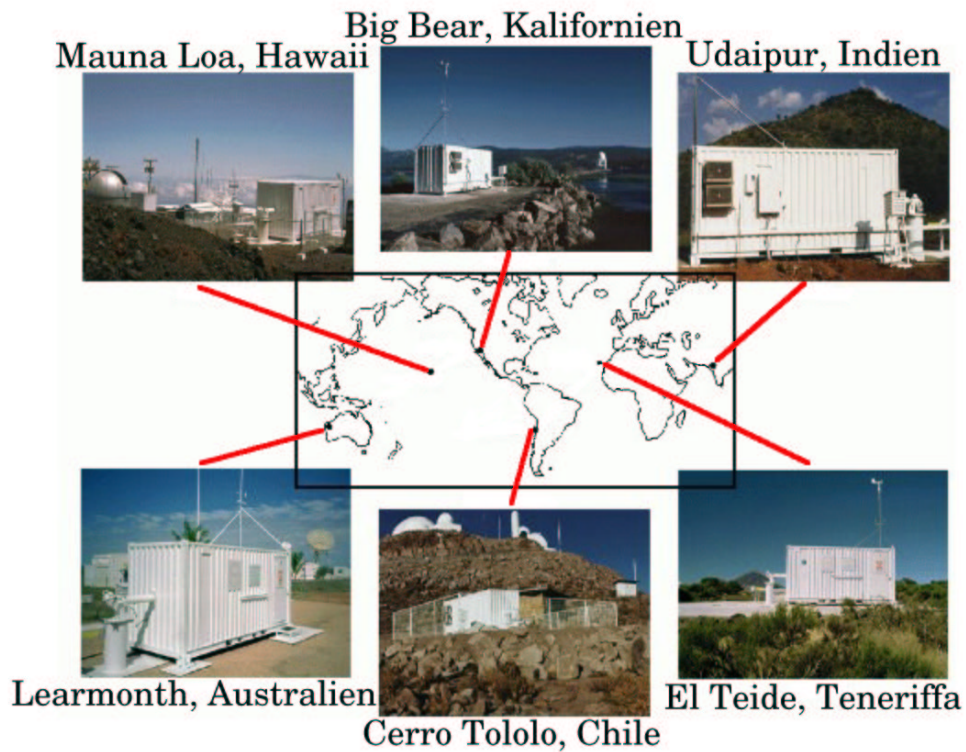
Sonnenbeben oder gar Schallwellen, die die Sonne durchlaufen, zu vermessen, klingt abenteuerlich. *Helio-* oder allgemeiner *Astroseismologie* ist aber tatsächlich seit einigen Jahrzehnten Realität und bei der Erkundung des inneren Aufbaus der Sonne, bzw. auch benachbarter Sterne, ein sehr erfolgreicher Forschungszweig der Astrophysik.

Es ist inzwischen gelungen, die Lage des Bodens der Konvektionszone auf drei Nachkommastellen auf  $0.713 \pm 0.001$  (gemessen in Einheiten des Sonnenradius  $R$ ) festzulegen (Basu & Antia, 1997). Des weiteren zeigt sich (Abb. 1.1), daß sich die differentielle Rotation der Oberfläche in etwa konstant bis in diese Tiefe fortsetzt, um dann dort in einer Übergangszone (*Tachocline*) in eine starre Rotation überzugehen (Christensen-Dalsgaard & Schou, 1988).

Vor allem zwei sich ergänzende Experimente tragen mit qualitativ sehr guten Daten zu einem sich stetig verbessernden Kenntnisstand über das Sonneninnere bei. Zu einem sind das die Instrumente der SOI (Solar Oscillation Investigation) an Bord des Weltraumobservatoriums SOHO (Solar Heliospheric Observatory), zum anderen das GONG (Global Oscillation Network Group) Projekt mit einem Netzwerk von sechs Sonnenobservatorien rund um den Erdball (s. Abb. 1.2). Beide Projekte ermöglichen eine nahezu lückenlose Beobachtung der Sonne. Auf deren Basis sind bedeutende Fortschritte bei der Untersuchung des inneren Aufbaus der Sonne möglich geworden – und dies in einem Forschungsbereich, bei dem man sich vor noch nicht allzu langer Zeit mit Schätzungen und Modellen zufrieden geben mußte. Nun kann man mittels Helioseismologie allein durch die Studie von niederfrequenten Schallwellen (mit einer Periode von etwa 5 Minuten) – den *5-Minuten-Oszillationen* –, die das Sonneninnere durchwandern und mit geringer Amplitude an der Oberfläche beobachtbar sind, sogar bis in den Kern der Sonne "blicken". Durch Analyse von etwa 10 Millionen dieser an der Oberfläche noch schwach nachweisbaren Oszillationen wird



**Abbildung 1.1.** Zeitlich gemittelte Rotationsraten aufgetragen als Funktionen des Abstandes  $r/R$  vom Sonnenzentrum bei verschiedenen Breiten innerhalb der Sonne. Die Tachocline – die Gegend des Übergangs von differentieller in starre Rotation im Innern – liegt in der Nähe des Bodens der Konvektionszone, der sich bei  $0.71 R$  befindet.



**Abbildung 1.2.** Weltkarte mit den Positionen der sechs Stationen des GONG-Netzwerkes. Quelle: GONG Image Gallery.

die Schallgeschwindigkeit gemessen. Somit kann man gleichzeitig an jedem Punkt im Sonneninnern andere Größen wie die Temperatur, Strömungen oder die chemische Zusammensetzung bestimmen.

Korreliert man Beobachtungsdaten mit theoretischen Überlegungen, stimmt der gemessene innere Aufbau der Sonne fast überall mit den besten theoretischen Modellen bis auf etwa 0.2 Prozent überein (Kosovichev et al., 1997). Solch eine Genauigkeit wurde bisher nie in der Astrophysik erreicht. Diese Tatsache ist somit ein starkes Argument für die Richtigkeit der Sonnenphysik in der Diskussion um die zu gering gemessene Anzahl von Sonnenneutrinos. Sie hat Anteil daran, daß die Lösung dieses Problems kurz bevorzustehen scheint. Die letztendliche Klärung der Frage nach dem Verbleib der Neutrinos wird auf dem Gebiet der Neutrinoophysik erwartet. Eine Veränderung des Sonnenmodells scheint nicht sinnvoll. Demzufolge werden Möglichkeiten wie Neutrinooszillationen, die Fähigkeit der Neutrinos zwischen drei möglichen Zuständen zu wechseln, überdacht (Fukada et al., 2001).

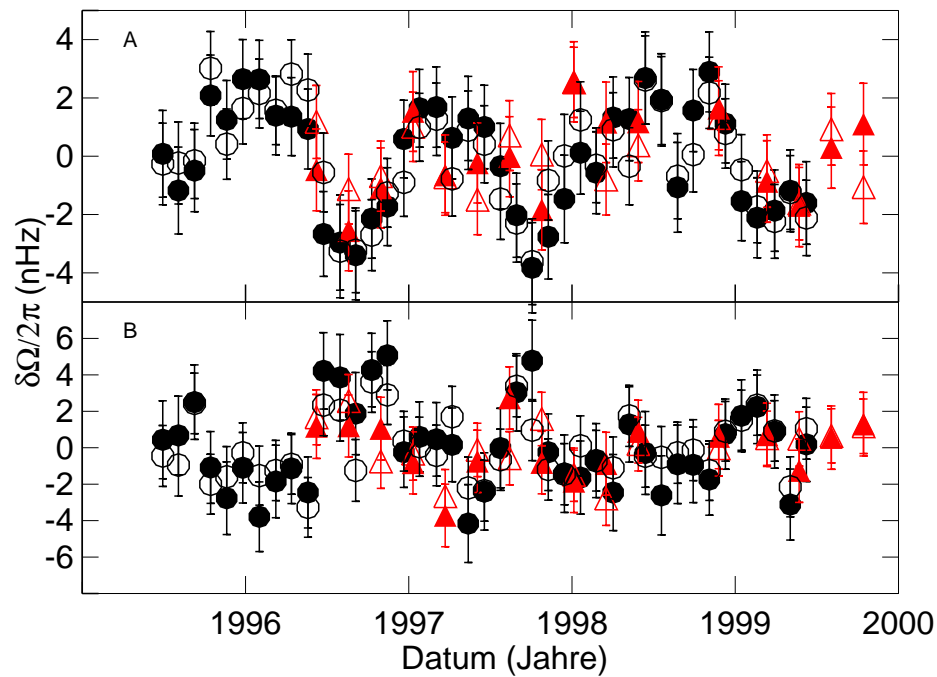
Dennoch ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung des inneren Aufbaus der Sonne noch nicht perfekt. So gibt es einen Unterschied von bis zu 0.4 Prozent in der Lage des Übergangs zwischen dem ruhenden tiefen Sonneninnern – der Strahlungszone, wo die Wärme durch Strahlung transportiert wird – und der darüber liegenden Konvektionszone, in der die Wärme durch Materieströmungen nach außen transportiert wird. Dieser leichte Unterschied mag von starken Magnetfeldern und einem Vordringen konvektiver Bewegungen in das ruhige Sonneninnere (Overshoot) herrühren. Beide Effekte werden im Detail mittels Helioseismologie und großem numerischem Aufwand untersucht (Miesch, 2001).

Helioseismologie liefert aber noch viel mehr als nur die Kenntnis über den inneren Aufbau. Es ist darüber hinaus möglich, das zweidimensionale Rotationsprofil durch das ganze Volumen der Sonne zu kartographieren (Abb.1.1).

Theoretisch war eine Rotationsrate vorhergesagt worden, die auf parallel zur Rotationsachse ausgerichteten Zylindern konstant sei. Denn der Drehimpuls sollte im Großen und Ganzen für jede Gasblase erhalten sein und es sollte kaum Austausch von Drehimpuls zwischen verschiedenen Gasblasen geben (Gilman, 1974). Aber scheinbar führt die konvektive Durchmischung oder auch die Kopplung von Wellen und Materiekreislauf zu einem ganz unerwarteten Transport von Drehimpuls. Studien zu diesem sehr komplexen Problem werden derzeit vorangetrieben (Miesch et al., 2000). Auch wenn es schon sehr vielversprechende Ergebnisse gibt, wird noch keines der Modelle allgemein anerkannt.

Es gibt aber noch weitere Überraschungen im Rotationsprofil der Sonne. So findet sich eine etwa 50 000 km dicke Schicht nahe der Oberfläche, die langsamer als das darunter liegende Sonneninnere rotiert. Eine Erklärung hierfür ist noch nicht bekannt, ebensowenig für den eng konzentrierten Fluß von schnell strömendem Material unter der Polarregion (Polar Jetstream) (Schou et al., 1998). Vor kurzem wurde sogar ein ständig aufeinanderfolgendes Beschleunigen und Wiederabbremsen der Rotation nahe dem Boden der Konvektionszone mit einer Periode von 1.3 Jahren entdeckt (Howe et al., 2000a) (Abb. 1.3). Nahe der Oberfläche variiert die differentielle Rotation mit der Zeit und an allen Breiten, so daß es während eines Sonnenzyklus zu einer Wanderung schneller und langsamer rotierender Bänder zum Äquator hin kommt (s. Abb. 1.4) (Howe et al., 2000b). Der innere Bereich der Sonne, der den größten Teil der Masse enthält, rotiert im Gegensatz zu den äußeren Schichten wie ein starrer Körper (s. Abb. 1.1). Als Ursache für die beobachtete differentielle Rotation wird die Konvektion angesehen, schließlich ist die differentielle Rotation im Prinzip auf die Konvektionszone beschränkt. Simulationen liefern erste Erkenntnisse darüber wie die Konvektion die großskalige differentielle Rotation antreiben kann. Diese Simulationen stimmen jedoch noch nicht mit den Beobachtungsdaten überein (Miesch et al., 2000).

Ein erweiternder, neuerer und ebenso interessanter Zweig der Helioseismologie ist die *lokale Helioseismologie*. Sie bietet die Möglichkeit, schwache Störungen in der Schallgeschwindigkeit in den oberflächennahen Schichten, die Computersimulationen schwer zugänglich sind, zu vermessen. Lokale Inhomogenitäten im Sonneninnern oder an der Oberfläche können somit untersucht werden. Der Begriff lokale Helioseismologie erscheint in der Literatur erstmals 1993 (Lindsey et



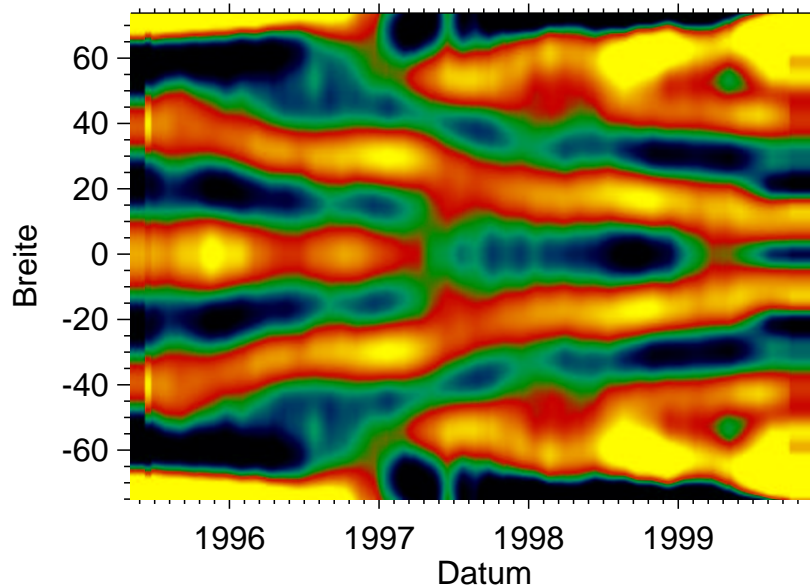
**Abbildung 1.3.** Zeitliche Schwankung  $\delta\Omega/2\pi$  der Rotationsrate am Äquator um ihren Mittelwert in den Tiefen  $0.72 R$  (A) und  $0.63 R$  (B). Verschiedene Symbole stehen für verschiedene Kombinationen von Daten und Inversionsmethoden (RLS: Regularized Least Squares, OLA: Optimally Localized Average): GONG – RLS (volle schwarze Kreise), GONG – OLA (offene schwarze Kreise), SOHO – RLS (volle rote Dreiecke), SOHO – OLA (offene rote Dreiecke). Quelle: R. Howe.

al., 1993). Es handelt sich dabei um eine Technik, die den traditionellen Zweig ergänzt. Dieser wird seither *globale Helioseismologie* genannt, da dessen primäres Ziel die Messung, Identifikation und Modellierung der resonanten Schallschwingungen der Sonne zur Ableitung globaler Eigenschaften des Sonneninneren ist. Bei der lokalen Helioseismologie kommt die Verwandtschaft zur Erd-Seismologie voll zum Tragen, da nun auch hier Laufzeit-Laufstrecken-Relationen (*Time-Distance*) ausgenutzt werden, um die erwähnten Schallgeschwindigkeitsschwankungen zu bestimmen (Duvall et al., 1993; Shearer, 1999). Insbesondere seit der Entdeckung, daß Sonnenflecken einfallende akustische Wellen stark absorbieren (Braun et al., 1987), ist es mit lokaler Helioseismologie möglich geworden, die akustischen Eigenschaften von magnetisch aktiven Gebieten auf der Sonne zu untersuchen. Abb. 1.5 zeigt ein Beispiel.

Darüberhinaus ist es möglich, andere lokale Einflüsse auf die solaren Oszillationen, wie etwa Strömungen, zu untersuchen. Besonders gut gelingt dies durch die *Ringdiagramm-Analyse*, die sich vor allem zur Untersuchung meridionaler Strömungen hervorragend eignet (Hill, 1998; Haber et al., 2002).

Das Entstehen, Leben und Vergehen von magnetisch aktiven Gebieten zu untersuchen, wie auch die Vermessung von Strömungen im Sonneninneren, sind einige der Hauptziele der Helioseismologie; und dies sowohl mit lokalen Techniken als auch mittels globaler Analysen. Dies geschieht u.a. nicht nur, um die Physik hinter der Aktivität der Sonne zu verstehen, sondern vielmehr um, die Helioseismologie zur Vorhersage der Sonnenaktivität verwenden zu können. Es ist derzeit mit Helioseismologie nicht möglich, die Entstehung von aktiven Gebieten vorherzusagen, aber es ist bereits möglich, schon vorhandene aktive Gebiete auf der abgewandten Seite der Sonnenoberfläche an Schwankungen in der Schallgeschwindigkeit zu erkennen (Braun & Lindsey, 2001). Solche



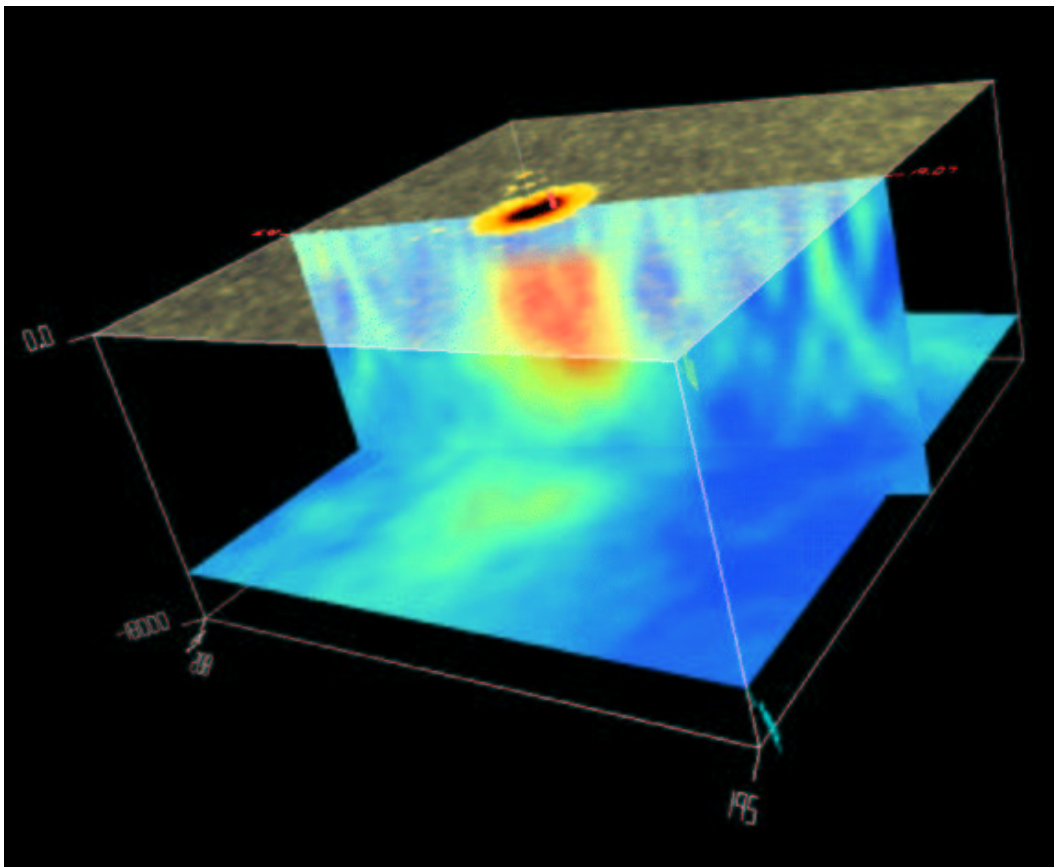


**Abbildung 1.4.** Wandernde zonale Bänder. Nahe der Sonnenoberfläche zeigt die Variation der Rotationsrate mit der Breite und der Zeit Bänder zonaler Strömungen, die zum Äquator wandern (Farbcodierung: schnellere Rotation als rot/gelb, langsamere als grün/blau). Quelle: R. Howe.

aktiven Gebiete existieren bis zu mehrere Wochen. Deshalb können sie lange bevor sie wegen der solaren Rotation auch über die Vorderseite wandern vorhergesagt werden.

Neben diesem Gebiet sind in der Helioseismologie noch in anderen Bereichen Fragen offen. Vor allem die zeitliche Variation des Sonneninnern auf Zeitskalen von Minuten bis zu einem Sonnenzyklus ist derzeit Schwerpunkt der Forschung. Zudem ist der Nachweis der theoretisch erwarteten  $g$ -Modi noch nicht gelungen (Appourchaux et al., 2001). Dabei handelt es sich um Schwerewellen, die im Sonnenzentrum eingeschlossen sind. Ebenso wenig ist die Existenz von großskaligen Strömungen in der Konvektionszone geklärt. Hierzu sind Vorarbeiten von theoretischer Seite schon geleistet worden, indem das *Vorwärtsproblem* behandelt wurde, d. h. die Berechnung des Einflusses von großskaligen Strömungen auf die Oszillationen. Lavelly & Ritzwoller (1992) berechnen in einer grundlegenden Arbeit den Einfluß von globaler, stationärer Konvektion samt den zugehörigen Veränderungen in der Kugelsymmetrie, dem Kompressionsmodul, der Dichte und dem Gravitationspotential der Sonne auf helioseismologische Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen. Die Arbeiten von Roth (1998) und Roth & Stix (1999) basieren auf diesen Berechnungen von Lavelly & Ritzwoller (1992). Sie verwenden deren Theorie, um den Einfluß von poloidalen Geschwindigkeitsfeldern auf die Eigenfrequenzen und die spektrale Leistungsdichte solarer Oszillationen zu bestimmen.

Weitere Ansätze, den Einfluß von Konvektion auf die solaren Eigenschwingungen zu untersuchen, finden sich in den Arbeiten von Zhugzhda & Stix (1994) und Stix & Zhugzhda (1998). Darin wird auf der Basis eines einfachen Zwei-Strom-Modells von abwechselnd warmen und kalten vertikalen Strömungen der Einfluß von Konvektion auf die solaren Oszillationen berechnet. Für ein den Verhältnissen der Granulation angepasstes Modell finden Zhugzhda & Stix (1994) eine signifikante Frequenzverschiebung. Diese liegt in der Größenordnung der Diskrepanz zwischen gängigen Sonnenmodellen und den beobachteten Daten und hängt von der Frequenz und dem harmonischen Grad ab. Die Amplituden- und Phasenmodulation in Abhängigkeit von der lokalen



**Abbildung 1.5.** Mit Time-Distance-Helioseismologie vermessene Schallgeschwindigkeit unter einem Sonnenfleck. Drei Ebenen sind dargestellt. Die oberste Ebene zeigt ein Intensitätsbild der Umgebung eines Sonnenflecks mit einer dunklen zentralen Umbra und einer etwas helleren filamentartigen Penumbra. Die vertikale Ebene zeigt einen Schnitt von der Sonnenoberfläche bis hinab auf 24 000 km (Farbcodierung: schnellere Schallgeschwindigkeit rötlich, langsamere Schallgeschwindigkeit bläulich). Die untere Ebene ist ein horizontaler Schnitt bei einer Tiefe von 22 000 km und stellt die horizontale Variation der Schallgeschwindigkeit dar. Quelle: SOHO Image Gallery.

Schallgeschwindigkeit auf der Sonne, wie sie aus der Beobachtung der Oszillationsamplituden bekannt sind (Hoeksema & Brandt, 2000), kann ebenfalls mit Hilfe eines solchen Zwei-Strom-Modells erklärt werden (Stix, 2000).

Die vorliegende Arbeit liefert von theoretischer Seite einen Beitrag zur Fragestellung des Einflusses der Konvektion auf die solaren Oszillationen. Wir untersuchen ausführlich mittels Störungstheorie quasi-entarteter Zustände den Einfluß von großskaligen stationären poloidalen Geschwindigkeitskomponenten auf die solaren Eigenfrequenzen. Die Ergebnisse werden wir verwenden, um Nachweisgrenzen für solche Strömungen abzuleiten.

Ein weiterer zentraler Punkt dieser Arbeit ist die Anwendung von Störungstheorie auf zeitabhängige Phänomene im Sonneninnern. Dies ist vor allem für die Untersuchung zeitlich variabler Geschwindigkeitsfelder von Nutzen, da sich so die Modulation der Amplitude und der Eigenfrequenz bestimmen läßt. Von Bedeutung sind diese Effekte für die Beobachtung, denn damit ist es möglich, zeitlich variierende, großskalige Geschwindigkeitsfelder nachzuweisen. Die sich bietenden Nachweismöglichkeiten werden ebenfalls Thema dieser Arbeit sein.

**Teil 2**

# **Theoretische Überlegungen**



## Globale solare Oszillationen

*Mache die Dinge so einfach wie möglich –  
aber nicht einfacher.*

*(Albert Einstein)*

In diesem Kapitel wollen wir die mathematischen und physikalischen Begriffe der solaren Oszillationen einführen, was vor allem als Hintergrund für die weiteren Kapitel wichtig sein wird. Dazu werden wir die Bewegungsgleichungen der solaren Oszillationen in einem kurzen Abriss herleiten. Wir orientieren uns dafür an der vorhandenen Literatur, u.a. vor allem an der Arbeit von Christensen-Dalsgaard (1998).

### 2.1. Grundlagen

Der Herleitung der Oszillationsgleichungen wollen wir einige grundlegende Überlegungen voranstellen.

Der Zustand des solaren Gasgemischs kann durch die Angabe lokaler thermodynamischer Größen – dazu gehören u.a. die Dichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , der lokale Druck  $p(\mathbf{r}, t)$ , sowie zusätzlich die lokale momentane Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  – als Funktion vom Ort  $\mathbf{r}$  im Sonneninnern und der Zeit  $t$  beschrieben werden. Betrachtet man dynamische Vorgänge, d. h. untersucht man Bewegungen im Sonneninnern, so sind von Seiten der klassischen Mechanik zwei Betrachtungsweisen üblich: die Eulersche Beschreibung entspricht der Darstellung der Vorgänge durch einen stationären Beobachter, die Lagrangesche Beschreibung entspricht der eines Beobachters, der der Bewegung folgt. Kennzeichnet man ein Gaspaket z. B. mit seinem Ausgangspunkt  $\mathbf{r}_0$ , so ist seine Bewegung durch  $\mathbf{r}(t; \mathbf{r}_0)$  als Funktion der Zeit beschreibbar. Seine Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ bei festem } \mathbf{r}_0 .$$

Die totale Ableitung einer beliebigen Größe  $\phi$  nach der Zeit ist in der Lagrangeschen Beschreibung gegeben durch

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi . \quad (2.1)$$

Der mit der Bewegung stattfindende Materiefluß geschieht so, daß die Masse erhalten ist. Dies findet in einer Kontinuitätsgleichung Ausdruck

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 . \quad (2.2)$$

Benutzt man die eben gefundene Beziehung (2.1) so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (2.3)$$

Für die Bewegung selbst wollen wir annehmen, daß unter solaren Bedingungen die Viskosität des Gases in guter Näherung vernachlässigt werden kann. Die Kräfte, die auf ein Gaspaket

einwirken, setzen sich somit aus dem Druckgradienten und aus der Gravitationskraft zusammen. Die Bewegungsgleichung eines Gaspaketes ergibt sich zu

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.4)$$

oder wieder mit (2.1) zu

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} . \quad (2.5)$$

Magnetfelder und die daraus resultierenden Kräfte auf ein Gaspaket im Sonneninnern werden in Gleichung (2.4) vernachlässigt. Die einzige Volumenkraft ist die Gravitation, deren Beschleunigung als Gradient des Gravitationspotentials geschrieben werden kann

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi . \quad (2.6)$$

Das Potential  $\Phi$  erfüllt die Poissongleichung

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.7)$$

mit  $G$  als Gravitationskonstante.

Um die grundlegenden Überlegungen zu komplettieren, müssen wir noch einen Abschnitt zum Energiefluß  $\mathbf{F}$  anfügen. Grundsätzlich muß der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} \quad (2.8)$$

erfüllt sein. Der Energiegewinn, bzw. die Energieverlustrate ist hierbei mit  $dq/dt$  bezeichnet,  $E$  ist die innere Energie pro Einheitsmasse und  $V = 1/\rho$  ist das spezifische Volumen. Diese Beziehung ist somit Ausdruck dafür, daß der Wärmegewinn teilweise in innere Energie umgewandelt und teilweise als Arbeit, das Gas zu komprimieren oder zu expandieren, umgesetzt wird. Nutzt man die Kontinuitätsgleichung (2.3) aus, findet sich eine alternative Formulierung der Beziehung (2.8)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} . \quad (2.9)$$

Durch weitere thermodynamische Beziehungen kann die Energiegleichung in anderen, oft gebräuchlicheren Variablen dargestellt werden.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (2.10)$$

$$= c_p \left( \frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right) \quad (2.11)$$

$$= c_V \left[ \frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right] . \quad (2.12)$$

Mit  $c_p$  und  $c_V$  bezeichnen wir die spezifischen Wärmen pro Einheitsmasse bei konstantem Druck bzw. bei konstantem Volumen, die adiabatischen Exponenten sind gemäß

$$\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}} , \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{\text{ad}} , \quad \Gamma_3 - 1 = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}} \quad (2.13)$$

definiert. In den meisten Fällen ist es ausreichend, das Gas als voll ionisiert zu betrachten und Entartungseffekte oder den Strahlungsdruck zu vernachlässigen. Die Zustandsgleichung ist dann die ideale Gasgleichung

$$p = \frac{k_B \rho T}{\mu} \quad (2.14)$$

mit  $k_B$  als Boltzmannkonstante und  $\mu$  als mittleres Molekulargewicht. Es folgt dann auch

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 5/3 . \quad (2.15)$$

Vor allem den Wärmegewinn müssen wir näher betrachten. Dieser läßt sich auch in Form einer Kontinuitätsgleichung schreiben

$$\rho \frac{dq}{dt} = \rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F} ; \quad (2.16)$$

hierbei ist  $\epsilon$  die Energieerzeugungsrate pro Einheitsmasse (z. B. für Hauptreihensterne hauptsächlich aus Kernreaktionen) und  $\mathbf{F}$  ist der Energiefluß.

In Konvektionszonen stellen turbulente Gasbewegungen einen sehr effektiven Energietransportmechanismus dar. Im Idealfall muß das gesamte hydrodynamische System als Ganzes mitsamt der Konvektion beschrieben werden. Jedoch ist dies in den meisten Fällen zu komplex. Somit werden üblicherweise die konvektiven Bewegungen separat behandelt, indem man die resultierenden Gleichung über Längenskalen mittelt, die groß sind gegenüber den charakteristischen Skalen der Konvektion, jedoch klein gegenüber anderen Skalen. In diesem Fall tritt der konvektive Energiefluß als Teil von  $\mathbf{F}$  in Gleichung (2.16) auf. Der konvektive Energiefluß kann dann aus anderen Größen, die das System charakterisieren, bestimmt werden. Ein vertrautes Beispiel ist die Mischungswegtheorie.

Die Berechnung des Strahlungsflusses ist dennoch nicht trivial. Im Sterninneren reicht uns aber die Diffusionsnäherung, d. h. der Strahlungsfluß ist durch

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{3\kappa\rho} \nabla B = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T \quad (2.17)$$

gegeben, dabei bezeichnet  $B = (ac/4\pi)T^4$  die integrierte Planckfunktion,  $\kappa$  die Opazität,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $a$  die Strahlungsdichtekonstante. Damit haben wir eine Beziehung zwischen dem Zustand des Gases und dem Strahlungsfluß, der zu einer Wärmeleitungsgleichung analog ist. Zur Berechnung solarer Oszillationsfrequenzen kann man die Komplikationen, die mit der Energiegleichung verbunden sind, mit einem hohen Grad an Präzision vermeiden, indem man den Heizungsterm auf der rechten Seite von (2.16) vernachlässigt. Dort im Sonneninneren, wo man diesen Term vernachlässigen kann, erfolgt die Bewegung adiabatisch. Dies ist bis auf die oberflächennahen Schichten für das Sonneninnere sehr gut erfüllt. Für eine adiabatische Bewegung genügen der Druck  $p$  und die Dichte  $\rho$  der Beziehung

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} . \quad (2.18)$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (2.2), der Bewegungsgleichung (2.5) und der Poissongleichung (2.7) bildet diese Gleichung den vollständigen Satz zur Beschreibung adiabatischer Bewegungen. Auf diesen Gleichungen wird später die Herleitung der Oszillationsgleichungen beruhen.

## 2.2. Das Gleichgewichtsmodell

Das Gleichgewichtsmodell der Sonne sei stationär, d. h. alle Zeitableitungen können vernachlässigt werden. Zusätzlich nehmen wir an, daß es keine Strömungen im Sonneninneren gäbe. Unter diesen Annahmen ist die Kontinuitätsgleichung (2.2) trivial erfüllt und aus der Bewegungsgleichung ergibt sich das hydrostatische Gleichgewicht

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}_0 , \quad (2.19)$$

hierbei wurden alle Größen des Gleichgewichtsmodells mit dem Index "0" markiert.

Für unsere weiteren Betrachtungen sei nun explizit die sphärische Symmetrie des Gleichgewichtsmodells angenommen. D. h. der innere Aufbau sei nur noch vom Abstand  $r$  zum Sonnenzentrum abhängig. Für die Gravitationsbeschleunigung gilt dann  $\mathbf{g}_0 = -g_0 \mathbf{e}_r$ , wobei  $\mathbf{e}_r$  der radial nach außen gerichtete Einheitsvektor ist. Gleichung (2.19) wird somit zu

$$\frac{dp_0}{dr} = -g_0 \rho_0 , \quad (2.20)$$

für die Gravitationsbeschleunigung gilt

$$g_0 = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi\rho_0 r'^2 dr' = \frac{Gm_0}{r^2}. \quad (2.21)$$

Dabei ist  $m_0(r)$  die Masse innerhalb einer Kugel mit Radius  $r$ .

Für die Energiegleichung des Gleichgewichtsmodells finden wir

$$0 = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F}_0. \quad (2.22)$$

Man sollte hier noch anmerken, daß während sich ein Stern in seiner Entwicklung auf der Hauptreihe befindet der Heizungsterm doch einen kleinen Beitrag zur Energie liefert, den man normalerweise bei der Berechnung von Sternentwicklungsmodellen berücksichtigt. Jedoch brauchen wir zur Berechnung der solaren Eigenschwingungen diesen Term hier nicht weiter zu behandeln. Der Grund ist, daß die charakteristische Zeit der Heizung groß gegenüber der charakteristischen Zeit der solaren Oszillationen ist.

In einem sphärisch symmetrischen Gleichgewichtsmodell ist dann auch der Fluß rein radial gerichtet,  $\mathbf{F} = F_{r,0} \mathbf{e}_r$ , so daß sich für die Energiegleichung

$$\rho_0 \epsilon_0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F_{r,0}) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dL_0}{dr}$$

ergibt. Die Größe  $L_0 = 4\pi r^2 F_{r,0}$  ist der totale Energiefluß durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $r$  und somit

$$\frac{dL_0}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0 \epsilon_0. \quad (2.23)$$

Schließlich ist die Gleichung des Energietransports (2.16) gegeben durch

$$\frac{dT_0}{dr} = - \frac{3\kappa_0 \rho_0 L_0}{16\pi r^2 a c T_0^3}. \quad (2.24)$$

Die Gleichungen (2.20), (2.21), (2.23) und (2.24) beschreiben somit nichts anderes als die aus der Literatur (z. B. Prialnik (2000)) vertrauten Gleichungen des inneren Aufbaus von Sternen.

Dieses eindimensionale, stationäre Gleichgewichtsmodell, welches sphärisch symmetrisch, nicht-magnetisch, nicht-rotierend ist, dient uns in unseren weiteren Betrachtungen als Referenz. Wir werden nun im folgenden Abschnitt kleine Störungen des Gleichgewichtsmodells betrachten und auf diese Weise die Oszillationsgleichungen herleiten.

### 2.3. Störung des Gleichgewichts

Betrachten wir kleine Störungen des Gleichgewichtsmodells, können wir alle Größen in der Form

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r}, t) \quad (2.25)$$

schreiben, wobei  $\phi_1$  die entsprechende Störung der betrachteten Größe des Gleichgewichtsmodells und  $\phi_1 \ll \phi_0$  ist. Wir bemerken noch, daß die Störungen  $\phi_1$  nun nicht mehr notwendigerweise nur radial vom Abstand zum Sonnenzentrum abhängen, sondern vom vollen Vektor  $\mathbf{r}$ .

Diese Ansätze setzen wir in die Gleichungen ein und behalten nur Terme maximal erster Ordnung in den Störungen bei. Gleichungen für die Störungen wie z. B. für  $p_1, \rho_1, \dots$ , ergeben sich dann, wenn man die Gleichgewichtsgrößen abzieht. Das Ergebnis für die Kontinuitätsgleichung ist

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0. \quad (2.26)$$

Integriert man einmal in Bezug auf die Zeit, so findet man

$$\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad (2.27)$$



dabei ist  $\xi$  die durch die Störung verursachte Verschiebung eines Gaspakets von  $r_0$  nach  $r_0 + \xi$ . Die auftretende Integrationskonstante wurde gleich null gesetzt, entsprechend ihrem zeitlichen Mittelwert.

Für die Bewegungsgleichung ergibt sich

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \rho_0 \mathbf{g}_1 + \rho_1 \mathbf{g}_0, \quad (2.28)$$

dabei ist die Störung in der Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{g}_1 = -\nabla \Phi_1$  ein Resultat der Schwan-  
kungen  $\Phi_1$  im Gravitationspotential  $\Phi$ , welches der gestörten Poissongleichung genügt

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (2.29)$$

Für die Störung der Energiegleichung bedarf es einiger Überlegungen. Wir müssen in erster Ordnung in den Störungen z. B. folgendes berechnen

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p_0 = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \nabla p_0 = \frac{\partial}{\partial t}(\delta p). \quad (2.30)$$

Somit erhalten wir für die Energiegleichung z. B. aus Gleichung (2.10)

$$\frac{\partial \delta q}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0(\Gamma_{3,0} - 1)} \left( \frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right). \quad (2.31)$$

Diese Gleichung stellt man in der Lagrangeschen Betrachtung dar. Sie beschreibt den Wärme-  
austausch eines Gaspakets mit der Umgebung, wenn man der Bewegung folgt. Aus Gleichung  
(2.16) folgt unter Verwendung der Gleichung (2.22) die Störung in der Heizungsrate

$$\rho_0 \frac{\partial \delta q}{\partial t} = \delta(\rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}) = (\rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F})_1. \quad (2.32)$$

Schließlich erhält man die Störung des radiativen Strahlungsflusses in der Diffusionsnäherung aus  
Gleichung (2.17).

Für adiabatische Bewegungen vernachlässigen wir den Heizungsterm und erhalten

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.33)$$

oder durch einmalige Integration

$$\delta p = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \delta \rho, \quad (2.34)$$

oder in Eulerscher Form

$$p_1 + \xi \cdot \nabla p_0 = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} (\rho_1 + \xi \cdot \nabla \rho_0). \quad (2.35)$$

Wieder haben wir die Integrationskonstante gleich null gewählt.

## 2.4. Die Oszillationsgleichungen

Da die radiale Richtung in unserem Gleichgewichtsmodell einen besonderen Status hat, erweist  
es sich als zweckmäßig, die Verschiebung  $\xi$  in Radial- und Horizontalteil aufzuspalten

$$\xi = \xi_r e_r + \xi_h. \quad (2.36)$$

Die horizontale Komponente der Bewegungsgleichung (2.28) ist

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} = -\nabla_h p_1 + \rho_0 \nabla_h \Phi_1 \quad (2.37)$$

mit  $\nabla_h$  als horizontaler Komponente des Gradientenoperators (siehe Anhang A Gl. A.1). Gleichgewichtsgrößen haben keine Abhängigkeit von der Horizontalen, somit verschwinden auch deren Gradienten in horizontaler Richtung. Die horizontale Divergenz der Gleichung (2.37) ist deshalb

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_h \cdot \xi_h = -\nabla_h^2 p_1 + \rho_0 \nabla_h^2 \Phi_1 . \quad (2.38)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.27) läßt sich auch ausnutzen, um  $\nabla_h \cdot \xi_h$  zu eliminieren, wenn man sie in der Form

$$\rho_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 r^2 \xi_r) - \rho_0 \nabla_h \cdot \xi_h \quad (2.39)$$

schreibt. Gleichung (2.38) wird somit zu

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \rho_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) \right] = -\nabla_h^2 p_1 + \rho_0 \nabla_h^2 \Phi_1 . \quad (2.40)$$

Schließlich schreiben wir noch die Poissongleichung (2.29) um

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) + \nabla_h^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 . \quad (2.41)$$

In den letzten drei Gleichungen (2.39) – (2.41) treten Ableitungen nach den Winkelvariablen  $\theta$  und  $\varphi$  nur in Verbindung mit  $\nabla_h^2$  auf. Dies gilt auch für die Energiegleichung, die ebenfalls Ableitungen nach  $\theta$  und  $\varphi$  nur in Verbindung mit  $\nabla_h^2$  enthält.

Die Gleichungen (2.39) – (2.41) bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in den vier Variablen  $\xi_r$ ,  $p_1$ ,  $\Phi_1$  und  $\partial \Phi_1 / \partial r$ , das wir durch einen Separationsansatz weiter vereinfachen können. Das Ziel ist es, die Abhängigkeit der Störungen von den Winkelkoordinaten  $\theta$  und  $\varphi$  als Funktion  $f(\theta, \varphi)$  abzutrennen. Von der Struktur der Gleichungen her ist dies möglich, sofern  $f$  als Eigenfunktion des horizontalen Laplace-Operators gewählt wird

$$\nabla_h^2 f = -\frac{1}{r^2} \Lambda f . \quad (2.42)$$

Dabei ist  $\Lambda$  eine Konstante. Der Faktor  $1/r^2$  tritt auf Grund von Gleichung (A.3) auf. Schreibt man (2.42) aus, so ist

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -\Lambda f . \quad (2.43)$$

In dieser Gleichung sind die Koeffizienten unabhängig von  $\varphi$ , so daß die Lösung weiter separiert werden kann

$$f(\theta, \varphi) = f_1(\theta) f_2(\varphi) . \quad (2.44)$$

Es folgt unmittelbar aus Gleichung (2.43), daß  $f_2$  einer Gleichung der Form

$$\frac{d^2 f_2}{d\varphi^2} = \alpha f_2 , \quad (2.45)$$

mit Lösung  $f_2 = \exp(\pm \alpha^{1/2} \varphi)$  genügt, wobei  $\alpha$  eine weitere Konstante ist, für die sich aus der Stetigkeits- und Periodizitätsbedingung an die Lösung  $\alpha^{1/2} = im$  ergibt (mit  $m$  als ganzer Zahl).

Nützt man dies in Gleichung (2.43) aus, dann ergibt sich die folgende Differentialgleichung für  $f_1$ :

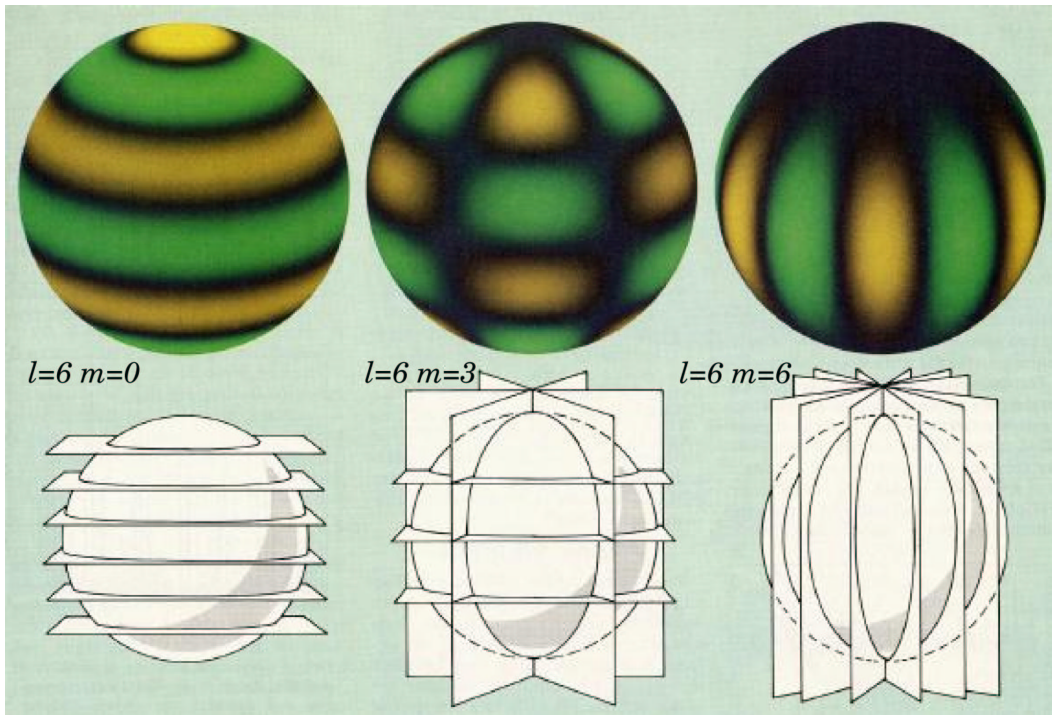
$$\frac{d}{d \cos \theta} \left[ (1 - \cos^2 \theta) \frac{df_1}{d \cos \theta} \right] + \left( \Lambda - \frac{m^2}{1 - \cos^2 \theta} \right) f_1 = 0 . \quad (2.46)$$

Diese hat nur eine reguläre Lösung (Nolting, 1994), wenn

$$\Lambda = l(l+1) \quad (2.47)$$

gilt, mit  $l$  als nicht-negativer ganzer Zahl und  $|m| \leq l$ . Die reguläre Lösung ist durch die zugeordneten Legendre-Polynome gegeben

$$f_1(\theta) = P_l^m(\cos \theta) . \quad (2.48)$$



**Abbildung 2.1.** Darstellung dreier Kugelflächenfunktionen mit dem harmonischen Grad  $l = 6$  und den zugehörigen azimutalen Ordnungen  $m = 0$  (links),  $m = 3$  (Mitte) und  $m = 6$  (rechts). Quelle: GONG Image Gallery.

Faßt man beides einschließlich eines geeigneten Skalenfaktors  $c_{lm}$

$$c_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \quad (2.49)$$

zusammen, so ist die Lösung von Gleichung (2.43) durch Kugelflächenfunktionen gegeben

$$f(\theta, \varphi) = (-1)^m c_{lm} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\varphi) \equiv Y_l^m(\theta, \varphi) . \quad (2.50)$$

Das Integral von  $|Y_l^m|^2$  über die Einheitskugel ist somit eins. Die Kugelflächenfunktionen werden durch den harmonischen Grad  $l$  und die azimutale Ordnung  $m$  charakterisiert (s. Abb. 2.1).

Somit können die abhängigen Variablen  $\xi_r$ ,  $p_1$ ,  $\Phi_1$  und  $d\Phi_1/dr$  in dem Differentialgleichungssystem (2.39) – (2.41) als

$$\phi(r, \theta, \varphi, t) = \phi(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(-i\omega t) \quad (2.51)$$

geschrieben werden. Den gemeinsamen Faktor  $Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(-i\omega t)$  kürzen wir aus den Gleichungen heraus. Das Resultat ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\omega^2 \left[ \rho_1 + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 \xi_r) \right] = \frac{l(l+1)}{r^2} (p_1 - \rho_0 \Phi_1) , \quad (2.52)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{dp_1}{dr} - \rho_1 g_0 + \rho_0 \frac{d\Phi_1}{dr} , \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 , \quad (2.54)$$

zusammen mit der Energiegleichung

$$\left( \delta p - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \delta \rho \right) = \rho_0 (\Gamma_{3,0} - 1) \delta q . \quad (2.55)$$

Auf Grund der sphärischen Symmetrie des Gleichgewichtsmodells sind die Ergebnisse nicht von der Wahl der Lage der Polarachse abhängig. Deshalb hängen die Gleichungen (2.52) – (2.55) nicht von der azimutalen Ordnung  $m$  ab. Bei einer anderen Wahl der Polarachse erhält man andere Kugelflächenfunktionen. Eine solche Kugelflächenfunktion mit Grad  $l$  ist als Linearkombination aller ursprünglichen Kugelflächenfunktionen mit dem gleichen Grad  $l$  darstellbar (Edmonds, 1974). Die willkürliche Wahl der Achse kann keinen Einfluß auf die Dynamik der Oszillationen haben, d. h. die Gleichungen müssen von  $m$  unabhängig sein, so wie es sich hier widerspiegelt.

Aus Gleichung (2.37) folgern wir, daß die Horizontalkomponente  $\xi_h$  der Verschiebung durch

$$\xi_h = \xi_h(r) \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} e_\varphi \right) \exp(-i\omega t) \quad (2.56)$$

gegeben ist. Für  $\xi_h$  gilt

$$\xi_h(r) = \frac{1}{r\omega^2} \left( \frac{1}{\rho_0} p_1 - \Phi_1 \right) . \quad (2.57)$$

Der Verschiebungsvektor  $\xi$  kann dann als

$$\xi = \left[ \xi_r Y_l^m(\theta, \varphi) e_r + \xi_h(r) \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} e_\varphi \right) \right] \exp(-i\omega t) \quad (2.58)$$

geschrieben werden.

## 2.5. Lineare, adiabatische Oszillationen

Für adiabatische Oszillationen ist der Wärmeaustausch mit der Umgebung  $\delta q = 0$ , und für Gleichung (2.55) ergibt sich

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\Gamma_{1,0} p_0} p_1 + \rho_0 \xi_r \left( \frac{1}{\Gamma_{1,0} p_0} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right) . \quad (2.59)$$

Dieses Ergebnis kann verwenden wir, um in den Gleichungen (2.52) – (2.54) die Störung  $\rho_1$  zu eliminieren. Für Gleichung (2.52) finden wir

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_{1,0} p_0} \frac{dp_0}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} - \frac{1}{c^2} \right] p_1 - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \Phi_1 , \quad (2.60)$$

wobei wir das Quadrat der adiabatischen Schallgeschwindigkeit  $c^2 = \Gamma_{1,0} p_0 / \rho_0$  eingesetzt haben. An dieser Stelle ist es nützlich, die charakteristische akustische Frequenz  $S_l$  oder auch *Lamb-Frequenz* durch

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2} =: k_h^2 c^2 \quad (2.61)$$

einzuführen. Die Länge der horizontalen Komponente des Wellenvektors bezeichnen wir mit  $k_h$ . Dann wird aus Gleichung (2.60)

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_{1,0} p_0} \frac{dp}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho_0 c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p_1 - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \Phi_1 . \quad (2.62)$$

Gleichung (2.53) ergibt

$$\frac{dp_1}{dr} = \rho_0 (\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{1}{\Gamma_{1,0} p} \frac{dp_0}{dr} p_1 + \rho_0 \frac{d\Phi_1}{dr} \quad (2.63)$$

mit  $N$  als Brunt-Väisälä-Frequenz, die gemäß

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_{1,0} p_0} \frac{dp_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right) \quad (2.64)$$

definiert ist. Schließlich ergibt sich aus Gleichung (2.54)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) = 4\pi G \left( \frac{p_1}{c^2} + \frac{\rho_0 \xi_r}{g} N^2 \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_1 . \quad (2.65)$$

Die Gleichungen (2.62), (2.63) und (2.65) bilden ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen vierter Ordnung für die vier abhängigen Variablen  $\xi_r$ ,  $p_1$ ,  $\Phi_1$  und  $d\Phi_1/dr$  und sind somit ein vollständiges System von Differentialgleichungen.

Alle Koeffizienten in den Gleichungen (2.62), (2.63) und (2.65) sind reell. Die Randbedingungen, die wir im folgenden Abschnitt betrachten werden, sind ebenfalls reell. Die Frequenz  $\omega$  tritt nur in Form von  $\omega^2$  auf und ist deshalb entweder rein reell ( $\omega^2 > 0$ ) oder rein imaginär ( $\omega^2 < 0$ ). Für reelles  $\omega$  können auch die Eigenfunktionen reell gewählt werden. Die zugehörigen Lösungen beschreiben ungedämpfte harmonische Oszillationen. Für imaginäres  $\omega$  wächst die Lösung entweder exponentiell an oder klingt exponentiell ab. Wir werden nur den oszillatorischen Fall  $\omega^2 > 0$  betrachten. Die Phase der Oszillationen setzen wir zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf null.

### 2.5.1. Randbedingungen

Als Ergänzung zu den Oszillationsgleichungen benötigen wir vier Randbedingungen, die wir in diesem Abschnitt betrachten,

Das Zentrum  $r = 0$  ist ein singulärer Punkt der Gleichungen, deshalb gibt es sowohl reguläre als auch singuläre Lösungen an diesem Punkt. Durch einen Potenzreihenansatz läßt sich zeigen, daß für  $l \neq 0$  sich der Radialteil  $\xi_r$  nahe  $r = 0$  wie  $r^{l-1}$  verhält. Des weiteren verhalten sich  $p_1$  und  $\Phi_1$  wie  $r^l$ . Für den Spezialfall radialer Oszillationen verschwindet der Koeffizient der führenden Ordnung von  $\xi_r$  und  $\xi_r$  verhält sich wie  $r$ . Allein aus geometrischen Gründen ist es einsichtig, daß bis auf  $l = 1$  wegen der sphärischen Symmetrie die Auslenkung im Zentrum verschwinden muß. Aus dem Potenzreihenansatz lassen sich zwei Beziehungen für die Lösung nahe  $r = 0$  ableiten. Im Speziellen kann man zeigen, daß für  $l > 0$

$$\xi_r \approx l \xi_h , \text{ für } r \rightarrow 0 . \quad (2.66)$$

Eine Randbedingung für die Oberfläche  $r = R$  ergibt sich aus der Stetigkeitsbedingung von  $\Phi_1$  und dessen Ableitung. Außerhalb der Sonne verschwindet die Störung der Dichte, d. h. dort gilt  $\rho_1 = 0$ . Dann kann die Poissongleichung analytisch gelöst werden. Die Lösung, die für  $r \rightarrow \infty$  gegen null strebt, ist

$$\Phi_1 \propto r^{-l-1} .$$

Konsequenterweise erfüllt  $\Phi_1$  dann die Differentialgleichung

$$\frac{d\Phi_1}{dr} + \frac{l+1}{r} \Phi_1 = 0 \text{ bei } r = R . \quad (2.67)$$

Die zweite Randbedingung für die Oberfläche ergibt sich aus der Annahme, daß die Sonne eine eindeutig festlegbare Oberfläche bei  $r = R$  besitze. Physikalisch ist es sinnvoll anzunehmen, daß auf diese Oberfläche keine Kräfte wirken. Folglich ist der Druck konstant an der gestörten Oberfläche. Als zweite Randbedingung benutzen wir somit das Verschwinden der Lagrangeschen Druckstörung, d. h.

$$\delta p = p_1 + \xi_r \frac{dp}{dr} = 0 \text{ bei } r = R . \quad (2.68)$$

Bis auf die hochfrequenten Oszillationen ist diese Annahme gut erfüllt. Aus dieser zweiten Randbedingung kann das Verhältnis zwischen der radialen und horizontalen Komponente des Verschiebungsvektors an der Oberfläche abgeschätzt werden. Die Amplitude der horizontalen Komponente ist durch Gleichung (2.57) gegeben. In den meisten Fällen ist die Störung im Gravitationspotential klein, wodurch wir aus den Gleichungen (2.68) und (2.20) näherungsweise folgende Beziehung erhalten

$$\frac{\xi_h(R)}{\xi_r(R)} = \frac{g_s}{R\omega^2} , \quad (2.69)$$

mit  $g_s$  als die an der Oberfläche wirkenden Gravitationsbeschleunigung. In dieser Näherung zeigt sich, daß der Oberflächenwert  $\xi_h/\xi_r$  nur von der Frequenz abhängt. Für den wichtigen Fall der solaren 5-Minuten-Oszillationen ist die Bewegung hauptsächlich vertikal.

### 2.5.2. p- und g-Modi

Dem Gleichungssystem (2.62), (2.63) und (2.65) ist nicht sofort anzusehen, daß es Wellen beschreibt. Vereinfacht man das System aber entsprechend der Cowling-Approximation (Cowling, 1941), d. h. vernachlässigt man die Störung des Gravitationspotentials, kann dieses allgemeine Differentialgleichungssystem vierter Ordnung auf ein System zweiter Ordnung reduziert werden

$$\frac{d\xi_r}{dr} = -\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\Gamma_1 H_p}\right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{S_l^2}{\omega^2 - 1}\right) p_1, \quad (2.70)$$

$$\frac{dp_1}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2) \xi_r - \frac{1}{\Gamma_1 H_p} p_1 \quad (2.71)$$

mit

$$\frac{1}{H_p} = -\frac{d \ln p_0}{dr} \quad (2.72)$$

als Druckskalenhöhe, d. h. der Strecke, über die sich der Druck in etwa um einen Faktor  $e$  ändert.

Schon ab geringer radialer Ordnung (Zahl der Knoten in radialer Richtung) variieren die Oszillationen auf Grund der Vorzeichenwechsel viel schneller mit  $r$  als die Größen des Gleichgewichtsmodells. Somit kann man in einer Näherung diejenigen Terme, die Ableitungen von Gleichgewichtsgrößen enthalten, vernachlässigen

$$\frac{d\xi_r}{dr} = \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{S_l^2}{\omega^2 - 1}\right) p_1, \quad (2.73)$$

$$\frac{dp_1}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2) \xi_r. \quad (2.74)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich – wieder unter Vernachlässigung langsam variierender Terme – zu einer einzigen Differentialgleichung zweiter Ordnung kombinieren

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right) \xi_r. \quad (2.75)$$

Diese Reduktion des Gleichungssystem mag sehr grob erscheinen, aber so läßt sich das oszillatorische Verhalten gut studieren. Schreibt man die Gleichung (2.75) als

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = -K(r) \xi_r \quad (2.76)$$

mit

$$K(r) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right) \quad (2.77)$$

sieht man, daß das lokale Verhalten von  $\xi_r$  vom Vorzeichen von  $K(r)$  abhängt. Ist  $K$  positiv, beschreibt  $\xi_r$  lokal eine oszillierende Funktion in  $r$ . Dort, wo  $K$  negativ ist, beschreibt die Lösung lokal gesehen ein exponentielles Verhalten mit  $r$ . Ausgehend von der Definition (2.77) läßt sich folgern, daß oszillatorisches Verhalten in den Fällen

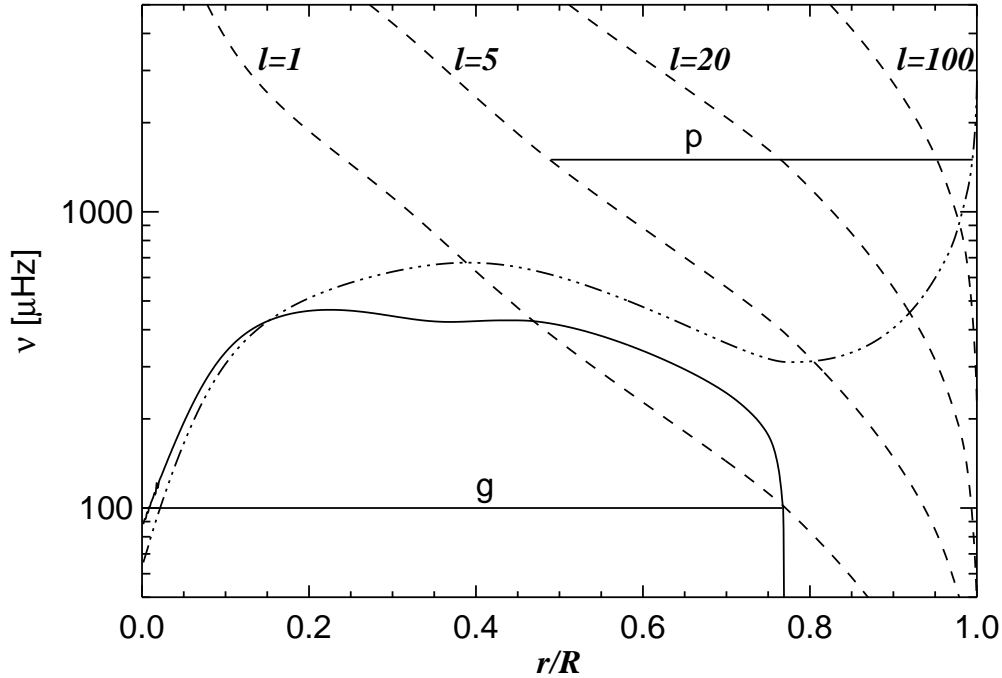
$$|\omega| > |N| \text{ und } |\omega| > S_l \quad (2.78)$$

sowie

$$|\omega| < |N| \text{ und } |\omega| < S_l \quad (2.79)$$

vorliegt. Exponentielles Verhalten ergibt sich in den Fällen

$$|N| < |\omega| < S_l \quad (2.80)$$



**Abbildung 2.2.** Die Brunt-Väisälä Frequenz  $N$  (—) und die Lamb-Frequenz  $S_l$  für die harmonischen Grade  $l = 1, 5, 20$  und  $100$  (---) aufgetragen gegen den Sonnenradius für ein Modell der gegenwärtigen Sonne. Die horizontalen Linien kennzeichnen den oszillatorischen Bereich für einen g-Modus mit Frequenz  $\omega/2\pi = 100 \mu\text{Hz}$  und einen p-Modus mit harmonischem Grad  $l = 5$  und Frequenz  $\omega/2\pi = 1500 \mu\text{Hz}$ . Die akustische Cut-Off-Frequenz  $\omega_A$  ist ebenfalls eingezeichnet (-·-·-·-·-·-·-).

und

$$S_l < |\omega| < |N|. \quad (2.81)$$

Für eine gegebene Eigenlösung mag es mehrere Bereiche geben, in denen oszillatorisches Verhalten möglich ist und die durch Bereiche mit exponentiellem Verhalten unterbrochen werden. Jedoch ist im Regelfall ein Bereich mit oszillatorischem Verhalten dominant, bei der die Lösung außerhalb davon exponentiell abfällt. Man spricht dann vom *Einschluß* der Lösung in diesen Bereich. Die Frequenz dieser Eigenlösung ist hauptsächlich durch den inneren Aufbau des Sonnenmodells innerhalb dieses Einschlußbereichs bestimmt. Durch die Randbedingungen kann es nur ein diskretes Spektrum an Eigenfrequenzen geben. Die Eigenlösungen repräsentieren stehende Wellen. Die Grenzen des Einschlußbereichs sind durch die Bedingung  $K(r) = 0$  festgelegt und werden als *Umkehrpunkte* bezeichnet.

Zwei Klassen von Oszillationsmodi sind aus dem Verhalten von  $K(r)$  zu erwarten:

- (1) Oszillationen mit hohen Frequenzen, die der Bedingung (2.78) genügen und *p-Modi* genannt werden.
- (2) Oszillationen mit niedrigen Frequenzen, die der Bedingung (2.79) genügen und *g-Modi* genannt werden.

Typische Einschlußbereiche von p- und g-Modi sind in Abbildung 2.2 dargestellt.

Für die p-Modi gilt, daß sie zwischen einem inneren Umkehrpunkt  $r = r_t$  und einem äußeren Umkehrpunkt nahe der Oberfläche eingefangen sind. Der äußere Reflexionspunkt ergibt sich aus dem Verhalten der Oszillationen in der Atmosphäre. Dort spielt die akustische Cut-Off-Frequenz  $\omega_A$  eine Rolle, die gemäß

$$\omega_A = \frac{c}{2} \left( \frac{g}{c^2} + \frac{N^2}{g} \right) \quad (2.82)$$

definiert ist. Die Tiefenabhängigkeit von  $\omega_A$  ist in Abb. 2.2 eingetragen. Der innere Umkehrpunkt  $r_t$  der p-Modi ergibt sich aus dem Verhalten von  $S_l$ . Er ist an der Stelle, wo  $S_l = \omega$  gilt. D. h. nach Gleichung (2.61)

$$\frac{c^2(r_t)}{r_t^2} = \frac{\omega^2}{l(l+1)}. \quad (2.83)$$

Damit ist der untere Umkehrpunkt  $r_t$  als Funktion von  $\omega$  und  $l$  festgelegt. Für p-Modi gilt typischerweise  $\omega \gg N$ , so daß man  $K$  durch

$$K(r) \approx \frac{1}{c^2} (\omega^2 - S_l^2) \quad (2.84)$$

abschätzen kann. Dann hängt das Verhalten der p-Modi allein vom Verlauf der Schallgeschwindigkeit mit  $r$  ab. Die p-Modi sind stehende akustische Wellen, bei denen der Druckgradient den wesentlichen Beitrag zur Rückstellkraft liefert. Deshalb kommt es auch zu der Bezeichnung p-Modi.

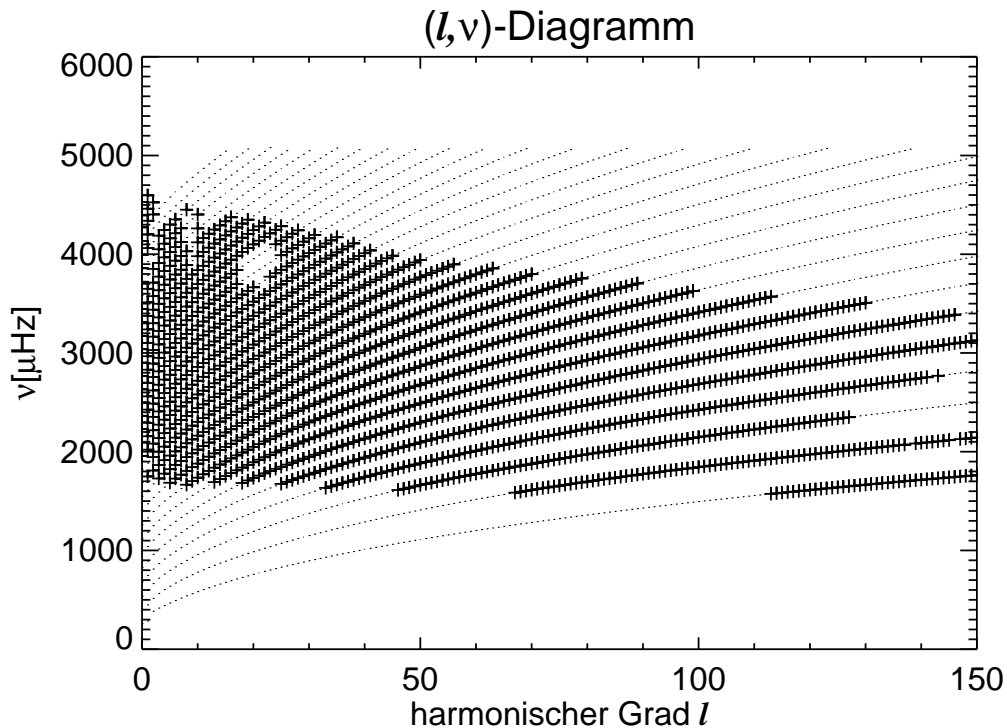
Der innere Umkehrpunkt der p-Modi läßt sich leicht verstehen, wenn man einen Modus als die Überlagerung von sich ausbreitenden Schallwellen betrachtet. Wandert eine Welle mit einem nicht verschwindenden horizontalen Wellenvektor in Richtung Sonnenzentrum, spürt die tiefer liegende Wellenfront eine höhere Schallgeschwindigkeit und bewegt sich somit schneller. Daraus folgt, daß die Ausbreitungsrichtung immer mehr von der radialen Richtung abweicht. Am Reflexionspunkt ist die Ausbreitungsrichtung horizontal. Die Abhängigkeit des Umkehrpunktes  $r_t$  vom harmonischen Grad und der Frequenz des Modus ist von großer Bedeutung für die Untersuchung des Sonneninnern mittels der 5-Minuten-Oszillationen, wie die p-Modi der Sonne auch genannt werden. Anhand von Abbildung 2.2 kann man ablesen, daß bei gegebener Frequenz Oszillationen mit niedrigem Grad  $l$  und bei gegebenem  $l$  Oszillationen mit höherer Frequenz tiefer in die Sonne eindringen. Für kleines  $l$  liegt  $r_t$  sehr nahe am Zentrum. Für immer höheres  $l$  rückt der Umkehrpunkt in Richtung Oberfläche. Für  $l > 40$  liegt der untere Umkehrpunkt immer in der Konvektionszone, die etwa 0.29 Sonnenradien tief ist. Aus Gleichung (2.84) folgt, daß  $K$  mit der Frequenz zunimmt. Damit erhöht sich auch die Zahl der Knoten, d.h die radiale Ordnung der Eigenfunktionen. Daraus folgt, daß die Frequenz mit der radialen Ordnung steigt.

Für g-Modi ist der Umkehrpunkt durch die Bedingung  $N = \omega$  festgelegt. Wie man aus Abbildung 2.2 ablesen kann, gibt es somit zwei Umkehrpunkte. Der eine ist sehr nahe dem Sonnenzentrum und der andere direkt unterhalb des Bodens der Konvektionszone. Für höhere Frequenzen liegt der obere Umkehrpunkt tiefer in der Sonne. Die Umkehrpunkte selbst sind rein frequenzabhängig, eine Abhängigkeit von  $l$  gibt es in dieser Abschätzung nicht. Für g-Modi mit hoher Ordnung gilt typischerweise  $\omega^2 \ll S_l^2$  und  $K$  ist dann

$$K(r) \approx \frac{1}{\omega^2} (N^2 - \omega^2) \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (2.85)$$

womit das Verhalten der g-Modi durch die Brunt-Väisälä-Frequenz und deren Abhängigkeit von  $r$  bestimmt ist. Die Schwerkraft, die auf die Störungen in der Dichte wirkt, stellt den Hauptbeitrag zur Rückstellkraft, weshalb sich die Bezeichnung g-Modi ergibt. Diese Schwingungen sind eingeschlossene Schwerewellen. Der Einschlußbereich liegt im Gegensatz zu den p-Modi tief im Sonneninnern. Der experimentelle Nachweis von g-Modi steht noch aus (Appourchaux et al., 2001). Es ist aber offensichtlich, daß man mittels g-Modi das Sonnenzentrum im Detail studieren könnte, was mit p-Modi nur beschränkt möglich ist.





**Abbildung 2.3.** Eigenfrequenzen eines Standardsonnenmodells als Funktion des harmonischen Grads. Die mit Kreuzen markierten Frequenzen sind die vom GONG Projekt auf der Sonne eindeutig nachgewiesenen Eigenfrequenzen.

Für die Untersuchung der Konvektionszone können wir uns auf die p-Modi beschränken. Wenn wir von nun an von solaren Oszillationen sprechen, seien allein die p-Modi gemeint.

## 2.6. Abhängigkeit der Frequenzen vom Gleichgewichtsmodell

Das in den vorangegangenen Abschnitten hergeleitete Randwertproblem, welches auch ein Eigenwertproblem ist, läßt sich numerisch lösen und besitzt nicht-triviale Lösungen für diskrete Werte in  $\omega$ . Abbildung 2.3 zeigt die Eigenfrequenzen eines Standardsonnenmodells in Abhängigkeit vom harmonischen Grad. Zusätzlich sind beobachtete Eigenfrequenzen mit aufgetragen (die Lücke links oben entsteht, weil diese Oszillationen in der spektralen Leistungsdichte nicht aufgelöst werden können). Jede Eigenfrequenz entspricht einem Oszillationsmodus, dessen Eigenfunktion beschreibt die Variation der Störungen  $\xi_r$ ,  $p_1$ , usw. mit  $r$ . Da das Gleichungssystem homogen ist, ist die Lösung nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. D. h. die wahre Amplitude der Bewegung kann nicht berechnet werden. Diese ist durch nicht-lineare Effekte oder durch eine externe Anregung festgelegt. Die numerischen Eigenfunktionen geben die Verteilung der Amplitude innerhalb eines Sterns an und können so zusammen mit Beobachtungen der Oberflächenamplitude mit der Amplitude im Innern in Beziehung gesetzt werden.

### 2.6.1. Abhängigkeiten der Oszillationen vom inneren Aufbau

Wenden wir uns der Frage zu, wovon die Frequenzen der solaren Oszillationen abhängen. Die Koeffizienten der adiabatischen Oszillationsgleichungen (2.62), (2.63) und (2.65) sind offensichtlich vom inneren Aufbau des Gleichgewichtsmodells abhängig. Und dies ist gerade die Grundlage, um

die beobachteten Frequenzen zur Untersuchung des inneren Aufbaus der Sonne heranziehen zu können. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß die Koeffizienten von den Gleichgewichtsgrößen Dichte  $\rho_0$ , Druck  $p_0$ , Adiabatenkoeffizient  $\Gamma_{1,0}$  und Schwerebeschleunigung  $g_0$  als Funktion von  $r$  abhängen. Das Gleichgewichtsmodell genügt aber auch den Gleichungen des inneren Aufbaus der Sterne (2.20) – (2.24). Zusätzlich dürfen wir annehmen, daß Masse und Radius vorgegeben sind, die beide für die Sonne mit hoher Genauigkeit bekannt sind. Wenn  $\rho_0(r)$  bekannt ist, ergibt sich  $g_0(r)$  aus Gleichung (2.21). Damit läßt sich die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts integrieren, womit sich wiederum  $p_0(r)$  ergibt. Somit verbleiben von dem ganzen Satz an Variablen die voneinander unabhängigen Funktionen  $\rho_0(r)$  und  $\Gamma_{1,0}(r)$ . Die adiabatischen Oszillationsfrequenzen werden durch diese beiden Funktionen festgelegt. Im Umkehrschluß erhält man aus der Beobachtung der Oszillationsfrequenzen Informationen über  $\rho_0$  und  $\Gamma_{1,0}$ .

Jedes andere Paar von unabhängigen Modellvariablen, die direkt in Beziehung zu  $\rho_0$  und  $\Gamma_{1,0}$  stehen, kann ebenfalls verwendet werden, um aus den Oszillationsfrequenzen Rückschlüsse über den inneren Aufbau der Sonne zu ziehen. Da die beobachteten Oszillationen die Eigenschaften stehender akustischer Wellen besitzen, hängen ihre Frequenzen vom Verhalten der Schallgeschwindigkeit  $c$  ab. Somit wäre es nur natürlich, die Schallgeschwindigkeit  $c$  als eine der Variablen in Kombination mit beispielsweise  $\rho_0$  oder  $\Gamma_{1,0}$  zu verwenden. Analysiert man die beobachteten Oszillationsfrequenzen, kann man umgekehrt die Schallgeschwindigkeit im Sonneninnern bestimmen.

### 2.6.2. Tiefe der Konvektionszone

In dem Standardsonnenmodell, das wir als Gleichgewichtsmodell benutzen (Christensen-Dalsgaard, 1996), ist die Konvektionszone  $0.288 R$  tief. Will man eine tiefere Konvektionszone erhalten, ohne jedoch die Oberflächeneigenschaften des Sonnenmodells zu verändern – diese sollen weiterhin mit den Beobachtungswerten übereinstimmen –, so muß man die Eingabeparameter, von denen der innere Aufbau der Sonne abhängt, leicht verändern. Entsprechend werden dann Größen wie die Schallgeschwindigkeit, der Druck, die Dichte und die Temperatur angepaßt. Einer dieser Eingabeparameter ist die Opazität. Über die Schallgeschwindigkeit  $c = \sqrt{T(\kappa)}$  hängen die Eigenschaften der solaren Oszillationen von Veränderungen in  $\kappa$  ab.

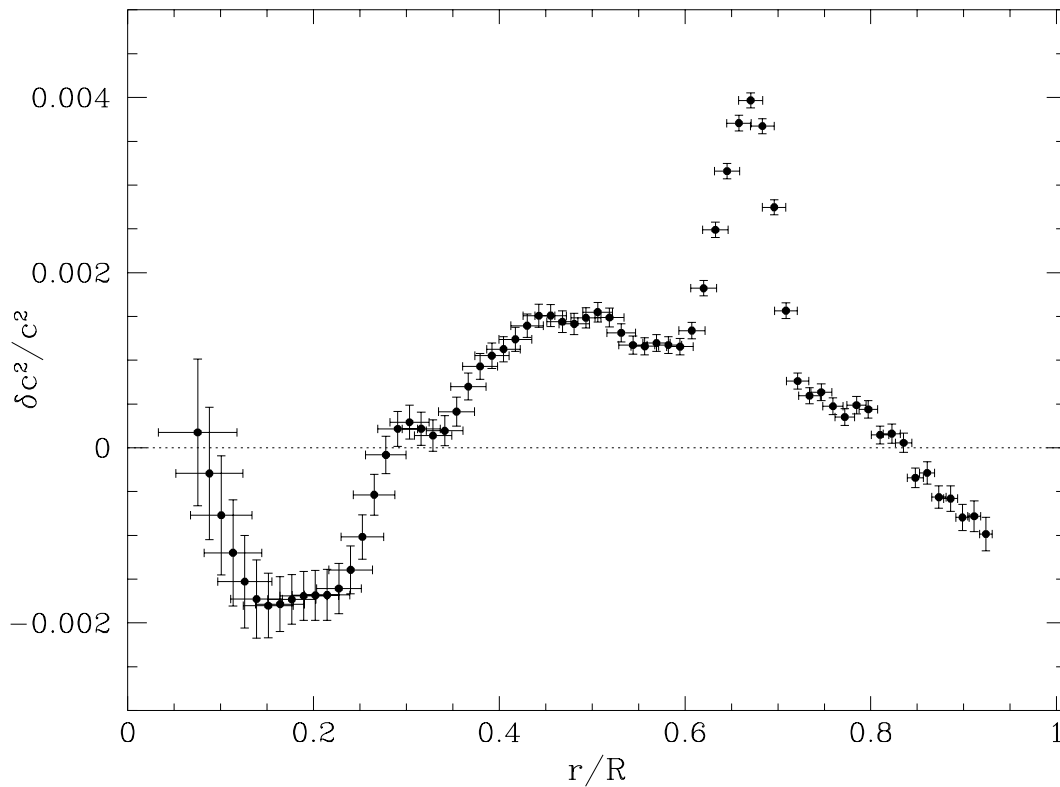
Umgekehrt läßt sich aus den gemessenen Oszillationsfrequenzen durch Inversion die Schallgeschwindigkeit bestimmen und so ein *seismisches Modell* des inneren Aufbaus der Sonne gewinnen. Vergleicht man das seismische Modell mit dem Standardsonnenmodell, stimmen beide sehr gut miteinander überein (Abb. 2.4). Die größte Diskrepanz zeigt sich in dem Peak am Boden der Konvektionszone. Dort sind Korrekturen an die Schallgeschwindigkeit notwendig.

Wir wollen hier kurz zeigen, wie das Sonnenmodell auf Veränderungen in der Opazität reagiert. Dazu berechnen wir zwei Sonnenmodelle. Wir verwenden die Opazitätstabellen von Iglesias et al. (1992) und den Wert  $Z = 0.01895$  für den Anteil der schweren Elemente. Die Modelle werden so kalibriert, daß der Radius  $R = 6.9599 \cdot 10^{10}$  cm und die Oberflächenleuchtkraft  $L = 3.846 \cdot 10^{33}$  erg/s zum angenommenen Alter von 4.6 Mrd. Jahren betragen. Die berechneten Modelle entsprechen dem gegenwärtigen Stand der Konstruktion von Sonnenmodellen wie von Christensen-Dalsgaard (1996) beschrieben. Als Referenzmodell berechnen wir zuerst das *Model S* von Christensen-Dalsgaard (1996). Dieses war auch das Referenzmodell zum seismischen Modell in Abbildung 2.4. In einem Vergleichsmodell haben wir als zweites die Opazität  $\kappa$  in einem engen Bereich um den Ort mit Temperatur  $T_0$  gemäß

$$\log \kappa = \log \kappa_0 + A e^{-(\log T - \log T_0)^2 / \Delta^2} \quad (2.86)$$

verändert. Die Parameter  $A$  und  $\Delta$  bestimmen die Stärke und die Breite der Opazitätsveränderung.

Abbildung 2.5 zeigt einen Vergleich des Referenzmodells mit dem veränderten Modell. Bei dem veränderten Modell wurde die Opazität an der Stelle  $T_0$ , die im Referenzmodell dem Boden

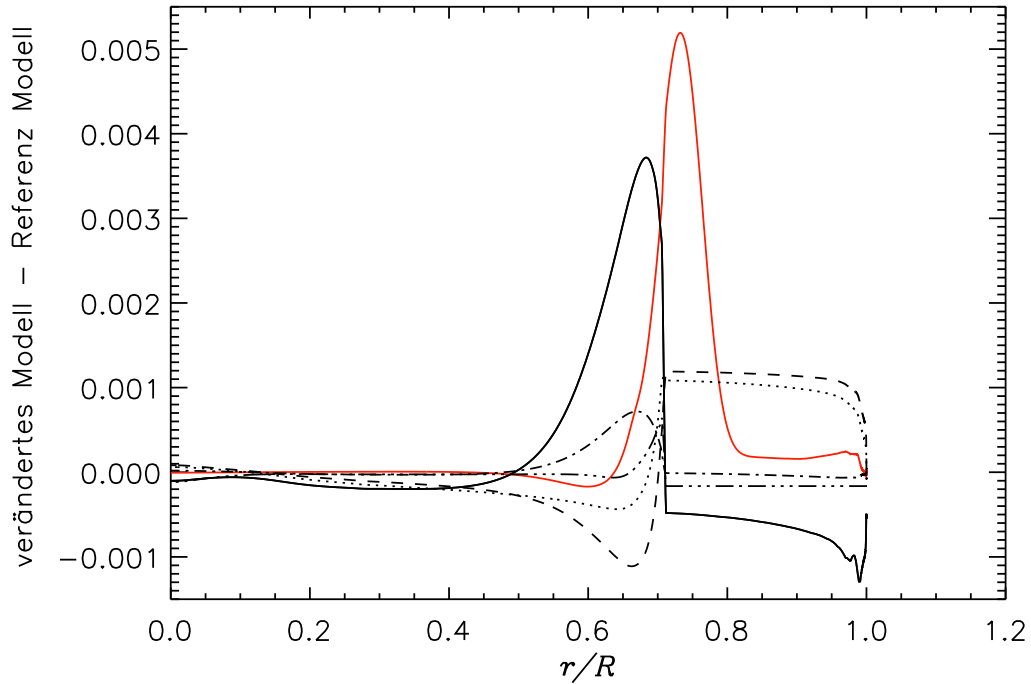


**Abbildung 2.4.** Korrekturen an das Quadrat der Schallgeschwindigkeit eines Referenzmodells, die sich durch Inversion der Differenzen zwischen beobachteten Frequenzen und den Frequenzen des Modells ergeben. Die vertikalen Balken sind die Fehler im Ergebnis auf Grund von Meßfehlern in den Beobachtungsdaten (nahe der Oberfläche) und mangelnder Daten (im Zentrum). Die horizontalen Balken sind ein Maß für die Auflösung der Inversion. Als Referenzmodell dient Model S von Christensen-Dalsgaard (1996). Quelle: Kosovichev et al. (1997).

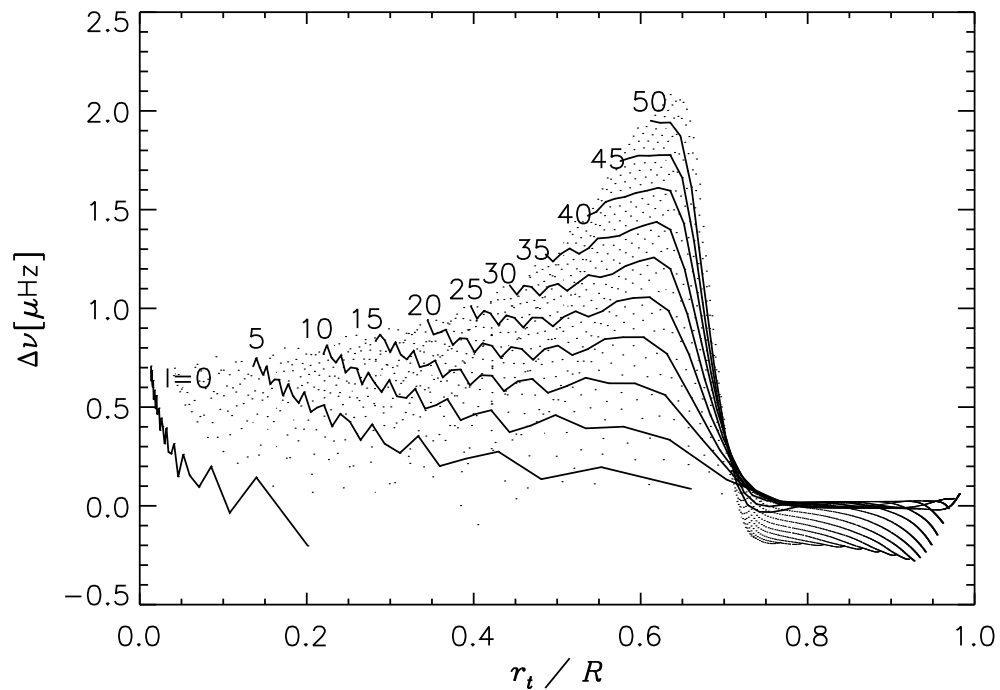
der Konvektionszone entspricht, um 0.025% erhöht ( $\log T_0 = 6.3$ ,  $\Delta = 0.1$ ). Das veränderte Modell hat eine Konvektionszone der Tiefe  $0.291R$ . Man erkennt, daß man im veränderten Modell einen ähnlichen Peak in  $\delta c^2$  am Boden der Konvektionszone erzeugen kann. Auf Grund der Veränderungen in der Schallgeschwindigkeit werden die Oszillationsfrequenzen dahingehend beeinflusst, daß nun das seismische Modell entsprechende korrigierte Werte am Boden der Konvektionszone liefert. Abbildung 2.6 zeigt die resultierenden Frequenzverschiebungen aufgetragen gegen die Eindringtiefe  $r_t$ .

Mit steigender radialer Ordnung  $n$  sind die Frequenzverschiebungen bei festem  $l$  größer, da diese Modi tiefer in die beeinflussten Bereiche vordringen. Betrachtet man Modi mit dem gleichen Umkehrpunkt  $r_t$ , aber mit höherem  $l$ -Wert, so ist die Frequenzverschiebung wegen der entsprechenden Aufenthaltsdauer der Modi ebenfalls größer.

Wir sehen, daß ein Sonnenmodell durch Anpassen der Tiefe der Konvektionszone konstruiert werden kann, das mit dem seismischen Sonnenmodell sehr gut übereinstimmt. Allerdings ist die Physik, die mit einer solchen Veränderung verbunden ist, noch nicht vollständig verstanden. In diesem Zusammenhang wird auch das Absinken von Helium durch Gravitation ins Sonnenzentrum diskutiert. Denn die Diskrepanzen in  $\delta c^2$  treten dort auf, wo das Molekulargewicht  $\mu$  variiert. Glättet man diese Variation, so werden die Diskrepanzen ebenfalls verringert (Morel et al., 1997).



**Abbildung 2.5.** Eine um 0.025% erhöhte Opazität (rote Linie:  $\delta_r \log \kappa$  skaliert mit dem Faktor 0.1) am Boden der Konvektionszone führt zu Unterschieden z. B. in der Schallgeschwindigkeit ( $\delta_r \log c^2$ : —), der Dichte ( $\delta_r \log \rho$ : - - -), der Temperatur ( $\delta_r \log T$ : - · - · - ·), dem Druck ( $\delta_r \ln p$ : ·····) und der Wasserstoffhäufigkeit ( $\delta_r \ln X$ : ···-····-) bei jeweiligem  $r/R$  zwischen dem geänderten Modell und dem Referenzmodell.



**Abbildung 2.6.** Frequenzunterschied  $\Delta\nu$  zwischen den Modi des veränderten Modells und des Referenzmodells aufgetragen gegen den Umkehrpunkt  $r_t$ . Frequenzverschiebungen der Modi mit den gleichen harmonischen Graden  $l = 0, 5, 10, \dots, 50$  sind mit durchgezogenen Linien verbunden.

## Konvektion auf der Sonne

In den äußeren Schichten der Sonne übernimmt die Konvektion den Transport der im Sonnenzentrum erzeugten Energie. Im Gleichgewichtsmodell zeigt sich dies darin, daß für  $0.7 \lesssim r/R \lesssim 1$  die Schwarzschild-Ungleichung

$$\frac{dT}{dr} < \left( \frac{dT}{dr} \right)_a$$

für konvektive Instabilität gilt. Dabei ist  $\left( \frac{dT}{dr} \right)_a$  der Temperaturgradient für eine adiabatische Schichtung (Schwarzschild, 1906). Im Gegensatz zum stabil geschichteten Sonneninnern, wo die Energie durch Strahlung transportiert wird, ist die Konvektion in diesem äußeren Bereich der Sonne der effektivere Energietransportmechanismus.

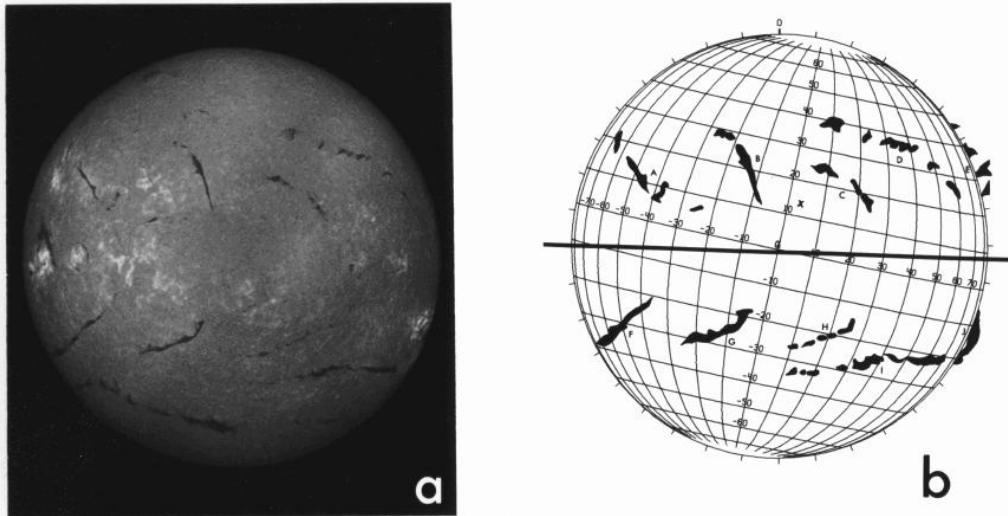
### 3.1. Längenskalen der solaren Konvektion

Auf der Sonne spiegelt sich die Konvektion u.a. in der *Granulation* wider. Diese besteht aus hellen polygonalen Granulen, die durch dunkle intergranulare Räume getrennt sind. Die Granulen sind kleinskalige Konvektionszellen mit einer Ausdehnung von etwa 1000 km und einer Lebensdauer von etwa fünf bis zwölf Minuten. Die Ausdehnung der intergranularen Räume ist mit 200 bis 400 km geringer. Die Granulen sind Orte von starken Aufwärtsströmungen. Mittels des Dopplereffekts werden Geschwindigkeiten von etwa 1 km/s (rms) spektroskopisch gemessen (Nesis & Mattig, 1989). Heißes Gas wird so an die Oberfläche transportiert, strahlt dort die Energie ab und sinkt abgekühlt in den intergranularen Räumen wieder in das Sonneninnere.

Neben der Granulation unterscheidet man weitere zellulare Strukturen auf der Sonne. Diese sind die Mesogranulation (November et al., 1981) und die Supergranulation (Leighton et al., 1962) auf mittleren Längenskalen. Die Verteilung der Energiedichte der konvektiven Bewegungen im Bereich zwischen  $6''$  und  $60''$  beschreiben UeNo & Kitai (1998). Bei  $15''$  ist ihren Daten zufolge die Mesogranulation zu finden, zwischen  $31''$  und  $36''$  die Supergranulation. Der rms-Wert für die vertikale Geschwindigkeit der Mesogranulation beträgt nahe der Oberfläche etwa 60 m/s. Der Materiefluß durch die Supergranulation verläuft nahe der Oberfläche überwiegend horizontal mit einer Geschwindigkeit von bis zu 500 m/s.

In weiteren Arbeiten, u.a. von Hathaway (2000) zeigen sich andeutungsweise auf großen Längenskalen Konvektionszellen mit einer Ausdehnung, die in etwa der Tiefe der Konvektionszone entspricht. Die Hypothese, daß solche *Giant Convective Cells* oder *Giant Cells* als nächstgrößere konvektive Elemente über der Supergranulation existieren, geht weit zurück. Simon & Weiss (1968) postulieren Giant Cells auf der Basis der Mischungswegtheorie. Aber trotz der Suche von mehreren Gruppen (Schröter et al., 1978; LaBonte et al., 1981; Cram et al., 1983; Robillot et al., 1984; Bertello & Restaino, 1993) konnten Giant Cells nicht eindeutig nachgewiesen werden.

Wagner & Gilliam (1976) berichten von einem möglichen Beispiel von Giant Cells (Abb. 3.1). Sie beobachteten eine auffallende Symmetrie in der *„Anordnung, Orientierung und Größe von Filamenten.“* Jeweils ein Paar von Filamenten befindet sich in einem Sektor des Sonnenglobus. Davon ist ein Partner nördlich, der andere südlich des Sonnenäquators. Ihren Daten zufolge



**Abbildung 3.1.** Symmetrische Anordnung von Filamenten auf der Sonne. Aufnahme vom 11. Juni 1972 am Sacramento Peak Observatorium. Quelle: Wagner & Gilliam (1976).

schlagen Wagner & Gilliam (1976) eine Wellenzahl von fünf für das regelmäßige sektorale Muster vor. Konvektive Strömungen in Sektoren werden oftmals auch als *Banana-Cell-Convection* bezeichnet. Die Strömungsgeschwindigkeit in Giant Cells muß aber deutlich geringer sein als die in den Supergranulen, andernfalls würde man sie finden können (s. Kapitel 6).

Insgesamt gilt, daß großskalige konvektive Bewegungen, die tief in die Konvektionszone reichen, langsamer sind als die kleinskaligen, nahe an der Oberfläche vorzufindenden Strömungen.

All diese Beobachtungen legen die Schlußfolgerung nahe, daß es bevorzugte Längenskalen für die solare Konvektion gibt, die sich in zellularen Bewegungen widerspiegelt. Auf Grund der fast verschwindenden Viskosität des Gases in der solaren Hülle beobachtet man an der Sonnenoberfläche eher ein turbulentes Verhalten, d. h. die Konvektionszellen sind sehr kurzlebig.

Insgesamt reichen die Längenskalen der Konvektion auf der Sonne von den Kolmogorov-Mikroskalen am unteren Ende für lokale turbulente Bewegungen bis zur differentiellen Rotation, die von globalem Ausmaß ist. Dazwischen sind die Granulen, Supergranulen und Giant Cells angesiedelt. Die Zeitskalen der Konvektion decken mehrere Größenordnungen ab. So reichen sie von wenigen Minuten für die granulare "Overturn"-Zeit bis zu mehreren Wochen für die Skalen der Giant Cells. Das von Wagner & Gilliam (1976) beobachtete Phänomen hatte eine Lebensdauer von ca. vier Monaten.

### 3.2. Parametrisierung des Geschwindigkeitsfeldes

Auf Grund der vielen Freiheitsgrade ist es nicht möglich, die Konvektion analytisch so zu beschreiben, daß sie mit den Daten aus der Beobachtung übereinstimmt. Deshalb werden wir die Konvektion mit einem einfachen Modell beschreiben. Dieses Modell erfordert sinnvolle Annahmen und Einschränkungen für das betrachtete konvektive Geschwindigkeitsfeld.

Die erste Annahme ist, daß die betrachteten konvektiven Strukturen von *globaler Ausdehnung* sein sollen. Dazu zählen vor allem Konvektionsmuster, deren Strukturelemente sich wiederholen. Diese können, wie die Granulen, auch kleinskalig sein. Im Prinzip ist diese Überlegung sogar für alle Längenskalen gültig, auch für die turbulenten Komponenten auf den kleinsten

Skalen der Konvektion. Jedoch sind solche kleinskaligen konvektiven Bewegungen von kurzer Lebensdauer.

Als zweites nehmen wir für die Überlegungen im folgenden Kapitel zusätzlich an, daß die Konvektion stationär sei. Kleinskalige Konvektion mit kurzer Lebensdauer kann damit nicht in Einklang gebracht werden. Diese Annahme ist notwendig, um die Bewegungsgleichungen separieren zu können (siehe Abschnitt 4.2). Bei stationärer Konvektion erfährt jede akustische Welle, die in derselben Richtung durch ein gegebenes Gebiet propagiert, denselben konvektiven Einfluß. Die Eigenlösungen der Oszillationsgleichungen (2.62) – (2.65) sind im Fall  $m \neq 0$  laufende Wellen (für  $m = 0$  ist die Eigenlösung eine stehende Welle). Diese propagieren immer in der selben Richtung durch das Gebiet, so daß die Konvektion dort einen akkumulierenden Einfluß hat. In diesem Fall ist die verschobene Oszillationsfrequenz, die zu dieser sich ausbreitenden Welle gehört, zeitunabhängig. Betrachtet man eine Strömung, deren Zustand sich merklich innerhalb der Zeit ändert, die eine Schallwelle braucht, um einmal umzulaufen, dann ist auch der Effekt der Konvektion für zwei aufeinander folgende Passagen unterschiedlich. Es ist deshalb der Fall denkbar, bei dem sich die Effekte der Konvektion gegenseitig aufheben. Eine leicht veränderte stationäre Konvektion hätte eine etwas andere Frequenzverschiebung zur Folge. Effektiv führt eine veränderliche Konvektion zu einer Linienverbreiterung in den Leistungsspektren der Oszillationen. Wir werden dies in Kapitel 5 mit Störungstheorie für zeitabhängige Störungen diskutieren.

Nehmen wir an, daß sich die Oszillationen mit 100 km/s ausbreiten. Dann liegt die Umlaufdauer in der Größenordnung von einem Tag. Dies ist sehr viel kleiner als die Lebensdauer der von Wagner und Gilliam beobachteten sektoralen Konvektionszellen. Die Linienverbreiterung, die durch die zeitliche Variation der Konvektion hervorgerufen wird, kann deshalb für sehr langlebige Strömungsfelder vernachlässigt werden. Bei kurzlebigen konvektiven Bewegungen ist dagegen ein Beitrag zur Linienverbreiterung zu erwarten. Diese Linienverbreiterung wird in Kapitel 5 untersucht. Der Einfluß von sich zeitlich ändernden Komponenten der Konvektion auf die Resonanzfrequenzen kann mit den gefundenen Ergebnissen der vorliegenden Arbeit beschrieben werden.

Als eine weitere Annahme wollen wir die Divergenzfreiheit (3.1) für die betrachteten Geschwindigkeitsfelder fordern. Ist  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$  das Geschwindigkeitsfeld in der Konvektionszone, dann folgt schon aus der Stationaritätsbedingung, der das Standard-Sonnenmodell in Abschnitt 2.2 genügt, und aus der Kontinuitätsgleichung (2.2) die gewünschte Divergenzfreiheit

$$\nabla \cdot (\rho_0(r)\mathbf{v}_0(\mathbf{r})) = 0 . \quad (3.1)$$

Dies ermöglicht im folgenden die Verringerung der Freiheitsgrade (siehe Gleichung (3.5)). Lavelly & Ritzwoller (1992) folgern aus der Bedingung (3.1), daß der Energieaustausch von Oszillationen und Konvektion unterbunden wird (keine *Oszillations-Konvektions-Kopplung*). Das hat den Vorteil, Oszillationen und Konvektion getrennt betrachten zu können. Den konvektiven Strömungen ist es durch diese weitere Einschränkung – neben der Stationaritätsbedingung – nicht möglich, Schallwellen zu erzeugen.

In Kapitel 4 berücksichtigen wir in den gestörten Bewegungsgleichungen als weitere Einschränkung nur Terme bis zur *ersten Ordnung* in den Störungen. Das ist gleichbedeutend mit der Annahme relativ kleiner Konvektionsgeschwindigkeiten ( $\leq 1$  km/s). Nur so ist eine Behandlung mit Störungstheorie sinnvoll. Des weiteren wollen wir die seismisch gestörten Bewegungsgleichungen linearisieren und vernachlässigen die Advektion, die durch die Oszillationen verursacht werden. Wir nehmen deshalb an, daß die gesamte Auslenkung durch akustische Wellen klein gegenüber der Auslenkungen durch Konvektion während der Passage einer Welle ist. Die Übereinstimmung mit dieser Annahme wird mit zunehmender Tiefe unterhalb der Photosphäre besser (Christensen-Dalsgaard, 1998).

Betrachten wir die Konvektion gemäß diesen Annahmen als einen vorgegebenen stationären Hintergrund, dem die Schallwellen überlagert sind, so mag die Konvektion die Wellenfronten verformen, tauscht jedoch keine Energie mit den Schallwellen aus.

Für zeitabhängige Geschwindigkeitsfelder ist diese Annahme nicht mehr haltbar. Betrachtet man die Anregung von Schallwellen durch Konvektion, kommt es zum Austausch von Energie zwischen der Konvektion und den solaren Oszillationen. Die Energie der Konvektion wird aber dadurch kaum beeinflusst, da nur etwa  $10^{-7}$  % der kinetischen Energie eines aufsteigenden Gaspaketes (oder auch "konvektiven Eddies") während einer Schwingungsperiode in akustische Energie umgesetzt werden (Morse & Ingard, 1986). Die Erzeugung von Schallwellen bremst somit die Konvektion nicht ab. Ebenso ist die reale Konvektion nicht divergenzfrei.

Alle konvektiven Störungen werden relativ zum Gleichgewichtsmodell definiert. Die Störung, die hier im Mittelpunkt stehen soll, ist die des konvektiven Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}_0$ . Somit enthält  $\mathbf{v}_0$  keine Beiträge zum Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  der starren Rotation, die wir auch als Störung betrachten könnten (Christensen-Dalsgaard, 1998).

Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}_0$  kann in eine Summe aus einem poloidalen und einem toroidalen Feld zerlegt werden

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=-s}^s \mathbf{P}_s^t(r, \theta, \varphi) + \mathbf{T}_s^t(r, \theta, \varphi), \quad (3.2)$$

die beide nach

$$\mathbf{P}_s^t(r, \theta, \varphi) = u_s^t(r) Y_s^t(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + v_s^t(r) \nabla_h Y_s^t(\theta, \varphi), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{T}_s^t(r, \theta, \varphi) = -w_s^t(r) \mathbf{e}_r \times \nabla_h Y_s^t(\theta, \varphi) \quad (3.4)$$

von Kugelflächenfunktionen abhängen, wobei  $u_s^t(r)$ ,  $v_s^t(r)$  und  $w_s^t(r)$  die tiefenabhängigen Entwicklungskoeffizienten sind. Der toroidale Anteil kann herangezogen werden, um die differentielle Rotation zu beschreiben, da er nur Komponenten entlang einer Kugeloberfläche hat. Der poloidale Anteil hat  $r$ -,  $\theta$  und  $\varphi$ -Komponenten. Damit lassen sich Geschwindigkeitsfelder von Konvektionszellen wie Giant Cells oder Supergranulation beschreiben.

Aus der Divergenzfreiheit der Materieströmung (3.1) können wir die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho_0 u_s^t) = \rho_0 r s(s+1) v_s^t \quad (3.5)$$

für jedes  $s$  und  $t$  ableiten.

Da das Geschwindigkeitsfeld reell ist, gelten für die Koeffizienten die Beziehungen

$$u_s^{-t} = (-1)^t (u_s^t)^*, \quad v_s^{-t} = (-1)^t (v_s^t)^* \quad \text{und} \quad w_s^{-t} = (-1)^t (w_s^t)^* .$$

### 3.2.1. Tiefenabhängigkeit

Für die poloidalen Geschwindigkeitskomponenten ist nach (3.3) und (3.5) die Tiefenabhängigkeit allein durch die Koeffizienten  $u_s^t(r)$  gegeben.

Eindringen konvektiver Bewegungen in stabil geschichtete Lagen (*Overshoot* siehe Stix, 1991, Abschnitt 6.2.3) an der Oberfläche und am Boden der Konvektionszone wollen wir ausschließen. Das heißt die radiale Komponente des Geschwindigkeitsfeldes muß an der Oberfläche und am Boden der Konvektionszone verschwinden. Dies wird durch die Forderung

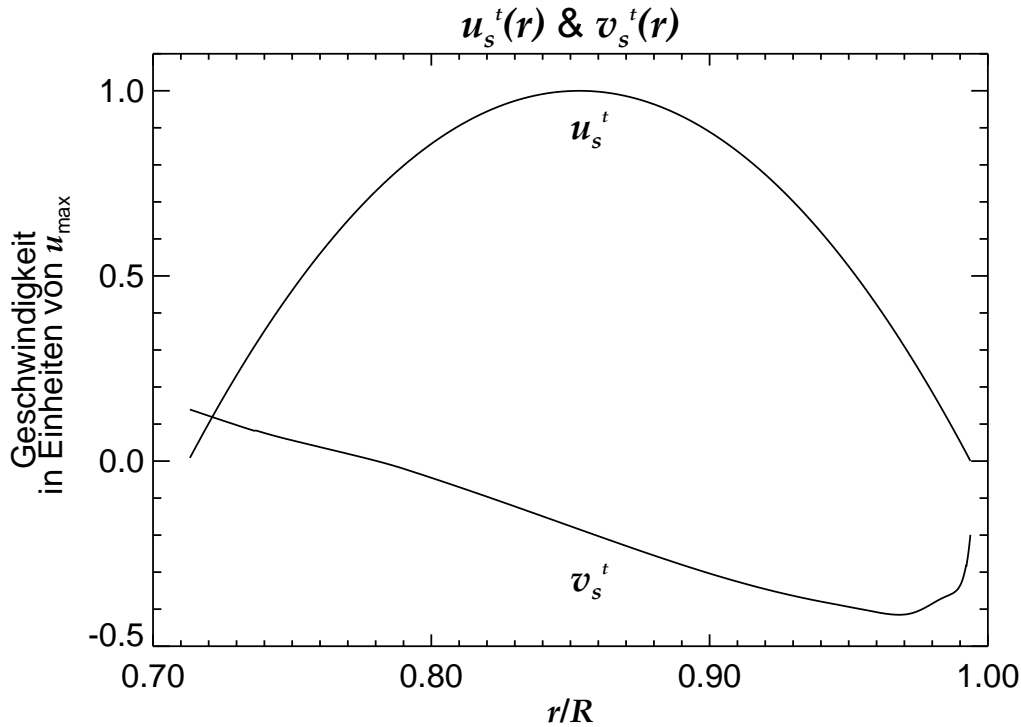
$$u_s^t(R) = u_s^t(r_{\text{conv}}) = 0 \quad (3.6)$$

für jedes  $s$  und  $t$  erreicht.

Die radiale Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit vom Ort in der Konvektionszone wollen wir durch zwei Ansätze modellieren. In dem einen Modell einer Konvektionszelle hängt die Geschwindigkeit parabolisch von der Tiefe ab. Das Maximum der radialen Geschwindigkeit liegt in der Mitte der Konvektionszone. Wir wählen somit

$$u_s^t(r) = u_{\text{max}} \frac{4(R-r)(r-r_{\text{conv}})}{(R-r_{\text{conv}})^2} \quad \text{für} \quad r_{\text{conv}} \leq r \leq R \quad (3.7)$$





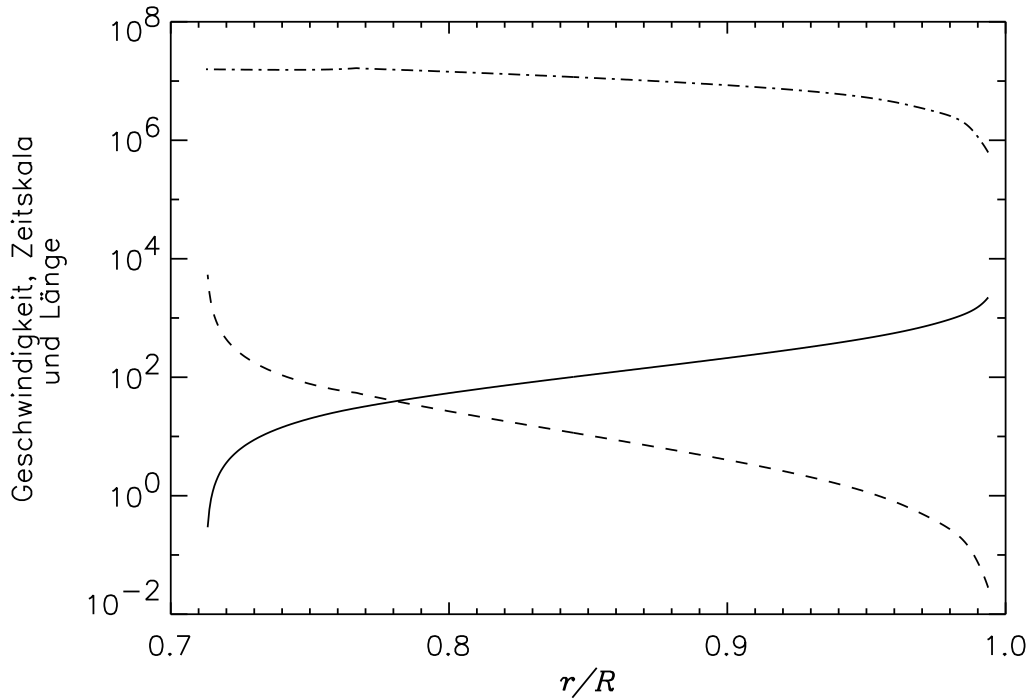
**Abbildung 3.2.** Die tiefenabhängigen Entwicklungskoeffizienten  $u_s^t(r)$  und  $v_s^t(r)$  der radialen und horizontalen Komponente eines poloidalen Geschwindigkeitsfeldes mit harmonischem Grad  $s = 8$ . Die zur Berechnung von  $\rho_0$  verwendete Dichte entstammt dem Model S von Christensen-Dalsgaard (1996).

und  $u_s^t(r) = 0$  außerhalb dieses Intervalls. Abbildung 3.2 zeigt eine Darstellung von  $u_s^t(r)$  und dem entsprechenden  $v_s^t(r)$  für  $s = 8$ .

In dem zweiten Modell wählen wir eine Geschwindigkeitsprofil, dessen Amplitude vom *Mischungsweg* abhängt. Der Mischungsweg ist die Wegstrecke innerhalb der sich eine durch Konvektion auftreibende Gasblase mit ihrer Umgebung vermischt und auflöst. Entsprechend der Mischungswegtheorie (Biermann, 1932; Vitense, 1953; Böhm-Vitense, 1958) läßt sich für die solare Konvektionszone die mittlere Geschwindigkeit gemäß Stix (1991) in Abhängigkeit von  $r$  bestimmen

$$u_s^t(r) = l \left[ \frac{g\delta}{8T} \left( \left( \frac{dT}{dr} \right)' - \frac{dT}{dr} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Die auftretenden Größen  $\delta$  und  $(dT/dr)'$  sind die Variation des mittleren Molekulargewichts mit der Temperatur und der Temperaturgradient, welcher der mittleren Temperaturveränderung innerhalb der aufsteigenden Gaspakete entspricht. Das Maximum dieses Geschwindigkeitsprofils liegt an der Oberfläche wie Abbildung (3.3) zeigt. Zusätzlich sind noch die charakteristische Zeit- und Längenskala konvektiver Eddies als Funktion der Tiefe der Konvektionszone aufgetragen (siehe Abschnitts 3.1). In Abbildung 3.4 sind ein Äquator- und ein Meridianschnitt durch ein Geschwindigkeitsfeld mit  $s = t = 8$  (linkes und mittleres Bild) und ein Meridianschnitt für ein Feld  $s = 8, t = 0$  (rechtes Bild) dargestellt. Der tiefenabhängige Entwicklungskoeffizient  $u_s^t$  ist nur in der Konvektionszone von null verschieden. In der oberen Reihe ist  $u_s^t$  gemäß Gleichung (3.7) gewählt, in der unteren Reihe gemäß Gleichung (3.8).



**Abbildung 3.3.** Charakteristische Größen konvektiver *Eddies* basierend auf der Mischungswegtheorie nach Model S (Christensen-Dalsgaard, 1996). Dargestellt sind die mittlere Geschwindigkeit in m/s (—), die Zeitskala in s (---) und die charakteristische Länge in m als Funktion des Ortes in der Konvektionszone (· · · · ·).

### 3.3. Zeitabhängige Geschwindigkeitsfelder

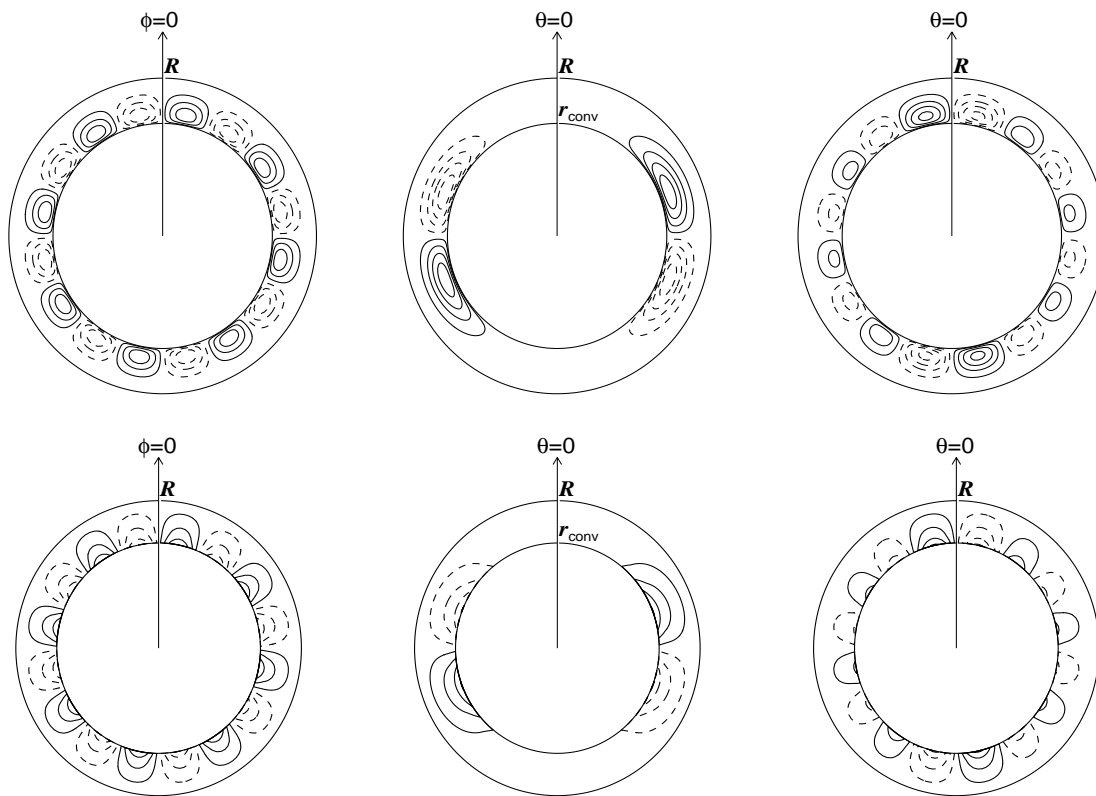
Über die zeitliche Entwicklung einer Konvektionszelle ist wenig bekannt. Nur die Lebensdauern der Zellen wurden untersucht. Deshalb wollen wir uns für die Beschreibung der Zeitabhängigkeit nicht-stationärer Geschwindigkeitsfelder vom Bild der zellularen Konvektion leiten lassen. Für die Beschreibung des Entstehens und Vergehens einer solchen Zelle wählen wir eine harmonische Zeitabhängigkeit. So, wie wir das Geschwindigkeitsfeld im stationären Fall nach Kugelflächenfunktionen entwickelt haben, wollen wir dies auch für das Modell des zeitabhängigen Geschwindigkeitsfeldes tun. Jeder Komponente dieser Entwicklung ordnen wir zusätzlich eine Zeitabhängigkeit zu

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=-s}^s \mathbf{v}_s^t(\mathbf{r}) (1 - e^{i\Omega_s^t t}). \quad (3.9)$$

Der Vektor  $\mathbf{v}_s^t$  entspricht einer Komponente des Geschwindigkeitsfeldes, das gemäß der Gleichungen (3.2) – (3.4) in poloidalen und toroidalen Anteil zerlegt und nach Kugelflächenfunktionen entwickelt wird. Dafür muß man wiederum annehmen, daß die Strömung anelastisch für  $\rho_0(r)$  und  $\mathbf{v}_s^t(\mathbf{r}, t)$  ist. Für die Kreisfrequenz  $\Omega_s^t$  fordern wir, um später Störungstheorie anwenden zu können,

$$\Omega_s^t \ll \omega_k, \quad (3.10)$$

wobei  $\omega_k$  die Kreisfrequenz der 5-Minuten-Oszillationen ist. Die untersuchten Geschwindigkeitsfelder variieren deshalb langsamer als die solaren Eigenschwingungen.



**Abbildung 3.4.** Äquator- (links) und Meridianschnitt bei  $\varphi = 0$  (Mitte) durch sektorale Konvektionsströmungen mit  $s = t = 8$ . Isolinien kennzeichnen die Orte gleichen Massenflusses  $|\rho_0 v|$ . Die Dichte  $\rho_0$  entstammt wieder Model S nach Christensen-Dalsgaard (1996) und  $u_s^t$  wurde entsprechend Gl. (3.7) gewählt (oben), bzw. entsprechend Gl. (3.8) (unten). Der innere Kreis markiert den Boden der Konvektionszone, der äußere die Sonnenoberfläche. Rechts: Meridianschnitt durch zonale Strömungen mit  $s = 8$ ,  $t = 0$  (rechts). Die Strömung im Uhrzeigersinn ist mit gestrichelten Linien eingezeichnet, die Strömungen entgegen dem Uhrzeigersinn mit durchgezogenen Linien.



## KAPITEL 4

# Störungstheorie

*Analogy is perhaps the physicist's most powerful conceptual tool for understanding new phenomena or opening new areas of investigation.*

*(V. L. Telegdi)*

In diesem Kapitel werden wir den Einfluß stationärer Strömungen in der Konvektionszone auf die solaren Oszillationen mit Hilfe von störungstheoretischen Methoden untersuchen. Deshalb empfiehlt es sich, an dieser Stelle mit einigen Überlegungen zur Störungstheorie zu beginnen. Einführende Literatur zur Störungstheorie findet sich in den Standard-Lehrbüchern über klassische Mechanik (Nolting, 1994; Goldstein, 1981) und Quantenmechanik (Gasirowicz, 1985), weshalb uns hier ein kurzer Überblick für den groben Zusammenhang reichen soll.

Ursprünglich stammt die Störungstheorie aus der klassischen Mechanik. Dort hatte die historische Entwicklung, Bewegungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen zu lösen, über die ersten Formulierungen von Newton zur Lagrangeschen und Hamiltonschen Formulierung geführt.

Die Hamiltonschen Gleichungen lassen sich mit Hilfe kanonischer Transformationen lösen. Die Idee dahinter ist, durch eine geschickte Transformation der generalisierten räumlichen Variablen und des generalisierten Impulses einfach zu integrierende Hamiltonsche Gleichungen zu erhalten. Eine Rücktransformation der Resultate liefert so die gesuchte Lösung für die ursprünglichen Größen. Dieses Verfahren ist allerdings bei den meisten realen Problemen schwer anzuwenden. Nebenbei kamen noch viele neue Ideen auf, um Bewegungsgleichungen zu lösen, u.a. Wirkungs- und Winkelvariablen oder der Hamilton-Jacoby-Formalismus. Aber oftmals sind mit allen Methoden nur einfachere Probleme lösbar. Für kompliziertere Probleme suchte man Näherungslösungen auf der Basis des Hamiltonformalismus. Dies war der Ausgangspunkt für die Entwicklung der Störungstheorie.

Das einzige Anwendungsgebiet dieser Methoden war für lange Zeit die Astronomie, wo das Zwei-Körper- oder Kepler-Problem mit Hilfe der Wirkungs- und Winkelvariablen (oder hier speziell mit den *Delaunaysche Elementen*) exakt gelöst wurde. Der Vorteil ist, daß die Wirkungs- und Winkelvariablen ein bedeutendes Hilfsmittel bei der Berücksichtigung der schwachen Störungskräfte anderer Planeten liefern. So konnte man sogar die Positionen und Bahnelemente der Planeten berechnen. Mit dem Aufstieg der Atomphysik zu einem neuen Forschungszweig fanden diese Methoden einen anderen Anwendungsbereich in Bohrs und Sommerfelds Quantentheorie. Beide verwendeten zur Beschreibung des Wasserstoffatoms Methoden aus der klassischen Mechanik, weil die Quantenbedingungen für das kreisende Elektron am einfachsten mit Wirkungs- und Winkelvariablen beschrieben werden. Eines der Ergebnisse war die exakte Bestimmung des quantisierten Energieschemas des vollständig entarteten Wasserstoffatoms.

Für die Berücksichtigung von Störkräften wurden in der Atomphysik die Methoden der Störungstheorie angewandt, um näherungsweise die Korrektur der Energierterme zu bestimmen.

In der Quantenphysik wurden die störungstheoretischen Methoden verbessert und z.B. neue Ideen an Variationsmethoden, Schrödingers Störungstheorie und auch die Störungstheorie für zeitabhängige physikalische Probleme entwickelt. Diese Methoden wollen wir nun für den Fall der solaren Oszillationen verwenden.

Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, kann man die solaren Oszillationen auf der Grundlage eines sphärisch symmetrischen Sonnenmodells bestimmen. Sie bilden einen diskreten Satz von entarteten orthonormalen Funktionen und sind proportional zu den zugeordneten Legendre-Polynomen.

Mathematisch gesehen ist die Bestimmung der Eigenfrequenzen eines solchen sphärischen Sonnenmodells sehr ähnlich zur Berechnung der Energieniveaus eines Wasserstoffatoms. Deshalb können alle Methoden der Störungstheorie aus der Quantenmechanik bei der Behandlung von Störungen des Sonnenmodells zur genaueren Bestimmung der Eigenschwingungen angewandt werden.

Wir wollen in den nächsten Abschnitten drei dieser Näherungsmethoden in ihrer Anwendung auf Störungen der solaren Oszillationen vorstellen.

#### 4.1. Störungstheorie nicht-entarteter Zustände

Für unsere Zwecke erweist sich die Schrödingersche Störungstheorie für zeitunabhängige Probleme als sehr nützlich. Sie ist angepaßt an Systeme, deren Hamiltonian additiv separiert werden kann.

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 . \quad (4.1)$$

Die zwei Systeme, die durch  $H$  und  $H_0$  beschrieben werden, sind zwar quantitativ verschieden, aber dennoch qualitativ ähnlich. Das Eigenwertproblem des selbstadjungierten Operators  $H_0$  kann komplett gelöst werden und die Eigenzustände  $|\xi_n\rangle$  zu den Eigenwerten  $\lambda_n$  bilden eine Orthonormalbasis, d. h.

$$H_0|\xi_n\rangle = \lambda_n^{(0)}|\xi_n\rangle , \quad (4.2)$$

$$\langle \xi_n|\xi_m\rangle = \delta_{nm} . \quad (4.3)$$

Die Störung  $\varepsilon H_1$  ist relativ klein, so daß die Entwicklung der interessanten Größen in dieser Störung nach einer endlichen Anzahl von Summanden abgebrochen werden kann. Das Ergebnis ist eine Näherungslösung des Problems. Für die korrigierten Eigenwerte gilt  $\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_n^{(2)} + \dots$

In der ersten Ordnung in  $\varepsilon$  sind die Korrekturen der Eigenwerte gleich dem Erwartungswert der Störung in den ungestörten Eigenzuständen.

$$\lambda_n^{(1)} = \langle \xi_n|H_1|\xi_n\rangle . \quad (4.4)$$

In der zweiten Ordnung in  $\varepsilon$  ist die Korrektur gegeben durch

$$\lambda_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \xi_m|H_1|\xi_n\rangle|^2}{\lambda_n - \lambda_m} . \quad (4.5)$$

Allerdings gilt dieses Ergebnis nur für nicht-entartete Zustände. Bei möglichen Entartungen ist zu beachten, daß Eigenwerte identisch sind, der Nenner verschwindet und die Korrekturterme divergieren.

#### 4.2. Störungstheorie entarteter Zustände

Wegen der Divergenz der Korrekturterme in (4.5) ist eine Erweiterung der Theorie für entartete Eigenzustände notwendig. Im Falle von Entartungen bilden die zu einem Eigenwert gehörenden Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis des Eigenraums. Um die Korrekturen der Eigenwerte

und Eigenzustände in erster Ordnung zu berechnen, ersetzen wir die Größen im ursprünglichen Eigenwertproblem (4.2) wie folgt:

$$\begin{aligned} H_0 &\rightarrow H_0 + \varepsilon H_1, \\ \lambda_n &\rightarrow \lambda_n + \varepsilon \lambda_n^{(1)}, \\ |\xi_n\rangle &\rightarrow |\xi_n\rangle + \varepsilon |\xi_n^{(1)}\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung nur erster Ordnungen in den Korrekturtermen

$$H_1 |\xi_n\rangle + H_0 |\xi_n^{(1)}\rangle = \lambda_n |\xi_n^{(1)}\rangle + \lambda_n^{(1)} |\xi_n\rangle. \quad (4.7)$$

Der allgemeine Zustand im Eigenraum  $n$  mit Dimension  $g_n$  ist gegeben durch die Linearkombination aller Basiszustände

$$|\xi_n\rangle = \sum_{\alpha=1}^{g_n} c_\alpha |\xi_{n\alpha}\rangle \quad (4.8)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten  $c_\alpha$ . Einsetzen in die Gleichung (4.7) ergibt

$$\sum_{\alpha} c_\alpha (H_1 - \lambda_n^{(1)}) |\xi_{n\alpha}\rangle + (H_0 - \lambda_n) |\xi_n^{(1)}\rangle = 0. \quad (4.9)$$

Multipliziert man diesen Ausdruck von links mit dem Zustand  $\langle \xi_{n\beta} |$ , verschwindet der zweite Summand, da  $H_0$  selbstadjungiert ist und die Zustände entartet sind. Die Entwicklungskoeffizienten  $c_\alpha$  ergeben sich somit aus dem homogenen Gleichungssystem

$$\sum_{\alpha} c_\alpha (H_{1n}^{\beta\alpha} - \lambda_n^{(1)} \delta_{\alpha\beta}) = 0 \quad (4.10)$$

mit

$$H_{1n}^{\beta\alpha} := \langle \xi_{n\beta} | H_1 | \xi_{n\alpha} \rangle \quad (4.11)$$

als Element einer hermiteschen Störmatrix mit den Spalten- und Reihenindizes  $\beta$  und  $\alpha$ . Die Korrektur in erster Ordnung der Störungstheorie nicht-entarteter Zustände (4.4) ist zu einer Matrix "entartet", deren Eigenwerte selbst die Eigenwertkorrekturen sind. Das charakteristische Polynom der Störmatrix hat den Rang  $g_n$  und somit möglicherweise  $g_n$  verschiedene Wurzeln, d. h.

$$\lambda_n^{(1)} \rightarrow \lambda_{nx}^{(1)} \text{ mit } x = 1, 2, \dots, g_n. \quad (4.12)$$

Demzufolge sind zwei Fälle denkbar:

- (1) Alle  $\lambda_{nx}^{(1)}$  sind paarweise verschieden, d. h. alle Entartungen sind aufgehoben.
- (2) Die Werte  $\lambda_{nx}^{(1)}$  sind noch vollständig oder teilweise entartet, womit uns Entartungen der Eigenzustände verbleiben.

#### 4.2.1. Störung solarer entarteter Eigenschwingungen

Die entartete Störungstheorie findet in der Helioseismologie bei der Untersuchung der differentiellen Rotation Anwendung. Bisher hatten wir angenommen, daß es in unserem Gleichgewichtsmodell der Sonne keine Geschwindigkeitsfelder gibt. Dies ist für ein Objekt wie die Sonne, die rotiert, ganz offensichtlich falsch. Im Besonderen hängt die beobachtete Oberflächenrotation von der Breite ab, was daher die Existenz eines Geschwindigkeitsfeldes nahe legt. Zusätzlich können andere großskalige Geschwindigkeitsfelder, wie jene, die die Konvektion verursacht, Einfluß auf die solaren Oszillationen haben. Ist dieser Einfluß bekannt, können durch Beobachtung der Oszillationen Geschwindigkeitsfelder im Sonneninnern untersucht werden.

Wir werden uns später sowohl mit dem Einfluß der differentiellen Rotation als auch mit dem Einfluß anderer großskaliger Strömungsfelder beschäftigen. Dazu betrachten wir an dieser Stelle ganz allgemein die Ableitung der Oszillationsgleichungen einschließlich des Einflusses eines Geschwindigkeitsfeldes.

Wir nehmen an, daß die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  klein genug sei, so daß wir quadratische Terme in  $\mathbf{v}_0$  vernachlässigen können. Wieder nehmen wir an, daß das Gleichgewichtsmodell stationär sei, d. h. alle lokalen Zeitableitungen verschwinden. Dies gelte auch für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}_0$ . Auf Grund dessen ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung (2.2)

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 . \quad (4.13)$$

Ebenso wird aus der Bewegungsgleichung (2.5) bei Vernachlässigung der Terme mit Ordnung  $|\mathbf{v}_0|^2$

$$0 = -\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g}_0 . \quad (4.14)$$

Dies beinhaltet auch, daß wir die Zentrifugalkraft vernachlässigen. Für die Sonne ist das Verhältnis zwischen der Zentrifugalkraft und der Oberflächenschwerkraft in der Ordnung von  $2 \times 10^{-5}$ . Somit ist der Fehler, den wir in Gleichung (4.14) gemacht haben, klein.

Die Geschwindigkeit an jedem Punkt im Raum können wir schreiben als

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 . \quad (4.15)$$

Dabei ist  $\mathbf{v}_1$  die Eulersche Störung in der Geschwindigkeit, die von den Oszillationen herrührt. Der Übersichtlichkeit wegen, haben wir die Störungen entweder durch den Index 1 oder durch den Index  $k$  gekennzeichnet. Dabei steht der Index  $k = (n, l, m)$  für das Tripel aus radialer Ordnung, harmonischem Grad und azimuthaler Ordnung. Die Verschiebung  $\xi_k$  muß relativ zum bewegten Medium betrachtet werden. Die Beziehung zur Lagrangeschen Störung  $\delta \mathbf{v}$  in der Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + (\xi_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 , \quad (4.16)$$

$d/dt$  ist die substantielle Zeitableitung,

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{\partial \xi_k}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_k . \quad (4.17)$$

Im Gegensatz zu dem Fall ohne Geschwindigkeitsfelder sind die lokale und die substantielle Zeitableitungen der Störung nun unterschiedlich.

Die gestörte Kontinuitätsgleichung wird zu

$$0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_1) \quad (4.18)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} [\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi_k)] + \nabla \cdot \{ \rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 [(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_k - (\xi_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_0] \} \quad (4.19)$$

unter Verwendung von (4.16) und (4.17). Dies läßt sich unter Zuhilfenahme von Gl. (4.13) reduzieren auf

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (A \mathbf{v}_0) = 0 , \quad (4.20)$$

wobei

$$A = \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi_k) . \quad (4.21)$$

Schreibt man dies wieder unter Zuhilfenahme von Gl. (4.13) als

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{\rho_0} \right) = 0 , \quad (4.22)$$

so können wir folgern, daß  $A = 0$ . D. h. Gleichung (2.27) behält ihre Gültigkeit.

Um die gestörte Bewegungsgleichung abzuleiten, benutzen wir die Gleichungen (2.4) und (4.19) und vernachlässigen die quadratischen Terme in  $\mathbf{v}_0$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} + 2\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial t} \right) = -\nabla p_1 + \rho_0 \mathbf{g}_1 + \rho_1 \mathbf{g}_0 . \quad (4.23)$$

Diese Gleichung ersetzt die Bewegungsgleichung (2.28). Des weiteren kann man zeigen, daß auch die Energiegleichung (2.30) weiterhin ihre Gültigkeit behält. Somit haben wir abgeleitet,



daß bei der vorgegebenen Genauigkeit die einzige Veränderung in den Oszillationsgleichungen die Hinzunahme des Terms mit der ersten Ableitung nach der Zeit von  $\xi_k$  in Gleichung (4.23) ist.

Da wir wieder ein zeitunabhängiges Gleichgewichtsmodell angenommen haben, können wir weiterhin die Zeitabhängigkeit gemäß  $\exp\{-i\omega_k t\}$  abspalten. Damit erhalten wir für die Bewegungsgleichung den Ausdruck

$$-\omega_k^2 \rho_0 \xi_k - 2i\omega_k \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_k = -\nabla p_1 + \rho_0 \mathbf{g}_1 + \rho_1 \mathbf{g}_0, \quad (4.24)$$

bei dem wir dieselben Symbole für die Amplitudenfunktionen verwendet haben.

In der gefundenen Bewegungsgleichung ist  $\mathbf{v}_0$  eine kleine Störung. Deren Einfluß können wir mit entarteter Störungstheorie behandeln. Wir schreiben die Gleichung (4.24) als

$$-\rho_0 \omega_k^2 \xi_k = H_0(\xi_k) + H_1(\xi_k) \quad (4.25)$$

wobei

$$H_0(\xi_k) = -\nabla p_1 + \rho_0 \mathbf{g}_1 + \rho_1 \mathbf{g}_0, \quad (4.26)$$

$$H_1(\xi_k) = 2i\rho_0 \omega_k (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_k. \quad (4.27)$$

Die Eigenfunktionen der solaren Oszillationen zum hermiteschen Operator  $H_0$  bilden ein vollständiges und orthogonales Erzeugendensystem mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int \rho_0 \xi_{k'}^* \xi_k d^3 r = N_k \delta_{kk'} \quad (4.28)$$

und

$$N_k = \int_0^R \rho_0 [\xi_r \xi_r' + l(l+1) \xi_h \xi_h'] r^2 dr. \quad (4.29)$$

Für adiabatische Oszillationen kann man die Eigenfunktionen  $\xi_r$  und  $\xi_r'$  als reelle Funktionen wählen (Abschnitt 2.5).

Die Überlegungen zur Störungstheorie entarteter Zustände sind somit auf die solaren Oszillationen übertragbar. Nach erster Ordnung Störungstheorie folgt für das Matrixelement der Störmatrix

$$H_{1,nl}^{mm'} = 2i\omega_k \frac{\int \rho_0 \xi_{k'}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_k d^3 r}{N_k}. \quad (4.30)$$

Die Eigenwerte dieser Matrix entsprechen den Korrekturen des Quadrates der Eigenfrequenz  $\omega_k^2$ .

#### 4.2.2. Einfluß differentieller Rotation

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Einfluß differentieller Rotation auf die Eigenfrequenzen der solaren Oszillationen. In Abschnitt 4.3 werden wir sehen, daß bis auf die Diagonaleinträge alle Matrixelemente der Störmatrix verschwinden. Somit ist die Störmatrix schon diagonal und die nicht-verschwindenden Elemente sind gleich den Korrekturen des Quadrates der Eigenfrequenz.

Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}_0$ , das wir in Gleichung (4.30) einsetzen müssen, ist das einer reinen Rotation mit Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = \Omega(r, \theta)$ , die von  $r$  und  $\theta$  abhängen kann. Alle Punkte in der Sonne sollen um eine gemeinsame Achse rotieren, die wir als Achse eines sphärischen Polarkoordinatensystems wählen. Dann gilt

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \Omega \times \mathbf{r}, \quad (4.31)$$

wobei wir hier den Rotationsvektor

$$\Omega = \Omega(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (4.32)$$

eingeführt haben.

Im nächsten Schritt müssen wir Gleichung (4.30) auswerten. Die Anwendung des Gradienten in Richtung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  auf die Vektorgröße  $\boldsymbol{\xi}$ , die gemäß Gleichung (2.50) von  $\varphi$  mit  $\exp\{im\varphi\}$  abhängt, ergibt

$$(\mathbf{v}_{\text{rot}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} = im\Omega\boldsymbol{\xi} + \Omega \times \boldsymbol{\xi} \quad (4.33)$$

oder auch

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} = im\Omega\boldsymbol{\xi} + \Omega \left[ -\xi_h \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r - \xi_h \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta + \left( \xi_r \sin \theta Y_l^m + \xi_h \cos \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi \right]. \quad (4.34)$$

Nun muß man noch von links mit  $\boldsymbol{\xi}^*$  multiplizieren und das Integral auswerten. Für den Zähler finden wir

$$\begin{aligned} R := & \int \rho_0 \boldsymbol{\xi}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} d^3r = im \int \rho_0 \Omega |\boldsymbol{\xi}|^2 d^3r \\ & + \int \rho_0 \Omega \left[ -\xi_r^* (Y_l^m)^* \xi_h \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} - |\xi_h|^2 \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right)^* \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right. \\ & \left. + \xi_h^* \xi_r \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} \right)^* Y_l^m + |\xi_h|^2 \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} \right)^* \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] d^3r. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m$  treten immer zusammen mit ihren komplex Konjugierten auf, so daß die  $\varphi$ -Abhängigkeit herausfällt und die Integration über  $\varphi$  trivial ist. Des weiteren ist die Ableitung von  $Y_l^m$  nach  $\varphi$  proportional zu  $im$ , so daß der gesamte Zähler  $im$  als Faktor enthält und zusammen mit (2.50) geschrieben werden kann als

$$R = im\pi c_{lm}^2 R_{nlm} \quad (4.36)$$

mit

$$\begin{aligned} R_{nlm} = & \int_0^\pi \sin \theta \int_0^R \left\{ |\xi_r(r)|^2 P_l^m(\cos \theta)^2 + |\xi_h(r)|^2 \left[ \left( \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta P_l^m(\cos \theta)} \right] \right. \\ & - P_l^m(\cos \theta)^2 [\xi_r^*(r)\xi_h(r) + \xi_r(r)\xi_h^*(r)] \\ & \left. - 2P_l^m(\cos \theta) \frac{dP_l^m}{d\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} |\xi_h(r)|^2 \right\} \Omega(r, \theta) \rho_0(r) r^2 dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Auf ähnliche Weise können wir die Normierung

$$N := \int \rho_0 |\boldsymbol{\xi}|^2 d^3r \quad (4.38)$$

berechnen. Mit (4.29) ergibt sich

$$N = \pi c_{lm}^2 N_{nlm}. \quad (4.39)$$

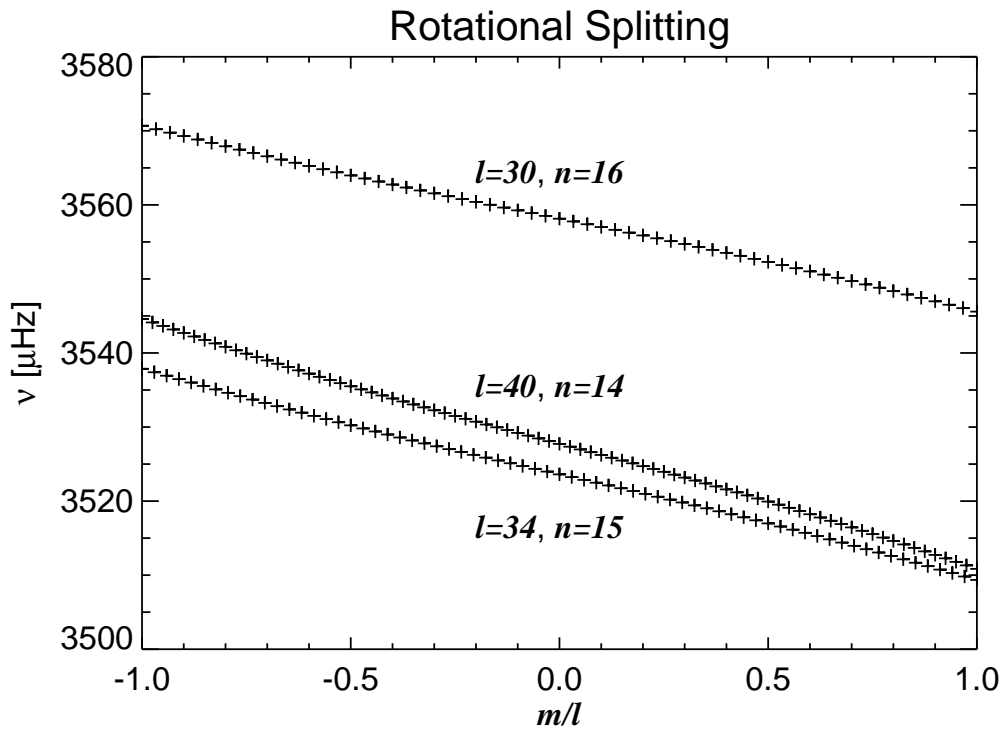
Aus den Gleichungen (4.30), (4.36) und (4.38) erhalten wir für die *Rotationsaufspaltung*, d. h. die Frequenzverschiebung der Oszillationen durch die Störung der differentiellen Rotation mit  $\delta\omega_k^2 = 2\omega_k \delta\omega_k$

$$\delta\omega_{nlm} = -m \frac{R_{nlm}}{I_{nlm}}. \quad (4.40)$$

In der Literatur ist es üblich dieses Ergebnis auch als

$$\delta\omega_{nlm} = \int_0^R \int_0^\pi K_{nlm}(r, \theta) \Omega(r, \theta) r dr^2 d\theta \quad (4.41)$$

zu schreiben, wobei sich der Integralkern  $K_{nlm}$  aus den Gleichungen (4.37) und (4.39) ergibt. Dieses Ergebnis zeigt, daß alle Entartungen innerhalb eines Multipletts aufgehoben wurden und



**Abbildung 4.1.** Aufhebung der Entartung durch differentielle Rotation (solares  $\Omega(r, \theta)$ ), die aus GONG-Daten bestimmt wurde (siehe Kap.6). Dargestellt sind drei Multipletts  $n = 15$ ,  $l = 34$ ;  $n = 14$ ,  $l = 40$  und  $n = 16$ ,  $l = 30$ .

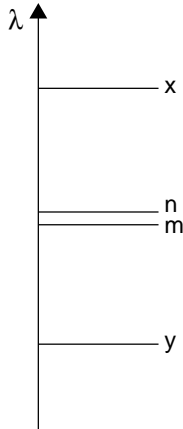
die Frequenz einer Multiplettkomponente von der azimutalen Ordnung  $m$  abhängt. Die Komponente mit  $m = 0$  bleibt unbeeinflusst. Abbildung 4.1 zeigt in einem Beispiel die Frequenzverschiebung in Abhängigkeit von  $m$  innerhalb der Multipletts  $n = 15$ ,  $l = 34$ ;  $n = 14$ ,  $l = 40$  und  $n = 16$ ,  $l = 30$ . Der Unterschied in den Krümmungen der Verteilungen rührt daher, daß die Modi der verschiedenen Multipletts unterschiedlich tief in die Sonne eindringen. Deshalb erfahren sie unterschiedliche Frequenzverschiebungen durch die differentielle Rotation.

### 4.3. Störungstheorie quasi-entarteter Zustände

Neben der Entartung von Eigenzuständen ist noch ein weiterer Fall denkbar: Die Eigenwerte des ungestörten Systems können so dicht beisammen liegen, daß das Konzept der nicht-entarteten Störungstheorie fragwürdig wird. Bei der Entwicklung der Eigenwerte nach der Störung gemäß

$$\lambda_n \approx \lambda_n^{(0)} + \varepsilon \langle \xi_n | H_1 | \xi_n \rangle + \varepsilon^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \xi_n | H_1 | \xi_m \rangle|^2}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}} + \dots, \quad (4.42)$$

können ab der zweiten Ordnung die Beiträge groß gegen die vorangehenden Ordnungen werden und die Reihe konvergiert nicht notwendigerweise. Die zweite Ordnung enthält Beiträge von allen Zuständen. Die Hauptbeiträge jedoch stammen von den nahe beieinander liegenden Zuständen. Das bedeutet, daß Beiträge von Zuständen mit großen Differenzen in den Eigenwerten vernachlässigbar sind.



**Abbildung 4.2.** Zwei-Niveau-System. Die Zustände  $n$  und  $m$  sind quasi-entartet und tragen zur zweiten Ordnung in (4.42) bei. Die Zustände  $x$  und  $y$  haben keinen Einfluß auf die Eigenzustände  $n$  und  $m$ .

Diese Überlegung führt uns auf das Konzept des *Zwei-Niveau-Systems*. Dabei geht man davon aus, daß zwei Eigenwerte nahezu identisch sind, während alle anderen Eigenwerte weit entfernt sind. Dies nennt man Quasi-Entartung (Abb. 4.2).

Im Zwei-Niveau-System besteht der allgemeine Zustand allein aus der Überlagerung dieser zwei Eigenzustände. Die anderen Eigenzustände tragen zur Korrektur des Eigenwertes nicht bei – sie werden durch die Störung nicht *angekoppelt* – und werden deshalb vernachlässigt. Es gilt somit

$$|\xi\rangle = c_n|\xi_n\rangle + c_m|\xi_m\rangle . \quad (4.43)$$

Fordern wir wieder, daß diese Superposition  $|\xi\rangle$  Eigenzustand des gestörten Hamiltonians  $H = H_0 + \varepsilon H_1$  ist, so finden wir, daß das charakteristische Polynom der Störmatrix von zweiter Ordnung ist und wir so zwei Korrekturen für die jeweiligen Eigenwerte erhalten

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( (H_{nn} + H_{mm}) \pm \sqrt{(H_{nn} - H_{mm})^2 + 4|H_{nm}|^2} \right) \quad (4.44)$$

mit

$$H_{xy} = \langle \xi_x | H | \xi_y \rangle = \lambda_x \delta_{xy} + \langle \xi_x | H_1 | \xi_y \rangle . \quad (4.45)$$

Wir sehen, daß ein Eigenwert in positive Richtung und der andere in negative Richtung verschoben wird. Der Schwerpunkt der Verschiebung ist der Mittelwert aus den ursprünglichen Eigenwerten und den Selbstkopplungstermen.

Auch die Koeffizienten können bestimmt werden. Sie ergeben sich aus einem homogenen Gleichungssystem

$$|c_n^{\pm}|^2 = \frac{|H_{nm}|^2}{(H_{nn} - \lambda_{\pm})^2 + |H_{nm}|^2} , \quad (4.46)$$

womit ein Freiheitsgrad übrig bleibt. Durch die Normierung des Zustandes  $|\xi\rangle$  wird dieser eliminiert, beispielsweise

$$|c_m^{\pm}|^2 = 1 - |c_n^{\pm}|^2 . \quad (4.47)$$

Ganz allgemein ist es durchaus möglich, daß mehrere Eigenwerte quasi-entartet sind und man nicht mehr vom Zwei-Niveau-System ausgehen kann. Der Unterschied zwischen der Störungstheorie entarteter Zustände und der Störungstheorie quasi-entarteter Zustände liegt in der Wahl des Eigenraums, aus dessen Basisvektoren der allgemeine Zustand in der jeweiligen Theorie dargestellt wird. In der Störungstheorie quasi-entarteter Eigenzustände wird der Eigenraum  $K$  von

allen Eigenfunktionen aufgespannt, die nahezu identische Eigenwerte haben. In der Störungstheorie entarteter Eigenzustände wird der Eigenraum nur von den Eigenzuständen aufgespannt, die exakt entartet sind.

#### 4.3.1. Störung solarer quasi-entarteter Eigenzustände

Die Eigenfrequenzen des Gleichgewichtsmodells liegen sehr dicht, d. h. der Frequenzabstand der einzelnen Oszillationen ist klein gegen die Frequenz selbst. Somit sind die solaren Eigenschwingungen quasi-entartet. Deshalb kann die Störungstheorie quasi-entarteter Zustände bei der Untersuchung verschiedener Störungen des Gleichgewichtsmodells Anwendung finden.

Der Eigenraum  $K$  wird von jenen Eigenfunktionen aufgespannt, die nahe beieinander liegen, d. h. für deren Eigenfrequenzen gilt

$$|\omega_k^2 - \omega_{\text{ref}}^2| < \varepsilon \quad (4.48)$$

mit  $\varepsilon$  als kleinem Parameter, dessen Größe die Genauigkeit für unsere Rechnungen festlegt. Die Referenzfrequenz  $\omega_{\text{ref}}$  ist im Prinzip beliebig, liegt aber in der Nähe der Eigenfrequenzen jener Modi, die untersucht werden sollen.

Wir werden uns in diesem Abschnitt auf den Einfluß von großskaligen stationären Geschwindigkeitsfeldern in der Konvektionszone auf die solaren Oszillationen konzentrieren. Dabei greifen wir auf die Arbeit von Lavelly & Ritzwoller (1992) zurück, deren Überlegungen wir hier darstellen wollen.

Die Herleitung der Störmatrix, deren Eigenwerte die Korrekturen der Quadrate der Eigenfrequenzen sind, kann analog wie bei der Anwendung der Störungstheorie entarteter Zustände im Abschnitt 4.2 erfolgen. Den Störoperator  $H_1$  haben wir schon in Abschnitt 4.2.1 ganz allgemein für den Einfluß von Geschwindigkeitsfeldern auf die Oszillationsgleichungen bestimmt,

$$H_1 = 2i\rho_0\omega_{nl}(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) . \quad (4.49)$$

Gilt also für das Gleichgewichtsmodell

$$H_0 \boldsymbol{\xi}_k = -\rho_0 \omega_{nl}^2 \boldsymbol{\xi}_k , \quad (4.50)$$

so gilt nun mit den Ersetzungen

$$\begin{aligned} H_0 &\rightarrow H_0 + H_1 , \\ \omega_{nl}^2 &\rightarrow \omega_{\text{ref}}^2 + \omega_{nl,1}^2 , \\ \rho_0 &\rightarrow \rho_0 + \rho_1 , \\ \boldsymbol{\xi}_k &\rightarrow \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}_1 \end{aligned} \quad (4.51)$$

die Gleichung

$$(H_0 + H_1)(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}_1) = -(\rho_0 + \rho_1)(\omega_{\text{ref}}^2 + \omega_{nl,1}^2)(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}_1) . \quad (4.52)$$

Für Störungstheorie erster Ordnung können wir die Terme mit  $\boldsymbol{\xi}_1$  vernachlässigen. Der Grund ist, daß die Störungen der Eigenfrequenzen in erster Ordnung stationär gegenüber Veränderungen erster Ordnung in den Eigenzuständen sind. Dies gilt, wie im Fall der Störungstheorie entarteter Zustände, auch für die quasi-entarteten Zustände (Lavelly & Ritzwoller, 1992). Es verbleibt dann die Gleichung

$$(H_0 + \rho_0 \omega_{\text{ref}}^2) \boldsymbol{\xi} + (H_1 + \rho_1 \omega_{\text{ref}}^2) \boldsymbol{\xi} = -\rho_0 \omega_{nl,1}^2 \boldsymbol{\xi} . \quad (4.53)$$

Der allgemeine Zustand  $\boldsymbol{\xi}$ , der die Gleichung (4.53) in erster Ordnung löst, ist eine Linearkombination der ungestörten Eigenfunktionen

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{k \in K} c_k \boldsymbol{\xi}_k . \quad (4.54)$$

Wir setzen diese Linearkombination (4.54) in Gleichung (4.53) ein und bilden das innere Produkt des resultierenden Ergebnisses mit  $\xi_{k'}^*$ . Anschließend integrieren wir über das Volumen des Gleichgewichtsmodells. Wir erhalten

$$\sum_{k \in K} c_k Z_{kk'} = \sum_{k \in K} c_k \omega_{nl,1}^2 \delta_{kk'} \quad (4.55)$$

mit

$$Z_{kk'} = \frac{1}{N_k} \left\{ \int \xi_{k'}^* \cdot (-H_1 - \rho_1 \omega_{\text{ref}}^2) \xi_k d^3 r - (\omega_{\text{ref}}^2 - \omega_{nl}^2) N_k \delta_{kk'} \right\} \text{ für } (k, k') \in K, \quad (4.56)$$

$$Z_{kk'} = 0 \text{ für } (k, k') \notin K.$$

Dies stellt ein Eigenwertproblem für  $\omega_{nl,1}^2$  und  $c_k$  dar. Die Matrix  $Z$  mit den Komponenten  $Z_{kk'}$  nennt man Supermatrix.

#### 4.3.1.1. Das allgemeine Matrixelement und die Supermatrix in der Störungstheorie quasi-entarteter Zustände

Gleichung (4.55) ist ein grundsätzliches Ergebnis der Störungstheorie quasi-entarteter Zustände. Die Komponenten der Eigenvektoren der Supermatrix  $Z$  sind durch die Koeffizienten  $c_k$  gegeben und die Eigenwerte ergeben die Störungen der Eigenfrequenzen  $\omega_{nl,1}^2$ . Eine Betrachtung der Gleichung (4.56) legt nahe, das allgemeine Matrixelement wie folgt zu definieren

$$H_{n'l',l}^{m'm} = \int \xi_{k'}^* \cdot (-H_1 \xi_k - \rho_1 \omega_{\text{ref}}^2 \xi_k) d^3 r \quad (4.57)$$

mit  $H_{n'l',l}^{m'm}$  als die  $(m', m)$ -Komponente der allgemeinen Matrix  $H_{n'l',l}$ . Somit sind die Komponenten der Supermatrix durch

$$Z_{k'k} = \frac{1}{N_k} \left\{ H_{n'l',l}^{m'm} - (\omega_{\text{ref}}^2 - \omega_{nl}^2) N_k \delta_{k'k} \right\} \quad (4.58)$$

gegeben. Das Eigenwertproblem (4.55) schreibt sich mit Gleichung (4.58) deshalb als

$$ZC = \Lambda C, \quad (4.59)$$

wobei  $\Lambda$  eine Diagonalmatrix mit den Quadraten der Eigenfrequenzstörungen ist,  $\Lambda_{kj} \delta_{kj} = \omega_{j,1}^2$ , und  $C$  ist die Matrix, die die Eigenvektoren als Spalten enthält. Aufgrund der Stationarität und der daraus resultierenden Divergenzfreiheit des Strömungsfeldes ist  $Z$  hermitesch (siehe Anhang B)

$$Z = C \Lambda C^\dagger. \quad (4.60)$$

Die Quadrate der Frequenzen des gestörten Systems sind durch

$$\omega_j^2 = \omega_{\text{ref}}^2 + \omega_{j,1}^2 \quad (4.61)$$

gegeben. Da  $\omega_{j,1}^2$  klein gegen  $\omega_{\text{ref}}^2$  ist, gilt die Näherung

$$\omega_{j,1}^2 \approx 2\omega_{\text{ref}} \delta\omega_j, \quad (4.62)$$

die in ihrer Anwendung

$$\omega_j \approx \omega_{\text{ref}} + \delta\omega_j \quad (4.63)$$

ergibt.

Im folgenden werden wir die Störung der Struktur des Gleichgewichtsmodells nicht betrachten und deshalb den Term mit  $\rho_1$  vernachlässigen. Stattdessen werden wir nur den Einfluß von Geschwindigkeitsfeldern auf die Frequenzen der solaren Eigenschwingungen untersuchen.

Das allgemeine Matrixelement  $H_{n'l',l}^{m'm}$  aus Gleichung (4.57) bestimmt die Kopplungsstärke zweier Modi  $k = (n, l, m)$  und  $k' = (n', l', m')$ . Die Supermatrix  $Z$  aus Gleichung (4.58) setzt sich aus einer Anordnung von allgemeinen Matrixelementen zusammen. Die Eigenwerte von  $Z$

stehen in einfacher Beziehung zu den Eigenfrequenzen des gestörten Sonnenmodells. Die Eigenvektoren von  $Z$  sind die Entwicklungskoeffizienten der Eigenfunktionen des gestörten Modells entsprechend der Gleichung (4.54). Dabei sind die Eigenfunktionen des Gleichgewichtsmodells die Basisfunktionen dieser Entwicklung.

Wir werden nun einen expliziten Ausdruck für das allgemeine Matrixelement herleiten, indem wir die skalaren Eigenfunktionen des Gleichgewichtsmodells und die Störung durch ein Geschwindigkeitsfeld in die Formel (4.57) einsetzen.

Entsprechend dem Wigner-Eckart-Theorem (Gleichung [5.4.1] in Edmonds, 1974) läßt sich das allgemeine Matrixelement eines Tensorstöroperators in einer Reihe von Wigner-3j-Symbolen entwickeln. Die Entwicklungskoeffizienten sind bis auf das Vorzeichen unabhängig von  $m$  und  $m'$ . Deshalb ergibt sich für das allgemeine Matrixelement

$$H_{nn',ll'}^{mm'} = (-1)^{m'} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=-s}^{t=s} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix} \int_0^R \mathbf{K}_{nn',ll's} \cdot \mathbf{v}_s^t r^2 dr. \quad (4.64)$$

Der Vektor  $\mathbf{K}_{nn',ll's}$  besteht aus Integralkernen, die von den Eigenfunktionen der Modi und den Modellparametern abhängen. Der Vektor  $\mathbf{v}_s^t$  enthält Entwicklungskoeffizienten, die das Vektorfeld der Strömung beschreiben. Das Integral selbst wird *reduziertes Matrixelement* genannt und beschreibt eine rein radiale Integration. Im Anhang B wird das reduzierte Matrixelement für großskalige Strömungen in Form von (4.64) berechnet. Wir stellen hier die Ergebnisse kurz zusammen. Der Anteil der Corioliskraft zu  $H_{nn',ll'}^{mm'}$  ist gegeben durch

$$C_{nn',ll'}^{mm'} = 2i\omega \int \rho_0 \xi_{k'}^* \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \xi_k d^3r, \quad (4.65)$$

der Beitrag der Advektion durch das Strömungsfeld mit

$$V_{nn',ll'}^{mm'} = 2i\omega_{\text{ref}} \int \rho_0 \xi_{k'}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_k d^3r. \quad (4.66)$$

Kombinieren wir die Ergebnisse (B.27), (B.28), (B.30) und (B.33), so finden wir

$$\begin{aligned} H_{nn',ll'}^{mm'} &= C_{nn',ll'}^{mm'} + V_{nn',ll'}^{mm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} 2\omega_{\text{ref}} m \Omega \int_0^R \rho_0 (\xi_r \xi_h' + \xi_r' \xi_h + \xi_h \xi_h') r^2 dr \\ &+ 4\pi (-1)^{m'} \gamma_l \gamma_l' \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s \sum_{t=-s}^s 2\omega_{\text{ref}} \int_0^R \rho_0 \left( i u_s^t(r) R_s(r) + i \frac{v_s^t(r)}{r} H_s(r) + \frac{w_s^t(r)}{r} T_s(r) \right) r^2 dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

wobei der konstante Faktor  $\gamma_s$  durch

$$\gamma_s = \sqrt{(2s+1)/4\pi} \quad (4.68)$$

gegeben ist. Die Integralkerne  $R_s(r)$  und  $H_s(r)$  für die Radial- und Horizontalteile der poloidalen Strömungskomponenten und  $T_s(r)$  für die toroidalen Strömungskomponenten sind durch

$$\begin{aligned} R_s(r) &= \frac{1}{4} \left( \xi_r' \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\partial \xi_r'}{\partial r} \xi_r \right) (1 + (-1)^{s+l+l'}) \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \left( \xi_h' \frac{\partial \xi_h}{\partial r} - \frac{\partial \xi_h'}{\partial r} \xi_h \right) (1 + (-1)^{s+l+l'}) (l(l+1)l'(l'+1))^{1/2} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}
H_s(r) &= \frac{1}{4r} [l(l+1) - l'(l'+1)] (1 + (-1)^{s+l+l'}) \\
&\quad \times \left[ \xi_r \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \xi_h' \xi_h (l(l+1)l'(l'+1))^{1/2} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2r} \xi_h' \xi_r (1 + (-1)^{s+l+l'}) (l'(l'+1)s(s+1))^{1/2} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2r} \xi_r' \xi_h (1 + (-1)^{s+l+l'}) (l(l+1)s(s+1))^{1/2} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

und

$$\begin{aligned}
T_s(r) &= -\frac{1}{2} \left( \xi_r' \xi_h + \xi_h' \xi_r - \xi_r' \xi_r - \frac{1}{2} \xi_h' \xi_h [l(l+1) + l'(l'+1) - s(s+1)] \right) \\
&\quad \times (1 - (-1)^{s+l+l'}) (l(l+1)l'(l'+1))^{1/2} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

gegeben. Die Entwicklungskoeffizienten des Geschwindigkeitsfeldes  $u_s^t(r)$ ,  $v_s^t(r)$  und  $w_s^t(r)$  sind in den Gleichungen (3.3) und (3.4) definiert. Die Eigenschaften der auftretenden Wigner-3j-Symbole sind in Anhang A dargestellt.

#### 4.3.1.2. Auswahlregeln

Neben der Bedingung (4.48) wird die Kopplung von Modi des Gleichgewichtsmodells durch Auswahlregeln weiter eingeschränkt. Diese Auswahlregeln ergeben sich aus den Eigenschaften der Wigner-3j-Symbole (s. Anhang A), bzw. der Integrale über drei Kugelflächenfunktionen, die sie repräsentieren.

Die erste Auswahlregel ergibt sich aus Gleichung (A.20). Wir finden, daß die harmonischen Grade  $l$ ,  $l'$  und  $s$  folgender Dreiecksregel genügen müssen

$$|l' - s| \leq s, \quad |s - l| \leq l, \quad |l - l'| \leq s. \tag{4.72}$$

Der Bereich von  $l$  und  $l'$ , über den Kopplung der Modi möglich ist, hängt somit vom harmonischen Grad  $s$  der Kugelflächenfunktion ab, die eine Komponente des Geschwindigkeitsfeldes in der Konvektionszone repräsentiert.

Die zweite Auswahlregel folgt ebenfalls aus Gleichung (A.20). Sie besagt, daß Modi mit den azimutalen Ordnungen  $m$  und  $m'$  nur koppeln, falls es eine Komponente des Geschwindigkeitsfeldes mit harmonischem Grad  $t$  gibt, so daß die Beziehung

$$t + m - m' = 0 \tag{4.73}$$

erfüllt ist.

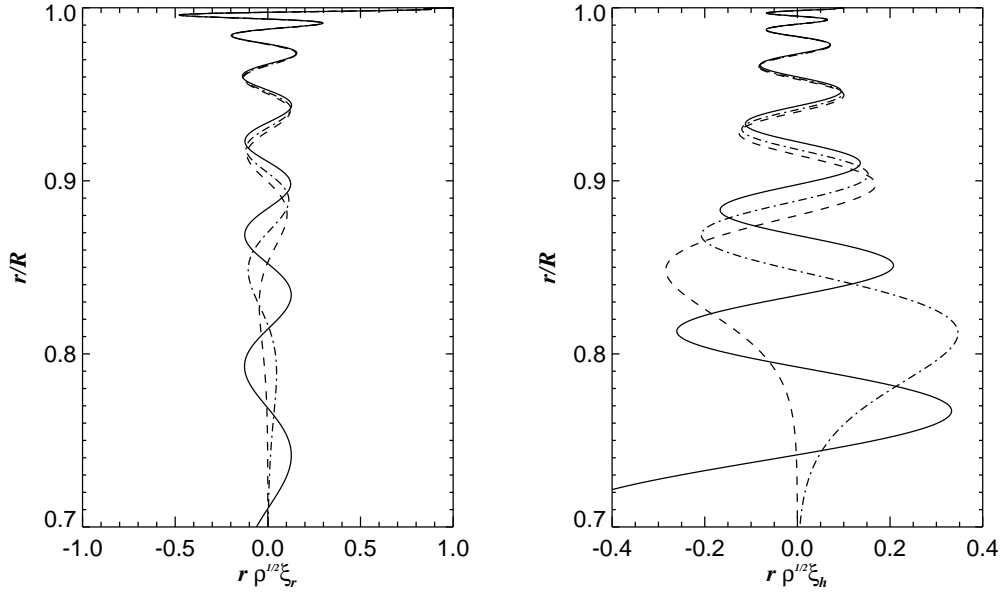
Die dritte Auswahlregel ergibt sich aus dem reduzierten Matrixelement, d. h. der radialen Integration. Die reduzierten Matrixelemente sind proportional zu den Integralkernen  $R_s(r)$ ,  $H_s(r)$  und  $T_s(r)$  aus den Gleichungen (4.69), (4.70) und (4.71). In den Integralkernen  $R_s$  und  $H_s$  tritt der Faktor  $(1 + (-1)^{s+l+l'})$  auf. Dieser Faktor ist nur dann von null verschieden, falls die Summe  $s+l+l'$  gerade ist. D. h. zwei Modi  $k$  und  $k'$  können durch ein poloidales Geschwindigkeitsfeld mit ungerader Summe  $s+l+l'$  nicht koppeln. Im Gegensatz dazu ist der Integralkern  $T_s$  proportional zu  $(1 - (-1)^{s+l+l'})$ . Dieser Faktor verschwindet bei gerader Summe  $s+l+l'$ . Dies fassen wir in der dritten Auswahlregel zusammen

$$\begin{aligned}
R_s = H_s &= 0 \quad \text{falls } s+l+l' \text{ ungerade,} \\
T_s &= 0 \quad \text{falls } s+l+l' \text{ gerade.}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Im Falle der Selbstkopplung, d. h.  $n' = n$  und  $l' = l$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
R_s = H_s &= 0 \quad \text{und} \\
T_s &= 0 \quad \text{falls } s \text{ gerade.}
\end{aligned} \tag{4.75}$$





**Abbildung 4.3.** Die Größen  $r\rho^{1/2}\xi_r$  (links) und  $r\rho^{1/2}\xi_h$  (rechts) aufgetragen in Abhängigkeit von der Tiefe und auf den Oberflächenwert normiert. Dargestellt sind die quasi-entarteten Multipletts  $n = 14, l = 34, \nu = 3252.39 \mu\text{Hz}$  (durchgezogene Linie),  $n = 9, l = 73, \nu = 3252.75 \mu\text{Hz}$  (---) und  $n = 10, l = 61, \nu = 3252.79 \mu\text{Hz}$  (- · - · - · -).

Daraus können wir folgern, daß ein stationäres, divergenzfreies, poloidales Geschwindigkeitsfeld für den Fall der Selbstkopplung – und damit im Fall der Störungstheorie entarteter Zustände – nicht zur Kopplung beiträgt.

An dieser Stelle sei noch bemerkt, daß der radiale Integralkern  $R_s(r)$  für Kopplung von Eigenfunktionen durch oberflächennahe Strömungen nahezu verschwindet. Der Grund ist, daß quasi-entartete Modi in der Nähe der Sonnenoberfläche nahezu identische Eigenfunktionen  $\xi_r$  und  $\xi_h$  haben (s. Abb 4.3). Deshalb ist dort  $(\xi_r' \partial_r \xi_r - \xi_r \partial_r \xi_r') \approx (\xi_h' \partial_r \xi_h - \xi_h \partial_r \xi_h') \approx 0$ . Daraus schließen wir, daß die radiale Komponente einer oberflächennahen, divergenzfreien, poloidalen Strömung die akustischen Eigenschwingungen kaum beeinflusst. Wenn es einen Einfluß gibt, dann wird dieser durch die Horizontalkomponente hervorgerufen.

Anders verhält es sich für oberflächennahe turbulente Strömungen z. B. im intergranularen Raum. Diese haben starken Einfluß auf die solaren Oszillationen, denn der in unserem Gleichgewichtsmodell nicht berücksichtigte Turbulenzdruck führt zu veränderten Eigenfrequenzen (Stein & Nordlund, 1998; Baturin & Mironova, 1998).

#### 4.3.1.3. Besetzung der Supermatrix

Wie Gleichung (4.58) zeigt, ist die Supermatrix eine Summe aus zwei Matrizen. Der eine Summand ist eine Diagonalmatrix mit Blockmatrizen, die aus Einträgen  $(\omega_{nl}^2 - \omega_{\text{ref}}^2)$  bestehen. Der andere Summand besteht aus Blöcken mit allgemeinen Matrizen  $H_{nn',ll'}$ . Wir betrachten nun die Besetzung der Supermatrix für quasi-entartete Multipletts, deren Frequenzen  $\omega_k$  nahe bei  $\omega_{\text{ref}}$  liegen. Dabei ist wiederum  $k = (n, l, m)$ . Die Supermatrix wird dann von den Modi aufgebaut,

die den Eigenraum  $K$  aufspannen

$$Z = \begin{pmatrix} (\omega_{k_1}^2 - \omega_{\text{ref}}^2) \mathbb{1}_{2l_1+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\omega_{k_2}^2 - \omega_{\text{ref}}^2) \mathbb{1}_{2l_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\omega_{k_x}^2 - \omega_{\text{ref}}^2) \mathbb{1}_{2l_x+1} \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

$$+ \begin{pmatrix} H_{k_1, k_1} & H_{k_1, k_2} & H_{k_1, k_3} & \dots & H_{k_1, k_{x-1}} & H_{k_1, k_x} \\ H_{k_1, k_2}^\dagger & H_{k_2, k_2} & H_{k_2, k_3} & \dots & H_{k_2, k_{x-1}} & H_{k_2, k_x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{k_1, k_x}^\dagger & H_{k_2, k_x}^\dagger & H_{k_3, k_x}^\dagger & \dots & H_{k_{x-1}, k_x}^\dagger & H_{k_x, k_x} \end{pmatrix}.$$

Die Lagen der allgemeinen Matrixelemente innerhalb einer allgemeinen Blockmatrix  $H_{k, k'}$  sind durch die azimutalen Ordnungen wie folgt bestimmt

$$H_{k, k'} = H_{nn', ll'} = \begin{pmatrix} H_{nn', ll'}^{-l-l'} & H_{nn', ll'}^{-l-l'+1} & H_{nn', ll'}^{-l-l'+2} & \dots & H_{nn', ll'}^{-l'} \\ H_{nn', ll'}^{-l+1-l'} & H_{nn', ll'}^{-l+1-l'+1} & H_{nn', ll'}^{-l+1-l'+2} & \dots & H_{nn', ll'}^{l'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{nn', ll'}^{l-l'} & H_{nn', ll'}^{l-l'+1} & H_{nn', ll'}^{l-l'+2} & \dots & H_{nn', ll'}^{l'} \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

Die Matrizen  $H_{kk}$  auf der Diagonalen des zweiten Summanden in Gleichung (4.76) sind quadratisch und bestimmen die Selbstkopplung der Modi des Gleichgewichtsmodells. Die Reihenfolge der Einträge auf der Diagonalen von  $Z$  wählen wir o.B.d.A. der Größe der Oszillationsfrequenz entsprechend, d. h. die erste Blockmatrix gehört zur kleinsten Frequenz  $\omega_{k_1}$  und die letzte Blockmatrix zur größten Frequenz  $\omega_{k_x}$ . Die Matrizen  $H_{kk'}$  mit  $k \neq k'$  repräsentieren die Kopplung zwischen den Multipletts. Diese Blockmatrizen sind nicht-quadratisch, da  $-l \leq m \leq l$  und  $-l' \leq m' \leq l'$ .

Die Supermatrix ist hermitesch ( $Z = Z^\dagger$ , wobei  $\dagger$  die komplex-konjugiert Transponierte bezeichnet). Der Beweis der Hermitezität befindet sich in Anhang B. Die Hermitezität gilt für den Fall stationärer divergenzfreier Strömungen. Aus der Hermitezität von  $Z$  folgt, daß die Eigenfrequenzen des gestörten Sonnenmodells rein reell sind, d. h. die Oszillationen werden durch stationäre Strömungen nicht gedämpft.

#### 4.3.1.4. Differentielle Rotation

Im Fall der ersten Ordnung Störungstheorie entarteter Eigenzustände ist nur Selbstkopplung erlaubt. Dann ist die Supermatrix diagonal, da alle Nebendiagonaleinträge verschwinden. Dies haben wir in Abschnitt 4.2.2 verwendet, um den Einfluß der differentiellen Rotation zu bestimmen. Das Geschwindigkeitsfeld der differentiellen Rotation aus Gleichung (4.31) entspricht dem ungeraden, zonalen Anteil der toroidalen Geschwindigkeitskomponente aus Gleichung (3.2)

$$\mathbf{v}_{\text{rot}}(r, \theta) = - \sum_{s=1,3,5,\dots}^{\infty} w_s^0(r) \frac{\partial Y_s^0}{\partial \theta} e_\varphi. \quad (4.78)$$

Entwickelt man  $\Omega(r, \theta)$  aus Gleichung (4.32) nach einem orthogonalen Basissystem  $P_i(\cos \theta)$

$$\Omega(r, \theta) = \sum_{i=0,2,4,\dots}^{\infty} \Omega_i(r) P_i(\cos \theta), \quad (4.79)$$

so kann man eine Beziehung zwischen den Koeffizienten  $\Omega_i(r)$  und  $w_s^0(r)$  herleiten (Ritzwoller & Lively, 1991). Des weiteren läßt sich zeigen, daß das Ergebnis aus Gleichung (4.41) mit

$$\delta\omega_{nl}(m) = 4\pi(-1)^{m'} \gamma_l^2 \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s 2\omega_{\text{ref}} \int_0^R \rho_0(r) \frac{w_s^0(r)}{r} T_{nl,s}^{(SK)}(r) r^2 dr \begin{pmatrix} s & l & l \\ 0 & m & -m \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

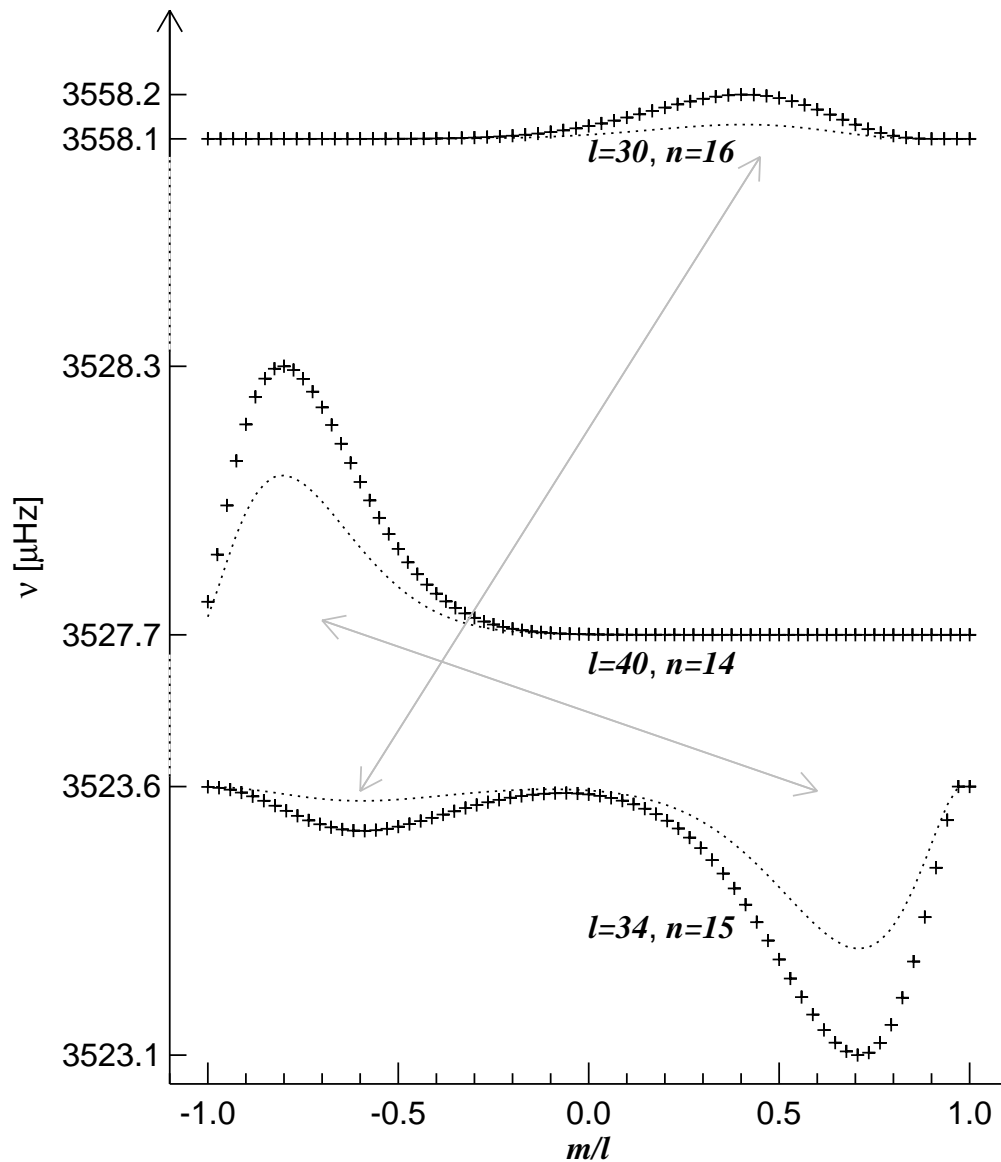
äquivalent ist. Dabei bezeichnet  $T_{nl,s}^{(SK)}$  den Integrationskern für den Fall der Selbstkopplung, wie er sich aus der Definition (4.71) für  $n' = n$  und  $l' = l$  ergibt.

#### 4.3.1.5. Poloidale Geschwindigkeitskomponenten

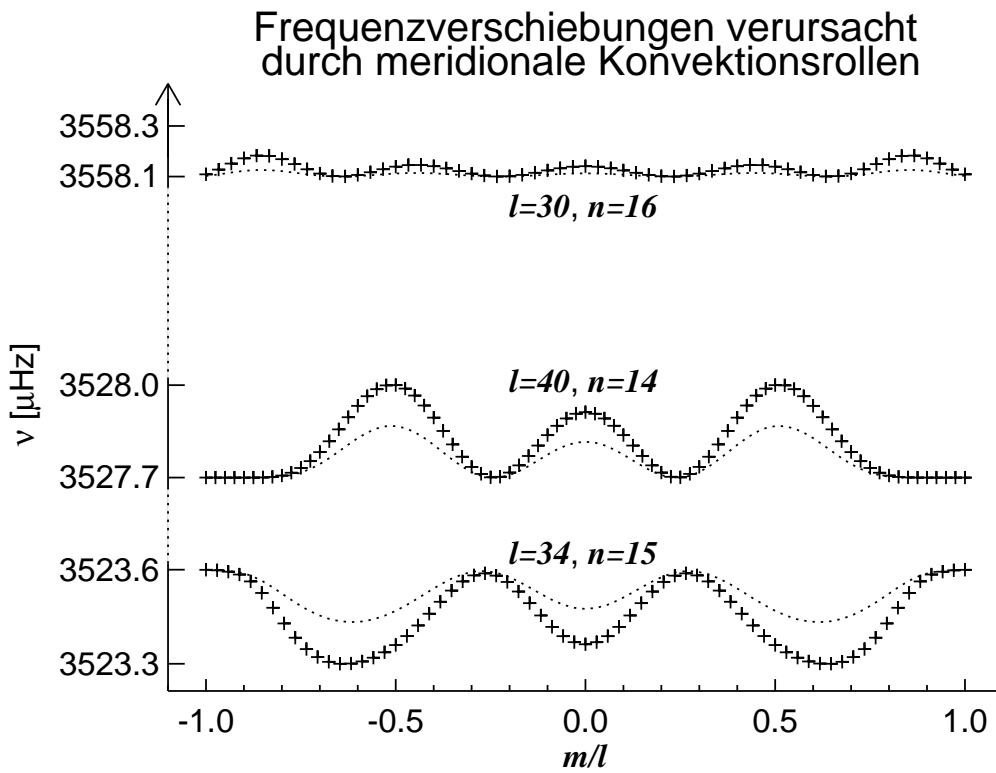
Nach den Überlegungen zur differentiellen Rotation werden wir uns den poloidalen Geschwindigkeitskomponenten zuwenden. Wir betrachten nur eine Komponente der Entwicklung (3.2), d. h.  $s$  und  $t$  sind vorgegeben. Eine solche poloidale Geschwindigkeitskomponente verursacht Frequenzverschiebungen, falls keine Selbstkopplung vorliegt, d. h. nur im Fall  $k \neq k'$ . Von einer Kopplung, die zu einer Frequenzverschiebung führt, sind somit immer zwei Modi betroffen, nämlich immer Paare, deren Eigenfrequenzen quasi-entartet sind (Relation (4.48)). Diese Bedingung schränkt  $n$  und  $n'$  ein. Durch die Dreiecksregel (4.72) wird bei gegebenen Graden  $s$  und  $l$  der Bereich für mögliche ankoppelnde Partner mit harmonische Grad  $l'$  festgelegt, d. h.  $|l - s| \leq l' \leq l + s$ . Somit sind auch die Multipletts, aus denen mögliche Kopplungspartner stammen, festgelegt. Über die mögliche Anzahl koppelnder Paare, die aus Modi solcher zwei Multipletts gebildet werden können, entscheidet nun die dritte Auswahlregel (4.73). So gibt es im Fall  $|t| = l + l'$  nur ein einziges Paar an Kopplern und im Fall  $t = 0$  gibt es  $2 \min\{l, l'\} + 1$  Paare. Das reduzierte Matrixelement ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von  $m$  und  $m'$  und deshalb für alle Paare identisch. Die tatsächliche Stärke der Kopplung für die jeweiligen koppelnden Paare ist allein durch das Wigner-3j-Symbol ( $sl'l'/tm - m'$ ) gegeben. Es ist somit natürlich, daß für festes  $s$  und  $t$  ein Modus aus einem gegebenen Multiplett immer nur mit maximal einem Partner aus einem anderen gegebenen Multiplett koppeln kann.

Die durch die Kopplung resultierenden Frequenzverschiebungen treten zusätzlich zur Rotationsaufspaltung auf. Die differentielle Rotation führt zu Frequenzaufspaltungen, die antisymmetrisch zum Modus mit Ordnung  $m = 0$  sind. Dies liegt an der Symmetrieeigenschaft des Wigner-3j-Symbols ( $sl'l'/0m - m$ ) für ungerades  $s$  in Abhängigkeit von  $m$ . Im Fall der poloidalen Felder sind die Parameter  $s$  und  $t$  beliebig und im allgemeinen sind die Wigner-3j-Symbole als Funktion von  $m$  (bei vorgegebenem  $s, l, l'$  und  $t$ ) asymmetrisch. Dementsprechend sind auch die Frequenzverschiebungen asymmetrisch. Abbildung 4.4 zeigt das Resultat einer Störungsrechnung für die Kopplung des Multipletts  $n = 15, l = 34$  mit zwei Multipletts  $n = 14, l = 40$  und  $n = 16, l = 30$ . Die Geschwindigkeitskomponente hat einen harmonischen Grad von  $s = 8$  und eine azimutale Ordnung von  $t = 8$ . Es handelt sich somit um acht sektorale Konvektionszellen. Die Dreiecksregel (4.72) erklärt, wieso die Paare  $l = 34, l = 40$  und  $l = 34, l = 30$  miteinander koppeln können, nicht jedoch das Paar  $l = 40, l = 30$ . Die zweite Auswahlregel erklärt die Anzahl der koppelnden Paare aus den Multipletts und die Lage der Frequenzverschiebung innerhalb jedes einzelnen Multipletts. So koppeln in dem einen Fall 67 Paare ( $l = 34, m = -34, \dots, 32$  mit  $l = 40, m = 26, \dots, -40$ ) und in dem anderen Fall 57 Paare ( $l = 34, m = -34, \dots, 22$  mit  $l = 30, m = 26, \dots, -30$ ). Die Stärke der Frequenzverschiebung in dem  $(m, \nu)$ -Diagramm entspricht der Wigner-3j-Funktion, die durch  $W_{s,l,l',t}(m) := (sl'l'/tm - (t + m))$  gegeben ist. Die Pfeile in Abb. 4.4 deuten die entsprechende Symmetrie in den Frequenzverschiebungen zwischen den koppelnden Partnern an. Somit besteht zwar eine Symmetrie in der Frequenzverschiebung

### Frequenzverschiebungen verursacht durch sektorale Zellen



**Abbildung 4.4.** Asymmetrisch verschobene Frequenzen innerhalb des Multipletts  $n = 15$ ,  $l = 34$  auf Grund der Kopplung mit Modi aus den Multipletts  $n = 14$ ,  $l = 40$  und  $n = 16$ ,  $l = 30$ . Ursache für die Kopplung ist ein poloidales Geschwindigkeitsfeld mit  $s = t = 8$ . Die Pfeile deuten die wechselseitige Kopplung an. Dargestellt sind die Ergebnisse für ein Parabelprofil mit  $u_{\text{max}} = 100 \text{ m/s}$  (+ + +) und ein Profil entsprechend der Mischungswegtheorie mit  $u_{\text{max}} = 250 \text{ m/s}$  (.....).



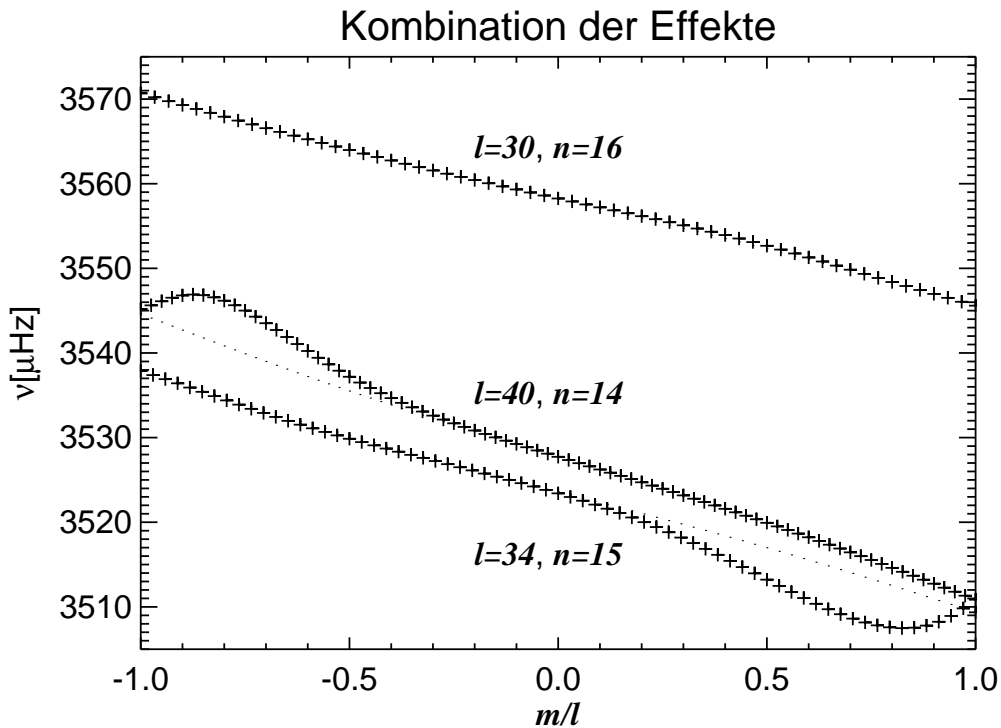
**Abbildung 4.5.** Das Multiplett  $n = 15, l = 34$  mit Kopplungspartnern, die durch ein poloidales Geschwindigkeitsfeld mit  $s = 8, t = 0$  beeinflusst werden. Die Frequenzverschiebungen sind symmetrisch zu  $m = 0$ . Dargestellt sind die Ergebnisse für ein Parabelprofil mit  $u_{\max} = 100$  m/s (+ + + +) und ein Profil entsprechend der Mischungswegtheorie mit  $u_{\max} = 250$  m/s (.....).

zwischen den Paaren, aber für  $t \neq 0$  sind die Frequenzverschiebungen für ein Multiplett allein betrachtet asymmetrisch.

Entsprechend den Erwartungen aus der Störungstheorie quasi-entarteter Zustände ist die Frequenzverschiebung abhängig vom Frequenzabstand der koppelnden Modi. Wie das Beispiel zeigt, treten im Mittel bei geringerem Frequenzabstand größere Frequenzverschiebungen auf als bei großem Frequenzabstand.

Abbildung 4.5 stellt eine weitere Kopplung für die gleichen Multipletts, aber für eine andere Komponente des Geschwindigkeitsfeldes dar. Hier ist nun  $s = 8$  und  $t = 0$ , es handelt sich somit um rein meridionale Strömungen mit acht Konvektionsrollen von Pol zu Pol. Für meridionale Strömungen sind die Frequenzverschiebungen wieder antisymmetrisch zwischen den betroffenen Multipletts. Innerhalb eines Multipletts sind die Frequenzverschiebungen symmetrisch. Wie wir im folgenden Unterabschnitt (4.3.1.6) erklären werden, gilt dies für alle poloidalen Geschwindigkeitskomponenten mit  $t = 0$ .

Für die in den Abbildungen 4.4 und 4.5 präsentierten Ergebnisse haben wir das reduzierte Matrixelement für ein Parabelprofil  $u_s^t(r)$  gemäß Gleichung (3.7) berechnet. Die maximale Amplitude  $u_{\max}$  beträgt 100 m/s. Die resultierenden Frequenzverschiebungen sind in der Größenordnung von wenigen 100 nHz. Bei gleicher Amplitude führt ein Geschwindigkeitsfeld mit einem der Mischungswegtheorie entsprechenden Koeffizienten  $u_s^t(r)$  zu einer schwächeren Kopplung (Abbildungen 4.4 u. 4.5, gepunktete Linien). Der Grund ist wie oben schon erwähnt, daß die



**Abbildung 4.6.** Poloidale Geschwindigkeitsfelder (hier  $s = t = 8$ ) führen zu Abweichungen (+ + +) von der Rotationsaufspaltung (· · · · ·). Zur Verdeutlichung der Abweichung wurde eine Amplitude von  $u_{\max} = 200$  m/s für ein Parabelprofil gewählt.

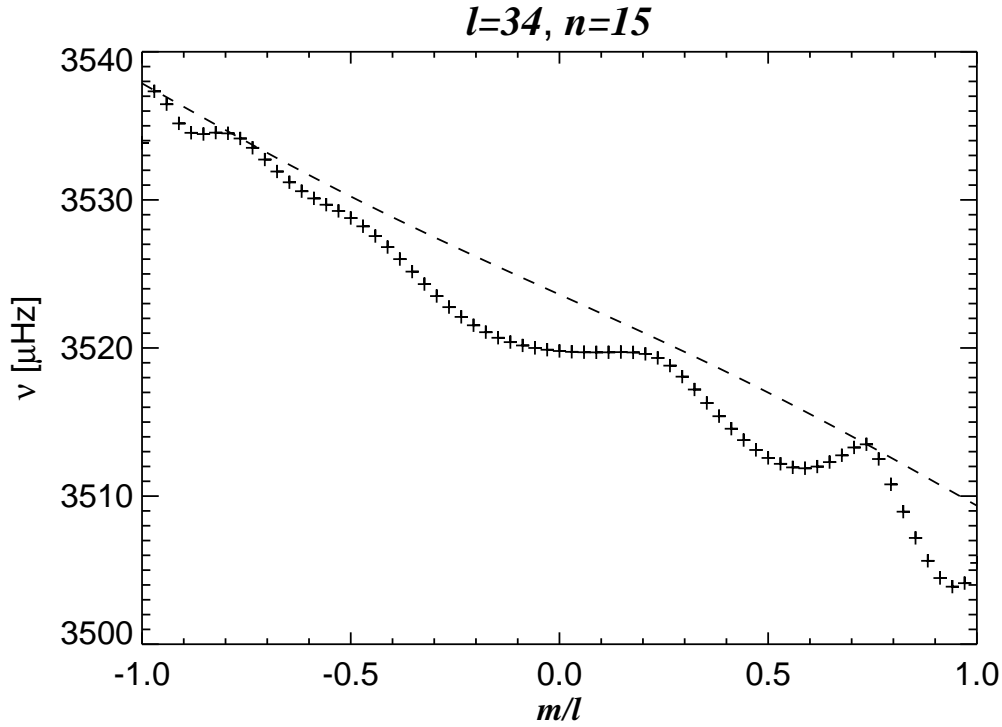
maximale Amplitude näher an der Oberfläche liegt und dort quasi-entartete Eigenfunktionen nahezu identisch sind.

Die Frequenzverschiebungen hängen aber zusätzlich von der Amplitude des Geschwindigkeitsfeldes ab. Der Grad  $s$  entspricht dabei der typischen Längenskala des Geschwindigkeitsfeldes  $L \approx 2\pi R/s$ . Entsprechend der Mischungswegtheorie ergibt sich somit die Wahl der Amplitude (s. Abb. 3.3). Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes mit hohem Grad  $s$  reichen nicht so tief in die Konvektionszone, haben aber eine höhere Amplitude.

Die Frequenzverschiebungen durch poloidale Konvektionszellen treten zusätzlich zu der Frequenzaufspaltung durch die differentielle Rotation auf. In Kombination beider kommt es innerhalb eines Multipletts zu leichten Abweichungen von der für differentielle Rotation allein erwarteten antisymmetrischen Frequenzaufspaltung (*S-Shape*). Abbildung 4.6 zeigt ein Beispiel für eine Geschwindigkeitskomponente mit  $s = t = 8$  und  $u_{\max} = 200$  m/s. Wäre die Amplitude höher, käme es zu einer viel deutlicheren Abweichung von der asymmetrischen Verteilung (Abb. 4.7). Messungen von solaren Oszillationsfrequenzen zeigen kein solches Verhalten. Die maximalen Abweichungen von der idealen Rotationsaufspaltung sind von der Größenordnung  $|\nu - \nu_{\text{rot}}| \approx 1.5 \mu\text{Hz}$ .

#### 4.3.1.6. Abschätzungen

Zum besseren Verständnis der in den vorangegangenen Abschnitten präsentierten Resultate der Kopplung quasi-entarteter Zustände ziehen wir das Zwei-Koppler-Modell aus Abschnitt 4.3 heran. Wir hatten in Gleichung (4.44) gesehen, wie die Eigenwertkorrekturen von der Störung und den



**Abbildung 4.7.** Durch differentielle Rotation und ein poloidales Geschwindigkeitsfeld  $s = 8$ ,  $t = 4$ ,  $u_{\max} = 500$  m/s stark beeinflusstes Multipllett  $n = 15$ ,  $l = 34$ . Gestrichelte Linie: ungestörtes Multipllett aus Abb. 4.1.

ursprünglichen Eigenwerten abhängen. Für den Fall der solaren Oszillationen schreibt sich (4.44) als

$$\begin{aligned} \delta\omega_{k/k'}^2 &= \frac{1}{2}(\omega_k^2 + \omega_{k'}^2) - \omega_{\text{ref}}^2 + \frac{1}{2}(H_{nn,ll}^{mm} + H_{n'n',l'l'}^{m'm'}) \\ &\pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2 + H_{nn,ll}^{mm} - H_{n'n',l'l'}^{m'm'})^2 + 4|H_{nn',ll'}^{mm'}|^2} . \end{aligned} \quad (4.81)$$

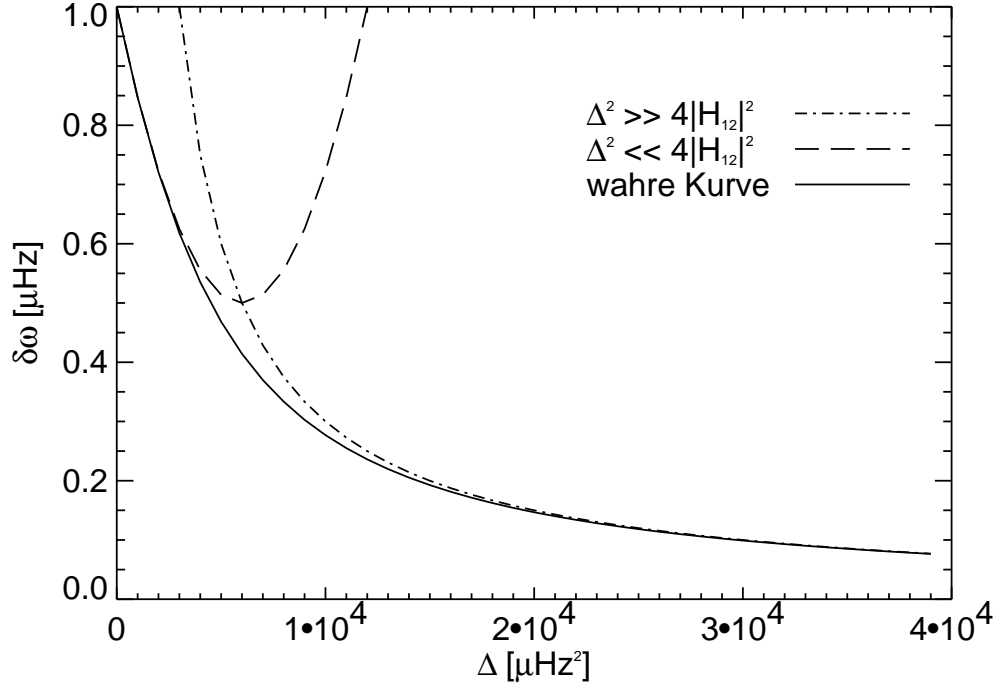
Entsprechend der dritten Auswahlregel (4.75) können nur toroidale Geschwindigkeitsfelder Selbstkopplung verursachen. Im Fall rein poloidaler Felder wären die Selbstkopplungselemente  $H_{nn,ll}^{mm} = H_{n'n',l'l'}^{m'm'} = 0$ . Für die Gleichung (4.81) ergibt sich dann

$$\delta\omega_{k/k'}^2 = \frac{1}{2}(\omega_k^2 + \omega_{k'}^2) - \omega_{\text{ref}}^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2)^2 + 4|H_{nn',ll'}^{mm'}|^2} . \quad (4.82)$$

Die weitere Diskussion hängt nun von den relativen Beträgen der zwei Terme unter der Wurzel zueinander ab. Im ersten Grenzfall ist der Frequenzabstand groß gegen den Betrag des Matrixelements, d. h.  $(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2)^2 \gg |H_{nn',ll'}^{mm'}|^2$ . Die Entwicklung der Wurzel ergibt dann näherungsweise die korrigierten Eigenfrequenzen  $\tilde{\omega}_{k/k'}^2 = \omega_{\text{ref}}^2 + \delta\omega_{k/k'}^2$  oder

$$\tilde{\omega}_{k/k'}^2 = \omega_{k/k'}^2 \pm \frac{|H_{nn',ll'}^{mm'}|^2}{\omega_k^2 - \omega_{k'}^2} . \quad (4.83)$$

Wir stellen fest, daß die Frequenzkorrektur, repräsentiert durch den zweiten Summanden in (4.83), proportional zum Quadrat des allgemeinen Matrixelements ist. Somit ist die Frequenzkorrektur quadratisch von der Amplitude der störenden Geschwindigkeit abhängig. Des weiteren



**Abbildung 4.8.** Grenzfälle im Zwei-Koppler-System. Im Falle  $\Delta = \omega_k^2 - \omega_{k'}^2 \gg |H_{nn',ll'}^{mm'}|^2$  ist die Frequenzverschiebung proportional zu  $1/\Delta$  (---). Für  $\Delta \ll |H_{nn',ll'}^{mm'}|^2$  ist  $\delta\omega \propto \Delta^2$  (- - -). Zum Vergleich ist die wahre Abhängigkeit von  $\Delta$  gemäß Gl. (4.82) eingezeichnet (—). Die maximale Frequenzverschiebung ist auf  $1 \mu\text{Hz}$  festgesetzt.

kommt es zur Verschiebung der Oszillationsfrequenzen der koppelnden p-Modi um den gleichen Betrag. Dabei wird diejenige Oszillation mit der höheren Frequenz weiter erhöht, die mit der niedrigeren Frequenz um denselben Betrag erniedrigt. Diese Frequenzverschiebung hängt umgekehrt proportional von der Differenz der Frequenzquadrate ab. Dieses Ergebnis ist charakteristisch für die Störungstheorie quasi-entarteter Zustände, denn aus diesem Grund haben wir nur Modi zur Kopplung herangezogen, deren Eigenfrequenzen nahezu entartet sind.

Im anderen Grenzfall, bei dem der Frequenzabstand klein gegenüber dem Matrixelement ist, ergibt die Entwicklung der Wurzel

$$\tilde{\omega}_{k/k'}^2 = \frac{1}{2}(\omega_k^2 + \omega_{k'}^2) \pm \left( |H_{nn',ll'}^{mm'}| + \frac{(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2)^2}{8|H_{nn',ll'}^{mm'}|} \right). \quad (4.84)$$

Die Frequenzverschiebung ist somit für  $|\omega_k^2 - \omega_{k'}^2| \rightarrow 0$  linear von der Geschwindigkeit abhängig. Die Abhängigkeit von der Differenz der Frequenzquadrate ist von zweiter Ordnung. Abbildung 4.8 stellt die Resultate graphisch dar.

In einer Arbeit des Autors (Roth, 1998) wurde ausführlich das Gesamtverhalten der durch die Kopplung verursachten Frequenzverschiebung mit Hilfe einer Näherungsformel diskutiert. Der Vorteil einer solchen approximativen Beschreibung der Kopplung ist, daß die Frequenzverschiebung unabhängig von den Eigenfunktionen angegeben werden kann. In Roth (1998) war die



Abschätzung für den oben diskutierten Grenzfall  $(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2)^2 \gg |H_{nn',ll'}^{mm'}|^2$  gültig. Des Weiteren wurden nur Oszillationen mit harmonischen Graden  $l \leq 12$  und Geschwindigkeitsfeldern mit einem harmonischen Grad in gleicher Größenordnung betrachtet.

Wir wollen an dieser Stelle die Näherungsformel überdenken und ihren Anwendungsbereich erweitern. Zur Herleitung müssen wir die Integralkerne (4.69) – (4.71) des Advektionsterms des allgemeinen Matrixelements betrachten. Die dort auftretenden Terme enthalten verschiedene Kombinationen der Eigenfunktionen, nämlich  $\xi_r \xi_r'$ ,  $\xi_r \xi_h'$  und  $\xi_h \xi_h'$ . Das Verhalten der Oszillationen ist vornehmlich radial, nur in der Nähe des Umkehrpunktes wird  $\xi_h$  groß. Somit stammt der Hauptbeitrag zum Matrixelement von den Termen mit den radialen Eigenfunktionen. Diesen gegenüber können wir alle anderen Beiträge vernachlässigen. Auftretende Ableitungen lassen sich durch

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} \approx \frac{n\pi}{R} \xi_r \quad (4.85)$$

abschätzen. Wir erhalten somit folgende Abschätzung für die Integralkerne

$$R_s(r) \approx \frac{(n - n')\pi}{4R} \xi_r' \xi_r \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.86)$$

$$H_s(r) \approx \frac{1}{4} [l(l+1) - l'(l'+1)] \xi_r \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.87)$$

$$T_s(r) \approx \frac{1}{2} (l(l+1)l'(l'+1))^{1/2} \xi_r \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Die Integrale für den poloidalen Anteil schätzen wir mit Hilfe einer weiteren Annahme ab. Statt  $u_s^t(r)$  und  $v_s^t(r)$  setzen wir den Maximalwert der Geschwindigkeitsfelder ein. Zusätzlich nehmen wir an, daß  $u_s^t(r)$  und  $v_s^t(r)$  den gleichen Maximalwert  $u_{\max}$  besitzen. Auf diese Weise läßt sich das allgemeine Matrixelement berechnen. Die radiale Integration kürzt sich dann mit der Normierung, womit der Ausdruck von den Eigenfunktionen unabhängig wird. Wir erhalten

$$H_{nn',ll'}^{mm'} = 2\pi i \omega_{\text{ref}} \gamma_s \gamma_l \gamma_{l'} (-1)^{m'} \frac{u_{\max}}{R} \times [(n - n')\pi + (L - L')] \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

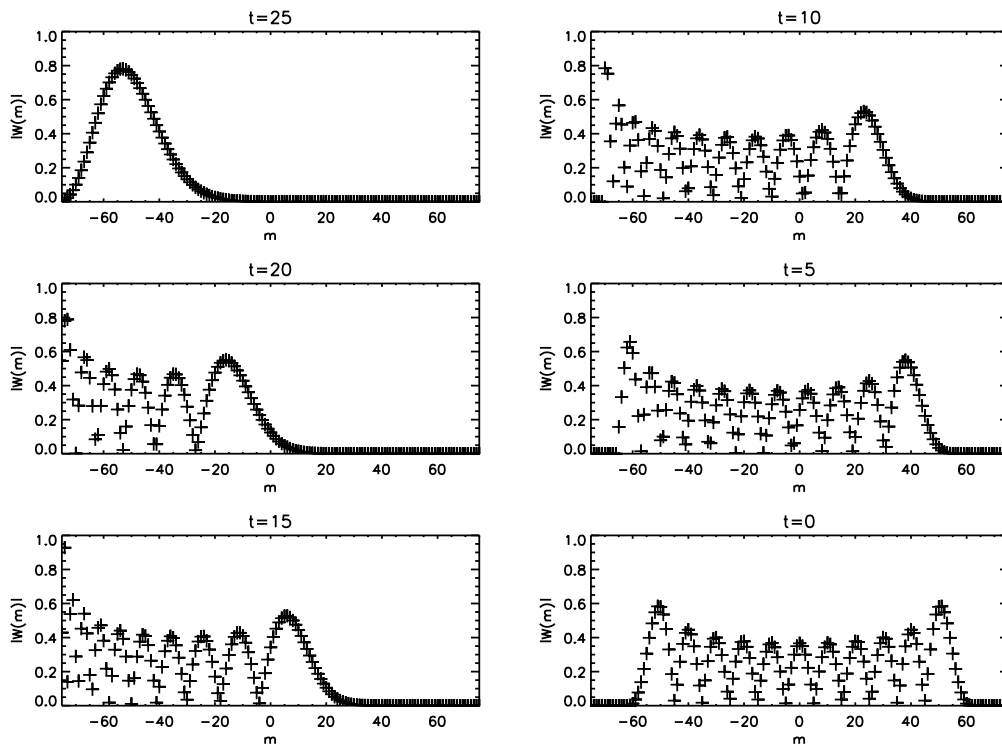
mit  $L := l(l+1)$ . Setzt man diese Abschätzung in die beiden möglichen Entwicklungen (4.83) und (4.84) der Wurzel ein, so erhält man u.a. die Näherungsformel aus der Arbeit des Autors Roth (1998), wie auch eine Erweiterung auf den anderen Grenzfall. Dadurch, daß wir im Gegensatz zu Roth (1998) nicht von der Ähnlichkeit der Eigenfunktionen Gebrauch gemacht haben, gilt diese Abschätzung nun für alle möglichen Kopplungen. Wir merken an, daß selbst der Fall der Selbstkopplung in dieser Näherungsformel eingeschlossen ist, denn im Falle der Selbstkopplung  $n = n'$  und  $l = l'$  verschwindet das Matrixelement.

In ähnlicher Weise erhalten wir für den toroidalen Anteil

$$H_{nn',ll'}^{mm'} = 4\pi \omega_{\text{ref}} \gamma_s \gamma_l \gamma_{l'} (-1)^{m'} (LL')^{1/2} \frac{w_{\max}}{R} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

Wir nehmen als Modell an, daß die Amplitude  $w_{\max}$  einer toroidalen Geschwindigkeitskomponente klein gegen die Amplitude  $u_{\max}$  einer poloidalen Komponente ist. Dann kann der Einfluß toroidaler Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigt werden.

Die Abhängigkeit des Matrixelements von der azimutalen Ordnung hat sich durch unsere Abschätzung nicht geändert und wird vollkommen durch die Wigner-3j-Symbole repräsentiert. Eine symmetrische Abhängigkeit der Frequenzverschiebung im Bezug auf  $m = 0$  ergibt sich für poloidale Felder nur für den Fall  $t = 0$ . Denn dann gilt nach der zweiten Auswahlregel (4.73)  $m' = -m$ . Da für poloidale Felder entsprechend der dritten Auswahlregel die Summe  $s + l + l'$  gerade sein muß, folgt zusammen mit Gleichung (A.18)  $(s \ l \ l' / 0 \ m \ -m) = (s \ l \ l' / 0 \ -m \ m)$ .



**Abbildung 4.9.** Verhalten des Wigner-3j-Symbols  $(25 \ 75 \ 60/t \ m \ -(t+m))$  in Abhängigkeit der azimutalen Ordnung  $m$ . Aufgetragen ist das Verhalten für verschiedene Geometrien des Geschwindigkeitsfeldes von sektoral  $t = 25$  bis zonal  $t = 0$ .

In allen anderen Fällen mit  $t \neq 0$  gibt es keine Symmetrien bezüglich  $m = 0$ . Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 4.9 für das Beispiel  $(25 \ 75 \ 60/t \ m \ -(t+m))$  dargestellt. Der Parameter  $s$  hat dort den Wert 25 und der Parameter  $t$  nimmt die Werte 25, 20, 15, 10, 5 und 0 an. Dies entspricht einem Übergang von einer sektoralen Geometrie zu einer zonalen Geometrie der zugehörigen Kugelflächenfunktionen.

Wir betrachten nun den Gültigkeitsbereich und die Güte der Näherungsformel. Eine Voraussetzung ist, daß die maximale horizontale Geschwindigkeit gleich der maximalen radialen Geschwindigkeit sei. Dies ist der Fall für den Bereich um  $s \approx 5$  für das Parabelprofil. Für ein radiales Geschwindigkeitsprofil mit dem Maximum näher an der Oberfläche muß auf Grund von Gleichung (3.5)  $s$  höher gewählt werden, weil am Ort des Maximums  $r$  größer ist. Somit hängt die Genauigkeit der Näherungsformel vom gewählten Tiefenprofil ab. Aber schon auf Grund der gemessenen Geschwindigkeitsamplituden in den Supergranulen oder den Granulen, muß für ein Geschwindigkeitsprofil mit Maximum nahe der Oberfläche  $s$  höher gewählt werden. Daraus folgt, daß die Näherungsformel für alle physikalisch denkbaren Geschwindigkeitsprofile gültig ist.

Des weiteren haben wir alle Beiträge mit  $\xi_n$  vernachlässigt. Demnach ist die Näherungsformel für Oszillationen mit hohem  $l$ , deren Umkehrpunkt nahe an der Oberfläche liegt (etwa für  $l \geq 100$ ), zu ungenau.

Für die hier diskutierten Fälle machen wir mit der Näherungsformel im Mittel einen Fehler in der Größenordnung von 10%. Tabelle 1 listet einige Matrixelemente von gekoppelten Oszillationen auf.

erster Koppler		zweiter Koppler		numerisch/Näherung
l	n	l	n	
33	4	31	4	1.0351395
34	4	32	4	1.0308739
8	8	2	10	1.1801391
35	4	33	4	1.0226936
38	11	32	12	1.0227614
57	9	67	8	1.1571568
14	16	22	14	1.1727932
41	11	35	12	1.1209494
11	16	5	18	0.90580787
69	3	67	3	0.99188885
3	28	11	25	0.98456028

**Tabelle 1.** Vergleich von Ergebnissen aus der numerischen Rechnung mit der Näherungsformel (4.89) (fünfte Spalte). In den ersten Spalten befinden sich die harmonischen Grade und radialen Ordnungen der Kopplungspartner. Eingetragen sind einige ausgewählte Beispiele.

#### 4.3.2. Der allgemeine Zustand

Die Lösung  $\xi$  der gestörten Oszillationsgleichung (4.53) haben wir in erster Ordnung Störungstheorie als Überlagerung der ungestörten Eigenfunktionen angesetzt (4.54). Die Koeffizienten  $c_k$  dieser Superposition entsprechen den Komponenten der Eigenvektoren der Supermatrix  $Z$ . Der allgemeine Zustand  $\xi$  ist somit eine Überlagerung von Schwingungen. Der Realteil dieser Überlagerung kann an der Sonnenoberfläche als Schwebung gemessen werden.

Dies läßt sich einsichtig darstellen, indem man die Kopplung zweier mathematischer Pendel mit den entsprechenden Massen  $m_1$  und  $m_2$  sowie den Eigenfrequenzen  $\omega_1^2$  und  $\omega_2^2$  betrachtet. Die Pendel sind durch eine Feder mit der Federkonstanten  $k$  gekoppelt. Es zeigt sich, daß dieses akademische Beispiel ein Analogon zu zwei gekoppelten solaren Oszillationen darstellt.

Gehen wir zuerst von zwei voneinander unabhängig schwingenden Pendeln aus. Für die Auslenkungen  $x$  und  $y$  aus den jeweiligen Ruhelagen gelten die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{x} + m_1 \omega_1^2 x = 0, \quad (4.91)$$

$$m_2 \ddot{y} + m_2 \omega_2^2 y = 0 \quad (4.92)$$

oder auch

$$H_0 \xi = -M \ddot{\xi}, \quad (4.93)$$

wobei

$$H_0 = \begin{pmatrix} m_1 \omega_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 \omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Gleichung (4.93) hat vier Eigenlösungen

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(\pm i \omega_1 t) \quad \text{und} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\pm i \omega_2 t), \quad (4.95)$$

den verbleibenden Freiheitsgrad in der Skalierung der Eigenvektoren haben wir auf eins gesetzt.

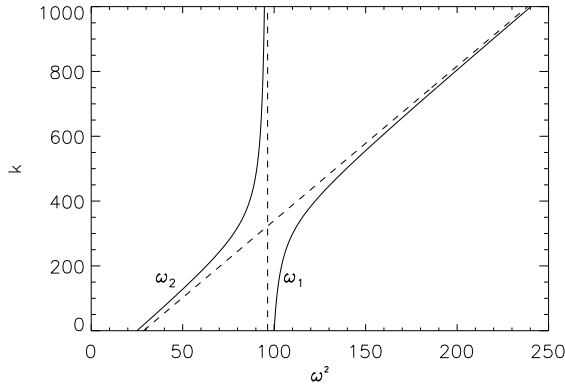
Sind die Pendel durch eine Feder mit der Federkonstanten  $k$  gekoppelt, deren Rückstellkraft linear von der Differenz  $x - y$  der Auslenkungen der Pendel abhängt, dann sind die Gleichungen

$$m_1 \ddot{x} + m_1 \omega_1^2 x + k(x - y) = 0, \quad (4.96)$$

$$m_2 \ddot{y} + m_2 \omega_2^2 y - k(x - y) = 0 \quad (4.97)$$

oder

$$[H_0 + H_1] \xi = -M \ddot{\xi} \quad (4.98)$$



**Abbildung 4.10.** Abhängigkeit der Eigenfrequenzen zweier gekoppelter Pendel von der Federkonstanten  $k$ .

mit

$$H_1 = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

zu lösen. Die Symmetrie von  $H_1$  ist offensichtlich. Da die Federkonstante  $k$  reell ist, ist  $H_1$  hermitesch ( $H_0$  ist trivialerweise ebenfalls hermitesch). Die Eigenwertkorrekturen sind somit reell und die Energie des Systems ist erhalten. Prinzipiell kann  $k$  auch zeitabhängig sein. Auf die Form der Gleichungen hat dies keinen Einfluß, aber möglicherweise auf die Hermitizität von  $H_1$ . In diesem Kapitel betrachten wir aber  $k$  zunächst noch als konstant.

Durch den Einfluß der Feder hat das System zwei neue Eigenfrequenzen

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\pm}^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{k}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{k^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 + 2k \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) (\omega_1^2 - \omega_2^2) + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \end{aligned} \quad (4.100)$$

und vier neue Eigenvektoren

$$\tilde{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_1^{(2)} \end{pmatrix} \exp(\pm i\tilde{\omega}_+ t), \quad \tilde{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \xi_2^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\pm i\tilde{\omega}_- t) \quad (4.101)$$

mit

$$\xi_{1/2}^{(2/1)} = \frac{k}{m_{1/2}(\omega_{1/2}^2 - \tilde{\omega}_{2/1}^2 + k)}. \quad (4.102)$$

Wie man sich leicht überlegt, erhält man für den Fall  $k = 0$ , d. h. keine Kopplung, wieder die ursprünglichen Eigenlösungen aus (4.95). Die Abhängigkeit der neuen Eigenfrequenzen von der Federkonstanten  $k$  verdeutlicht Abbildung 4.10. Die Frequenzen streben für  $k \rightarrow \infty$  gegen zwei Asymptoten. Eine senkrechte Asymptote ist durch die Frequenz

$$\omega_{\infty}^2 := \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.103)$$

gegeben, was dem Quadrat der Eigenfrequenz eines Systems aus zwei aneinander gehängten Fadenpendeln entspricht (Arnold, 1984). Die andere Asymptote strebt gegen unendlich. Dies sei an dieser Stelle aber nur der Vollständigkeit wegen erwähnt. Wir werden dies in unseren weiteren Überlegungen und vor allem für den Fall der solaren Oszillationen nicht weiter benötigen, da wir dort von schwacher Kopplung ausgehen.

Für den Fall identischer Pendel finden wir die Eigenfrequenzen

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1^2 &= \omega_0^2 + 2\frac{k}{m}, \\ \tilde{\omega}_2^2 &= \omega_0^2\end{aligned}\quad (4.104)$$

und die Eigenvektoren

$$\tilde{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\pm i\tilde{\omega}_1 t), \quad \tilde{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\pm i\tilde{\omega}_2 t), \quad (4.105)$$

die eine Schwingung mit erhöhter Frequenz im Gegentakt und eine Schwingung mit ungestörter Frequenz im Gleichtakt beschreiben.

Die allgemeine Lösung von Gleichung (4.98) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\tilde{\omega}_1 t) + B_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-i\tilde{\omega}_1 t) \\ &+ A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\tilde{\omega}_2 t) + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-i\tilde{\omega}_2 t),\end{aligned}\quad (4.106)$$

wobei die Konstanten  $A_{1/2}$  und  $B_{1/2}$  durch Anfangsbedingungen festgelegt werden. Im allgemeinen Fall beschreibt  $\xi$  eine Schwebung. Das bedeutet, daß beide Oszillatoren eine Kombination von zwei Grundfrequenzen in ihrer Bewegung zeigen. Ursache ist die Feder, die Impuls und Energie von einem Pendel auf das andere überträgt.

Die Konzepte gekoppelter harmonischer Pendel können leicht auf den Fall der gekoppelten solaren Oszillationen übertragen werden. Es ist lediglich darauf zu achten, an welchen Stellen allein die differentielle Rotation und an welchen Stellen zusätzlich die poloidalen Geschwindigkeitskomponenten berücksichtigt werden müssen.

Die Analogie zu den gekoppelten solaren Oszillationen wird deutlich, wenn wir

$$\tilde{\omega}_1^2 := \omega_1 + \frac{k}{m_1} \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_2^2 := \omega_2 + \frac{k}{m_2} \quad (4.107)$$

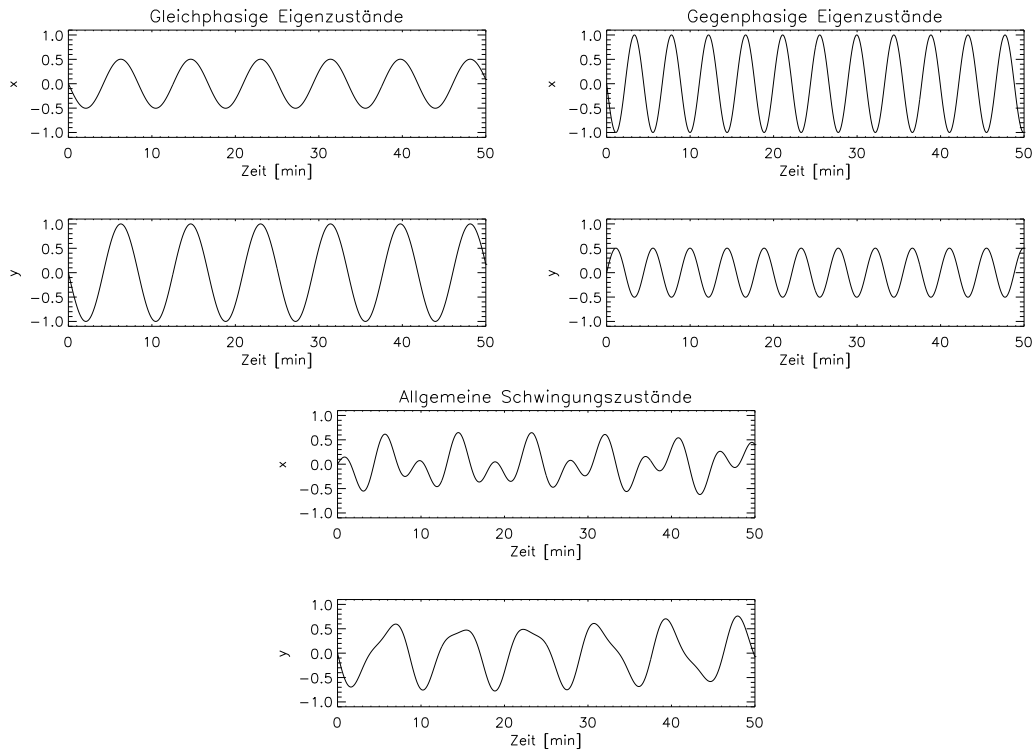
in Gleichung (4.100) substituieren. Dadurch schreibt sich Gleichung (4.100) als

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2}{2} \pm \sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4\frac{k^2}{m_1 m_2}}. \quad (4.108)$$

Dieses Ergebnis (4.108) entspricht dem Resultat (4.81). Die Substitutionen  $\tilde{\omega}_{1/2}^2$  entsprechen den um die Selbstkopplung korrigierten Eigenfrequenzen  $\omega_k^2 + H_{nn,ll}^{mm}$  bzw.  $\omega_{k'}^2 + H_{n'n',l'l'}^{m'm'}$ . Die Frequenzen  $\tilde{\omega}_{1/2}^2$  sind die Frequenzen der Pendel, wenn der jeweilige andere Oszillator in der Ruhelage festgehalten wird. Das bedeutet, daß die Frequenzen  $\tilde{\omega}_{1/2}^2$  als Resultat einer Selbstkopplung der Oszillationseigenzustände mit der Feder aufgefaßt werden können. Der Unterschied zum solaren Fall ist allerdings, daß dort nur die differentielle Rotation die Selbstkopplung verursacht. Die poloidalen Geschwindigkeitskomponenten liefern nur bei der Kopplung verschiedener Zustände zusätzliche Beiträge.

Aus der Analogie kann man folgern, daß das gekoppelte System der solaren Oszillationen mit einer einzigen harmonischen Bewegung der Frequenz  $\tilde{\omega}_k$  oder  $\tilde{\omega}_{k'}$  schwingen kann, wenn das System mit passender Amplitude angeregt wird. Denn für die gekoppelten Pendel ist dies möglich. Stehen nämlich deren Amplituden  $A_1$  und  $A_2$  im Verhältnis  $A_1/A_2 = k/m_1(\tilde{\omega}_1^2 - \omega_-^2)$  oder äquivalent  $A_1/A_2 = m_2(\tilde{\omega}_2^2 - \omega_-^2)/k$ , ist eine mögliche Bewegung des Systems durch

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} k/[m_1(\tilde{\omega}_1^2 - \omega_-^2)] \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_- t} \quad (4.109)$$



**Abbildung 4.11.** Schwingungszustände zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren  $x$  und  $y$  mit den Frequenzen  $\nu_1 = 3000 \mu\text{Hz}$ ,  $\nu_2 = 3010 \mu\text{Hz}$  und einer Kopplungskonstanten  $k = 10^{-4} \text{ kg/s}^2$ .

gegeben. Eine weitere mögliche harmonische Bewegung mit Frequenz  $\omega_+$  hat den Eigenvektor

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -k/[m_2(\omega_+^2 - \tilde{\omega}_2^2)] \end{pmatrix} e^{-i\omega_+ t}. \quad (4.110)$$

Bewegt sich das System mit  $\omega_-$ , dann sind die Schwingungen in Phase. Allerdings hat der erste Oszillator eine mit dem Faktor  $k/[m_1(\tilde{\omega}_1^2 - \omega_-^2)]$  skalierte Amplitude. Im Fall  $k \rightarrow 0$ , bewegt sich die Masse  $m_1$  nur ganz leicht. Für  $k = 0$  trägt die Masse  $m_2$  allein die Energie und die Oszillationsfrequenz ist  $\tilde{\omega}_2$ .

Befindet sich das System im Zustand (4.110), sind die Oszillatoren in Gegenphase. Hier gilt, falls  $k$  klein ist, daß der Oszillator mit Masse  $m_1$  die meiste Energie trägt und sich  $m_2$  wie ein angetriebener Oszillator verhält.

Aber keine dieser Bewegungen entspricht dem allgemeinen Bewegungszustand. Die allgemeine Bewegung ist der Realteil der Summe dieser beiden Eigenzustände

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -k/[m_2(\omega_+^2 - \tilde{\omega}_2^2)] \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \begin{pmatrix} k/[m_1(\tilde{\omega}_1^2 - \omega_-^2)] \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \varphi_-). \quad (4.111)$$

Dabei werden die Amplituden  $A_{\pm}$  und die Phasen  $\varphi_{\pm}$  den Anfangsbedingungen angepaßt. Abbildung 4.11 zeigt die Eigenschwingungen und einen Schwebungszustand für zwei gekoppelte Oszillationen.

Für den Fall der schwachen Kopplung ergibt sich aus der Entwicklung der Wurzel (4.108) schon der Fall, den wir mit Gleichung (4.83) gefunden haben

$$\omega_+^2 \approx \tilde{\omega}_1^2 + \frac{k^2}{m_1 m_2 (\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)} \quad \text{oder} \quad \omega_-^2 \approx \tilde{\omega}_2^2 - \frac{k^2}{m_1 m_2 (\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)}. \quad (4.112)$$

Somit schwingt der eine Oszillator mit einer leicht erhöhten Frequenz, der andere, der mit der niedrigeren Frequenz, schwingt mit einer um den selben Betrag verringerten Frequenz.

Sind die Oszillatoren nicht in einem der Eigenzustände angeregt, so kommt es während der Bewegung zum Energieübertrag von einem Oszillator auf den anderen. Regt man zum Beispiel das System so an, daß die Masse  $m_1$  zu Beginn die Auslenkung  $A$  hat, während  $m_2$  sich in der Ruhelage befindet, so findet man mit (4.111) für die weitere Bewegung

$$x = A \cos[(\omega_+ - \omega_-)t/2] \cos[(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)t/2] - A \frac{\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \sin[(\omega_+ - \omega_-)t/2] \sin[(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)t/2],$$

$$y = 2A \frac{k}{m_2(\omega_+^2 - \omega_-^2)} \sin[(\omega_+ - \omega_-)t/2] \sin[(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)t/2]. \quad (4.113)$$

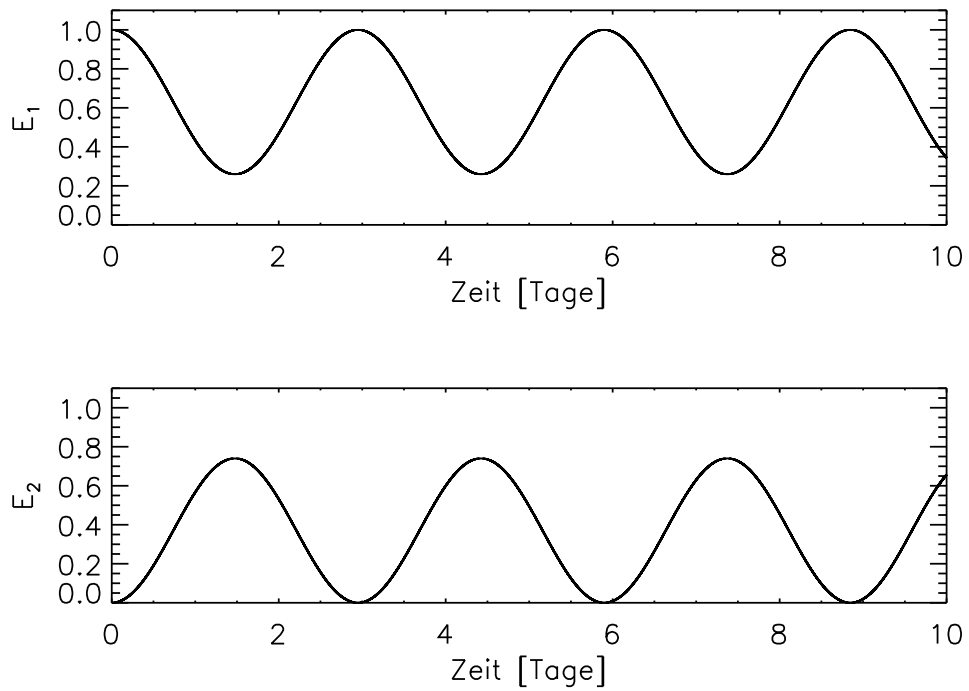
Man erkennt, daß für  $t = 0$  die Auslenkung  $y = 0$  ist; dies ändert sich aber schnell. Je nachdem, wie sehr sich  $\omega_+$  und  $\omega_-$  voneinander unterscheiden, braucht es mehrere Perioden bis die Schwebung erkennbar wird. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  hat  $m_1$  die gesamte Energie, die dann im Laufe der Bewegung an  $m_2$  übertragen wird, bis diese Oszillation die maximale Amplitude  $2Ak/[m_2(\omega_+^2 - \omega_-^2)]$  erreicht hat. Dann fließt die Energie wieder zum Oszillator  $m_1$  zurück. Ist  $\omega_+ - \omega_- \ll \omega_+$ , so kann man für die mittlere Energie der Oszillatoren näherungsweise

$$E_1 \approx \frac{1}{8} m_1 A^2 (\omega_+ + \omega_-)^2 \left\{ 1 - \frac{4k^2/(m_1 m_2)}{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4k^2/(m_1 m_2)} \sin^2[(\omega_+ - \omega_-)t/2] \right\}, \quad (4.114)$$

$$E_2 \approx \frac{1}{2} m_1 A^2 \frac{(4k^2/(m_1 m_2))(\omega_+ + \omega_-)^2}{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + (4k^2/(m_1 m_2))} \sin^2[(\omega_+ - \omega_-)t/2]$$

ableiten. Daraus folgt, daß die Energie mit einer Periode von  $4\pi/(\omega_+ - \omega_-)$  zwischen den beiden Pendeln hin- und herfließt. Die Amplitude der Energieschwankung hängt von der Kopplungskonstante  $k$  und den Frequenzen der Oszillationen ab. Für den Spezialfall  $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$  wird jeweils der volle Energiebetrag zwischen den Pendeln übertragen, bevor sie wieder zurückfließt. Andernfalls wird die Energie nur teilweise übertragen. Abbildung 4.12 zeigt ein Beispiel für einen teilweisen Energieübertrag.

Die hier dargestellten Überlegungen gelten analog für gekoppelte harmonische Pendel und gekoppelte solare Oszillationen. Somit gibt es durch den Einfluß stationärer großskaliger Strömungen für den Fall der solaren Oszillationen ebenfalls Energieübertrag zwischen den Modi. Da die koppelnden solaren Oszillationen nahezu identisch sind, folgt, daß in etwa die ganze Energie zwischen gekoppelten Modi übertragen wird. Die Zeitskala  $T_{\text{Schwebung}}$  für den Energieübertrag ergibt sich nach der Gleichung (4.114) aus der Differenz der verschobenen Frequenzen. Dies bedeutet im solaren Fall  $T_{\text{Schwebung}} = 2\pi/(\tilde{\omega}_k - \tilde{\omega}_{k'})$ . Wird durch eine großskalige Strömung auf der Sonne einer Frequenzverschiebung von etwa  $1 \mu\text{Hz}$  verursacht, schwankt die Energie zweier gekoppelter Modi innerhalb von etwa zwei Wochen sehr stark. Zudem sind die Energieschwankungen der Modi in Antiphase. Somit bietet der experimentelle Nachweis von Energieübertrag zwischen solaren Oszillationen eine Möglichkeit, großskalige Geschwindigkeitsfelder mittels Helioseismologie zu untersuchen.

Energieaustausch zwischen  
gekoppelten Oszillatoren

**Abbildung 4.12.** Energieaustausch zwischen zwei gekoppelten Oszillationen mit Frequenzen  $\nu_1 = 3000 \mu\text{Hz}$  und  $\nu_2 = 3001 \mu\text{Hz}$  und einer Kopplungskonstanten  $k = 2 \cdot 10^{-7} \text{ kg/s}^2$ .



## Theorie zeitabhängiger Störungen

*Die Neugier steht immer an erster Stelle eines Problems, das gelöst werden will.*

*(Galileo Galilei)*

Die Geschwindigkeitskomponenten in der solaren Konvektionszone können entgegen unserer Annahmen in Kapitel 4 nicht als stationär betrachtet werden. Vor allem die kleinskaligen Geschwindigkeitskomponenten auf der Sonne sind auf Zeitskalen von Minuten (z. B. Granulation) stark variabel (Nesis et al., 2001). Großskalige Komponenten haben eine höhere Lebensdauern (z. B. Supergranulation mehrere Tage). Somit sind die Effekte auf die solaren Oszillationen, die durch Geschwindigkeitskomponenten verursacht werden, ebenfalls als zeitlich variabel anzusehen. Dies ist Anlaß für genauere Studien, die Inhalt dieses Kapitels sind. Als Schwerpunkte entwickeln wir die Störungstheorie für zeitabhängige Phänomene sowie in einer Anwendung davon betrachten wir den Einfluß zeitlich variabler divergenzfreier Strömungen in der Konvektionszone auf die solaren Oszillationen.

Ausgangspunkt sind abermals die ungestörten Oszillationsgleichungen, deren vollständiger Satz von Lösungen  $\xi_n$  gegeben ist. Es gilt somit

$$H_0(\mathbf{r})\xi_n(\mathbf{r}, t) = -\rho_0\omega_n^2\xi_n(\mathbf{r}, t). \quad (5.1)$$

Der verwendete Index steht wiederum für das ganze Tripel der Quantenzahlen. Unter Einfluß einer zeitabhängigen Störung suchen wir Lösungen, welche die Gleichung

$$[H_0 + \varepsilon H_1(\mathbf{r}, t)]\xi(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi(\mathbf{r}, t) \quad (5.2)$$

erfüllen. Wir entwickeln erneut die allgemeine Lösung  $\xi$  nach dem vollständigen Satz  $\xi_n$  (vgl. Gl. (4.54))

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n(t)\xi_n(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t}. \quad (5.3)$$

Hierbei ist die mit  $\xi_n$  verknüpfte Zeitabhängigkeit explizit angeschrieben und dasselbe Symbol  $\xi_n$  für den zeitunabhängigen Anteil benutzt. Im Fall  $H_1(\mathbf{r}, t) = 0$  wären die Entwicklungskoeffizienten  $c_n(t)$  Konstanten entsprechend der anfänglichen Anregung der Oszillationen  $\xi_n$ . Im Unterschied zur Störungstheorie für einen stationären Operator  $H_1(\mathbf{r})$  sind nun die Koeffizienten  $c_n$  zeitabhängig.

Die Koeffizienten  $c_n(t)$  genügen einem Satz von Gleichungen, den wir durch Einsetzen des Ansatzes (5.3) in die Gleichung (5.2) erhalten

$$\rho_0 \sum_n [\ddot{c}_n - 2i\omega_n \dot{c}_n] \xi_n \exp(-i\omega_n t) = \varepsilon \sum_n c_n H_1(\mathbf{r}, t) \xi_n \exp(-i\omega_n t), \quad (5.4)$$

wobei wir von Gleichung (5.1) Gebrauch gemacht haben. Multipliziert man skalar mit  $\xi_m^*(\mathbf{r})$ , integriert über das Volumen des Sonnenmodells und verwendet die Orthogonalitätsrelation (4.28),

so ergibt sich nach Kürzen des Faktors  $\exp(-i\omega_m t)$  der gesuchte Satz von Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten  $c_m(t)$

$$\ddot{c}_m(t) - 2i\omega_m \dot{c}_m(t) = \frac{\varepsilon}{N_m} \sum_n c_n(t) H_{mn}(t) \exp(i\Delta_{mn}t) . \quad (5.5)$$

Hierbei haben wir

$$H_{mn}(t) := \int \xi_m^* \cdot H_1(\mathbf{r}, t) \xi_n d^3r \quad (5.6)$$

und

$$\Delta_{mn} := \omega_m - \omega_n \quad (5.7)$$

definiert. Die Definition (5.6) entspricht der zeitabhängigen Darstellung des allgemeinen Matrixelements aus Gleichung (4.57). Bei dem Differentialgleichungssystem (5.5) handelt es sich um ein System zweiter Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten. Es beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems der solaren Oszillationen unter dem Einfluß der Störung  $H_1(\mathbf{r}, t)$  und stellt durch die Angabe der Koeffizienten o.B.d.A zum Zeitpunkt  $t = 0$  ( $c_m(t = 0) = c_m^{(0)}$ ) ein Anfangswertproblem dar. Als Störung  $H_1$  können prinzipiell verschiedene physikalische zeitabhängige Vorgänge auf der Sonne in Frage kommen. Wir wollen uns hier auf zeitabhängige Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes in der Konvektionszone beschränken. Numerisch läßt sich das Anfangswertproblem für jede Konfiguration des Geschwindigkeitsfeldes und dessen Zeitabhängigkeit beispielsweise mit einem Runge-Kutta-Verfahren lösen. Einblick und Verständnis in das zeitliche Verhalten des Systems erhält man jedoch nur mit Hilfe von analytischen Lösungen. Solche Lösungen sind jedoch nicht allgemein für jede Zeitabhängigkeit von  $H_1$  auffindbar (Walter, 1993). Deshalb ist es zweckmäßig, unsere Konzentration auf ein einfaches Beispiel für die Zeitabhängigkeit von  $H_1$  zu beschränken. Wir werden deshalb im folgenden die Gleichungen für

$$H_1(\mathbf{r}, t) = H_1(\mathbf{r})(1 - \exp(i\Omega t)) \quad (5.8)$$

betrachten. Damit haben wir es mit einem Geschwindigkeitsfeld zu tun, das harmonisch zwischen null und seinem Maximalwert variiert. Das Differentialgleichungssystem (5.5) hat somit die Gestalt

$$\ddot{c}_m - 2i\omega_m \dot{c}_m = \frac{\varepsilon}{N_m} \sum_n H_{mn} c_n (1 - e^{i\Omega t}) e^{i(\omega_m - \omega_n)t} . \quad (5.9)$$

Wie man leicht erkennt, sind die Terme auf der rechten Seite, die nicht mit  $\exp\{i\Omega t\}$  verknüpft sind, hermitesch. Denn diese beschreiben die zeitunabhängige Kopplung. Diejenigen Terme, in denen  $\exp\{i\Omega t\}$  auftritt, sind nicht hermitesch.

### 5.1. Iteratives Lösungsverfahren

Eine geschlossene analytische Lösung für das System (5.9) läßt sich nicht angeben. Nur durch Näherungsverfahren lassen sich Lösungen bestimmen. Eine Näherung ergibt sich durch den Ansatz

$$c_m(t) = c_m^{(0)}(t) + \varepsilon c_m^{(1)}(t) + \varepsilon^2 c_m^{(2)}(t) + \dots . \quad (5.10)$$

Setzen wir diesen Ansatz in Gleichung (5.9) ein und sortieren nach Potenzen in  $\varepsilon$ , so können wir sukzessive die zeitabhängige Störungstheorie nullter, erster, zweiter, ... Ordnung entwickeln.

#### 5.1.1. Nullte Ordnung

Vergleichen wir nach dem Einsetzen des Ansatzes (5.10) in Gleichung (5.9) die Koeffizienten zu den zugehörigen Potenzen, erhalten wir für die nullte Ordnung die Differentialgleichung

$$\ddot{c}_m^{(0)} - 2i\omega_m \dot{c}_m^{(0)} = 0 . \quad (5.11)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$c_m^{(0)} = A_m^{(0)} + B_m^{(0)} e^{2i\omega_m t} \quad (5.12)$$

mit den Integrationskonstanten  $A_m^{(0)}$  und  $B_m^{(0)}$ . Da für den Eigenvektor  $\xi(\mathbf{r}, t)$  Gleichung (5.3) gilt, erhält man in nullter Ordnung

$$\xi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \left( A_m^{(0)} e^{-i\omega_m t} + B_m^{(0)} e^{i\omega_m t} \right) \xi_m(\mathbf{r}). \quad (5.13)$$

Das bedeutet, daß die Integrationskonstanten  $A_m^{(0)}$  und  $B_m^{(0)}$  zu den zueinander komplex konjugierten Eigenschwingungen gehören.

### 5.1.2. Erste Ordnung

Für die erste Ordnung finden wir die Gleichung

$$\ddot{c}_m^{(1)} - 2i\omega_m \dot{c}_m^{(1)} = \frac{1}{N_m} \sum_n H_{mn} c_n^{(0)} (1 - e^{i\Omega t}) e^{i(\omega_m - \omega_n)t}, \quad (5.14)$$

in die wir die Lösung (5.12) einsetzen. Integrieren können wir diese Differentialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten. Wir finden die Lösung

$$c_m^{(1)} = \frac{1}{N_m} \sum_n H_{mn} \left\{ A_n^{(0)} \left[ \frac{e^{i(\omega_m - \omega_n)t}}{\omega_m^2 - \omega_n^2} + \frac{e^{i(\Omega + \omega_m - \omega_n)t}}{(\Omega - \omega_n)^2 - \omega_m^2} \right] + B_n^{(0)} \left[ \frac{e^{i(\omega_m + \omega_n)t}}{\omega_m^2 - \omega_n^2} + \frac{e^{i(\Omega + \omega_m + \omega_n)t}}{(\Omega + \omega_n)^2 - \omega_m^2} \right] \right\}. \quad (5.15)$$

Die zusätzlich auftretenden Integrationskonstanten konnten wir gleich null setzen, da wir zur eindeutigen Festlegung nur die Integrationskonstanten  $A_n^{(0)}$  und  $B_n^{(0)}$  benötigen.

### 5.1.3. Zweite Ordnung

Für die zweite Ordnung ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{c}_m^{(2)} - 2i\omega_m \dot{c}_m^{(2)} = \frac{1}{N_m} \sum_n c_n^{(1)} H_{mn} (1 - e^{i\Omega t}) e^{i(\omega_m - \omega_n)t}. \quad (5.16)$$

Oder nach Einsetzen des Resultats (5.15)

$$\begin{aligned} \ddot{c}_m^{(2)} - 2i\omega_m \dot{c}_m^{(2)} &= \frac{1}{N_m} \sum_n H_{mn} (1 - e^{i\Omega t}) e^{i(\omega_m - \omega_n)t} \\ &\times \left\{ \frac{1}{N_n} \sum_k H_{nk} \left[ A_k^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_n - \omega_k)t}}{\omega_n^2 - \omega_k^2} + \frac{e^{i(\Omega + \omega_n - \omega_k)t}}{(\Omega - \omega_k)^2 - \omega_n^2} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + B_k^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_n + \omega_k)t}}{\omega_n^2 - \omega_k^2} + \frac{e^{i(\Omega + \omega_n + \omega_k)t}}{(\Omega + \omega_k)^2 - \omega_n^2} \right) \right] \right\}. \quad (5.17) \end{aligned}$$

Wieder integrieren wir mit der Methode der Variation der Konstanten und erhalten

$$\begin{aligned} c_m^{(2)} &= \frac{1}{N_m} \sum_n H_{mn} \frac{1}{N_n} \sum_k H_{nk} \left\{ A_k^{(0)} \left[ \frac{e^{i(\omega_m - \omega_k)t}}{(\omega_m^2 - \omega_k^2)(\omega_n^2 - \omega_k^2)} - \frac{e^{i(\Omega + \omega_m - \omega_k)t}}{[\omega_m^2 - (\omega_k - \Omega)^2][\omega_n^2 - (\omega_k - \Omega)^2]} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{e^{i(\Omega + \omega_m - \omega_k)t}}{(\omega_n^2 - \omega_k^2)[\omega_m^2 - (\omega_k - \Omega)^2]} + \frac{e^{i(2\Omega + \omega_m - \omega_k)t}}{[\omega_n^2 - (\omega_k - \Omega)^2][\omega_m^2 - (\omega_k - 2\Omega)^2]} \right] \right. \\ &\left. + B_k^{(0)} \left[ \frac{e^{i(\omega_m + \omega_k)t}}{(\omega_m^2 - \omega_k^2)(\omega_n^2 - \omega_k^2)} - \frac{e^{i(\Omega + \omega_m + \omega_k)t}}{[\omega_m^2 - (\omega_k + \Omega)^2][\omega_n^2 - (\omega_k + \Omega)^2]} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{e^{i(\Omega + \omega_m + \omega_k)t}}{(\omega_n^2 - \omega_k^2)[\omega_m^2 - (\omega_k + \Omega)^2]} + \frac{e^{i(2\Omega + \omega_m + \omega_k)t}}{[\omega_n^2 - (\omega_k + \Omega)^2][\omega_m^2 - (\omega_k + 2\Omega)^2]} \right] \right\}. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Die neu auftretenden Integrationskonstanten haben wir wieder gleich null gesetzt. Darüber hinaus ist hier zu beachten, daß für  $k = m$  manche Nenner null werden können. Für diesen Fall treten die Matrixelemente in der Kombination  $H_{mn}H_{nm}$  auf und sind nicht mit einer Zeitabhängigkeit  $\exp\{i\Omega t\}$  verknüpft. Da aber gerade dann die Störmatrix hermitesch ist (s. Anhang B) und die Summe über alle Zustände erfolgt, gilt wegen der Vollständigkeit der Eigenfunktionen  $\xi_n$ :  $\sum_n H_{mn}H_{nm} \propto H_{mm}$ . D. h. diese Summanden beschreiben die Selbstkopplung, so daß wir sie von vorne herein nicht betrachten, weil sie für poloidale Geschwindigkeitskomponenten identisch verschwinden. D. h. der erste und der fünfte Term in der Doppelsumme fallen weg.

Auf diese Weise kann man weiter verfahren. Damit die Entwicklung konvergiert, müssen wir folgende Forderungen stellen:

$$\begin{aligned} |H_{mn}| &\ll |\omega_m^2 - \omega_n^2|, \\ |H_{mn}| &\ll \Omega^2, \\ \Omega^2 &\ll \omega_n^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Das bedeutet, daß wir schwache Kopplung betrachten und daß das Geschwindigkeitsfeld im Vergleich zu den Oszillationen langsam variiert.

Betrachtet man die Lösungen genauer, so wird deutlich, daß man für die quasi-entarteten Zustände große Beiträge in den einzelnen Ordnungen erhält. Die Beiträge für die Oszillationen mit großem Frequenzabstand können vernachlässigt werden.

Mit dem Iterationsverfahren erhält man die nächsthöhere Ordnung aus der vorangehenden, indem man sie mit  $(1 - \exp\{i\Omega t\}) \exp\{i(\omega_m - \omega_n)t\}$  multipliziert und dann integriert. Dadurch treten nach und nach die höheren Harmonischen der Grundschwingungen mit Frequenzen  $\Omega$  und  $\omega_m - \omega_n$  und Kombinationen davon auf. Deshalb variiert die Amplitude der Oszillationen zusätzlich mit diesen harmonischen "Obertönen".

## 5.2. Das Zwei-Koppler-System

Um einen genauen Einblick in das Kopplungsverhalten der solaren Oszillationen durch zeitlich variable Geschwindigkeitsfelder zu erhalten, benutzen wir wiederum das Zwei-Koppler-Modell. Für dieses haben wir das Gleichungssystem

$$\ddot{c}_1(t) - 2i\omega_1\dot{c}_1(t) = \frac{\varepsilon}{N_1}c_2(t)H_{12}(1 - e^{i\Omega t})e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}, \quad (5.20)$$

$$\ddot{c}_2(t) - 2i\omega_2\dot{c}_2(t) = \frac{\varepsilon}{N_2}c_1(t)H_{21}(1 - e^{i\Omega t})e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}, \quad (5.21)$$

zu lösen. Wobei wir nur den Effekt der poloidalen Geschwindigkeitskomponente betrachten. Wie wir in Kapitel 1 gesehen haben, ist die differentielle Rotation nur mit einer Zeitskala in der Größenordnung eines Sonnenzyklus variabel, so daß wir sie für unsere Zwecke als konstant ansehen können. Somit führt die differentielle Rotation nur zu einer Frequenzverschiebung, aber nicht zu Schwankungen in der Amplitude.

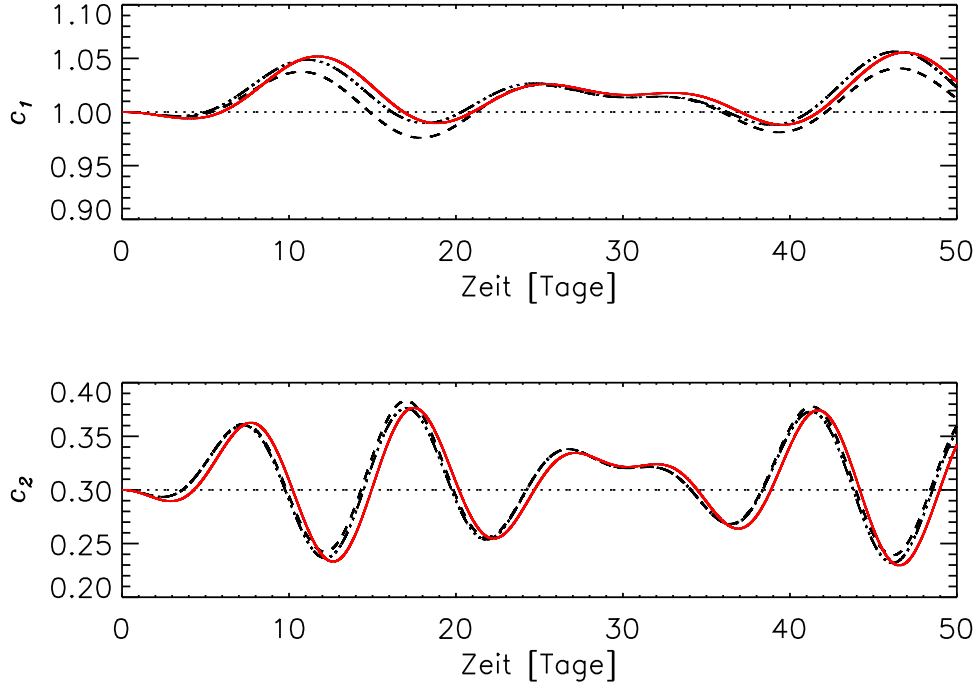
Mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} c_1(t) &= c_1^{(0)}(t) + \varepsilon c_1^{(1)}(t) + \varepsilon^2 c_1^{(2)}(t) + \dots, \\ c_2(t) &= c_2^{(0)}(t) + \varepsilon c_2^{(1)}(t) + \varepsilon^2 c_2^{(2)}(t) + \dots \end{aligned} \quad (5.22)$$

ergeben sich nach dem oben beschriebenen iterativen Verfahren für die einzelnen Ordnungen

$$c_1^{(0)}(t) = A_1^{(0)} + B_1^{(0)}e^{2i\omega_1 t}, \quad (5.23)$$

$$c_1^{(1)}(t) = \frac{H_{12}}{N_1} \left\{ A_2^{(0)} \left[ \frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{e^{i(\Omega + \omega_1 - \omega_2)t}}{\omega_1^2 - (\Omega - \omega_2)^2} \right] + B_2^{(0)} \left[ \frac{e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{e^{i(\Omega + \omega_1 + \omega_2)t}}{\omega_1^2 - (\Omega + \omega_2)^2} \right] \right\} \quad (5.24)$$



**Abbildung 5.1.** Vergleich zwischen numerischer Lösung (rote Kurven) und der Näherungslösung. Aufgetragen sind die nullte (·····), erste (---) und zweite (---) Ordnung für zwei koppelnde Modi  $\nu_1 = 3000 \mu\text{Hz}$  (oben) und  $\nu_2 = 3001 \mu\text{Hz}$  (unten), Anfangsbedingungen:  $A_1^{(0)} = 1$ ,  $B_1^{(0)} = 0$ ,  $A_2^{(0)} = 0.3$ ,  $B_2^{(0)} = 0$ . Das Geschwindigkeitsfeld hat eine Amplitude  $u_{\max} = 100 \text{ m/s}$  und eine Frequenz  $\Omega = 2\pi/(30 \text{ Tage})$ .

und

$$c_1^{(2)}(t) = \frac{H_{12}H_{21}}{N_1N_2} \left\{ A_1^{(0)} \left[ \frac{it}{2\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)} + \frac{e^{i\Omega t}}{\Omega(\Omega - 2\omega_1)(\omega_2^2 - \omega_1^2)} - \frac{e^{i\Omega t}}{\Omega(\Omega - 2\omega_1)[(\Omega - \omega_1)^2 - \omega_2^2]} \right] + \frac{e^{2i\Omega t}}{4\Omega(\Omega - \omega_1)[(\Omega - \omega_1)^2 - \omega_2^2]} + B_1^{(0)} \left[ \frac{ite^{2i\omega_1 t}}{2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} - \frac{e^{2i\omega_1 t}}{4\omega_1^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right] + \frac{e^{i(\Omega+2\omega_1)t}}{\Omega(\Omega + 2\omega_1)(\omega_2^2 - \omega_1^2)} - \frac{e^{i(\Omega+2\omega_1)t}}{\Omega(\Omega + 2\omega_1)[(\Omega + \omega_1)^2 - \omega_2^2]} + \frac{e^{2i(\Omega+\omega_1)t}}{4\Omega(\Omega + \omega_1)[(\Omega + \omega_1)^2 - \omega_2^2]} \right\}. \quad (5.25)$$

Für den Koeffizienten  $c_2(t)$  ist die Lösung ebenfalls durch (5.23) – (5.25) gegeben, wenn man die Indizes 1 und 2 vertauscht. Bemerkenswert ist an dieser Stelle, daß hier Terme auftreten, die linear mit der Zeit anwachsen. Diese Terme entsprechen im oben betrachteten allgemeinen Fall (5.18) den Termen, die wir auf Grund der Hermitizität und der Vollständigkeit des Systems der Eigenvektoren streichen konnten. Das Zwei-Koppler-System ist nicht vollständig, aber es beruht auf der Annahme, daß nur zwei Modi für die Beschreibung der Kopplung ausreichen. D. h. andere Modi haben keinen Einfluß, und das Zwei-Koppler-System ist *quasi-vollständig*. Somit können wir auch für das Zwei-Koppler-System  $H_{12}H_{21} = 0$  annehmen. Daraus folgt, daß die linear mit der Zeit anwachsenden Terme wegfallen.

Für ein Beispiel wollen wir die numerischen Lösungen und die Näherungslösungen in Abbildung 5.1 vergleichen. Wir betrachten zwei solare Oszillationen mit Frequenzen  $\nu_1 = 3000 \mu\text{Hz}$  und  $\nu_2 = 3001 \mu\text{Hz}$ , die durch ein zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld miteinander koppeln. Für das Geschwindigkeitsfeld gilt

$$\mathbf{v}(r, t) = u_s^t(r)(1 - e^{i\Omega t}) \quad (5.26)$$

mit einer Tiefenabhängigkeit gemäß der Gleichung (3.7) mit  $u_{\max} = 100 \text{ m/s}$  und  $\Omega = 2\pi/(30 \text{ Tage})$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  hatten die Oszillationen die normierten Amplituden  $c_1(t = 0) = 1$  und  $c_2(t = 0) = 0.3$  und eine Phasenverschiebung von  $1.1\pi$ . Für das Geschwindigkeitsfeld gilt  $\mathbf{v}(r, t = 0) = \mathbf{0}$ . Die numerische Lösung zeigt Variationen der Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  um diese Werte. Die Näherungslösungen geben schon bis zur zweiten Ordnung dieses Verhalten sehr gut wieder.

Das Beispiel zeigt, wie stark die Schwankungen in den Amplituden der Oszillationen sein können. Darüber hinaus sieht man, daß die Variationen eine Überlagerung von Schwingungen der Frequenzen  $\omega_1 - \omega_2$  und  $\Omega + \omega_1 - \omega_2$  bzw.  $\omega_1 + \omega_2$  und  $\Omega + \omega_1 + \omega_2$  für den komplex konjugierten Anteil der Lösung sind.

Für die Bestimmung der allgemeinen Lösung  $\xi$  muß man die Koeffizienten noch mit dem Faktor  $\exp\{-i\omega_1 t\}$  bzw.  $\exp\{-i\omega_2 t\}$  multiplizieren. Filtert man die Lösung nach den einzelnen Zuständen, so erhält z. B. der Eigenvektor  $\xi_1$  ab der ersten Ordnung eine Beimischung seines Kopplungspartners mit Frequenz  $\omega_2$ . Da diese Beimischung zeitlich variabel ist, wird sie durch die Beimischung eines Zustands mit Frequenz  $\Omega + \omega_2$  geschwächt. Dies ist durch das Vorzeichen begründet. Die Stärke der Beimischung hängt neben dem Frequenzabstand von den Anfangswerten der Oszillationen und dem Matrixelement  $H_{12}$  ab. Für  $H_{12}$  gelten die Überlegungen aus Kapitel 4.

### 5.2.1. Kritische Frequenzen

Gewisse Summanden in den einzelnen Ordnungen (5.15) und (5.18) oder in (5.24) und (5.25) werden singulär. Im Zwei-Koppler-System ist dies in der ersten und zweiten Ordnung der Fall für

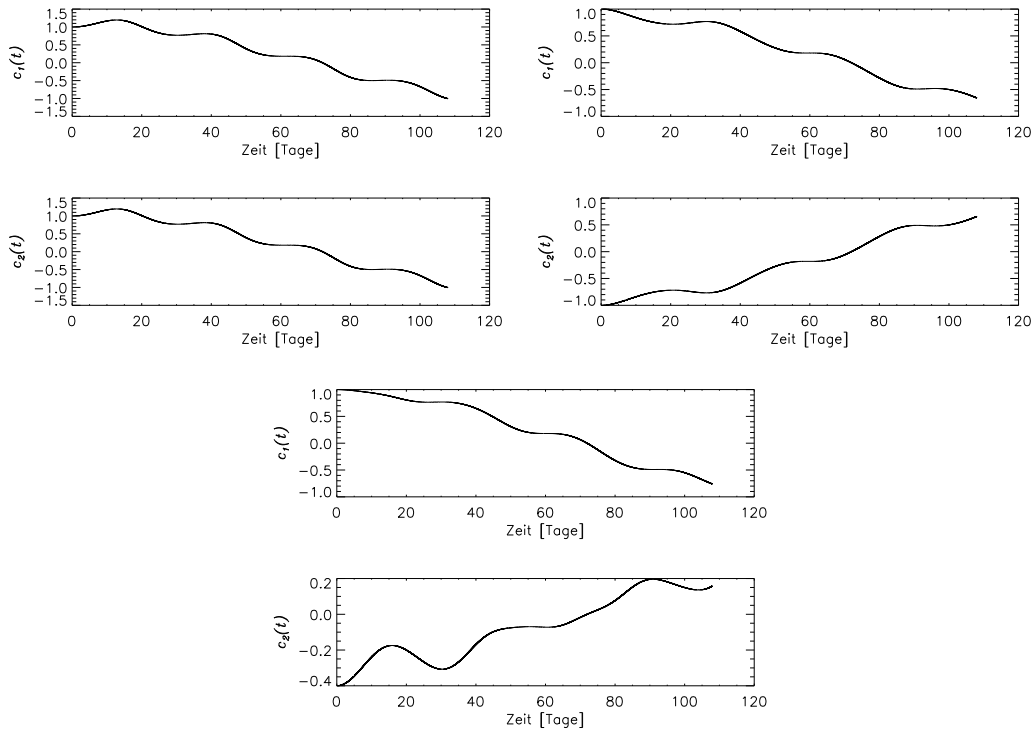
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2, \\ \Omega &= \omega_1 - \omega_2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

unter Berücksichtigung der dritten Bedingung in (5.19). Für diese Fälle wollen wir ebenfalls die Lösungen entwickeln.

#### 5.2.1.1. $\omega_1 = \omega_2$

Haben die beiden Koppler identische Frequenzen, so erhalten wir in nullter Ordnung die gleiche Lösung des Differentialgleichungssystems (5.20) und (5.21) wie in Gleichung (5.23). Die Indizes 1 und 2 können entsprechend gewählt werden. In der ersten Ordnung finden wir

$$c_1^{(1)}(t) = \frac{H_{12}}{N_1} \left[ A_2^{(0)} \left( \frac{it}{2\omega_2} + \frac{e^{i\Omega t}}{\Omega(\Omega - 2\omega_1)} \right) + B_2^{(0)} \left( \frac{e^{2i\omega_1 t}}{4\omega_1^2} - \frac{ite^{2i\omega_1 t}}{2\omega_1} + \frac{e^{i(\Omega + 2\omega_1)t}}{\Omega(\Omega + 2\omega_1)} \right) \right]. \quad (5.28)$$



**Abbildung 5.2.** Die zwei Basislösungen zweier zeitabhängig gekoppelter Oszillationen mit Frequenz  $\nu = 3000 \mu\text{Hz}$ . Oben links: gleichphasige Lösungen, oben rechts: gegenphasige Lösung, unten: ein allgemeiner Zustand. Für das Geschwindigkeitsfeld gilt  $\Omega = 2\pi/(30 \text{ Tage})$ ,  $u_{\max} = 100 \text{ m/s}$ .

Für  $c_2^{(1)}(t)$  müssen wir in dieser Lösung (5.28) nur den Index 1 durch 2 ersetzen. Das gleiche gilt für die zweite Ordnung

$$\begin{aligned}
 c_1^{(2)} = & \frac{H_{12}H_{21}}{N_1N_2} \left[ A_1^{(0)} \left( \frac{it}{8\omega_1^3} - \frac{t^2}{8\omega_1^2} + \frac{ite^{i\Omega t}}{2\Omega\omega_1(\Omega - 2\omega_1)} - \frac{e^{i\Omega t}}{2\Omega^2\omega_1(\Omega - 2\omega_1)} - \frac{e^{i\Omega t}}{2\Omega\omega_1(\Omega - 2\omega_1)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{e^{i\Omega t}}{\Omega^2(\Omega - 2\omega_1)^2} - \frac{e^{2i\Omega t}}{4\Omega^2(\Omega - 2\omega_1)(\Omega - \omega_1)} \right) \right. \\
 & + B_1^{(0)} \left( \frac{e^{2i\omega_1 t}}{8\omega_1^4} - \frac{ite^{2i\omega_1 t}}{4\omega_1^3} - \frac{t^2 e^{2i\omega_1 t}}{8\omega_1^2} - \frac{ite^{i(\Omega+2\omega_1)t}}{2\omega_1(\Omega + 2\omega_1)} + \frac{e^{i(\Omega+2\omega_1)t}}{2\Omega\omega_1(\Omega + 2\omega_1)^2} + \frac{e^{i\Omega t}}{2\Omega^3\omega_1} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{e^{i(\Omega+2\omega_1)t}}{4\Omega\omega_1^2(\Omega + 2\omega_1)} - \frac{e^{i(\Omega+2\omega_1)t}}{\Omega^2(\Omega + 2\omega_1)^2} - \frac{e^{2i(\Omega+\omega_1)t}}{4\Omega^2(\Omega + 2\omega_1)(\Omega + \omega_1)} \right) \right]. \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

Wiederum fallen einige Terme weg, die nicht mit  $\exp\{i\Omega t\}$  verknüpft sind und für die deshalb  $H_{12}H_{21} = 0$  gilt. Dies sind der erste, zweite, achte, neunte und zehnte Term.

Der einzige Unterschied in den Ordnungen von  $c_1$  und  $c_2$  ist die jeweilige Abhängigkeit vom Anfangszustand, der durch  $A_1^{(0)}$ ,  $B_1^{(0)}$  und  $A_2^{(0)}$ ,  $B_2^{(0)}$  gegeben ist. Gilt  $A_1^{(0)} = A_2^{(0)}$  und  $B_1^{(0)} = B_2^{(0)}$ , so zeigen beide gekoppelten Oszillationen das gleiche Verhalten. Im allgemeinen, haben die Koeffizienten eine Zeitabhängigkeit mit der Frequenz  $\Omega$ . Zusätzlich findet sich eine lineare Zeitabhängigkeit, die das Langzeitverhalten beschreibt.

Es gibt zwei Eigenlösungen des Systems. Eine Basislösung ist durch die Anfangsbedingungen  $A_1^{(0)} = 1$ ,  $B_1^{(0)} = 0$  und  $A_2^{(0)} = 1$ ,  $B_2^{(0)} = 0$  gegeben. Sie beschreibt die Lösung, bei der  $c_1(t)$  in Phase mit  $c_2(t)$  ist, d. h. es gilt zu jedem Zeitpunkt  $c_1(t) = c_2(t)$ . Die andere Basislösung erhält man mit den Anfangsbedingungen  $A_1^{(0)} = 1$ ,  $B_1^{(0)} = 0$  und  $A_2^{(0)} = -1$ ,  $B_2^{(0)} = 0$ . Bei dieser Lösung sind die Koeffizienten  $c_1(t)$  und  $c_2(t)$  zu allen Zeiten in Antiphase, d. h.  $c_1(t) = -c_2(t)$ . Jede beliebige Lösung des Systems mit identischen Frequenzen läßt sich als Linearkombination aus diesen Basislösungen darstellen (Abb. 5.2).

### 5.2.1.2. $\Omega = \omega_1 - \omega_2$

Die Lösung des Systems (5.20) und (5.21) für  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$  ist in nullter Ordnung wieder für beide Koppler durch (5.23) gegeben. In erster Ordnung finden wir

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}(t) &= \frac{H_{12}}{N_1} \left[ A_2^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{e^{2i(\omega_1 - \omega_2)t}}{4\omega_2(\omega_1 - \omega_2)} \right) + B_2^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} + \frac{ite^{2i\omega_1 t}}{2\omega_1} - \frac{e^{2i\omega_1 t}}{4\omega_1^2} \right) \right] \\ c_2^{(2)}(t) &= \frac{H_{21}}{N_2} \left[ A_1^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} - \frac{it}{2\omega_2} \right) + B_1^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_2 + \omega_1)t}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} - \frac{e^{2i\omega_1 t}}{4\omega_1(\omega_2 - \omega_1)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Für die zweite Ordnung finden wir

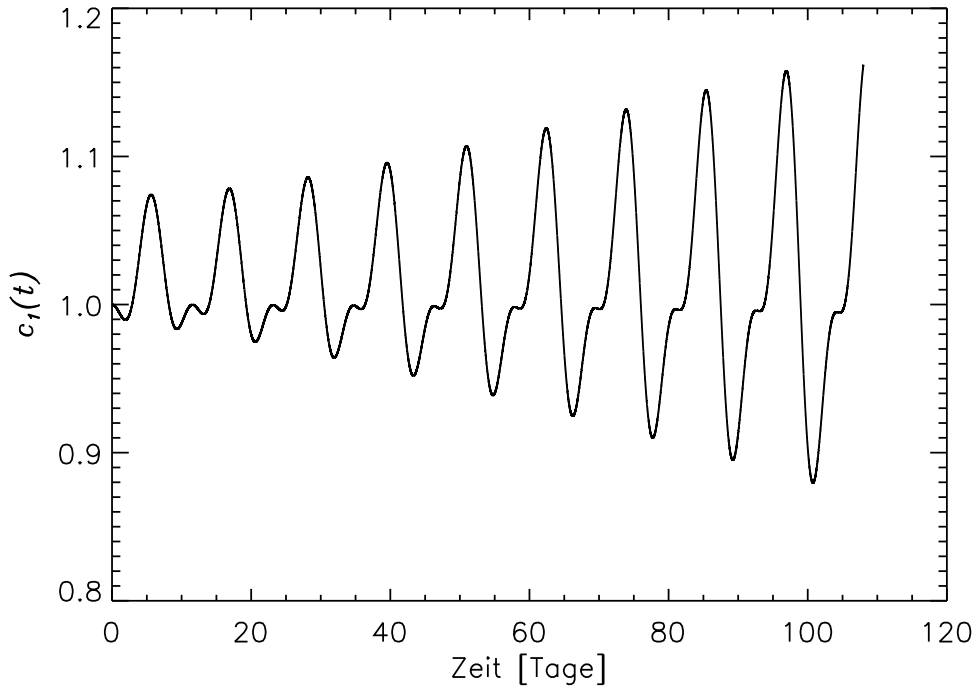
$$\begin{aligned} c_1^{(2)}(t) &= \frac{H_{12}H_{21}}{N_1N_2} \left[ A_1^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} - \frac{ite^{i(\omega_1 - \omega_2)t}}{2\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}}{2\omega_2(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{ite^{2i(\omega_1 - \omega_2)t}}{8\omega_2(\omega_1 - \omega_2)^2} + \frac{e^{2i(\omega_1 - \omega_2)t}}{16\omega_2(\omega_1 - \omega_2)^2} - \frac{e^{2i(\omega_1 - \omega_2)t}}{16\omega_2^3(\omega_1 - \omega_2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + B_1^{(0)} \left( \frac{e^{i(3\omega_1 - \omega_2)t}}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(3\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{e^{i(3\omega_1 - \omega_2)t}}{4\omega_1(\omega_2 - \omega_1)(3\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{i(4\omega_1 - 2\omega_2)t}}{8\omega_1(\omega_2 - \omega_1)^2(4\omega_1 - 2\omega_2)} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} c_2^{(2)} &= \frac{H_{12}H_{21}}{N_1N_2} \left[ A_2^{(0)} \left( \frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}}{(\omega_1 - 3\omega_2)(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}}{4\omega_2(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega_1 - 3\omega_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{2i(\omega_1 - \omega_2)t}}{8\omega_2(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega_1 - 2\omega_2)} \right) + B_2^{(0)} \left( + \frac{e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}}{2\omega_1(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{ite^{i(\omega_1 + \omega_2)t}}{2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}}{2\omega_1(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2)^2} + \frac{ite^{2i\omega_1 t}}{8\omega_1^2(\omega_1 - \omega_2)} - \frac{e^{2i\omega_1 t}}{16\omega_1^3(\omega_1 - \omega_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{2i\omega_1 t}}{16\omega_1^2(\omega_1 - \omega_2)^2} + \frac{e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}}{4\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} - \frac{e^{2i\omega_1 t}}{16\omega_1^3(\omega_1 - \omega_2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Diejenigen Terme, die wegen  $H_{12}H_{21} = 0$  wegfallen, haben wir in den Gleichungen (5.31) und (5.32) aus Gründen der Übersicht nicht angegeben.

Wir haben es mit einem Resonanzfall zu tun. Dies erkennt man daran, daß die Ergebnisse (5.30) – (5.32) Zähler wie  $it \exp\{2i\omega_1 t\}$ ,  $it$ ,  $it \exp\{i(\omega_1 - \omega_2)t\}$ ,  $it \exp\{2i(\omega_1 - \omega_2)t\}$  und  $it \exp\{i(\omega_1 + \omega_2)t\}$  enthalten. Für große Zeiten wachsen diese über alle Maße. Die Koeffizienten schwanken somit sehr stark mit der Resonanzfrequenz  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$  und die Amplituden der Schwankungen nehmen rapide zu. Für ein Beispiel haben wir die numerische Lösung des Resonanzfalls in Abbildung 5.3 für den Koeffizienten  $c_1(t)$  dargestellt. Auch der andere Koeffizient wächst über alle Grenzen. Für zwei gekoppelte solare Oszillationen mit den Frequenzen  $\nu_1$  und





**Abbildung 5.3.** Der Koeffizient  $c_1(t)$  im Resonanzfall für die Kopplung zweier Oszillationen  $\nu_1 = 3000 \mu\text{Hz}$  und  $\nu_2 = 3001 \mu\text{Hz}$ . Variiert das Geschwindigkeitsfeld genau mit dem Frequenzunterschied  $\Omega/2\pi = \nu_1 - \nu_2$ , so nehmen die Schwankungen mit der Zeit zu.

$\nu_2$  bedeutet das, daß ihre Amplituden stark ansteigen. Dies ist nur möglich, weil die Störung  $H_1(r, t)$  nicht hermitesch ist und so die Energie nicht erhalten ist.

### 5.3. Gekoppelte Pendel

Die zeitabhängige Kopplung zweier solarer Oszillationen ist analog zur Kopplung zweier Pendel mit einer zeitabhängigen Federkonstanten  $k(t)$ . Wie man leicht erkennt, bleibt die Bewegungsgleichung (4.98) gültig, wenn die Federkonstante zeitabhängig ist. Zur Berechnung des allgemeinen Zustandes  $\xi$  setzen wir die Linearkombination von  $\tilde{\xi}_1$  und  $\tilde{\xi}_2$  aus Gleichung (4.101) mit zeitabhängigen Koeffizienten an

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1(t)\tilde{\xi}_1 \exp(-i\tilde{\omega}_+ t) + c_2(t)\tilde{\xi}_2 \exp(-i\tilde{\omega}_- t). \quad (5.33)$$

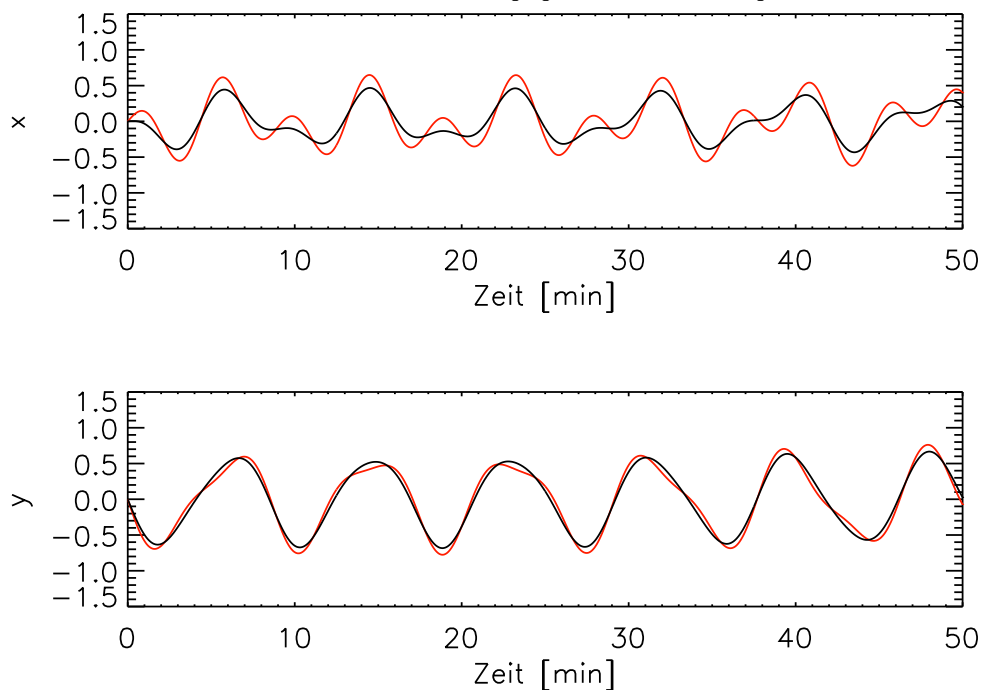
Das Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung (4.98) mit zeitabhängigem  $H_1(t)$  ergibt unter Verwendung der Orthogonalität der Eigenvektoren  $\tilde{\xi}_1$  und  $\tilde{\xi}_2$

$$\ddot{c}_1 - 2i\omega_1 \dot{c}_1 + \frac{k(t)}{m_1} c_1 = \frac{k(t)}{m_1} c_2 \exp\{-i(\omega_2 - \omega_1)t\}, \quad (5.34)$$

$$\ddot{c}_2 - 2i\omega_2 \dot{c}_2 + \frac{k(t)}{m_2} c_2 = \frac{k(t)}{m_2} c_1 \exp\{-i(\omega_2 - \omega_1)t\}. \quad (5.35)$$

Wir finden, daß diese Gleichung bis auf die Selbstkopplungsterme  $k(t)c_1/m_1$  und  $k(t)c_2/m_2$  auf der linken Seite von (5.33) bzw. (5.34) identisch zu dem Zwei-Koppler-System (5.20) und (5.21)

## Allgemeine Schwingungszustände bei zeitabhängiger Kopplung



**Abbildung 5.4.** Die Amplituden  $x$  und  $y$  bei zeitabhängiger Kopplung zweier Oszillationen mit Frequenzen  $\nu_1 = 3000\mu\text{Hz}$  und  $\nu_2 = 3010\mu\text{Hz}$ . Die Kopplungskonstante hat den Wert  $k = 10^{-4}\text{ kg/s}^2$  und variiert mit  $\Omega = 2\pi/(3\text{ Tage})$ . Zum Vergleich zeigt die rote Kurve die zeitunabhängige Kopplung aus Abb. 4.11.

ist. Den Selbstkopplungsterm hatten wir für die solaren Oszillationen vernachlässigt, da dieser keine Zeitabhängigkeit aufweist und nur zu einer Frequenzverschiebung der Modi führt.

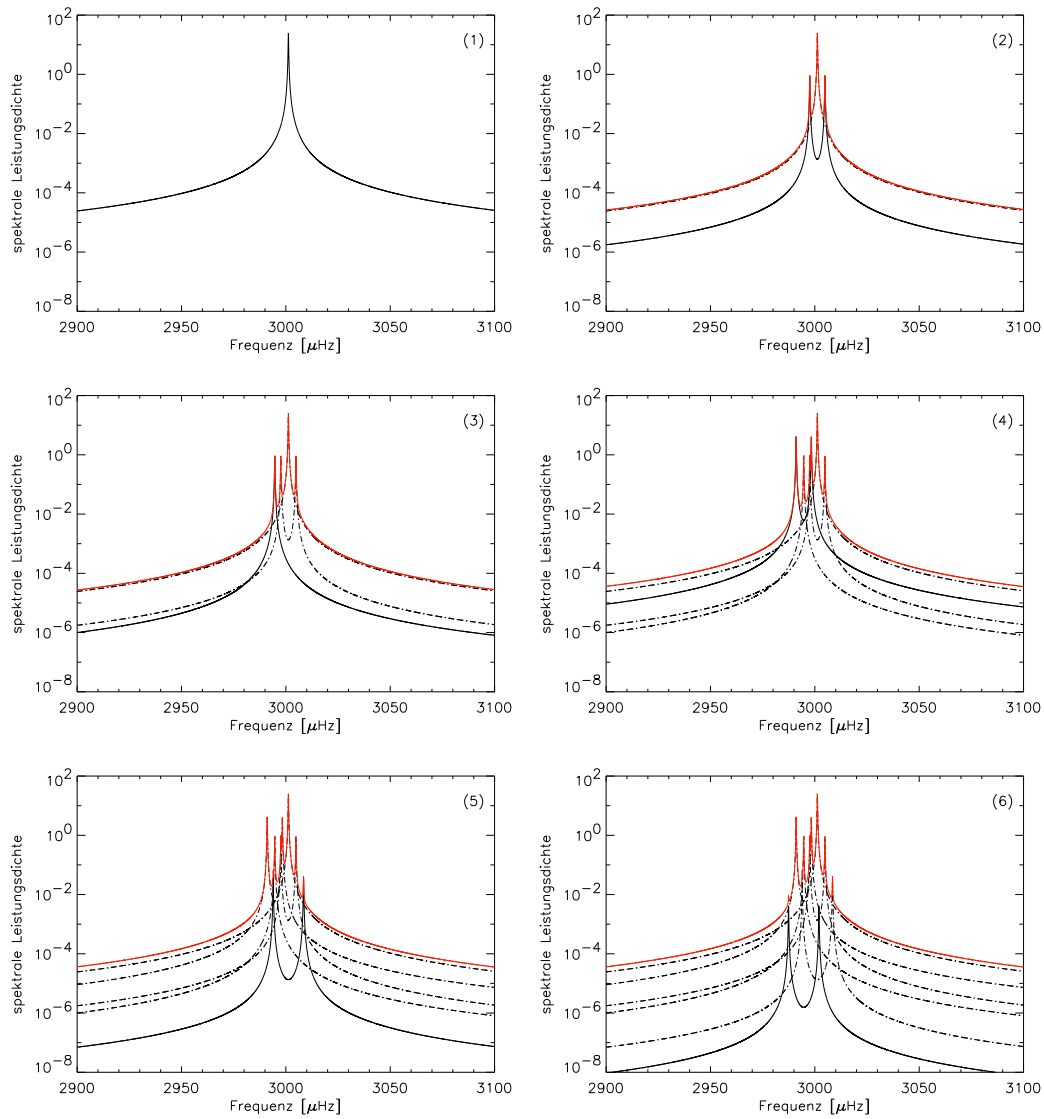
Für das Problem der gekoppelten Pendel mit zeitabhängiger Federkonstanten  $k(t)$  können wir für generelle Zeitabhängigkeiten ebenfalls keine geschlossene allgemeine Lösung finden (Walter, 1993). Auch hier müssten wir uns mit numerischen Lösungen oder einer Entwicklung gemäß (5.22) begnügen.

Allerdings sehen wir, daß wir wieder die Überlegungen für gekoppelte Pendel auf die solaren Oszillationen übertragen können.

Für die allgemeine Lösung  $\xi$  bedeutet dies, daß dieser Zustand wieder eine Schwebung beschreibt. Allerdings ist diese Schwebung eine Überlagerung von Schwingungen mit einer zeitlich sich ändernden Amplitude. Abbildung 5.4 zeigt das Beispiel aus Abbildung 4.11 für eine zeitabhängige Kopplung mit  $k(t) = k(1 - \exp\{i\Omega t\})$  und  $\Omega = 2\pi/(3\text{ Tage})$ .

#### 5.4. Ergebnisse

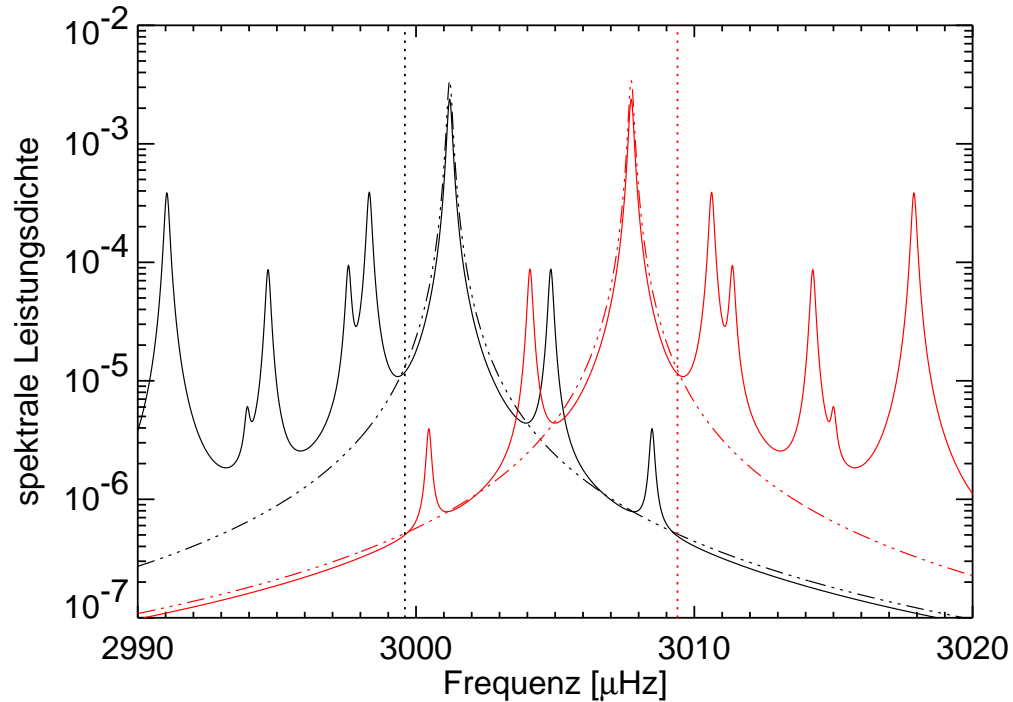
Durch die zeitabhängige Kopplung von solaren Oszillationen kommt es zu einer Mischung der Zustände. Bei der Betrachtung des Einflusses von zeitabhängigen Geschwindigkeitsfeldern ist es nicht möglich, eine feste Frequenzkorrektur zu berechnen. Hier ist es sinnvoll, den gestörten Zustand zu bestimmen. Für diesen erhalten wir eine zeitabhängige Ankopplung von anderen



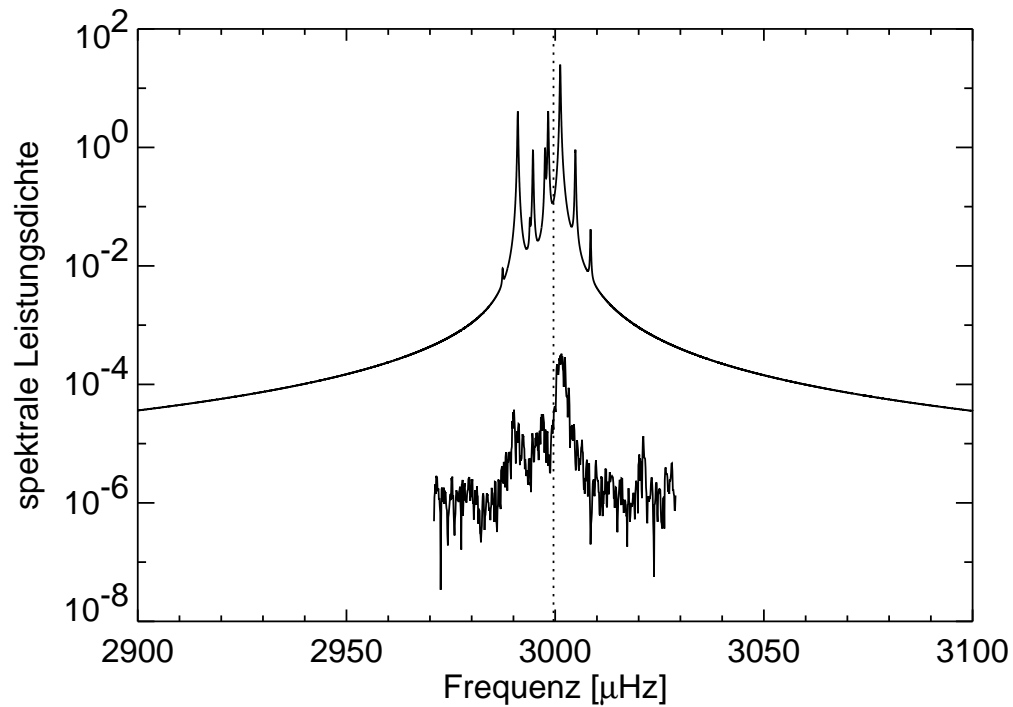
**Abbildung 5.5.** Ergebnis einer Störungsrechnung für ein zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld. Dargestellt ist das Powerspektrum (rote Kurve) eines einzelnen solaren p-Modus mit Frequenz  $\nu_1 = 3001.2 \mu\text{Hz}$  bei sukzessivem Hinzufügen der Nebenbänder (—). Die auftretenden Maxima wurden bis zur Ordnung  $\varepsilon^2$  bestimmt. (Frequenz des Partners  $\nu_2 = 3007.7 \mu\text{Hz}$ , Geschwindigkeitsfeld:  $u_{\text{max}} = 100 \text{ m/s}$ ,  $\Omega/2\pi = 3.6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$ ). Erste Abb.: ungestörter p-Modus. Zweite Abb.: p-Modus mit Nebenpeaks bei  $\nu \pm \Omega/2\pi$ . Dritte Abb.: Zusätzlicher Nebenpeak bei  $\nu_1 + \Delta_{12}$  mit  $\Delta_{12} = (\nu_1 - \nu_2)$ . Vierte Abb.: Zusätzliche Nebenpeaks bei  $\nu_1 + \Delta_{12} \pm \Omega/2\pi$ . Fünfte Abb.: Nebenpeaks bei  $\nu_1 \pm 2\Omega/2\pi$ . Sechste Abb.: Nebenpeaks bei  $\nu_1 + \Delta_{12} \pm 2\Omega/2\pi$ . Die Nebenbänder aus den vorangehenden Abbildungen sind ebenfalls eingetragen (- · - · -).

Zuständen zur betrachteten ungestörten Eigenschwingung. Die Ankopplung ist abhängig von der Variation des Geschwindigkeitsfeldes  $\Omega$  und dem Matrixelement  $H_{nm}$  der Kopplung.

Da aber eine Oszillation kein reiner Zustand mehr ist, wird man bei der Beobachtung der solaren Oszillationen wegen der beschränkten zeitlichen Auflösung nicht mehr in der Lage sein, die



**Abbildung 5.6.** Spektrale Leistungsdichte zweier Modi  $\nu_1 = 3001.2 \mu\text{Hz}$  und  $\nu_2 = 3007.7 \mu\text{Hz}$  bei zeitabhängiger Kopplung durch ein Geschwindigkeitsfeld mit  $\Omega = 2\pi/(20 \text{ Tage})$  und  $u_{\text{max}} = 100 \text{ m/s}$  und Anfangsbedingungen  $A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = 1$  und  $B_1^{(0)} = B_2^{(0)} = 0$ . Die spektralen Leistungsdichten der beiden Modi sind spiegelbildlich zur Frequenz  $(\nu_1 + \nu_2)/2$ .



**Abbildung 5.7.** Vergleich von der Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung für den p-Modus aus Abb. 5.5 (obere Kurve) und einem Powerspektrum des gleichen p-Modus aus MDI-Daten (untere Kurve). Der Schwerpunkt der numerisch bestimmten Kurve ist ebenfalls eingetragen ( $\cdots$ ).

reinen Zustände zu messen. Darüber hinaus sind die Oszillationen gedämpft und die Peaks in der spektralen Leistungsdichte (oder *Power*) erscheinen von Natur aus schon verbreitert. Deshalb erfolgt die Frequenzbestimmung aus Beobachtungsdaten über die Anpassung von Lorentz-Profilen an die Peaks in der spektralen Leistungsdichte.

Auf Grund unserer Ergebnisse können wir folgern, daß sich die spektrale Leistungsdichte eines Zustands mit der Frequenz  $\nu$  auf die beigemischten Schwingungen verteilt. Das bedeutet, daß sich je nach Stärke der Kopplung und entsprechend den Anfangsbedingungen sich Seitenbänder finden. Aus den Ergebnissen des iterativen Lösungsverfahrens können wir schließen, daß diese Seitenbänder bei  $\nu \pm \Omega/2\pi$ ,  $\nu + (\nu - \nu_n)$ ,  $\nu + (\nu - \nu_n) \pm \Omega/2\pi$ ,  $\nu \pm 2\Omega/2\pi$ ,  $\nu + (\nu - \nu_n) \pm 2\Omega/2\pi$ , usw. auftreten. Abbildung 5.5 zeigt, wie sich die spektrale Leistungsdichte entsprechend der Entwicklung (5.22) auf die Seitenbänder verteilt. Dabei haben wir angenommen, daß durch die natürliche Dämpfung der Oszillationen die Peaks durch Lorentzprofile dargestellt werden können. Die Entwicklung brechen wir nach der zweiten Ordnung ab. Der Fehler, den wir dadurch machen, ist von der Größenordnung  $\varepsilon^3$ . Für eine Geschwindigkeitskomponente mit einem parabelförmigen Tiefenprofil  $w_s^t(r)$  gemäß Gl. (3.7) und  $u_{\max} = 100$  m/s sind die ersten Nebenpeaks etwa einen Faktor 100 kleiner als das Hauptmaximum. Durch die asymmetrische Beimischung der Kopplungspartner verschiebt sich der Schwerpunkt eines Peaks. Im Vergleich zu einem Modus des Gleichgewichtsmodells führt dies effektiv zu einer Frequenzverschiebung. D. h. die Überlagerungen zur Frequenzverschiebung, die wir für ein stationäres Geschwindigkeitsfeld gemacht haben, müssen wir nun erweitern. Zeitabhängige Geschwindigkeitsfelder führen zu erniedrigten, asymmetrischen, verbreiterten und dadurch effektiv verschobenen Peaks in der spektralen Leistungsdichte. Die Frequenzverschiebung ist äquivalent zu einem mittleren Effekt der Strömung. Die Verschiebung einer Frequenz um einen Betrag und die Verschiebung der Frequenz des Kopplungspartners um denselben Betrag mit anderem Vorzeichen findet sich auch hier. Denn koppeln zwei Modi mit Frequenzen  $\nu_1$  und  $\nu_2$ , so hat der eine Modus Nebenmaxima bei  $\nu_1 + (\nu_1 - \nu_2) \pm \mathbb{N}\Omega$ , der andere bei  $\nu_2 + (\nu_2 - \nu_1) \pm \mathbb{N}\Omega$  (s. Abb. 5.6). Dadurch wird bei einem Modus der Schwerpunkt in die eine Richtung, der Schwerpunkt des anderen Modus wird um denselben Betrag in die andere Richtung verschoben.

Für die Beobachtung können wir folgern, daß ein Peak in der spektralen Leistungsdichte aus einem Hauptmaximum mit hoher spektraler Leistungsdichte und vielen Seitenbändern mit geringerer Leistungsdichte besteht. Abbildung 5.7 vergleicht das Resultat aus Abbildung 5.5 mit der aus MDI-Daten bestimmten spektralen Leistungsdichte des Modus. Interpretieren kann man die Vielzahl der Nebenpeaks als Überlagerung der Effekte aller möglichen Kopplungen durch die vorhandenen Strömungskomponenten in der Konvektionszone. Mit Hilfe unserer Überlagerungen ist es somit möglich geworden, die beobachtete Form der spektralen Leistungsdichte zu erklären.



## Zusammenfassung des Theorieteils

*Sie kommen mir vor wie der Meister Knecht,  
... denn, wenn ich sphärische Harmonische  
höre, muß ich immer an das Glasperlenspiel  
denken.*

*(M. Stix, 14. Mai 2002)*

An dieser Stelle wollen wir die Überlegungen des theoretischen Teils dieser Arbeit zusammenfassen. Das Ziel war es, den Einfluß von stationären und zeitabhängigen großskaligen Geschwindigkeitsfeldern in der Konvektionszone auf die solaren Oszillationen zu bestimmen.

Begonnen haben wir mit einem einfachen Modell der Sonne, das durch die Sternaufbaugleichungen (2.20), (2.21), (2.23) und (2.24) beschrieben wurde (Abschnitt 2.2). Dazu haben wir angenommen, daß sich die Sonne im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, d. h. die Eigengravitation, die versucht, die solare Gaskugel zu kontrahieren, und der Druck, der versucht, das solare Gas zu expandieren, sind in Balance. Das Sonnenmodell ist eindimensional, d. h. alle Größen können durch eine einzige Variable beschrieben werden. In unserem Fall ist dies der Abstand  $r$  zum Sonnenzentrum. Das Modell berücksichtigt weder die Rotation, das Magnetfeld, noch die zeitliche Entwicklung der Sonne. Ebensowenig gibt es in diesem sphärisch symmetrischen Modell ein dreidimensionales Geschwindigkeitsfeld.

Da das hydrostatische Gleichgewicht des Sonnenmodells ein stabiles Gleichgewicht ist, resultieren kleine Auslenkungen in Oszillationen um die Gleichgewichtslage. Die Rückstellkraft ist für den Schwingungstyp der p-Modi der Druckgradient (Abschnitt 2.5.2). Auf Grund der Randbedingungen ist das Spektrum der p-Modi diskret (s. Abb. 2.3). Eine akustische Eigenschwingung des Sonnenmodells ist definiert als ein charakteristisches Auslenkungsmuster, das mit einer festen Frequenz schwingt (s. Gleichung (2.58) und Abb. 2.1). Diese Eigenschwingungen hängen vom inneren Aufbau des *Klangkörpers Sonne* ab.

Die zugehörigen Auslenkungsmuster haben Knotenflächen in drei Dimensionen, wodurch die Oszillationen durch drei Quantenzahlen identifiziert werden können. Diese sind der harmonische Grad  $l$  (Gesamtzahl der Knotenlinien auf einer Kugeloberfläche), die azimutale Ordnung  $m$  (Anzahl der Knotenlinien durch die Pole des Koordinatensystems) und die radiale Ordnung  $n$  (Zahl der Knotenflächen mit der Tiefe).

Da das Sonnenmodell sphärisch symmetrisch ist, ist die Lage der Polachse beliebig. Dadurch kommt es zu Entartungen von Eigenschwingungen, d. h. zu jeder Frequenz  $\omega_{n,l}$  gibt es eine Basis aus  $2l + 1$  gleichberechtigten Auslenkungsmustern, die mit  $m = -l, \dots, l$  numeriert werden können. Das bedeutet, daß zu jedem Punkt in dem  $(l, \nu)$ -Diagramm aus Abb. 2.3  $2l + 1$  Eigenschwingungen gehören.

Durch die differentielle Rotation der Sonne werden alle Entartungen vollständig aufgehoben. Jede entartete Eigenfrequenz wird in ein Multiplett aus  $2l + 1$  Komponenten aufgespalten. Die Korrekturterme sind abhängig von der azimutalen Ordnung  $m$  und antisymmetrisch zum Zustand mit  $m = 0$ . Der Schwerpunkt des Multipletts bleibt erhalten und liegt bei der ungestörten

Frequenz. Beschreiben kann man dies mit Störungstheorie entarteter Eigenzustände. Da die solare Rotation sehr langsam und im Vergleich zur Umlaufzeit einer Schallwelle um die Sonne nicht veränderlich ist, reicht eine stationäre Betrachtung (Abschnitt 4.2.2).

Allgemein führen Geschwindigkeitsfelder in der Sonne zu einem zusätzlichen Advektionsterm in den Bewegungsgleichungen der solaren Eigenschwingungen. Dessen Einfluß auf die solaren Oszillationen kann mittels Störungstheorie behandelt werden, sofern die Amplituden der Geschwindigkeitsfelder klein sind. Großskalige stationäre poloidale Komponenten der Konvektion liefern keinen Beitrag zur Selbstkopplung (s. Gl. (4.75)). Berücksichtigt man aber die Quasi-Entartung der  $p$ -Modi, so sind die Resultate der Störungstheorie eine Kopplung von Zuständen und eine zusätzliche Korrektur der Eigenfrequenzen. Da die Kopplung wechselseitig erfolgt (s. Abb. 4.4), werden die Frequenzen zweier koppelnder Oszillationen um den gleichen Betrag verschoben (s. Gl. 4.81). Allerdings wird die niedrigere Oszillationsfrequenz weiter erniedrigt, die höhere Frequenz weiter erhöht. Betrachtet man die Frequenzverschiebungen innerhalb eines Multipletts allein, dann sind diese im Fall meridionaler Strömungen symmetrisch zum Modus mit  $m = 0$ , in allen anderen Fällen asymmetrisch (s. Abb. 4.9). Frequenzverschiebungen in der Größenordnung von 100 nHz (bei einer Geschwindigkeitsamplitude von 100 m/s) führen somit zu einer Abweichung von der asymmetrischen Rotationsaufspaltung und zu einer Verschiebung des Schwerpunktes eines Multipletts.

In den gekoppelten mathematischen Pendeln finden wir ein Analogon zu den gekoppelten solaren Oszillationen (Abschnitt 4.3.2). Damit können wir den Energieübertrag zwischen den Modi erklären (s. Gl. (4.114)). Wir finden, daß im solaren Fall die Energie eines Modus innerhalb einiger Tage sehr stark schwankt. Die Energieschwankung des Kopplungspartners erfolgt auf der gleichen Zeitskala, allerdings ist sie in Antiphase (s. Abb. 4.12).

Geschwindigkeitsfelder in der Konvektionszone sind zeitabhängig. Die Kopplung der Oszillationen ist deshalb ebenfalls zeitabhängig. Für die Oszillationsfrequenzen bedeutet dies, daß sie ebenfalls variieren. Mittels Störungstheorie für zeitabhängige Probleme (s. Kapitel 5) läßt sich die zeitliche Abhängigkeit der Frequenz durch eine zusätzliche Zeitabhängigkeit der Amplitude darstellen (s. Gl.en (5.3) u. (5.5)). Wir finden folgendes: Variiert das Geschwindigkeitsfeld harmonisch mit der Zeit, so variiert die Amplitude einer Oszillation mit dieser Frequenz und deren Obertönen. Hinzu kommt die Beimischung anderer Modi, die ebenfalls mit der Frequenz des Geschwindigkeitsfeldes und deren Obertönen variiert (Abschnitt 5.2). Berechnet man die spektrale Leistungsdichte, so kommt es neben dem Hauptmaximum, das bei der ungestörten Oszillationsfrequenz  $\omega_k$  liegt, zu weiteren Maxima bei den Frequenzen  $\omega_k \pm n\Omega$ ,  $\omega_k + m\Delta\omega \pm n\Omega$  mit  $\Delta\Omega = \omega_k - \omega_{k'}$  und  $n, m \in \mathbb{N}$ . Die Höhe der Nebenpeaks ist eine Funktion der Frequenzen, der Eigenfunktionen und der Amplitude des Geschwindigkeitsfeldes. Insgesamt entsteht auf diese Art aus einem einzelnen Maximum in der spektralen Leistungsdichte eine für die Kopplung charakteristische Anordnung von Maxima, die neben der natürlichen Linienbreite zu einer zusätzlichen Verbreiterung führen kann (s. Abb. 5.5). Zudem wird durch die asymmetrische Verteilung von Nebenpeaks, wie sie aus der Ankopplung anderer Modi entsteht, der Schwerpunkt einer einzelnen Linie verschoben. Betrachtet man die Kopplung von nur zwei Oszillationen, so haben die Partner spiegelbildliche Leistungsspektren vorausgesetzt, die Modi waren zu Beginn der Kopplung gleich stark angeregt (s. Abb. 5.6).

Hatte man bei der Kopplung durch stationäre Strömungen eine Verschiebung der Frequenz und demzufolge die Verschiebung des Maximums im Leistungsspektrum, so hat man nun im Fall nicht-stationärer Strömungen eine Verschiebung des Schwerpunktes der Linie. Dies komplettiert das Bild des Einflusses von großskaligen Strömungen auf die solaren Oszillationen. Denn mit diesen Ergebnissen sind wir in der Lage, die beobachtete Position, Form und Struktur der Maxima in der spektralen Leistungsdichte solarer Oszillationen zu erklären.



## **Teil 3**

# **Abschließende Betrachtungen**



## Praktische Anwendungen

*In the next ten years helioseismology will make progress in testing and probing the solar convection zone. Then we will see whether there is more than only noise.*

*(Juri Toomre, GONG'99  
Workshop-Conclusion)*

Globale Helioseismologie beschäftigt sich damit, durch Inversionsrechnungen aus Frequenzdaten Rückschlüsse über das Sonneninnere zu gewinnen. Inversion bedeutet in diesem Zusammenhang, die Bestimmung einer Funktion, die im Integranden eines bestimmten Integrals auftaucht. Auf der Grundlage der Überlegungen in den Kapiteln 4 und 5 wollen wir in diesem Teil der Arbeit untersuchen, ob aus verfügbaren Oszillationsdaten Geschwindigkeitsfelder bestimmt werden können.

### 6.1. Differentielle Rotation

Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, lassen sich die Oszillationsfrequenzen eines Multipletts durch die Zentralfrequenz  $\omega_{nl}$  und weniger als  $2l + 1$  Koeffizienten  $a_s$  parametrisieren

$$\delta\omega_{nl}(m) = \omega_{nl}(m) - \omega_{nl} = \sum_{s=1}^{s_{\max}} a_s(n, l) P_s^{(l)}(m) . \quad (6.1)$$

Die Basisfunktionen  $P_s^{(l)}(m)$  sind orthogonale Polynome. Neuerdings werden bei den meisten veröffentlichten Inversionsergebnissen Clebsch-Gordon-Koeffizienten  $C_{s0lm}^{lm}$  als orthogonales Basissystem benutzt (Ritzwoller & Lavelly, 1991)

$$P_s^{(l)}(m) = (-1)^s \sqrt{\frac{2s+1}{2l+1}} C_{s0lm}^{lm} . \quad (6.2)$$

Die Wigner-3j-Symbole, die sich wegen Gleichung (4.80) und der Orthogonalitätsrelation (A.22) aus Anhang A für unseren Fall anbieten, stehen mit den Clebsch-Gordon-Koeffizienten in Beziehung

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l_1-l_2+m_3}}{(2l_3+1)^{1/2}} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 m_3} . \quad (6.3)$$

Bei der Inversion nach der Rotation, gegeben durch die Funktionen  $w_s^0(r)$  in Gleichung (4.80), verwendet man nur die ungeraden Koeffizienten der Entwicklung (6.1), was sich aus den Symmetrieeigenschaften der Wigner-3j-Symbole erklärt. Zusammen mit Gleichung (4.80) sind die Koeffizienten  $a_s$  – so wie auch die Frequenzverschiebungen  $\delta\omega_{nl}(m)$  – gewichtete Mittel der Rotationsrate

$$a_s(n, l) = \int_0^R K_{nls}(r) w_s^0(r) r^2 dr . \quad (6.4)$$

Den Integrationskern  $K_{nls}(r)$  haben wir gemäß Gleichung (4.80) definiert. Dies stellt ein eindimensionales Inversionsproblem nach den tiefenabhängigen Entwicklungskoeffizienten  $w_s^0(r)$  dar.

Aus den gemessenen Frequenzen eines Multipletts lassen sich die Entwicklungskoeffizienten  $a_s$  gemäß Gleichung (6.1) bestimmen. Man erhält aus allen Multipletts einen aus  $M$  Schätzwerten  $\bar{a}_i$  bestehenden Datensatz für die Entwicklungskoeffizienten  $a_s$

$$\bar{a}_i = \int_0^R K_{i,s}(r) w_s^0(r) r^2 dr + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (6.5)$$

Den Fehler in den Daten haben wir mit  $\varepsilon_i$  bezeichnet. Das Ziel der Inversion ist, eine Abschätzung  $\bar{w}_s^0(r_0)$  für die wahren Entwicklungskoeffizienten der Rotationsgeschwindigkeit als Funktion vom Ort  $r_0$  in der Sonne zu erhalten. Dies ist natürlich nur für Bereiche in der Sonne möglich, für die die Oszillationen Daten liefern. Die Inversion wird durch lineare Operationen auf die Daten ausgeführt. Deshalb ist  $\bar{w}_s^0$  linear von den Daten abhängig. Das ist gleichbedeutend damit, daß für jeden Punkt  $r_0$  und für jedes  $s$  ein Satz von *Inversionskoeffizienten*  $c_{i,s}(r_0)$  existiert, so daß

$$\bar{w}_s^0(r_0) = \sum_{i=1}^M c_{i,s}(r_0) \bar{a}_i. \quad (6.6)$$

Es folgt aus Gleichung (6.5)

$$\bar{w}_s^0(r_0) = \int_0^R \sum_{i=1}^M c_{i,s}(r_0) K_{i,s}(r) w_s^0(r) r^2 dr, \quad (6.7)$$

$$= \int_0^R \mathcal{K}_s(r_0; r) w_s^0(r) r^2 dr. \quad (6.8)$$

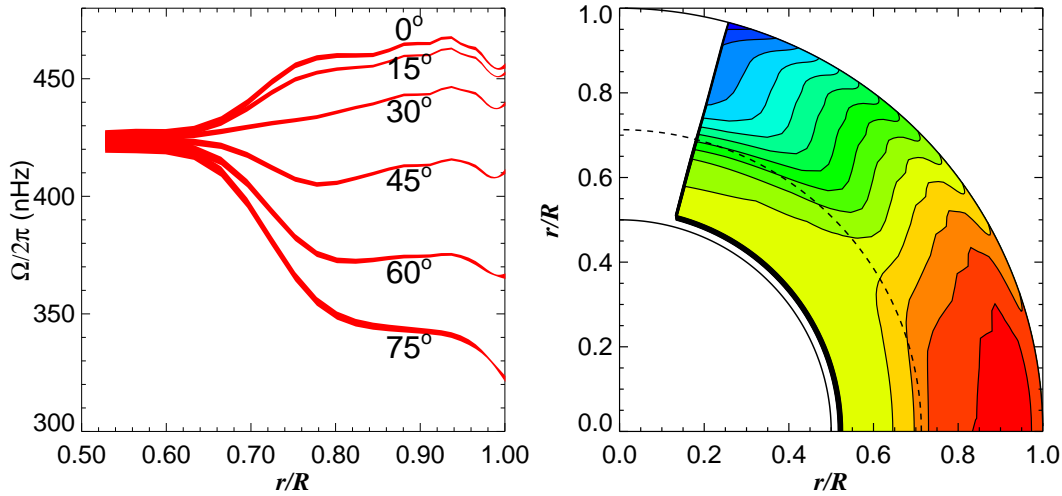
Der an einem Punkt  $r_0$  gegebene *wichtige Integralkern*  $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}_s(r_0; r) = \sum_i c_{i,s}(r_0) K_{i,s}(r) \quad (6.9)$$

beschreibt die Gewichtung der wahren Rotationsrate, was den Schätzwert der Inversionslösung für diesen Punkt ergibt. Ein ganzer Satz von wichtigen Integralkernen für  $0 \leq r_0 \leq R$  deckt das ganze Sonnenmodell vollständig ab und beschreibt die Rotationsrate durch die Schätzer  $\bar{w}_s^0(r)$ . Die Breite von  $\mathcal{K}_s(r_0; r)$  wird definiert über den Abstand der Quartile und ist ein quantitatives Maß für die räumlich Auflösung der Inversion. Daher werden diese Kerne so gewählt, daß sie sehr stark um den Punkt  $r = r_0$  lokalisiert sind.

Mehrere Inversionstechniken wurden inzwischen entwickelt. Diese gruppieren sich in zwei große Familien. Die eine ist bekannt als *Regularized Least Squares* oder RLS-Methode (Tikhonov & Arsenin, 1977; Craig & Brown, 1986), die andere als *Optimally Localized Average* oder OLA-Methode (Backus & Gilbert, 1968). Im folgenden wenden wir zur Inversion der Gleichung (6.4) ein RLS-Verfahren an, welches in Schou et al. (1998) beschrieben wird.

Abbildung 6.1 zeigt ein Beispiel der differentiellen Rotation als Ergebnis einer Inversion von GONG-Daten. Für verschiedene Breiten ist das Verhalten der differentiellen Rotation mit der Tiefe aufgetragen. Vom Äquator zum Pol setzt sich die differentielle Rotation durch die ganze Konvektionszone nahezu konstant fort. Zwischen 0.6 und 0.75 Sonnenradien kommt es zum Übergang zu einer starren Rotation. Dieser Übergangsbereich wird auch als Tachocline bezeichnet.



**Abbildung 6.1.** Differenzielle Rotation als Ergebnis einer Inversion von GONG-Daten. Links: Rotationsrate als Funktion des Radius für die Breiten  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $75^\circ$ . Rechts: zweidimensionaler Konturplot für die Rotationsrate  $\Omega(r, \theta)$  (schnelle Rotation rot, langsame Rotation blau).

## 6.2. Poloidale Strömungsfelder

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Nachweisbarkeit poloidaler Strömungsfelder befassen. Die theoretischen Vorarbeiten dafür wurden schon in Abschnitt 4.3 geleistet. Wir haben anhand Gleichung (4.82) gesehen, daß großskalige Strömungen zu zusätzlichen Frequenzverschiebungen der solaren p-Modi führen. Im Vergleich zur Rotationsaufspaltung (4.41) ist dies nur ein kleiner zusätzlicher Effekt. Dennoch kann dies einen Einfluß auf die Inversionsergebnisse haben.

Die räumliche Auflösung der Inversionsmethoden ist u.a. vom Meßfehler in den Daten abhängig. Bezeichnet  $\sigma(\bar{a}_i)$  den Standardfehler in den Daten  $\bar{a}_i$ , dann ist der Standardfehler in der Inversion durch

$$\sigma(\bar{w}_s^0(r_0)) = \left( \sum_i c_i(r_0)^2 \right)^{1/2} \sigma(\bar{a}_i) \quad (6.10)$$

gegeben. In den letzten Jahren hat sich die Meßgenauigkeit der Oszillationsfrequenzen erhöht. Das GONG-Projekt gibt für die Unsicherheit in der Bestimmung der Zentralfrequenzen der Multipletts nur wenige Zehntel  $\mu\text{Hz}$  oder weniger an (Schou et al., 2002). Der Fehler in der Rotationsrate wird in den neuesten Inversionsergebnissen mit 1 nHz angegeben (vgl. Abb. 1.3). Man hat somit eine Frequenzauflösung erreicht, bei der es unabdingbar wird, auch über andere Einflüsse Bescheid zu wissen. Deshalb untersuchen wir, wie zusätzliche Frequenzverschiebungen, die durch poloidale Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes verursacht werden, die Entwicklungskoeffizienten  $\bar{a}_i$  und die Inversionsergebnisse verändern. Wir führen dazu ein numerisches Experiment aus. Dabei verwenden wir die zeitunabhängige Störungstheorie quasi-entarteter Zustände, um damit die Frequenzen der p-Modi, die durch differentielle Rotation und großskalige Strömungsfelder beeinflusst werden, zu berechnen. Die auf diese Weise simulierten Datensätze werden analysiert und nach der differentiellen Rotation invertiert.

### 6.3. Numerisches Experiment

#### 6.3.1. Simulierte Oszillationsdaten

Die Daten werden wie folgt erzeugt: Die ungestörten Frequenzen werden als Eigenfrequenzen eines Standardsonnenmodells berechnet. Wir verwenden das Sonnenmodell *Model S* von Christensen-Dalsgaard (1996), um die entarteten Eigenschwingungen zu bestimmen. Im Anschluß berücksichtigen wir mit Hilfe der Störungsrechnung den Einfluß der differentiellen Rotation auf die Oszillationsfrequenzen. Als Eingabemodell für die differentielle Rotation verwenden wir ein Inversionsergebnis, das wir aus Daten des GONG Projekts gewinnen (Abb. 6.1). Die Daten umfassen den Zeitraum März 1996 – Januar 1998 (GONG Monate 10 – 27); die resultierende invertierte differentielle Rotation ist somit ein Mittelwert über diesen Zeitraum.

Durch die differentielle Rotation kommt es zur Aufspaltung der entarteten Oszillationen in Frequenzmultipletts, d. h. die Frequenz wird nach Gleichung (4.41) zu einer Funktion der azimutalen Ordnung  $m$ .

Im nächsten Schritt fügen wir eine Komponente  $\mathbf{P}_s^t(\mathbf{r})$  des poloidalen Geschwindigkeitsfeldes hinzu. Wir benutzen die Störungstheorie quasi-entarteter Zustände, wie wir sie in Kapitel 4 beschrieben haben, um diesen zusätzlichen Einfluß auf die Frequenzen der solaren Oszillationen zu berechnen. Das Modell für die Flußkomponente  $\mathbf{P}_s^t(\mathbf{r})$  haben wir in Gleichung (3.3) definiert. Ebenso die radiale Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten  $u_s^t(r)$ , dessen Verhalten wir nach Gleichung (3.7) durch den Parameter  $u_{\max}$  steuern.

#### 6.3.2. Ergebnisse

Als Beispiele für den Einfluß von poloidalen Komponenten auf die Inversionsergebnisse wollen wir die Geometrien  $s = 8, t = 8$  (sektorale Zellen oder Bananenzellen) und  $s = 8, t = 0$  (zonale Zellen oder meridionale Konvektionsrollen) mit den zugehörigen Amplituden  $u_{\max} = 1, \dots, 100$  diskutieren. Berechnungen für Komponenten mit Geometrien  $s = 6, t = 0, \dots, 6$ ;  $s = 8, t = 0, \dots, 8$ ;  $s = 10, t = 0, \dots, 10$  und Amplituden  $u_{\max} = 1, \dots, 500$  m/s zeigen ähnliche Ergebnisse.

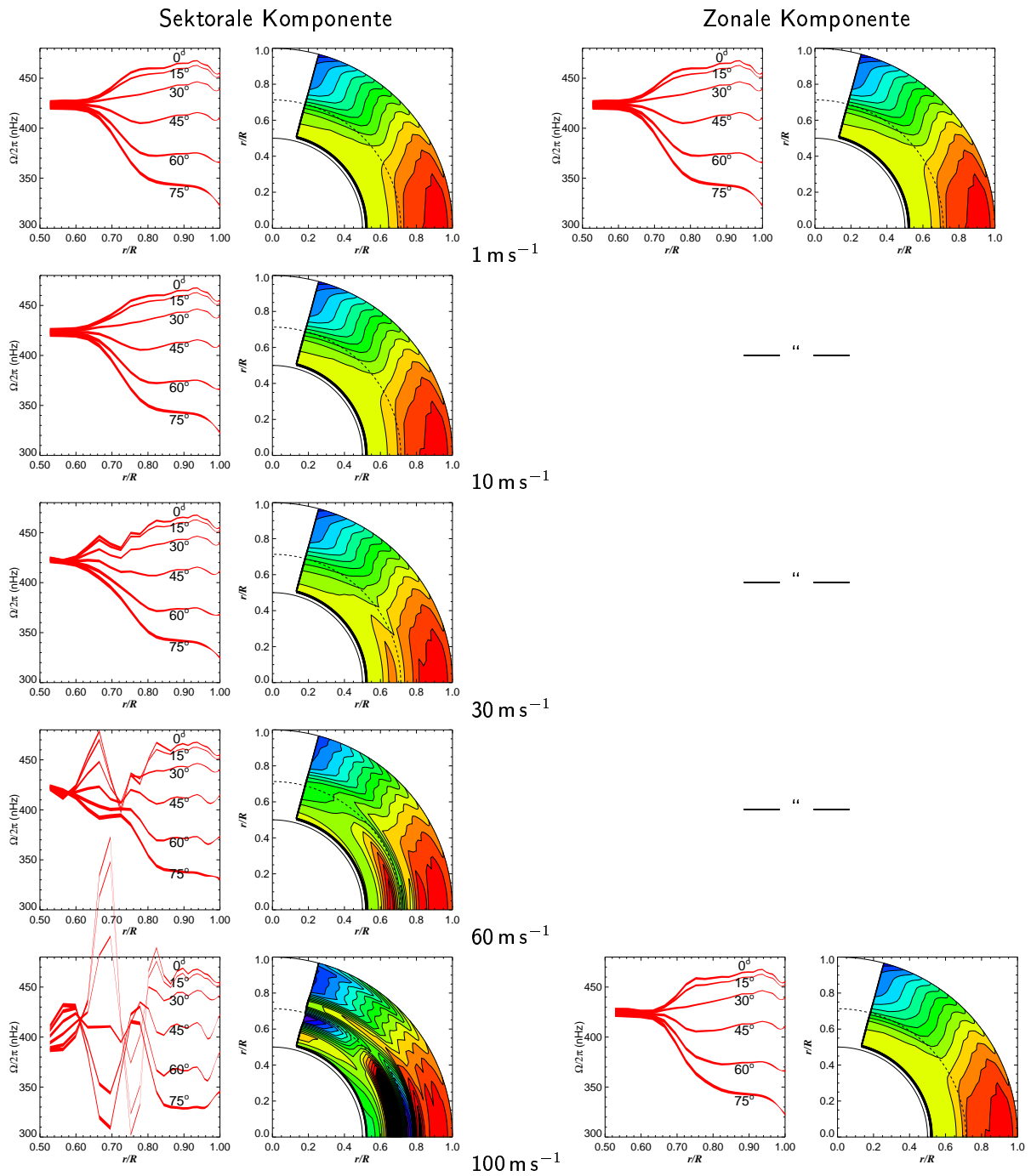
Abbildung 6.2 zeigt die Ergebnisse der Inversionen nach der differentiellen Rotation für die angesprochenen zusätzlichen Strömungskomponenten. Die Geschwindigkeitsamplitude  $u_{\max}$  steigt von der oberen zur unteren Reihe von 1 m/s auf 100 m/s. Wir merken an, daß die maximale Geschwindigkeit der poloidalen Strömung in radialer Richtung nicht identisch mit dem Parameter  $u_{\max}$  ist. Der Grund ist, daß die maximalen Amplituden der Kugelflächenfunktionen nicht notwendigerweise gleich eins sind. Die wahre maximale Amplitude von  $u_s^t(r)$  hängt neben  $u_{\max}$  noch von den Parametern  $s$  und  $t$  ab. Für das Beispiel  $s = t = 8$  ist  $\max_r(u_s^t(r)) = 0.51 u_{\max}$  und für  $s = 8, t = 0$  ist  $\max_r(u_s^t(r)) = 1.16 u_{\max}$ . Für diese Beispiele kann man die Orte im Sonnenmodell, an denen die maximale Amplitude erreicht wird, in den linken und rechten Figuren der Abbildung 3.4 identifizieren. Sie befinden sich für  $t = 8$  in der Mitte der Konvektionszone bei Längen, die Vielfaches von  $\pi/8$  sind. Für  $t = 0$  befinden sich die Orte maximaler Amplitude in  $u_s^t$  an den Polen.

##### 6.3.2.1. Sektorale zellulare Strömungen

Der Einfluß der zusätzlichen poloidalen Strömung, die wir in der Konvektionszone platzieren, wird für sektorale Zellen ab Amplituden von 10 m/s deutlich (Abb. 6.2 erste u. zweite Spalte). Die Strömung in Rotationsrichtung ist durch die  $\varphi$ -Komponente des Vektors  $\mathbf{P}_s^t$

$$\mathbf{P}_{s,\varphi}^t \propto v_s^t Y_s^t(\theta, \varphi) \quad (6.11)$$

gegeben. Deshalb sollten die niederen Breiten stärker beeinflußt werden als die höheren. Dies wird durch die Ergebnisse der Inversion bestätigt. Der Einfluß der zusätzlichen Strömung auf das Inversionsergebnis verringert sich mit steigender Breite. Die Abbildung mit  $u_{\max} = 30$  m/s zeigt,



**Abbildung 6.2.** Die untersuchten Inversionsergebnisse für differentielle Rotation und poloidale Strömungen mit harmonischem Grad  $s = 8$  und azimuthalen Ordnungen  $t = 8$  (sektorale Zellen, linke Spalten) und  $t = 0$  (zonale Rollen, rechte Spalten). Die zugehörige Geschwindigkeitsamplitude  $u_{\max}$  ist in der mittleren Spalte angegeben. Die Inversionsmethode ist sensitiv für sektorale Zellen und nicht für zonale Zellen.

daß die niederen Breiten schon stark gestört sind, während die hohen Breiten die gewöhnlichen Inversionsresultate zeigen.

Mit weiter steigender Amplitude zeigen die Inversionsergebnisse, daß auch die höheren Breiten nach und nach beeinflusst werden. Darüber hinaus wird auch ein *Übersprechen* unterhalb der Konvektionszone immer auffälliger, wo eine starre Rotation vorgegeben war. Das Übersprechen äußert sich z. B. in einer tiefer liegenden Tachocline und Zonen mit abwechselnd verzögerter und beschleunigter differentieller Rotation. Wir werden in Abschnitt 6.3.2.3 eine Erklärung für das Übersprechen geben.

### 6.3.2.2. Zonale meridionale Strömungen

Für die meridionalen zonalen Strömungsfelder zeigen die Inversionen wie erwartet keinerlei Beeinflussung durch die poloidalen Konvektionszellen (Abb. 6.2, letzte zwei Spalten). Der Grund dafür ist, daß die meridionalen zonalen Felder keine Strömungskomponente in Rotationsrichtung haben. Daraus können wir schließen, daß die numerischen Simulationen und die Analyseverfahren richtig sind. Betrachten wir jedoch andere Größen, wie etwa die Entwicklungskoeffizienten  $a_s$  oder die  $(m, \nu)$ -Diagramme der Multipletts, können wir das zusätzliche Geschwindigkeitsfeld erkennen (Abb. 6.3). Im Letzteren führt eine steigende Amplitude des Geschwindigkeitsfeldes auf eine zunehmende Störung des Multipletts, die bei starken Strömungen zu einem unerkennbaren Multiplett führen kann (Abb. 4.7).

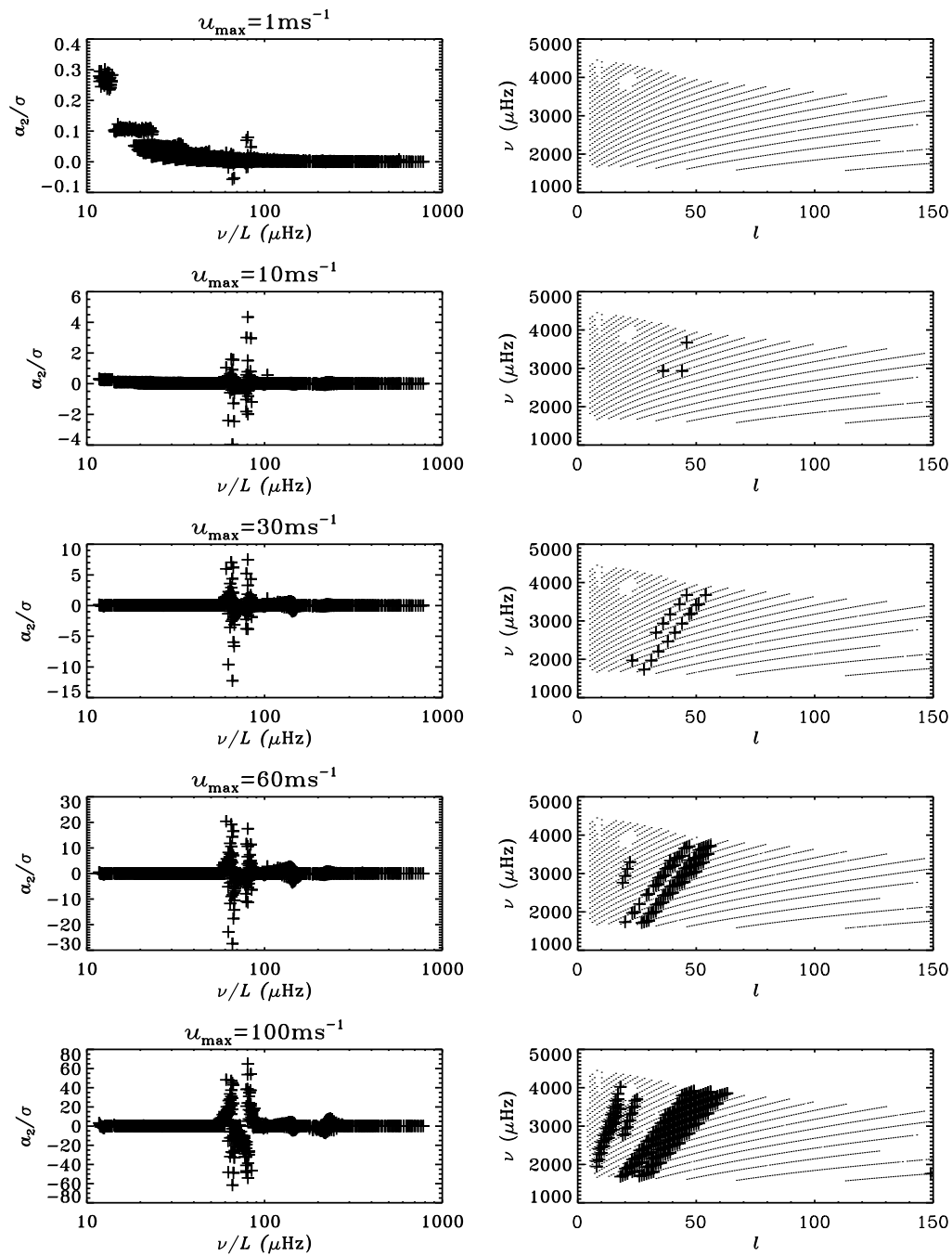
In einem  $(l, \nu)$ -Diagramm wird jedes Multiplett durch einen Punkt repräsentiert. Falls das Multiplett zu stark gestört ist, kann es nicht mehr nur durch einige wenige Polynome angepaßt werden (Gl. (6.1)). In diesem Fall berücksichtigen wir die Frequenzen dieses Multipletts nicht bei der Inversion. Dies führt zu den Markierungen im  $(l, \nu)$ -Diagramm für  $u_{\max} > 10$  m/s. Wie Abb. 6.3 (rechte Spalte) zeigt, nimmt die Zahl der gestörten Multipletts mit steigender Amplitude des Geschwindigkeitsfeldes zu. Die betroffenen Multipletts gruppieren sich entlang gerader Linien im  $(l, \nu)$ -Diagramm. Die Modi, die herausfallen, haben somit das gleiche Verhältnis  $\nu/L$  und den gleichen unteren Umkehrpunkt. Es handelt sich um diejenige Modi, welche durch die poloidale Komponente am stärksten beeinflusst werden, weil sie das Gebiet mit der stärksten Strömung durchwandern.

Meridionale Strömung und differentielle Rotation sind orthogonal zueinander. Dies zeigt sich auch in den jeweiligen Frequenzverschiebungen. Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, ist die Rotationsaufspaltung durch eine Entwicklung nach ungeraden Funktionen darstellbar, die Aufspaltung durch meridionale Strömungen mit geraden Funktionen. Daraus folgt, daß die Rotation sich in den ungeraden Koeffizienten  $a_s$  widerspiegelt, die meridionale Strömung dagegen in den geraden  $a_s$ . Ohne meridionale Strömungen wären die geraden Koeffizienten  $a_s$  gleich null. Somit können meridionale Strömungen und die differentielle Rotation unabhängig voneinander bestimmt werden, sofern die von den geraden und ungeraden Basisfunktionen aufgespannten Unterräume orthogonal sind. In Abbildung 6.3 (linke Spalte) haben wir für verschiedene Amplituden  $u_{\max}$  das Verhältnis  $a_2/\sigma$  des zweiten Entwicklungskoeffizienten und seiner Standardabweichung als Funktion von  $\nu/L$  (dies entspricht dem unteren Umkehrpunkt  $r_t$ ) der Modi aufgetragen. Das Verhältnis  $a_2/\sigma$  ist ein Maß für die Signifikanz der Nachweisbarkeit der poloidalen Strömung. Wir finden, daß ab  $u_{\max} = 10$  m/s das Geschwindigkeitsfeld nachweisbar ist.

### 6.3.2.3. Übersprechen

Der Grund für das Übersprechen in den Inversionsergebnissen aus den künstlichen Oszillationsdaten ist, daß wir bewußt nur nach der differentiellen Rotation invertiert haben. D. h. wir haben die Inversion auf der Basis der Entwicklungskoeffizienten (6.1) nur über ungerade  $s$  ausgeführt. Der Gesamteffekt von differentieller Rotation und poloidaler Geschwindigkeitskomponente ist dadurch natürlich nicht repräsentierbar. Vielmehr hätten wir entsprechend dem Ergebnis (4.67)





**Abbildung 6.3.** Links: Die Entwicklungskoeffizienten  $a_2$  geteilt durch die jeweilige Standardabweichung  $\sigma$  von  $a_2$ . Mit steigendem  $u_{\max}$  erhöht sich die Signifikanz durch eine deutliche Abweichung des Verhältnisses  $a_2/\sigma$  von null. Rechts:  $(l, \nu)$ -Diagramme. Kreuze markieren Multipletts bei denen  $a_2$  mehr als  $3\sigma$  von null abweicht. Die Zahl der betroffenen Multipletts steigt mit wachsendem  $u_{\max}$  (in diesen Beispielen gilt  $s = 8$ ,  $t = 0$  für die Komponente des Geschwindigkeitsfeldes).

eine Entwicklung

$$\delta\omega_{nl}(m) = \sum_{s=0}^{s_{\max}} \sum_{t=-s}^s \sum_{l'=|s-l|}^{s+l} b_{st,l'}(n,l) P_{st,l'}^{(l)}(m) \quad (6.12)$$

mit anderen Basisfunktionen  $P_{st,l'}^{(l)}(m)$  und zugehörigen Entwicklungskoeffizienten  $b_{st,l'}(n,l)$  ansetzen müssen. Für die Funktionen  $P_{st,l'}^{(l)}(m)$  können die Wigner-3j-Symbole ( $sl'l'/tm -t -m$ ) gewählt werden. Der Nachteil eines solchen Ansatzes ist, daß diese Wigner-3j-Symbole wegen der Relationen (A.21) und (A.22) im Anhang A keine Orthogonalbasis bilden. Ferner ist das Problem schlecht konditioniert. Denn ein Multiplett besteht aus  $2l+1$  Punkten (für  $l=150$  sind das 301 Punkte), aber die Dimension der verwendeten Basis ist  $(s_{\max}+1)(2s+1)(s+l-|s-l|)$ . Für den realistischen Fall von  $10 = s_{\max} < l$  hätte man es mit einer 4620-dimensionalen Basis zu tun. Deshalb haben wir uns für eine Untersuchung des Verhaltens der invertierten differentiellen Rotation auf der Basis von Gleichung (6.1) entschieden.

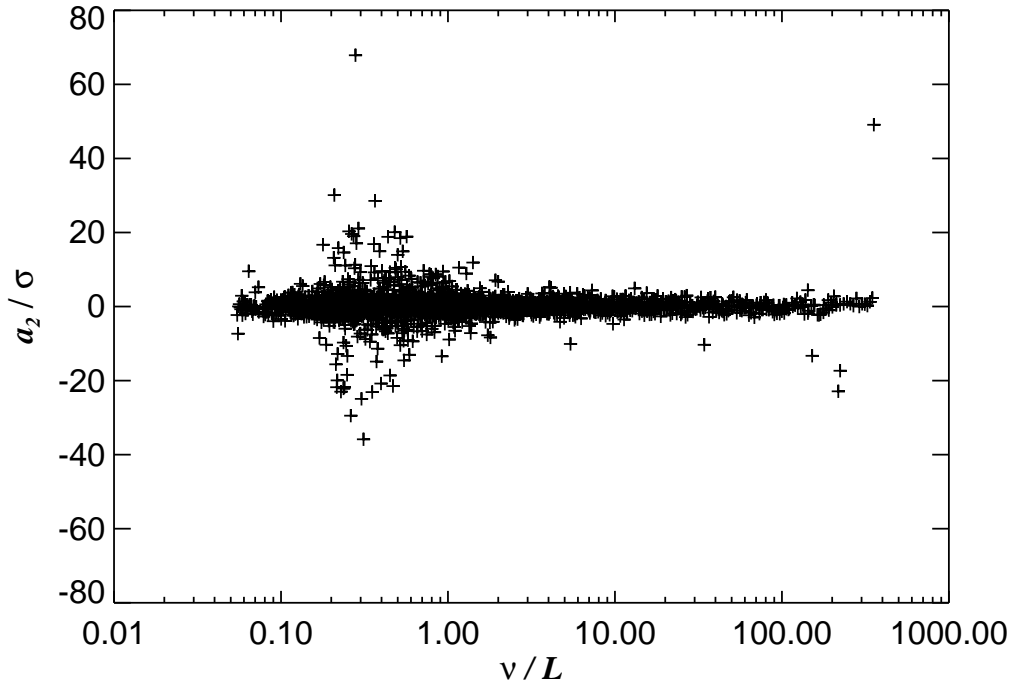
Als Konsequenz folgt, daß der Einfluß der poloidalen Geschwindigkeitskomponenten sich zusätzlich in den Entwicklungskoeffizienten  $a_s$  aus (6.1) widerspiegelt. Dies führt letztendlich zu einer Mißinterpretation der Frequenzauflösung der p-Modi als ein allein von der Rotation verursachter Effekt. Die Inversion liefert als Resultat zwangsläufig eine veränderte differentielle Rotation. Deren Einfluß auf die solaren Oszillationen ist gleich dem kombinierten Einfluß von tatsächlicher Rotation und dem poloidalen Strömungsanteil. Für niedrige Amplituden  $u_{\max}$  führt diese Mißinterpretation zu einer tiefer reichenden invertierten Rotation und einer veränderten invertierten Rotationsrate bei niedrigen Breiten. Der Grund ist, daß diejenigen Modi am stärksten betroffen sind, die ihren unteren Umkehrpunkt tief im Sonneninnern haben und deren Aufenthaltsbereich zum Äquator hin konzentriert ist. Für hohe Amplituden  $u_{\max}$  sind alle Modi betroffen. Die Inversionsergebnisse sind gegenüber dem Eingabemodell stark verändert. Die oberflächennahe invertierte Rotation ist verschieden und es zeigt sich eine starke breitenabhängige Variation, die tief in die Sonne reicht (Abb. 6.2).

Auf Grund des Auftretens von Übersprechen für gewisse Amplituden  $u_{\max}$  können wir folgern, daß reine meridionale Strömungen oder Strömungen in bestimmten konvektiven Zellen mit globaler Helioseismologie nachgewiesen werden können. Die Nachweisgrenze, die wir auf der Basis unseres Modells ableiten können, liegt in der Größenordnung von  $|v| \approx 10$  m/s.

### 6.3.3. Nachweisgrenze für großskalige Konvektion

Um den Einfluß von großskaligen Strömungsfeldern auf die Inversionsergebnisse zu bestimmen, haben wir einen Mittelwert aus beobachteten Rotationsraten als Schätzwert für die wahre Rotationsrate verwendet. Die aus GONG oder MDI Zeitserien invertierte solare Rotationsrate ist ein Mittelwert über 108 Tage bzw. 72 Tage. Die Ergebnisse unseres numerischen Experiments repräsentieren daher großskalige Strömungen mit einer Lebensdauer von einer oder mehreren solaren Rotationen. Solche Strömungen können eine maximale sektorale Amplitude von etwa 10 m/s haben. Andernfalls würden sie zu einer merklichen Störung der Rotationsrate in der Konvektionszone führen, was im Widerspruch zu den Beobachtungen steht. Diese Schlußfolgerung beruht auf einem Vergleich mit Beobachtungsdaten, aus denen wir das Verhalten der  $a_s$ -Koeffizienten (s. Abb. 6.4) und der differentiellen Rotation bestimmt haben. Jede Schwankung in der Rotationsrate, die von einem großskaligen Strömungsfeld herrühren würde, wäre nachweisbar. Da solche Schwankungen wie in Abb. 6.2 nicht beobachtet werden, müßte die *wahre* solare Rotation dem störenden Effekt der poloidalen Strömungskomponenten mit hoher Präzision entgegenwirken. Dies ist unwahrscheinlich.

Meridionale Strömungen in zonalen Konvektionsrollen haben wie erwartet keinen Einfluß auf die invertierte Rotationsrate. Aber dennoch kann eine meridionale Strömung die Struktur eines Multipletts stören. Bei entsprechender Amplitude würde dies zu einer verringerten Abdeckung im  $(l,\nu)$ -Diagramm führen. Auf dieser Basis können wir folgern, daß Amplituden von bis zu



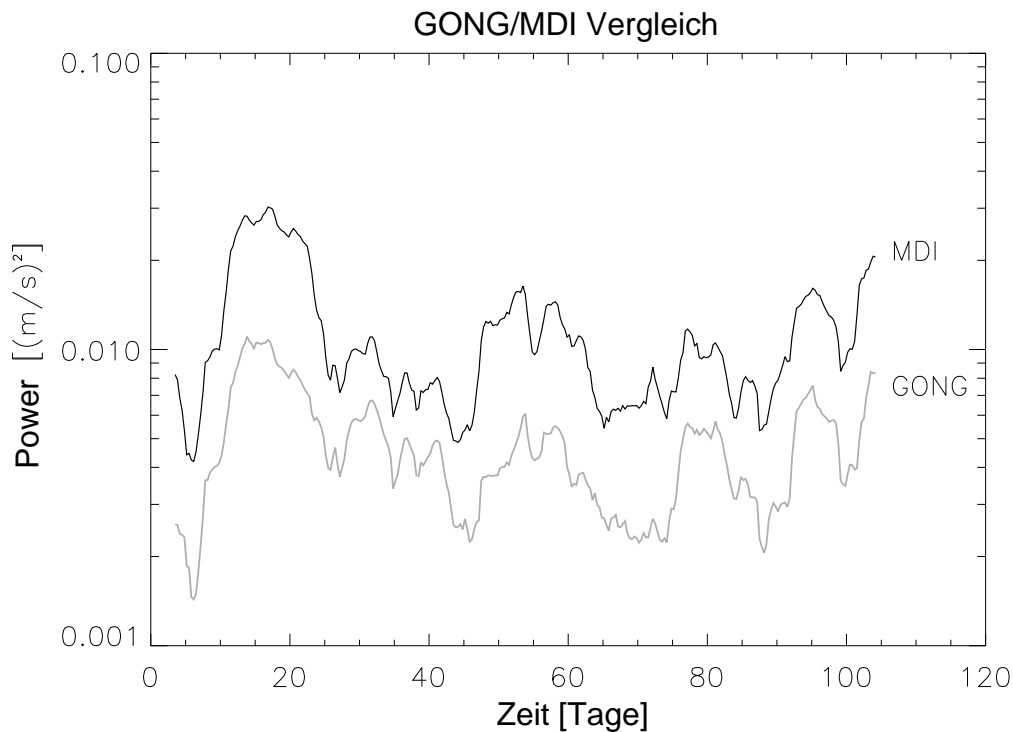
**Abbildung 6.4.** Die Koeffizienten  $a_2$  geteilt durch ihre Standardabweichung  $\sigma$ . Der Bestimmung von  $a_2$  liegen Beobachtungsdaten vom MDI-Instrument auf SOHO zu Grunde.

$u_{\max} = 100 \text{ m/s}$  möglich sind, ohne daß die Abdeckung merklich verringert ist. Allerdings sind die  $a_s$ -Koeffizienten zu geradem  $s$  schon ab  $u_{\max} = 10 \text{ m/s}$  signifikant von null verschieden. Somit liegt die Nachweisgrenze für alle poloidalen Strömungskomponenten bei einer Amplitude von etwa  $10 \text{ m/s}$ . Zum Vergleich mit Abbildung 6.3 haben wir in Abbildung 6.4 den Koeffizienten  $a_2$  über seine Standardabweichung  $\sigma$  für solare Daten aufgetragen. Es zeigt sich bei kleinen Werten von  $\nu/L$  eine deutliche Abweichung von null. D. h. in den oberflächennahen Schichten (bis etwa  $10 \text{ Mm}$  Tiefe) gibt es meridionale Komponenten in der Strömung. Dies ist allerdings schon bekannt (Haber et al., 2002). In den tieferen Schichten (in  $100 \text{ Mm}$  Tiefe und mehr), d. h. bei hohen  $\nu/L$ -Werten, finden sich keine signifikanten meridionalen Strömungskomponenten.

#### 6.4. Energieschwankungen

Wir haben in Kapitel 4 und 5 gesehen, daß durch die Kopplung Energie zwischen den Modi ausgetauscht werden kann. Somit sollten konvektive Geschwindigkeitskomponenten auf der Sonne zu einem beobachtbaren Energieaustausch zwischen den Modi führen.

Wir wollen dies im Detail untersuchen und betrachten das zeitliche Verhalten der spektralen Leistungsdichte der p-Modi. Dazu verwenden wir ein *laufendes zeitliches Beobachtungsfenster* und berechnen auf diese Art die spektrale Leistungsdichte für kurz aufeinander folgende Teilstücke einer 108 Tage lange Zeitserie. Für die Verschiebung des Fensters wählen wir eine Schrittweite von 8 Stunden. Durch Integration der spektralen Leistungsdichte über einen  $3\Gamma$ -Bereich unter einem Peak der Breite  $\Gamma$  erhalten wir eine Zeitserie der mittleren spektralen Leistungsdichte einer solaren Oszillation.



**Abbildung 6.5.** Variation der spektralen Leistungsdichte des Modus  $n = 20$ ,  $l = 5$ ,  $m = 0$ , bestimmt aus GONG- (graue Kurve) und MDI-Daten (schwarze Kurve). Die Länge des laufenden Fensters beträgt 7 Tage, die Schrittweite beträgt 8 Stunden. Die Abszisse jedes Punktes entspricht der Mitte des laufenden Fensters.

Wir benutzen zwei sich ergänzende Datensätze des oszillatorischen Geschwindigkeitsfeldes  $V(\theta, \varphi, t)$  an der solaren Oberfläche. Der eine Datensatz wurde mit dem MDI-Instrument an Bord von SOHO gewonnen, der andere mit dem GONG-Netzwerk. Beide Zeitserien decken 108 Tage von Mai bis September 1999 ab.

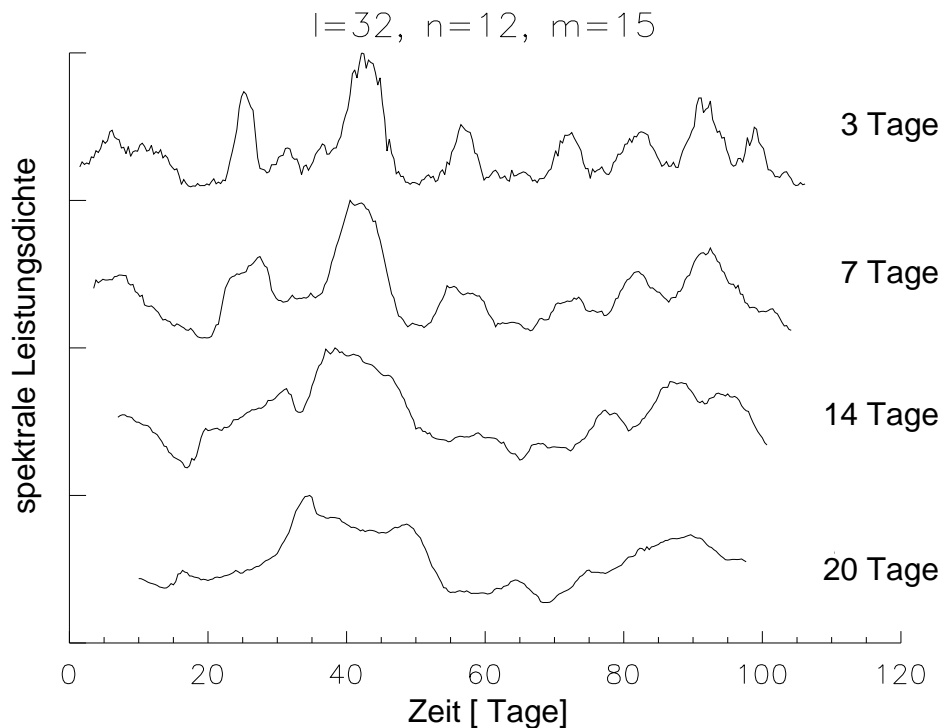
Wir wenden den räumlichen Filter gemäß

$$V_{lm}(t) = \int_S V(\theta, \varphi, t) Y_l^m(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \quad (6.13)$$

auf diese beiden Zeitserien an, wobei  $S$  die sichtbare Oberfläche der Sonne ist. Man erhält daraus für alle Modi mit dem gleichen Paar an Quantenzahlen  $l$  und  $m$  eine einzelne Zeitserie  $V_{lm}(t)$ , anhand der sich die einzelnen Modi mit radialer Ordnung  $n$  mit Hilfe des GONG PEAKFIND Algorithmus identifizieren lassen (Anderson et al., 1995; Landy et al., 2001). Einzelne Modi zu den  $m$ -Werten können wir auf diese Weise auswählen, um deren Frequenz zu bestimmen, so daß eine spätere Analyse der kurzen Teilstücke die Rotationsaufspaltung der Modi nicht aufzulösen braucht.

Abbildung 6.5 zeigt ein Beispiel der variierenden spektralen Leistungsdichte eines Modus, die auf der Basis der GONG- und MDI-Datensätze bestimmt wurde. Beide Instrumente zeigen bis auf einen Skalierungsfaktor das gleiche Verhalten. Wir können deshalb davon ausgehen, daß diese signifikanten Variationen innerhalb weniger Tage solaren Ursprungs sind.

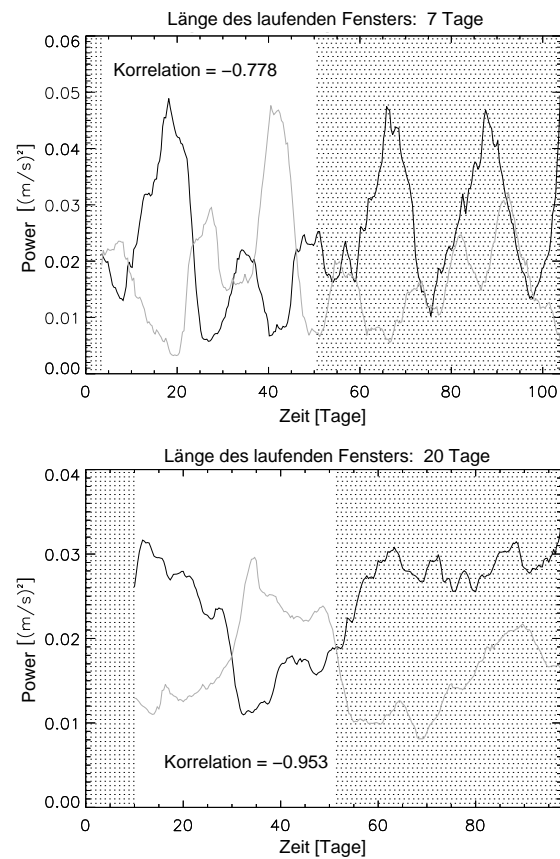
Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die Länge des laufenden Fensters die spektrale Leistungsdichte beeinflusst. Deshalb hängen auch die resultierenden Zeitserien der Variation der



**Abbildung 6.6.** Abhängigkeit der Variation der spektralen Leistungsdichte von der Länge des laufenden Fensters. Als Beispiel ist die Variation für den Modus  $n = 12$ ,  $l = 32$ ,  $m = 15$  für Fensterlängen von 3 (oben) bis 20 Tagen (unten) aufgetragen. Die Abszisse jedes Punktes in den Kurven ist die Mitte des laufenden Fensters. Die Ordinate ist die normierte Leistungsdichte bezogen auf die Nullniveaus, die durch die Achsenmarkierungen gegeben sind.

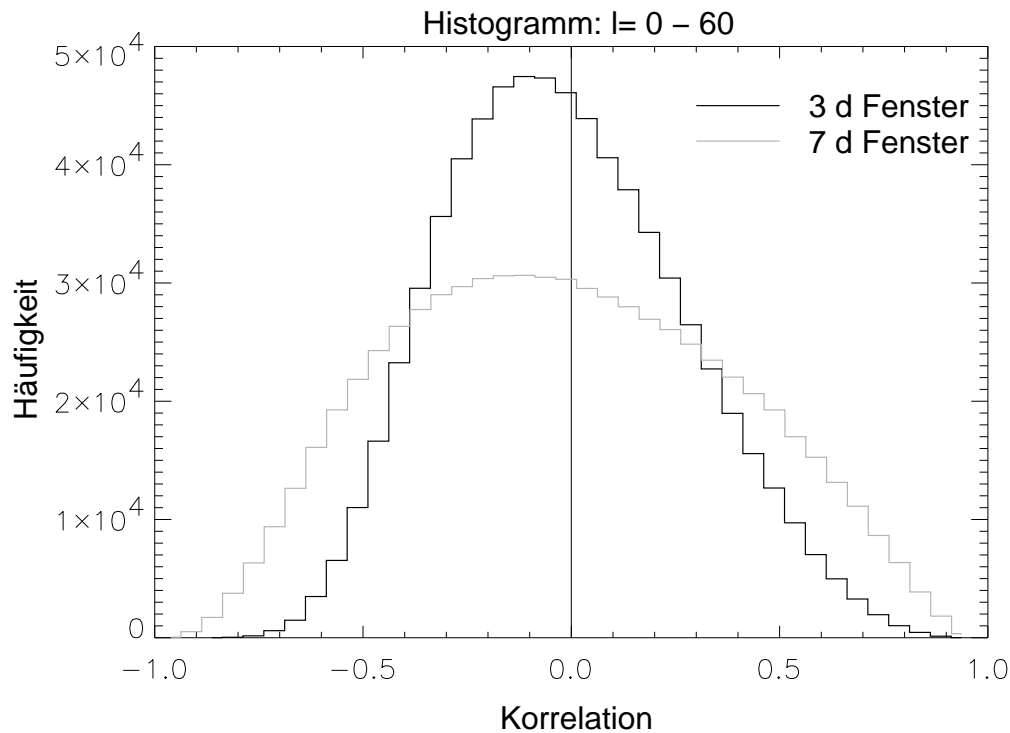
Leistungsdichte von der Fensterlänge ab (s. Abb. 6.6). Ein langes Fenster bedeutet hohe Frequenzauflösung. Dies ist notwendig, um die Modi von den Seitenbändern zu unterscheiden. Die Seitenbänder entstehen, weil nur der dem Teleskop zugewandte Teil der Sonnenoberfläche beobachtet werden kann. Das Integral aus Gleichung (6.13) erfolgt somit nur über einen Ausschnitt  $S$  einer Kugeloberfläche. Andererseits benötigt man ein langes Fenster, um die schwachen Modi mit niedrigen Frequenzen nachweisen zu können. Ein langes Fenster bedeutet aber auch, daß man über viele Anregungszustände der untersuchten p-Modi mittelt. Somit werden schnelle Variationen geglättet. Um dieses Problem zu vermeiden, untersuchen wir p-Modi mit hohen Amplituden in der spektralen Leistungsdichte, d. h. p-Modi mit Frequenzen zwischen  $2700$  und  $3200 \mu\text{Hz}$ . Damit Seitenbänder die Untersuchungen nicht stören, müssen wir folgendes beachten: Für die Modi mit einem niedrigen Grad  $l$  ist der Abstand zwischen einem Modus und seinen Seitenbändern ( $\Delta l = 1$ ) etwa  $60 \mu\text{Hz}$  (Stix, 1991). Für die Modi mit hohem Grad  $l$  ist der Frequenzabstand der Seitenbänder durch die Tangente an die Ridges im  $(k, \omega)$ -Diagramm ( $\Delta\omega = (\partial\omega/\partial k)(\partial k/\partial l)\Delta l$ ) gegeben. Bis  $l = 60$  ist der Frequenzabstand größer als  $25 \mu\text{Hz}$ . Untersuchen wir Modi mit  $l \leq 60$ , reicht eine moderate Frequenzauflösung, um das Hauptmaximum und die Seitenbänder trennen zu können. Somit wählen wir Fenster, die länger als ein Tag, aber kürzer als 20 Tage sind.

Als Ursache für die Variationen in der spektralen Leistungsdichte können nach den Kapiteln 4 und 5 Geschwindigkeitsfelder in der Konvektionszone in Frage kommen. Ist dies der Fall, dann



**Abbildung 6.7.** Antikorrelierte Variationen der spektralen Leistungsdichte für die p-Modi  $n = 13$ ,  $l = 26$ ,  $m = -20$  (schwarze Kurve) und  $n = 12$ ,  $l = 32$ ,  $m = 15$  (graue Kurve). Die Phase der starken Antikorrelation hat einen weißen Hintergrund. Die Länge des Zeitfensters beträgt 7 Tage (oben) und 20 Tage (unten).

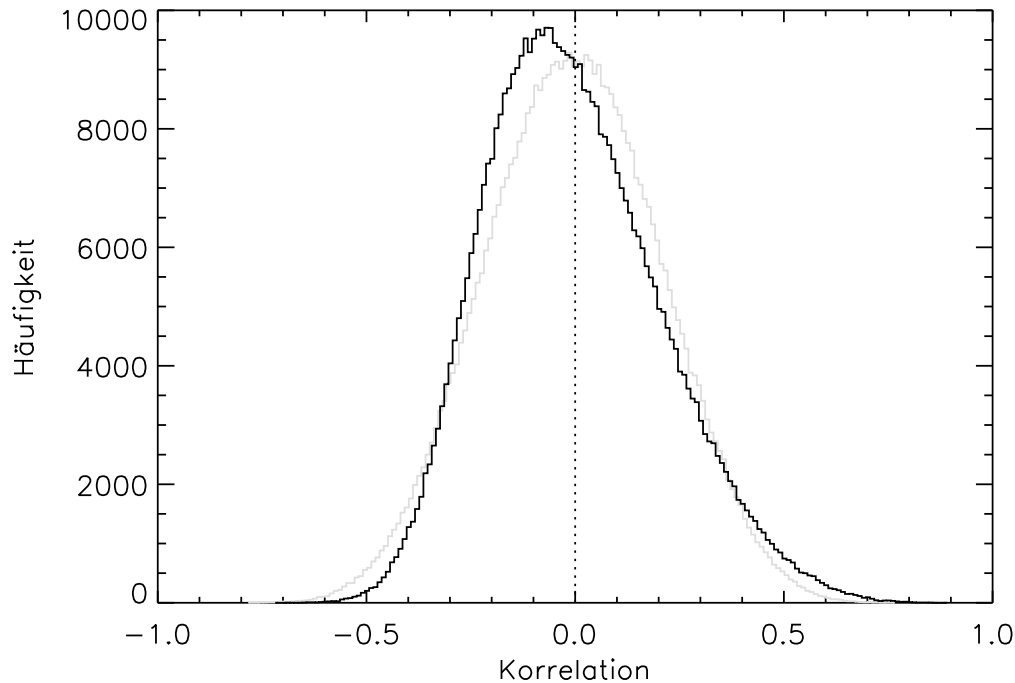
muß es Paare von Oszillationen geben, deren Variationen in der spektralen Leistungsdichte antikorreliert sind. Tatsächlich finden sich sehr viele Beispiele für Paare, die über Zeiträume von mehr als einem Monat stark antikorreliert sind (Abb. 6.7). Da nur Oszillationen stark miteinander koppeln, die in der Frequenz quasi-entartet sind, berechnen wir die Korrelation von Variationen der spektralen Leistungsdichte von p-Modi mit einem Frequenzabstand, den wir kleiner als  $1.6 \mu\text{Hz}$  wählen. In dem Frequenzbereich  $2700 \leq \nu \leq 3200$  gibt es deshalb 596 911 Paare bis  $l = 60$ , die stark miteinander wechselwirken können. Der Integrationsbereich für das Korrelationsintegral beträgt 36 Tage, so daß wir für die 108-tägigen Zeitserien pro Paar drei Werte erhalten. Abbildung 6.8 zeigt das Ergebnis für eine Fensterlänge von 3 und 7 Tagen in Form eines Histogramms. Wir finden, daß es mehr Antikorrelationen wie Korrelationen gibt. Es treten zwar auch sehr häufig hohe Werte für Korrelationen auf, was von einer gleichzeitigen Anregung der p-Modi kommen kann (Foglizzo, 1998), aber insgesamt gibt es für ein 7-Tage-Fenster 1.54-mal und für ein 3-Tage-Fenster 1.6-mal mehr Antikorrelationen als Korrelationen. Dies spricht für einen physikalischen Prozess in der Sonne, der zu einer Energieumverteilung unter den p-Modi führt.



**Abbildung 6.8.** Histogramm der Korrelationen von 596 911 Oszillationspaaren, die einen Frequenzabstand  $< 1.6 \mu\text{Hz}$  haben. Für ein 7-Tage-Fenster (graue Kurve) gibt es 1.54-mal mehr Antikorrelationen als Korrelationen, für ein 3-Tage-Fenster (schwarze Linie) sind es 1.6-mal mehr Antikorrelationen.

#### 6.4.1. Diskussion

Solare Oszillationen werden stochastisch angeregt (Baudin et al., 1996). Dies führt natürlich zu Schwankungen in der Amplitude, ohne daß eine Kopplung wirksam wäre. Über den Anregungsprozeß der solaren Oszillationen ist nur wenig bekannt (Stein & Nordlund, 2001). Bestimmt man die spektrale Leistungsdichte der p-Modi zu verschiedenen Zeitpunkten, so zeigt sich darin eine Exponentialverteilung (Baudin et al., 1996; Chaplin et al., 1997). Allerdings erwartet man von stochastisch angeregten gedämpften harmonischen Oszillatoren keine Antikorrelationen in der Variation der spektralen Leistungsdichte. Diese Hypothese ist nicht zwangsläufig für jeden stochastischen Prozeß richtig. Regt ein gaußscher Prozeß gedämpfte Oszillatoren an, so zeigt die Korrelation der Variationen in der spektralen Leistungsdichte keinen Überschuß an Antikorrelationen. Regt ein Prozeß mit einer exponentialverteilten Wahrscheinlichkeitsdichte die Oszillatoren an, so kann es einen Überschuß an Antikorrelationen geben (Braun, 2001). Wir simulieren solare Daten einmal für den Gauß- und einmal für den exponentialverteilten Prozeß. Als Halbwertszeit für das Abklingen eines auf diese Weise angeregten Modus wählen wir einen Zeitschritt. Das entspricht 8 Stunden. Abbildung 6.9 zeigt das Ergebnis. Für den exponential verteilten Prozeß finden wir für jede Realisation einen leichten Trend zu etwa 10% mehr Antikorrelationen. Der Gaußprozeß resultiert immer in einer symmetrischen Verteilung. Ist die Halbwertszeit länger, werden starke Pulse geglättet, so daß auch der exponentialverteilte Prozeß zu mehr symmetrischen Verteilungen der Korrelationen führt. Einen Überschuß an Antikorrelationen im gleichen Maß, wie im Fall der solaren Oszillationen, können wir damit aber nicht erzeugen.



**Abbildung 6.9.** Histogramm für die Korrelationen von Powervariationen stochastisch angetriebener gedämpfter harmonischer Oszillatoren. Verschiedene stochastische Prozesse führen zu unterschiedlichen Verteilungen (schwarz: exponentialverteilter Prozeß, grau: Gaußprozeß).

Andere Autoren (Foglizzo, 1998; Gavryusev & Gavryuseva, 1999) finden bei der Untersuchung der Variation der spektralen Leistungsdichte eher einen Trend zu positiven Korrelationen. Allerdings haben diese Autoren nur Modi mit Grad  $l = 0$  untersucht, so daß diese Korrelationen ihren Ursprung in einer gemeinsamen Anregung der Modi durch ein energetisches Ereignis auf der Sonne haben können. Damit rückt die Bedeutung der Anregung durch einen exponentialverteilten Prozeß wieder in den Hintergrund. Denn es gibt keinen Grund dafür, daß die gemeinsame Anregung von Modi durch akustische Quellen auf der Sonne auf einen gewissen harmonischen Grad beschränkt sein sollte. Eine solche akustische Quelle emittiert vielmehr alle Arten von Wellen. Kopplungen, wie wir sie vorgeschlagen haben, kann man bei der Untersuchung von Modi mit identischem Grad  $l$  jedoch nicht finden, da deren Frequenzabstand von etwa  $136 \mu\text{Hz}$  für eine signifikante Kopplung zu groß ist.

Wir folgern deshalb, daß ein Teil der gefundenen Antikorrelationen von einem physikalischen Prozeß auf der Sonne herrühren muß. Eine einfache Erklärung liefert die Kopplung von Modi. Informationen über den Grad  $s$  des Geschwindigkeitsfeldes können wir nur auf der Basis der Dreiecksregel angeben. Für Abbildung 6.7 liegt der harmonische Grad  $s$  im Bereich  $6 \leq s \leq 58$ . Die Lebensdauer der koppelnden Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes muß in etwa dem Zeitraum entsprechen, über den starke Antikorrelation zwischen den Modi vorliegt. Das bedeutet in unserem Beispiel ungefähr 40 Tage.



## 6.5. Zusammenfassung

Das Ziel dieses Kapitels war es, einige Anwendungsmöglichkeiten der theoretischen Ergebnisse aufzuzeigen. Dabei stellt sich heraus, daß sich unsere Ergebnisse für die Helioseismologie bei der Suche nach großskaligen Strömungen in der Konvektionszone als sehr nützlich erweisen. Für die Existenz von Giant Cells können wir auf der Grundlage unserer Überlegungen obere Grenzen angeben. Darüber hinaus zeigen unsere Überlegungen, daß man mit Hilfe der Kopplung von globalen solaren Eigenschwingungen durch Konvektion neue Analyseverfahren entwickeln kann, um Strömungen im ganzen Sonneninnern zu untersuchen. Solche Verfahren können die Techniken der lokalen Helioseismologie, die Strömungen nur in den oberflächennahen Schichten nachweisen kann, ergänzen.

Das von uns beschriebene numerische Experiment ist nur als ein erster Ansatz zu verstehen. Trotzdem ist sein Ergebnis vergleichbar mit den strengen Einschränkungen, die von anderen Untersuchungen stammen. So legen z. B. Beck et al. (1998) eine Amplitude für Giant-Cells von wenigen m/s nahe der Oberfläche als Grenzwert fest. Wir können folgern, daß derartige großskalige und langlebige Strukturen in der Konvektionszone der Sonne nicht existieren. Diese Schlußfolgerung wird durch globale Simulationen der Konvektionszone unterstützt. Miesch et al. (2000) fanden, daß die Konvektion keine besonderen Strukturen zeigt, die eine Sonnenrotation überdauern. Trotzdem können großskalige Strömungen mit größeren Amplituden als 10 m/s auf Zeitskalen von Tagen oder wenigen Wochen existieren. Da unsere Nachweisgrenze bei etwa 10 m/s liegt, können auch Strömungen mit kleineren Amplituden existieren. Dies wirft ein ganz neues Licht auf den Ursprung der dynamischen Variation am Boden der Konvektionszone mit einer Periode von 1.3 Jahren (Abb. 1.4). Die Variation der Größe  $\delta\Omega/2\pi$  von einem Maximum zum Minimum beträgt bei 0.72 Sonnenradien etwa 6 nHz, was einer Schwankung in der Geschwindigkeit von etwa 9 m/s entspricht. Somit dürfen wir darüber spekulieren, ob der physikalische Hintergrund für diese Variation eine großskalige Geschwindigkeitskomponente mit einer charakteristischen Zeitskala von 1.3 Jahren ist.

Wie wir ebenfalls zeigen können, scheinen andere großskalige Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes zum Austausch von Energie zwischen den Modi zu führen. Dafür können bekannte Strukturen wie die Supergranulation verantwortlich sein, deren charakteristische Länge einem harmonischen Grad von  $s \approx 100$  entspricht. Der Zeitraum für das Entstehen und Vergehen einer Supergranulationszelle stimmt mit dem Zeitraum von mehr als 30 Tagen für starke Antikorrelationen unter den p-Modi in etwa überein. Damit bietet sich eine weitere Möglichkeit, konvektive Strömungen auf der Grundlage unserer theoretischen Überlegungen zu untersuchen.

Weitere numerische Experimente, die Kombination von Simulationen der Konvektionszone mit der Störungstheorie und Mustererkennungsverfahren zur Identifikation des wechselseitigen Energieaustauschs oder charakteristischer Strukturen in den Seitenbändern der spektralen Leistungsdichte, können hierauf aufbauen. In naher Zukunft kann somit die Frage nach der Existenz von großskaligen Strömungen in der Konvektionszone endgültig beantwortet werden.



## Mathematischer Anhang

### A.1. Horizontaler Anteil von Gradientenoperator, Divergenz und Laplace-Operator

$$\nabla_h V = \frac{\partial V}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} e_\varphi, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla_h^2 V = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{A.3})$$

### A.2. Generalisierte Kugelflächenfunktionen

Die generalisierten Kugelflächenfunktionen stehen mit den Matrixelementen des finiten Drehoperators  $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma)$  in Beziehung ( $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind die Euler-Winkel). Die Matrixelemente sind durch

$$D_{m'm}^l(\alpha, \beta, \gamma) = (lm' | \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) | lm) \quad (\text{A.4})$$

$$= e^{im'\gamma} d_{m'm}^l(\beta) e^{im\alpha} \quad (\text{A.5})$$

gegeben (s. Gl. (4.1.11) in Edmonds (1974)). Die generalisierten Kugelflächenfunktionen sind durch spezielle  $D_{m'm}^l$  gegeben

$$Y_l^{Nm}(\theta, \phi) = D_{m'm}^l(\phi, \theta, 0) = d_{m'm}^l(\theta) e^{im\phi}, \quad (\text{A.6})$$

worin die Funktion  $d_{m'm}^l$  in (4.1.23) in Edmonds (1974) definiert ist. Die gängigen Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m$  aus Gl. (2.50) sind Spezialfälle der generalisierten Kugelflächenfunktionen

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \gamma_l Y_l^{0m}(\theta, \phi), \quad (\text{A.7})$$

wobei

$$\gamma_l = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (\text{A.8})$$

Die generalisierten Kugelflächenfunktionen genügen einigen Identitäten und Rekursionsformeln. Davon gebrauchen wir für unsere Anwendungen die folgenden Beziehungen

$$\frac{dY_l^{Nm}(\theta, \phi)}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_N^l Y_l^{N-1,m}(\theta, \phi) - \Omega_{N+1}^l Y_l^{N+1,m}(\theta, \phi)), \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{N \cos \theta - m}{\sin \theta} Y_l^{Nm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_{N+1}^l Y_l^{N+1,m}(\theta, \phi) + \Omega_N^l Y_l^{N-1,m}(\theta, \phi)), \quad (\text{A.10})$$

wobei

$$\Omega_N^l = \sqrt{\frac{1}{2}(l+N)(l-N+1)}. \quad (\text{A.11})$$

Aus (A.6) und (A.10) folgt

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{Nm}(\theta, \phi)}{\partial \phi} = -\frac{i}{2} (\Omega_{N+1}^l Y_l^{N+1,m} + \Omega_N^l Y_l^{N-1,m}) + \frac{iN \cos \theta}{\sin \theta} Y_l^{Nm}. \quad (\text{A.12})$$

Höhere Ableitungen der Kugelflächenfunktionen  $Y_l^{Nm}(\theta, \phi)$  nach  $\theta$  gewinnt man durch wiederholte Anwendung von (A.9). So ergibt sich z.B.

$$\frac{\partial^2 Y_l^{0m}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} \Omega_0^l [\Omega_2^l (Y_l^{-2m} + Y_l^{2m} - 2\Omega_0^l Y_l^{0m})]. \quad (\text{A.13})$$

### A.3. Die Wigner-3j-Symbole

Wigner-3j-Symbole sind symmetrisierte Clebsch-Gordon-Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3 - m_3), \quad (\text{A.14})$$

wobei die Clebsch-Gordon-Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} & (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3 - m_3) = \\ & \delta_{m_1 + m_2, -m_3} \left[ \frac{(2j_1)(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 - j_2 + j_3)!(-j_1 + j_2 + j_3)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!} \right]^{1/2} \\ & \times [(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!(j_3 + m_3)!(j_3 - m_3)!]^{1/2} \\ & \times \sum_z \left[ \frac{(-1)^z}{z!} \frac{1}{(j_1 + j_2 - j_3 - z)!(j_1 - m_1 - z)!(j_2 + m_2 - z)!} \right. \\ & \left. \times \frac{1}{(j_3 - j_2 + m_1 + z)!(j_3 - j_1 - m_2 + z)!} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

gegeben sind. Die Summe läuft dabei über alle  $z \in \mathbb{N}_0$ , für die der Nenner des Summanden ungleich Null ist.

#### A.3.1. Eigenschaften der Wigner-3j-Symbole

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{(j_1 + j_2 + j_3)} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{(j_1 + j_2 + j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{(j_1 + j_2 + j_3)} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$= (-1)^{(j_1 + j_2 + j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$= 0, \text{ falls } m_1 = m_2 = m_3 = 0 \text{ und } j_1 + j_2 + j_3 \text{ ungerade,} \quad (\text{A.19})$$

$$\neq 0, \text{ nur falls } m_1 + m_2 + m_3 = 0, |m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2, |m_3| \leq j_3, \\ |j_1 - j_2| \leq j_3, |j_2 - j_3| \leq j_1, |j_3 - j_1| \leq j_2. \quad (\text{A.20})$$

$$\sum_{j_3 m_3} = (2j_2 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \quad (\text{A.21})$$

$$\sum_{m_1 m_2} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3 + 1} \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_2 m_2'} \Delta(j_1, j_2, j_3), \quad (\text{A.22})$$

wobei  $\Delta(j_1, j_2, j_3) = 1$ , falls  $j_1, j_2, j_3$  einer Dreiecksbedingung genügen und  $\Delta(j_1, j_2, j_3) = 0$  in allen anderen Fällen.



## Bestimmung des allgemeinen Matrixelements

### B.1. Das allgemeine Matrixelement $V_{nn',ll'}^{mm'}$

In diesem Abschnitt werden wir den Advektionskern und das allgemeine Matrixelement  $V_{nn',ll'}^{mm'}$  berechnen. Als erstes gilt es, den Term

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_k \quad (\text{B.1})$$

genau zu betrachten. Hierbei ist zu beachten, daß wir passend zur Geometrie des Sonnenmodells Kugelkoordinaten verwenden. Somit gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_k &= \left( (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_{k,r} - \frac{v_{0,\theta} \xi_{k,\theta}}{r} - \frac{v_{0,\varphi} \xi_{k,\varphi}}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left( (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_{k,\theta} - \frac{v_{0,\varphi} \xi_{k,\varphi}}{r} \cot \theta + \frac{v_{0,\theta} \xi_{k,r}}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left( (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi_{k,\varphi} + \frac{v_{0,\varphi} \xi_{k,r}}{r} + \frac{v_{0,\theta} \xi_{k,\theta}}{r} \cot \theta \right) \mathbf{e}_\varphi . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Zur Berechnung dieser neun Summanden sind die entsprechenden Vektorkomponenten  $v_{0,r}$ ,  $v_{0,\theta}$ ,  $v_{0,\varphi}$  und  $\xi_{k,r}$ ,  $\xi_{k,\theta}$ ,  $\xi_{k,\varphi}$  des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}_0$  bzw. der Eigenschwingung  $\boldsymbol{\xi}_k$  einzusetzen.

Die Geschwindigkeit hatten wir in Kapitel 3 in ein poloidales und ein toroidales Feld zerlegt, und diese dann nach Kugelflächenfunktionen entwickelt (siehe Gleichungen (3.2) – (3.4)). Uns genügt es, einen Summanden aus der Entwicklung herauszugreifen, und diesen in (B.2) einzusetzen, schließlich stellt jeder Summand für sich ein Geschwindigkeitsfeld dar. Dadurch ist es möglich, jede Art der Konvektionszellen (Giant Cells, Granulation, ...) ihrer charakteristischen Längenskala und Geometrie entsprechend, separat zu betrachten. Ein Superpositionsprinzip gilt nach den Gleichungen (3.2) und (4.64) für jedes allgemeine Matrixelement, aber nicht für die Eigenwerte der allgemeinen Matrix. Ein einzelner Summand hat die Gestalt

$$\boldsymbol{v}_{s}^t(r) = u_s^t(r) Y_s^t(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + v_s^t(r) \nabla_h Y_s^t(\theta, \varphi) - w_s^t(r) \mathbf{e}_r \times \nabla_h Y_s^t(\theta, \varphi) , \quad (\text{B.3})$$

woraus sich die entsprechenden Komponenten ergeben

$$v_{0,r} = u_s^t(r) Y_s^t(\theta, \varphi) , \quad (\text{B.4})$$

$$v_{0,\theta} = v_s^t(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_s^t(\theta, \varphi) + \frac{w_s^t(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_s^t(\theta, \varphi) , \quad (\text{B.5})$$

$$v_{0,\varphi} = \frac{v_s^t(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_s^t(\theta, \varphi) - w_s^t(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_s^t(\theta, \varphi) . \quad (\text{B.6})$$

Die Komponenten des Eigenvektors liest man aus der folgenden Beziehung ab

$$\boldsymbol{\xi}_k = \underbrace{\xi_r(r) Y_l^m(\theta, \varphi)}_{\xi_{k,r}} \mathbf{e}_r + \underbrace{\xi_h(r) \frac{\partial Y_s^t}{\partial \theta}}_{\xi_{k,\theta}} \mathbf{e}_\theta + \underbrace{\frac{\xi_h(r)}{\sin \theta} \frac{\partial Y_s^t}{\partial \varphi}}_{\xi_{k,\varphi}} \mathbf{e}_\varphi . \quad (\text{B.7})$$

Im nächsten Schritt multipliziert man von links die zugehörigen Komponenten des Vektors  $\xi_{k'}^*$  zu den berechneten Summanden. Man erhält dann das Produkt  $\xi_{k'}^* \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \xi_k$  aus dem Advektionskern (4.30).

Jeder Summand wird mit  $\rho_0$  multipliziert und über das Volumen der Sonne integriert. Dabei läßt sich die Integration über den Radialteil von der Integration über die Winkel abtrennen. Die Integrale über die Radialteile lassen sich zwar zusammenfassen, aber nicht direkt berechnen. Die Winkelanteile kann man durch einige Überlegung erheblich vereinfachen.

Die beiden Schwingungen  $\xi_k$  und  $\xi_{k'}^*$  und das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_0$  steuern jeweils eine Kugelflächenfunktion zu dem Integral über den Raumwinkel bei. In jedem Integral steht dann ein Produkt aus drei Kugelflächenfunktionen. Wegen der Beziehungen (B.2) – (B.7) treten in diesen Produkten auch erste und zweite Ableitungen der Kugelflächenfunktionen nach den Winkeln auf. Diese Ableitungen lassen sich als Linearkombination zweier anderer Kugelflächenfunktionen darstellen, doch handelt man sich dadurch zusätzliche Faktoren  $\exp(i\varphi)$  ein. Die Produkte sind dann nicht mehr reine Produkte aus Kugelflächenfunktionen, was die Integration nicht immer einfacher gestaltet.

Ein Ausweg findet sich, wenn man alle auftretenden Kugelflächenfunktionen durch *generalisierte Kugelflächenfunktionen* darstellt. Details finden sich im Anhang A. Auch Lavelly & Ritzwoller (1992) verwenden generalisierte Kugelflächenfunktionen, um diesen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen.

#### B.1.0.1. Vektorfelder in generalisierten Kugelflächenfunktionen

Mit den Beziehungen (A.7) – (A.12) folgt für die Komponenten des Geschwindigkeitsfelds  $\mathbf{v}_0$

$$v_{0,r} = \gamma_s u_s^t(r) Y_s^{0t}, \quad (\text{B.8})$$

$$v_{0,\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_s \Omega_0^s v_s^t(r) (Y_s^{-1t} - Y_s^{1t}) - \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_s \Omega_0^s w_s^t(r) (Y_s^{1t} + Y_s^{-1t}), \quad (\text{B.9})$$

$$v_{0,\varphi} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_s \Omega_0^s v_s^t(r) (Y_s^{1t} + Y_s^{-1t}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_s \Omega_0^s w_s^t(r) (Y_s^{-1t} - Y_s^{1t}) \quad (\text{B.10})$$

und für die Komponenten von  $\xi_k$  (2.57) und (B.7)

$$\xi_{k,r} = \gamma_l \xi_r(r) Y_l^{0m}, \quad (\text{B.11})$$

$$\xi_{k,\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_l \Omega_0^l \xi_h(r) (Y_l^{-1m} - Y_l^{1m}), \quad (\text{B.12})$$

$$\xi_{k,\varphi} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_l \Omega_0^l \xi_h(r) (Y_l^{1m} + Y_l^{-1m}). \quad (\text{B.13})$$

#### B.1.0.2. Der Winkelanteil

In den beschriebenen Rechenschritten sind die generalisierten Kugelflächenfunktionen und deren Darstellungen der ersten und zweiten Ableitungen nach den Winkeln aus den Gleichungen (A.9) und (A.12) einzusetzen.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( Y_{l'}^{N' m'} \right)^* Y_{l''}^{N'' m''} Y_l^{N m} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \quad (\text{B.14})$$

$$4\pi (-1)^{N' - m'} \begin{pmatrix} l' & l'' & l \\ N' & N'' & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & l'' & l \\ m' & m'' & m \end{pmatrix},$$

mit der sich alle Integrationen über den Raumwinkel vereinfacht aufschreiben lassen. Treten Kugelflächenfunktionen im Integral auf, so ersetzen wir das Integral durch ein Produkt aus zwei Wigner-3j-Symbolen. Die Wigner-3j-Symbole genügen einigen Symmetriebeziehungen, mit deren Hilfe die Gleichungen weiter zusammengefaßt werden können.



Mit den Kenntnissen über die Wigner-3j-Symbole erhalten wir den Advektionskern. Als toroidalen Anteil  $T$  des Advektionskerns bezeichnen wir jene Beiträge, bei denen der toroidale Entwicklungskoeffizient  $w_s^t(r)$  eingeht. Beim poloidalen Anteil des Advektionskerns betrachten wir Radialteil  $R$  und Horizontalteil  $H$  getrennt. Im Radialteil  $R$  fassen wir alle Beiträge mit dem Entwicklungskoeffizienten  $u_s^t(r)$  zusammen und im Horizontalteil  $H$  alle Beiträge mit  $v_s^t(r)$ . Die Radialteile  $\xi_r(r)$  und  $\xi_h(r)$  der Eigenfunktion  $\xi_k$  sind reell (Abschnitt 2.5). Die Entartung und der komplexe Charakter der Eigenfunktionen kommt durch die  $\varphi$ -Abhängigkeit  $e^{im\varphi}$  zustande. Die Funktionen  $\xi_r$  und  $\xi_h$  sind innerhalb eines Multipletts für alle Ordnungen  $m$  identisch. Wir können deshalb den \* für die komplexe Konjugation an  $\xi_r$  und  $\xi_h$  weglassen. Der Advektionskern ist dann

$$2i\omega_{\text{ref}} \int \rho_0 \xi_{k'}^* \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \xi_k d^3r = R + H + T . \quad (\text{B.15})$$

Dabei gilt

$$R = 2i\omega_{\text{ref}} 4\pi\gamma_s\gamma_l\gamma_{l'} (-1)^{m'} \int_0^R \rho_0 r^2 u_s^t \left\{ \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \xi_h' ((-1)^{s+l+l'} + 1) \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix} , \quad (\text{B.16})$$

$$H = 2i\omega_{\text{ref}} 4\pi\gamma_s\gamma_l\gamma_{l'} (-1)^{m'} \Omega_0^s ((-1)^{s+l+l'} + 1) \times \int_0^R \rho_0 r v_s^t \left\{ -\Omega_0^l \xi_r \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \xi_h \xi_h' \left[ \Omega_2^l \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \Omega_0^{l'} \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] + \Omega_0^{l'} \xi_r \xi_h' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \Omega_0^l \xi_h \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix} , \quad (\text{B.17})$$

$$T = 2\omega_{\text{ref}} 4\pi\gamma_s\gamma_l\gamma_{l'} (-1)^{m'} \Omega_0^s (1 - (-1)^{s+l+l'}) \int_0^R \rho_0 r w_s^t \left\{ \Omega_0^l \xi_r \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \Omega_0^l \xi_h \xi_r' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \xi_h \xi_h' \left[ \Omega_2^l \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \Omega_0^l \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] + \Omega_0^{l'} \xi_r \xi_h' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix} . \quad (\text{B.18})$$

Als erstes wichtiges Ergebnis folgt aus diesen Gleichungen, daß der poloidale Beitrag vom toroidalen Beitrag entkoppelt ist. Im poloidalen Anteil tritt entweder der Faktor  $((-1)^{s+l+l'} + 1)$  oder das Wigner-3j-Symbol  $\begin{pmatrix} s & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  auf. Beide sind von null verschieden, falls  $s + l + l'$  gerade ist. Beim toroidalen Anteil ist es gerade umgekehrt. Dort tritt der Faktor  $((-1)^{s+l+l'} - 1)$  auf, der bei ungeradem  $s + l + l'$  von null verschieden ist. Es ist an dieser Stelle geschickt, die von Woodhouse (1980) definierten und nach ihm benannten Koeffizienten  $B_{l'l'l}^{(N)\pm}$  einzuführen:

$$B_{l'l'l}^{(N)\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^{l'+l''+l}) \left[ \frac{(l'+N)!(l+N)!}{(l'-N)!(l-N)!} \right]^{1/2} (-1)^N \begin{pmatrix} l' & l'' & l \\ -N & 0 & N \end{pmatrix} . \quad (\text{B.19})$$

Diese erlauben eine kompaktere Darstellung der Gleichungen (B.15) – (B.17):

$$R = 2i\omega_{\text{ref}} 4\pi\gamma_s\gamma_l\gamma_{l'} (-1)^{m'} \times \int_0^R \rho_0 r^2 u_s^t \left\{ \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \xi_r' B_{l'sl}^{(0)+} + \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \xi_h' B_{l'sl}^{(1)+} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix} , \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}
H &= 2i\omega_{\text{ref}} 4\pi\gamma_s \gamma_l \gamma_{l'} (-1)^{m'} \Omega_0^s \int_0^R \rho_0 r v_s^t \left\{ [\xi_r \xi_r' - \xi_h \xi_r'] B_{sl'l'}^{(1)+} + [\xi_r \xi_h' - \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \xi_h \xi_h'] B_{sll'}^{(1)+} \right. \\
&\quad \left. + \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \Omega_2^l ((-1)^{s+l+l'} + 1) \xi_h \xi_h' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix}, \tag{B.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= 2\omega_{\text{ref}} 4\pi\gamma_s \gamma_l \gamma_{l'} (-1)^{m'} \Omega_0^s \int_0^R \rho_0 r w_s^t \left\{ [\xi_r \xi_r' - \xi_h \xi_r'] B_{sl'l'}^{(1)-} + [\xi_r \xi_h' - \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \xi_h \xi_h'] B_{sll'}^{(1)-} \right. \\
&\quad \left. - (1 - (-1)^{s+l+l'}) \xi_h \xi_h' \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \Omega_2^l \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix}. \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Für ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld ist das allgemeine Matrixelement durch die Gleichungen (B.19) – (B.21) vollständig beschrieben. Wir haben in Kapitel 3 angenommen, daß  $v_0$  stationär ist und so die Beziehung (3.5) zwischen den Entwicklungskoeffizienten  $u_s^t$  und  $v_s^t$  erhalten. Diese wollen wir verwenden, um einerseits die Zahl der Freiheitsgrade um eins zu erniedrigen, und andererseits die Hermitezität der Supermatrix zu gewährleisten.

### B.1.0.3. Hermitezität der Supermatrix

Betrachtet man (B.19) genauer, so stellt man fest, daß sich  $R$  in eine Summe aus einem in  $\xi$  und  $\xi'$  symmetrischen und antisymmetrischen Anteil aufspalten läßt:

$$\begin{aligned}
R &\sim i \int_0^R \rho_0(r) r^2 u_s^t(r) \left\{ \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \xi_r' B_{l'sl}^{(0)+} + \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \xi_h' B_{l'sl}^{(1)+} \right\} dr \\
&= i \int_0^R \rho_0(r) r^2 u_s^t(r) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \xi_r' + \xi_r \frac{\partial \xi_r'}{\partial r} \right) B_{l'sl}^{(0)+} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \xi_h' + \xi_h \frac{\partial \xi_h'}{\partial r} \right) B_{l'sl}^{(1)+} \right] dr \tag{B.23} \\
&+ i \int_0^R \rho_0(r) r^2 u_s^t(r) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \xi_r' - \xi_r \frac{\partial \xi_r'}{\partial r} \right) B_{l'sl}^{(0)+} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \xi_h' - \xi_h \frac{\partial \xi_h'}{\partial r} \right) B_{l'sl}^{(1)+} \right] dr \\
&\equiv R_{\text{sym}} + R_{\text{asym}}.
\end{aligned}$$

Der symmetrische Summand  $R_{\text{sym}}$  ist antihermitesch und der antisymmetrische Summand  $R_{\text{asym}}$  ist hermitesch. Eine partielle Integration des symmetrischen Summanden  $R_{\text{sym}}$  ergibt

$$\begin{aligned}
R_{\text{sym}} &= -i \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 u_s^t) \left[ \frac{1}{2} \xi_r \xi_r' B_{l'sl}^{(0)+} + \frac{1}{2} \xi_h \xi_h' B_{l'sl}^{(1)+} \right] dr \\
&= -i \int_0^R \rho_0 r v_s^t s(s+1) \left[ \frac{1}{2} \xi_r \xi_r' B_{l'sl}^{(0)+} + \frac{1}{2} \xi_h \xi_h' B_{l'sl}^{(1)+} \right] dr. \tag{B.24}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Anelastizitätsbeziehung (3.5) eingesetzt und davon Gebrauch gemacht, daß  $u_s^t$  im Sonnenzentrum und an der Sonnenoberfläche verschwindet. Es wurde noch gebraucht, daß  $\xi_k$  für  $r \rightarrow 0$  endlich bleibt.

Im Horizontalteil  $H$  aus Gleichung (B.20) tritt das Wigner-3j-Symbol ( $sl'l'/1-21$ ) auf. Mit der Rekursionsformel (3.7.13) aus Edmonds (1974) finden wir eine Identität für dieses Wigner-3j-Symbol

$$\begin{aligned}
((-1)^{s+l+l'} + 1) \Omega_0^s \Omega_2^l \Omega_0^{l'} \Omega_0^l \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} [s(s+1) + l(l+1) - l'(l'+1)] B_{l'sl}^{(1)+} \\
&+ \Omega_0^l \Omega_0^{l'} B_{sll'}^{(1)+}. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

$H$  formen wir damit um

$$\begin{aligned}
 H &\sim i\Omega_0^s \int_0^R \rho_0 r v_s^t \left\{ [\xi_r \xi_r' - \xi_h \xi_h'] B_{sl'l}^{(1)+} + [\xi_r \xi_h' - \Omega_0 \Omega_0' \xi_h \xi_h'] B_{sl'l'}^{(1)+} \right. \\
 &\quad \left. + \Omega_0^l \Omega_0^{l'} \Omega_2^l ((-1)^{s+l+l'} + 1) \xi_h \xi_h' \begin{pmatrix} s & l & l' \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right\} dr \\
 &= i \int_0^R \rho_0 r v_s^t \left[ \frac{1}{2} [s(s+1) + l(l+1) - l'(l'+1)] \xi_h \xi_h' B_{l'l's}^{(1)+} \right. \\
 &\quad \left. + \xi_r \xi_r' B_{sl'l}^{(1)+} + \xi_r \xi_h' B_{l'l's}^{(1)+} - \xi_h \xi_r' B_{l'l's}^{(1)+} \right] dr .
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Das Resultat aus Gleichung (B.24) addieren wir zu dem Ergebnis aus Gleichung (B.26) hinzu und erhalten auf diese Weise einen hermiteschen Radial- und Horizontalteil des Advektionskerns

$$\begin{aligned}
 R &= 2i\omega_{\text{ref}} 4\pi \gamma_s \gamma_l \gamma_{l'} (-1)^{m'} \int_0^R \rho_0(r) r^2 u_s^t(r) \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \xi_r' - \xi_r \frac{\partial \xi_r'}{\partial r} \right) B_{l'l's}^{(0)+} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \xi_h' - \xi_h \frac{\partial \xi_h'}{\partial r} \right) B_{l'l's}^{(1)+} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix} ,
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}
 H &= 2i\omega_{\text{ref}} 4\pi \gamma_s \gamma_l \gamma_{l'} (-1)^{m'} \int_0^R \rho_0(r) r v_s^t(r) \left\{ \frac{1}{2} [l(l+1) - l'(l'+1)] \right. \\
 &\quad \left. \times [\xi_r \xi_r' B_{l'l's}^{(0)+} + \xi_h \xi_h' B_{l'l's}^{(1)+}] + \xi_r \xi_h' B_{l'l's}^{(1)+} - \xi_h \xi_r' B_{l'l's}^{(1)+} \right\} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & -m' \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

wobei wir von der Identität

$$B_{sl'l}^{(1)+} = \frac{1}{2} [s(s+1) + l(l+1) - l'(l'+1)] B_{l'l's}^{(0)+} \tag{B.29}$$

Gebrauch gemacht haben.

Der toroidale Anteil ist nach Gleichung (B.21) reell. Daher muß nur die Symmetrie gezeigt werden, um die Hermitezität der Supermatrix im Falle eines toroidalen Geschwindigkeitsfeldes zu beweisen. Wieder ist das Wigner-3j-Symbol ( $sl'l'/1-21$ ) zu ersetzen. Mit Hilfe von  $B_{l'l's}^{(1)-} = B_{sl'l}^{(1)-} = B_{l'l's}^{(1)-}$  und (B.29) findet man den symmetrischen Ausdruck

$$\begin{aligned}
 T &= 2\omega_{\text{ref}} 4\pi \gamma_l \gamma_{l'} (-1)^{m'} \int_0^R \rho(r) r w_s^t(r) \left\{ \xi_r' \xi_h + \xi_h \xi_r' - \xi_r' \xi_r \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \xi_h' \xi_h [l(l+1) + l'(l'+1) - s(s+1)] \right\} B_{l'l's}^{(1)-} dr \begin{pmatrix} s & l & l' \\ t & m & m' \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

Somit ist die allgemeine Matrix hermitesch.

Das allgemeine Matrixelement ist dann

$$V_{nn',ll'}^{mm'} = R + H + T . \tag{B.31}$$

## B.2. Das allgemeine Matrixelement $C_{nm',ll'}^{mm'}$

Das allgemeine Matrixelement  $C_{nm',ll'}^{mm'}$  (4.65) bestimmt den Beitrag der Corioliskraft bei der Kopplung von Oszillationen und der daraus resultierenden Frequenzverschiebung.

Zur Berechnung von  $C_{nm',ll'}^{mm'}$  benötigen wir die Darstellung des Rotationsvektors  $\Omega$  mit generalisierten Kugelflächenfunktionen. Statt (4.32) schreiben wir  $\Omega$  dann als

$$\Omega = \Omega Y_1^{00}(\theta, \varphi) e_r + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega (Y_1^{-10}(\theta, \varphi) - Y_1^{10}(\theta, \varphi)) e_\theta . \tag{B.32}$$

Damit erhalten wir den symmetrischen Ausdruck

$$C_{nn',ll'}^{mm'} = \delta_{mm'} \delta_{ll'} 2\omega_{\text{ref}} m \Omega \int_0^R \rho_0 (\xi_r \xi_h' + \xi_r' \xi_h + \xi_h \xi_h') r^2 dr . \quad (\text{B.33})$$

## Literaturverzeichnis

- Anderson, E., R., Duvall, T. L., Jr., Jeffries, S. M., 1990, *Astrophys. J.*, 364, 699
- Appourchaux, T., Fröhlich, C., Andersen, B., et al., 2001, *Astrophys. J.*, 538, 401
- Arnold, V. I., 1984, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg
- Backus, G. E., Gilbert, F., 1968, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 16, 169
- Basu, S., Antia, H. M., 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 287, 189
- Baturin, V. A., Mironova, I. V., 1998, *proc. SOHO 6 / GONG 98 workshop*, p. 717
- Baudin, F., Gabriel, A., Gibert, D., et al., 1996, *Astron. Astrophys.*, 311, 1024
- Beck, J. G., Duvall, T. L., Jr., Scherrer, P. H., 1998, *Nature*, 394, 653
- Bertello, L., Restaino, S. R., 1993, *Astron. Astrophys.*, 273, 260
- Biermann, L., 1932, *Z. Astrophysik*, 5, 117
- Böhm-Vitense, E., 1958, *Z. Astrophys.*, 46, 108
- Braun, D. C., Duvall, T. L., Jr., Labonte, B. J., 1987, *Astrophys. J.*, 319, L27
- Braun, D. C., Lindsey, C., 2000, *Astrophys. J.*, 560, L189
- Braun, D., 2001, *Private Mitteilungen*
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., et al., 1999, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M.
- Chaplin, W. J., Elsworth, Y., Howe, R., et al., 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 287, 51
- Craig, I. J. D., Brown, J. C., 1986, *Inverse Problems in Astronomy: A Guide to Inverse Strategies for Remotely Sensed Data*, Adam Hilger, Bristol
- Christensen-Dalsgaard, J., Schou, J., 1988, in *ESA, Seismology of the Sun and Sun-Like Stars*, p. 149
- Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., Ajukov, S. V., et al., 1996, *Science*, 272, 1286
- Christensen-Dalsgaard, J., 1998, *Lecture Notes on Stellar Oscillations, Fourth Edition*, <http://ifa.au.dk/~jcd>
- Cowling, T. G., 1941, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 109, 149
- Cram, L. E., Durney, B. R., Guenther, D. B., 1983, *Astrophys. J.*, 267, 442
- Duvall, T. L. Jr., Jefferies, S. M., Harvey, J. W., et al., 1993, *Nature*, v.362, No. 6419, p. 430
- Edmonds, A. R., 1974, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey
- Foglizzo, T., 1998, *Astron. Astrophys.*, 339, 261
- Fukada, S., et al. (The Super-Kamiokande Collaboration), 2001, *Phys. Rev. Lett.* 86, 5656
- Gasiorowicz, 1985, *Quantenphysik*, R. Oldenbourg Verlag, München
- Gavryusev, V. G., Gavryuseva, E. A., 1999, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 303, L63
- Gilman, P. A., 1974, *Ann. Rev. Astron. & Astrophys.*, 12, 47
- Goldstein, H., 1981, *Klassische Mechanik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden

- Haber, D. A., Bogart, R. S., Hill, F., et al., 2002, *Astrophys. J.*, 570, 855
- Hathaway, D., H., 2000, *Solar Phys.*, 193, 299
- Hill, F., 1988, *Astrophys. J.*, 333, 996
- Hoeksema, N. M., Brandt, P. N., 2000, *Astron. Astrophys.*, 353, 389
- Howe, R., Christensen-Dalsgaard, J., Hill, F., et al., 2000a, *Science*, Vol. 287, Issue 5462, p. 2456
- Howe, R., Christensen-Dalsgaard, J., Hill, F., et al., 2000b, *Astrophys. J.*, 533, L163
- Iglesias, C. A., Rogers, F. J., Wilson, B. G., 1992, *Astrophys. J.*, 397, 717
- Kosovichev, A. G., Schou, J., Scherrer, P. H., et al., 1997, *Solar Phys.*, 170, 43
- LaBonte, B. J., Howard, R., Gilman, P. A., 1981, *Astrophys. J.*, 250, 796
- Landy, D., Howe, R., Komm, R., et al., 2001, American Geophysical Union, Spring Meeting 2001, abstract #SP21C-04
- Lavelly, E. M., Ritzwoller, M. H., 1992, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 339, 431
- Leighton, R. B., Noyes, R. W., Simon, G. W., 1962, *Astrophys. J.*, 135, 474
- Lindsey, C., Braun, D. C., Jeffries, S. M., 1993, *GONG 1992: Seismic Investigation of the Sun and Stars*, ASP Conference Series, Vol. 42
- Miesch, M. S., Elliott, J. R., Toomre, J., Clune, T. L., et al., 2000, *Astrophys. J.*, 532, 539
- Miesch, M. S., 2001, American Geophysical Union, Spring Meeting 2001, abstract #SP31A-17
- Morel, P., Provost, J., Berthomieu, G., 1997, *Astron. Astrophys.*, 327, 349
- Nesis, A., Hammer, R., Roth, M., et al., 2001, *Solar Phys.*, 200, 11
- Nesis, A., Mattig, W., 1989, *Astron. Astrophys.*, 221, 130
- Nolting, W., 1994, *Grundkurs Theoretische Physik*, Bd. I – IV, Verlag Zimmermann-Neufang
- November, L. J., Toomre, J., Gebbie, K. B., et al., 1981, *Astrophys. J.*, 245, L123
- Prialnik, D., 2000, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*, Cambridge Univ. Press,
- Ritzwoller, M. H., Lavelly, E. M., 1991,
- Robillot, J. M., Bocchia, R., Fossat, E., Grec, G., 1984, *Astron. Astrophys.*, 137, 43
- Roth, M., 1998, *Kopplung solarer Eigenschwingungen in quasi-entarteter Störungstheorie*, Diplomarbeit
- Roth, M., Stix, M., 1999, *Astron. Astrophys.*, 351, 1133
- Roth, M., Stix, M., 2001, *ESA-SP 464*, 243
- Roth, M., 2001, *Astrophys. J.*, 559, 1165
- Roth, M., Howe, R., Komm, R., 2002, *Astron. Astrophys.*, in press
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al., 1998, *Astrophys. J.*, 505, 390
- Schou, J., Howe, R., Basu, S., et al., 2002, *Astrophys. J.*, 567, 1234
- Schröter, E. H., Wöhl, H., Soltau, D., et al., 1978, *Solar Phys.*, 60, 181
- Schwarzschild, K., *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, No. 1, p. 41
- Shearer, P., 1999, *Introduction to Seismology*, Cambridge Univ. Press
- Simon, G. W., Weiss, N. O., 1968, *Zs. Ap.*, 69, 435
- Stein, R. F., Nordlund, Å., 1998, *proc. SOHO 6 / GONG 98 workshop*, p. 693
- Stein, R.F., Nordlund, Å., 2002, *Astrophys. J.*, 546, 585
- Stix, M., Zhugzhda, Y. D., 1998, *Astron. Astrophys.*, 335, 685
- Stix, M., 1991, *The Sun – An Introduction*, Springer-Verlag, Heidelberg
- Stix, M., 2000, *Solar Phys.*, 196, 19

- Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y., 1977, Solutions of illposed problems, Winston, Washington DC
- UeNo, S., Kitai, R., 1998, Publ. Astron. Soc. Japan, 50, 125
- Vitense, E., Z. Astrophys., 32, 135
- Wagner, W. J., Gilliam L. B., 1976, Solar Phys., 50, 265
- Walter, W., 1993, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 5. Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg
- Woodhouse, J. H., 1980, Geophys. J. R. Astron. Soc., 61, 261
- Zhugzhda, Y. D., Stix, M., 1994, Astron. Astrophys., 291, 310
- Morse, P. M., Ingard, K. U., 1986, Theoretical Acoustics, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey





## Danksagung

*So listen with all your heart,  
hold it inside forever,  
you may find all your dreams have already come true.*

*(Warren Brothers w/ Sara Evans, "That's The Beat Of A Heart")*

An dieser Stelle darf ich all denjenigen danken, die zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. M. Stix für die Vergabe des Themas und die hervorragende Betreuung und Förderung in den letzten Jahren. Sein großes Interesse und seine für mich stets offene Tür trugen wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei. Für die Ermöglichung der Reisen nach Tucson, Aarhus und zu zahlreichen Tagungen möchte ich mich ebenfalls herzlich bedanken. Eine interessantere Zeit als in den letzten drei Jahren hätte ich mir nicht wünschen können.

Bei meinen Besuchen in auswärtigen Instituten wurde ich überall herzlich aufgenommen. Auf diese Weise habe ich neue Freunde gefunden. Für die freundschaftliche Aufnahme und die herrliche Zeit in Tucson darf ich Dr. Rudi Komm und Bessie May-Komm herzlich danken. Ebenso danke ich meinen Kollegen am National Solar Observatory Dr. Rachel Howe, Dr. Frank Hill, Dr. Pat Eliason, Prof. Dr. John Leibacher und allen GONGstern für die Gastfreundschaft, die ich genießen durfte, für die gute und erfolgreiche Zusammenarbeit und für die Bereitstellung finanzieller Mittel. Mein besonderer Dank geht an Ann Barringer, für all die Mühe und Arbeit, die sie bei der perfekten Organisation meiner Besuche in Tucson hatte.

Für die Einladungen an das National Solar Observatory in Sunspot danke ich allen dortigen Kollegen. Für die freundschaftliche Unterbringung auf dem Sacramento Peak und die gemeinsame Erkundung der "näheren" Umgebung danke ich besonders Michael Sigwarth.

Für die Einladung an das HAO danke ich Dr. Michael Knölker. Für den freundlichen Empfang im High Altitude Observatory (HAO), die freundschaftliche Unterbringung in Longmont und die Einweihung in die Geheimnisse des Baseballs danke ich Dr. Steve Tomczyk.

Für die gute Zusammenarbeit am Institut for Fysik og Astronomi in Aarhus danke ich Prof. Dr. J. Christensen-Dalsgaard.

Der Solar Physics Division der American Astronomical Society danke ich für die Vergabe eines Studentship-Awards. Weitere finanzielle Mittel erhielt ich von der Deutschen Forschungsgesellschaft, welche dieses Projekt neben dem Kiepenheuer-Institut finanziert hat.

Ich habe mit großer Freude am Kiepenheuer-Institut gearbeitet. Dies liegt vor allem an der angenehmen Atmosphäre im Institut, welche ein Verdienst aller meiner Kollegen dort ist. Dr. Anastasios Nesis und seiner Frau Mary danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die Gesellschaft im Rahmen der Tagungsbesuche in Lake Tahoe und Boston. Dr. Rolf Schlichenmeier, Johny Setiawan, dem Spielzimmer mit Anhang und den fleißigen Korrekturlesern Christian Beck, Kai Langhans und Dr. Alexandra Tritschler danke ich für zahlreiche Unterhaltungen und "Social Events" am Institut.

Danken darf ich auch all meinen Freunden für die Begleitung in den letzten Jahren. Für das Korrekturlesen der Arbeit danke ich Erik Pleuler.

Meinen Eltern und meinem Bruder Guido danke ich sehr für die Unterstützung und Förderung während meiner Schul- und Studienzeit. Ohne sie wäre meine Promotion nicht möglich gewesen.

Mein herzlichstes Dankeschön geht an Erika für das schöne letzte Jahr. Ihre Unterstützung und ihr großes Verständnis waren für mich in der Schlußphase der Arbeit die größte Hilfe. Für die Zeit, die Geduld und die Sorgfalt, die sie zum Korrekturlesen der Arbeit aufgebracht hat, für die zahlreichen Anregungen und Verbesserungsvorschläge sage ich vielen Dank! Es ist schön, daß wir uns jetzt gemeinsam über den Abschluß der Arbeit freuen können.

---

This work utilizes data obtained by the Global Oscillation Network Group (GONG) project, managed by the National Solar Observatory, which is operated by AURA, Inc. under a cooperative agreement with the National Science Foundation. The data were acquired by instruments operated by the Big Bear Solar Observatory, High Altitude Observatory, Learmonth Solar Observatory, Udaipur Solar Observatory, Instituto de Astrofísico de Canarias, and Cerro Tololo Interamerican Observatory.

SOHO is a project of international cooperation between ESA and NASA.

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- beziehungsweise Beratungsdiensten (Promotionsberater oder anderer Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Arbeit stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer Prüfungsbehörde vorgelegt.

Markus Roth, Freiburg im Juni 2002



## Lebenslauf

---

Name: Markus Roth  
Anschrift: Karl-Friedrich-Str. 60, 77977 Rust  
Geboren: 9. Januar 1973 in Herbolzheim im Breisgau  
Eltern: Bernhard Ludwig Roth, kaufm. Angestellter  
Maria Roth, geb. Meier, Hausfrau  
Familienstand: ledig

### Schul- und Berufsausbildung:

1979 – 1983 Grund- und Hauptschule in Rust  
1983 – 1992 Mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium  
der Heimschule St. Landolin in Ettenheim  
Mai 1992 Allgemeine Hochschulreife  
Juli 1992 – Juni 1993 Grundwehrdienst in der  
Nassau-Dietz-Kaserne in Budel / Niederlande  
und in der General-Fahnert-Kaserne in Karlsruhe  
Oktober 1993 – März 1999 Studium der Physik an der  
Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg im Breisgau  
Oktober 1995 Vordiplom  
April 1997 Diplomteilprüfung Mathematik  
April 1997 – Oktober 1998 Hauptpraktikum und anschließende Diplomarbeit am  
Kiepenheuer-Institut für Sonnenphysik in Freiburg im Breisgau  
Thema: *Kopplung solarer Eigenschwingungen in  
quasi-entarteter Störungstheorie*, Betreuer: Prof. Dr. M. Stix  
Januar 1999 Diplomprüfung theoretische und experimentelle Physik  
mit Auszeichnung bestanden

### Berufstätigkeit und wissenschaftliche Weiterbildung:

März – Mai 1999 Teilnahme am GONG'99-Workshop und Besuche  
am National Solar Observatory in Tucson und Sunspot / USA  
seit Juli 1999 Wissenschaftlicher Angestellter am Kiepenheuer-Institut  
für Sonnenphysik in Freiburg im Breisgau,  
Juli 1999 Beginn der Promotion an der Albert-Ludwigs-Universität in  
Freiburg im Breisgau, Betreuer: Prof. Dr. M. Stix  
September 1999 Teilnahme an der Jahrestagung der Astronomischen  
Gesellschaft in Göttingen  
Mai – Juli 2000 Summer Research Assistant am National Solar Observatory  
in Tucson / USA, Zusammenarbeit mit Dr. Rudi Komm  
und der GONG-Gruppe  
Juni 2000 Teilnahme am Solar Physics Division Meeting der American  
Astronomical Society in Lake Tahoe / USA  
und Erhalt eines Studentship Awards  
Juli 2000 Besuch am High Altitude Observatory in Boulder / USA  
Oktober 2000 Teilnahme am SOHO 10 / GONG 2000 Workshop in Santa Cruz  
de Tenerife / Teneriffa  
März – April 2001 Besuch am Institut for Fysik og Astronomi in Aarhus / Dänemark,  
Zusammenarbeit mit Prof. Dr. J. Christensen-Dalsgaard  
Juni 2001 Teilnahme am Spring Meeting of the American Geophysical Union  
and the Solar Physics Division in Boston / USA  
September 2001 Summer Research Assistant am National Solar Observatory in  
Tucson / USA, Zusammenarbeit mit Dr. Rudi Komm  
und der GONG-Gruppe