



**GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM**  
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

---

# Scientific Technical Report

ISSN 1610-0956

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. U. Stilla

Prüfer der Dissertation 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Rummel

2. Univ.-Prof. sc.techn. W. Keller, Universität Stuttgart

Die Dissertation wurde am 28.10.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 12.04.2006 angenommen.

## **Impressum**

GeoForschungsZentrum Potsdam  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Telegrafenberg  
D-14473 Potsdam

e-mail: [postmaster@gfz-potsdam.de](mailto:postmaster@gfz-potsdam.de)  
www: <http://www.gfz-potsdam.de>

Gedruckt in Potsdam  
Januar 2006

ISSN 1610-0956

Die vorliegende Arbeit ist in elektronischer Form erhältlich unter:  
<http://www.gfz-potsdam.de/bib/zbstr.htm>

Ulrich Meyer

# **Möglichkeiten und Grenzen der Hill-Gleichungen für die Schwerefeldbestimmung**

Vollständiger Abdruck  
der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor - Ingenieurs  
genehmigten Dissertation.

Scientific Technical Report STR06/08

## Dank

Besonders herzlich danke ich Herrn Professor Dr. Reiner Rummel, der immer wieder Zeit für klärende Gespräche gefunden hat und mit zahlreichen Anregungen zum Gelingen meiner Arbeit maßgeblich beigetragen hat. Dieser Dank gilt ebenso meinem Betreuer Herrn Dr. Nico Sneeuw, dem gedanklichen Vater des Torus-Ansatzes und der verwendeten Transferkoeffizienten, der mir außer dem theoretischen Hintergrund und vielen Ideen auch die MATLAB-Routinen zur Hill-Theorie aus seiner Bibliothek zur Verfügung gestellt hat, die die Grundlage all meiner Simulationsrechnungen gebildet haben. Vielen Dank Herrn Professor Wolfgang Keller, der die Zweitkorrektur übernommen hat. Das GeoForschungsZentrum Potsdam hat nach meinem Wechsel in das GRACE-Team die Fertigstellung meiner Dissertation unterstützt. Zu Dank verpflichtet bin ich dem GFZ auch für die Möglichkeit, das Programm EPOS zur Simulation von Satellitenorbits nutzen zu können.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft hat im Rahmen des CHAMP-Bündelantrages als Forschungsvorhaben SHATUM-CHAMP (RU 586/3) diese Arbeit ermöglicht. Für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die empfangene Förderung bedanke ich mich auch an dieser Stelle sehr.

# Zusammenfassung

Die Beobachtung künstlicher Erdsatelliten erlaubt Rückschlüsse auf die Schwerkraft, welche auf diese Satelliten wirkt. Je genauer die Satellitenbahnen bekannt sind und je näher die Satelliten die Erde umkreisen, umso besser gelingt die Rekonstruktion des Erdschwerefeldes. Je höher die Auflösung des lösbaren Schwerefeldes, desto größer ist aber auch die Anzahl der unbekanntem Schwerefeldkoeffizienten und der Rechenaufwand zu ihrer Bestimmung. So stellt für die aktuellen Schwerefeldmissionen GRACE (im Orbit seit 2002) und GOCE (geplanter Start 2006) die Rechenleistung der Computer einen limitierenden Faktor für die Auswertung der Beobachtungen dar.

Einen Ausweg zeigt die Rückbesinnung auf analytische Bahntheorien. Die Hill-Gleichungen sind eine linearisierte Form der Bewegungsgleichungen eines Satelliten, welche für kreisförmige Bahnen gelten. Mit ihrer Hilfe lassen sich partielle Ableitungen der Bahnstörungen nach Schwerefeldkoeffizienten zeitsparend berechnen. Für den periodischen Anteil der Bahnstörungen können Transferkoeffizienten hergeleitet werden, die einen eleganten Übergang zwischen der spektralen Darstellung der Bahnstörungen und den Schwerefeldkoeffizienten ermöglichen. Die für diesen Fall zu invertierende Normalgleichungsmatrix wird blockdiagonal, was eine partielle Invertierung getrennt nach Ordnungen erlaubt. Werden darüberhinaus effiziente Fast-Fourier-Techniken für die Transformation der Bahnstörungen in den Spektralbereich eingesetzt, so schrumpft der Rechenaufwand auf die Leistungsfähigkeit eines gewöhnlichen Personalcomputers.

Dem entgegen stehen allerdings Resonanzeffekte, welche die Periodizität der Bahnstörungen verletzen. Durch Filterverfahren wird versucht, die störenden Signale aus den Beobachtungen zu entfernen. Außerdem gilt es, durch geschickte Wahl eines Näherungsorts die Bahnstörungen klein zu halten, um den linearen Geltungsbereich der Hill-Gleichungen nicht zu verlassen. Trotzdem werden iterative Verfahren notwendig. In einem letzten Schritt kann die Lösung durch Einbeziehung von Beobachtungen auf Beschleunigungslevel gestützt werden, die kein Resonanzverhalten zeigen, und die ohne Näherungsbahn direkt auf der beobachteten Satellitentrajektorie berechnet werden können.

## Abstract

The observation of artificial Earth orbiting satellites makes it possible to determine the gravitational pull acting on them. The more accurately a satellite's trajectory is known and the lower its altitude, the more precisely it is possible to reconstruct the gravity field of the Earth. A higher resolution of the solvable gravity field results in a larger

number of unknown coefficients and a greater computational effort to determine them. The analysis of the present gravity missions GRACE (in orbit since 2002) and GOCE (scheduled launch in 2006) is limited by the power of existing computers.

A way out of this dilemma might be to return to analytical perturbation theories. Hill's equations represent a linear approximation to the equations of motion of a satellite, valid for circular orbits. As a result of using them, partial derivatives of the orbit perturbations can be computed very fast. The spectral presentation of the periodical part of the perturbations can be linked to the coefficients of the gravity field by so-called transfer coefficients. The resulting normal matrix has a block diagonal structure and can be inverted in parts. If, moreover, one applies efficient Fast-Fourier techniques to transform the orbital perturbations to the spectral domain, this leads to a greatly reduced computational effort. Even normal PCs can then cope with this task.

On the other hand, the periodicity of the orbit perturbations is disturbed by resonances that have to be filtered. By selecting an appropriate approximating orbit, it is possible to keep the perturbations on a small scale, in order to remain within the limits of the linear theory. Nonetheless iterative procedures are necessary. In a last step, the solution can be stabilised by observations on the acceleration level. They do not suffer from resonant effects and can be computed directly on the observed orbit of the satellite, making it possible to do without an approximated orbit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1. Bahntheorie . . . . .	9
2.2. Lösung der Hill-Gleichungen . . . . .	14
2.3. Darstellung des Schwerefeldes im bahnbegleitenden Dreibein . . . . .	18
2.4. Spektrale Darstellung der Bahnstörungen . . . . .	22
<b>3. Closed-Loop-Simulation</b>	<b>29</b>
3.1. Simulation von Bahnstörungen und Rekonstruktion der Schwerefeldkoeffizienten . . . . .	29
3.2. Verwendung von Fourier-Techniken bei Wiederholungsbahnen . . . . .	33
3.3. Fourier-Techniken für nicht schließende Bahnen . . . . .	39
3.4. Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten aus Störbeschleunigungen . . . . .	45
<b>4. Analyse numerisch integrierter Satellitenorbits mit der Bahntheorie von Hill</b>	<b>48</b>
4.1. Definition der Bahnstörungen . . . . .	48
4.2. Spektralanalyse der Bahnstörungen . . . . .	54
4.3. Vergleich numerisch und analytisch bestimmter Ableitungen . . . . .	58
4.4. Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten . . . . .	67
4.5. Interpolation auf räumlich gleichabständige Bahnabtastung. . . . .	72
4.6. Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten aus Störbeschleunigungen . . . . .	81

<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>88</b>
<b>6. Literaturliste</b>	<b>93</b>
<b>A. Koordinatentransformationen</b>	<b>96</b>
A.1. Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und Keplerelementen .	96
<b>B. Numerische Integration</b>	<b>100</b>
B.1. Bahnintegration . . . . .	100
B.2. Integration der Variationellen Gleichungen . . . . .	102



# 1. Einleitung

Diese Arbeit erscheint mitten in die Dekade der Geopotentiale hinein. Seit Mai 2000 kreist der erdwissenschaftliche Kleinsatellit CHAMP zur Schwere- und Magnetfeldforschung sowie zur Atmosphärensondierung um die Erde. Im März 2002 folgte ihm das Zwillingpaar der GRACE-Satelliten mit dem Ziel, zeitliche Variationen des Schwerefeldes zu erfassen und für 2006 ist der Start von GOCE geplant, einer Gradiometermission, welche die räumliche Auflösung des Schwerefeldes noch einmal um Größenordnungen verfeinern soll.

An Bord all dieser Satelliten fliegen GPS-Empfänger mit, die eine kontinuierliche und hochgenaue Bahnbestimmung mit hoher zeitlicher Auflösung ermöglichen. In den Massenzentren der Satelliten sind Beschleunigungsmesser positioniert, welche auf den Satellitenkörper wirkende nichtgravitative Störbeschleunigungen in drei zueinander senkrechten Richtungen messen, damit diese bei der Auswertung der Bahnbeobachtungen von der Schwerebeschleunigung getrennt werden können. Mit dieser Meßanordnung ist es erstmals möglich, kontinuierliche und von Störeinflüssen bereinigte, rein gravitativ verursachte Bahnstörungszeitreihen erdnahe Satelliten zu generieren.

Aus den auf diese Weise beobachteten Bahnstörungen kann auf das verursachende Schwerefeld zurückgeschlossen werden, die hohe Beobachtungsdichte ermöglicht dies mit nie dagewesener räumlicher Auflösung und Genauigkeit. Zur Bestimmung von Schwerefeldkoeffizienten werden partielle Ableitungen benötigt, die bisher mit hohem rechnerischen Aufwand aus den Variationellen Gleichungen auf numerischem Wege integriert wurden. Das entstehende Normalgleichungssystem wird ebenfalls numerisch invertiert, die Anzahl der Unbekannten wächst dabei quadratisch mit dem Entwicklungsgrad des Schwerefeldes.

Dies ist schon seit geraumer Zeit nur noch mit Großrechenanlagen möglich, deren Weiterentwicklung kaum mit den rasant fortschreitenden Möglichkeiten der Satellitengeodäsie Schritt halten kann. Hier setzt diese Arbeit an, deren Ziel es ist, durch Rückbesinnung auf die analytische Bahntheorie von George William Hill ein schnelles Näherungsverfahren zu entwickeln, das für erdnahe Satelliten auf kreisnahen Bahnen die iterative Lösung eines Schwerefeldes mit einem einfachen Personalcomputer ermöglicht.

Dazu werden die beobachteten Bahnstörungen mittels eleganter Fouriertechniken in den Spektralbereich überführt. Die Fourierkoeffizienten werden als Lumped Coefficients interpretiert, aus denen über Transferkoeffizienten, welche auf der Bahntheorie von Hill ba-

sieren, die Gewichtskoeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung des Schwerefeldes durch eine Kleinste-Quadrate-Ausgleichung geschätzt werden. Die dafür zu invertierende Normalgleichungsmatrix erhält Blockdiagonalstruktur und zerfällt somit in einzelne Blöcke, deren Dimension nur noch dem Entwicklungsgrad des Schwerefeldes entspricht.

Allerdings sind für die Fouriertransformation periodische Bahnstörungen notwendig, die Hillgleichungen gelten nur für mit konstanter Geschwindigkeit durchflogene, exakt kreisförmige Satellitenbahnen und die Transferkoeffizienten zeigen auf der Bahnfrequenz Resonanzverhalten, wodurch bestimmte Schwerefeldkoeffizienten nicht schätzbar sind. Dem wird versucht, durch geschickte Wahl eines Näherungsorts, Vorbehandlung der Bahnstörungszeitreihen und Iteration abzuwehren. Bis zu moderater Auflösung des Schwerefeldes gelingt dies auch, bei hochaufgelösten Feldern, für die diese Methode eigentlich entwickelt wurde, divergiert das Verfahren jedoch. Deshalb muß die Anwendbarkeit am Ende der Ausführungen in Frage gestellt werden.

## 2. Grundlagen

### 2.1. Bahntheorie

Ziel dieser Arbeit ist es, aus einer beobachteten Satellitenbahn auf die den Satelliten bewegenden Kräfte zurückzuschließen und das diese Kräfte verursachende Schwerefeld zu rekonstruieren. Der Satellit spielt dabei die Rolle einer Testmasse in einem Freifallexperiment. Dieses Kapitel soll die benötigten theoretischen Grundlagen und technischen Hilfsmittel zur Beschreibung der Satellitenbahn im Schwerefeld der Erde zusammenfassend bereitstellen. Dazu werden verschiedene klassische Lösungsansätze kurz vorgestellt und der für diese Arbeit wesentliche (Hill, 1878) im Detail ausgearbeitet.

Betrachtet man den Satelliten in einem inertialen Koordinatensystem, vernachlässigt alle nichtgravitativen Störkräfte wie Atmosphärenreibung, Strahlungsdruck der Sonne und Erdalbedo und außerdem die Gravitationseinflüsse des Mondes, der Sonne und der weiteren Planeten des Sonnensystems, so lauten seine Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\underline{x}}_i = R_t^i \nabla V_t, \quad (2.1)$$

wobei auf der linken Seite der Gleichung die zweiten Zeitableitungen des Satellitenortes und auf der rechten Seite die auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen durch das Erdschwerefeld  $V_t$  stehen. Der  $\nabla$ -Operator bildet durch Ableitung des Potentialfeldes nach dem Satellitenort den Gradienten des Feldes und damit die Schwerebeschleunigung. Da das Erdschwerefeld erdfest ist, muß es noch durch die Rotationsmatrix  $R_t^i$  ins inertielle System gedreht werden.

Durch die eingeführten Vereinfachungen stellen diese Bewegungsgleichungen nur eine Näherung dar. Für diese Arbeit spielt das jedoch keine Rolle, da die vernachlässigten Größen weder in die Simulation der Testbahnen, noch in die Rekonstruktion des Schwerefeldes aus den Testbahnen einfließen.

In den aktuell fliegenden Schwerefeld - Satellitenmissionen CHAMP (Reigber, 2000) und GRACE (Tapley und Reigber, 2001) werden die nichtgravitativen Störeinflüsse durch im Schwerpunkt der Satelliten mitfliegende Beschleunigungsmesser aufgezeichnet, die nichtterrestrischen Anteile an der Gravitationsbeschleunigung sind sehr genau bekannt und modellierbar. Beide Effekte können auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen als Korrekturterme angebracht werden.

Sollen die in dieser Arbeit entwickelten Analyseverfahren später auf beobachtete Satellitenbahnen angewendet werden, so wird es evtl. notwendig sein, die Korrekturen auf Bahniveau anzubringen. Dazu müßten die beobachteten Bahnen zweifach auf Beschleunigungsniveau differenziert werden, die gemessenen und modellierten Störbeschleunigungen abgezogen, und die verbleibenden, vom statischen Schwerefeld der Erde verursachten Beschleunigungen wieder zu Bahnen integriert werden. Dieser Schritt ist jedoch nicht Thema dieser Arbeit und muß noch gesondert betrachtet werden.

Bei der im Bau befindlichen Mission GOCE (Sneeuw et al., 2000) werden die Beschleunigungsmesser mit den Düsen zur Satellitensteuerung rückgekoppelt, um den Satelliten auf einer rein gravitativ beeinflussten Bahn zu halten. Diese Bahn entspräche weitgehend den hier benutzten Bewegungsgleichungen.

Gleichung (2.1) stellt ein System aus 3 Differentialgleichungen 2. Ordnung dar. Dieses läßt sich numerisch integrieren, führt man die ersten Zeitableitungen des Satellitenortes als unabhängige Variablen ein (Montenbruck, 2000). Die numerische Integration der Bewegungsgleichungen stellt die zur Zeit üblichste Methode zur Simulation von Satellitenbahnen dar. Das wurde jedoch erst im Computerzeitalter möglich und erst mit der Entwicklung leistungsstarker Rechner praktikabel.

Neben der beschriebenen numerischen Lösung existieren eine Reihe rein analytischer Lösungsverfahren, die zum Teil weit zurückreichen und in ihren Ursprüngen oft noch zur Beschreibung der Bewegung des Mondes um die Erde oder der Planeten um die Sonne entwickelt wurden. Zwei dieser Verfahren will ich hier herausgreifen. Eines davon, nämlich das von Hill, stellt eine der Grundlagen dieser Arbeit dar.

Die bekannteste analytische Bahnthorie ist wohl die von Kaula (1966), welche auf den Störungsgleichungen in Keplerelementen nach Lagrange basiert:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial T}{\partial M} \quad (2.2)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial T}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial T}{\partial \omega} \quad (2.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial T}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial T}{\partial \Omega} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial T}{\partial I} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial T}{\partial e} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial T}{\partial I} \quad (2.6)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial T}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial T}{\partial a}. \quad (2.7)$$

Die ungestörten Keplerelemente beschreiben eine Ellipse ( $a$  = große Halbachse,  $e$  = Exzentrizität,  $I$  = Bahnneigung,  $\omega$  = Argument des Perigäums,  $\Omega$  = Rektaszension des aufsteigenden Knotens,  $M$  = mittlere Anomalie des Satelliten;  $n$  ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Satelliten), die Änderungen dieser Elemente mit der Zeit die

Präzession der Bahnellipse und die Abweichungen des Satelliten von der Ellipse.

Störungsgleichungen anstatt Bewegungsgleichungen deshalb, weil das Schwerfeld der Erde  $V = U + T$  in Normalpotential  $U$  (Potential einer Punktmasse bzw. einer rotationssymmetrisch aufgebauten Kugel) und Störpotential  $T$  (Einfluß der Erdabplattung und unsymmetrischer Massenverteilung innerhalb der Erde) aufgeteilt wird und als Antrieb nur noch das Störpotential auf der rechten Seite von Gleichung (2.2) bis (2.7) auftaucht.

Eine Punktmasse mit Potential  $U$  würde vom Satelliten auf einer Keplerellipse umfliegen, das Normalpotential wird durch Einsetzen der Keplerelemente dieser Ellipse als Startwerte in die Störungsgleichungen berücksichtigt.

Um die Störungsgleichungen (2.2) bis (2.7) lösen zu können, muß das Störpotential der Erde, welches üblicherweise in sphärischen Koordinaten als Reihenentwicklung über Kugelflächenfunktionen (siehe (2.37)) dargestellt wird, als Funktion der Keplerelemente geschrieben werden. Dazu führt Kaula Neigungsfunktionen  $F_{lmp}(I)$  und Exzentrizitätsfunktionen  $G_{lpq}(e)$  ein, die jedoch numerisch aufwendig zu berechnen und im Fall der Exzentrizitätsfunktionen auch schwierig zu bestimmen sind.

Es ergibt sich für das Störpotential

$$T = \frac{GM}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a_E}{a}\right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(I) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{l,p,q}(e) S_{l,m,p,q}(\omega, \Omega, M, \theta) \quad (2.8)$$

mit

$$S_{l,m,p,q} = \begin{cases} C_{l,m} \\ -S_{l,m} \end{cases}_{l-m \text{ gerade}}^{l-m \text{ gerade}} \cos \psi_{l,m,p,q} + \begin{cases} S_{l,m} \\ C_{l,m} \end{cases}_{l-m \text{ ungerade}}^{l-m \text{ gerade}} \sin \psi_{l,m,p,q}, \quad (2.9)$$

$$\psi_{l,m,p,q} = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M + m(\Omega - \theta). \quad (2.10)$$

Der Winkel  $\theta$  entspricht der Sternzeit von Greenwich und beschreibt die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse, welche der z-Achse unseres erdfesten Systems entspricht,  $C_{l,m}$  und  $S_{l,m}$  sind die Gewichtskoeffizienten aus der schon angesprochenen Reihenentwicklung des Schwerpotentials in Kugelflächenfunktionen. Sie enthalten die eigentliche Schwereinformation und stehen in direktem Zusammenhang mit der Massenverteilung innerhalb der Erde

$$C_{l,m} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{\lambda} \int_{\phi} \int_r \left(\frac{r}{a_E}\right)^l P_{l,m}(\sin \phi) \cos(m\lambda) \rho(r, \phi, \lambda) dr d\phi d\lambda$$

$$S_{l,m} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{\lambda} \int_{\phi} \int_r \left(\frac{r}{a_E}\right)^l P_{l,m}(\sin \phi) \sin(m\lambda) \rho(r, \phi, \lambda) dr d\phi d\lambda,$$

$r$ ,  $\phi$  und  $\lambda$  beschreiben die sphärischen Koordinaten Radius, Breite und Länge und laufen bei der Integration über das komplette Volumen der Erde. Da die Dichte  $\rho$  jedoch nicht

überall innerhalb der Erde bekannt ist, lassen sich die angegebenen Integralformeln nicht unmittelbar zur Bestimmung der Schwerefeldkoeffizienten  $C_{l,m}$  und  $S_{l,m}$  anwenden.

Wird Gleichung (2.8) nach den Keplerelementen abgeleitet und die Ableitungen in (2.2) bis (2.7) eingesetzt, so ergeben sich Differentialgleichungen, welche sich nicht geschlossen lösen lassen. Deshalb führt Kaula säkulare Änderungen  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\Omega}$  und  $\dot{M}$  der Keplerelemente auf der rechten Seite der Gleichungen ein, die nur von der ungestörten Keplerbahn und der Abplattung der Erde abhängen. Das Ergebnis stellt also die näherungsweise, analytische Lösung der den Bewegungsgleichungen (2.1) exakt entsprechenden Störungsgleichungen in Keplerelementen (2.2) bis (2.7) dar.

Im Gegensatz dazu stellen die Störungsgleichungen nach Hill eine entlang eines Referenzorbits linearisierte Version der ursprünglichen Bewegungsgleichungen dar, die sich in der Folge analytisch exakt lösen läßt. Der Referenzorbit ist eine Kreisbahn mit Radius  $r$ , das Koordinatensystem ein auf dieser Kreisbahn mit dem Satelliten mit konstanter Bahngeschwindigkeit  $n$  mitrotierendes, forthin bahnbegleitend genanntes, Dreibein.

Das bahnbegleitende Dreibein sei folgendermaßen definiert: die x-Achse tangential zum Kreisbogen in Flugrichtung des Satelliten zeigend, die z-Achse in radialer Richtung nach außen und die y-Achse senkrecht zur Bahnebene ein Rechtssystem ergänzend. Auf diese Richtungen wird im Folgenden auch als along-track, cross-track und radial Bezug genommen. Die Orientierung des inertialen Systems sei abweichend von der gebräuchlichen Vereinbarung so gewählt, daß seine x- und z-Achse in der Bahnebene des Satelliten liegen und seine y-Achse in cross-track-Richtung zeigt. Zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t = 0$  stimme die Orientierung der beiden Systeme überein.

Das bahnbegleitende Dreibein geht aus dem inertialen durch eine Translation des Ursprungs vom Mittelpunkt der Erde auf den Kreisbogen  $\underline{x}_{0_i}$  und eine Rotation

$$R_i^r = \begin{pmatrix} \cos nt & 0 & -\sin nt \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin nt & 0 & \cos nt \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

hervor, die Koordinatentransformation zwischen den Systemen lautet also

$$\underline{x}_r = R_i^r (\underline{x}_i - \underline{x}_{0_i}). \quad (2.12)$$

Da die Bewegungsgleichungen jedoch auf Beschleunigungsniveau aufsetzen, muß die vorgestellte Transformation auf Beschleunigungen ausgeweitet werden. Dazu ist es nötig, auch die Zeitableitungen der Rotationsmatrix zu berücksichtigen, Scheinkräfte kommen ins Spiel (Rummel, 1992). Die Transformation von Beschleunigungen ins bahnbegleitende Dreibein wird zu

$$\ddot{\underline{x}}_r = R_i^r \ddot{\underline{x}}_i - \dot{R}_i^r \dot{\underline{x}}_{0_i} - 2\Omega^T \dot{\underline{x}}_r - \dot{\Omega}^T \underline{x}_r - \Omega \Omega \dot{\underline{x}}_r \quad (2.13)$$

$$\text{mit } \Omega = \dot{R}_i^r R_i^{rT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

und den Termen für Coriolisbeschleunigung  $-2\Omega^T \dot{\underline{x}}_r$ , inertielle Rotationsbeschleunigung  $-\dot{\Omega}^T \underline{x}_r$ , die bei konstanter Winkelgeschwindigkeit  $n$  des Bezugspunktes  $\underline{x}_{0_i}$  auf der Kreisbahn zu 0 wird und Zentrifugalbeschleunigung  $-\Omega\Omega \underline{x}_r$ .

Mit  $\underline{x}_{0_i} = R_r^i(0, 0, r)^T$  ergibt sich die linke Seite der Bewegungsgleichungen im rotierenden System somit zu

$$R_i^r \ddot{\underline{x}}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{z}_r \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} n\dot{z}_r \\ 0 \\ -n\dot{x}_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n^2 x_r \\ 0 \\ n^2 z_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n^2 r \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Betrachten wir nun die rechte Seite.  $V = U + T$  sei eine Darstellung des Schwerepotentials im von uns gewählten inertialen System, und damit  $\ddot{\underline{x}}_i = \nabla V = \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{x}_i} + \frac{\partial T}{\partial \underline{x}_i}\right)^T$ . Nimmt man an, daß die durch das Störpotential verursachten gravitativen Störbeschleunigungen auf den Satelliten und die daraus resultierenden Bahnstörungen klein sind, der Satellit sich also nur wenig von der Kreisbahn entfernt, so kann man das Normalpotential in einer Taylorreihe um den Entwicklungspunkt  $\underline{x}_{0_i}$  auf der Kreisbahn darstellen, die nach dem zweiten Term abgebrochen wird (Schrama, 1989)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}_i}\right)^T \approx \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{x}_i}\right)^T \Big|_{\underline{x}_{0_i}} + \left(\frac{\partial U^2}{\partial \underline{x}_i^2}\right)^T \Big|_{\underline{x}_{0_i}} (\underline{x}_i - \underline{x}_{0_i}) + \left(\frac{\partial T}{\partial \underline{x}_i}\right)^T. \quad (2.16)$$

Mit  $U = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}$  lassen sich

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \underline{x}_i}\right)^T \Big|_{\underline{x}_{0_i}} = R_i^{rT} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n^2 r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial U^2}{\partial \underline{x}_i^2}\right)^T \Big|_{\underline{x}_{0_i}} (\underline{x}_i - \underline{x}_{0_i}) = R_i^{rT} \begin{pmatrix} -n^2 x_r \\ -n^2 y_r \\ 2n^2 z_r \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

berechnen und eingesetzt ergibt sich mit  $\left(\frac{\partial T}{\partial \underline{x}_r}\right)^T = \left(\frac{\partial T}{\partial \underline{x}_i} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_r}\right)^T = \left(\frac{\partial T}{\partial \underline{x}_i} R_r^i\right)^T = R_i^r \left(\frac{\partial T}{\partial \underline{x}_i}\right)^T$  für die rechte Seite der Bewegungsgleichungen

$$R_i^r \ddot{\underline{x}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n^2 r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n^2 x_r \\ -n^2 y_r \\ 2n^2 z_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_r} \\ \frac{\partial T}{\partial y_r} \\ \frac{\partial T}{\partial z_r} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Gleichgesetzt ergeben sich aus (2.15) und (2.19) die berühmten Hill-Gleichungen

$$\ddot{x} + 2n\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.20)$$

$$\ddot{y} + n^2 y = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.21)$$

$$\ddot{z} - 2n\dot{x} - 3n^2 z = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.22)$$

welche George William Hill (geboren 1838 in New York City, gestorben 1914 auf seiner Farm am Hudson River), der später kurze Zeit an der Columbia Universität lehrte, als Angestellter des Nautical Almanac Office in Cambridge, Massachusetts zur Beschreibung der Mondbahn um die Erde entwickelte und 1878 veröffentlichte. Erstmals für die Schwerefeldbestimmung mit Hilfe niedrigfliegender Satelliten vorgeschlagen hat die Hill-Gleichungen Oscar L. Colombo (1984).

Die Gleichungen beschreiben die Abweichungen eines Satelliten von einer gleichförmig mit Winkelgeschwindigkeit  $n$  durchflogenen Kreisbahn im bahnbegleitenden Dreibein. Auf der rechten Seite stehen die Störbeschleunigungen, welche die Bahnstörungen verursachen. Das Subscript  $r$ , welches bisher das bahnbegleitende Dreibein anzeigte, wird hier und in Zukunft der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

## 2.2. Lösung der Hill-Gleichungen

Die Hill-Gleichungen (2.20) bis (2.22) beschreiben die Abweichungen der Satellitenbahn von einem gleichmäßig durchflogenen Kreisorbit, verursacht durch Störbeschleunigungen, welche in unserem Fall rein gravitativen Charakter haben. Es handelt sich um ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, das sich unter gewissen Annahmen geschlossen lösen läßt und dessen Lösung sich aus der Lösung der homogenen Gleichung  $\frac{\partial T}{\partial \underline{x}} = 0$  und einer speziellen Lösung zusammensetzt. Die cross-track Störung  $y$  ist von den Störungen in along-track Richtung  $x$  und radialer Richtung  $z$  entkoppelt und läßt sich unabhängig berechnen.

Die Lösung der homogenen Gleichungen lautet (Scheinert, 1996)

$$x_h(t) = 4c_1 \cos nt - 4c_2 \sin nt + c_3 + c_4 t \quad (2.23)$$

$$y_h(t) = c_5 \cos nt + c_6 \sin nt \quad (2.24)$$

$$z_h(t) = 2c_2 \cos nt + 2c_1 \sin nt - \frac{2}{3n} c_4, \quad (2.25)$$

mit den Integrationskonstanten  $c_1$  bis  $c_6$ .

Eine spezielle Lösung kann gefunden werden, wenn die Störbeschleunigungen sich spektral als Reihen darstellen lassen

$$\frac{\partial T}{\partial \underline{x}} = \sum_j A_j^x \cos \omega_j t + B_j^x \sin \omega_j t, \quad (2.26)$$



dies trifft für die Schwerebeschleunigung der Erde zu, wenn der Satellit auf einer in sich geschlossenen Bahn fliegt, die sich also periodisch wiederholt. Für eine einzelne Frequenz  $\omega_j$  findet man dann die Lösung

$$\begin{aligned} x_{p_j}(t) &= \frac{1}{\omega_j^2(n^2 - \omega_j^2)} ((3n^2 + \omega_j^2)A_j^x + 2\omega_j n B_j^z) \cos \omega_j t \\ &+ \frac{1}{\omega_j^2(n^2 - \omega_j^2)} ((3n^2 + \omega_j^2)B_j^x - 2\omega_j n A_j^z) \sin \omega_j t \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$y_{p_j}(t) = \frac{1}{n^2 - \omega_j^2} (A_j^y \cos \omega_j t + B_j^y \sin \omega_j t) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} z_{p_j}(t) &= \frac{1}{\omega_j(n^2 - \omega_j^2)} (\omega_j A_j^z - 2n B_j^x) \cos \omega_j t \\ &+ \frac{1}{\omega_j(n^2 - \omega_j^2)} (\omega_j B_j^z + 2n A_j^x) \sin \omega_j t. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die spezielle Lösung setzt sich aus allen Einzellösungen  $\underline{x}_{p_j}$  zusammen. Allerdings werden diese für bestimmte resonante Störfrequenzen, nämlich die Nullfrequenz  $\omega = 0$  und die Bahnfrequenz  $\omega = \pm n$  singular, diese Fälle müssen gesondert betrachtet werden und wir stellen deshalb noch ein Gleichungssystem für die Resonanzen

$$\frac{\partial T}{\partial \underline{x}} = A_n^x \cos nt + B_n^x \sin nt + A_0^x \quad (2.30)$$

auf (die Amplituden  $B_0^x$  entfallen, da der Sinus für die Nullfrequenz zu Null wird).

Dieses System hat letztendlich die Lösung

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \frac{1}{n^2} \left( \left( \frac{3}{2} B_n^z + 4A_n^x \right) + (nA_n^z - 2nB_n^x)t \right) \cos nt \\ &+ \frac{1}{n^2} \left( \left( 4B_n^x - \frac{3}{2} A_n^z \right) + (nB_n^z + 2nA_n^x)t \right) \sin nt \\ &+ \frac{4}{n^2} A_0^x - \frac{2}{n} A_0^z t - \frac{3}{2} A_0^x t^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \left( \frac{1}{4n^2} A_n^y - \frac{1}{2n} B_n^y t \right) \cos nt \\ &+ \left( \frac{1}{4n^2} B_n^y + \frac{1}{2n} A_n^y t \right) \sin nt + \frac{1}{n^2} A_0^y \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} z_r(t) &= \frac{1}{2n^2} \left( \left( \frac{1}{2} A_n^z - 3B_n^x \right) - (nB_n^z + 2nA_n^x)t \right) \cos nt \\ &+ \frac{1}{2n^2} \left( \left( \frac{1}{2} B_n^z + 3A_n^x \right) + (nA_n^z - 2nB_n^x)t \right) \sin nt \\ &+ \frac{1}{n^2} A_0^z + \frac{2}{n} A_0^x t \end{aligned} \quad (2.33)$$

und zusammen mit der homogenen und der nichtresonanten speziellen Lösung ergibt sich die komplette Lösung  $\underline{x}(t) = \underline{x}_h(t) + \sum_j \underline{x}_{p_j}(t) + \underline{x}_r(t)$  nach Bestimmung der Konstanten  $c_1 \dots c_6$  durch Einsetzen der Anfangsbedingungen  $\underline{x}(t=0) = \underline{x}_0$  und  $\dot{\underline{x}}(t=0) = \dot{\underline{x}}_0$  zu

$$\begin{aligned}
x(t) = & \left( \frac{2}{n} \dot{z}_0 - \sum_j \left( \frac{4A_j^x}{n^2 - \omega_j^2} + \frac{2\omega_j B_j^z}{n(n^2 - \omega_j^2)} \right) + \frac{1}{n^2} (3A_n^x + 2B_n^z - 4A_0^x) \right) \cos nt \\
& + \left( 6z_0 + \frac{4}{n} \dot{x}_0 + \sum_j \left( \frac{2A_j^z}{n^2 - \omega_j^2} - \frac{4\omega_j B_j^x}{n(n^2 - \omega_j^2)} \right) + \frac{1}{n^2} (5B_n^x - A_n^z + 2A_0^z) \right) \sin nt \\
& + \frac{1}{n} (A_n^z - 2B_n^x) t \cos nt + \frac{1}{n} (B_n^z + 2A_n^x) t \sin nt \\
& + \sum_j \frac{1}{\omega_j^2 (n^2 - \omega_j^2)} ((3n^2 + \omega_j^2) A_j^x + 2\omega_j n B_j^z) \cos \omega_j t \\
& + \sum_j \frac{1}{\omega_j^2 (n^2 - \omega_j^2)} ((3n^2 + \omega_j^2) B_j^x - 2\omega_j n A_j^z) \sin \omega_j t \\
& + x_0 - \frac{2}{n} \dot{z}_0 - \sum_j \left( \frac{3}{\omega_j^2} A_j^x + \frac{2}{\omega_j n} B_j^z \right) - \frac{1}{n^2} (3A_n^x + 2B_n^z - 4A_0^x) \\
& - \left( 6nz_0 + 3\dot{x}_0 + \sum_j \frac{3}{\omega_j} B_j^x + \frac{1}{n} (3B_n^x + 2A_0^z) \right) t - \frac{3}{2} A_0^x t^2 \tag{2.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & \left( y_0 - \sum_j \frac{1}{n^2 - \omega_j^2} A_j^y - \frac{1}{n^2} A_0^y \right) \cos nt \\
& + \left( \frac{1}{n} \dot{y}_0 - \sum_j \frac{\omega_j}{n(n^2 - \omega_j^2)} B_j^y + \frac{1}{2n^2} B_n^y \right) \sin nt \\
& - \frac{1}{2n} B_n^y t \cos nt + \frac{1}{2n} A_n^y t \sin nt \\
& + \sum_j \frac{1}{n^2 - \omega_j^2} (A_j^y \cos \omega_j t + B_j^y \sin \omega_j t) + \frac{1}{n^2} A_0^y \tag{2.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(t) = & - \left( 3z_0 + \frac{2}{n} \dot{x}_0 - \sum_j \left( \frac{2\omega_j B_j^x}{n(n^2 - \omega_j^2)} - \frac{A_j^z}{n^2 - \omega_j^2} \right) + \frac{1}{n^2} (2B_n^x + A_0^z) \right) \cos nt \\
& + \left( \frac{1}{n} \dot{z}_0 - \sum_j \left( \frac{2A_j^x}{n^2 - \omega_j^2} + \frac{\omega_j B_j^z}{n(n^2 - \omega_j^2)} \right) + \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{2} B_n^z + A_n^x - 2A_0^x \right) \right) \sin nt \\
& - \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} B_n^z + A_n^x \right) t \cos nt + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} A_n^z - B_n^x \right) t \sin nt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_j \frac{1}{\omega_j(n^2 - \omega_j^2)} (\omega_j A_j^z - 2n B_j^x) \cos \omega_j t \\
& + \sum_j \frac{1}{\omega_j(n^2 - \omega_j^2)} (\omega_j B_j^z + 2n A_j^x) \sin \omega_j t \\
& + \frac{2}{n} \dot{x}_0 + 4z_0 + \sum_j \frac{2}{\omega_j n} B_j^x + \frac{1}{n^2} (2B_n^x + A_0^z) + \frac{2}{n} A_0^x t. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Die Lösung der Hillgleichungen läßt sich nach Colombo (1986) mit einem Feder-Masse-System vergleichen, bei dem die Energie ständig zwischen kinetischer Energie der Masse, hier des Satelliten, und potentieller Energie der Feder, in unserem Fall des Schwerefeldes, hin- und hertransferiert wird. Eine Anregung des Systems auf Störfrequenz  $\omega_j$  führt dabei zu einer Antwort auf gleicher Frequenz (spezieller Anteil der kompletten Lösung). Je näher die Anregungsfrequenz der Null- oder Orbitfrequenz kommt, desto mehr wird die Antwort verstärkt, während für alle andere Frequenzen eine Dämpfung erfolgt. Die linearisierten Bewegungsgleichungen stellen also eine Art Bandpaßfilter dar, die auf den Satelliten ausgeübten Beschleunigungen dar.

Die Resonanz auf Orbitfrequenz führt zu einer anschwellenden Schwingung des Satelliten auf dieser Frequenz (ein fehlerhaftes Kräftemodell kann sich ebenfalls in einer solchen Resonanzerscheinung äußern), die Resonanz auf der Nullfrequenz verursacht lineare und quadratische Terme. Eine konstante radiale Beschleunigung durch fehlerhaftes  $GM$  würde so z.B. zu einem radialen Versatz des Satelliten, einer Schwingung auf  $n$  und einer Drift in along-track führen. Ähnlich wären die Auswirkungen einer falschen Anfangsposition, die zu einer konstanten Ablage des Satelliten in allen 3 Koordinaten, einer Schwingung auf Orbitfrequenz  $n$  und ebenfalls einer Drift in along-track führen würden.

Unter den Voraussetzungen von

- kreisförmiger Referenzbahn
- konstanter Winkelgeschwindigkeit des Bezugspunktes auf der Referenzbahn
- kleinen Bahnstörungen (bzw. relativ kurzem Zeitraum)

lassen sich die Bahnstörungen eines Satelliten also durch die Summe aus homogener, resonanter (für Störbeschleunigungen auf der Umlauf- und Nullfrequenz) und spezieller Lösung (für Störbeschleunigungen auf allen anderen Frequenzen) der linearen Hill-Gleichungen beschreiben.

Andererseits können die einzelnen Lösungen der Hill-Gleichungen für solche Bahnen auch als Filter benutzt werden, um die durch die Startbedingungen oder Resonanzen bedingten Effekte aus einer beobachteten Satellitenbahn herauszureduzieren. Dazu werden sie getrennt von der speziellen Lösung geschätzt und von den beobachteten Bahnstörungen abgezogen. Dabei ist darauf zu achten, daß sich resonante und homogene Störungen nur

gemeinsam schätzen lassen, da beide konstante, in  $t$  lineare und auf Orbitfrequenz  $n$  periodische Anteile besitzen. Näheres dazu in Abschnitt 4.1.

### 2.3. Darstellung des Schwerefeldes im bahnbegleitenden Dreibein

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt eine Lösung der Hill-Gleichungen (2.20) bis (2.22) vorgestellt wurde, muß noch eine Darstellung der Störbeschleunigungen im bahnbegleitenden Dreibein gefunden werden. Dazu könnte die allgemein gültige Formel von Kaula (2.8) bemüht werden, doch ergibt sich dank der kreisförmigen Referenzbahn eine vereinfachte Herleitung und Formel, die im Folgenden ausgearbeitet werden.

Üblicherweise wird das Schwerepotential der Erde als Reihenentwicklung über Kugelflächenfunktionen im erdfesten System dargestellt (Heiskanen und Moritz, 1967). Da es jedoch später ins bahnbegleitende Dreibein rotiert werden soll, sei hier eine komplexwertige Darstellung bevorzugt, welche sich unter Rotation günstiger verhält

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l \bar{K}_{l,m} \bar{Y}_{l,m}(\phi, \lambda), \quad (2.37)$$

$r$ ,  $\phi$  und  $\lambda$  bezeichnen die sphärischen Koordinaten Radius, Breite und Länge im geozentrischen, erdfesten System. Die komplexwertigen Kugelflächenfunktionen  $\bar{Y}_{l,m}$  ergeben sich aus den zugeordneten Legendre-Funktionen  $P_{l,m}$ :

$$\bar{Y}_{l,m}(\phi, \lambda) = N_{l,m} P_{l,m}(\sin \phi) e^{im\lambda} \quad (2.38)$$

$$\bar{Y}_{l,-m}(\phi, \lambda) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} N_{l,-m} P_{l,m}(\sin \phi) e^{-im\lambda}. \quad (2.39)$$

Sie sind auf  $4\pi$  über der Kugel normiert, der Normierungsfaktor ist

$$N_{l,m} = (-1)^m \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (2.40)$$

und gilt reziprok auch für die komplexwertigen Gewichtskoeffizienten

$$\bar{K}_{l,m} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{0m}) \frac{1}{N_{l,m}} (C_{l,m} - iS_{l,m}) \quad (2.41)$$

$$\bar{K}_{l,-m} = (-1)^m \frac{1}{2}(1 + \delta_{0m}) \frac{1}{N_{l,m}} (C_{l,m} + iS_{l,m}). \quad (2.42)$$

Das Schwerepotential soll nun aus dem erdfesten in ein zum bahnbegleitenden paralleles, geozentrisches Dreibein rotiert werden. Geschieht diese Transformation über eine

Euler-Rotationsmatrix  $R_E(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_3(\alpha)$ , so läßt sich die entsprechende Rotation von Kugelflächenfunktionen mit Hilfe der D-Symbole durchführen (Ilk, 1983)

$$\bar{Y}_{l,m}(\phi, \lambda) = \sum_{k=-l}^l \bar{D}_{l,m,k}^y(\alpha, \beta, \gamma) \bar{Y}_{l,k}(\phi', \lambda') \quad (2.43)$$

(gestrichene Koordinaten  $\phi', \lambda'$  beziehen sich auf das rotierte Dreibein  $\underline{x}'$ , siehe Abb. 2.1). Die Definition der D-Symbole findet man bei (Wigner, 1959)

$$\bar{D}_{l,m,k}^y(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im\alpha} \bar{d}_{l,m,k}(\beta) e^{ik\gamma} \quad (2.44)$$

$$\bar{d}_{l,m,k}(\beta) = \sqrt{\frac{(l+k)!(l-k)!}{(l+m)!(l-m)!}} \cdot \sum_{t=t_1}^{t_2} \binom{l+m}{t} \binom{l-m}{l-k-t} (-1)^t \cos^{2l-k+m-2t} \frac{\beta}{2} \sin^{k-m+2t} \frac{\beta}{2} \quad (2.45)$$

$$t_1 = \max(0, m-k)$$

$$t_2 = \min(l-k, l+m)$$

Wie sieht nun die Rotation konkret aus? Zuerst erfolgt eine Drehung um die  $z_t$ -Achse des erdfesten Systems um das Argument der Länge  $\Lambda = \Omega - \Theta$  des aufsteigenden Bahnnotens. Es folgt eine Drehung um die neue  $x$ -Achse um die Bahnneigung  $I$  und zuletzt eine Drehung um die neue  $z$ -Achse um das Argument der Breite  $u = \omega + f$  des Satelliten (Abb. 2.1).

Sofort fällt auf, daß es sich hierbei nicht um eine Euler-Rotation handelt, da die mittlere Drehung um die neue  $x$ - anstatt der neuen  $y$ -Achse stattfindet. Diese Rotation läßt sich jedoch durch Vor- und Nachdrehung um  $\pi/2$  in eine Euler-Rotation umwandeln (Sneeuw, 1991):

$$R_3(u)R_1(I)R_3(\Lambda) = R_3\left(u - \frac{\pi}{2}\right) R_2(I)R_3\left(\Lambda + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.46)$$

Dies führt zu einem zusätzlichen Faktor  $i^{k-m}$  in (2.43), damit läßt sich das Potential (2.37) im zum bahnbegleitenden parallelen, geozentrischen System folgendermaßen schreiben

$$V(r, \phi', \lambda', \Lambda, I, u) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l \bar{K}_{l,m} i^{k-m} \bar{D}_{l,m,k}(\Lambda, I, u) \bar{Y}_{l,k}(\phi', \lambda'). \quad (2.47)$$

Da der Satellit immer auf der neuen  $x'$ -Achse des rotierten Koordinatensystems liegt, gilt  $\bar{Y}_{l,k}(\phi', \lambda') = \bar{Y}_{l,k}(0, 0) = N_{l,k} P_{l,k}(0)$  und somit

$$V(r, \Lambda, I, u) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l \bar{K}_{l,m} i^{k-m} e^{i(ku+m\Lambda)} \bar{d}_{l,m,k}(I) N_{l,k} P_{l,k}(0). \quad (2.48)$$

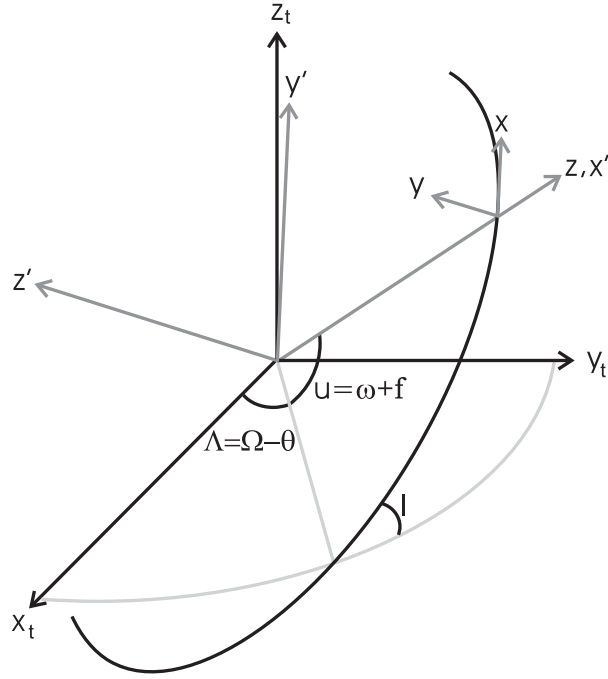


Abbildung 2.1.: Die verschiedenen Bezugssysteme und ihre Beziehungen zueinander: erd-fest  $\underline{x}_t$ , rotiert geozentrisch  $\underline{x}'$  und bahnbegleitend  $\underline{x}$ .

Merke, für  $l - k$  ungerade werden die  $P_{l,k}(0) = 0$ .

Der Übergang zu einer reellwertigen Reihenentwicklung gelingt, indem man die Ausdrücke für negative und positive  $m$  zusammenfaßt

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^l (V_{l,m,k} + V_{l,-m,-k}) \frac{1}{2} (2 - \delta_{0m}) \quad (2.49)$$

$$V_{l,m,k} + V_{l,-m,-k} = V_{l,m,k} + V_{l,m,k}^* = 2\Re(V_{l,m,k}). \quad (2.50)$$

Der Faktor  $i^{k-m}$  macht eine Fallunterscheidung notwendig

$$V(r, \Lambda, I, u) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^l (-1)^{\frac{l-k}{2} + \text{int}(\frac{1}{2}(l-m+1))} \bar{d}_{l,m,k}(I) N_{l,k} P_{l,k}(0) \cdot \begin{cases} \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{k,m} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{k,m} & \text{für } l - m \text{ gerade} \\ -\bar{S}_{l,m} \cos \psi_{k,m} + \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{k,m} & \text{für } l - m \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\psi_{m,k} = ku + m\Lambda. \quad (2.52)$$

Da wir in diesem Schritt auch von komplexwertigen auf reellwertige Gewichtskoeffizienten  $\bar{C}_{l,m}$  und  $\bar{S}_{l,m}$  übergegangen sind, macht es keinen Sinn mehr, bei der Normierung

für komplexwertige Kugelflächenfunktionen zu bleiben. Reellwertige Kugelflächenfunktionen sind normalerweise mit

$$N_{l,m} = \sqrt{(2 - \delta_{0m})(2l + 1) \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} \quad (2.53)$$

normiert. Wichtig ist aber nur, daß in jedem Fall der Normierungsfaktor  $N_{l,m}$  zu dem verwendeten Koeffizientensatz paßt.

Zur Verkürzung der Schreibarbeit werden an dieser Stelle die normierten Neigungsfunktionen

$$\bar{F}_{l,m,k}(I) = (-1)^{\frac{l-k}{2} + \text{int}(\frac{1}{2}(l-m+1))} \bar{d}_{l,m,k}(I) \bar{P}_{l,k}(0) \quad (2.54)$$

eingeführt. Diese entsprechen den bei (Kaula, 1966) vorgestellten bis auf die Normierung und eine leicht abweichende Indizierung, die jedoch zu identischen Ergebnissen führt. Vergleicht man Gleichung (2.8) und (2.51) und sieht von der fehlenden Normierung bei Kaula ab, so lassen sich die beiden Ausdrücke ineinander überführen, wenn die Exzentrizitätsfunktionen  $G_{l,p,q}(e)$  zu eins gesetzt werden, die große Halbachse der Keplerbahn  $a$  durch den Radius der Kreisbahn  $r$  ersetzt und das Argument des Perigäums  $\omega$  und die mittlere Anomalie des Satelliten  $M$  zum Argument der Breite des Satelliten  $u$  zusammengefaßt werden.

Bricht man die Reihenentwicklung beim maximalen Entwicklungsgrad  $L$  ab und vertauscht die Reihenfolge der Summation, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} V(r, \Lambda, I, u) &= \frac{GM}{r} \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \bar{F}_{l,m,k}(I) \\ &\cdot \begin{cases} \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{k,m} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{k,m} & \text{für } l - m \text{ gerade} \\ -\bar{S}_{l,m} \cos \psi_{k,m} + \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{k,m} & \text{für } l - m \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L A_{m,k}^V \cos \psi_{k,m} + B_{m,k}^V \sin \psi_{k,m}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Man hat also eine neue spektrale Darstellung des Schwerefeldes entlang der Satellitenbahn gefunden. Die neuen Gewichtskoeffizienten  $A_{m,k}^V$  und  $B_{m,k}^V$  werden Lumped Coefficients genannt, weil jeweils Schwerefeldkoeffizienten gleicher Ordnung als Linearkombination zusammengefaßt werden. Der Zusammenhang zwischen den beiden Spektren lautet

$$A_{m,k}^V = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^V \begin{cases} \bar{C}_{l,m} & \text{für } l - m \text{ gerade} \\ -\bar{S}_{l,m} & \text{für } l - m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.56)$$

$$B_{m,k}^V = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^V \begin{cases} \bar{S}_{l,m} & \text{für } l - m \text{ gerade} \\ \bar{C}_{l,m} & \text{für } l - m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.57)$$

und geschieht über die sogenannten Transferkoeffizienten (Sneeuw, 1992)

$$\bar{H}_{l,m,k}^V = \frac{GM}{r} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \bar{F}_{l,m,k}(I). \quad (2.58)$$

## 2.4. Spektrale Darstellung der Bahnstörungen

Eine spektrale Darstellung des Potentials in einem, zum bahnbegleitenden parallelen, geozentrischen Dreibein konnte im vorangehenden Abschnitt gefunden werden. Nun muß nur noch der Gradient im bahnbegleitenden Dreibein gebildet und in die rechte Seite der Hill-Gleichungen eingesetzt werden, um die Koeffizienten  $A_j^x$  und  $B_j^x$  in der Lösung der Hill-Gleichungen bestimmen zu können. Diesen und die folgenden Schritte führt Sneeuw (2000) sehr elegant in komplexer Notation durch, da zur Umsetzung in Programmcode jedoch reelle Ausdrücke benötigt werden, sollen die bereits bei Sneeuw aufgezeigten Zusammenhänge hier noch einmal im Reellen nachvollzogen werden.

Für infinitesimal kleine Bahnstörungen gilt  $dx = r \cos \phi' d\lambda'$ ,  $dy = r d\phi'$  und  $dz = dr$ , gestrichene sphärische Koordinaten beziehen sich wieder auf das parallel zum bahnbegleitenden rotierte, geozentrische Dreibein. Da der Ursprung des bahnbegleitenden Systems und damit der Bezugspunkt der Bahnstörungen sich immer bei  $\phi' = \lambda' = 0$  befindet, wird  $\cos \phi' = 1$ . Damit ergibt sich für den Gradienten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda'} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi'} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Auf einen einzelnen Summanden  $V_{l,m,k}$  des Potentials in Bahnkoordinaten (2.55) angewendet liefert der Gradient (Sneeuw, 1992)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{l,m,k}}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_{l,m,k}}{\partial \lambda'} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_{l,m,k}}{\partial u} \\ &= \frac{1}{r} \frac{GM}{r} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \bar{F}_{l,m,k}(I) k \begin{cases} \bar{S}_{l,m} \cos \psi_{m,k} - \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \\ \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{l,m,k}}{\partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_{l,m,k}}{\partial \phi'} \\ &= \frac{1}{r} \frac{GM}{r} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \bar{F}_{l,m,k}^\times(I) \begin{cases} \bar{S}_{l,m} \cos \psi_{m,k} - \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \\ \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{l,m,k}}{\partial z} &= \frac{\partial V_{l,m,k}}{\partial r} \\ &= -\frac{l+1}{r} \frac{GM}{r} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \bar{F}_{l,m,k}(I) \begin{cases} \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \\ -\bar{S}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dabei ist zu beachten, daß sich bei der Ableitung in cross-track Richtung die Breite  $\phi'$  des Satelliten im rotierten System in den Neigungsfunktionen  $\bar{F}_{l,m,k}(I)$  verbirgt, und



zwar in den Legendre-Polynomen  $P_{l,k}(0)$ . Sneeuw führt daher unter Benützung einer Rekursion aus (Ilk, 1983) die cross-track Neigungsfunktionen

$$\bar{F}_{l,m,k}^\times(I) = (-1)^{\frac{l-k-1}{2} + \text{int}(\frac{l-m-1}{2})} \bar{d}_{l,m,k}(I) N_{l,k} P_{l,k+1}(0) \quad (2.63)$$

ein. Faßt man wieder zu Transferkoeffizienten zusammen

$$\bar{H}_{l,m,k}^x = \frac{1}{r} \frac{GM}{r} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \bar{F}_{l,m,k}(I) k \quad (2.64)$$

$$\bar{H}_{l,m,k}^y = \frac{1}{r} \frac{GM}{r} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \bar{F}_{l,m,k}^\times(I) \quad (2.65)$$

$$\bar{H}_{l,m,k}^z = -\frac{l+1}{r} \frac{GM}{r} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \bar{F}_{l,m,k}(I), \quad (2.66)$$

so lassen sich die Schwerebeschleunigungen im bahnbegleitenden Dreibein spektral darstellen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^x \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{l,m} \cos \psi_{m,k} - \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \\ \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{array} \\ &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L A_{m,k}^x \cos \psi_{k,m} + B_{m,k}^x \sin \psi_{k,m} \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^y \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{l,m} \cos \psi_{m,k} - \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \\ \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{array} \\ &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L A_{m,k}^y \cos \psi_{k,m} + B_{m,k}^y \sin \psi_{k,m} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^z \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{S}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \\ -\bar{S}_{l,m} \cos \psi_{m,k} + \bar{C}_{l,m} \sin \psi_{m,k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{array} \\ &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L A_{m,k}^z \cos \psi_{k,m} + B_{m,k}^z \sin \psi_{k,m}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

mit den Lumped Coefficients der Störbeschleunigungen

$$A_{m,k}^x = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^x \begin{cases} \bar{S}_{l,m} \\ \bar{C}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.70)$$

$$B_{m,k}^x = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^x \begin{cases} -\bar{C}_{l,m} \\ \bar{S}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.71)$$

$$A_{m,k}^y = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^y \begin{cases} \bar{S}_{l,m} \\ \bar{C}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.72)$$

$$B_{m,k}^y = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^y \begin{cases} -\bar{C}_{l,m} \\ \bar{S}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.73)$$

$$A_{m,k}^z = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^z \begin{cases} \bar{C}_{l,m} \\ -\bar{S}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.74)$$

$$B_{m,k}^z = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^z \begin{cases} \bar{S}_{l,m} \\ \bar{C}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.75)$$

Für geschlossene Bahnen (und jede Kreisbahn wird früher oder später zur Wiederholungsbahn) lassen sich diese Lumped Coefficients  $A_{m,k}^x$  und  $B_{m,k}^x$  den Koeffizienten  $A_j^x$  und  $B_j^x$  aus (2.26) eindeutig zuordnen.

Eine geschlossene Bahn hat die Wiederholffrequenz  $\frac{\dot{u}}{|\Lambda|}$ , die sich als ganzzahliges Verhältnis  $\frac{\beta}{\alpha}$  ( $\beta$  Erdumrundungen in  $\alpha$  Sterntagen) schreiben läßt. Zu gegebenen  $m, k$  läßt sich der Index  $j$  dann folgendermaßen zuordnen

$$\dot{\psi}_{m,k} = k\dot{u} + m\dot{\Lambda} = \frac{\dot{u}}{\beta}(k\beta \pm m\alpha)^1 = \frac{\dot{u}}{\beta}j = \omega_j, \quad (2.76)$$

$\omega_j$  wird durch Nullen zu einem gleichabständigen Spektrum ergänzt.

Zur umgekehrten Zuordnung, welche bei der praktischen Auswertung von Bahnstörungszeitreihen durch Fourieranalysen später wichtig wird, suche man die ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$m = \mp \frac{k\beta - j}{\alpha}; \quad m \in [0, \dots, L], \quad k \in [-L, \dots, L], \quad (2.77)$$

für  $\beta > 2L$  ist diese Zuordnung immer eindeutig (Sneeuw, 2000).

Es bleiben noch die resonanten Amplituden  $A_0^x$ ,  $A_n^x$  und  $B_n^x$  zu bestimmen. Exakte Resonanz auf der Nullfrequenz  $\dot{\psi}_{m,k} = k\dot{u} + m\dot{\Lambda} = 0$  wird nur für  $m = h\beta$ ,  $k = h\alpha$ ,

<sup>1</sup>je nach Vorzeichen von  $\dot{\Lambda}$ ; in der Praxis immer Minus, da die Erdrotation schneller als die Knotendrehung ist.

$h = 0, 1, 2, \dots$  erreicht, Resonanz auf der Eigenfrequenz  $\dot{\psi}_{m,k} = n$  unter der Annahme  $n = \dot{u}$  für  $m = h\beta$ ,  $k = h\alpha + 1$ . Also gilt  $A_0^x \hat{=} A_{h\beta, h\alpha}^x$ ,  $A_n^x \hat{=} A_{h\beta, h\alpha+1}^x$  und  $B_n^x \hat{=} B_{h\beta, h\alpha+1}^x$ .

Es ist uns also gelungen, Bahnstörungen im bahnbegleitenden Dreibein unter Verwendung der Störungstheorie nach Hill als Funktion der Schwerefeldkoeffizienten darzustellen. Quasi nebenbei konnten spektrale Darstellungen des Potentials in einem Dreibein, welches geozentrisch, aber parallel zum bahnbegleitenden gelagert ist, und der auf den Satelliten wirkenden, gravitativen Beschleunigungen im bahnbegleitenden Dreibein gefunden werden. Der Übergang zwischen den verschiedenen Spektren wird durch Transferkoeffizienten ermöglicht und charakterisiert.

Praktisch wäre es, wenn eine solche, spektrale Darstellung auch für die Bahnstörungen selbst gefunden werden könnte. Ein Blick auf die Lösung der Hill-Gleichungen (2.34) bis (2.36) macht jedoch sofort deutlich, daß durch Anfangsbedingungen und Resonanzen hervorgerufene lineare und quadratische Anteile die Voraussetzungen der Periodizität verletzen. Könnten diese jedoch durch Filterung aus den beobachteten Bahndaten entfernt werden, müßten sich die verbleibenden Störungen spektral zerlegen lassen.

Diese periodischen Anteile werden gerade durch die spezielle Lösung der Hill-Gleichungen (2.27) bis (2.29) repräsentiert. Es soll im Folgenden also versucht werden, noch eine spektrale Darstellung der speziellen Bahnstörungen im bahnbegleitenden Dreibein zu finden. Dazu werden die partiellen Ableitungen von (2.27) bis (2.29) nach den Schwerefeldkoeffizienten  $\bar{C}_{l,m}$  und  $\bar{S}_{l,m}$  gebildet

$l - m$  gerade:

$$\frac{\partial x_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial x_p}{\partial B_{m,k}^x} \frac{\partial B_{m,k}^x}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \frac{\partial x_p}{\partial A_{m,k}^z} \frac{\partial A_{m,k}^z}{\partial \bar{C}_{l,m}} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial x_p}{\partial A_{m,k}^x} \frac{\partial A_{m,k}^x}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \frac{\partial x_p}{\partial B_{m,k}^z} \frac{\partial B_{m,k}^z}{\partial \bar{S}_{l,m}} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial y_p}{\partial B_{m,k}^y} \frac{\partial B_{m,k}^y}{\partial \bar{C}_{l,m}} \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial y_p}{\partial A_{m,k}^y} \frac{\partial A_{m,k}^y}{\partial \bar{S}_{l,m}} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial z_p}{\partial B_{m,k}^x} \frac{\partial B_{m,k}^x}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \frac{\partial z_p}{\partial A_{m,k}^z} \frac{\partial A_{m,k}^z}{\partial \bar{C}_{l,m}} \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial z_p}{\partial A_{m,k}^x} \frac{\partial A_{m,k}^x}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \frac{\partial z_p}{\partial B_{m,k}^z} \frac{\partial B_{m,k}^z}{\partial \bar{S}_{l,m}}, \quad (2.83)$$

$l - m$  ungerade:

$$\frac{\partial x_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial x_p}{\partial A_{m,k}^x} \frac{\partial A_{m,k}^x}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \frac{\partial x_p}{\partial B_{m,k}^z} \frac{\partial B_{m,k}^z}{\partial \bar{C}_{l,m}} \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial x_p}{\partial B_{m,k}^x} \frac{\partial B_{m,k}^x}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \frac{\partial x_p}{\partial A_{m,k}^z} \frac{\partial A_{m,k}^z}{\partial \bar{S}_{l,m}} \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial y_p}{\partial A_{m,k}^y} \frac{\partial A_{m,k}^y}{\partial \bar{C}_{l,m}} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial y_p}{\partial B_{m,k}^y} \frac{\partial B_{m,k}^y}{\partial \bar{S}_{l,m}} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial z_p}{\partial A_{m,k}^x} \frac{\partial A_{m,k}^x}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \frac{\partial z_p}{\partial B_{m,k}^z} \frac{\partial B_{m,k}^z}{\partial \bar{C}_{l,m}} \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \frac{\partial z_p}{\partial B_{m,k}^x} \frac{\partial B_{m,k}^x}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \frac{\partial z_p}{\partial A_{m,k}^z} \frac{\partial A_{m,k}^z}{\partial \bar{S}_{l,m}}. \quad (2.89)$$

Die darin vorkommenden Ableitungen der Lumped Coefficients nach den Schwerefeldkoeffizienten sind die bereits eingeführten Transferkoeffizienten für Störbeschleunigungen (2.64) bis (2.66), die Ableitungen der speziellen Lösung der Hill-Gleichungen (2.27) bis (2.29) nach den Lumped Coefficients lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_p}{\partial A_{m,k}^x} &= \frac{3n^2 + \dot{\psi}_{m,k}^2}{\dot{\psi}_{m,k}^2 (n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \cos \psi_{m,k} ; & \frac{\partial x_p}{\partial B_{m,k}^x} &= \frac{3n^2 + \dot{\psi}_{m,k}^2}{\dot{\psi}_{m,k}^2 (n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin \psi_{m,k} \\ \frac{\partial x_p}{\partial A_{m,k}^z} &= \frac{-2n}{\dot{\psi}_{m,k} (n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin \psi_{m,k} ; & \frac{\partial x_p}{\partial B_{m,k}^z} &= \frac{2n}{\dot{\psi}_{m,k} (n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \cos \psi_{m,k} \\ \frac{\partial y_p}{\partial A_{m,k}^y} &= \frac{1}{n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2} \cos \psi_{m,k} ; & \frac{\partial y_p}{\partial B_{m,k}^y} &= \frac{1}{n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2} \sin \psi_{m,k} \\ \frac{\partial z_p}{\partial A_{m,k}^x} &= \frac{2n}{\dot{\psi}_{m,k} (n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin \psi_{m,k} ; & \frac{\partial z_p}{\partial B_{m,k}^x} &= \frac{-2n}{\dot{\psi}_{m,k} (n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \cos \psi_{m,k} \\ \frac{\partial z_p}{\partial A_{m,k}^z} &= \frac{1}{n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2} \cos \psi_{m,k} ; & \frac{\partial z_p}{\partial B_{m,k}^z} &= \frac{1}{n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2} \sin \psi_{m,k}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (2.78) bis (2.89) ergeben sich längliche Ausdrücke, die jedoch, wieder zu Bahnstörungen integriert, nach Definition der Transferkoeffizienten für Bahn-

$$\bar{H}_{l,m,k}^{dx} = \frac{(3n^2 + \dot{\psi}_{m,k}^2)k - 2n\dot{\psi}_{m,k}(l+1)}{\dot{\psi}_{m,k}^2(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \frac{GM}{a_E^2} \left(\frac{a_E}{r}\right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I) \quad (2.90)$$

$$\bar{H}_{l,m,k}^{dy} = \frac{1}{n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2} \frac{GM}{a_E^2} \left(\frac{a_E}{r}\right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}^\times(I) \quad (2.91)$$

$$\bar{H}_{l,m,k}^{dz} = \frac{2nk - (l+1)\dot{\psi}_{m,k}}{\dot{\psi}_{m,k}(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \frac{GM}{a_E^2} \left(\frac{a_E}{r}\right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I), \quad (2.92)$$

zu übersichtlich Reihendarstellungen führen

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \left( \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dx} \begin{cases} \bar{C}_{l,m} & l-m \text{ ungerade} \\ \bar{S}_{l,m} & l-m \text{ gerade} \end{cases} \cos \psi_{m,k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dx} \begin{cases} \bar{S}_{l,m} & l-m \text{ ungerade} \\ -\bar{C}_{l,m} & l-m \text{ gerade} \end{cases} \sin \psi_{m,k} \right) \\ &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L A_{m,k}^{dx} \cos \psi_{m,k} + B_{m,k}^{dx} \sin \psi_{m,k} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \left( \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dy} \begin{cases} \bar{C}_{l,m} & l-m \text{ ungerade} \\ \bar{S}_{l,m} & l-m \text{ gerade} \end{cases} \cos \psi_{m,k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dy} \begin{cases} \bar{S}_{l,m} & l-m \text{ ungerade} \\ -\bar{C}_{l,m} & l-m \text{ gerade} \end{cases} \sin \psi_{m,k} \right) \\ &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L A_{m,k}^{dy} \cos \psi_{m,k} + B_{m,k}^{dy} \sin \psi_{m,k} \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} z_p(t) &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \left( \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dz} \begin{cases} -\bar{S}_{l,m} & l-m \text{ ungerade} \\ \bar{C}_{l,m} & l-m \text{ gerade} \end{cases} \cos \psi_{m,k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dz} \begin{cases} \bar{C}_{l,m} & l-m \text{ ungerade} \\ \bar{S}_{l,m} & l-m \text{ gerade} \end{cases} \sin \psi_{m,k} \right) \\ &= \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L A_{m,k}^{dz} \cos \psi_{m,k} + B_{m,k}^{dz} \sin \psi_{m,k}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Dazu wurden die Lumped Coefficients der Bahnstörungen

$$A_{m,k}^{dx} = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dx} \begin{cases} \bar{C}_{l,m} \\ \bar{S}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.96)$$

$$B_{m,k}^{dx} = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dx} \begin{cases} \bar{S}_{l,m} \\ -\bar{C}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.97)$$

$$A_{m,k}^{dy} = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dy} \begin{cases} \bar{C}_{l,m} \\ \bar{S}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.98)$$

$$B_{m,k}^{dy} = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dy} \begin{cases} \bar{S}_{l,m} \\ -\bar{C}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.99)$$

$$A_{m,k}^{dz} = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dz} \begin{cases} -\bar{S}_{l,m} \\ \bar{C}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.100)$$

$$B_{m,k}^{dz} = \sum_{l=\max(m,|k|)}^L \bar{H}_{l,m,k}^{dz} \begin{cases} \bar{C}_{l,m} \\ \bar{S}_{l,m} \end{cases} \begin{matrix} l-m \text{ gerade} \\ l-m \text{ ungerade} \end{matrix} \quad (2.101)$$

eingeführt, welche die Gewichtskoeffizienten der spektralen Darstellung der speziellen Bahnstörungen im bahnbegleitenden Dreibein sind.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß es uns im Verlauf der vorhergehenden Abschnitte gelungen ist, das Schwerepotential (bzw. ohne Zentralterm das Störpotential) der Erde, sowie die daraus resultierenden Schwerebeschleunigungen auf den Satelliten in einem bahnbegleitenden Dreibein darzustellen. Dies war die Voraussetzung, um die Bahn des Satelliten mit Hilfe der Störungstheorie nach Hill beschreiben zu können. Im Verlauf der dafür benötigten Umformungen konnten spektrale Darstellungen des Schwerepotentials, der daraus resultierenden Beschleunigungen auf den Satelliten, und der periodischen Bahnstörungen des Satelliten im bahnbegleitenden Dreibein gefunden werden. In den folgenden Kapiteln soll von diesem Umstand profitiert werden, indem schnelle Fouriertechniken eingesetzt werden, um aus Bahnstörungen auf das verursachende Schwerefeld zurückzuschließen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die von Hill gefundene Lösung der Bewegungsgleichung eines Satelliten einen Sonderfall der Formeln von Kaula für kreisförmige Bahnen darstellt, und die Ausdrücke von Kaula sich für verschwindende Exzentrizität in jene von Hill umformen lassen. Dieser Übergang ist nicht einfach, da Kaulas Formeln in diesem Fall singularär werden. Für radiale Bahnstörungen siehe dazu (Schrama, 1989), für die anderen Richtungen (Balmino et al., 1994).

## 3. Closed-Loop-Simulation

### 3.1. Simulation von Bahnstörungen und Rekonstruktion der Schwerefeldkoeffizienten

Im Kapitel „Grundlagen“ wurde die Bahntheorie von Hill soweit vorgestellt, daß es uns nun mit ihrer Hilfe möglich sein sollte, bei gegebenen Schwerefeldkoeffizienten  $\bar{C}_{l,m}$  und  $\bar{S}_{l,m}$  Bahnstörungen im bahnbegleitenden Dreibein zu berechnen. Darüberhinaus soll in diesem Kapitel versucht werden, den Prozeß zu invertieren, und aus Bahnstörungen zurück auf Schwerefeldkoeffizienten zu schließen.

Dazu wird vorerst nur die spezielle Lösung der Hill-Gleichungen (2.27) bis (2.29) benutzt. Der Zusammenhang zwischen Schwerefeldkoeffizienten und Bahnstörungen war durch die partiellen Ableitungen (2.78) bis (2.89) gegeben, die sich mit Hilfe der Transferkoeffizienten für Bahnstörungen (2.90) bis (2.92) übersichtlicher schreiben lassen

$$\frac{\partial x_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \bar{H}_{l,m,k}^{dx}(r, I, \dot{u}, \dot{\Lambda}) \begin{cases} \cos \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ ungerade} \\ -\sin \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \bar{H}_{l,m,k}^{dx}(r, I, \dot{u}, \dot{\Lambda}) \begin{cases} \sin \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ ungerade} \\ \cos \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \bar{H}_{l,m,k}^{dy}(r, I, \dot{u}, \dot{\Lambda}) \begin{cases} \cos \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ ungerade} \\ -\sin \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \bar{H}_{l,m,k}^{dy}(r, I, \dot{u}, \dot{\Lambda}) \begin{cases} \sin \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ ungerade} \\ \cos \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \bar{H}_{l,m,k}^{dz}(r, I, \dot{u}, \dot{\Lambda}) \begin{cases} \sin \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ ungerade} \\ \cos \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} = \sum_{k=-l}^l \bar{H}_{l,m,k}^{dz}(r, I, \dot{u}, \dot{\Lambda}) \begin{cases} -\cos \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ ungerade} \\ \sin \psi_{m,k} \text{ für } l - m \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.6)$$

Um sie zu berechnen, müssen wir uns zuerst auf eine Referenz-Kreisbahn festlegen. In Anlehnung an die anfängliche CHAMP-Bahn sei der Radius zu  $r = 6838\text{km}$  und die

Inklination zu  $I = 87.23^\circ$  gewählt. Daraus ergibt sich mit  $GM = 3.986005 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $n = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ . Der Startpunkt des Bahnbogens liege bei  $u_0 = 0^\circ$  und  $\Lambda_0 = 0^\circ$ , die Bahnfrequenzen sind  $\dot{u} = n$  (konstante Bahngeschwindigkeit) und  $\dot{\Lambda} = -\omega_E$  (keine Bahnpräzession) mit der Drehrate der Erde  $\omega_E = 7.292115 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$ . Damit erhält man für den Winkel  $\psi$ :

$$\psi = \psi_0 + \dot{\psi}t = (ku_0 + m\Lambda_0) + (k\dot{u} + m\dot{\Lambda})t = (kn - m\omega_E)t. \quad (3.7)$$

Für die spätere Rekonstruktion der Schwerefeldkoeffizienten aus den Bahnstörungen gilt es noch, die Bogenlänge ausreichend zu wählen und ein passendes Sampling zu finden. Dabei ist die gleichmäßige Überdeckung der Erde mit Bahnbögen ausschlaggebend, nicht eigentlich die Länge der Zeitreihe. Mit den gewählten Werten dauert eine Erdumrundung  $T_U = \frac{2\pi}{n} = 5627s$ , der Satellit umfliegt die Erde also 15.31 mal pro Sterntag, nach 3 Sterntagen und knapp 46 Umläufen schließt sich die Bahn annähernd wieder. Laut Nyquist ergibt das einen lösbaren Entwicklungsgrat von  $L = \frac{46}{2} = 23$ , das maximal akzeptable Samplingintervall entlang der Bahn beträgt  $\frac{T_U}{2L} = 122s$ .

Als Eingangs-Schwerefeld diene ein beim Entwicklungsgrat  $L$  abgeschnittenes EGM96S-Schwerefeld (Lemoine, 1998). Um nicht nur den übermächtigen Effekt der Abplattung, repräsentiert vor allem durch  $\bar{C}_{2,0}$ , zu sehen, wird das Normaleschwerefeld GRS80 (IAG, 1980), bestehend aus Normalwerten für  $\bar{C}_{2,0}$ ,  $\bar{C}_{4,0}$ ,  $\bar{C}_{6,0}$  und  $\bar{C}_{8,0}$ , abgezogen:

$$\Delta x_p = \sum_{l,m} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{K}_{l,m}} (\bar{K}_{l,m}^{EGM96S} - \bar{K}_{l,m}^{GRS80}), \quad (3.8)$$

$\bar{K}_{l,m}$  steht zusammenfassend für die  $\bar{C}_{l,m}$ - und  $\bar{S}_{l,m}$ -Koeffizienten. Die resultierenden Bahnstörungen in along-track, cross-track und radialer Richtung sind als Zeitreihen in Abb. 3.1 zu sehen.

Um aus diesen Bahnstörungenzeitreihen die eingegangenen Schwerefeldkoeffizienten rückzurechnen, muß man sich der Ausgleichsrechnung bedienen. Wir wählen eine vermittelnde Ausgleichung nach dem Gauß-Markoff-Modell (Wolf, 1968), bei der die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird.

In Matrixschreibweise lautet die zu invertierende Beobachtungsgleichung

$$x = Ay \quad (3.9)$$

mit den beobachteten Bahnstörungen  $x = \Delta x_p$ , den unbekanntem Schwerefeldkoeffizienten  $y = \bar{K}_{l,m}$  und der Designmatrix

$$A = \frac{\partial x_p}{\partial \bar{K}_{l,m}}. \quad (3.10)$$

Die partiellen Ableitungen in  $A$  sind so angeordnet, daß für jeden der  $(L+1)^2$  unbekanntem Schwerefeldkoeffizienten eine Spalte anfällt. Die zu invertierende Normalgleichungsmatrix

$$N = A^T A \quad (3.11)$$



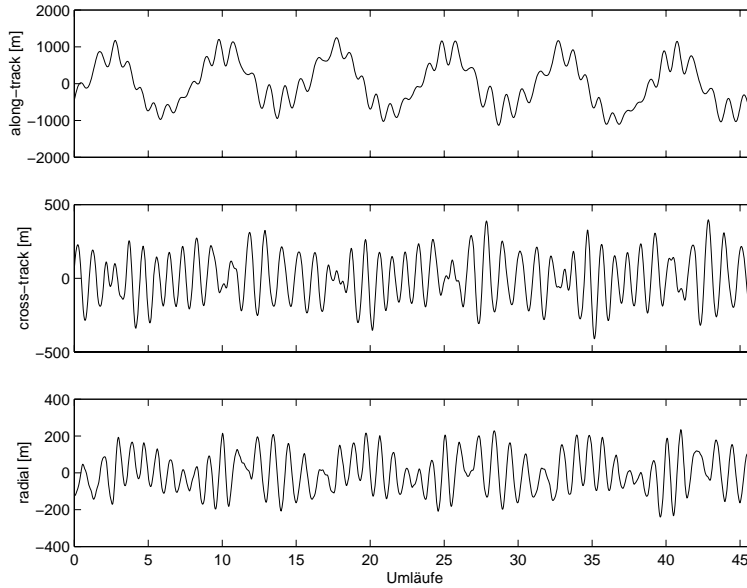


Abbildung 3.1.: *Bahnstörungen im bahnbegleitenden Dreibein. Deutlich sind Orbit- und Tagesfrequenz zu erkennen.*

hat also die Dimension  $(L+1)^2 \times (L+1)^2$  und ist voll besetzt. Nach Ordnungen  $m$  sortiert und in Grautönen kodiert (Abb. 3.2) zeigt sie eine dominante Blockdiagonalstruktur mit schwächeren Seitenbändern, die im Bereich der ersten Resonanz auf Bahnfrequenz  $n$  nahe Entwicklungsgrat 15 abgebildet werden.

Gemäß unseren Vorgaben hat das Normalgleichungssystem  $(23+1)^2 = 576$  unbekannte Schwerefeldkoeffizienten. Zur eindeutigen Lösung sind jedoch mindestens 46 möglichst gleichmäßig verteilte Umläufe mit jeweils mindestens 46 gleichabständigen Beobachtungszeitpunkten pro Orbit nötig, also insgesamt mindestens 2116 Positionsbeobachtungen des Satelliten. Nutzt man außerdem Bahnstörungen in allen 3 Koordinaten, so verdreifacht sich die Anzahl der Beobachtungsgleichungen noch einmal.

Durch Inversion erhält man die gesuchten Schwerefeldkoeffizienten zurück

$$y = N^{-1}A^T x. \quad (3.12)$$

In Abb. 3.3 wird der Kreisschluß der Closed-Loop-Simulation in einem Schaubild verdeutlicht.

Abbildung 3.4 zeigt die Grad-RMS der ursprünglichen Schwerefeldkoeffizienten und den Fehler nach der Rekonstruktion aus den Bahnstörungen der speziellen Lösung der Hill-Gleichungen. Dabei wurden die Koeffizienten der resonanten Ordnung 0 von Vorher herein zu Null gesetzt und nicht neu geschätzt. In Abb. 3.5 sind die entsprechenden Ordnungsvarianzen, getrennt nach C- und S-Koeffizienten, dargestellt. Im Bereich um die erste

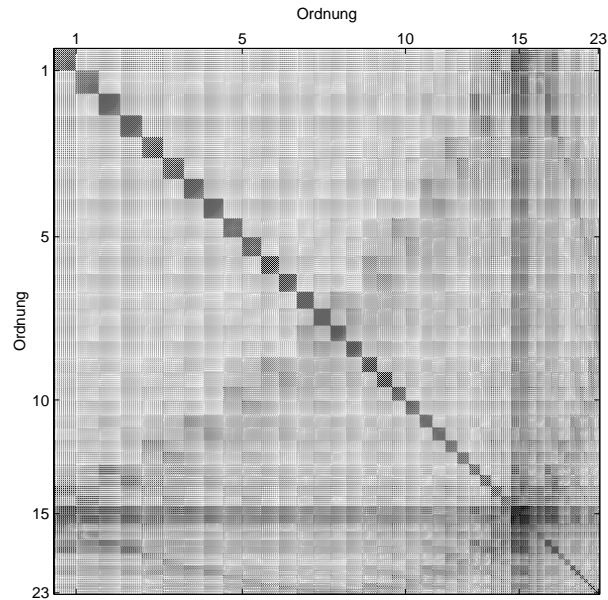


Abbildung 3.2.: Normalgleichungsmatrix bis Grad 23, nach Ordnungen aufsteigend sortiert. Dunklere Grautöne bedeuten größere Zahlenwerte.

Resonanz nahe Grad 15 fällt eine leichte Verschlechterung der Rekonstruktionsgenauigkeit auf.

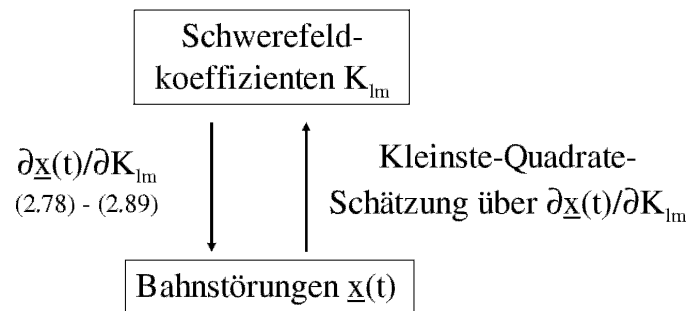


Abbildung 3.3.: Ablaufschema der Simulation von Bahnstörungen und Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten über partielle Ableitungen aus der spez. Lösung der Hill-Gleichungen.

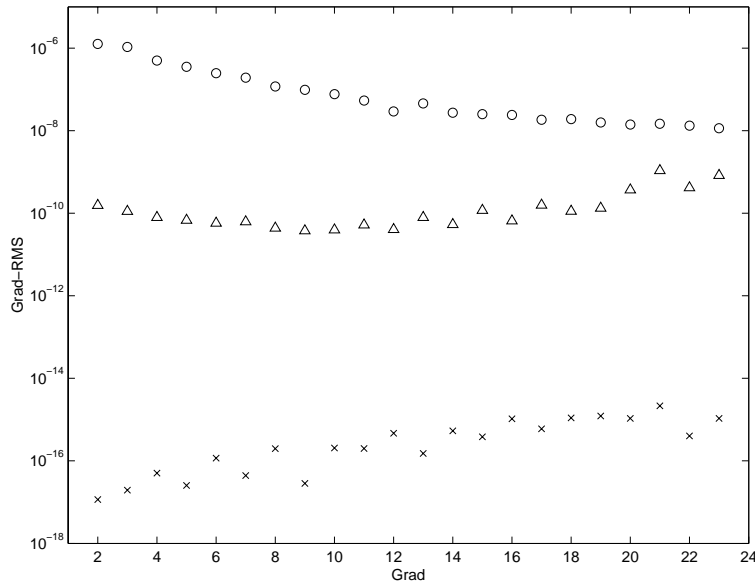


Abbildung 3.4.: Grad-RMS des Eingangsschwerefeldes (o), der Fehler nach Rekonstruktion über partielle Ableitungen nach Hill (x) beziehungsweise nach Rekonstruktion mittels 1D-FFT auf einer Wiederholungsbahn (Δ).

### 3.2. Verwendung von Fourier-Techniken bei Wiederholungsbahnen

Sehr viel eleganter und Rechenzeit sparend kann die Closed-Loop-Simulation des vorhergehenden Abschnitts für Wiederholungsbahnen mittels Fouriertransformation durchgeführt werden. Hierzu werden aus den Schwerefeldkoeffizienten  $\bar{C}_{l,m}$ ,  $\bar{S}_{l,m}$  über Transferkoeffizienten  $\bar{H}_{l,m,k}^{dx}$  zuerst Lumped Coefficients der Bahnstörungen  $A_{m,k}^{dx}$ ,  $B_{m,k}^{dx}$  berechnet und diese mittels Gleichung (2.76) zu einfach indizierten Koeffizienten  $A_j^{dx}$  bzw.  $B_j^{dx}$  umgewandelt. Gleichungen (2.93) bis (2.95) lassen sich dann zusammenfassend als

$$\underline{x}_p(t) = \sum_j A_j^{dx} \cos \omega_j t + B_j^{dx} \sin \omega_j t \quad (3.13)$$

schreiben. Eine inverse, diskrete Fouriertransformation lautetet (z.B. Meyer, 1998)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(j) e^{i\omega_j t} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (a_j + ib_j) e^{i\omega_j t} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \cos \omega_j t - b_j \sin \omega_j t + i(b_j \cos \omega_j t + a_j \sin \omega_j t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

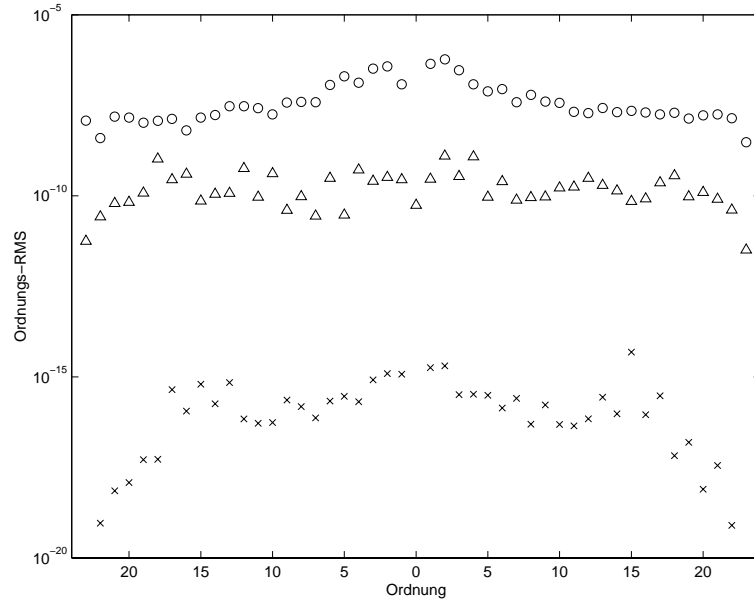


Abbildung 3.5.: *Ordnungs-RMS des Eingangsschwerefeldes (○), der Fehler nach Rekonstruktion über partielle Ableitungen nach Hill (×) beziehungsweise nach Rekonstruktion mittels 1D-FFT auf einer Wiederholungsbahn (△); links der C-, rechts der S-Koeffizienten.*

mit der Anzahl der Stützstellen<sup>1</sup>  $N = (2L + 1)^2$ . Die Fourierkoeffizienten lassen sich folgendermaßen zuordnen

$$a_j = \frac{1}{2}(1 + \delta_{j0})NA_j^{\frac{dx}{dx}}; \quad b_j = -\frac{1}{2}(1 + \delta_{j0})NB_j^{\frac{dx}{dx}}. \quad (3.15)$$

Unter der Voraussetzung einer geschlossenen Bahn lassen sich also Bahnstörungen mittels inverser, diskreter Fouriertransformation berechnen; im Regelfall wird eine Fast-Fourier-Transformation (FFT) zur Anwendung kommen.

Auch in umgekehrter Richtung läßt sich der Übergang zwischen einer Darstellung der Bahnstörungen im Ortsraum (Zeitreihe) und als Spektrum mittels diskreter Fourier-

<sup>1</sup> $N$  entspricht der Anzahl der unbekannt Schwerefeldkoeffizienten und damit der Anzahl der benötigten Stützstellen. Nun ist das Spektrum jedoch komplex und damit werden doppelt so viele Koeffizienten  $a_j, b_j$  gelöst; dies ist nur möglich, weil die eine Hälfte der Koeffizienten nicht unabhängig von der anderen Hälfte, sondern konjugiert komplex zu diesen ist. Für die Zuordnung zu Lumped Coefficients wird nur das halbe Spektrum benutzt, daher der Faktor  $\frac{1}{2}(1 + \delta_{j0})$  in (3.15) bzw.  $2 - \delta_{j0}$  in (3.18).

transformation durchführen:

$$\begin{aligned} F(j) &= \sum_{t=0}^{T-\Delta t} f(t)e^{-i\omega_j t} \\ &= \sum_{t=0}^{T-\Delta t} f(t) \cos \omega_j t - i f(t) \sin \omega_j t = a_j + ib_j \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit  $f(t)$  aus  $\underline{x}_p(t)$  und den Fourier-Koeffizienten

$$a_j = \sum_{t=0}^{T-\Delta t} f(t) \cos \omega_j t; \quad b_j = - \sum_{t=0}^{T-\Delta t} f(t) \sin \omega_j t, \quad (3.17)$$

der Wiederholperiode der Bahn  $T$  und dem Sampling-Intervall  $\Delta t$ . Die Lumped Coefficients erhält man aus den Fourierkoeffizienten durch Normierung mit der Anzahl der Stützstellen  $N$

$$A_j^{dx} = (2 - \delta_{j0}) \frac{a_j}{N}; \quad B_j^{dx} = -(2 - \delta_{j0}) \frac{b_j}{N}, \quad (3.18)$$

der Übergang zu den Indizes  $m, k$  wird über Gleichung (2.77) erreicht.

Beginnt die Wiederholungsbahn nicht bei  $u_0 = 0^\circ, \Lambda_0 = 0^\circ$ , so kommt es zu einer Phasenverschiebung um  $\psi_{0_{m,k}} = ku_0 + m\Lambda_0$  in den Lumped Coefficients. Diese kann durch eine Drehung um  $-\psi_{0_{m,k}}$  rückgängig gemacht werden. Mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen erhält man für die korrigierten Lumped Coefficients

$$A_{m,k} = A'_{m,k} \cos \psi_{0_{m,k}} - B'_{m,k} \sin \psi_{0_{m,k}} \quad (3.19)$$

$$B_{m,k} = B'_{m,k} \cos \psi_{0_{m,k}} + A'_{m,k} \sin \psi_{0_{m,k}}. \quad (3.20)$$

Um die Fourier-Methode auszutesten, muß allerdings zuerst eine exakte Wiederholungsbahn gefunden werden. Diese soll in unserem Fall  $\beta = 46$  Umläufe in  $\alpha = 3$  Sterntagen betragen, um möglichst nah am vorhergehenden Beispiel zu bleiben. Für eine nicht präzessierende Kreisbahn erhalten wir unabhängig von der Bahnneigung  $I$  aus

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}}{|\dot{\Lambda}|} &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{\omega_E} \\ \Rightarrow r &= \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_E^2} \frac{\alpha^2}{\beta^2}} \approx 6831549\text{m} \end{aligned}$$

Die speziellen Bahnstörungen nach Hill lassen sich jedoch ohne wesentliche Einschränkungen auch für präzessierende Kreisbahnen berechnen. Dies kommt beobachteten Satellitenbahnen schon bedeutend näher, allerdings ist es wesentlich schwieriger und nur über Iteration möglich, für diesen Fall eine geschlossene Bahn zu konstruieren.

Kaula (1966) gibt Näherungsformeln für Knotendrehung und Bahngeschwindigkeit des Satelliten an, wenn dieser nur durch den dominanten Störterm  $C_{2,0}$  beeinflusst wird

$$\dot{\omega} = \frac{3nC_{2,0}R^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 I) \quad (3.23)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3nC_{2,0}R^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos I \quad (3.24)$$

$$\dot{M} = n - \frac{3nC_{2,0}R^2}{4(1-e^2)^{\frac{3}{2}}a^2}(3\cos^2 I - 1) \quad (3.25)$$

Mit günstig gewählten Startwerten  $a = r_0$  und  $I_0$  erhält man Näherungen für die Orbitfrequenzen  $\dot{u} = \dot{\omega} + \dot{M}$  und  $\dot{\Lambda} = \dot{\Omega} - \omega_E$ . Nun gilt es, sich auf eine Wiederholperiode  $\frac{\beta}{\alpha}$  festzulegen und  $I$  oder  $r$  (und damit auch  $n$ ) in (3.23) bis (3.25) zu variieren, bis  $\frac{\dot{u}}{|\dot{\Lambda}|} = \frac{\beta}{\alpha}$  paßt (z.B. über eine Newton-Raphson-Iteration).

Mit  $C_{2,0} = -1.08263 \cdot 10^{-3}$  aus GRS80 und  $I = 87.23^\circ$  erhält man für  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{46}{3}$  einen Bahnradius  $r \approx 6820321\text{m}$ . Zu beachten ist, daß für präzessierende Bahnen  $\alpha$  nicht mehr Sterntage, sondern Knotentage bezeichnet (ein Knotentag entspricht  $\frac{\omega_E}{|\dot{\Lambda}|}$  Sterntagen). Die Bahnfrequenzen lauten für diese Bahn  $\dot{u} \approx 0.001121 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und  $\dot{\Lambda} \approx 7.310129 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Der Weg der Simulation von Bahnstörungen entlang der geschlossenen Kreisbahn ist nun unterteilt in mehrere Schritte. Zuerst werden mittels Transferkoeffizienten Lumped Coefficients der Bahnstörungen aus Schwerefeldkoeffizienten gebildet. Für diese wird von der Indizierung mit  $m, k$  auf den Index  $j$  übergegangen. Den einfach indizierten Lumped Coefficients werden dann Fourierkoeffizienten zugeordnet und die Bahnstörungenzeitreihen mittels einer inversen FFT berechnet.

Der Zeitgewinn bei der Simulation beruht auf der Tatsache, daß der iFFT-Algorithmus wesentlich schneller als die bisherige Synthese der Bahnstörungen abläuft, bei der für jeden Zeitpunkt die Winkel  $\psi_{m,k}(t)$  gebildet und über  $m, k$  und  $l$  aufsummiert werden mußte.

Auch die Analyse von Schwerefeldkoeffizienten aus Bahnstörungen läuft in den erwähnten Schritten ab. Auf den Übergang von Bahnstörungenzeitreihen in den Spektralbereich mittels FFT folgt die Zuordnung der Fourierkoeffizienten zu einfach indizierten Lumped Coefficients, dann der Übergang zur doppelten Indizierung mit  $m$  und  $k$ , und schließlich über eine vermittelnde Ausgleichung die Schätzung von Schwerefeldkoeffizienten.

Die Beobachtungen  $x$  in der Beobachtungsgleichung (3.9) sind nun nicht mehr direkt die beobachteten Bahnstörungen im bahnbegleitenden Dreibein, sondern deren Spektraldarstellung in Lumped Coefficients. Die Design-Matrix  $A$  enthält die Ableitungen der „beobachteten“ Lumped Coefficients nach den unbekanntem Schwerefeldkoeffizienten. Da Schwerefeldkoeffizienten  $\bar{K}_{l,m}$  nur von Lumped Koefficients  $A_{m,k}^{dx}$  und  $B_{m,k}^{dx}$  der gleichen Ordnung  $m$  abhängen, können sie getrennt nach Ordnungen bestimmt werden.

Das heißt,  $A$  kann in wesentlich kleinere Blöcke  $A_m$  zerlegt werden, die jeweils  $L + 1 - m$

unbekannte  $\bar{C}_{l,m}$ - und  $\bar{S}_{l,m}$ -Koeffizienten (außer für  $m = 0$ ) enthalten. Die maximale Größe der zu invertierenden, zugehörigen Normalmatrix  $N_m = A_m^T A_m$  ist für  $m = 1$  also  $2L \times 2L$ . Wenn man berücksichtigt, daß die in den  $A_m$  stehenden Transferkoeffizienten  $\bar{H}_{l,m,k}^{dx}$  für  $l - k$  ungerade (im Fall von x- und z-Störungen), bzw.  $l - k$  gerade (bei y-Störungen) zu Null werden, so lassen sich die  $A_m$  sogar noch weiter in zwei Unterblöcke unterteilen. Die resultierenden  $N_m^{l-k \text{ gerade/ungerade}}$  haben dann sogar nur noch die maximale Dimension  $L \times L$ .

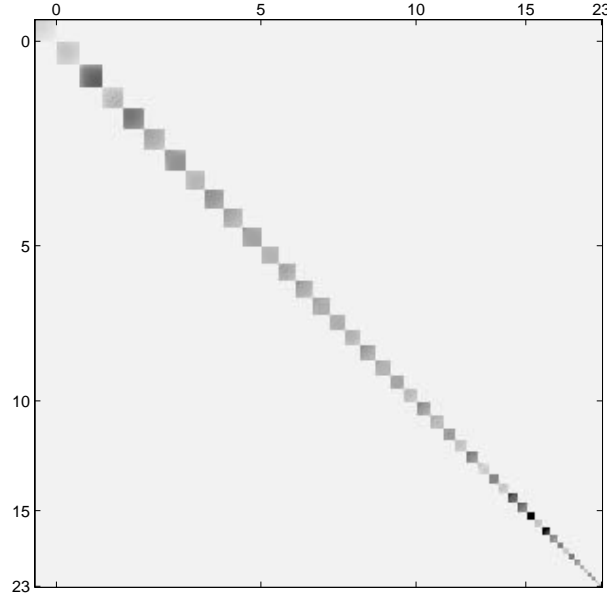


Abbildung 3.6.: Normalgleichungsmatrix aus Transferkoeffizienten bis Grad 23, nach Ordnungen aufsteigend sortiert. Dunklere Grautöne bedeuten größere Zahlenwerte.

Faßt man die  $N_m$  nach  $m$  aufsteigend geordnet zusammen, so ergibt sich eine Matrix mit Blockdiagonalstruktur (Abb. 3.6). Diese repräsentiert den dominanten Anteil auf der Hauptdiagonalen der ursprünglichen Normalgleichungsmatrix (Abb. 3.2), ist mit dieser aber nicht unmittelbar vergleichbar, da sie den Zusammenhang zwischen Schwerefeldkoeffizienten und Lumped Coefficients und nicht direkt Bahnstörungen beschreibt. Auch ist sie nur halb so groß, da  $\bar{C}_{l,m}$ - und  $\bar{S}_{l,m}$ -Koeffizienten der gleichen Ordnung  $m$  über gemeinsame Transferkoeffizienten  $\bar{H}_{l,m,k}^{dx}$  mit den Lumped Coefficients  $A_{m,k}^{dx}$  und  $B_{m,k}^{dx}$  zusammenhängen.

Als Test wurden mit den Parametern der Wiederholungsbahn über partielle Ableitungen gemäß Abschnitt 3.1 Bahnstörungenzeitreihen berechnet, die dann mittels 1D-FFT zu Lumped Coefficients umgewandelt wurden. In Abb. 3.4 sind die Fehler der durch Inversion der Beobachtungsgleichungen  $y_m = N_m^{-1} A_m^T x_m$  geschätzten Schwerefeldkoeffizienten gegenüber den Grad-RMS der originalen Koeffizienten dargestellt. Sie sind deutlich höher

als die Fehler der Closed-Loop-Simulation des vorangegangenen Abschnitts, was auf Unperfektheit der Wiederholungsbahn zurückzuführen sein dürfte, jedoch immer noch um mehrere Größenordnungen kleiner als die originalen Koeffizienten. Betrachtet man die Ordnungs-RMS der Fehler in Abb. 3.5, so läßt sich im Bereich der Resonanz kein Anschwellen feststellen, da das durch den Bahnschlußfehler verursachte Rauschlevel höher liegt.

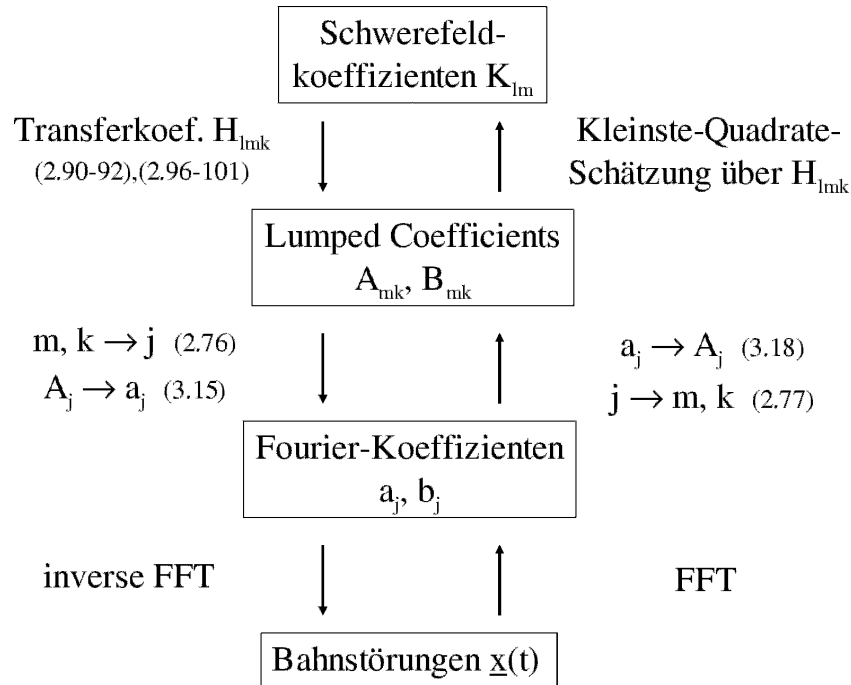


Abbildung 3.7.: Ablaufschema der Simulation von Bahnstörungen und Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten über Lumped Coefficients und 1D-Fourier-Techniken.

Die einzelnen Schritte der Berechnung von Bahnstörungen und Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten über die 1D-FFT auf einer geschlossenen Kreisbahn sind in Abb. 3.7 zusammengefaßt. Abweichend von dem Schaubild wurden die Bahnstörungen auf dem Hinweg nicht durch eine Fourier-Transformation berechnet. Dadurch konnte der Effekt eines kleinen Bahnschlußfehlers berücksichtigt werden.

Die 1D-FFT-Methode hat sich zur Schwerefeldrekonstruktion für geschlossene Bahnen und über Hill simulierte Bahnstörungen bewährt, wobei sich der Schlußfehler als kritische Größe abzeichnet. Es kann nicht erwartet werden, dieses Problem durch Iteration zu verbessern, da die Schätzung der Schwerefeldkoeffizienten nicht notwendigerweise zu einer Verringerung des Schlußfehlers führt. Wie in Abschnitt 4.2 später vorgestellt, beruht die Lösung auf einer künstlichen Verkleinerung des Bahnschlußfehlers durch Multiplikation der Bahnstörungszeitreihen mit einem beidseitig auf Null abfallenden Fenster.



### 3.3. Fourier-Techniken für nicht schließende Bahnen

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, wie Fouriertechniken die Synthese von speziellen Bahnstörungen aus Schwerefeldkoeffizienten sowie im umgekehrten Fall die Analyse von Bahnstörungen auf in sich geschlossenen Kreisbahnen sehr elegant und schnell ermöglichen. Doch ist die sich exakt schließende Bahn ein Idealfall, noch dazu nicht unbedingt immer erwünscht, da dadurch auch der Lösungsraum der Schwerefeldkoeffizienten nach Nyquist begrenzt wird; eine Verallgemeinerung auf beliebige Kreisbahnen wäre also wünschenswert.

Dazu bestehen nun grundsätzlich zwei Lösungsansätze. Zum einen wird die Fouriertransformation in der Praxis oft auch auf nicht periodische Zeitreihen angewandt. Dazu wird ein etwaiger Trend entfernt, die Zeitreihe auf Null zentriert und durch ein beidseitig sanft auf Null abfallendes Fenster der Sprung bei periodischer Fortsetzung geglättet. Diese Technik wird in Kapitel 4 angewandt, wenn es um die Auswertung realitätsnaher, numerisch integrierter Bahnen geht.

An dieser Stelle soll noch ein weiteres Verfahren vorgestellt werden, welches zumindest im Fall der Simulation hervorragende Dienste leistet und durch seine Eleganz besticht. Zu diesem Zwecke macht man es sich zunutze, daß sich jede Kreisbahn eines Satelliten auf die Oberfläche eines Torus projizieren läßt, dieser aber gleichzeitig den Ortsraum der zweidimensionalen Fourier-Transformation darstellt.

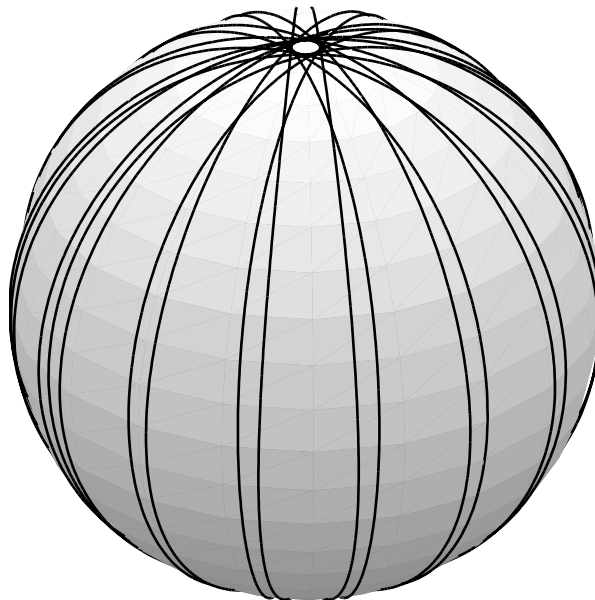


Abbildung 3.8.: *Projektion einer Satellitenbahn mit Inklination  $I = 87.23^\circ$  auf eine Kugel.*

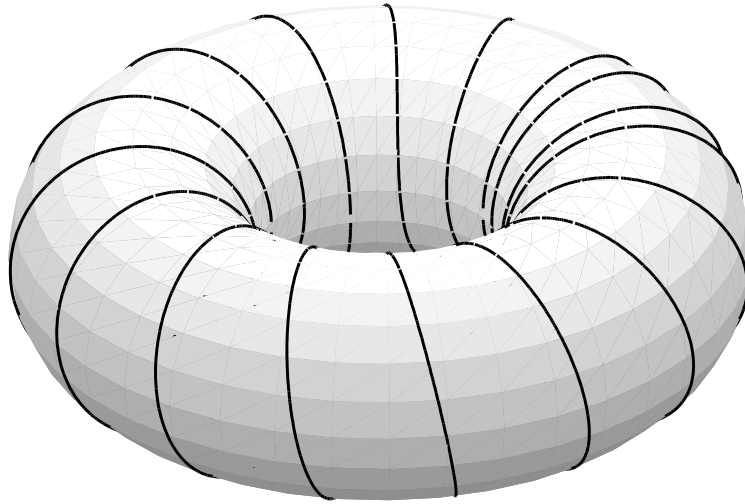


Abbildung 3.9.: *Projektion einer Satellitenbahn mit Inklination  $I = 87.23^\circ$  auf einen Torus.*

Während die Projektion der Satellitenbahn auf eine Kugel (z.B. die approximierte Erdoberfläche) bei Bahnneigungen ungleich  $90^\circ$  Löcher an den Polen aufweist (Abb. 3.8), wird die Oberfläche eines Torus vollständig überdeckt. Die Bahn des Satelliten windet sich gleichsam spiralförmig um den Torus, aufsteigende Bahnbögen werden auf die Außen-, absteigende Bahnbögen auf die Innenseite des Torus projiziert (Abb. 3.9).

Das überflogene Gebiet der Erde wird also zweimal abgebildet, einmal im aufsteigenden, einmal im absteigenden Bahnsinn. Würde z.B. das Potential entlang der Bahn auf diesen Torus projiziert, so würde es sich auf Außen- und Innenseite wiederholen (was der Fourieranalyse keinen Abbruch tut, da es bis auf Nyquist-Überlegungen zur maximal lösbaren Frequenz egal ist, wieviel Perioden analysiert werden). Da Bahnstörungen jedoch nicht isotrop sondern richtungsabhängig sind, der Satellit also in Kreuzungspunkten auf- und absteigender Bahnbögen je nach Flugrichtung unterschiedlich ausgelenkt wird, unterscheidet sich das Abbild der Bahnstörungen auf der Innenseite des Torus von dem auf der Außenseite.

Die Rolle der Länge auf dem Torus übernimmt das Argument der Länge des Satelliten  $\Lambda = 0^\circ \dots 360^\circ$ , die der Breite sein Argument der Breite  $u = 0^\circ \dots 360^\circ$ . Sowohl in Längen- als auch in Breitenrichtung ist der Torus periodisch, die 2D-Fourier-Transformation läuft also über  $u$  und  $\Lambda$ .

Vorraussetzung einer diskreten 2D-Fourier-Transformation ist allerdings, daß die Daten auf einem gleichabständigen Gitter vorliegen. Die Bahnstörungen  $\underline{x}_p(t)$  müssen also zuerst in Toruskoordinaten  $u(t)$  und  $\Lambda(t)$  ausgedrückt werden und dann auf ein Gitter mit jeweils  $2L + 1$  gleichabständigen Stützstellen in  $u$ - und  $\Lambda$ -Richtung interpoliert werden, bevor sie in Spektraldarstellung transformiert werden können.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden mehrere Verfahren zur Interpolation ausprobiert und verglichen:

- Dreiecksvermaschung (Delaunay Triangulation) mit anschließender linearer oder kubischer Interpolation in den Dreiecksmaschen,
- Natural Neighbours Interpolation auf Basis einer Voronoi-Parzellierung und
- Spline-Interpolation.

Die Dreiecksvermaschung arbeitet sauber, solange eine gleichmäßige Datenverteilung vorliegt. Ist dies der Fall, so werden mit der anschließenden kubischen Interpolation noch etwas bessere Ergebnisse als mit einer einfachen linearen Interpolation in den Dreiecksmaschen erzielt.

Die Natural Neighbours Interpolation ist besonders für pathologische Datenverteilungen entwickelt worden. In einem ersten Schritt werden die Voronoi-Zellen aller Datenpunkte gebildet. Daraufhin erhält auch der neu zu ermittelnde Punkt eine Zelle, welche diejenigen der Nachbarpunkte überlagert. Proportional zur Überlagerung wird ein Mittel aus den Nachbarpunkten gebildet (Sambridge et al., 1995). Dieser Algorithmus läuft sehr stabil, kann für ungünstige Datenverteilungen (z.B. enges Sampling entlang der Bahn gegenüber dünner Überdeckung des Globus durch Bahnbögen) aber auch keine guten Ergebnisse erzielen.

Die Spline-Interpolation schließlich wurde hauptsächlich für graphische Anwendungen entwickelt. Zumindest mit dem in GMT <sup>2</sup> implementierten Algorithmus konnte jedoch aus den interpolierten Bahnstörungen kein Schwerfeld mehr rekonstruiert werden.

Wesentliches Erfolgskriterium für die Interpolation ist auf jeden Fall eine Gleichmäßige Überdeckung des Torus mit Meßwerten. Dabei ist gegenüber der Analyse mittels 1D-FFT auch darauf zu achten, daß die Bahnstörungen entlang des Orbits nicht zu stark übersampelt sind, da sonst die Dreiecksvermaschung oder Voronoi-Parzellierung auf Probleme stoßen. In jedem Fall ist jedoch mit Interpolationsfehlern zu rechnen, die sich über die Fourier-Koeffizienten in die Lumped Coefficients und damit auch in die Schwerfeldkoeffizienten fortpflanzen. Zu deren Behebung wird weiter unten eine Iteration vorgestellt, zuerst soll jedoch die 2D-Fourier-Transformation näher erläutert werden.

---

<sup>2</sup>Generic Mapping Tool von P. Wessel und W. Smith

Die inverse diskrete 2D-Fourier-Transformation lautet

$$\begin{aligned}
f(u, \Lambda) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(m, k) e^{iku} e^{im\Lambda} \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{aligned} &a_{m,k}(\cos ku \cos m\Lambda - \sin ku \sin m\Lambda) \\ &- b_{m,k}(\sin ku \cos m\Lambda + \cos ku \sin m\Lambda) \\ &+ ia_{m,k}(\sin ku \cos m\Lambda + \cos ku \sin m\Lambda) \\ &+ ib_{m,k}(\cos ku \cos m\Lambda - \sin ku \sin m\Lambda). \end{aligned}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Prinzipiell muß die Anzahl der Stützstellen  $N$  in  $u$ - und  $\Lambda$ -Richtung nicht übereinstimmen. Da jedoch die Kugelfunktionsentwicklung des Schwerefeldes der Erde normalerweise mit gleicher spektraler Auflösung in Längen- und Breitenrichtung gegeben bzw. gefragt ist, wollen wir uns hier auf diesen Fall beschränken.

Mit den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen

$$\cos \psi_{m,k} = \cos ku \cos m\Lambda - \sin ku \sin m\Lambda \tag{3.27}$$

$$\sin \psi_{m,k} = \sin ku \cos m\Lambda + \cos ku \sin m\Lambda \tag{3.28}$$

lassen sich Fourierkoeffizienten und Lumped Coefficients nun zuordnen (für die Anzahl der Stützstellen  $N$  und den Faktor  $\frac{1}{2}(1 + \delta_{k0})$  in (3.29) bzw.  $2 - \delta_{k0}$  in (3.33) gilt die gleiche Bemerkung wie bei der 1D-Fourier-Transformation)

$$a_{m,k} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{k0})N^2 A_{m,k}^x; \quad b_{m,k} = -\frac{1}{2}(1 + \delta_{k0})N^2 B_{m,k}^x; \quad N = 2L + 1. \tag{3.29}$$

Für die Simulation von Bahnstörungen aus Lumped Coefficients ist die inverse diskrete 2D-Fourier-Transformation (bzw. 2D-iFFT) jedoch nur begrenzt zu gebrauchen, da die Bahnstörungen natürlich nur auf einem regelmäßigen Gitter auf dem Torus berechnet werden (Abb. 3.10) und für Bahnstörungszeitreihen entlang der Bahn auf diese interpoliert werden müßten. Da dieser Schritt später im Rahmen einer Iteration zur Behebung von Interpolationsfehlern bei der Analyse von Bahnstörungen mittels 2D-FFT auf dem Torus benötigt wird, soll er zeitintensiver aber fehlerfrei über die Gleichungen (2.93) bis (2.95) durchgeführt werden.

Die diskrete 2D-FFT ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
F(m, k) &= \sum_{\Lambda=0}^{360^\circ - \Delta\Lambda} \sum_{u=0}^{360^\circ - \Delta u} f(u, \Lambda) e^{-iku} e^{-im\Lambda} \\
&= \sum_{\Lambda=0}^{360^\circ - \Delta\Lambda} \sum_{u=0}^{360^\circ - \Delta u} \begin{aligned} &f(u, \Lambda)(\cos ku \cos m\Lambda - \cos ku \sin m\Lambda) \\ &- if(u, \Lambda)(\sin ku \cos m\Lambda + \sin ku \sin m\Lambda) \end{aligned} \\
&= a_{m,k} + ib_{m,k}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

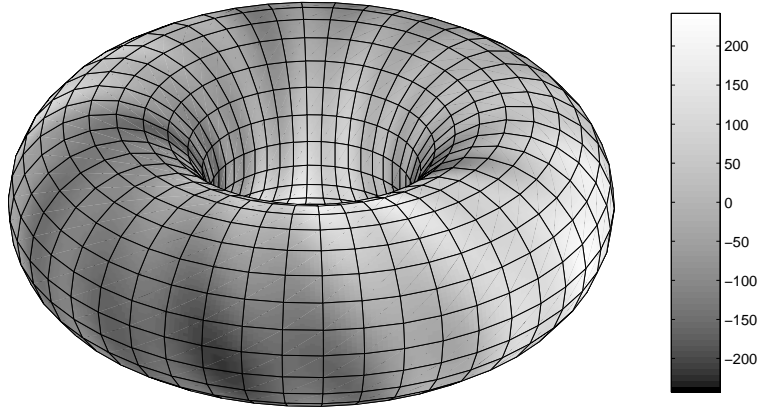


Abbildung 3.10.: Radiale Bahnstörungen aus EGM96 bis Grad 23 auf dem Torus. Für die Fourieranalyse bis  $l = 23$  werden nur Werte an den Gitterpunkten benötigt.

mit  $f(u, \Lambda)$  aus  $\underline{x}_p(u, \Lambda)$  interpoliert und den Fourier-Koeffizienten

$$a_{m,k} = \sum_{\Lambda=0}^{360^\circ - \Delta\Lambda} \sum_{u=0}^{360^\circ - \Delta u} f(u, \Lambda) (\cos ku \cos m\Lambda - \cos ku \sin m\Lambda) \quad (3.31)$$

$$b_{m,k} = - \sum_{\Lambda=0}^{360^\circ - \Delta\Lambda} \sum_{u=0}^{360^\circ - \Delta u} f(u, \Lambda) (\sin ku \cos m\Lambda + \sin ku \sin m\Lambda). \quad (3.32)$$

Die Zuordnung zu Lumped Coefficients erfolgt durch

$$A_{m,k}^{\underline{x}} = (2 - \delta_{k0}) \frac{a_{m,k}}{N^2}; \quad B_{m,k}^{\underline{x}} = -(2 - \delta_{k0}) \frac{b_{m,k}}{N^2}, \quad (3.33)$$

die Periodenlänge ist durch die Geometrie des Torus vorgegeben, der in Längen- bzw. Breitenrichtung jeweils komplett ( $0^\circ \dots 360^\circ$ ) umlaufen wird; das Samplingintervall  $\Delta u = \Delta\Lambda = \frac{360^\circ}{N}$  ist vom zu lösenden Entwicklungsgrad  $L$  abhängig.

Da sowieso immer ein den ganzen Torus überdeckendes Gitter an Bahnstörungen vorliegen muß, ist es unsinnig, die 2D-FFT nicht bei  $u_0 = 0^\circ, \Lambda_0 = 0^\circ$  beginnen zu lassen. Das heißt, daß es nicht wie bei der 1D-Methode zu Phasenverschiebungen in den Lumped Coefficients kommen kann.

Die bereits angesprochene Iteration zur Behebung von Interpolationsfehlern auf dem Torus soll möglichst ohne Vorwissen aus der Simulation der Bahnstörungen, d.h. ohne Kenntnis der korrekten Schwerfeldkoeffizienten oder Lumped Coefficients stattfinden. Ausgehend von Bahnstörungszeitreihen im bahnbegleitenden Dreibein  $\underline{x}_p(t)$  werden diese zuerst in Toruskoordinaten umtransformiert  $\underline{x}_p(u, \Lambda)$  und auf ein gleichabständiges Gitter mit  $2L + 1 \times 2L + 1$  Stützstellen interpoliert.

Die 2D-FFT liefert Lumped Coefficients in  $m, k$ , die aufgrund der vorhergegangenen Interpolation leicht fehlerhaft sind. Aus diesen können jedoch über Gleichungen (2.93) bis (2.95) ohne weitere Fehler wieder Bahnstörungen  $\underline{x}'_p(t)$  berechnet werden. Es wird sich eine leichte Differenz  $d\underline{x} = \underline{x}_p(t) - \underline{x}'_p(t)$  zu den ursprünglichen Bahnstörungen ergeben, verursacht durch die beschriebenen Interpolationsfehler.

Da es sich jedoch um eine lineare Störungstheorie handelt, können die Differenzen  $d\underline{x}$  wiederum auf dem Torus interpoliert, mittels 2D-FFT in Fourierkoeffizienten bzw. Lumped Coefficients der Differenzen transformiert und zu den fehlerhaften Lumped Coefficients der ursprünglichen Bahnstörungen als Verbesserungen addiert werden. Dieser Vorgang kann iterativ wiederholt werden, bis sich die aus den verbesserten Lumped Coefficients rekonstruierten Bahnstörungen nicht mehr signifikant von den ursprünglichen unterscheiden.

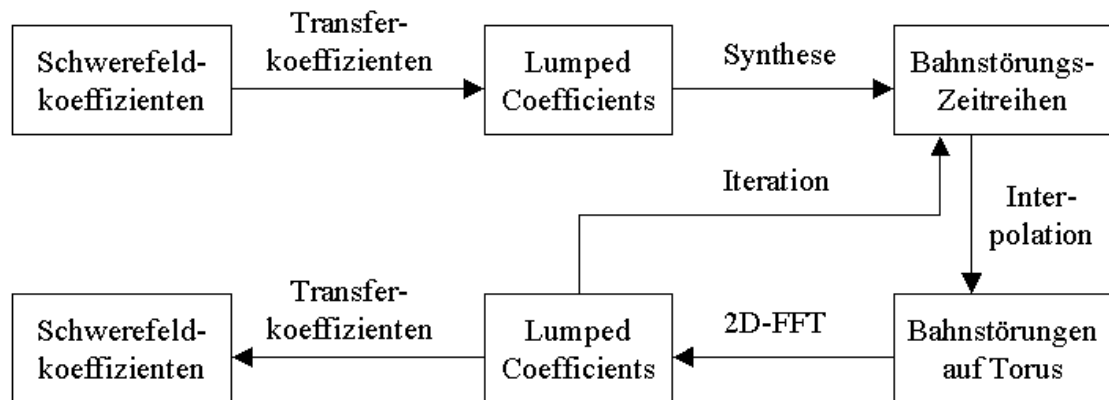


Abbildung 3.11.: Ablaufschema der iterativen Schätzung von Schwerefeldkoeffizienten über Projektion der Bahnstörungen auf einen Torus und 2D-FFT.

Eine vermittelnde Ausgleichung, getrennt nach Ordnungen durchgeführt (wie bereits bei der geschlossenen Bahn vorgestellt), liefert schließlich die gesuchten Schwerefeldkoeffizienten zurück. Als Test wurden die Bahnstörungen aus Abschnitt 3.1 mittels 2D-FFT ausgewertet, das Ergebnis war jedoch auch nach Iteration nicht befriedigend. Offensichtlich bedarf es einer dichteren Datenüberdeckung, um Interpolationsfehler klein zu halten. Deshalb wurde die ursprüngliche Bogenlänge verdoppelt, das Samplingintervall halbiert und eine Präzession der Kreisbahn zugelassen, um den annähernden Wiederholungszyklus zu verlassen.

Der Ablauf der Simulation und der iterativen Rekonstruktion der Koeffizienten ist in Abb. 3.11 zusammengefaßt, die Ergebnisse sind in Abb. 3.12 dargestellt, die einen Vergleich der ursprünglichen Grad-RMS mit den Fehlern der Rekonstruktion zeigt. Deutlich ist zu sehen, daß nach zwei bzw. vier Iterationen die Fehler bereits um Größenordnungen unter der ursprünglichen Signalkurve liegen (es ist nicht notwendig, sondern nur hier zur Veranschaulichung geschehen, die Schwerefeldkoeffizienten nach jeder Iteration

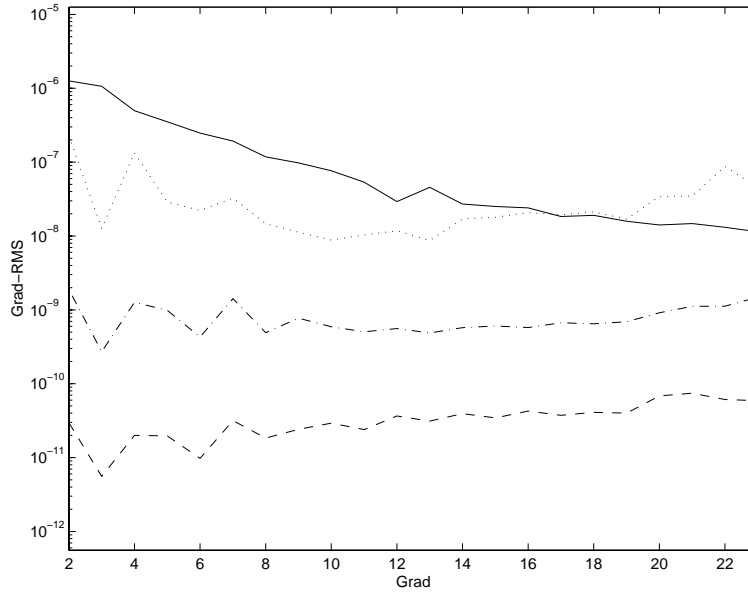


Abbildung 3.12.: Grad-RMS des Originalfeldes (durchgezogen) und der Fehler nach Rekonstruktion über 2D-FFT ohne Iteration (gepunktet), nach 2 Iterationen (Strichpunkt) und nach 4 Iterationen (gestrichelt).

zu schätzen).

### 3.4. Rekonstruktion von Schwerfeldkoeffizienten aus Störbeschleunigungen

Bisher wurde stillschweigend übergangen, daß aufgrund des Resonanzverhaltens der Bahnstörungen um die Null- und die Orbitfrequenz bestimmte Schwerfeldkoeffizienten nicht bestimmbar sind, da Transferkoeffizienten für Bahnstörungen singularär werden. Dies passiert immer dann, wenn  $\dot{\psi}_{m,k}^2 = (k\dot{u} + m\dot{\Lambda})^2 = n^2$  (Singularitäten in allen zugehörigen  $\bar{H}_{l,m,k}^{dx}$ ), bzw.  $\dot{\psi}_{m,k} = 0$  (Singularitäten in den zugehörigen  $\bar{H}_{l,m,k}^{dx}$  und  $\bar{H}_{l,m,k}^{dz}$ ) wird.

Übersetzt in die Indizes  $m$  und  $k$  bedeutet dies, daß sich Transferkoeffizienten aller drei Bahnstörungen mit  $m = 0$  und  $k = \pm 1$ , sowie along-track und radiale Transferkoeffizienten mit  $m, k = 0$  aus der nichtresonanten Lösung der Hillgleichungen nicht berechnen lassen. In der Folge können die Schwerfeldkoeffizienten  $\bar{C}_{0,0}$ ,  $\bar{C}_{1,0}$  und  $\bar{S}_{1,0}$  nicht und die restlichen Koeffizienten der Ordnung 0 nur eingeschränkt ohne Verwendung der beobachteten Lumped Coefficients  $A_{0,-1}$ ,  $A_{0,0}$  und  $A_{0,1}$  geschätzt werden.

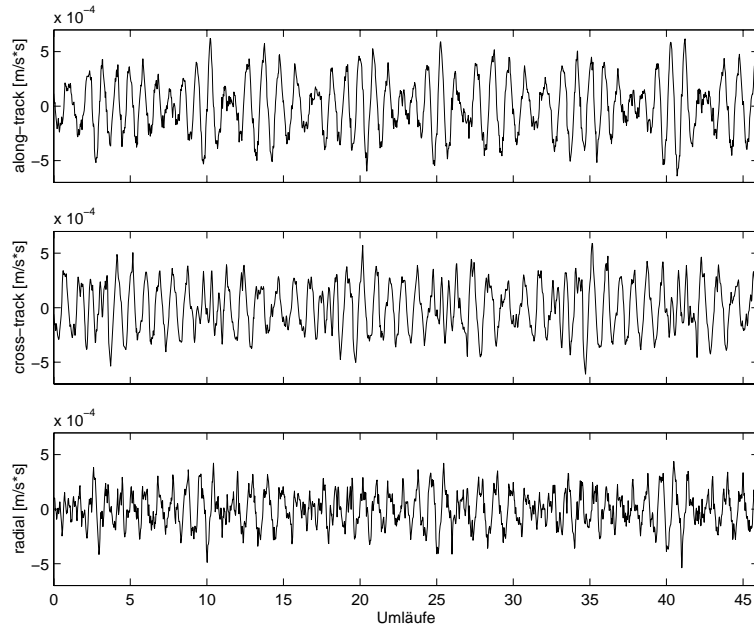


Abbildung 3.13.: *Störbeschleunigungen im bahnbegleitenden Dreibein, dominant die Orbitfrequenz.*

Bei den bisherigen Simulationen wurden deshalb die Koeffizienten der Ordnung 0 ausgeklammert (für die Simulation der Bahnstörungen zu Null gesetzt), bzw. bei der Schätzung aus Lumped Coefficients mit einer durch Interpolation geflickten Normalmatrix  $N_0$  zwar mitgeschätzt um Aliasing-Probleme zu verringern, dann jedoch in den Fehlerplots nicht mit dargestellt, um das Ergebnis nicht zu verfälschen.

Um die Probleme mit der Resonanz zu umgehen, soll an dieser Stelle noch ein Versuch der Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten aus simulierten Störbeschleunigungen durchgeführt werden. Diese weisen keine Singularitäten auf und ihre praktische Nutzbarkeit wurde bereits nachgewiesen (Gerlach, 2003), indem Störbeschleunigungen, die aus einer beobachteten Satellitenbahn über zweifache Differentiation der Bahnstörungen berechnet wurden, erfolgreich zur Schwerefeldbestimmung für den Satelliten CHAMP eingesetzt wurden.

Es sollen jedoch in diesem Abschnitt nicht noch einmal alle bisher vorgestellten Verfahren zur Closed-Loop-Simulation durchgespielt werden, sondern nur als Proof of Concept die Simulation von Störbeschleunigungen entlang der geschlossenen Kreisbahn und die Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten mittels 1D-FFT. Tatsächlich ändert sich im Vergleich zu Bahnstörungen nicht viel, es werden nur anstatt der  $\bar{H}_{l,m,k}^{dx}$  Transferkoeffizienten für Störbeschleunigungen  $\bar{H}_{l,m,k}^x$  verwendet, mit denen Lumped Coefficients der Störbeschleunigungen  $A_{m,k}^x, B_{m,k}^x$  berechnet werden. Die Synthese zu Zeitreihen so-



wie die Fourieranalyse und anschließende Zuweisung der Lumped Coefficients verlaufen völlig identisch zu Bahnstörungen.

In den nach Ordnungen getrennten Design-Matrizen  $A_m$  stehen nun allerdings die Transferkoeffizienten der Störbeschleunigungen  $\bar{H}_{l,m,k}^x$ , welche frei von Singularitäten sind. Das heißt, die Normalmatrizen  $N_m$  haben vollen Rang und können, bis auf generelle Probleme aufgrund der Schlechtgestellttheit des Problems (Schätzung des Schwerefeldes aus Bahnbeobachtungen, die durch die Entfernung des Satelliten von der Quelle des Schwerefeldes gedämpft und damit geglättet sind) invertiert werden.

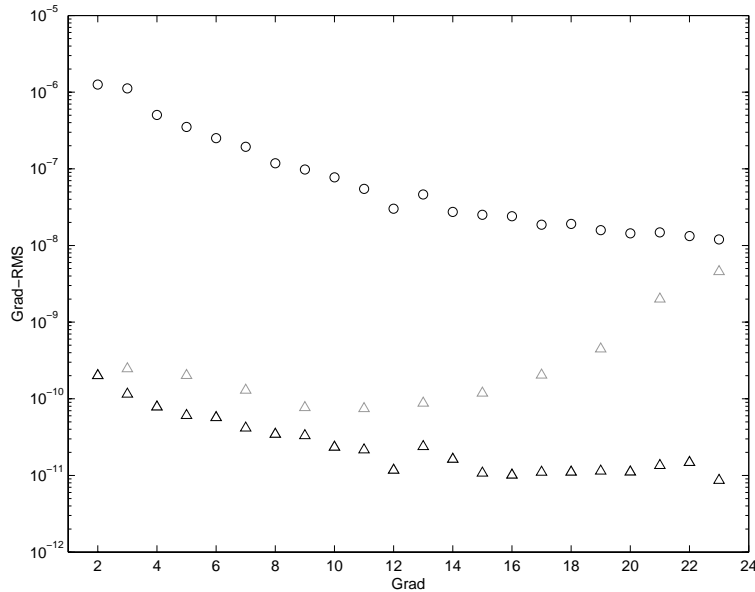


Abbildung 3.14.: *Grad-RMS des Eingangsschwerefeldes (o) und der Fehler nach Rekonstruktion mittels 1D-FFT auf einer Wiederholungsbahn (Δ), mit dem ursprünglich verwendeten Sampling (grau) und nach Verdoppelung der Samplingrate entlang der Bahn (schwarz).*

Störbeschleunigungen entlang der Bahn sind in Abb. 3.13 dargestellt, Abb. 3.14 zeigt wieder den Vergleich zwischen den Grad-RMS der originalen Koeffizienten und den Fehlern bei der Rekonstruktion. Interessanterweise lassen sich ungerade Koeffizienten bei dem bisher gewählten Sampling deutlich schlechter bestimmen, eine Halbierung des Samplingintervalls entlang der Bahn beseitigt dieses Problem jedoch vollständig (entlang der Bahn werden normalerweise sowieso deutlich dichtere Daten als benötigt vorliegen, da Positionsbestimmungen mit GPS im Abstand weniger Sekunden erfolgen können).

# 4. Analyse numerisch integrierter Satellitenorbits mit der Bahntheorie von Hill

## 4.1. Definition der Bahnstörungen

Bisher wurden verschiedene Methoden vorgestellt, mittels der Bahntheorie von Hill Bahnstörungen zu simulieren, aus denen danach das Schwerefeld wieder bestimmt wurde. Die praktisch fehlerfreie Rekonstruktion der Schwerefeldkoeffizienten diente uns dabei als „proof of concept“, als nächster Schritt steht die Auswertung beobachteter Satellitendaten bevor.

Gemäß der Vorgaben, die wir bei der Einführung der Bahntheorie gemacht haben, sollen nur durch das statische Schwerefeld der Erde gestörte Bahnen analysiert werden. Da der Reduktionsschritt von beobachteten zu rein gravitativ gestörten Bahnen im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht untersucht wurde, beschränken wir uns auf die Analyse numerisch integrierter Satellitenbahnen. Ein Vorteil dabei ist, daß das in die Integration eingegangene Schwerefeld bekannt ist und als Maß für die Rekonstruktionsgenauigkeit dienen kann. Zur Veranschaulichung soll im weiteren die numerisch integrierte Ausgangsbahn „beobachtete Bahn“ genannt werden.

Als Startbedingungen für die Integration wurden, wie schon für die Closed-Loop-Simulation, in Anlehnung an die ursprüngliche CHAMP-Bahn folgende Parameter gewählt:  $a_0 = 6838137m$ ,  $I_0 = 87.23^\circ$  und dazu eine kleine Exzentrizität von  $e = 0.015$ . Der Startpunkt der Bahn ist prinzipiell egal; um keine, bzw. nach einer Bahnanpassung nur möglichst kleine Phasenverschiebungen zu erhalten, seien ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$  und  $f_0$  zu Null gewählt. Als Schwerefeld geht das bei Grad  $L$  abgeschnittene EGM96S in die Integration ein.

Als erstes müssen die Bahnstörungen definiert werden. Dazu wird die Satellitenbahn von inertialen kartesischen Koordinaten in oskulierende Keplerelemente transformiert (siehe Anhang A1). Zur Bestimmung einer Referenzbahn aus oskulierenden Elementen hat Walter (1967) eine Iteration vorgestellt. Diese gilt unabhängig von der verwendeten Bahntheorie und wurde auch für Hill-Bahnen erfolgreich getestet. Allerdings geht sie davon aus, daß sich die Bahn mit Hilfe der verwendeten Theorie auch fehlerfrei darstellen

läßt. Dies ist in unserem Fall nicht gegeben, da die Hill-Gleichungen nur eine linearisierte Näherung der Bewegungsgleichungen darstellen, welche numerisch integriert zu unserer „beobachteten“ Bahn geführt haben.

Statt dessen führen wir eine optimal angepaßte, mittlere Kreisbahn ein, welche die Bahnstörungen minimiert. Diese wird durch Mittelung der oskulierenden Bahnelemente  $a$  und  $I$  bestimmt. Schon im vorhergehenden Kapitel wurde angesprochen, daß die Hill-Theorie ohne Einschränkungen auch für präzessierende Kreisbahnen verwendet werden kann. Deshalb schätzen wir für  $\Omega$  auch einen lineareren Trend.

Außerdem stellt sich heraus, daß die aus  $r = \bar{a}$  bestimmte mittlere Bewegung  $n$  die Satellitenbewegung entlang der Bahn nicht optimal annähert, von  $n$  leicht abweichend wird daher für Perigäumslage  $\omega$  und wahre Anomalie  $f$  eine lineare Bewegung geschätzt. Die Orbitfrequenzen ergeben sich also zu  $\dot{\Lambda} = \dot{\Omega} - \omega_E$  und  $\dot{u} = \dot{\omega} + \dot{f}$ . Für kreisnahe Bahnen (Exzentrizität  $e$  klein) ist es oft nicht mehr möglich,  $\omega$  und  $f$  getrennt zu bestimmen; in diesem Fall wird  $\dot{u}$  direkt geschätzt.

Damit ist die Referenz-Kreisbahn definiert, in inertialen kartesischen Koordinaten lautet sie

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = (R_3(u)R_1(I)R_3(\Omega))^T \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

mit  $I, r = \text{konst.}$ ,  $u = u_0 + \dot{u}t$  und  $\Omega = \Theta + \Lambda = \Theta_0 + \Lambda_0 + (\omega_E + \dot{\Lambda})t$ ;  $\Theta_0$  beschreibt die Orientierung der Erde zum Bogenbeginn. Die Bahnstörungen werden zuerst in inertialen Koordinaten bestimmt, indem die Kreisbahn von der beobachteten Bahn abgezogen wird. Dann werden sie mit Hilfe des Skalarproduktes in das bahnbegleitende Dreibein projiziert.

Die so erhaltenen Bahnstörungen enthalten jedoch noch nichtgravitative Anteile, z.B. durch eine leichte Exzentrizität der beobachteten Bahn verursacht, als auch resonante Störungen, die sich durch die spezielle Lösung der Hillgleichungen nicht darstellen lassen. Es wird daher eine Bahnanpassung über die Schätzung optimaler Anfangsbedingungen und resonanter Effekte nötig, wozu die homogene und resonante Lösung der Hillgleichungen verwendet werden. Allerdings lassen sich die beiden Effekte nicht getrennt behandeln, da sowohl die Exzentrizität als auch eine durch die Abplattung der Erde hervorgerufene Resonanz zu einer Schwingung auf Orbitfrequenz  $n$  führen. Sie werden deshalb gemeinsam mit der kompletten Lösung der Hillgleichungen bestimmt.

Zuerst werden die partiellen Ableitungen der kompletten Lösung nach den unbekanntenen Anfangsbedingungen  $\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0$  und den Amplituden der Störungen auf Null- und Orbitfre-

quenz  $A_0^x, A_n^x$  und  $B_n^x$  gebildet

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1; & \frac{\partial x}{\partial \dot{x}_0} = \frac{4}{n} \sin nt - 3t \\
\frac{\partial x}{\partial z_0} = 6(\sin nt - nt); & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} = \frac{2}{n}(\cos nt - 1) \\
\frac{\partial A_0^x}{\partial x} = -\frac{4}{n^2}(\cos nt - 1) - \frac{3}{2}t^2; & \frac{\partial A_0^z}{\partial x} = \frac{2}{n^2} \sin nt + \frac{2}{n}t \\
\frac{\partial A_n^x}{\partial x} = \frac{3}{n^2} \cos nt + \frac{2}{n}t \sin nt - \frac{3}{n^2}; & \frac{\partial B_n^x}{\partial x} = \frac{5}{n^2} \sin nt - \frac{2}{n}t \cos nt - \frac{3}{n}t \\
\frac{\partial A_n^z}{\partial x} = -\frac{1}{n^2} \sin nt + \frac{1}{n}t \cos nt; & \frac{\partial B_n^z}{\partial x} = \frac{2}{n^2} \cos nt + \frac{1}{n}t \sin nt - \frac{2}{n^2}t \\
\frac{\partial x}{\partial z} = 0; & \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial z} = -\frac{2}{n}(\cos nt - 1) \\
\frac{\partial z_0}{\partial z} = -3 \cos nt + 4; & \frac{\partial \dot{z}_0}{\partial z} = \frac{1}{n} \sin nt \\
\frac{\partial A_0^x}{\partial z} = -\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n}t; & \frac{\partial A_0^z}{\partial z} = -\frac{1}{n^2}(\cos nt - 1) \\
\frac{\partial A_n^x}{\partial z} = \frac{1}{n^2} \sin nt - \frac{1}{n}t \cos nt; & \frac{\partial B_n^x}{\partial z} = -\frac{2}{n^2} \cos nt - \frac{1}{n}t \sin nt + \frac{2}{n^2}t \\
\frac{\partial A_n^z}{\partial z} = \frac{1}{2n}t \sin nt; & \frac{\partial B_n^z}{\partial z} = \frac{1}{2n^2} \sin nt - \frac{1}{2n}t \cos nt \\
\frac{\partial y}{\partial y_0} = \cos nt; & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} = \frac{1}{n} \sin nt \\
\frac{\partial A_0^y}{\partial y} = -\frac{1}{n^2}(\cos nt - 1); & \frac{\partial A_n^y}{\partial y} = \frac{1}{2n}t \sin nt \\
\frac{\partial A_n^y}{\partial y} = \frac{1}{2n^2} \sin nt - \frac{1}{2n}t \cos nt. & 
\end{array}$$

Beobachtungen sind die Bahnstörungen im bahnbegleitenden Dreibein. Da radiale und along-track Störungen nicht unabhängig voneinander sind, müssen  $x$ - und  $z$ -Startbedingungen gemeinsam geschätzt werden, während  $y_0, \dot{y}_0$  aus cross-track Störungen alleine bestimmt werden können. Die Designmatrizen lauten

$$A_{xz} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} & \frac{\partial x}{\partial A_0^x} & \frac{\partial x}{\partial A_0^z} & \frac{\partial x}{\partial A_n^x} & \frac{\partial x}{\partial B_n^x} & \frac{\partial x}{\partial A_n^z} & \frac{\partial x}{\partial B_n^z} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0} & \frac{\partial z}{\partial A_0^x} & \frac{\partial z}{\partial A_0^z} & \frac{\partial z}{\partial A_n^x} & \frac{\partial z}{\partial B_n^x} & \frac{\partial z}{\partial A_n^z} & \frac{\partial z}{\partial B_n^z} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

bzw.

$$A_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y}{\partial A_0^y} & \frac{\partial y}{\partial A_n^y} & \frac{\partial y}{\partial B_n^y} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Eine Kleinste-Quadrate-Schätzung liefert für die unbekanntenen Anfangsbedingungen und resonanten Amplituden

$$(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0, A_0^x, A_0^z, A_n^x, B_n^x, A_n^z, B_n^z)^T = (A_{xz}^T A_{xz})^{-1} A_{xz}^T \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

bzw.

$$(y_0, \dot{y}_0, A_0^y, A_n^y, B_n^y)^T = (A_y^T A_y)^{-1} A_y^T y. \quad (4.6)$$

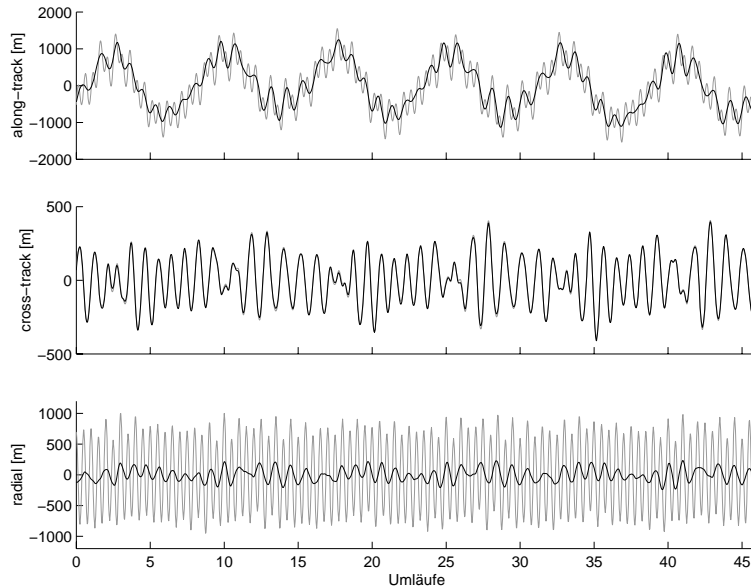


Abbildung 4.1.: *Bahnstörungen zwischen numerisch integriertem Orbit und angepaßter Kreisbahn nach Filterung homogener und resonanter Anteile (grau) und mit Hill simuliert (schwarz).*

Die so ermittelten Werte können in die komplette resonante Lösung der Hillgleichungen eingesetzt und die erhaltenen Störungen zur Kreisbahn zugeschlagen werden. Anstatt die Referenzbahn auf diese Weise anzupassen, bietet es sich jedoch an, die Korrekturen direkt von den Bahnstörungen im begleitenden Dreiein abzuziehen. In diesem Fall sprechen wir von einer Filterung der Bahnstörungen.

Abbildung 4.1 zeigt Bahnstörungszeitreihen in along-track, cross-track und radialer Richtung. Da die ungefilterten Störungen durch die Exzentrizität der beobachteten Bahn von einer Schwingung auf doppelter Orbitfrequenz dominiert werden, sind nur Störungen nach der Filterung dargestellt. Im Vergleich dazu sind die aus der speziellen Lösung der Hill-Gleichungen simulierten Werte gezeigt. Deutlich sind in along-track immer noch Abweichungen auf doppelter Orbitfrequenz sichtbar, die radialen Bahnstörungen haben nicht viel mit den durch die spezielle Lösung simulierten gemeinsam. Offensichtlich lassen sich die Effekte der Exzentrizität für along-track und radiale Störungen nicht vollständig durch die homogene und resonante Lösung darstellen. Zu einer besseren Anpassung müßten die von Kaula eingeführten Exzentrizitätsfunktionen  $G(e)$  (siehe (2.8)) verwendet werden, welche in den Hill-Gleichungen durch die kreisförmige Referenzbahn herausgefallen sind.

Außerdem fallen Linearisierungsfehler umso stärker ins Gewicht, je größer die beobachteten Bahnstörungen sind. Um kleinere Störungen zu erhalten, müssen wir mehr Vorwissen in die Näherungsbahn einfließen lassen. Wir führen deshalb einen Näherungsortbit ein,

der mit Hilfe eines Näherungsfeldes numerisch integrierten wurde. Unbekannt sind jetzt nur noch die kleinen Differenzen zwischen den beiden Schwerefeldern, wir betrachten also nur noch ein differentielles Problem, für das die lineare Theorie besser geeignet sein müßte.

Als Näherungsfeld diene uns OSU91 (Rapp et al., 1991) bis zum Grad  $L$ , die Startwerte der Integration entsprechen dem State-Vector des beobachteten Orbits zu einem beliebigen Zeitpunkt (nicht zu nah am Bogenbeginn, da die partiellen Ableitungen nach Anfangsbedingungen zur Anpassung der Näherungsbahn entlang des beobachteten Orbits integriert werden und zu den Integrationszeitpunkten die Position des Satelliten daher auf dieser Bahn interpoliert werden muß). Details zur Orbitintegration finden sich im Anhang B1.

Die Bahnstörungen werden wieder gebildet, indem die Differenzen der beiden Orbits in inertialen kartesischen Koordinaten in ein entlang des Näherungsortbits definiertes, bahnbegleitendes Dreibein projiziert werden. Da der Näherungsortbit nun jedoch kein Kreisorbit mehr ist, radiale und Flugrichtung des Satelliten also nicht mehr unbedingt senkrecht aufeinander stehen, muß man entscheiden, welche der beiden Richtungen streng beibehalten werden soll, während die andere das Dreibein rechtwinklig ergänzt. Hier soll die radiale Achse erhalten bleiben; Experimente haben ergeben, daß es sich bei der Wahl der Orientierung jedoch um keine für die Rekonstruktion des Schwerefeldes kritische Entscheidung handelt.

Die Referenz-Kreisbahn, auf der später die Transferkoeffizienten berechnet werden, wird optimal in den beobachteten Orbit eingepaßt. Dazu werden  $r$  und  $I$  wieder als Mittel der oskulierenden Elemente gewählt, für  $u$  und  $\Lambda$  wird jeweils ein linearer Trend mitgeschätzt. Da Näherungsbahn und Referenzbahn für die Hilltheorie nicht mehr übereinstimmen, die Transferkoeffizienten also nicht mehr am wahren Ort der auftretenden Bahnstörungen berechnet werden, kommt es zu Modellfehlern, die sich in einer fehlerhaften Design-Matrix  $A$  niederschlagen. Da die Bahnstörungen nun jedoch wesentlich kleiner sind, besteht die Hoffnung, diesen Fehlern durch Iteration abhelfen zu können.

Aus Konsistenzgründen müßte die Kreisbahn eigentlich aus der Näherungsbahn gemittelt und bei jeder Iteration neu bestimmt werden, dies führte jedoch bei Experimenten nicht zu besseren Ergebnissen oder schnellerer Konvergenz, wir ermitteln sie daher (genau wie die partiellen Ableitungen nach Anfangsbedingungen zur Bahnanpassung) nur einmal aus der beobachteten Bahn.

Damit die Bahnstörungen wirklich klein bleiben und nicht weglaufen, muß auch die mit einem Näherungsfeld numerisch integrierte Bahn an die beobachtete Bahn angepaßt werden. Dazu kann entweder, wie schon beschrieben, die komplette resonante Lösung der Hillgleichungen benutzt werden (in diesem Fall werden die Bahnstörungen gefiltert), oder es können durch Integration der Variationellen Gleichungen (siehe Anhang B2) die partiellen Ableitungen nach Anfangsbedingungen numerisch bestimmt und zur Bahnanpassung benutzt werden. Dieser Weg ist allerdings sehr zeitaufwendig, da die Integration

der partiellen Ableitungen sehr rechenintensiv ist.

Abbildung 4.2 zeigt along-track, cross-track und radiale Bahnstörungen zwischen beobachteter und mit einem Näherungsfeld integrierter Bahn, bevor und nachdem sie mit der kompletten resonanten Lösung der Hillgleichungen gefiltert wurden. In along-track laufen die unangepaßten Bahnen am stärksten auseinander, was sich vor einer Filterung auch in der Phasenlage der radialen Störungen gegen Bogenende bemerkbar macht. Zum Vergleich die auf der Referenz-Kreisbahn simulierte speziellen Bahnstörungen nach Hill, aus denen die Schwerefeldkoeffizienten der Differenz zwischen EGM96S und dem als Näherungsfeld verwendeten OSU91A perfekt rekonstruiert werden könnten. Nach der Filterung passen die Störungen gut überein.

Auf Abb. 4.3 sind im Gegensatz dazu die Bahnstörungen zu sehen, welche nach einer Anpassung der Näherungsbahn über numerisch integrierte Ableitungen nach Anfangsbedingungen gebildet wurden. Die RMS-Werte der Residuen zwischen gefilterten und simulierten Bahnstörungen betragen 2.54 m in along-track, 0.53 m in cross-track und 1.08 m in radialer Richtung. Jene aus der angepaßten Bahn sind etwas kleiner, nämlich 2.44 m in along-track, 0.23 m in cross-track und 0.42 m in radialer Richtung. Im folgenden Abschnitt sollen beide Varianten beispielhaft anhand eines einzelnen Koeffizienten im Spektralbereich untersucht und verglichen werden.

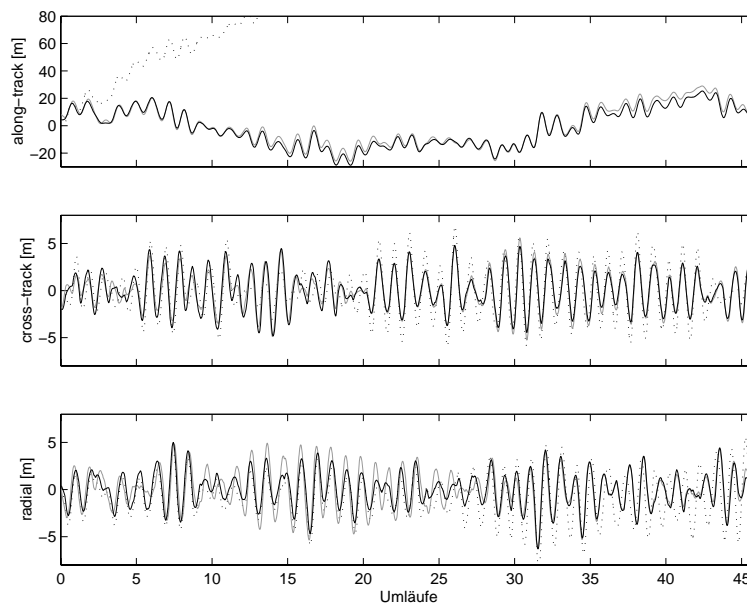


Abbildung 4.2.: *Bahnstörungen zwischen beobachteter und Näherungsbahn ungefiltert (gepunktet), nach Filterung mit der kompletten resonanten Lösung der Hillgleichungen (grau) und aus deren spezieller Lösung simuliert (schwarz).*

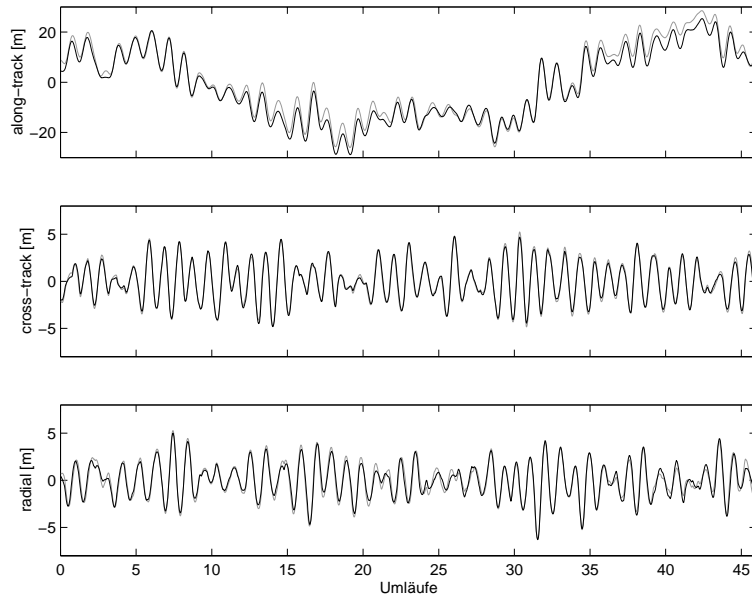


Abbildung 4.3.: Bahnstörungen zwischen beobachteter und angepaßter Näherungsbahn (grau) und aus der speziellen Lösung der Hill-Gleichungen simuliert (schwarz).

## 4.2. Spektralanalyse der Bahnstörungen

Im Kapitel „Closed-Loop-Simulation“ wurden mehrere Ansätze vorgestellt, aus Bahnstörungszeitreihen in einem bahnbegleitenden Dreibein Schwerefeldkoeffizienten zu schätzen. Besonders effizient waren dabei diejenigen Methoden, welche auf Fourieranalyse der Zeitreihen (für Wiederholungsbahnen) oder der Bahnstörungen auf einem Torus (für nicht schließende Bahnen) beruhen.

Mit dem Idealfall exakt geschlossener Bahnen können wir im allgemeinen nicht rechnen, der Torusansatz für offene Bahnen stößt jedoch, wie wir bei der Analyse beobachteter (bzw. numerisch integrierter) Bahnen etwas später in diesem Kapitel sehen werden, auf Probleme.

Als gangbarer Kompromiß hat sich die Anwendung der eindimensionalen Fourieranalyse auf annähernd geschlossene Bahnen erwiesen, bei der die Unstetigkeit, welche durch periodische Fortsetzung der Zeitreihen entstehen würde, durch ein beidseitig auf Null abfallendes Fenster geglättet wird (Meyer, 1998).

Als Fenster wurde ein symmetrisches Hanning-Fenster (Abb. 4.4) gewählt. Durch seine Spiegelsymmetrie verändert es die Phasenlage des Spektrums nicht. Das Fenster überspannt die komplette Wiederholperiode der Zeitreihe. Damit die Amplituden der Maxima des resultierenden Spektrums möglichst unverfälscht erhalten bleiben, wird es mit der



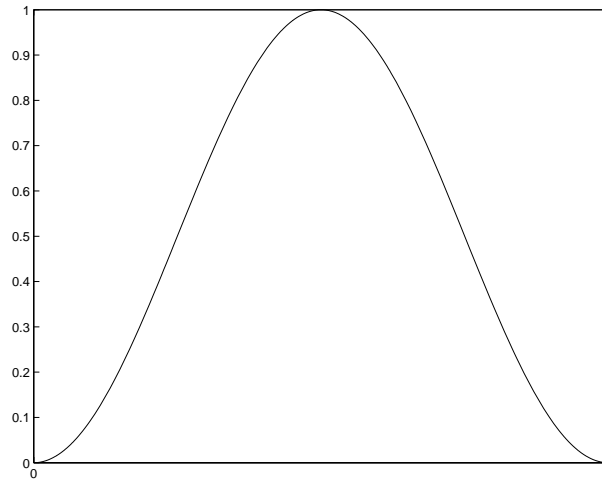


Abbildung 4.4.: *Symmetrisch zu Null abfallendes Hanning-Fenster.*

Summe über alle Fensterkoeffizienten normiert. Vor der Multiplikation der Zeitreihe mit dem Fenster wird noch ein linearer Trend abgezogen, der die Zeitreihe um Null zentriert.

Diese Vorbehandlung der Bahnstörungen erscheint vertretbar, solange keine nichtkonservativen Störkräfte auftreten, welche zu einer kontinuierlichen Absenkung der Bahn führen würden. Da wir uns jedoch, wie zu Beginn des Abschnitt 2.1 erläutert, auf durch den statischen Anteil des Erdschwerefeldes rein gravitativ gestörte Bahnen beschränken wollen, stellt diese Bedingung keine weitere Einschränkung dar.

Um zuerst die im vorigen Abschnitt aufgeworfene Frage nach der günstigsten Behandlung nichtperiodischer Störanteile (Berücksichtigung homogener und resonanter Störeffekte durch Filterung der Bahnstörungen mit der kompletten resonanten Lösung der Hillgleichungen oder Schätzung optimaler Anfangsbedingungen über numerisch integrierte partielle Ableitungen) zu beantworten, werden an dieser Stelle vorerst nur Störungen eines einzelnen Koeffizienten mittels gefensterter Fouriertransformation in den Spektralbereich transformiert und dort untersucht.

Als Beispielkoeffizient diene uns  $\bar{C}_{4,3}$ , als beobachtete Bahn ein Tagesbogen mit 30s-Sampling, welcher aus EGM96S bis Grad und Ordnung 5 integriert wurde. Die Anfangsbedingungen wurden dem vorhergehenden Abschnitt entliehen. Als Näherung sei  $\bar{C}'_{4,3}$  mit einem zehnprozentigen Fehler  $\Delta\bar{C}_{4,3} = 0.1 \cdot \bar{C}_{4,3}$  gegeben, der Rest des Näherungsfeldes stimme mit dem Originalfeld überein.

Die Näherungsbahn beginne 120s nach der beobachteten Bahn, damit bei der Integration der partiellen Ableitungen nach den Anfangsbedingungen der Näherungsbahn, welche entlang des beobachteten Orbits durchgeführt wird, für die Interpolation des Integrationsortes mit einem Lagrange-6 Punkt-Verfahren von Anfang an genug Stützstellen zur

Verfügung stehen. Ihre Anfangsbedingungen entsprechen dem State-Vektor des Satelliten zum Zeitpunkt  $t = 120s$ .

Nun werden zum Einen die Differenzen zwischen beobachteter und unangepaßter Näherungsbahn in inertialen Koordinaten gebildet und in ein die Näherungsbahn in radialer Ausrichtung begleitendes Dreibein projiziert, die komplette resonante Lösung der Hillgleichungen über Anfangsbedingungen und Amplituden der resonanten Störungen an die Bahnstörungen angepaßt und danach von diesen abgezogen. Es bleiben gefilterte Zeitreihen übrig, die im Idealfall nur noch eine periodische Störung durch  $\Delta\bar{C}_{4,3}$  enthalten sollten.

Zum Anderen werden die Variationellen Gleichungen entlang der beobachteten Bahn ab dem Anfangszeitpunkt der Näherungsbahn integriert und dadurch partielle Ableitungen nach den Anfangsbedingungen erhalten. Mit diesen wird die Näherungsbahn an die beobachtete Bahn angepaßt, die auf diese Weise minimierten Differenzen gebildet und in ein die angepaßte Näherungsbahn begleitendes Dreibein transformiert. Auch diese Bahnstörungen sollten nur noch den Einfluß von  $\Delta\bar{C}_{4,3}$  enthalten.

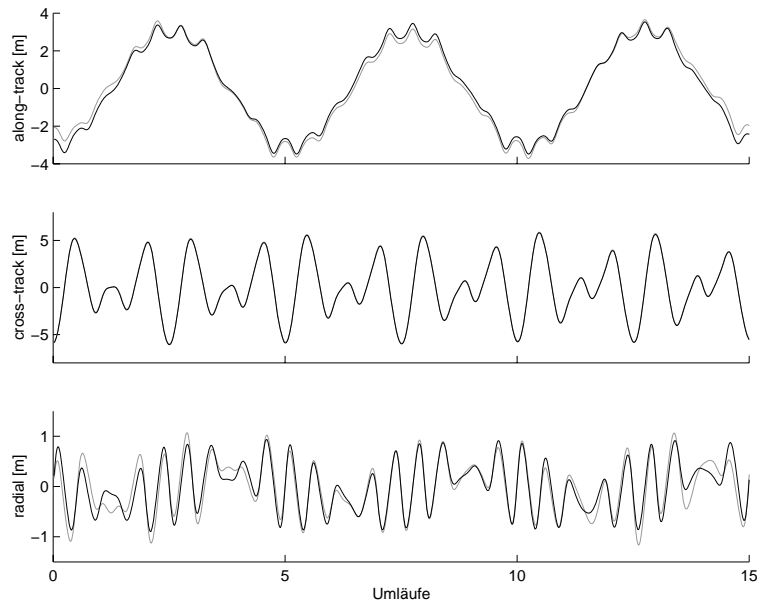


Abbildung 4.5.: *Mit der kompletten resonanten Lösung der Hill-Gleichungen gefilterte (grau) und über Anfangsbedingungen der Näherungsbahn angepaßte (schwarz) Bahnstörungen von  $\Delta\bar{C}_{4,3}$ .*

Beide Bahnstörungenzeitreihen sind vergleichend in Abb. 4.5 dargestellt. In den along-track Zeitreihen sind dominant die m-dayly Störungen erkennbar, des weiteren ist in allen drei Koordinaten eine Schwingung auf Orbitfrequenz (etwa 15 Umläufe pro Tag) oder doppelter Orbitfrequenz sichtbar. Die nach den unterschiedlichen Verfahren produzierten

Zeitreihen passen jeweils recht gut überein.

Nun werden sowohl gefilterte, als auch über Bahnanpassung entstandene Störungen durch eine gefensterte Fouriertransformation in den Spektralbereich transformiert. Da nur durch  $\Delta\bar{C}_{4,3}$  verursachte Störungen von Interesse sind, reicht die Analyse der in einem Tagesbogen enthaltenen 15 Umläufe. Außerdem kann bei Störung durch einen einzelnen Koeffizienten die Phasenlage vernachlässigt werden und wir beschränken uns deshalb auf Betrachtung der Amplitudenspektren, welche in Abb. 4.6 jeweils für alle drei Störungsrichtungen dargestellt sind.

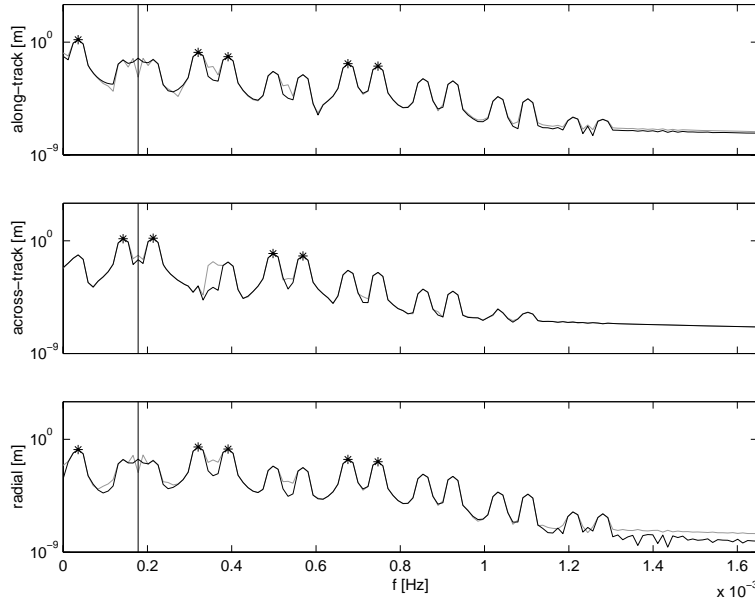


Abbildung 4.6.: *Spektren der gefensterten Bahnstörungszeitreihen, gefiltert (grau) bzw. angepaßt (schwarz). Mit Sternchen sind die Soll-Amplituden von  $\Delta\bar{C}_{4,3}$  nach Hill markiert. Außerdem ist die Orbitfrequenz  $n$  gekennzeichnet.*

Wie aus dem Kapitel zur Closed-Loop-Simulation bekannt, lassen sich den Fourierkoeffizienten der Zeitreihen Lumped Coefficients der Bahnstörungen nach Hill zuordnen. Es können also über Transferkoeffizienten Sollamplituden für die Störungen durch  $\Delta\bar{C}_{4,3}$  berechnet werden. Dazu wird eine mittlere, präzisierende Referenz-Kreisbahn an die beobachtete Bahn geschätzt, auf der die Transferkoeffizienten für Grad 4 und Ordnung 3 berechnet werden.

Die Störfrequenzen erhält man aus den mittleren Orbitfrequenzen laut Hill als  $\dot{\psi}_{m,k} = k\dot{u} + m\dot{\Lambda}$  mit  $m = 3$  und  $k = -5\dots 5$  über alle Grade des in die Bahnrechnung eingegangenen Schwerefeldes laufend. Die zugehörigen Lumped Coefficients ergeben sich aus

$$A_{4,3}^{dx} = \bar{H}_{4,3,k}^{dx} \Delta\bar{C}_{4,3}.$$

Da nur ein einziger Koeffizient des Grades 4 untersucht werden soll, entfällt hier die Summation über weitere Grade, die Lumped Coefficients sind also eigentlich nicht „lumped“. Dies ist der Grund, warum eine einfache Betrachtung des Amplitudenspektrums in diesem Fall ausreicht.

In den Spektren der Bahnstörungen wurden die so erhaltenen Sollamplituden durch Sternchen markiert, die Orbitfrequenz durch einen senkrechten Strich. Beide Spektren passen auf den interessierenden Frequenzen gut mit der Hill-Theorie überein. Greift man die Amplituden aus den Spektren ab und schätzt aus ihnen über Transferkoeffizienten, welche auf der an die beobachtete Bahn angepaßten Kreisbahn berechnet wurden, das unbekannte  $\Delta \bar{C}_{4,3}$ , so läßt es sich aus allen drei Störungsrichtungen und mit beiden Spektren jeweils auf 0.1 bis 0.3% bestimmen. Beide Methoden scheinen also vorerst zur Vorbehandlung der Bahnstörungen geeignet.

Zwei weitere Dinge fallen bei Betrachtung der Spektren auf. Einmal, wie schon bei der Closed-Loop-Simulation beschrieben, die für  $l - k$  gerade (im Fall von x- und z-Störungen), bzw.  $l - k$  ungerade (bei y-Störungen) verschwindenden Transferkoeffizienten, die sich mangels Summation über  $l$  hier direkt in fehlenden Lumped Coefficients ausdrücken, andererseits das doch bedeutend vollere Spektrum aus der Fourieranalyse der Zeitreihen, als mit Hill vorausgesagt.

Das vollere Spektrum hat mehrere Ursachen. Durch die Fensterung wird zwar ein Sprung in der Zeitreihe verhindert, dennoch steigt das Rauschniveau des Spektrums deutlich an. Nach Sneeuw (2000) führt außerdem die leichte Exzentrizität des Orbits zu weiteren Spektrallinien um die gewünschten  $\dot{\psi}_{m,k}$ .

Da wir zur Schätzung von Schwerefeldkoeffizienten aus dem Spektrum der Bahnstörungszeitreihen nur die Amplituden auf den über die geschätzten Orbitfrequenzen bestimmten Störfrequenzen abgreifen und den Rest des Spektrums ignorieren, stört das vollere Spektrum uns nicht weiter.

### **4.3. Vergleich numerisch und analytisch bestimmter Ableitungen**

Im Abschnitt 4.1 wurde deutlich, daß sich mit Hilfe der Hilltheorie längere Bahnbögen niedrigfliegender Satelliten nur unzureichend berechnen lassen. Deshalb sind wir auf die Beschreibung differentieller Störungen zwischen der beobachteten und einer numerisch integrierten Näherungsbahn ausgewichen.

Der Zusammenhang der Differenzkoeffizienten zwischen originalem und Näherungsschwerefeld mit den aus diesen Koeffizienten resultierenden Bahnstörungen wird durch partielle Ableitungen der Bahnörter nach Schwerefeldkoeffizienten gegeben. Diese könnten parallel zur Integration der Variationellen Gleichungen mitintegriert werden (Anhang 2B), der große Rechenaufwand ist jedoch eines der Argumente für die Verwendung einer

analytischen Bahntheorie, wie der hier untersuchten von Hill.

Zu Testzwecken sollen sie an dieser Stelle dennoch für den schon im vorigen Abschnitt ausgewählten Koeffizienten  $\bar{C}_{4,3}$  berechnet werden. Vor einem Vergleich mit den partiellen Ableitungen nach Hill muß allerdings noch ein Weg gefunden werden, die im inertialen System gegebenen numerisch integrierten Ableitungen ins bahnbegleitende System der Hill-Ableitungen zu transformieren.

Gehen wir von der Transformation für die Satellitenposition

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = (R_3(u)R_1(I)R_3(\Omega))^T \left[ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \right] = (PR)^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+r \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\text{mit } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aus, so fällt ein prinzipielles Problem auf. Inertiale (oder erdfeste) Koordinaten erhält man aus der Summe der Näherungsbahn  $(PR)^T(0, 0, r)^T$  und der transformierten Bahnstörungen  $(PR)^T(x, y, z)^T$ . Die Bahnstörungen nach Hill beziehen sich immer auf eine Näherungsbahn, die partiellen Ableitungen werden auf einer Referenzbahn berechnet, welche dieser möglichst entspricht. Dabei gelten Gleichungen (3.1) bis (3.6) universell, es ist nicht unbedingt notwendig, daß die Referenzbahn eine Kreisbahn ist ( $r, I, \dot{u}$  und  $\dot{\Lambda}$  sind in diesem Fall eben nicht konstant).

Auch die numerisch integrierten partiellen Ableitungen werden auf einer Referenzbahn berechnet (im Abschnitt 4.1 wurde dafür die beobachtete Bahn vorgeschlagen). Ein Vergleich der Ableitungen numerisch gegen Hill ist nur sinnvoll, wenn sich die Referenzbahnen entsprechen. Eine Transformation der Ableitungen auf eine andere Bahn ist nicht möglich.

Bei identischer Referenzbahn lassen sich die partiellen Ableitungen nach Schwerefeldkoeffizienten gemäß

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial K} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_i} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial K} = PR \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial K} \quad (4.10)$$

ineinander überführen.

Will man auch die partiellen Ableitungen nach Anfangsbedingungen vergleichen, so benötigt man dazu zusätzlich die Transformation für die Satellitengeschwindigkeit zwischen inertialem und bahnbegleitendem System

$$\dot{\underline{x}}_i = (P\dot{R})^T \underline{r} + (PR)^T \dot{\underline{r}} + (P\dot{R})^T \underline{x} + (PR)^T \dot{\underline{x}} \quad (4.11)$$

$$\text{mit } \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Wieder gleiche Referenzbahnen vorausgesetzt, ergibt sich für die partiellen Ableitungen nach Anfangspositionen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_0} &= \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_i} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_{0i}} \frac{\partial \underline{x}_{0i}}{\partial \underline{x}_0} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_i} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0i}} \frac{\partial \dot{\underline{x}}_{0i}}{\partial \underline{x}_0} \\ &= PR \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_{0i}} (PR_0)^T + PR \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0i}} (P\dot{R}_0)^T\end{aligned}\quad (4.13)$$

und entsprechend für Anfangsgeschwindigkeiten

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \dot{\underline{x}}_0} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_i} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0i}} \frac{\partial \dot{\underline{x}}_{0i}}{\partial \dot{\underline{x}}_0} = PR \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0i}} (PR_0)^T. \quad (4.14)$$

$R_0$  bezeichnet die Rotationsmatrix,  $\dot{R}_0$  deren Zeitableitung, jeweils zu Bogenbeginn.

Die Geschwindigkeit des Satelliten  $\dot{\underline{x}}$  im bahnbegleitenden Dreibein erhält man nach Hill durch Ableitung der kompletten resonanten Lösung der Hillgleichungen (2.34) bis (2.36) nach der Zeit. Diese ist recht einfach zu bilden, da  $t$  nur linear, quadratisch oder in sin- und cos-Funktionen auftaucht. Man behalte jedoch in Erinnerung, daß es sich dabei nur um die Geschwindigkeit des Satelliten relativ zum Ursprung des bahnbegleitenden Dreibeins handelt, welcher selbst ungefähr mit  $rn$  um die Erde kreist.

Die partiellen Ableitungen der Satellitenposition im bahnbegleitenden Dreibein nach den Anfangsbedingungen  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_0}$  und  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \dot{\underline{x}}_0}$  erhält man ebenfalls aus der kompletten resonanten Lösung der Hillgleichungen. Sie lauten

$$\begin{array}{lll}\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 & ; & \frac{\partial x}{\partial y_0} = 0 & ; & \frac{\partial x}{\partial z_0} = 6 \sin nt - 6nt \\ \frac{\partial x}{\partial \dot{x}_0} = \frac{4}{n} \sin nt - 3t & ; & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} = 0 & ; & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} = \frac{2}{n} \cos nt - \frac{2}{n} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} = 0 & ; & \frac{\partial y}{\partial y_0} = \cos nt & ; & \frac{\partial y}{\partial z_0} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \dot{x}_0} = 0 & ; & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} = \frac{1}{n} \sin nt & ; & \frac{\partial y}{\partial \dot{z}_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} = 0 & ; & \frac{\partial z}{\partial y_0} = 0 & ; & \frac{\partial z}{\partial z_0} = -3 \cos nt + 4 \\ \frac{\partial z}{\partial \dot{x}_0} = -\frac{2}{n} \cos nt + \frac{2}{n} & ; & \frac{\partial z}{\partial \dot{y}_0} = 0 & ; & \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0} = \frac{1}{n} \sin nt.\end{array}$$

Die komplette resonante Lösung der Hillgleichungen liefert auch für die Ableitungen der Bahnstörungen nach Schwerefeldkoeffizienten (3.1) bis (3.6), welche nur aus der speziellen Lösung entstanden sind, noch Zuschläge. Diese werden analog zu den partiellen Ableitungen der speziellen Lösung aus der kompletten resonanten Lösung gebildet. Für nichtresonante Schwerefeldkoeffizienten ergibt sich durch Hinzunahme der homogenen Lösung für

$l - m$  gerade:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{\partial x_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} - \sum_{k=-l}^l \left( \frac{2n(l+1) - 4k\dot{\psi}_{m,k}}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin(nt) - \frac{3k}{\dot{\psi}_{m,k}} \right) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I) \\ \frac{\partial x}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{\partial x_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \left( \frac{2\dot{\psi}_{m,k}(l+1) - 4kn}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \cos(nt) + \frac{2\dot{\psi}_{m,k}(l+1) - 3kn}{n\dot{\psi}_{m,k}} \right) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I) \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{\partial y_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} - \sum_{k=-l}^l \frac{-\dot{\psi}_{m,k}}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin(nt) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}^\times(I) \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{\partial y_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \frac{-1}{n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2} \cos(nt) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}^\times(I) \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{\partial z_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \left( \frac{n(l+1) - 2k\dot{\psi}_{m,k}}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \cos(nt) - \frac{2k}{n\dot{\psi}_{m,k}} \right) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I) \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{\partial z_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \frac{\dot{\psi}_{m,k}(l+1) - 2kn}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin(nt) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I),\end{aligned}$$

$l - m$  ungerade:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{\partial x_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \left( \frac{2\dot{\psi}_{m,k}(l+1) - 4kn}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \cos(nt) + \frac{2\dot{\psi}_{m,k}(l+1) - 3kn}{n\dot{\psi}_{m,k}} \right) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I) \\ \frac{\partial x}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{\partial x_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \left( \frac{2n(l+1) - 4k\dot{\psi}_{m,k}}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin(nt) - \frac{3k}{\dot{\psi}_{m,k}} \right) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I) \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{\partial y_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \frac{-1}{n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2} \cos(nt) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}^\times(I) \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{\partial y_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \frac{-\dot{\psi}_{m,k}}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin(nt) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}^\times(I) \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{\partial z_p}{\partial \bar{C}_{l,m}} + \sum_{k=-l}^l \frac{\dot{\psi}_{m,k}(l+1) - 2kn}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \sin(nt) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I) \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{\partial z_p}{\partial \bar{S}_{l,m}} - \sum_{k=-l}^l \left( \frac{n(l+1) - 2k\dot{\psi}_{m,k}}{n(n^2 - \dot{\psi}_{m,k}^2)} \cos(nt) - \frac{2k}{n\dot{\psi}_{m,k}} \right) \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \bar{F}_{l,m,k}(I).\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die partiellen Ableitungen nach resonanten Schwerefeldkoeffizienten gegeben, obwohl unser Testkoeffizient  $\bar{C}_{4,3}$  auf den gewählten Bahnen kein Resonanzverhalten zeigt. Für Wiederholbahnen mit Wiederholffrequenz  $\frac{\beta}{\alpha}$  wird Resonanz auf der Nullfrequenz mit  $m = h\beta$ ,  $k = h\alpha$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$  erreicht, Resonanz auf Eigenfrequenz mit  $m = h\beta$  und  $k = h\alpha + 1$ . Für nicht schließende Bahnen gelten obige Kombinationen nur für  $h = 0$  (siehe Abschnitt 2.4). Es ergeben sich für

$l - m$  gerade:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_r}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(3 + 3h\alpha)nt + (1 - l + 2h\alpha)nt \cos(nt) - (4 - l + 5h\alpha) \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(l+1)nt - (l+1) \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right) \\
\frac{\partial x_r}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(1 - 2l + 3h\alpha)(\cos(nt) - 1) + (1 - l + 2h\alpha)nt \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{8h\alpha(1 - \cos(nt)) - 3h\alpha n^2 t^2}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right) \\
\frac{\partial y_r}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \frac{nt \cos(nt) - \sin(nt)}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}^\times(I) \\
\frac{\partial y_r}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{t \sin(nt)}{2n} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}^\times(I) + \frac{1 - \cos(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}^\times(I) \right) \\
\frac{\partial z_r}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(1 - l + 2h\alpha)nt \sin(nt) - (4 + 4h\alpha)(1 - \cos(nt))}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(l+1)(1 - \cos(nt))}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right) \\
\frac{\partial z_r}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(1 - l - 2h\alpha) \sin(nt) - (1 - l + 2h\alpha)nt \cos(nt)}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2h\alpha nt - h\alpha \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right)
\end{aligned}$$

$l - m$  ungerade:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_r}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(1 - 2l + 3h\alpha)(\cos(nt) - 1) + (1 - l + 2h\alpha)nt \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{8h\alpha(1 - \cos(nt)) - 3h\alpha n^2 t^2}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right) \\
\frac{\partial x_r}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= -\frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(3 + 3h\alpha)nt + (1 - l + 2h\alpha)nt \cos(nt) - (4 - l + 5h\alpha) \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(l+1)nt - (l+1) \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right) \\
\frac{\partial y_r}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{t \sin(nt)}{2n} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}^\times(I) + \frac{1 - \cos(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}^\times(I) \right) \\
\frac{\partial y_r}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= -\frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \frac{nt \cos(nt) - \sin(nt)}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}^\times(I) \\
\frac{\partial z_r}{\partial \bar{C}_{l,m}} &= \frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(1 - l - 2h\alpha) \sin(nt) - (1 - l + 2h\alpha)nt \cos(nt)}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2h\alpha nt - h\alpha \sin(nt)}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right) \\
\frac{\partial z_r}{\partial \bar{S}_{l,m}} &= -\frac{GM}{a_E^2} \left( \frac{a_E}{r} \right)^{l+2} \left( \frac{(1 - l + 2h\alpha)nt \sin(nt) - (4 + 4h\alpha)(1 - \cos(nt))}{2n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha+1}(I) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(l+1)(1 - \cos(nt))}{n^2} \bar{F}_{l,h\beta,h\alpha}(I) \right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir das Instrumentarium zusammen, um numerisch integrierte Ableitungen nach Schwerefeldkoeffizienten und Anfangsbedingungen in ein bahnbegleitendes Dreibein



zu transformieren und dort mit Ableitungen aus der Hilltheorie zu vergleichen. Und zwar einerseits mit Ableitungen aus der kompletten resonanten Lösung der Hillgleichungen, andererseits mit Ableitungen, welche nur aus der nichtresonanten speziellen Lösung der Hillgleichungen entstanden sind, welche für unsere Schwerefeldanalyse benutzt werden soll.

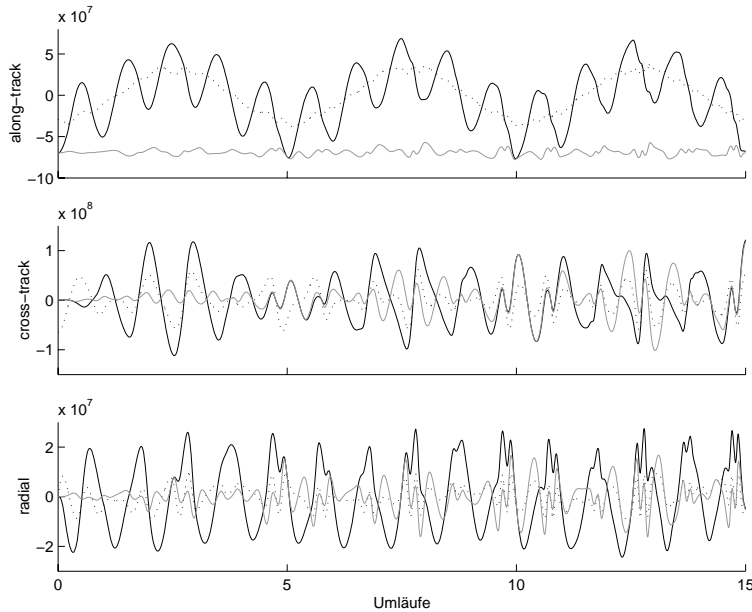


Abbildung 4.7.: Partielle Ableitungen nach  $\bar{C}_{4,3}$  entlang einer numerisch integrierten Näherungsbahn im bahnbegleitenden Dreibein. Gepunktet aus der speziellen Lösung der Hill-Gleichungen, durchgezogen schwarz aus der kompletten Lösung und grau die Differenz letzterer zu numerisch aus den Variationellen Gleichungen integrierten Ableitungen.

Voraussetzung für diese Vergleiche ist, daß die Referenzbahnen, auf denen die partiellen Ableitungen integriert, bzw. nach Hill analytisch berechnet wurden, miteinander identisch sind. Es bieten sich daher zwei Szenarien an: einerseits Integration auf einer beliebigen Näherungsbahn an die beobachtete Bahn; die in die Berechnung der Hill-Ableitungen eingehenden Orbitparameter  $r, I, \dot{u}$  und  $\dot{\Lambda}$  sind in diesem Fall nicht konstant. Abbildung 4.7 zeigt die Ergebnisse entlang einer an die beobachtete Bahn bereits angepaßten Näherungsbahn. Die Ableitungen nach Hill zeigen besonders in cross-track und radialer Richtung schon nach wenigen Umläufen starke Unregelmäßigkeiten. Die Differenzen zu numerisch integrierten Ableitungen erreichen bereits nach einem knappen Tag Ausschläge in Größenordnung der Ableitungen selbst. Along-track bleiben die Differenzen kleiner, jedoch ist von Anfang an ein recht konstanter Bias erkennbar.

Andererseits die Integration der partiellen Ableitungen auf einer präzessierenden, mittleren Kreisbahn, auf der auch die Transferkoeffizienten nach Hill berechnet würden (Abb.

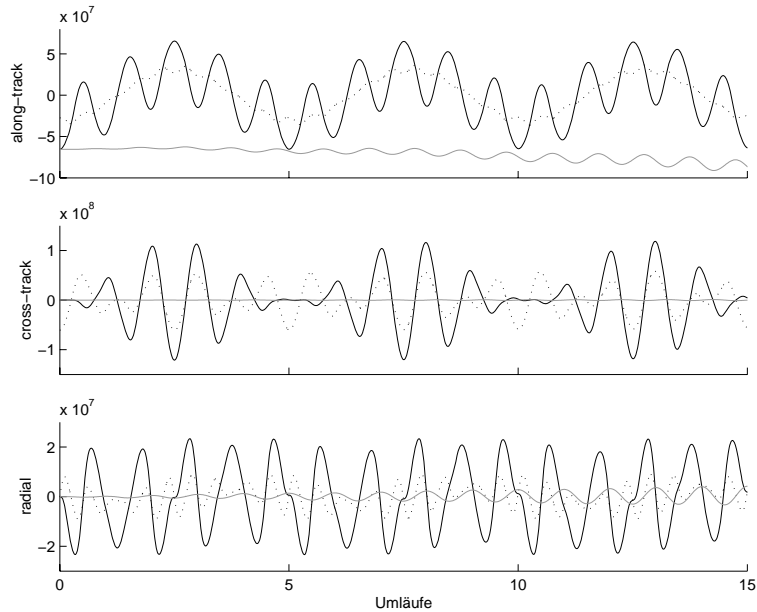


Abbildung 4.8.: Partielle Ableitungen nach  $\bar{C}_{4,3}$  entlang einer mittleren Kreisbahn. Gepunktet wieder aus der speziellen Lösung der Hill-Gleichungen, durchgezogen schwarz aus der kompletten Lösung und grau die Differenz letzterer zu numerisch integrierten Ableitungen.

4.8). Der Verlauf der Ableitungen nach Hill ist wesentlich ruhiger, die Differenz zu numerisch integrierten Ableitungen für cross-track sehr gering. Along-track und radial schwelen die Differenzen im Tagesverlauf sichtbar an, in along-track macht sich außer dem schon beobachteten Bias auch eine Drift bemerkbar, die auf dem Unterschied zwischen der aus  $u$  geschätzten mittleren Bewegung  $\dot{u}$  (welche durch  $\bar{C}_{2,0}$  beeinflusst wird) und der über den Radius der Kreisbahn berechneten  $n$  beruhen dürfte. Auf jeden Fall scheint die Berechnung der Hill-Ableitungen auf einer mittleren Kreisbahn wesentlich bessere Ergebnisse zu erzielen, als auf einer numerisch integrierten Näherungsbahn.

Als letztes sollen noch die partiellen Ableitungen nach Anfangsposition (Abb. 4.9) und Anfangsgeschwindigkeit (Abb. 4.10) entlang der mittleren Kreisbahn verglichen werden. Markant wird die starke Abhängigkeit der Satellitengeschwindigkeit von der Bahnhöhe in  $\frac{\partial x}{\partial z_0}$  sichtbar. Auch eine Drift in den numerisch integrierten Ableitungen, welche auf die Differenz zwischen  $n$  und  $\dot{u}$  zurückzuführen sein dürfte, ist wieder in mehreren Fällen zu beobachten. Insgesamt ergibt sich jedoch eine gute Übereinstimmung zwischen numerisch integrierten und analytisch berechneten Ableitungen.

Zu erwähnen ist noch, daß neben dem Einfluß der Bahnhöhe auf die Satellitengeschwindigkeit der deutlichste Effekt eine Schwingung auf Orbitfrequenz in along-track und radialer Richtung ist. Dies entspricht dem Bild einer leichten Exzentrizität der Bahn. Im

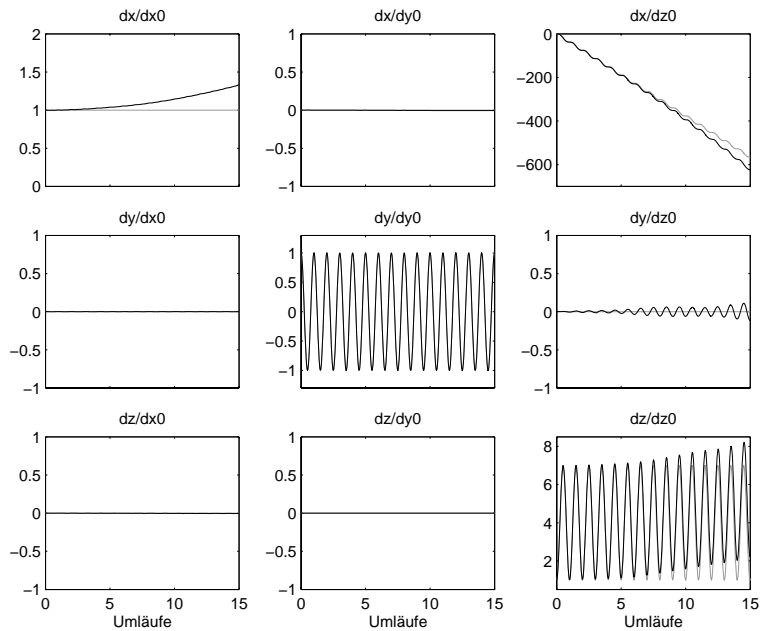


Abbildung 4.9.: Partielle Ableitungen nach  $\underline{x}_0$  entlang einer mittleren Kreisbahn. Grau aus der kompletten Lösung der Hill-Gleichungen, schwarz aus numerischer Integration.

Umkehrschluß ist daher zu vermuten, daß der störende Einfluß einer kleinen Exzentrizität durch Schätzung von Anfangsbedingungen aus den Bahnstörungen entfernt werden kann, die Hill-Theorie also durchaus auch für leicht exzentrische Bahnen anwendbar sein sollte.

Die letzten drei Abschnitte zusammenfassend kann man feststellen, daß wir mit den Hill-Gleichungen in der Lage sind, differentielle Bahnstörungen zwischen einer numerisch angepaßten Näherungsbahn und einer rein gravitativ gestörten beobachteten Bahn (im Rahmen dieser Arbeit durch numerische Integration simuliert) bis auf wenige Meter anzunähern, wobei der größte Fehler along-track auftritt.

Zentrieren wir die beobachteten Bahnstörungszeitreihen durch Abzug eines Trends um Null und erzwingen Periodizität durch Multiplikation mit einem beidseitig symmetrisch auf Null abfallenden Fenster, so führt die 1D-Fouriertransformation für einen künstlich verfälschten Testkoeffizienten zu Lumped Coefficients, die mit über Hill simulierten sehr gut übereinstimmen. Aus den auf diese Weise erhaltenen Lumped Coefficients läßt sich der eingeführte Fehler in dem gewählten Schwerefeldkoeffizient  $\bar{C}_{4,3}$  bis auf ein halbes Prozent Restfehler rekonstruieren.

Auch ein Vergleich der mittels Hill simulierten partiellen Ableitungen nach obigem Testkoeffizienten und nach Anfangsbedingungen mit numerisch integrierten Ableitungen er-

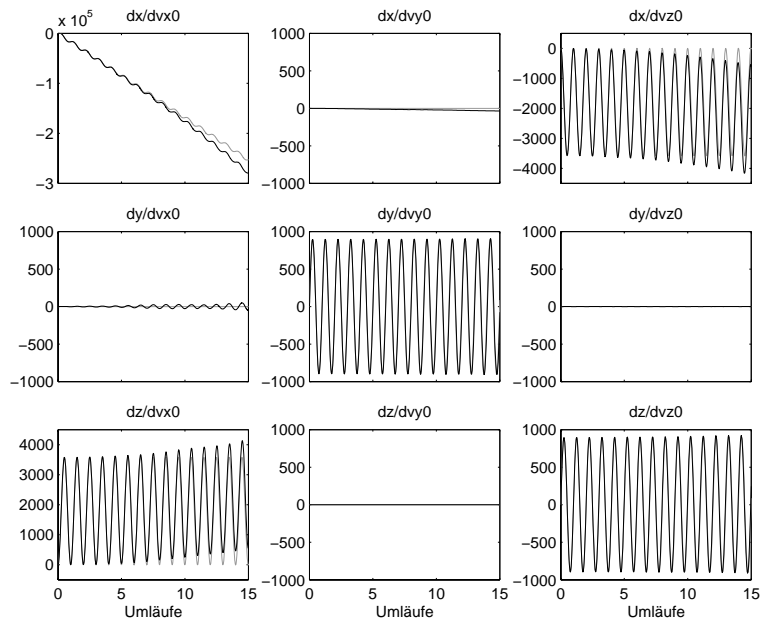


Abbildung 4.10.: *Partielle Ableitungen nach  $\underline{\dot{x}}_0$  entlang einer mittleren Kreisbahn. Grau aus der kompletten Lösung der Hill-Gleichungen, schwarz aus numerischer Integration.*

brachte gute Übereinstimmung, wobei darauf zu achten ist, daß die partiellen Ableitungen auf dem selben Referenzorbit integriert bzw. über Hill berechnet werden. Bei der Wahl des Referenzorbits hat sich eine mittlere Kreisbahn an die beobachtete Bahn als günstig herausgestellt. Die Transferkoeffizienten auf dieser Kreisbahn sind konstant.

Allerdings war es notwendig, die über die Hill-Gleichungen simulierten partiellen Ableitungen aus der kompletten Lösung einschließlich der Anteile der homogenen Lösung zu bilden, um näherungsweise Übereinstimmung zu erzielen. Als Fehler blieben ein relativ konstanter Bias in along-track sowie eine leichte Drift und zunehmende Schwingung auf Orbitfrequenz. Drift und Schwingung dürften aus der Differenz der geschätzten Bewegung des Satelliten  $\dot{u}$  zu dem aus der mittleren Kreisbahn bestimmten  $n$  resultieren.

Den homogenen und resonanten Anteilen kann Rechnung getragen werden, indem die zur Definition der Bahnstörungen herangezogene Näherungsbahn optimal an die beobachtete Bahn angepaßt wird oder indem die komplette resonante Lösung der Hillgleichungen als Filter eingesetzt wird. Im nächsten Abschnitt soll geklärt werden, welche der beiden Lösungswege die besseren Ergebnisse liefert.

## 4.4. Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten

Nach dem Vergleich der partiellen Ableitungen steht als nächstes ein Versuch zur Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten mit diesen Ableitungen an. Um auch Wechselwirkungen mehrerer Koeffizienten untereinander zu berücksichtigen, die über die Linearkombination in Lumped Coefficients zu erwarten sind, gehen wir über die Bestimmung eines einzelnen Testkoeffizienten hinaus, beschränken uns allerdings weiterhin auf stark verkleinerte Testfelder.

Als Originalfeld diene uns EGM96S bis Grad 5, als Näherungsfeld OSU91A, ebenso abgeschnitten. Um den Vergleich zu Lösungen mit Fouriertechniken zu ermöglichen, wird als Bogenlänge eine Quasi-Repeat-Periode von 200 Umläufen in 13 Tagen gewählt, nach der sich die Bahn fast schließt. Damit ist unser kleines Testfeld natürlich vielfach überbestimmt, dieser Orbit hat jedoch den Vorteil eines sehr kleinen Schlußfehlers. Außerdem können wir ihn später für Tests mit größeren Feldern weiterbenutzen. Als Anfangsbedingungen der beobachteten Bahn wurden wieder die CHAMP-Parameter aus Abschnitt 4.1 gewählt, die der Näherungsbahn entsprechen dem Statevektor der beobachteten Bahn zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_0$ .

Als Referenzlösung werden die Verbesserungen der Koeffizienten zuerst klassisch mit numerisch integrierten Ableitungen im inertialen System geschätzt. Parallel zu den Schwerefeldkoeffizienten werden auch die Anfangsbedingungen verbessert. Die partiellen Ableitungen dazu wurden mit dem Näherungsfeld auf der beobachteten Bahn integriert.

Das Ergebnis der Schwerefeldschätzung ist in Tab. 4.1 zu sehen. Als Maß für die Signalstärke des berücksichtigten Schwerefeldes sind die Grad-RMS des Originalfeldes angegeben. Einige Größenordnungen kleiner die Grad-RMS der Differenzkoeffizienten zwischen Näherungs- und Originalfeld.

Die Ergebnisse der klassischen Rekonstruktion folgen in der nächsten Zeile. Das schlechtere Abschneiden bei Grad 3 und 5 läßt sich dadurch erklären, daß das Problem eigentlich hochgradig nichtlinear ist und iteriert werden müßte. D.h. mit dem verbesserten Näherungsfeld müßte eine neue Näherungsbahn berechnet und die Koeffizientenschätzung mit den neuen Differenzen zur beobachteten Bahn wiederholt werden. Hier soll die erste Näherung zu Vergleichszwecken jedoch genügen.

Als nächstes wurde der vorhergehende Versuch im bahnbegleitenden System wiederholt. Sowohl die Bahnstörungen, als auch die partiellen Ableitungen wurden in ein mit dem Satelliten mitbewegtes Dreibein in radialer Ausrichtung transformiert. Wie nicht anders zu erwarten, entsprechen die Ergebnisse der Koeffizientenschätzung jenen im inertialen System und sind deshalb nicht gesondert dargestellt.

Stellen wir diesen Test mit der Hill-Theorie nach. Zuerst mit kompletten partiellen Ableitungen, welche entlang einer mittleren Kreisbahn an die beobachtete Bahn berechnet wurden. Die Bahnstörungen werden aus der Differenz der unangepaßten Näherungsbahn und der beobachteten Bahn gebildet und in ein die Näherungsbahn begleitendes Dreibein

	Grad 2	Grad 3	Grad 4	Grad 5
Signalstärke des Originalfeldes	$216.53 \cdot 10^{-6}$	$1.12 \cdot 10^{-6}$	$0.53 \cdot 10^{-6}$	$0.35 \cdot 10^{-6}$
Eingeführter Fehler	$0.49 \cdot 10^{-9}$	$0.78 \cdot 10^{-9}$	$1.04 \cdot 10^{-9}$	$2.07 \cdot 10^{-9}$
Restfehler nach Verbesserung num. int. part. Abl.	$0.01 \cdot 10^{-9}$	$0.57 \cdot 10^{-9}$	$0.01 \cdot 10^{-9}$	$0.34 \cdot 10^{-9}$
kompl. part. Abl. (Hill)	$1.09 \cdot 10^{-9}$	$1.85 \cdot 10^{-9}$	$0.58 \cdot 10^{-9}$	$1.07 \cdot 10^{-9}$
spez. part. Abl. (Hill) Näherungsortbit angepaßt				
aus along-track	$0.56 \cdot 10^{-9}$	$0.46 \cdot 10^{-9}$	$0.32 \cdot 10^{-9}$	$0.27 \cdot 10^{-9}$
aus cross-track	$214.65 \cdot 10^{-9}$	$0.21 \cdot 10^{-9}$	$0.12 \cdot 10^{-9}$	$0.09 \cdot 10^{-9}$
aus radial	$0.21 \cdot 10^{-9}$	$0.29 \cdot 10^{-9}$	$0.19 \cdot 10^{-9}$	$0.17 \cdot 10^{-9}$
spez. part. Abl. (Hill) Bahnstörungen gefiltert				
aus along-track	$8.54 \cdot 10^{-9}$	$0.46 \cdot 10^{-9}$	$0.32 \cdot 10^{-9}$	$0.19 \cdot 10^{-9}$
aus cross-track	$283.98 \cdot 10^{-9}$	$1.82 \cdot 10^{-9}$	$0.14 \cdot 10^{-9}$	$0.09 \cdot 10^{-9}$
aus radial	$3.82 \cdot 10^{-9}$	$0.38 \cdot 10^{-9}$	$0.12 \cdot 10^{-9}$	$0.11 \cdot 10^{-9}$
Torusansatz	$1.90 \cdot 10^{-9}$	$21.44 \cdot 10^{-9}$	$1.56 \cdot 10^{-9}$	$14.55 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 4.1.: *Ergebnisse der Koeffizientenschätzung.*

transformiert. Wieder werden parallel zu den Schwerefeldkoeffizienten auch Anfangsbedingungen mitgeschätzt, diesmal jedoch als homogene Anteile der kompletten Lösung der Hillgleichungen.

Es ergibt sich damit ebenso wie in den vorhergehenden Rekonstruktionen mit numerisch integrierten partiellen Ableitungen eine vollbesetzte Normalgleichungsmatrix, einer der Hauptvorteile der Hilltheorie geht also verloren, allerdings ist die analytische Berechnung der Ableitungen nach Hill wesentlich schneller, als die Integration der Variationellen Gleichungen.

Wie sich schon im vorangehenden Abschnitt angekündigt hat, fallen die Ergebnisse deutlich schlechter aus. Die beiden niedrigsten Grade divergieren, für die Grade 4 und 5 wird immerhin eine Halbierung des Fehlers erreicht. Auch wenn das Ergebnis für die höheren Grade nicht so schlecht aussieht, so ist doch Skepsis gegenüber der Nutzbarkeit der kompletten Lösung der Hillgleichungen für die Schwerefeldrekonstruktion angebracht.

Schließlich folgt noch ein Versuch mit speziellen partiellen Ableitungen auf der Kreisbahn. Dazu muß entweder in einem ersten Schritt die Näherungsbahn über ihre Anfangsbedingungen  $\underline{x}_{0,i}, \dot{\underline{x}}_{0,i}$  an die beobachtete Bahn angepaßt werden, die zeitaufwendige Integration der partiellen Ableitungen nach Anfangsbedingungen macht dabei den Zeitvorteil der analytischen Lösung teilweise wieder zunichte, oder die Bahnstörungen im begleitenden Dreibein müssen mit der homogenen und resonanten Lösung der Hillgleichungen gefiltert werden, wie in Abschnitt 4.1 bereits vorgestellt.

In beiden Fällen wird eine 1D-FFT zur Bestimmung von Lumped Coefficients eingesetzt (siehe Abschnitt 4.2), wodurch ein blockdiagonales Normalgleichungssystem entsteht,

die Vorteile der Hilltheorie also voll zum Tragen kommen. Der Ablauf beider Verfahren ist vergleichend in Abb. 4.11 beschrieben, die Ergebnisse sind ebenfalls in Tab. 4.1 dargestellt. Die Koeffizienten wurden dabei getrennt aus along-track, cross-track oder radialen Bahnstörungen geschätzt, da die verschiedenen Lösungen ein unterschiedliches Verhalten zeigen.

So kann aus cross-track-Bahnstörungen kein Koeffizient  $\bar{C}_{2,0}$  geschätzt werden, da er nur über die resonanten Transferkoeffizienten  $\bar{H}_{2,0,\pm 1}^{dy}$  von den beobachteten Lumped Coefficients abhängt. Die generell etwas schlechteren Ergebnisse aus along-track gegenüber radial werden im folgenden Abschnitt angesprochen und die Probleme in along-track zumindest etwas verringert.

Insgesamt sehen die Ergebnisse, bis auf die Ausreißer bei Grad 2, vielversprechend aus; zwischen 50 und 90% des eingeführten Fehlers konnten bereits in der ersten Iteration aus radialen Bahnstörungen verbessert werden. Dies beeindruckt umso mehr, als die Differenzen zwischen den beiden Schwerfeldern sich auch auf die zonalen Koeffizienten erstrecken, die aufgrund resonanter Transferkoeffizienten nur aus einer verminderten Anzahl beobachteter Lumped Coefficients geschätzt werden können.

Das bessere Abschneiden gegenüber der Schwerfeldrekonstruktion über partielle Ableitungen aus der kompletten Lösung der Hillgleichungen kann durch einen zusätzlichen Filtereffekt der Fouriertransformation gegen homogene und resonante Störanteile erklärt werden. Da Fourierkoeffizienten nur den periodischen Anteil der Bahnstörungszeitreihen repräsentieren, werden nichtperiodische Störanteile durch den noch nicht vollständig entfernten Einfluß von Anfangsbedingungen oder durch Resonanzen nicht dargestellt und können damit die weitere Schätzung von Schwerfeldkoeffizienten mittels der speziellen Lösung der Hillgleichungen nicht stören.

Iteriert man die Schätzung über 1D-FFT noch, indem man das verbesserte Näherungsfeld zur Integration einer neuen Näherungsbahn verwendet, diese wieder über ihre Anfangsbedingungen an die beobachtete Bahn anpaßt, und mit der so verbesserten Näherungsbahn die Bahnstörungen neu definiert, so erhält man nach einer Reihe von Iterationen das originale Schwerfeld in sehr guter Näherung zurück.

Abbildung 4.12 zeigt Positionsdifferenzen zwischen beobachteter Bahn und angepaßter Näherungsbahn über mehrere Iterationen hinweg. Bereits nach drei Iterationen liegen die Differenzen im Sub-Zentimeterbereich. Die Schwerfeldschätzung konvergiert also auf richtige Werte.

In Abb. 4.13 sind die verbleibenden Restfehler in den Schwerfeldkoeffizienten bei iterativer Lösung aus radialen Bahnstörungen über ihre Grad-RMS dargestellt. Im Fall angepaßter Näherungsbahnen (Dreiecke) konvergieren die verbesserten Koeffizienten schnell auf die wahren Werte. Iteriert man stattdessen mit den nach Filterung der Bahnstörungen geschätzten Verbesserungen, so schwellen die Positionsdifferenzen der Näherungsbahn zur beobachteten Bahn bereits nach 2 Iterationen wieder an, die Lösung divergiert. In Abb. 4.13 sind die zugehörigen Koeffizienten durch Rauten markiert. Der Grund für

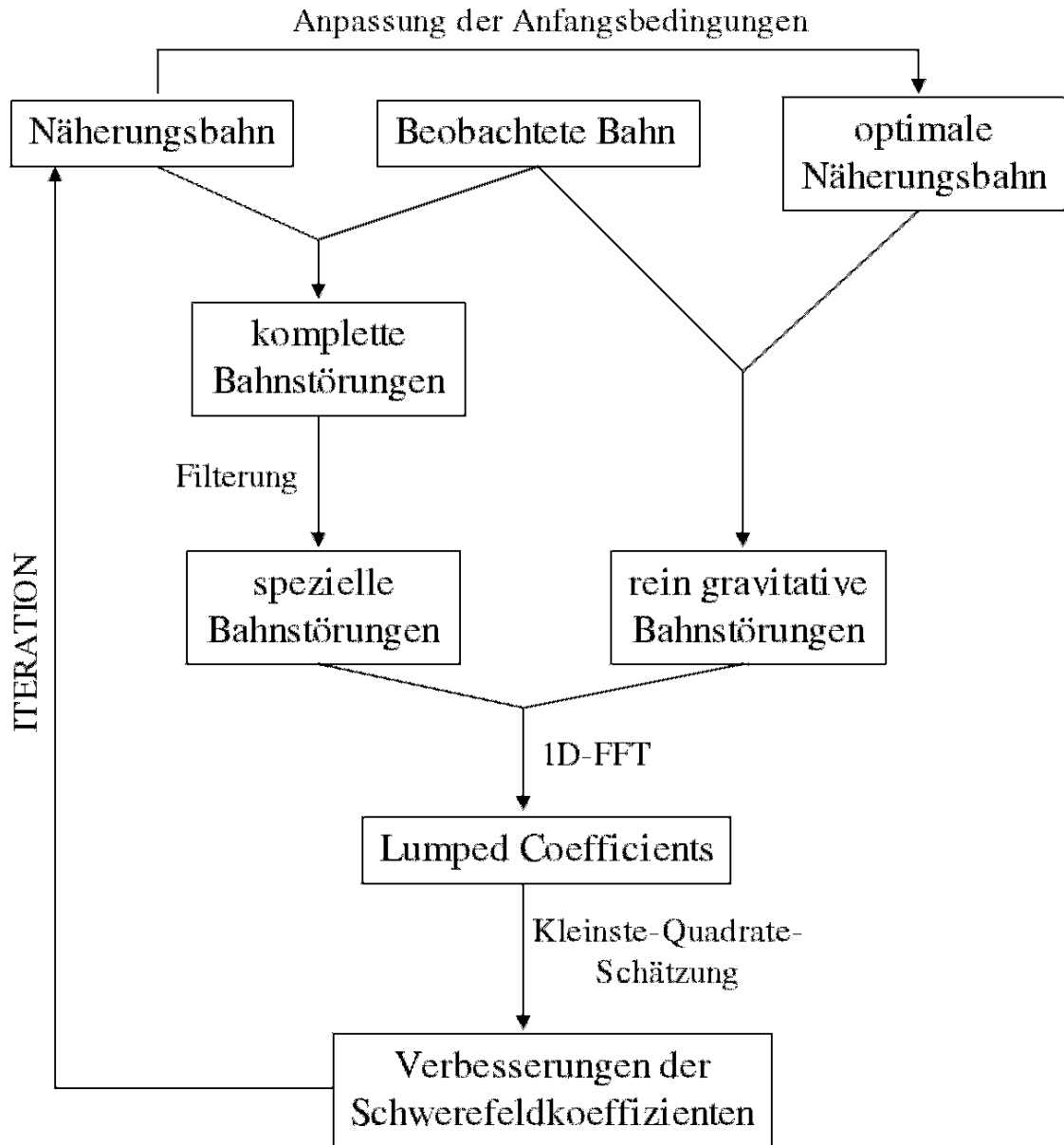


Abbildung 4.11.: Ablaufschema der Schätzung von Schwerefeldkoeffizienten über Filterung der Bahnstörungen oder eine angepasste Näherungsbahn.



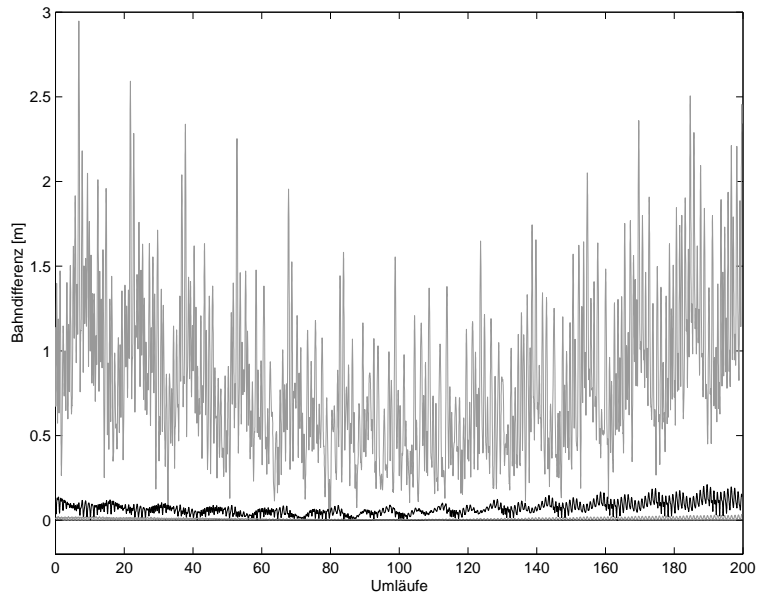


Abbildung 4.12.: *Positions­differenzen der angepaßten Näherungsbahnen zur beobachteten Bahn bei Iteration der Schwerefeldverbesserung. Mit zunehmender Iterationstiefe abwechselnd grau und schwarz dargestellt.*

die Divergenz liegt in den Problemen bei der Schätzung der Koeffizienten von Grad 2, die durch resonante Transferkoeffizienten und vermutlich auch durch die Nichtlinearität der Problemstellung begründet sind.

Ein Versuch der Schwerefeldrekonstruktion durch Projektion der Bahnstörungen auf einen Torus, dortiger Interpolation, 2D-FFT und folgender Schätzung von Schwerefeldkoeffizienten über Transferkoeffizienten, welche wieder auf einer mittleren Kreisbahn berechnet wurden, schlug fehl (siehe Tab. 4.1).

Das mag daran liegen, das die along-track-Komponente der Bahnstörungen sehr empfindlich auf unterschiedliche Anfangsbedingungen und resonante Effekte reagiert, weil diese sich über die Zeit aufakkumulieren und zu einem Weglaufen der Näherungsbahn führen. Projiziert man nun die Bahnstörungen auf einen Torus, so liegen zeitlich weit voneinander entfernte Bahnbögen räumlich benachbart. Der aufakkumulierte Effekt kommt voll zur Geltung, was zur Verwindung der Bahnen gegeneinander und damit zu Unstetigkeiten auf dem Torus führt, welche bei der 2D-FFT das Spektrum füllen und eine weitere Analyse der Fourierkoeffizienten behindern.

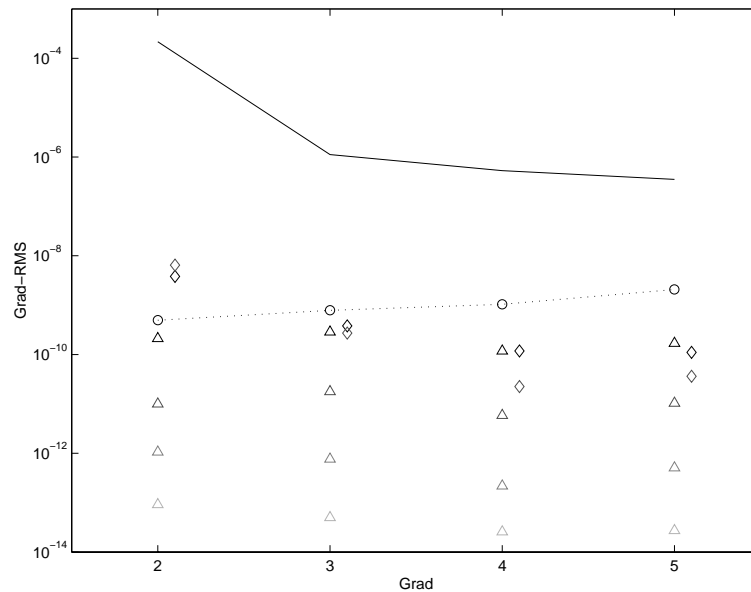


Abbildung 4.13.: *Grad-RMS des Originalfeldes (durchgezogene Linie), der eingeführten Fehler (Kreise) und der Restfehler nach Verbesserung der Koeffizienten ueber angepaßte Näherungsbahnen (Dreiecke) bzw. gefilterte Bahnstörungen (Rauten); mit zunehmender Iterationstiefe heller werdend.*

#### 4.5. Interpolation auf räumlich gleichabständige Bahnabtastung.

Die vielversprechenden Versuche im vorangegangenen Abschnitt zur Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten über die spezielle Lösung der Hillgleichungen nach 1D-FFT der in ein bahnbegleitendes Dreibein projizierten Bahnstörungen zu einer über ihre Anfangsbedingungen angepaßten Näherungsbahn legt eine Erweiterung der Tests auf größere Versuchsfelder nahe. Außerdem gilt es zu untersuchen, warum sich Schwerefeldkoeffizienten aus along-track Bahnstörungen nur ungenauer als aus radialen Störungen schätzen lassen.

Dazu wurde eine beobachtete Bahn mit EGM96S bis Grad 20 berechnet, eine Näherungsbahn mit OSU91A bis zum selben Grad. Da dies mit MATLAB nur noch unter großem Zeitaufwand möglich ist, der vor allem durch die Anpassung der Näherungsbahn verursacht wird, wurden parallel zu MATLAB mit dem am GeoForschungsZentrum entwickelten Programm zur Berechnung von Satellitenorbits und zur Schätzung von Erdparametern (EPOSOC) ebenfalls Orbits integriert. Im Unterschied zur MATLAB-Simulation wurden dafür tatsächliche Erdrotationsparameter statt einer konstanten Drehbewegung verwendet. Die Orbits lassen sich also nicht exakt vergleichen.

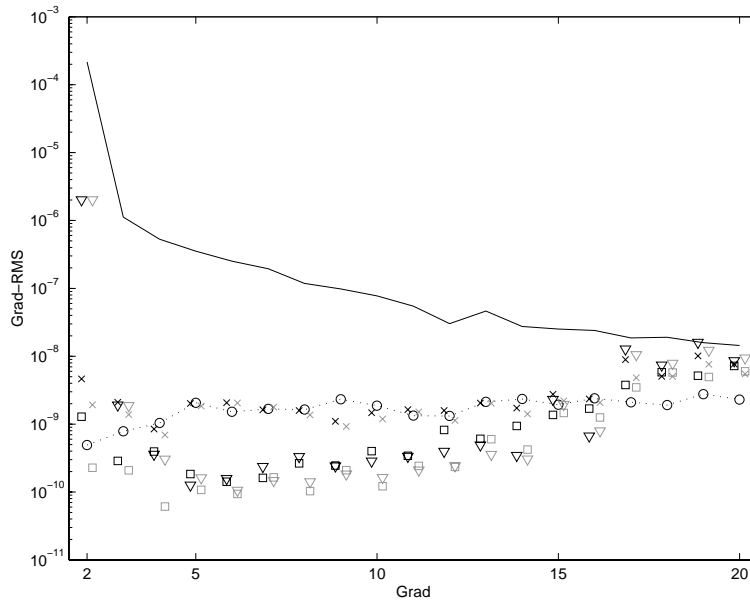


Abbildung 4.14.: *Grad-RMS des Originalfeldes (EGM96S bis Grad 20) als durchgezogene Linie, darunter die Fehler vor (Kreise) und nach der Verbesserung: aus along-track (Kreuze), cross-track (Dreiecke) oder radialen Störungen (Quadrate). Schwarz bei zeitlich, grau bei räumlich gleichabständiger Abtastung.*

Die Bahnstörungen wurden wie gehabt mit MATLAB bestimmt und ausgewertet. Da die Ergebnisse der Schwerefeldschätzung aus MATLAB-Bahnen und EPOSOC-Bahnen sich als praktisch gleich herausstellten, wurde in allen folgenden Versuchen EPOSOC zur Bahnintegration und Anpassung verwendet, während die Schwerefeldschätzung mit Hilfe der Hill-Gleichungen in MATLAB erfolgte. Dies macht zwar, vor allem bei iterativen Lösungen, einen ständigen Datentransfer zwischen EPOSOC und MATLAB notwendig, doch rechtfertigt der Zeitgewinn den größeren Aufwand. Außerdem bestätigt der Einsatz von EPOSOC die Stabilität und Unabhängigkeit des Verfahrens von der Simulationsumgebung innerhalb MATLABs.

Abbildung 4.14 zeigt die Ergebnisse einer nicht iterierten Koeffizientenschätzung, getrennt aus along-track, cross-track und radialen Bahnstörungen. Die Näherungsbahn wurde wieder über ihre Anfangsbedingungen an die beobachtete Bahn angepaßt, der Übergang in den Spektralbereich erfolgte über die 1D-FFT einer annähernden Wiederholperiode von 200 Umläufen in 13 Tagen. Deutlich ist zu sehen, daß sich aus along-track praktisch keine Verbesserung im Vergleich zu den eingeführten Fehlern ergibt. Bei cross-track kommt es zu Problemen mit den Koeffizienten des Grades 2, ab Grad 17 können ohne Iteration aus keiner der drei Richtungen Verbesserungen in den Koeffizienten erzielt werden.

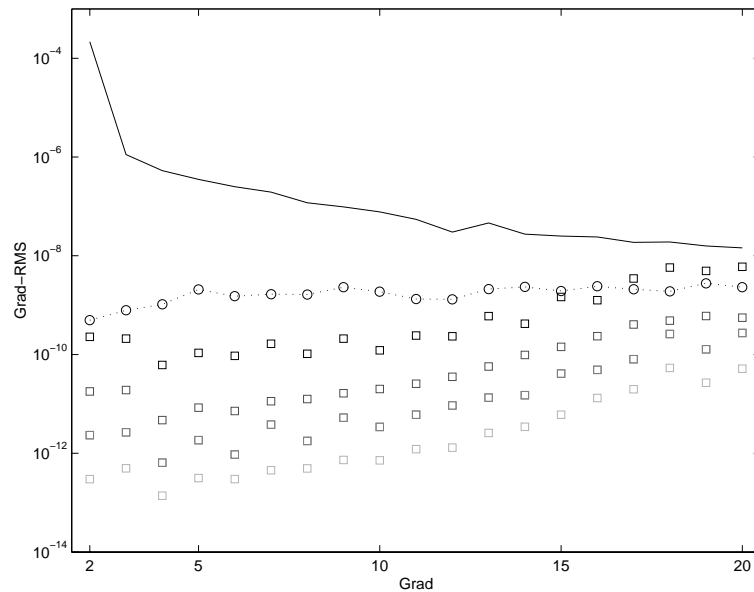


Abbildung 4.15.: *Grad-RMS des Originalfeldes (durchgezogene Linie), der eingeführten Fehler (Kreise) und der Restfehler nach Verbesserung der Koeffizienten aus radialen Bahnstörungen (Quadrate) bei Interpolation auf gleichabständiges  $u$ , mit zunehmender Iterationstiefe heller werdend.*

Eine Fehlerquelle, welche bisher außer Acht gelassen wurde, liegt in der unterschiedlichen Bahngeschwindigkeit des Satelliten entlang einer leicht exzentrischen Bahn. Die Bahnabtastung erfolgt in einem zeitlich gleichabständigen Raster, welchem allerdings nicht räumlich gleichabständige Positionen entlang der Bahn entsprechen. Da die FFT auf gleichabständiger Abtastung basiert und die Bahnstörungen mit realen Schwerefeldanomalien über deren räumliche Position korreliert sind, müßte also streng genommen räumlich gleichabständig abgetastet werden. Da Bahndaten typischerweise in einem zeitlich festen Sampling vorliegen, bleibt als Lösung nur die Interpolation auf gleichabständiges Argument der Breite  $u$  des Satelliten entlang der Bahn.

Die grauen Markierungen in Abb. 4.14 bezeichnen die nach linearer Interpolation auf gleichabständiges  $u$  erzielten Ergebnisse. Deutlich ist eine Verbesserung der Koeffizientenschätzung erkennbar, besonders für radiale Störungen, die über die Hillgleichungen stark mit den along-track Störungen korreliert sind. Da das Verfahren die Konvergenz beschleunigt, wird es trotz der auf diese Weise eingeführten Interpolationsfehler in allen weiteren Tests eingesetzt.

Da Bahnbeobachtungen in Flugrichtung, seit der Verwendung von GPS zur Bahnbestimmung, wesentlich dichter vorliegen, als quer zu dieser, d.h. auf den benachbarten Bahnen, die Auflösung des Schwerefeldes also eher von der Länge der Wiederholperiode der Bahn als von der Abtastrate entlang des Orbits abhängt, dürfte die Interpolation

entlang des Orbits für die Genauigkeit der Lösung relativ unkritisch sein. Versuche mit verschiedenen Interpolationsverfahren haben diese Vermutung bestätigt. Aufwendigere und genauere Verfahren haben zu keiner sichtbaren Verbesserung gegenüber der linearen Interpolation geführt.

Iteriert man die Lösung, so lassen sich auch die Probleme bei den höheren Graden beheben (Abb. 4.15), allerdings wurden wieder nur radiale Bahnstörungen benutzt, da eine Hinzunahme der anderen Koordinatenrichtungen zu keiner Beschleunigung der Konvergenz führt. Along-track Störungen konvergieren immer noch wesentlich langsamer als radiale, cross-track Störungen kranken an der schlechten Bestimmbarkeit der Koeffizienten von Grad 2, welche sich bei Iteration negativ auf alle anderen Koeffizienten auswirkt. Natürlich könnte das Problem mit den Koeffizienten des Grades 2 im Rahmen der Simulation umgangen werden, indem für diese Koeffizienten kein Fehler eingeführt und sie dann auch nicht gelöst werden. Beharrt man stattdessen jedoch auf fehlerhaften Koeffizienten des Grades 2, womit in der Realität gerechnet werden muß, und schätzt diese Koeffizienten trotzdem nicht mit, so treten in den gelösten Koeffizienten Spectral-Leakage-Effekte auf, welche sich im Lauf der Iteration aufschaukeln.

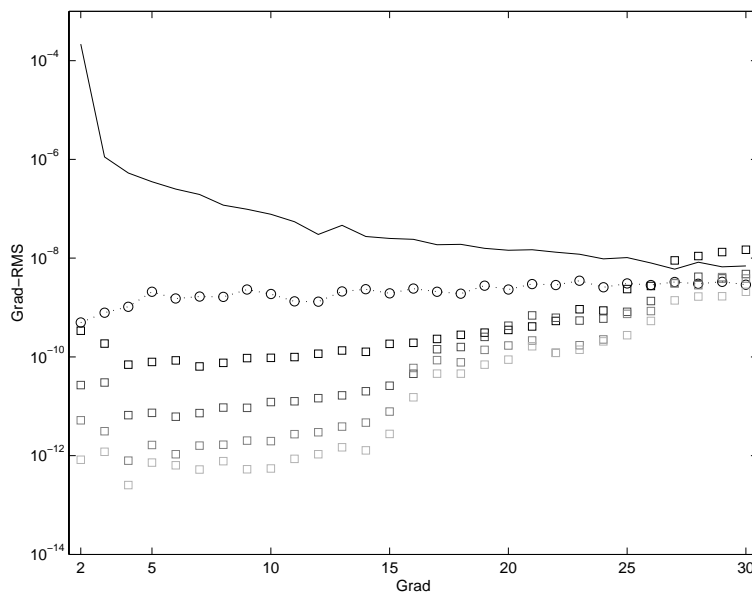


Abbildung 4.16.: *Grad-RMS des Originalfeldes (durchgezogene Linie), der eingeführten Fehler (Kreise) und der Restfehler nach Verbesserung der Koeffizienten aus radialen Bahnstörungen (Quadrate) bei Interpolation auf gleichabständiges  $u$ , mit zunehmender Iterationstiefe heller werdend.*

Erhöht man die Auflösung der Felder auf Grad und Ordnung 30, so erreicht man mit dem neuen Verfahren eine zügige Konvergenz der Koeffizienten bis Grad 15, darüber hinaus verlangsamt sie sich (Abb. 4.16). Das hängt damit zusammen, daß zwischen 15 und 16 die

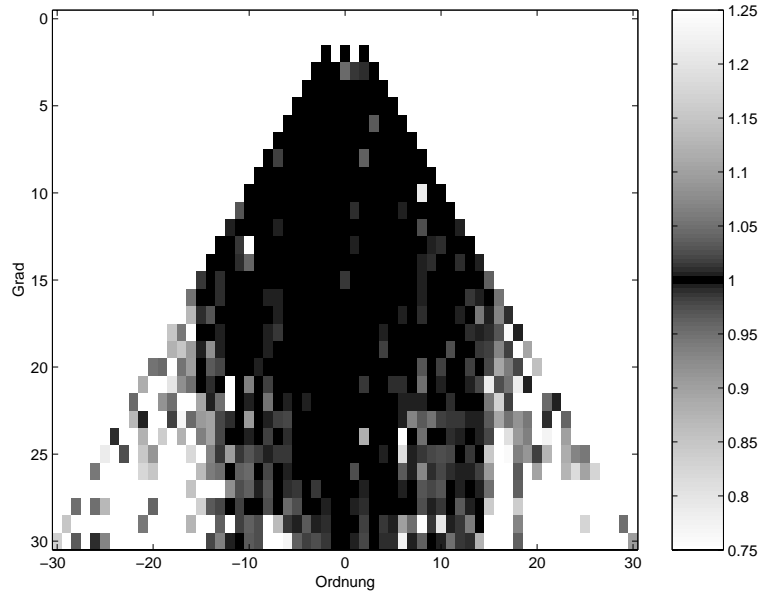


Abbildung 4.17.: *Verhältnis der geschätzten Verbesserungen zu den ursprünglich eingeführten Fehlern pro Koeffizient, links die C-, rechts die S-Koeffizienten. Ein Wert von 1 (schwarz) bedeutet perfekte Rekonstruktion.*

erste resonante Ordnung liegt. Diese wird zwar nicht exakt erreicht, es kommt zu keinen Singularitäten in den Transferkoeffizienten, jedoch zu einem Anstieg der Amplituden. Betrachtet man die Koeffizienten einzeln (Abb. 4.17), so erkennt man deutliche Defizite bei der Rekonstruktion ab Ordnung 16, die sich auch in den Grad-RMS niederschlagen.

Bei der zweiten Degradation ab Grad 27 handelt es sich um einen Artefakt der Simulation, der mit dem harten Abbruch des Feldes und der Koeffizientenschätzung bei Grad 30 zusammenhängt. Man kann dem entgegenwirken, indem man mehr Koeffizienten schätzt, als in die Bahnstörungen eingegangen sind, in diesem Fall z.B. Verbesserungen bis Grad 40. Im ersten Rekonstruktionsschritt verschwindet die Stufe bei Grad 27 dann, bei der folgenden Iteration kommt es jedoch zu einer Verlangsamung der Konvergenz, da der Lösungsraum vergrößert wurde und sich die Fehler durch Spectral Leakage-Effekte (Snieder und Tampert, 2000) auch auf die Koeffizienten ab Grad 30 verteilen, die eigentlich zu Null geschätzt werden müßten.

Eine weitere Ausdehnung der Simulation auf Felder bis Grad und Ordnung 40 stößt schließlich an die Grenzen der sinnvollen Einsetzbarkeit der Hillgleichungen zur Schwerfeldrekonstruktion aus Bahnstörungen. Ab der zweiten resonanten Ordnung, welche etwa bei 31 liegt, wachsen die GRAD-RMS der Restfehler über die Signalstärke des Originalfeldes hinaus. Abbildung 4.18 zeigt die Ergebnisse nach 3 Iterationen. Erstaunlicherweise werden auch bisher schätzbare Koeffizienten in Mitleidenschaft gezogen, deutliche

Verbesserungen können nur noch bis etwa Grad 11 erzielt werden.

Berücksichtigt man zudem noch den Abbruchfehler, welcher bei der Rekonstruktion von Schwerefeldern aus tatsächlich beobachteten Satellitenorbits zwangsweise auftritt, indem man bei der Integration der beobachteten Bahn auch Koeffizienten über den danach gelösten Grad hinaus mitnimmt, so können praktisch keine sinnvollen Verbesserungen des Schwerefeldes mehr erreicht werden (Abb. 4.18). Zu den bisher angesprochenen Resonanz-Problemen und generellen Unzulänglichkeiten einer linearisierten Bahntheorie kommen in diesem Fall noch Aliasing-Effekte, da Signal aus nicht mitgeschätzten Koeffizienten höherer Grade in niedrigere Grade hineinprojiziert wird.

Da die Probleme bei der Rekonstruktion höhergradiger Koeffizienten offensichtlich mit Resonanzeffekten zusammenhängen, soll noch ein Versuch mit kürzeren Bogenlängen gemacht werden. Ihr Vorteil liegt darin, daß durch Resonanz verursachte, nichtperiodische Störungen nicht so stark anschwellen können, ihr Nachteil dagegen in einem größeren Schlußfehler. Wurden bisher 200 Umläufe in 13 Tagen analysiert, so wird dieser Zeitraum nun in einem ersten Experiment in vier Bögen mit jeweils 46 Umläufen in 3 Tagen zerhackt, die jeder für sich an die beobachtete Bahn angepaßt werden. Für jeden der vier Bögen werden mittels Fourieranalyse Lumped Coefficients bestimmt, aus denen dann in einer gemeinsamen Ausgleichung Schwerefeldkoeffizienten geschätzt werden. Die Block-

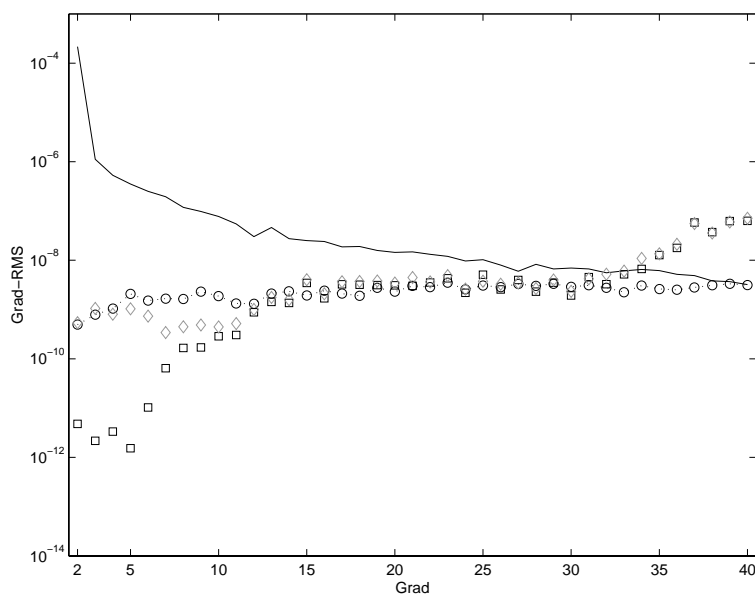


Abbildung 4.18.: *Grad-RMS des Originalfeldes (durchgezogene Linie), der eingeführten Fehler (Kreise) und der Restfehler nach Verbesserung der Koeffizienten aus radialen Bahnstörungen (Quadrate) nach 3 Iterationen. Die grauen Rauten zeigen die entsprechenden Ergebnisse bei zusätzlicher Einführung eines Abbruchfehlers.*

diagonalität der Normalgleichungsmatrix leidet dabei nicht.

Für ein weiteres Experiment werden gar 13 Tagesbögen mit jeweils 15 Umläufen verwendet, einzeln angepaßt, in den Spektralbereich transformiert und gemeinsam zur Schätzung der Schwerefeldkoeffizienten herangezogen. Der Rechenaufwand steigt dabei nur unwesentlich, da der zeitaufwendigste Schritt, nämlich die Berechnung der partiellen Ableitungen nach den Anfangsbedingungen durch Integration der Variationellen Gleichungen, insgesamt für eine ähnliche Zeitspanne erfolgt. Allerdings steigt der Aufwand in der Bedienung der Programme, solange der Schritt von der Integration der Näherungsbahnen mit EPOS zur Auswertung der Bahnstörungen mit MATLAB noch nicht automatisiert ist (für einen operationellen Betrieb müßten diese beiden Schritte durch eine gemeinsame Softwarelösung vereinheitlicht werden).

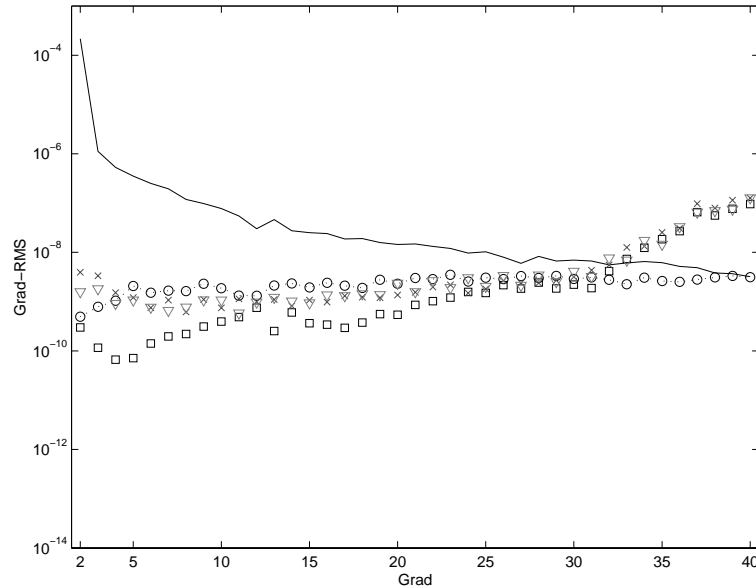


Abbildung 4.19.: *Grad-RMS des Originalfeldes (durchgezogene Linie), der eingeführten Fehler (Kreise) und der Referenzlösung aus dem 13-Tages-Bogen ohne Iteration (Quadrate). Kreuze markieren die Lösung über 4-Tagesbögen, Dreiecke jene mittels 1-Tages-Bögen.*

Abbildung 4.19 faßt die Ergebnisse nach der ersten Näherungslösung zusammen. Enttäuschenderweise zeigen beide Alternativen ab Grad 32 ein ähnlich schlechtes Verhalten wie der lange Bogenzuschnitt. Die Koeffizienten niedrigerer Grade werden sogar deutlich schlechter bestimmt, was auf das höhere Rauschlevel durch den größeren Schlussfehler der Einzelbögen zurückzuführen sein dürfte. Auf eine Iteration der Lösungen wurde verzichtet.

Da die Konditionszahlen der Normalgleichungsmatrizen bei einigen der bisher vorgestellten Ergebnisse recht schlecht waren, wird an dieser Stelle noch kurz auf die Möglichkeit



der Regularisierung eingegangen. Regularisierung bedeutet, daß Vorinformationen über die Größe der zu erwartenden Verbesserungen zur Stabilisierung des Normalgleichungssystems verwendet werden. Die bisher verwendeten Beobachtungsgleichungen lauten

$$x = Ay + \epsilon_x; W_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_0^2}{m_{x_1}^2} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \frac{m_0^2}{m_{x_n}^2} \end{pmatrix} = I \quad (4.16)$$

mit den Lumped Coefficients der Bahnstörungen  $x$ , den unbekanntem Schwerefeldkoeffizienten  $y$ , der Designmatrix  $A$  mit den Transferkoeffizienten und den Beobachtungsfehlern  $\epsilon_x$ . Als Gewichtsmatrix  $W_1$  wurde bisher die Einheitsmatrix  $I$  verwendet, da die mittleren Fehler  $m_x$  der  $n$  beobachteten Lumped Coefficients von vielen Faktoren abhängen und schwer abzuschätzen sind. Das bedeutet für die Lösung, daß alle Beobachtungen gleich gewichtet werden und ihr a priori-Fehler  $m_0$  den Einzelfehlern  $m_x$  entspricht.

Dieses Gleichungssystem wird nun durch die Information ergänzt, daß die Verbesserungen in den  $m$  zu schätzenden Schwerefeldkoeffizienten klein sein sollen, also näherungsweise gleich 0. Diese Information wird koeffizientenweise mit Hilfe der Standardabweichungen  $m_y^2$ , welche der Varianzmatrix des Näherungsfeldes entnommen sind, gewichtet

$$0 = Iy + \epsilon_y; W_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_0^2}{m_{y_1}^2} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \frac{m_0^2}{m_{y_m}^2} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Diese pseudo-Beobachtungsgleichungen werden zu den ursprünglichen addiert und es ergibt sich das neue Gleichungssystem

$$(A^T W_1 A + I^T W_2 I) \hat{y} = A^T W_1 x + I^T W_2 0 \quad (4.18)$$

beziehungsweise

$$\hat{y} = (A^T A + W_2)^{-1} A^T x \quad (4.19)$$

Einzig unbekannt auf der rechten Seite ist nur  $m_0$  in  $W_2$ , welches zu einer realistischen Gewichtung relativ zu  $W_1$  benötigt wird. In einem gesunden System könnte  $\hat{m}_0^2$  a posteriori aus den geschätzten Koeffizienten  $\hat{y}$  bestimmt werden

$$\hat{m}_0^2 = \frac{x^T W x - x^T W A \hat{y}}{n - m}, \quad (4.20)$$

in unserem Fall könnte man versuchen, die Fehler der Lumped Coefficients durch Vorwärtssimulation aus den Schwerefeldkoeffizienten des Näherungsfeldes abzuschätzen. Auf diese umständlichen Rechnereien soll jedoch verzichtet werden. Da die Schätzung von Schwerefeldkoeffizienten aus Lumped Coefficients nur wenig Zeit in Anspruch nimmt, kann ein Gewichtungsfaktor problemlos empirisch bestimmt werden.

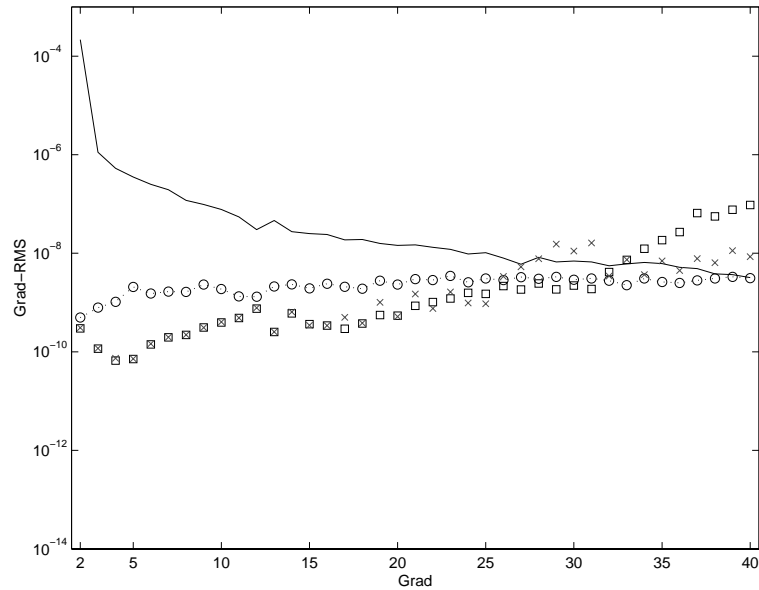


Abbildung 4.20.: Grad-RMS des Originalfeldes (durchgezogene Linie), der eingeführten Fehler (Kreise) und der Referenzlösung ohne Iteration (Quadrate). Kreuze markieren die Ergebnisse bei Regularisierung ab Grad 32.

Da bisher auch ohne Regularisierung bis etwa Grad 31 Verbesserungen erzielt werden konnten, werden diese Koeffizienten völlig frei belassen und die Zusatzinformation erst ab Grad 32 benützt. Abbildung 4.20 zeigt die Ergebnisse, der empirisch bestimmte Gewichtungsfaktor liegt bei  $5 \cdot 10^{-11}$ . Die Verbesserungen für Koeffizienten ab Grad 32 fallen etwas realistischer aus, während sich ein Großteil der geschätzten Verbesserungen bis Grad 26 kaum ändert. Allerdings kommt es zu unschönen Artefakten bei den Koeffizienten der Grade 27 bis 31. Diese fallen umso schlimmer aus, je höher das Gewicht der Regularisierung. Ein Versuch, die Regularisierung ab Grad 32 nicht sprunghaft, sondern mit langsam zunehmendem Gewicht einzuführen, erbrachte keine wesentliche Verbesserung.

Offensichtlich handelt es sich bei den Fehlern in den Koeffizienten ab Grad 32 nicht um einen Defekt der Normalgleichungsmatrix, sondern um tatsächlich vorhandenes Signal, welches mit Hilfe des linearen Modells nicht sinnvoll nachgebildet werden kann und deshalb zu einer Verzerrung der jeweils am schwächsten bestimmten Koeffizienten führt. Regularisierung kann also in diesem Fall nicht helfen; das Modell müßte verbessert, oder das störende Signal durch Filterung entfernt werden. Unabhängig davon könnte wahrscheinlich eine Stabilisierung der Koeffizientenbestimmung erzielt werden, indem Bögen unterschiedlicher Satelliten mit Bahnen unterschiedlicher Inklination gemeinsam ausgewertet werden. Dies geht jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

## 4.6. Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten aus Störbeschleunigungen

Die Bahnstörungen zeigen im Bereich der Orbitfrequenz  $n$  Resonanzverhalten, d.h. die Bahn wird durch Störbeschleunigungen auf dieser Frequenz besonders stark beeinflusst. Dies äußert sich durch ein starkes Ansteigen der Amplituden um die Bahnfrequenz  $n$  im Spektrum der Bahnstörungen. Durch Vernachlässigung von Dämpfungstermen bei der Herleitung der Hillgleichungen kann die Störungstheorie von Hill dieses Verhalten nicht realitätsnah nachbilden, es kommt zu Singularitäten in den Transferkoeffizienten (2.90) bis (2.92). Außerdem wirkt sich die Resonanz durch starke, nichtperiodische Störungen besonders auf die Bahngeschwindigkeit des Satelliten aus. Diese Störungen wandern bei der Bahnanpassung teilweise in die Schätzung der Anfangsbedingungen, doch ist zu vermuten, daß Resteinflüsse die Lösung von Schwerefeldkoeffizienten behindern.

Diese Problematik läßt sich umgehen, wenn statt der Bahnstörungen die Störbeschleunigungen direkt betrachtet werden. Diese zeigen kein Resonanzverhalten um  $n$  (siehe Transferkoeffizienten (2.64) bis (2.66)) und koppeln auch nicht über eine Bahnanpassung mit dem Resonanzverhalten der Bahnstörungen, da die Näherungsbeschleunigungen direkt auf der beobachteten Bahn als Gradienten des Näherungspotentialfeldes berechnet werden können. Scheinkräfte müssen nicht berücksichtigt werden, solange das bahnbegleitende Dreibein im Massenzentrum des Satelliten gelagert ist (eine generelle Voraussetzung der Hilltheorie).

Die Sollbeschleunigungen können im Rahmen der Simulation hier aus dem Originalfeld ebenfalls auf dem beobachteten Orbit berechnet werden, müßten bei der Auswertung echter Satellitenbahnen jedoch durch zweifache Differentiation aus diesem gewonnen werden. Liegt keine rein gravitativ gestörte Bahn vor, sondern nur Messungen der nichtgravitativen Beschleunigungen mit einem Akzelerometer, so ist eine Analyse auf Beschleunigungslevel sowieso die günstigste Alternative, da die gemessenen Beschleunigungen einfach als Korrekturen von der zweifach differenzierten Bahn abgezogen werden können.

Die Differenz zwischen Soll- und Näherungsbeschleunigung wird in das bahnbegleitende Dreibein projiziert und bildet dort die gesuchte Störbeschleunigung. Die Auswertung kommt ohne Integration und Anpassung eines Näherungsorbits aus, dadurch fällt der zeitaufwendige Schritt der Bahnintegration und vor allem der Integration der Variationalen Gleichungen weg. Auch der von einer Wiederholperiode unabhängige Torusansatz gewinnt wieder an Bedeutung, da sich die Störbeschleunigungen immer auf den selben Orbit beziehen, nichtperiodische Differenzen zwischen beobachtetem und Näherungsorbit also nicht zu einer Verwindung benachbarter Bögen auf dem Torus gegeneinander und damit zu Unstetigkeiten führen.

Auch Beschleunigungen können natürlich entlang des Orbits auf gleichabständiges  $u$  interpoliert werden (dieser Schritt ist auf dem Torus durch die Interpolation auf ein Gitter überflüssig). Eine Reduktion auf einen Kreisorbit, welcher der Hilltheorie am

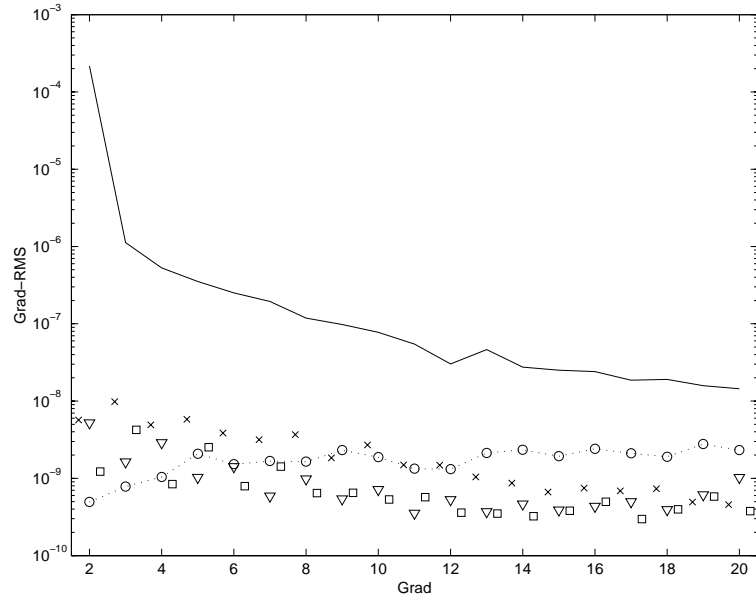


Abbildung 4.21.: Verbesserung über 1D-FFT: aus along-track (Kreuze), cross-track (Dreiecke) oder radialen Störbeschleunigungen (Quadrate).

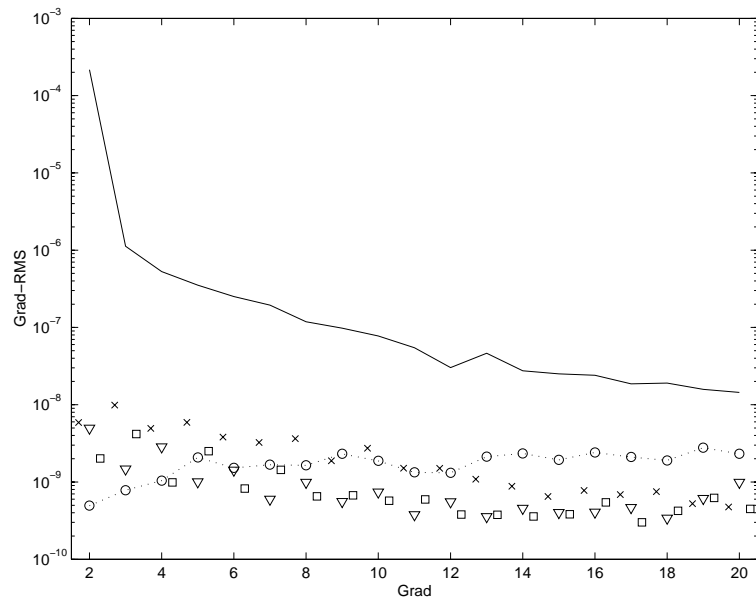


Abbildung 4.22.: Verbesserung über 2D-FFT: aus along-track (Kreuze), cross-track (Dreiecke) oder radialen Störbeschleunigungen (Quadrate).

besten entsprechen würde, macht jedoch keinen Sinn, da Näherungs- und beobachtete Beschleunigungen beide mit dem selben Näherungsschwerefeld auf den Kreisorbit reduziert werden würden. Die Störbeschleunigungen, welche aus ihrer Differenz gebildet werden, verändern sich also nicht.

Fehlerquellen sind nach wie vor im Fall der 1D-FFT der Schlußfehler bei nichtperiodischen Bahnen, der die Fouriertransformation behindert, und die Interpolation entlang der Bahn auf räumlich gleichabständige Abtastung, bzw. bei 2D-FFT der Interpolationsfehler auf dem Torus. Und natürlich der Modellfehler, welcher durch die Hilltheorie bei der Berechnung der Transferkoeffizienten auf einem Kreisorbit eingeführt wird.

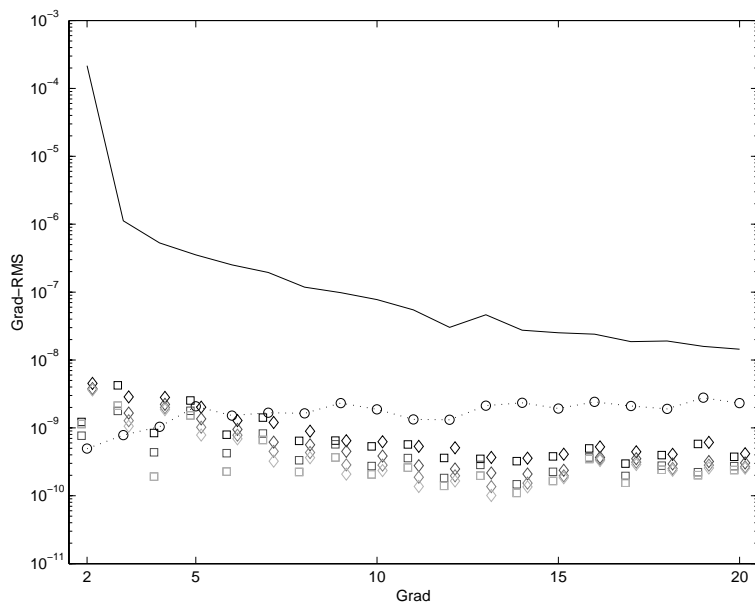


Abbildung 4.23.: *Grad-RMS der Restfehler in den geschätzten Koeffizienten bei Iteration, mit zunehmender Iterationstiefe heller werdend. Quadrate kennzeichnen eine Lösung alleine aus radialen, Rauten in Kombination mit cross-track Störbeschleunigungen.*

Abbildung 4.21 zeigt die Ergebnisse der Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten aus Störbeschleunigungen bis Grad 20 mittels 1D-FFT, bei Interpolation der Störbeschleunigungen auf gleichabständiges  $u$ . Abbildung 4.22 zeigt die entsprechenden Ergebnisse mit Hilfe des Torusansatzes und der 2D-FFT, die sich praktisch nicht von denen der 1D-FFT unterscheiden lassen.

Es ergibt sich ein zu Bahnstörungen konträres Bild: Koeffizienten höherer Grade werden deutlich besser geschätzt als solche der niedrigsten Grade. Dies bestätigt sich auch nach Iteration (in Abb. 4.23 mit 1D-FFT), wobei die Lösung insgesamt wesentlich langsamer als im Fall von Bahnstörungen konvergiert. Eine gemeinsame Lösung aus cross-track und

radialen Störbeschleunigungen zeigt dabei insbesondere bei höheren Graden kein günstigeres Verhalten als die Rekonstruktion von Schwerefeldkoeffizienten allein aus radialen Beschleunigungen, obwohl die Probleme mit den Koeffizienten des Grades 2 wegfallen, da keine singulären Transferkoeffizienten mehr auftreten. In den folgenden Experimenten beschränken wir uns deshalb auf radiale Störbeschleunigungen.

Die Gründe für das schwache Abschneiden kombinierter Lösungen im Fall von Beschleunigungen dürften in einer Schwäche der cross-track-Lösung bei Koeffizienten der Grade 2 und 4 liegen (im Gegensatz zu Problemen der radialen Lösung bei den Koeffizienten der Grade 3 und 5). Resonanzen fallen als Ursache bei Störbeschleunigungen aus, eine Bahnanpassung, welche Schweresignal absaugen könnte, findet bei der Definition der Störbeschleunigungen nicht statt und für eine generelle Unempfindlichkeit gegenüber bestimmten Koeffizienten findet Sneeuw (2000) im Rahmen von Fehlersimulationen in diesem niederfrequenten Bereich keinen Hinweis. Bleibt die Möglichkeit, daß sich die leichte Exzentrizität der Bahn durch ein Signal bemerkbar macht, welches jenes von  $\bar{C}_{2,0}$  überlagert und dessen Bestimmung erschwert. Warum cross-track Störbeschleunigungen besonders anfällig auf diesen Effekt reagieren sollten, ist jedoch nicht nachvollziehbar.

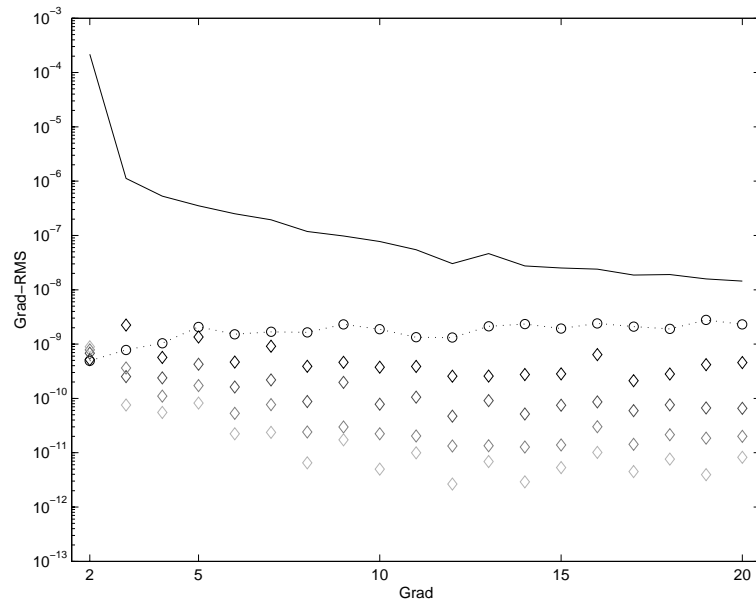


Abbildung 4.24.: *Grad-RMS der Restfehler in den geschätzten Koeffizienten (Quadrate) bis Grad 20, bei Kombination von Bahnstörungen und Störbeschleunigungen, mit zunehmender Iterationstiefe heller werdend.*

Es liegt nahe, Bahnstörungen und Störbeschleunigungen gemeinsam auszuwerten, um die jeweilige Lösung zu stabilisieren. Die Beobachtungstypen enthalten zwar eigentlich redundante Information, doch scheinen sich Modellfehler in beiden Fällen konträr auszuwirken, eine Kombination könnte zu ihrer Verringerung beitragen. Dies wird durch

Abb. 4.24 bestätigt, welche die Ergebnisse einer kombinierten Schwerefeldrekonstruktion bis Grad 20 aus radialen Bahnstörungen und Störbeschleunigungen zeigt. Da der Torusansatz für Bahnstörungen nicht brauchbar ist, sind diese und alle weiteren Kombinationslösungen ausschließlich über 1D-FFT berechnet.

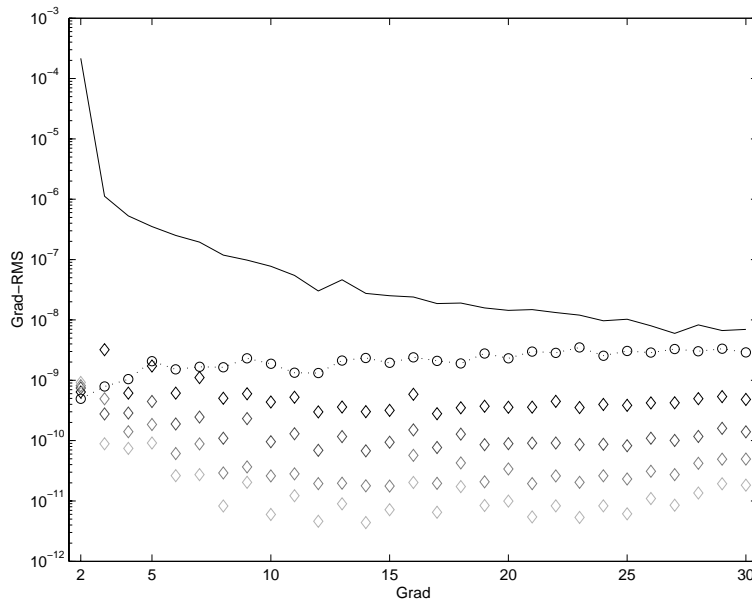


Abbildung 4.25.: *Grad-RMS der Restfehler bis Grad 30 bei Kombination von Bahnstörungen und Störbeschleunigungen.*

Das Ergebnis konvergiert wesentlich schneller als bei der Schätzung aus Beschleunigungen alleine. Die Koeffizienten höherer Grade, auf denen das Hauptinteresse liegt, werden wesentlich besser geschätzt, als bei einer Lösung nur aus Bahnstörungen. Und auch die Koeffizienten niedriger Grade zeigen, mit Ausnahme des Grades 2, zumindest eine langsame Verbesserung. Dieser Trend wird noch deutlicher, erweitert man das Experiment bis Grad 30 (Abb. 4.25) oder sogar 40 (Abb. 4.26).

Die im vorhergehenden Kapitel sichtbare Verschlechterung ab Grad 16 ist nur noch als Verlangsamung der Konvergenz bei Koeffizienten der unmittelbar folgenden Grade zu erkennen, auch jenseits der zweiten Resonanz bei Grad 30 kommt es zu einer lokalen Verlangsamung der Konvergenz, die Rekonstruktion des Schwerefeldes gelingt jedoch noch immer gut. Sogar gegen die Artefakte des harten Abbruches der Koeffizientenschätzung zeigt sich die kombinierte Lösung unempfindlich.

Erst ab der dritten Resonanz im Bereich von Grad und Ordnung 46 muß die Schwerefeldrekonstruktion als gescheitert gelten (Abb. 4.27). Die gelösten Koeffizienten fangen an zu springen und konvergieren nicht mehr stetig, was sich auch auf die niedrigsten Grade auswirkt, die ähnliches Verhalten zeigen. Als Ergebnis unserer Versuche können

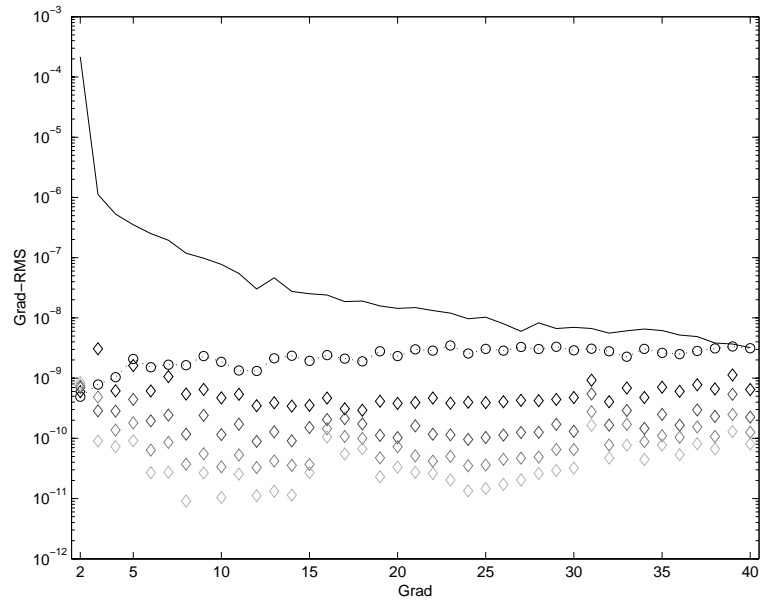


Abbildung 4.26.: *Grad-RMS der Restfehler bis Grad 40 bei Kombination von Bahnstörungen und Störbeschleunigungen.*

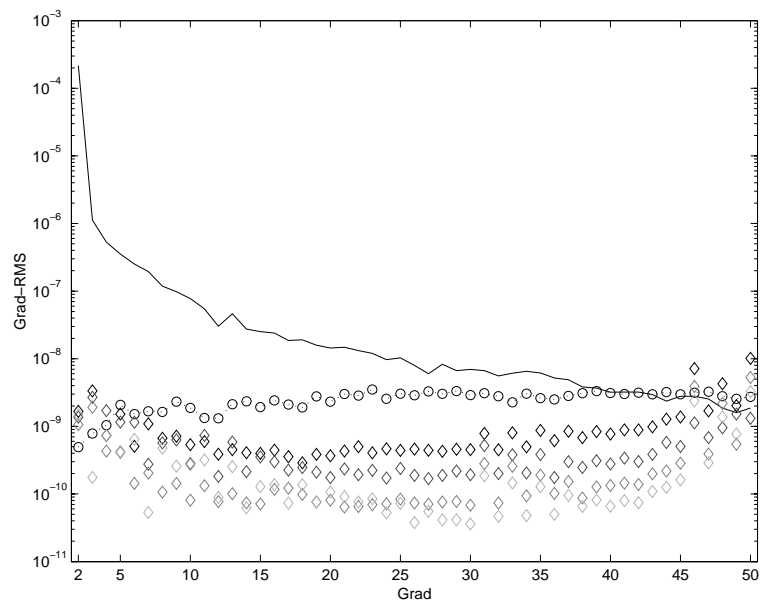


Abbildung 4.27.: *Grad-RMS der Restfehler bis Grad 50 bei Kombination von Bahnstörungen und Störbeschleunigungen.*



wir also festhalten, daß sich aus der Kombination von Bahnstörungen und Störbeschleunigungen mittels der Hill-Theorie für CHAMP-ähnliche Bahnen Koeffizienten bis zur dritten resonanten Ordnung 46 schätzen lassen. Dies mag daran liegen, daß diese Resonanz wesentlich exakter getroffen wird als die beiden vorausgehenden (bei 15.3 und 30.6).

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Auch wenn das anfangs gesteckte Ziel eines schnellen Verfahrens zur Schwerefeldbestimmung aus Bahnbeobachtungen erdnaheer Satelliten am Ende nicht in vollem Umfang erreicht werden konnte, so wurden doch viele Teilaspekte zufriedenstellend gelöst und wertvolle Einblicke in Möglichkeiten und Grenzen der Bahnthorie von Hill gewonnen.

Im ersten Kapitel wurde der Weg von den Bewegungsgleichungen eines Satelliten, ihrer Linearisierung für kreisförmige Bahnen, die zu den berühmten Hill-Gleichungen führte, bis zur Lösung des Gleichungssystem für Störbeschleunigungen in einem bahnbegleitenden Koordinatensystem, welche periodisch entlang der Bahn sind, vorgestellt.

Indem der zeitinvariante Anteil des Schwerefeldes mit Hilfe der Neigungsfunktionen in ebendieses Dreibein transformiert wurde, konnten Transferkoeffizienten zwischen dem Störpotential im bahnbegleitenden und erdfesten System sowie zwischen spektralen Darstellungen der Störbeschleunigungen und Bahnstörungen (sogenannten Lumped Coefficients) und den Schwerefeldkoeffizienten gefunden werden. Die bei Sneeuw (2000) vorgestellte Herleitung dieser Zusammenhänge wurde durchgängig in reeller Schreibweise nachvollzogen, was eine Umsetzung in Programmcode ermöglichte.

In Closed-Loop-Simulationen, für die Bahnstörungen bzw. Störbeschleunigungen mit Hilfe der entwickelten Werkzeuge entlang einer CHAMP-ähnlichen Kreisbahn berechnet wurden, konnte das Störpotential aus diesen über partielle Ableitungen nach Hill praktisch fehlerfrei rekonstruiert werden. Im nächsten Schritt wurden Fouriertechniken eingesetzt, um Lumped Coefficients aus simulierten Bahnstörungszeitreihen zu erhalten. Dazu mußte zuerst eine möglichst gut schließende Wiederholungsbahn gefunden werden, entlang derer die Bahnstörungen periodisch sind.

Aus den Lumped Coefficients wurden mit Hilfe von Transferkoeffizienten Schwerefeldkoeffizienten geschätzt. Dabei wurde ausgenutzt, daß die Normalgleichungsmatrix für diesen Fall in Einzelblöcke zerfällt, deren Dimension nur noch im Bereich des halben Entwicklungsgrades des Schwerefeldes liegt. Da keine perfekt schließende Wiederholungsbahn verwendet wurde, gelang die Rekonstruktion des Schwerefeldes nicht mit der gleichen Genauigkeit wie zuvor, doch immer noch zufriedenstellend.

Eine Ausweitung der Simulation auf beliebige Kreisbahnen brachte den Torus ins Spiel, der den Ortsraum der zweidimensionalen Fouriertransformation darstellt. Werden die Bahnstörungen auf einen Torus projiziert, so braucht sich die Bahn auf ihm nicht zu

schließen, um eine Spektraldarstellung der Bahnstörungen zu erhalten. Es genügt, wenn der Torus gleichmäßig und dicht genug überdeckt wird.

Allerdings müssen die Bahnstörungen auf dem Torus auf ein gleichabständiges Gitter interpoliert werden, wodurch Interpolationsfehler eingeführt werden. Es konnte jedoch ein Iterationsverfahren entwickelt werden, mit dessen Hilfe sich diese Fehler beheben lassen. Im Endeffekt wurde sogar eine bessere Rekonstruktionsgenauigkeit als mit der eindimensionalen Fouriertransformation im Fall der annähernd geschlossenen Bahn erreicht.

Nachdem das Funktionieren der entwickelten Verfahren auf diese Weise für Kreisbahnen nachgewiesen worden war, stand eine Erweiterung der Tests auf leicht exzentrische, numerisch integrierte Orbits an, die eine schon recht gute Näherung an echte CHAMP-Bahnen darstellen. Um einen Vergleich mit dem klassischen numerischen Verfahren zu ermöglichen, wurden durch Integration der Variationellen Gleichungen partielle Ableitungen nach Schwerefeldkoeffizienten und Anfangsbedingungen für ein kleines Testfeld berechnet.

Diese wurden ins bahnbegleitende System transformiert, wo sie direkt mit analytisch berechneten Ableitungen nach Hill verglichen wurden. Bis auf einen konstanten Bias bei Ableitungen in along-track-Richtung und leichte Driften durch die Differenz zwischen nomineller Bahngeschwindigkeit  $n$  und tatsächlicher Bahngeschwindigkeit  $\dot{u}$  wurde eine gute Übereinstimmung festgestellt. Des Weiteren wurden die Ergebnisse der Schwerefeldrekonstruktion vergleichend untersucht.

Dazu mußte jedoch zuerst eine Näherungsbahn definiert werden, da sich schnell herausstellte, daß bei Definition der Bahnstörungen als Differenz zwischen numerisch integrierter und Kreisbahn der lineare Bereich verlassen wurde, für den die Hillgleichungen gelten. Für alle weiteren Tests wurde OSU91A als Näherungsfeld eingeführt und mit diesem ein Näherungorbit integriert. Die Bahnstörungen wurden als Differenz zwischen EGM- und OSU-Orbit gebildet und in ein den Näherungorbit begleitendes Dreibein projiziert. Dem EGM-Orbit wurde dabei die Rolle des beobachteten Orbits zugewiesen und die Transferkoeffizienten auf einem an den EGM-Orbit angepaßten Kreisorbit berechnet.

Um den Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Bahnstörungen von dem rein gravitativ verursachten Anteil zu trennen und ein Weglaufen einer der Bahnen zu verhindern, wurde die Näherungsbahn entweder über ihre Anfangsbedingungen an die beobachtete Bahn angepaßt, oder die Bahnstörungen wurden mit der homogenen und resonanten Lösung der Hillgleichungen gefiltert. Das Ergebnis sah in ersten Tests nahezu identisch aus.

Für die Rekonstruktion von Schwerefeldern wurde eine annähernde Wiederholperiode gesucht und mit der Methode der eindimensionalen Fouriertransformation gearbeitet, da sich der Torusansatz leider als ungünstig erwies. Zu empfindlich reagierte er auf nichtperiodische Störungen in Flugrichtung des Satelliten, welche sich aufakkumulierend zu einer Verwindung zeitlich weit auseinanderliegender, aber auf dem Torus räumlich

benachbarter Bahnbögen gegeneinander und damit zu Unstetigkeiten bei der Fouriertransformation führten.

Zur Verminderung des Schlußfehlers wurde bei der 1D-Fouriertransformation eine Fensterung der Zeitreihe eingesetzt, die zu guten Ergebnissen bei der Koeffizientenschätzung führte. Allerdings mußte auch der Ansatz der Filterung der homogenen und resonanten Anteile der Bahnstörungen aufgegeben werden, da sich Schwerefeldkoeffizienten des niedrigsten Grades 2 nur ungenügend schätzen ließen und es bei Iteration zu Divergenz kam. Nur die zeitintensive Anpassung des Näherungsorts über seine Anfangsbedingungen blieb im Rennen.

Auch für numerisch angepaßte Näherungsorts kam es bei der Verwendung von cross-track Störungen zu Problemen mit dem Koeffizienten  $\bar{C}_{2,0}$ , da dieser nur über resonante Transferkoeffizienten mit den aus der Fouriertransformation hervorgegangenen Lumped Coefficients zusammenhängt. Dies führte bei Iteration zu verlangsamter Konvergenz der restlichen Koeffizienten oder sogar zu Divergenz. Da eine Lösung aus along-track Störungen ebenfalls nur wesentlich langsamer konvergierte als bei ausschließlicher Verwendung der radialen Komponente und nichts zu einer Kombinationslösung beitrug, wurden alle weiteren Experimente nur noch mit radialen Bahnstörungen durchgeführt.

Nachdem die beobachteten Bahnstörungen von zeitlich gleichabständiger auf räumlich gleichabständige Abtastung interpoliert worden waren, konnten schließlich Schwerefelder bis Grad 30 nach Iteration rekonstruiert werden. Dabei ergab sich eine deutliche Verschlechterung für Koeffizienten jenseits der ersten nahezu resonanten Ordnung 15. Deshalb wurden in einem letzten Schritt Störbeschleunigungen mit einbezogen. Diese zeigen kein Resonanzverhalten. Tatsächlich führen sie im Gegensatz zu Bahnstörungen zu einer deutlich besseren Schätzung höhergradiger Koeffizienten, haben jedoch Probleme im niederfrequenten Bereich.

Eine Kombinationslösung aus Bahnstörungen und Störbeschleunigungen, wie sie in Abb. 5.1 schematisch dargestellt ist, erlaubte letztendlich die erfolgreiche Rekonstruktion von Schwerefeldern bis Grad 45, der Rechenaufwand ist allerdings erheblich. Einerseits müssen wie gehabt Bahnstörungen zwischen einer über ihre Anfangsbedingungen angepaßten Näherungsbahn und der beobachteten Bahn gebildet werden, dazu kommt die Berechnung von Näherungsbeschleunigungen als Gradienten des Näherungsschwerefeldes entlang der beobachteten Bahn (beide Schritte sind für jede Iteration zu wiederholen) sowie die einmalige Bestimmung der tatsächlichen Beschleunigungen auf den Satelliten durch zweifache Differentiation der beobachteten Bahn.

Die erzielten Ergebnisse konnten für Bahnen, welche numerisch aus Bahnelementen der GRACE-Satelliten integriert wurden, bestätigt werden. Sie können also als repräsentativ für Satellitenorbits mit geringer Exzentrizität zwischen 400 und 500 km Höhe angesehen werden. Dabei wurde nicht nur auf Bahnsimulation mit MATLAB zurückgegriffen, sondern auch das zur regulären Prozessierung von CHAMP und GRACE am GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ) eingesetzte Programm EPOS (Earth Parameter and

Orbit Determination Software) kam zum Einsatz.

Der nächste Schritt wäre, das entwickelte Verfahren auf tatsächlich beobachtete Satellitenorbits anzuwenden. Dazu wären jedoch rein gravitativ gestörte Orbits nötig. Sie entstehen durch ein aktives Orbit-Kontroll-System, welches während des Fluges nicht-gravitativ Einflüsse eliminiert. Solche Orbits sollen von GOCE geliefert werden, sobald diese Mission im Orbit ist (geplanter Start 2006).

Oder es würde nötig, aus beobachteten CHAMP- oder GRACE-Bahnen durch Differentiation die Beschleunigungen auf die Satelliten zu berechnen, diese um die mit den mitfliegenden Akzelerometern gemessenen nichtgravitativen Störbeschleunigungen zu korrigieren und durch Integration eine rein gravitativ gestörte Bahn herzustellen. Es ist fraglich, ob die in der Simulation erzielten Ergebnisse diesen Aufwand rechtfertigen.

Es muß also abschließend festgestellt werden, daß im Rahmen dieser Arbeit die Hill-Gleichungen weder für die tatsächliche Bahnberechnung niedrigfliegender Satelliten über Zeiträume, die den Bruchteil eines Umlaufes übersteigen, noch für die schnelle Schätzung hochauflösender Schwerefelder aus Bahnbeobachtungen uneingeschränkt eingesetzt werden konnten.

Hauptursache sind resonante Effekte, die durch die spezielle Lösung der Hill-Gleichungen nicht dargestellt werden und nicht befriedigend aus den Bahnstörungen herausgefiltert werden konnten. Abhilfe könnte die gemeinsame Auswertung verschiedener Bahnen mit unterschiedlichem Resonanzverhalten schaffen. Vielleicht gelingt es auch eines Tages, die störenden Effekte besser zu isolieren und aus den Beobachtungen zu entfernen.

Ein weiteres prinzipielles Problem stellt der iterative Charakter der entwickelten Verfahren dar. Einzelne, schlecht bestimmbare Koeffizienten (z.B.  $\bar{C}_{2,0}$ ) beeinträchtigen im Lauf der Iteration durch Spectral-Leakage-Effekte die Konvergenz der Lösung. Hier könnten Regularisierungsverfahren, aber auch eine Verbesserung des Näherungsfeldes durch neue Ergebnisse der CHAMP- und GRACE-Missionen helfen.

Dagegen bilden die spezielle Lösung der Hill-Gleichungen und die daraus abgeleiteten Transferkoeffizienten schon jetzt ein mächtiges und schnelles Simulationswerkzeug, mit dem die auf den Satelliten wirkenden Schwerebeschleunigungen und daraus resultierenden Bahnstörungen im Frequenz- und Ortsraum abgeschätzt werden können. Dies ist besonders nützlich, wenn Empfindlichkeiten und Rauschverhalten z.B. von Beschleunigungsmessern, Gradiometern, oder aber auch direkten Entfernungsmessern (wie dem K-Band-Link im Fall von GRACE) als PSDs spektral gegeben sind.

Die durch die Messinstrumente am Satellitenort auftretenden Messfehler können im Frequenzraum direkt an den simulierten Beschleunigungen oder Bahnstörungen angebracht und durch eine Kleinste-Quadrate-Schätzung auf die Schwerefeldkoeffizienten fortgepflanzt werden, siehe dazu Sneeuw (2000). Probleme durch exzentrische Bahnen können durch geeignete Wahl der Bahnparameter vermieden werden, da sich diese Annahmen nicht nachhaltig auf das Simulationsergebnis auswirken. Einzig resonante Effekte müssen

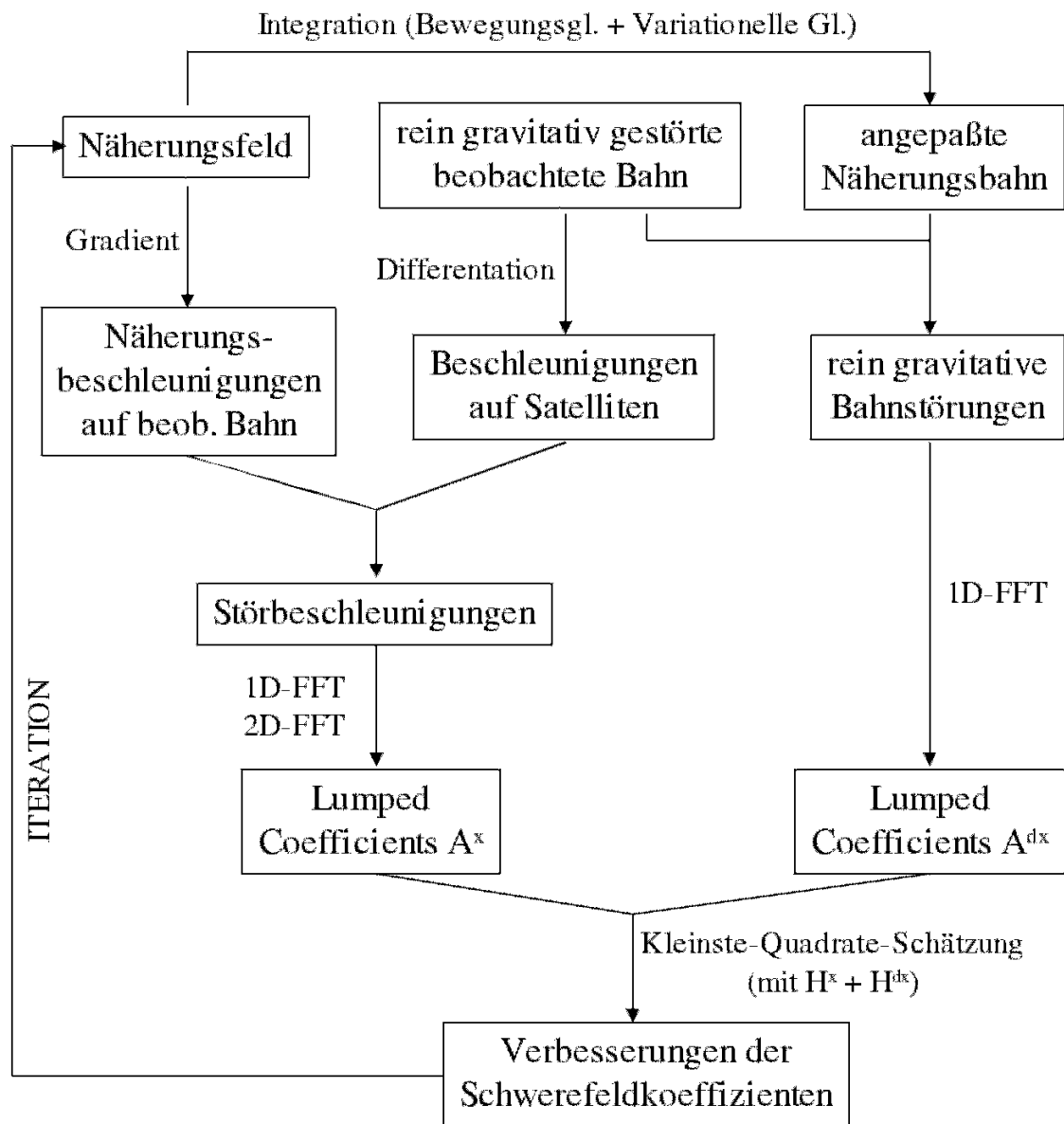


Abbildung 5.1.: Ablaufschema der Schätzung von Schwerefeldkoeffizienten aus Bahnstörungen und Störbeschleunigungen.

aus der Simulation ausgeklammert werden, betreffen aber jeweils nur wenige Schwerefeldkoeffizienten.

## 6. Literaturliste

**Balmino, G. (1993):** *Orbit Choice and the Theory of Radial Orbit Error for Altimetry*, in R. Rummel und F. Sansò (Eds.): *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, Lecture Notes in Earth Sciences **50**, Springer-Verlag, Berlin

**Balmino, G., E. Schrama und N. Sneeuw (1994):** *Compatibility of first-order circular orbit perturbations theories; consequences for cross-track inclination functions*, *Journal of Geodesy* **70**, 554-561, Springer-Verlag, Berlin

**Colombo, O.L. (1984):** *The global mapping of gravity with two satellites*, Report of the Geodetic Commission of the Netherlands, **7:3**, Delft

**Colombo, O.L. (1986):** *Notes on the Mapping of the Gravity Field using Satellite Data*, in H. Sünnkel (Ed.): *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, Lecture Notes in Earth Sciences **7**, Springer-Verlag, Berlin

**Gerlach, C., N. Sneeuw, P.N.A.M. Visser und D. Svehla (2003):** *CHAMP Gravity Field Recovery with the Energy Balance Approach*, in C. Reigber, H. Lühr, P. Schwintzer (Eds.): *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, 134-139, Springer Verlag, Berlin

**Heiskanen, W.A. und H. Moritz (1967):** *Physical Geodesy*, Freeman, San Francisco

**Hill, G.W. (1878):** *Researches in the Lunar Theory*, *American Journal of Mathematics* I: 5-26, 129-147, 245-260

**Ilk, K.H. (1983):** *Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper - Gravitationswechselwirkungen*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 288

**International Association of Geodesy (1980):** *Geodetic Reference System 1980*, *Bulletin Géodésique*, **54:3**

**Kaula, W.M. (1966):** *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham Massachusetts

**Lemoine, F.G., S.C. Kenyon, J.K. Factor, R.G. Trimmer, N.K. Pavlis, D.S. Chinn, C.M. Cox, S.M. Klosko, S.B. Luthcke, M.H. Torrence, Y.M. Wang, R.G. Williamson, E.C. Pavlis, R.H. Rapp und T.R. Olson (1998):** *Geopotential model EGM96*, NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt

- Meyer, M. (1998):** *Signalverarbeitung*, Vieweg-Verlag, Wiesbaden
- Montenbruck, O., E. Gill (2000):** *Satellite Orbits*, Springer-Verlag, Berlin
- Rapp, R.H., Y.M. Wang und N.K. Pavlis (1991):** *The Ohio State 1991 Geopotential and Sea Surface Topography Harmonic Coefficient Models*, Rep. 410, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus
- Reigber, C., H. Lühr und P. Schwintzer (2000):** *CHAMP mission status and perspectives*, Suppl. to EOS Transactions, **81**, F307
- Rummel, R. (1992):** *Physical Geodesy 1*, Collegediktaat, Fakulteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft
- Sambridge, M., J. Braun and H. McQueen (1995):** *Geophysical parametrization and interpolation of irregular data using natural neighbours*, Geophysical Journal International **122**, 837-857
- Scheinert, M. (1996):** *Zur Bahndynamik niedrigfliegender Satelliten*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 435
- Schrama, E.J.O. (1989):** *The role of orbit errors in processing of satellite altimeter data*, Publications on Geodesy, New Series **33**, Netherlands Geodetic Commission
- Sneeuw, N. (1991):** *Inclination Functions: Group Theoretical Background and a Recursive Algorithm*, Reports of the Faculty of Geodetic Engineering, Delft University of Technology
- Sneeuw, N. (1992):** *Representation coefficients and their use in satellite geodesy*, manuscripta geodaetica **17**, 117-123
- Sneeuw, N. (2000):** *A semi-analytical approach to gravity field analysis from satellite observations*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 527
- Sneeuw, N., C. Gerlach, J. Müller, H. Oberndorfer und R. Rummel (2000):** *Fundamentals and Applications of the Gravity Field Mission GOCE*, in R. Rummel, H. Drewes, W. Bosch und H. Hornik (Hrsg.): *Towards an Integrated Global Geodetic Observing System (IGGOS)*, IAG Sympos., 205-208, Springer Verlag, Berlin
- Snieder, R. und J. Tampert (2000):** *Linear and nonlinear inverse problems*, in A. Dermanis, A. Grün und F. Sansò (Eds.): *Geomatic Methods for the Analysis of Data in the Earth Sciences*, Lecture Notes in Earth Sciences **95**, Springer-Verlag, Berlin
- Tapley, B.D. und C. Reigber (2001):** *The GRACE mission: status and future plans*. Suppl. to EOS Transactions, **82**, G41C-02
- Walter, H.G. (1967):** *Conversion of osculating orbital elements into mean elements*, Astronomical Journal, **72**, 994-997



**Wessel, P. und W.H.F. Smith (1991):** *Free software helps map and display data*, EOS Trans. AGU, **72**, 441

**Wigner, E.P. (1959):** *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York

**Wolf, H. (1968):** *Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, Dümmler Verlag, Bonn

# A. Koordinatentransformationen

## A.1. Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und Keplerelementen

Die Anfangswerte eines Bahn Bogens werden oft in Keplerelementen gegeben, die Integration findet darauf in inertialen kartesischen Koordinaten statt, die danach wiederum in Keplerelemente transformiert werden, aus denen sich die Toruskoordinaten  $u$  und  $\Lambda$  bestimmen lassen.

Die Transformationen zwischen inertialen kartesischen Koordinaten und Keplerelementen sind bei Kaula (1966) beschrieben, sollen hier aber noch einmal wiedergegeben werden, da sie ständig gebraucht werden. Ergänzend dazu soll der Übergang zu Toruskoordinaten und deren ersten Zeitableitungen hergeleitet werden.

Für ein inertiales, geozentrisches Koordinatensystem gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} &= R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega) \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega) \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit den kartesischen Koordinaten  $x_i, y_i, z_i$  und den Keplerelementen  $a$  (große Halbachse der Satellitenbahn),  $e$  (Exzentrizität),  $I$  (Bahnneigung),  $\omega$  (Argument des Perigäums),  $\Omega$  (Rektaszension des aufsteigenden Knotens) und  $E$  (exzentrische Anomalie), bzw.  $f$  (wahre Anomalie). Der aktuelle Abstand des Satelliten  $r$  zum Koordinatenursprung, der in einem der Brennpunkte der Bahnellipse liegt, ergibt sich zu

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}.$$

Vervollständigt wird der state-vector des Satelliten durch seine Geschwindigkeit in kar-

tesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} &= R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega) \begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix} \frac{na}{1-e \cos E} \\ &= R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega) \begin{pmatrix} -\sin f \\ e + \cos f \\ 0 \end{pmatrix} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}, \end{aligned}$$

mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Satelliten

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}.$$

Steht nur die mittlere Anomalie  $M$  zur Verfügung, so läßt sich die exzentrische Anomalie  $E$  aus ihr iterativ bestimmen

$$E_0 = M, \quad E_{i+1} = E_0 + e \sin E_i.$$

Die umgekehrte Bestimmung von Keplerelementen aus inertialen kartesischen Koordinaten ist etwas umständlicher. Mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \underline{h} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \underline{x}_i \times \dot{\underline{x}}_i, \\ h &= |\underline{h}|, \\ \underline{p} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = R_1(I)R_3(\Omega)\underline{x}, \\ r &= |\underline{x}_i|, \\ v &= |\dot{\underline{x}}_i| \quad \text{und} \\ \dot{r} &= \frac{\underline{x}_i \cdot \dot{\underline{x}}_i}{r} \end{aligned}$$

lassen sich die Parameter der Bahnellipse

$$\begin{aligned} a &= \frac{GMr}{2GM - rv^2} \\ e &= \sqrt{1 - \frac{h^2}{GMa}}, \end{aligned}$$

deren Stellung im Raum

$$\begin{aligned} \Omega &= \tan^{-1} \frac{h_1}{-h_2} \\ I &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h_3} \end{aligned}$$

und die Position des Satelliten auf der Bahnellipse

$$u = \omega + f = \tan^{-1} \frac{p_2}{p_1}$$

bestimmen. Soll  $u$  weiter aufgeteilt werden, so führt der Weg über die exzentrische Anomalie  $E$  aus

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{a - r}{ae} \\ \sin E &= \frac{r\dot{r}}{e\sqrt{GMa}} \end{aligned}$$

zur wahren Anomalie

$$f = \tan^{-1} \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{\cos E - e}$$

und schließlich zur Perigäumslage

$$\omega = u - f.$$

Werden auch säkulare Bewegungen in  $I$  und  $\Omega$  und die Orbitfrequenzen  $\dot{u}, \dot{\Lambda}$  benötigt, so erhält man durch zeitliche Ableitung der bei Kaula gegebenen Zusammenhänge mit Hilfe der Größen

$$\begin{aligned} \dot{\underline{h}} &= \underline{x}_i \times \ddot{\underline{x}}_i \text{ und} \\ \dot{\underline{p}} &= \dot{R}_1(I)R_3(\Omega)\underline{x}_i + R_1(I)\dot{R}_3(\Omega)\underline{x}_i + R_1(I)R_3(\Omega)\dot{\underline{x}}_i \end{aligned}$$

die gewünschten Driften zu

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{h_1\dot{h}_2 - \dot{h}_1h_2}{h_1^2 + h_2^2} \\ \dot{I} &= \frac{(\dot{h}_1 + \dot{h}_2)h_3 - (h_1^2 + h_2^2)\dot{h}_3}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ \dot{u} &= \frac{\dot{p}_2p_1 - p_2\dot{p}_1}{p_1^2 + p_2^2} \\ \dot{\Lambda} &= \dot{\Omega} - \omega_E. \end{aligned}$$

Toruskoordinaten lassen sich aus Keplerelementen durch Zusammenfassen der wahren Anomalie  $f$  und des Arguments des Perigäums  $\omega$  zum Argument der Breite  $u$  des Satelliten, und durch Reduktion der Knotendrehung  $\Omega$  um die Erdorientierung  $\Theta$  (Greenwich Sidereal Time) zum Argument der Länge  $\Lambda$  des Satelliten erhalten

$$\begin{aligned} u &= \omega + f, \\ \Lambda &= \Omega - \Theta. \end{aligned}$$

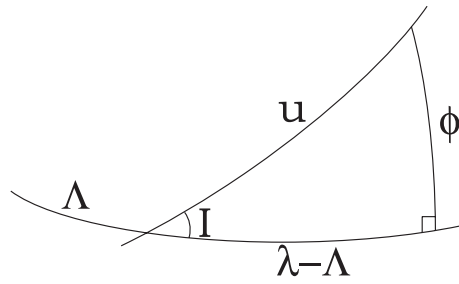


Abbildung A.1.: *Sphärisches Dreieck: aufsteigender Bahnknoten - Satellit - Fußpunkt auf Äquatorebene.*

Sind erdfeste kartesische Koordinaten bzw. Polarkoordinaten  $\lambda, \phi$  des Satelliten gegeben, so läßt sich  $u$  über sphärische Geometrie (Abb. A.1) auch direkt aus diesen bestimmen

$$\begin{aligned} \sin u &= \frac{\sin \phi}{\sin I} \quad \text{für } \phi \leq I, \\ \cos u &= \cos(\lambda - \Lambda) \cos \phi. \end{aligned}$$

Positionen mit  $\phi > I$  erreicht der Satellit nicht, dies sind die schon erwähnten Polarlöcher.

# B. Numerische Integration

## B.1. Bahnintegration

Im Abschnitt 2.1 wurden die Bewegungsgleichungen eines Satelliten im Erdschwerefeld

$$\ddot{\underline{x}}_i = R \nabla V$$

vorge stellt, später bei der Suche nach einer bestmöglichen Näherungsbahn, wurde ein numerisch integrierter Satellitenorbit vorgeschlagen. Deshalb soll hier kurz auf die numerische Integration der Bewegungsgleichungen des Satelliten eingegangen werden.

Da Integratoren normalerweise nur einfache Integrale lösen können, werden die 3 Differentialgleichungen 2. Ordnung in 6 Gleichungen 1. Ordnung umgeformt, indem die ersten Ableitungen  $\dot{\underline{x}}_i$  als unabhängige Variablen eingeführt werden. In Matrixschreibweise lassen sich die 6 Differentialgleichungen dann folgendermaßen schreiben

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \\ \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_t} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_t} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_t} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y_t} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y_t} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y_t} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z_t} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z_t} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z_t} \\ \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix}.$$

Die Integration selber findet am günstigsten im inertialen System statt, da dort keine Scheinkräfte auftreten. Inertial müssen in diesem Fall auch die Startwerte  $\underline{x}_{0_i}$  und  $\dot{\underline{x}}_{0_i}$  vorliegen. Zur Berechnung des Schwerefeldgradienten werden die Satellitenkoordinaten daraufhin zuerst in kartesische terrestrische Koordinaten  $\underline{x}_t = R^T \underline{x}_i$  und dann in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} \\ \vartheta &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}{z_t} \\ \lambda &= \tan^{-1} \frac{y_t}{x_t} \end{aligned}$$

transformiert, welche in die partiellen Ableitungen des Potentials nach  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\lambda$  ein-

gesetzt werden

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{GM}{r^2} \left( 1 + \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \right) \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l m (\bar{S}_{l,m} \cos m\lambda - \bar{C}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos \vartheta).\end{aligned}$$

Um den Gradienten in kartesischen Koordinaten zu erhalten, werden schließlich noch die partiellen Ableitungen der Kugelkoordinaten nach kartesischen Koordinaten benötigt

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_t} &= \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}} = \sin \vartheta \cos \lambda \\ \frac{\partial r}{\partial y_t} &= \frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}} = \sin \vartheta \sin \lambda \\ \frac{\partial r}{\partial z_t} &= \frac{z_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}} = \cos \vartheta \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_t} &= \frac{x_t z_t}{(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) \sqrt{x_t^2 + y_t^2}} = \frac{\cos \vartheta \cos \lambda}{r} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y_t} &= \frac{y_t z_t}{(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) \sqrt{x_t^2 + y_t^2}} = \frac{\cos \vartheta \sin \lambda}{r} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z_t} &= -\frac{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} = -\frac{\sin \vartheta}{r} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_t} &= -\frac{y_t}{x_t^2 + y_t^2} = -\frac{\sin \lambda}{r \sin \vartheta} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y_t} &= \frac{x_t}{x_t^2 + y_t^2} = \frac{\cos \lambda}{r \sin \vartheta} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z_t} &= 0.\end{aligned}$$

Für die eigentliche Integration der so erhaltenen 6 Differentialgleichungen stehen zahlreiche Methoden zur Verfügung. Als besonders geeignet haben sich Predictor-Korrektor-Verfahren herausgestellt. Weitergehende Informationen zu Integratoren finden sich z.B. bei Montenbruck (2000).

## B.2. Integration der Variationellen Gleichungen

Soll eine numerisch integrierte Bahn als Näherungsbahn zur Definition der Bahnstörungen benutzt werden, so ist es notwendig, sie über die Schätzung optimaler Anfangsbedingungen an die beobachtete Satellitenbahn anzupassen, damit die aus der Differenz der beiden Bahnen berechneten Bahnstörungen möglichst nur gravitative Anteile enthalten. Dazu werden die partiellen Ableitungen der State-Vektoren nach den Anfangsbedingungen  $\frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_{0_i}}$ ,  $\frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0_i}}$ ,  $\frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_{0_i}}$  und  $\frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0_i}}$  benötigt. Diese erhält man aus der Integration der Variationellen Gleichungen (Montenbruck, 2000)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{\underline{x}}_i}{\partial \underline{x}_{0_i}} &= \frac{\partial \ddot{\underline{x}}_i}{\partial \underline{x}_i} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_{0_i}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \underline{x}_i^2} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_{0_i}}, \quad \left( \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{x}_{0_i}} \right)_0 = I \\ \frac{\partial \ddot{\underline{x}}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0_i}} &= \frac{\partial \ddot{\underline{x}}_i}{\partial \underline{x}_i} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0_i}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \underline{x}_i^2} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0_i}}, \quad \left( \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \dot{\underline{x}}_{0_i}} \right)_0 = 0, \end{aligned}$$

$I$  steht hier für die Einheitsmatrix. Parallel dazu können partielle Ableitungen nach Schwerefeldkoeffizienten  $\frac{\partial \underline{x}_i}{\partial K_{l,m}}$  mitintegriert werden

$$\frac{\partial \ddot{\underline{x}}_i}{\partial K_{l,m}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \underline{x}_i^2} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial K_{l,m}} + \frac{\partial^2 V}{\partial \underline{x}_i \partial K_{l,m}}, \quad \left( \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial K_{l,m}} \right)_0 = 0.$$

Diese werden im Rahmen dieser Arbeit zwar nicht zur Bestimmung von Schwerefeldkoeffizienten benutzt, doch dienen sie im Vergleich zu Ergebnissen der Hill-Gleichungen als Referenz.

Führt man wieder die ersten Zeitableitungen als unabhängige Variablen ein, so lassen sich die sechs Differentialgleichungen 1. Ordnung in Matrixschreibweise folgendermaßen formulieren

$$Y = FX + f$$

mit der ersten zeitlichen Ableitung der State-Transition-Matrix und der partiellen Ableitungen des State-Vektors nach exemplarisch einem Schwerefeldkoeffizienten

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial x_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial y_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial z_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \dot{y}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \dot{z}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial x_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial y_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial z_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial \dot{x}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial \dot{y}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial \dot{z}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial x_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial y_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial z_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial \dot{x}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial \dot{y}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial \dot{z}_{0_i}} & \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial y_{0_i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial z_{0_i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{y}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{z}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_{0_i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{0_i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial z_{0_i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{x}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{y}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{z}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial x_{0_i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial y_{0_i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial z_{0_i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{x}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{y}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{z}_{0_i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial K_{l,m}} \end{pmatrix},$$

auf der linken Seite, und der zeitlichen Ableitung der Sensitivitätsmatrix (welche die



Ableitungen des State-Vektors nach den Modellparametern enthält), die sich aus

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial z_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z_i} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial z_i} & \frac{\partial^2 V}{\partial z_i^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial x_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial x_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial x_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial x_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial x_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial x_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial y_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial y_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial y_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial y_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial y_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial y_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial z_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial z_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial z_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial z_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial z_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial z_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial K_{l,m}} \\ \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial x_{0i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial y_{0i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial z_{0i}} & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial K_{l,m}} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial K_{l,m}} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial K_{l,m}} \left( \frac{\partial V}{\partial y_i} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial K_{l,m}} \left( \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial K_{l,m}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial K_{l,m}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial K_{l,m}} \end{pmatrix}$$

zusammensetzt, auf der rechten Seite. Die Anfangsbedingungen für  $X$  lauten denkbar einfach

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Matrix  $F$  zu berechnen, braucht man zu jedem Integrationszeitpunkt die zweiten Ableitungen des Potentials nach inertialen kartesischen Koordinaten, die man erhält, indem man den Marussi-Tensor in Kugelkoordinaten bildet (tiefgestellte Koordinaten  $x, y, z$  bzw.  $r, \vartheta, \lambda$  bedeuten in den folgenden Formeln „Ableitung nach“)

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} V_{rr} & V_{r\vartheta} & V_{r\lambda} \\ V_{r\vartheta} & V_{\vartheta\vartheta} & V_{\vartheta\lambda} \\ V_{r\lambda} & V_{\vartheta\lambda} & V_{\lambda\lambda} \end{pmatrix},$$

ihn in ein tangenciales System transformiert (Scheinert, 1996), dessen Lage durch  $r, \vartheta, \lambda$  definiert wird und dessen Koordinatenachsen radial nach außen, tangential in  $\vartheta$ -Richtung und tangential in  $\lambda$ -Richtung zeigen

$$V_{ij\text{tang.}} = \begin{pmatrix} V_{rr} & \frac{1}{r}V_{r\vartheta} - \frac{1}{r^2}V_{\vartheta} & \frac{1}{r\sin\vartheta}V_{r\lambda} - \frac{1}{r^2\sin\vartheta}V_{\lambda} \\ \frac{1}{r}V_{r\vartheta} - \frac{1}{r^2}V_{\vartheta} & \frac{1}{r^2}V_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{r}V_r & \frac{1}{r^2\sin\vartheta}V_{\vartheta\lambda} - \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}V_{\lambda} \\ \frac{1}{r\sin\vartheta}V_{r\lambda} - \frac{1}{r^2\sin\vartheta}V_{\lambda} & \frac{1}{r^2\sin\vartheta}V_{\vartheta\lambda} - \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}V_{\lambda} & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}V_{\lambda\lambda} + \frac{1}{r}V_r + \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}V_{\vartheta} \end{pmatrix}$$

und darauf ins geozentrische inertielle System rotiert

$$V_{ij\text{inert.}} = R_{\text{inert.-tang.}}^T V_{ij\text{tang.}} R_{\text{inert.-tang.}} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{pmatrix}.$$

Die Rotationsmatrix setzt sich folgendermaßen zusammen

$$R_{\text{inert.-tang.}} = R_1(\pi)R_3\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)R_1\left(\frac{\pi}{2}\right)R_3(\lambda)R_3(\theta)$$

und die zweiten Ableitungen des Potentials nach Kugelkoordinaten lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{GM}{r^3} \left( 2 + \sum_{l=2}^{\infty} (l+1)(l+2) \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos\vartheta) \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \vartheta} &= -\frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\cos\vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \lambda} &= -\frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l m(\bar{S}_{l,m} \cos m\lambda - \bar{C}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos\vartheta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} &= \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \frac{\partial^2 \bar{P}_{l,m}(\cos\vartheta)}{\partial \vartheta^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial \lambda} &= \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l m(\bar{S}_{l,m} \cos m\lambda - \bar{C}_{l,m} \sin m\lambda) \frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\cos\vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} &= -\frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l m^2 (\bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos\vartheta). \end{aligned}$$

Vorschriften zur rekursiven Berechnung von  $\frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\cos\vartheta)}{\partial \vartheta}$  findet man z.B. bei Ilk (1983).

Nun müssen noch die Komponenten der Matrix  $f$  bereitgestellt werden. Diese erhält man, indem man die Ableitungen des Potentials nach inertialen kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten ausdrückt

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \\ \frac{\partial V}{\partial y_i} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y_i} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y_i} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y_i} \\ \frac{\partial V}{\partial z_i} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z_i} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z_i} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z_i} \end{aligned}$$

und deren Ableitung nach Schwerfeldkoeffizienten bildet

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{K}_{l,m}} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) &= -\frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \left\{ \begin{array}{c} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\}_S^C \bar{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{K}_{l,m}} \left( \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) &= \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \left\{ \begin{array}{c} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\}_S^C \frac{\partial \bar{P}_{l,m}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{K}_{l,m}} \left( \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) &= \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l m \left\{ \begin{array}{c} -\sin m\lambda \\ \cos m\lambda \end{array} \right\}_S^C \bar{P}_{l,m}(\cos \vartheta),\end{aligned}$$

die schon im letzten Abschnitt bereitgestellten Ableitungen von Kugelkoordinaten nach erdfesten kartesischen Koordinaten ins inertielle System rotiert

$$\frac{\partial r}{\partial \underline{x}_i} = R \frac{\partial r}{\partial \underline{x}_t}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \underline{x}_i} = R \frac{\partial \vartheta}{\partial \underline{x}_t}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \underline{x}_i} = R \frac{\partial \lambda}{\partial \underline{x}_t}$$

und alles in  $f$  zusammensetzt.

Da für die Integration der Variationellen Gleichungen zu jedem Integrationszeitpunkt die aktuelle Position des Satelliten benötigt wird, führt man sie am besten gemeinsam mit der Bahnintegration durch. Möchte man sie für eine schon vorliegende Bahn (in unserem Fall die beobachtete Satellitenbahn) berechnen, so muß die aktuelle Position des Satelliten auf dieser Bahn jeweils interpoliert werden. Für polnahe Bahnen ist es dabei wichtig, daß nicht in Kugelkoordinaten, sondern in kartesischen Koordinaten interpoliert wird, da die Breite des Satelliten nahe des Pols sehr schnell variiert. Eine Lagrange-6 Punkt-Interpolation hat sich als geeignet herausgestellt.