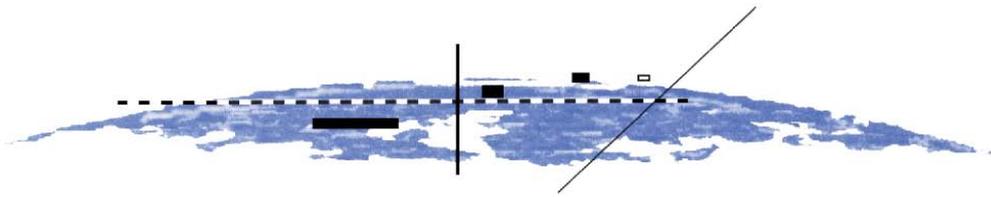


GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

Scientific Technical Report

ISSN 1610-0956



GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Roland Schmidt

**Zur Bestimmung
des cm-Geoids und dessen
zeitlicher Variationen mit
GRACE**

Scientific Technical Report STR07/04

Referent: Prof. Dr.-Ing. K. H. Ilk
Koreferent: Prof. Dr. techn. W.-D. Schuh

Tag der mündlichen Prüfung: 16. März 2007

Impressum

GeoForschungsZentrum Potsdam
in der Helmholtz-Gemeinschaft
Telegrafenberg
D-14473 Potsdam

e-mail: postmaster@gfz-potsdam.de
www: <http://www.gfz-potsdam.de>

Gedruckt in Potsdam
April 2007

ISSN 1610-0956

Die vorliegende Arbeit ist in elektronischer Form erhältlich:

- in der Schriftenreihe Scientific Technical Reports (STR)
des GeoForschungsZentrums Potsdam unter
<http://www.gfz-potsdam.de/bib/zbstr.htm>
- auf dem Hochschulserver der ULB Bonn unter
http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online

Roland Schmidt

Zur Bestimmung des cm-Geoids und dessen zeitlicher Variationen mit GRACE

Inaugural-Dissertation zur
Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
der Hohen Landwirtschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

vorgelegt am 27. Dezember 2006

D98

Scientific Technical Report STR07/04

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Analyse­methode unter Verwendung der dynamischen Methode zur Berechnung hochgenauer und hochauflösender Schwerefeldmodelle in Form von Kugelfunktionskoeffizienten auf der Grundlage der neuartigen Daten der Satellitenmission GRACE entwickelt. Neben deren Erweiterung um die Verarbeitung der Messungen nichtgravitativer Störbeschleunigungen von drei-achsigen Akzelerometerinstrumenten sowie von μm -genauen Abstandsmessungen zwischen den Zwillingsatelliten der GRACE-Mission werden insbesondere Untersuchungen im Hinblick auf eine geeignete Parametrisierung des Bewegungsproblems und deren Einfluss auf die Feldmodelle vorgenommen. Nach Auswahl einer Vorgehensweise wird ein statisches Schwerefeldmodell sowie 35 monatsweiser Feldmodelle auf der Grundlage von drei Jahren Missionsdaten berechnet. Vergleiche zu unabhängigen Datensätzen und extern berechneten GRACE-Schwerefeldmodellen sowie Bahnanpassungstests für geodätische Satelliten zeigen die hohe Qualität und Vielseitigkeit der vorliegenden GRACE-basierten Schwerefeldmodelle und demonstrieren dadurch allgemein den enormen Gewinn für die Schwerefeldbestimmung mit GRACE. Neben einem cm- bzw. mm-genauen Geoid mit einer bisher unerreichten Auflösung von einigen hundert Kilometern, können mit den vorliegenden GRACE-basierten Monatsmodellen hydrologisch induzierte Schwere­schwankungen bis zu einer unteren Grenze von etwa 500 km Halbwellenlänge abgeleitet werden. Problematisch sind dabei jedoch die bekannten systematischen Verfälschungen mittel- und kurzweiliger Signalanteile in den GRACE-Modellen, die durch verschiedene Aliasing-Effekte hervorgerufen werden. Eine Abschätzung der Genauigkeit der Modelle deutet an, dass mit der vorliegenden Modellreihe die in Vorflugstudien erzielbare Genauigkeit nur bis auf einen Faktor 10 für das statische Feld bzw. 17.5 für die Monatslösungen erreicht wird. Allerdings ist eine umfassende Qualitätsbeurteilung GRACE-basierter Schwerefeldmodelle gegenwärtig schwierig, da keine mit GRACE vergleichbar genauen und gleichzeitig unabhängigen Datensätze zur Verfügung stehen.

Summary

In this thesis an approach for the computation of highly accurate gravity field models of the Earth in terms of spherical harmonic coefficients from novel data of the GRACE satellite mission based on the dynamic approach is developed. Along an extension of the method with respect to the exploitation of measurements of non-conservative forces from three-axial accelerometers and μm -precise inter-satellite measurements of the GRACE twin satellite mission, investigations on an appropriate parametrization of the orbital motion and its impact on the derived gravity models are carried out. After a selection of an approach a static as well as 35 monthly gravity field models are computed from three years of mission data. Comparisons with independent data sets and externally computed GRACE gravity models as well as orbit determination tests for geodetic satellites show the high quality and capability of the given GRACE-based gravity models, thus demonstrating the enormous gain in gravity recovery from GRACE in general. Besides a cm- respectively mm-accurate geoid at unprecedented resolutions of a few hundred kilometers, the given GRACE-based monthly gravity models allow for the recovery of hydrologically induced gravity variations down to spatial lengths of about 500 km (half wavelength). However, problematic are the well-known systematic degradations for medium and short-wavelength signals in the GRACE models, caused by various types of aliasing. An assessment of the models' accuracy indicates, that with the given model series the anticipated accuracy from pre-flight studies is reached only up to a factor of 10 for the static respectively a factor of 17.5 for the monthly gravity field models. Yet a comprehensive evaluation of the quality of GRACE-based gravity models remains difficult, since no independent data of comparable accuracy to GRACE is currently available.

Dank

Mein herzlichster Dank geht an Prof. Dr. Dr. Ch. Reigber. Neben der Anregung zu und einem fortwährenden Interesse an dieser Arbeit möchte ich mich vor allem auch für die Möglichkeit zur Mitarbeit in einem international einmaligen und hochaktuellen Forschungsprojekt wie der GRACE-Mission bedanken.

Herrn Prof. Dr. K. H. Ilk danke ich außerordentlich für die Übernahme des Erstgutachtens, seinem fortwährenden Interesse und seinem vorbildlichen Einsatz in der Schlussphase der Arbeit. Dies gilt ebenso für Herrn Prof. Dr. W.-D. Schuh, dem ich sehr herzlich für die Übernahme und die zeitnahe Erstellung des Zweitgutachtens danke.

Ein besonderer Dank gilt meinen Kollegen am GeoForschungsZentrum (GFZ) in Potsdam und in Oberpfaffenhofen, die mich durch zahlreiche Diskussionen in verschiedenen Themengebieten der Arbeit unterstützt und so zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Ich danke auch für das Verständnis und die Freiräume in der Schreibphase der Arbeit.

Dem GeoForschungsZentrum Potsdam danke ich sehr für die Möglichkeit zur Erstellung dieser Arbeit im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter.

Zu guter Letzt geht mein innigster Dank an meine Familie, meine Freunde und insbesondere meine Freundin Verena, die mir in den letzten Jahren mit Zuspruch, Geduld und Verständnis zur Seite standen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
1.1. Hintergrund	7
1.2. Zielsetzung der Arbeit	10
2. Das Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE)	12
2.1. Satellite-to-Satellite-Tracking (SST) vom Typ hoch-niedrig	18
2.2. Satellite-to-Satellite-Tracking (SST) vom Typ niedrig-niedrig	22
2.3. Akzelerometer-Daten	27
2.4. Sternkamera-Daten	31
3. Modellierung des orts- und zeitvariablen Gravitationsfeldes der Erde	36
3.1. Allgemeines	36
3.2. Konzept der Ableitung von Massenvariationen aus GRACE-Schwerefeldmodellen	43
4. Dynamische Methode der Gravitationsfeldanalyse aus Satellitendaten	49
4.1. Schätzverfahren	49
4.2. Bewegungsgleichung und Kräfte Modelle	52
4.3. Beobachtungsgleichungen Satellite-to-Satellite-Tracking	55
4.4. Akzelerometer- und Sternkameradaten	58
4.5. Kinematisch-empirische Parameter	59
5. Design GRACE-only Gravitationsfeldmodelle	61
5.1. Allgemeines	61
5.2. Referenzsysteme, Hintergrundmodelle und Konstanten	64
5.3. Parametrisierung von Akzelerometer und K-Band-Instrument	66
5.4. Einfluss der Bogenlänge	73
5.5. Lösungsraum der Stokes-Koeffizienten	75
5.6. Ablaufschema	79
6. Qualitätsanalyse	85
6.1. Innere Genauigkeit	85
6.2. Äußere Genauigkeit	90
7. Ergebnisse statisches und zeitvariables Gravitationsfeld	99
7.1. Statisches Feld	99
7.2. Zeitvariables Feld	107
8. Zusammenfassung und Ausblick	116
Literaturverzeichnis	119
A. Akzelerometer-Parameter	126

B. Apriori-Modelle zeitvariables Schwerefeld	128
B.1. Gezeiten der festen Erde	128
B.2. Ozeangezeiten	132
B.3. Atmosphärengzeiten	133
B.4. Kurzzeitmassenvariationen der Atmosphäre und Ozeane	135
B.5. Säkulare Feldvariationen	136
C. Kenngrößen und Genauigkeitsmaße Schwerefeldfunktionale	137
D. Abkürzungen	140

1. Einleitung

1.1. Hintergrund

Das äußere Schwerefeld¹ der Erde und seine ausgewählte Äquipotentialfläche - das Geoid - sind Schlüsselgrößen für grundlegende Fragestellungen verschiedener Wissenschaften der Erdsystemforschung (Geophysik, Ozeanographie, Hydrologie, Glaziologie, etc.) sowie der Geodäsie.

In der Geodäsie resultiert die grundsätzliche Bedeutung aus der bekannten Kopplung von Erdfigur und Erdschwerefeld, was umgekehrt die Vermessung beider Größen zur Lösung der geodätischen Problemstellung notwendig macht. Abgesehen von gegenseitigen Abhängigkeiten der meisten geodätischen Messtechniken selbst liegt die Notwendigkeit der gleichzeitigen Bestimmung von Geometrie und Schwere letztlich in einer physikalisch relevanten Beschreibung der Erdfigur oder Ausschnitten davon, z.B. in Form von Punktkoordinaten gegenüber einem lokalen, regionalen oder globalen Referenzrahmen. Dabei setzt insbesondere die Angabe von physikalisch interpretierbaren Höhen der Punkte - z.B. im Sinne der Fließrichtung von Wasser - eine genaue Kenntnis der Schwere bzw. des Geoids an und zwischen den Messpunkten voraus.

Im Hinblick auf die Fragestellungen der Erdwissenschaften liegt die Bedeutung in einer quantitativen Erfassung der vorliegenden Massenverteilung der Erde, z.B. in Form von Massenanomalien, über präzise Messungen der Schwere. Neben den statischen Anteilen in den Messungen, die Rückschlüsse auf den Aufbau im Erdinneren erlauben, interessieren heute v.a. auch zeitliche Variationen des Feldes, die auf Massenverlagerungen aufgrund geodynamischer als auch klimatologisch angetriebener Prozesse im Nahbereich der Erdoberfläche zurückzuführen sind. Zusammen mit weiteren geodätischen, geophysikalischen und anderen in-situ Beobachtungen ergeben sich mit den schwerebasierten Massenanomalien Randbedingungen, die für eine quantitative Modellierung der Vorgänge wesentlich sind. Als Beispiele für aktuelle Fragestellungen seien hier die Erfassung von Massen- und Wärmetransporten in den globalen Ozeanströmungssystemen, die Bestimmung der kontinentalen Wasserspeicher als Teil des globalen Wasserkreislaufes oder die Ausmessung von Änderungen der Eisbedeckungen an den Polen mit einhergehenden Variationen des Meeresspiegels genannt. Da gerade bei den letztgenannten Vorgängen Wirkzusammenhänge bestehen, erhofft man sich neben einem tieferen Prozessverständnis auch Einblicke in deren Zusammenspiel, die nicht zuletzt im Hinblick auf die Frage eines Klimawandels relevant sind. Für weiterführende Darstellungen dieser zentralen Rolle sei auf NRC [1997], ESA [1999] oder Ilk et al. [2005] verwiesen.

Heute besteht nun mit der routinemässigen Verfügbarkeit und Güte der verschiedenen geodätischen Raumverfahren die Möglichkeit, die genannten Fragestellungen tatsächlich auf der notwendigen globalen Ebene anzugehen. Insbesondere in Hinblick auf die Beschreibung der geometrischen Erdfigur und ihrer Deformation (z.B. mittels GPS, DORIS, Altimetrie, SAR, SLR) und der Erdrotation (mittels VLBI, GPS, SLR, DORIS) wurden in den letzten Jahrzehnten erheblich Fortschritte erzielt. So können beispielsweise mittels GPS relative Punktkoordinaten bzw. deren zeitliche Änderungen im Bereich von ± 1 cm (und besser) über mehrere Hundert Kilometer Entfernung abgeleitet werden. Für eine physikalische Interpretation dieser zunächst rein

¹Im Rahmen dieser Arbeit werden die Begriffe Schwere und Gravitation synonym benutzt. Wo nötig wird der konzeptionelle Unterschied berücksichtigt und hervorgehoben.

geometrischen Größen benötigt man jedoch ein vergleichbar genaues Geoid (*cm-Geoid*) bzw. Schwerefeldmodell, welches zudem die geodynamisch und klimatologisch induzierten zeitlichen Variationen beinhaltet. Derartige Schwerefeld- bzw. Geoidmodelle standen aber bislang nicht zur Verfügung.

Globale Schwerefeldmodelle aus Satellitendaten

Seit gut drei Jahrzehnten bestimmt man globale Schwerefeldmodelle aus Satellitendaten. Grundlage dafür ist die Ausmessung der gravitativen Bahnstörungen im Bewegungsverlauf mittels verschiedener Bahnverfolgungsdaten bodengestützter Verfahren (optische Richtungsmessung, Laser Entfernungsmessungen, DORIS, PRARE, etc.). Allerdings genügen aus dem bisherigen Beobachtungsmaterial ableitbare Modelle den oben genannten Anforderungen nicht. Dies liegt insbesondere an:

- der fehlenden Sensitivität bisheriger Missionen mit Bahnhöhen hauptsächlich oberhalb von 800 km wegen der Dämpfung des Gravitationssignals,
- Problemen bei der Abtrennung der nicht-gravitativen Störbeschleunigungen,
- einem räumlich-zeitlich lückenhaften Beobachtungsmaterial aufgrund der bodengestützten Verfahren zusammen mit
- einer eingeschränkten globalen Überdeckung aufgrund der Bahnneigungen bisheriger Missionen.

Entsprechend bleibt die Feldbestimmung aus dem Datenmaterial von 30 Jahren zu etwa zwei Dutzend Satelliten allein auf langwellige statische Modelle bis etwa 2000 km Wellenlänge beschränkt. Durch Kombination mit terrestrischen und altimeter-basierten Schwerefeldmodellen können zwar Steigerungen der räumlichen Auflösung - v.a. im Bereich des marinen Geoids - auf etwa 100 km erzielt werden, allerdings sind die erzielbaren Verbesserungen auch in Hinblick auf die erreichbaren Genauigkeiten von Funktionalen des Schwerefeldes nicht durchgreifend. Ebenso ist die Ableitung zeitlicher Variationen auf einige wenige niedrigere Entwicklungskoeffizienten, wie z.B. \bar{C}_{20} , beschränkt.

Seit den 1980er Jahren wurden zwar in den USA und Europa verschiedene Konzepte zur Verbesserung der Feldbestimmung mittels künstlicher Erdsatelliten vorgeschlagen (z.B. SLALOM [Reigber, 1978], GRM [Keating, 1986], ARISTOTELES, POPSAT, BRIDGE), allerdings konnte keines davon verwirklicht werden. Der Durchbruch gelang erst Ende der 1990er Jahre mit der Realisierung der deutschen CHAMP-Mission [Reigber et al., 1999] (Start Juni 2000) und in dessen Nachfolge mit der NASA-DLR-Mission GRACE [Tapley und Reigber, 2001] (Start Mai 2002). Ein weiterer Meilenstein für die hochauflösende Schwerefeldbestimmung wird mit der ESA-Mission GOCE [ESA, 1999] (voraussichtl. Start Dezember 2007) erwartet. Kern dieser Missionen sind die folgenden beiden Konzepte:

- Intersatellitenmessungen (Satellite-to-Satellite-Tracking SST) zwischen hoch- und niedrigfliegenden Paaren von Satelliten in der Version hoch-niedrig SST (CHAMP, GRACE, GOCE)
- bzw. in der Version niedrig-niedrig SST für ein Zwillingssatellitenpaar (GRACE) sowie
- Gradiometermessungen (Satellite Gravity Gradiometrie SGG) entlang einer niedrigen Satellitenbahn (GOCE).

Ergänzt werden die dafür notwendigen neuartigen Instrumentierungen durch weitere dezidierte Messeinrichtungen sowie durch eine ausgewählte Bahncharakteristik:

- Nahezu kreisförmige Bahnen mit einer niedrigen Bahnhöhe um der Dämpfung des Schweresignals entgegen zu wirken (Anfangsbahnhöhe CHAMP/GRACE: 450/500km, GOCE: 250 km).
- Eine möglichst hohe Bahnneigung für eine nahezu vollständige globale Überdeckung (CHAMP 87.5°, GRACE 89.5°, GOCE 98°).
- Verwendung hochpräziser drei-achsiger Beschleunigungsmesser (Akzelerometer) zur Erfassung der nichtgravitativen Störbeschleunigungen (CHAMP und GRACE) bzw.
- alternativ eine Kompensation solcher Beschleunigungen durch ein kontinuierlich arbeitendes System von Steuerdüsen (*Drag Free System*, bei GOCE).
- Sternkameras zur Messung der Orientierung des Raumfahrzeugs bzw. der Messinstrumente im Inertialraum (CHAMP, GRACE, GOCE).

Die grundlegende Idee der verschiedenen Konzepte besteht in einer präzisen Messungen differentieller Größen, d.h. von Relativbeschleunigungen bzw. Relativgeschwindigkeiten und -entfernungen bei Verwendung der beiden Varianten des SST-Konzepts bzw. der direkten Messung des Gravitationsensors, d.h. der zweiten Ableitung des Gravitationspotentials beim SGG-Konzept. Dadurch soll die Auflösung der mittleren und kurzen Wellenlängen des Schweresignals erreicht sowie deren Genauigkeit erheblich gesteigert werden. Aufgrund der unterschiedlichen Charakteristika der SST-Konzepte und der Gradiometrie geht man dabei von komplementären Ergebnissen der Verfahren aus. Mit dem hoch-niedrig SST erwartet man eine verbesserte Bestimmung langwelliger Feldanteile inklusive der Auflösung deren zeitlicher Variationen. Diese soll durch das niedrig-niedrig SST wie bei GRACE bzgl. der Genauigkeit weiter verbessert und auf mittelwellige Feldstrukturen (bei GRACE etwa bis 400 km) erweitert werden können. Mittels der Gradiometermessung sollen schließlich insbesondere die hochfrequenten Anteile des Gravitationsfeldes ausgemessen werden können. So erwartet man mit GOCE z.B. eine räumliche Auflösung des Feldes bis zu einer unteren Grenze von etwa 100 km. Allerdings zeigen sich die Gradiometermessungen gegenüber zeitlichen Variationen weitgehend insensitive, so dass hier keine Beiträge zur Bestimmung der zeitlichen Feldvariationen erwartet werden. Im Hinblick auf eine Ausmessung des zeitvariablen Schwerfeldes bzw. Geoids zur Bearbeitung der eingangs genannten Fragestellungen stellt demnach gegenwärtig GRACE die maßgebende Mission dar.

Methodik

Während in den Anfangsjahren der Satellitengeodäsie die beobachteten Bahnstörungen anhand von säkularen und periodischen Variationen klassischer Bahnelemente mit Hilfe aus der Astronomie entlehnter analytischer Verfahren untersucht wurden, ging man mit der Entwicklung neuer und genauerer Bahnverfolgungsmethoden sowie der Zunahme des Datenmaterials und Satellitenmissionen zu einer direkten Analyse der Beobachtungen über. Da eine analytische Darstellung der Satellitenbewegung im Rahmen der erreichbaren Genauigkeiten des Beobachtungsmaterials nicht gelingt, wurden numerische Verfahren zur Bestimmung einer Lösung des gestörten Bewegungsproblems unter Verwendung parametrischer und datengetriebener Kräfte Modelle entwickelt. Heute stellt die als *dynamische Bahn- und Schwerfeldbestimmung* bekannte Methode das am weitesten entwickelte Verfahren dar und bildet die Analysemethode dieser Arbeit.

Daneben entwickeln sich basierend auf den kontinuierlichen Datensätzen der modernen Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und zukünftig GOCE gegenwärtig eine Reihe interessanter alternativer Verfahren sowohl für die Bahn- als auch die Schwerefeldbestimmung. Beispiele hierfür sind z.B. der Ansatz über das Energie-Integral (z.B. Gerlach et al. [2003]), die Lösung von Randwertaufgaben für kurze Bahnbögen (z.B. Mayer-Gürr [2006]) oder die Entwicklung semi-analytischer Verfahren (z.B. Sneeuw [2000]). Ein grundlegender Vorteil dieser Verfahren liegt in einer meist hohen rechentechnischen Effizienz und daraus resultierenden geringeren Rechenzeiten gegenüber dem dynamischen Ansatz. Andere Vorteile sind Ansatz-spezifisch, wie z.B. die Möglichkeit der Feldbestimmung ohne apriori Information für das Schwerefeld durch Verwendung kinematischer Bahnen beim Energie-Integral-Verfahren oder die Verwendung alternativer Parametrisierungen für das Schwerefeld z.B. für regionale Feldbestimmungen (z.B. Kusche et al. [1998], Ilk et al. [2004] oder Han et al. [2006]). Inwiefern diese alternativen Verfahren zukünftig einen Ersatz der dynamische Methode darstellen, ist derzeit offen, da diese Verfahren (noch) nicht den universellen Charakter der dynamische Methode haben.

1.2. Zielsetzung der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung von hochgenauen und räumlich hochauflösenden globalen Gravitationsfeldmodellen der Erde allein aus GRACE-Daten unter Verwendung der dynamischen Methode. Auf der Basis von etwa 3 Jahren Missionsdaten sollen ein mittleres statisches Gravitationsfeld und v.a. zeitliche Variationen des Feldes (in Form monatsweise berechneter mittlerer Feldmodelle) abgeleitet werden. Ein Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Erarbeitung einer geeigneten Methode zur Feldbestimmung im Rahmen des gewählten dynamischen Modells. Hierzu sind insbesondere Abhängigkeiten vom Design der Lösungen (Parametrisierung, Bogenlänge, etc.) und deren Einfluss auf die Güte der Modelle zu untersuchen. Anschliessend werden zeitliche Variationen des Schwerefeldes aus den GRACE-Modellen durch Berechnung monatsweiser mittlerer Schwerefeldmodelle und ein statisches Modell aus 3 Jahren GRACE-Daten bestimmt. Die aus GRACE abgeleiteten Variationen werden hinsichtlich räumlicher und zeitlicher Auflösung sowie ihrer Genauigkeit untersucht und mit Schwerefeldsignalen aus unabhängigen geophysikalischen Datensätzen verglichen. Insgesamt sollen die Ergebnisse der Arbeit den gegenwärtigen Stand der Schwerefeldbestimmung mit GRACE, wie sie am GFZ Potsdam durchgeführt wird, dokumentieren.

Die Arbeit gliedert sich dazu in zwei Blöcke. Zunächst werden in Kapitel 2 die wesentlichen wissenschaftlichen Instrumentendaten der GRACE-Mission vorgestellt. Neben den grundlegenden Messprinzipien sollen v.a. die aufbereiteten Messdaten (L1B-Daten) beschrieben werden. Kapitel 3 stellt die grundlegende Modellierung für die Beschreibung des räumlich und zeitlich variablen Gravitationsfeldes mittels Kugelfunktionen dar sowie die Vorgehensweise zur Ableitung zeitlicher Variationen auf Basis von Zeitreihen von Kugelfunktionsmodellen. In Kapitel 4 werden die Algorithmen der dynamische Methode der Gravitationsfeldmodellbestimmung beschrieben. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf den notwendigen Erweiterungen zur Verarbeitung der GRACE-spezifischen Beobachtungstypen: Akzelerometrie und Sternkameradaten sowie Satellito-Satellite-Tracking (SST) Beobachtungen, insbesondere der niedrig-niedrig Verbindung. Dies schließt den Theorie-Teil der Arbeit ab.

Der praktische Teil der Arbeit beginnt mit Voruntersuchungen zum Design der GRACE-only Lösungen (Kapitel 5). Dieses wird aus einer Reihe empirischer Untersuchungen bezüglich der Abhängigkeiten der Lösungen, insbesondere der Abhängigkeiten von der Wahl instrumentenspezifischer Parameter (Akzelerometer und K-Band-Ranging-System) und einem möglichen Einfluss

von Auswertintervallen des Beobachtungsmaterials (Bogenlängen) entwickelt. Nach Festlegung der Analyseverfahren werden Monatslösungen für den Zeitraum 02/2003 - 02/2006 sowie darauf aufbauend ein mittleres statisches Schwerefeldmodell berechnet. Der damit erreichte Stand hinsichtlich GRACE-basierter Langzeitmodelle sowie im Hinblick auf die Ableitung zeitvariabler Feldänderungen mit Vergleichen zu unabhängigen Datensätzen wird in den zwei Abschnitten des Kapitels 7 dargestellt. Eine Qualitätsanalyse der Monatslösungen mit dem Ziel der Ableitung der äußeren Genauigkeit der Feldmodelle bzw. daraus abgeleiteter Funktionale wird in Kapitel 6 vorgenommen.

In Kapitel 8 werden die Ergebnisse abschließend zusammengefasst und diskutiert. Ein Ausblick auf weitere notwendige Arbeiten und Untersuchungen schließt die Arbeit ab.

2. Das Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE)

Die Schwerefeldmission GRACE [Tapley und Reigber, 2001] ist ein Gemeinschaftsprojekt der NASA (National Aeronautics and Space Administration, USA) und dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) mit Beteiligungen internationaler Partner. Primäres Missionsziel ist die hochgenaue Bestimmung des globalen Schwerefeldes inklusive seiner zeitlichen Variationen mit einer maximalen räumlichen Auflösung bis 400 km auf Basis monatlicher Schwerefeldmodelle. Zweites, aber untergeordnetes Missionsziel ist die Durchführung von GPS-Okkultationsmessungen zur Ableitung von Profilen für die Atmosphären- und Ionosphärensondierung. Die Mission wurde 1997 im Rahmen des *Earth System Science Pathfinder Projekts* (ESSP) der NASA ausgewählt und am 17. März 2002 erfolgreich vom russischen Raumfahrtbahnhof Plesetzsk gestartet. Die Mission besteht aus zwei baugleichen Kleinsatelliten (siehe Abb. 2.1), die auf der gleichen, fast polaren und nahezu kreisförmigen Umlaufbahn (Bahnneigung 89.5° , Exzentrizität ≈ 0.001) in einem nominellen Abstand von 220 km hintereinander fliegen (siehe Abb. 2.2). Die anfängliche Bahnhöhe betrug etwa 500 km.

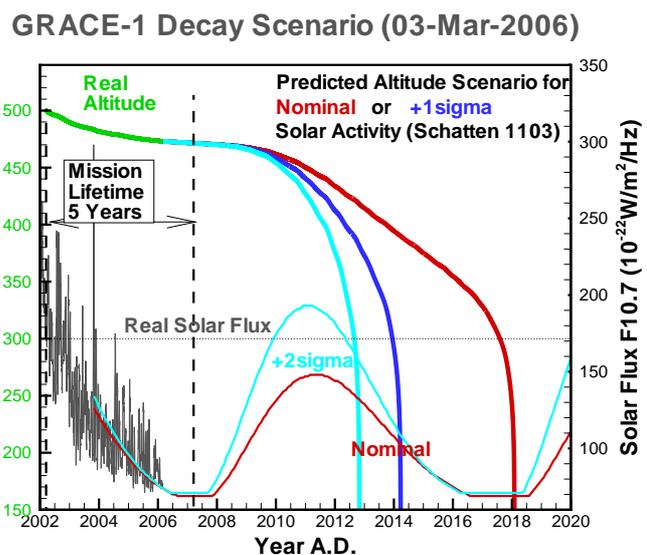
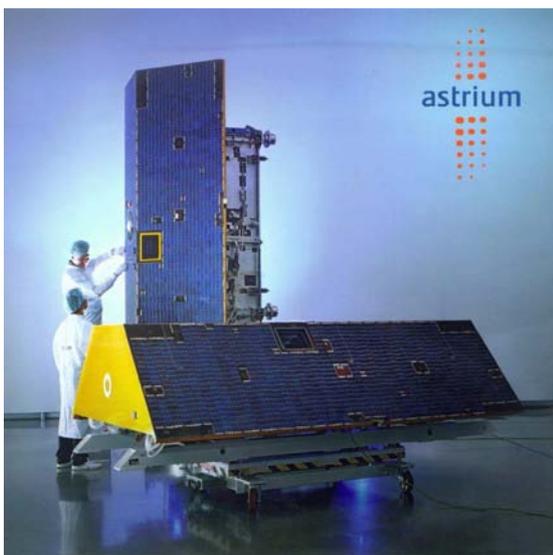


Abbildung 2.1.: Links: GRACE-Satelliten (Quelle: Astrium) Rechts: Tatsächliche und prädizierte Abnahme der Bahnhöhe aufgrund des Luftwiderstands in Abhängigkeit von der Sonnenaktivität. Sofern die wissenschaftlichen Instrumente als auch die Satellitensysteme über die Nominalzeit von 5 Jahren hinaus funktionsfähig sind, wäre aus dieser Sicht sogar eine mehr als doppelte Lebensdauer bis in die Jahre nach 2012 möglich.

Entsprechend der Konzeption des Satellite-to-Satellite-Tracking-Prinzips, erstmals vorgeschlagen von Wolff [1969], ist das Kerninstrument der Mission das *High Accurate Inter-satellite Ranging System* (HAIRS) zur Realisierung μm -genauer Abstandsmessungen zwischen den niedrig fliegenden Satelliten GRACE-A und GRACE-B (siehe Abb. 2.2). In Folge des along-track Formationsfluges erfahren die Satelliten die durch das inhomogene Gravitationsfeld verursachten Bahnstörungen zeit- bzw. phasenverschoben, so dass es zu Variationen in der Relativent-

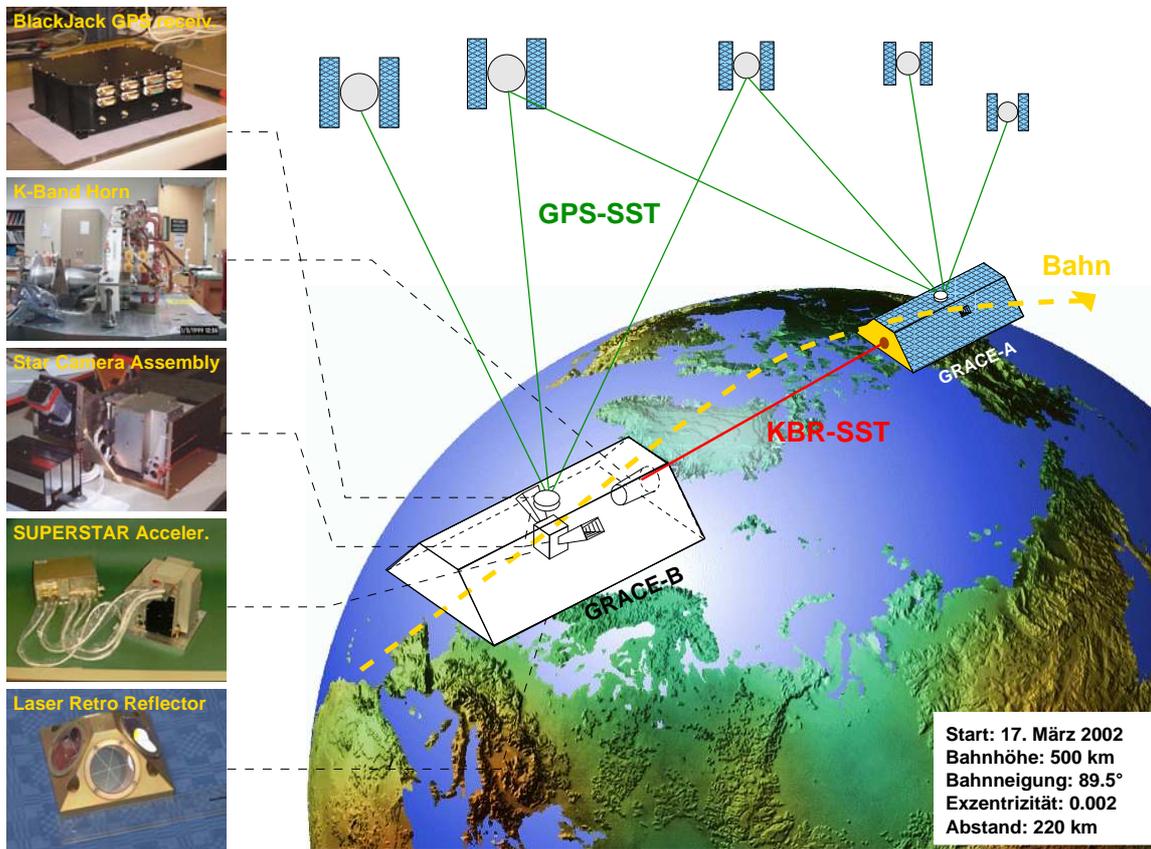


Abbildung 2.2.: Missionskonzept GRACE und Überblick wissenschaftliche Instrumentierung

fernung, Relativgeschwindigkeit bzw. Relativbeschleunigung kommt, die dann umgekehrt zur Feldbestimmung genutzt werden können. Diese Messungen sind jedoch um Anteile, die von nicht-gravitativen Beschleunigungen wie Reibungswiderstand und Strahlungsdruck herrühren, zu korrigieren. Solche Oberflächenkräfte werden für jeden Satelliten mit Hilfe des hochgenauen, drei-dimensional messenden *SUPERSTAR*-Akzelerometer [Toubul et al., 1999] kontinuierlich bestimmt. Zur absoluten Positionierung verfügt jeder GRACE-Satellit über einen 12-Kanal-2-Frequenz GPS-Empfänger (*BlackJack*). Diese Messungen stellen zusätzlich SST-Beobachtungen im Modus *hoch-niedrig* dar, die analog CHAMP einen komplementären Beitrag zur Bestimmung der langwelligen Feldstrukturen liefern. Die Bestimmung der absoluten bzw. relativen Orientierung geschieht mit Hilfe eines Paares von seitwärtsblickenden Sternkameras (*Star Camera Assembly*, SCA), die fest mit dem Akzelerometerinstrument verbunden sind. Dabei werden die Daten der Sternkameras zur aktiven Lageregelung der Satelliten verwendet, die zur Etablierung des niedrig-niedrig SST mit einer Neigung von jeweils 1 Grad gegen die Flugrichtung aufeinander gerichtet sind und in dieser Lage gehalten werden müssen. Ergänzt wird die instrumentelle Ausstattung durch jeweils einen *Laser Retro Reflector* (LRR) für Laser-Entfernungsmessungen durch das Bodennetz des *International Laser Ranging Service* (ILRS). SLR-Beobachtungen sind primär zur Validierung und Kalibration der Mikrowellen-Systeme - insbesondere der *BlackJack*-GPS-Empfänger - vorgesehen, da die SLR-Messungen eine dem GPS vergleichbare Genauigkeit haben, jedoch völlig unabhängig vom GPS-System sind².

Weitere wesentliche Systeme für den Betrieb der Wissenschaftsinstrumente und der Satelliten sind je Satellit:

- ein hochstabiler Oszillator (*Ultra Stable Oscillator*, USO) zur Erzeugung einer bordeige-

²Die SLR-Messung könnten ebenfalls zur Schwerefeldbestimmung verwendet werden.

2. Das Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE)

nen Zeitskala für alle Instrumente bzw. zur Generierung der K-band-Frequenzen für das HAIRS/KBR-Instrument,

- die sogenannte *Instrument Processing Unit* (IPU) als Teil des GPS-Empfängers (Empfang und Digitalisierung der GPS-Signale, Berechnung der GPS-Navigationslösung), sowie zum Auslesen der KBR- und Sternkamera-Messungen und zur Taktung des AOCS und des Akzelerometerinstrument,
- das Lage- und Orbitkontrollsystem (*Attitude and Orbit Control System, AOCS*) zur Ausrichtung der Satelliten und Durchführung von Bahnmanövern,
- die *Mass Trim Unit* (MTU) zur nachträglichen Justierung des Massenzentrums in Abhängigkeit vom Treibstoffverbrauch,
- der *OnBoard Data Handler* (OBDH) zur Datenverwaltung und -speicherung an Bord der Satelliten,
- sowie die S-Band-Telemetrie-Antenne zur Kommunikation und dem Datentransfer mit den Bodenstationen.

Abbildung 2.3 zeigt die Anordnung der Wissenschafts- und Bordinstrumente sowie das AOCS innerhalb eines GRACE-Satelliten.

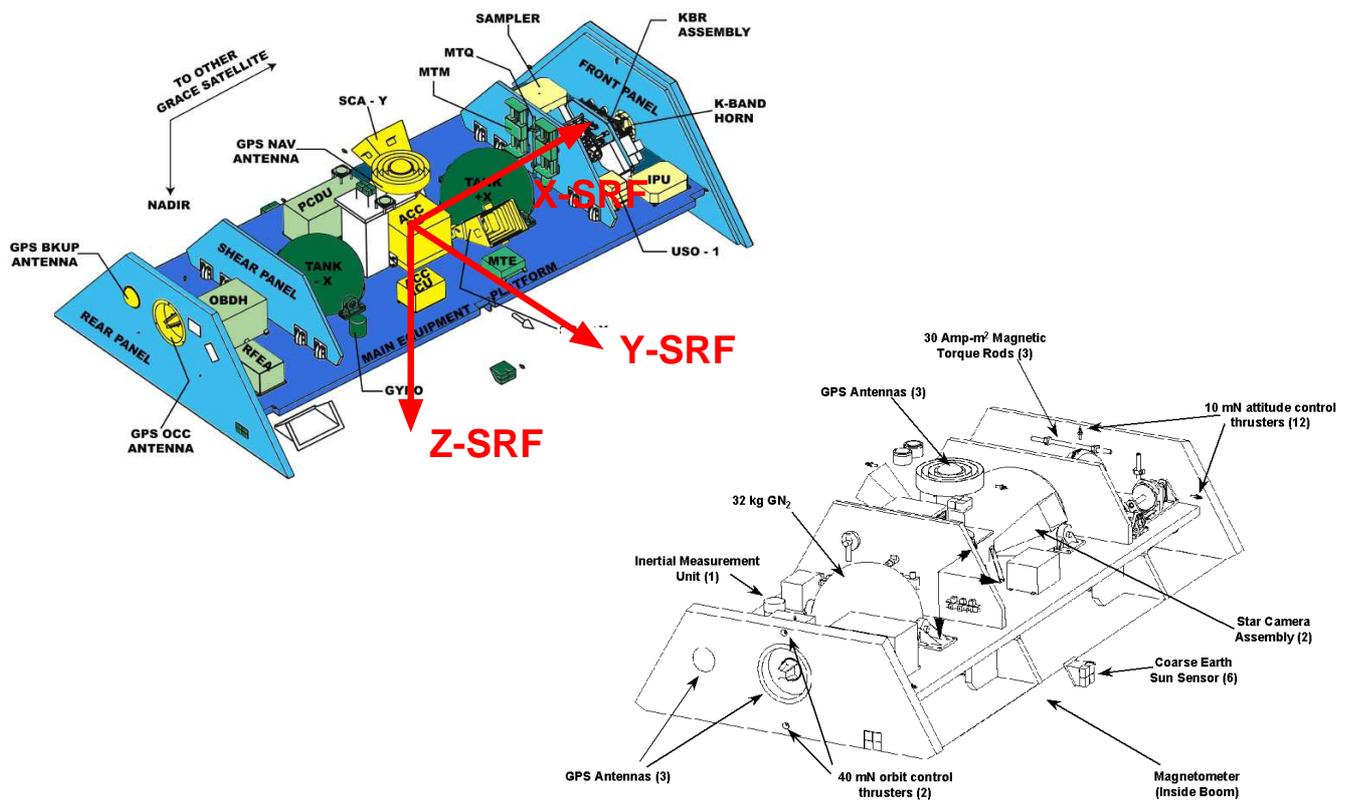


Abbildung 2.3.: Oben: Lage der wissenschaftlichen Instrumente innerhalb eines GRACE-Satelliten sowie Definition des **Science Reference Frames (SRF)** je Satellit. Unten: Einrichtungen zur Lage- und Bahnkontrolle des Attitude Orbit Control System (AOCS) und Anordnung weiterer wissenschaftlicher Instrumente. (Quelle: Astrium)

Überblick über die Datensätze der Wissenschaftsinstrumente

Grundlage der Schwerefeldbestimmung bilden die aufbereiteten Messdaten - sogenannte Level-1B-Daten (L1B-Daten) - des K-Band-Instruments, der GPS-Empfänger, der Akzelerometer sowie der Sternkameras. Tabelle 2.1 gibt eine Zusammenstellung der L1B-Daten in Hinblick auf die nominelle Datenrate sowie die erwarteten Genauigkeiten. Die Aufbereitung der Daten der Wissenschaftsinstrumente erfolgt durch das JPL in Pasadena/USA in einer Nachbearbeitung der Rohdaten der Instrumente (Level-0 bzw. Level-1A) am Boden. Diese umfasst folgende wesentliche Schritte:

- Umwandlung in physikalische Einheiten,
- einheitliche zeitliche Referenzierung von der bordeigenen USO-Zeit auf GPS-Systemzeit,
- Referenzierung der Messdaten vom jeweiligen instrumentenspezifischen Bezugsrahmen in den je Satellit einheitlichen *Science Reference Frame* (SRF, siehe Abb. 2.3, links),
- Elimination grober Ausreisser sowie
- Datenreduktion mit gleichzeitiger Rausch-Unterdrückung mittels einer Filterung, insbesondere der K-Band-, Akzelerometer- und Sternkamera-Daten.

Für die letztgenannten Filterungen verwendet man CRN-Filter [Thomas, 1999], die auf N-fachen Selbstfaltungen eines Rechtecksfensters im Ortsbereich basieren. In Abhängigkeit der Charakteristika (Rauschen) jedes Datensatzes verwendet man unterschiedliche Fensterbreiten und Sperrfrequenzen.

Als einheitliches Zeitsystem der L1B-Daten wird die GPS-Zeitskala mit dem 01.01.2000 12:00 Uhr als Nullpunkt gewählt [Case et al., 2004]. Die Rohmessungen der Instrumente beziehen sich zunächst auf die über den jeweiligen USO realisierte Bordzeit. Diese werden beim Einschalten bzw. Neustarts des jeweiligen Bordrechners bzw. der jeweiligen IPU mit der über die eingehenden GPS-Signale übermittelten GPS-Systemzeit synchronisiert. Dazwischen ergeben sich Abweichungen gegenüber der GPS-Zeitskala wegen Frequenzinstabilitäten bzw. Driften der Oszillatoren. Da dieses Verhalten auf GRACE-A und GRACE-B nicht synchron läuft, unterscheiden sich die beiden Bordzeiten. Insgesamt sind daher die Rohmessungen entsprechend zeitlich zu korrigieren. Die dafür notwendigen Abweichungen der GRACE-Bord- sowie der GPS-Senderuhren werden am JPL im Verlauf einer nachträglichen Bahnbestimmung für die GPS- bzw. die GRACE-Satelliten bestimmt und zur Referenzierung der L1B-Daten verwendet.

In den folgenden Abschnitten werden die Messprinzipien sowie wesentliche Eigenschaften der L1B-Daten zusammengestellt und, soweit notwendig, im Hinblick auf die Vorverarbeitung und

Tabelle 2.1.: Spezifikationen L1B-Daten für die Schwerefeldbestimmung, Datenraten in [Hz]

Instrument	Beobachtung	Datenrate		erwartete Genauigkeit
		L1A	L1B	
HAIRS/KBR	K-Band Range (KRA)	10	0.2	$\approx 1 \mu\text{m}$
	K-Band Range-Rate (KRR)		0.2	$\approx 1 \mu\text{m/s}$
SuperSTAR	3-d Beschleunigungen	10	1	along-track, radial: 10^{-10} m/s^2 cross-track: 10^{-9} m/s^2
SCA	Quaternionen	1	0.2	cross-angle $15 \mu\text{rad}$ twist-angle $120 \mu\text{rad}$
BlackJack	GPS-Trägerphasen	1	0.1	0.2 cm

die spätere Nutzung für die Schwerefeldbestimmung diskutiert. Umfassendere Darstellungen zur Erstellung der L1B-Daten und deren Inhalte und Formate findet man in Bettapur [2004], Case et al. [2004] und Wu et al. [2004]. Grundlegende Überlegungen zum K-Band-Instrument findet man in Thomas [1999] und Kim [2000]. Eigenschaften der zur Datenaufbereitung verwendeten CRN-Filter werden in Thomas [1999] oder Fackler [2005] detailliert dargestellt.

Projektierte Genauigkeit für die Schwerefeldbestimmung

Auf der Basis spezifizierter Genauigkeiten der Instrumente sowie weiterer Missionsparameter wie Bahnhöhe, Bahnneigung oder nomineller Satellitenabstand wurden in verschiedenen Vorflug-Studien (z.B. Kim [2000], NRC [1997]) Abschätzungen für die erreichbaren Genauigkeiten für die Schwerefeldbestimmung mit GRACE durchgeführt. Tabelle 2.2 gibt resultierende Genauigkeiten für das Geoid auf Grundlage der umfassenden, numerischen Untersuchung in Kim [2000] an. Abbildung 2.4 (links) zeigt die im weiteren als *GRACE Baseline* bezeichnete Genauigkeit der Schwerefeldparameter auf Basis einer vereinfachten, analytischen Simulation in NRC [1997] in Form von Gradamplituden für das Geoidsignal. Der Vergleich mit dem Stand der Schwerefeldgenauigkeit vor der Verfügbarkeit von CHAMP-Daten, z.B. für das Satellitenmodell GRIM5-S1 [Biancale et al., 2000] und eines mittleren CHAMP-Modells (EIGEN-CHAMP03S, Reigber et al. [2004]) illustriert den angestrebten Genauigkeitsgewinn in der Größenordnung eines Faktors 100 gegenüber CHAMP bzw. 1000 gegenüber der Vor-CHAMP-Ära. Abbildung 2.4 rechts zeigt die auf Basis dieser GRACE Baseline Genauigkeit erwartete Sensitivität der Mission gegenüber den verschiedenen Phänomenen in Abhängigkeit von deren räumlich-zeitlichen Skalen. Die Darstellung zeigt die räumlichen und zeitlichen Skalen der verschiedenen Prozesse mit den typischen *Perioden* auf der Hochachse und den zugehörigen räumlichen Größenordnungen auf der Rechtachse. Die farblichen Einfassungen deuten die erwartete Sensitivität der verschiedenen Missionen an, wobei die innerhalb liegenden Prozesse detektiert werden können sollen.

Tabelle 2.2.: *Projektierte Genauigkeit der GRACE-Schwerefeldbestimmung in Geoidhöhen, nach Kim [2000], Einheit: [cm]*

Harmonischer Grad	GRACE kumulativ ($n > 2$)	GRACE pro Grad	EGM96 kumulativ ($n > 2$)	EGM96 pro Grad
$n = 2$	-	0.02	-	0.05
$3 \leq n \leq 10$	0.002	< 0.001	1.76	< 0.97
$11 \leq n \leq 40$	0.009	< 0.002	10.93	< 2.66
$41 \leq n \leq 70$	0.033	< 0.012	18.07	< 2.78
$71 \leq n \leq 100$	0.183	< 0.060	24.21	< 3.25

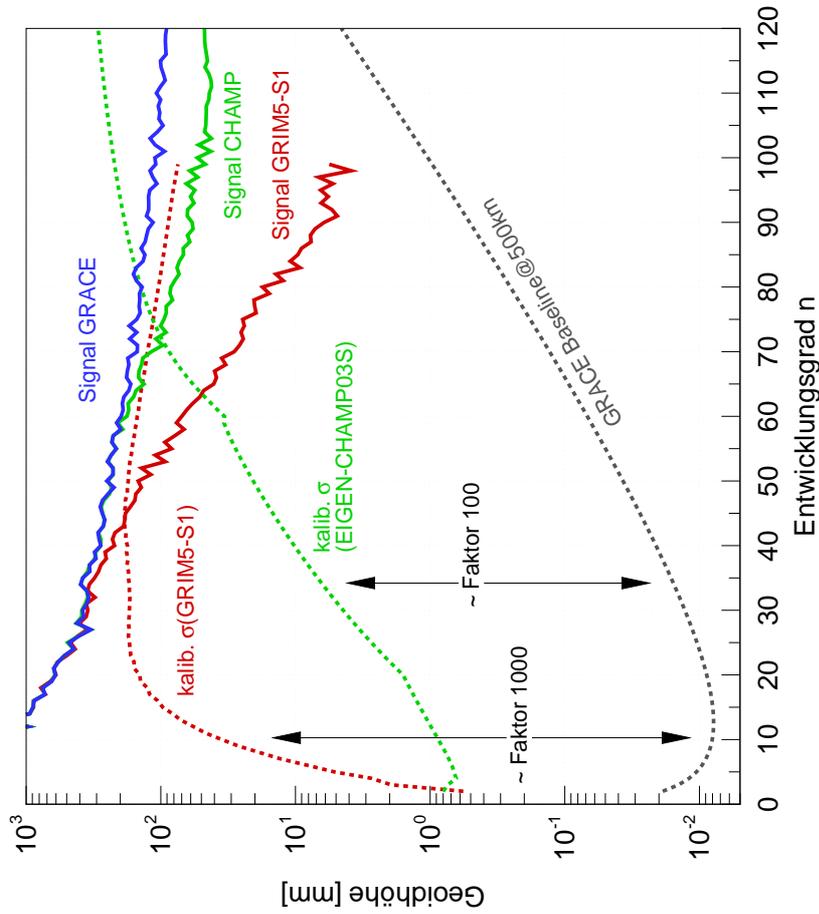
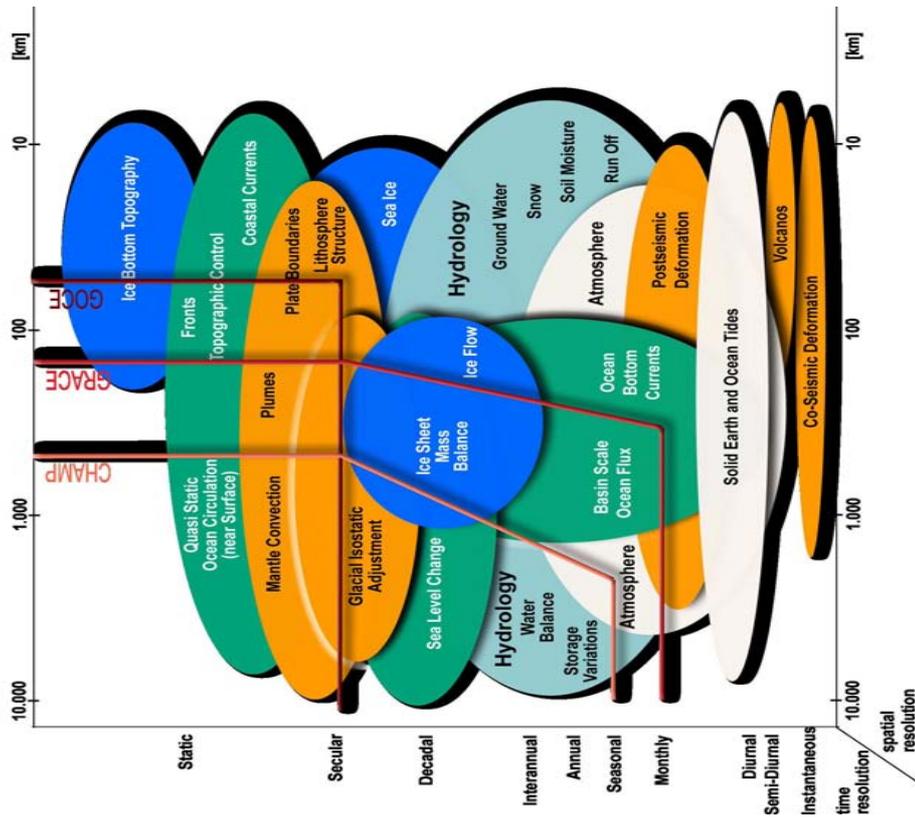


Abbildung 2.4.: Links: Projektierte Genauigkeit für die Schwerfeldbestimmung mit GRACE (GRACE Baseline) nach NRC [1997] für eine Bahnhöhe von 500 km. Zum Vergleich kalibrierte Fehler für die Satellitenmodelle GRIM5-S1 [Biancale et al., 2000] und EIGEN-CHAMP03S [Reiger et al., 2004] Rechts: Erwartete Sensitivität der CHAMP-, GRACE- und GOCE-Mission bzgl. verschiedener zeit- und ortsvariabler Schwerfeldvariationen (aus Ilk et al. [2005]).

2.1. Satellite-to-Satellite-Tracking (SST) vom Typ hoch-niedrig

Das hoch-niedrig SST wird mittels GPS-Code- und Phasenmessungen zwischen den GRACE-Satelliten und den Sendersatelliten der GPS-Konstellation realisiert (vgl. Abb. 2.2). Diese GPS-SST-Daten werden mit dem in Abschnitt 2 genannten *BlackJack*-GPS-Empfängern (jeweils einer je GRACE-Satellit) gemessen. Dabei handelt es sich um Mehr-Kanal-Zweifrequenz-Empfänger, die vom *Jet Propulsion Laboratory* (JPL) in Pasadena beigestellt wurden. Dieser Empfängertyp ist eine Weiterentwicklung der auf CHAMP montierten Version und verfügt über insgesamt 16-Kanäle zum Empfang von GPS-Signalen in beiden Frequenzbändern. Für die präzise Bahnbestimmung (*Precise Orbit Determination*, POD) sind 12 Kanäle vorgesehen, d.h. es können maximal bis zu 12 Sendersatelliten simultan beobachtet werden. Die GPS-Signale für die Bahnbestimmung werden über die so genannte Navigationsantenne auf der Oberseite der GRACE-Satelliten (vgl. Abb. 2.3) akquiriert. Die übrigen 4 Kanäle dienen zur Erfassung von GPS-Okkultationsmessungen für die Atmosphärensondierung und werden über eine separate, am Heck angebrachte Antenne erfasst (siehe Abb. 2.3).

Allgemeines zu den GPS-L1A/B-Daten

Auf der Grundlage der phasen-modulierten Signale der GPS-Sendersatelliten im L1-, L2-Band (siehe z.B. Hoffmann-Wellenhof et al. [1994])

$$L1(t) = A_{P1}P(t)W(t)D(t) \cos(\omega_1 t + \phi_1(t)) + A_C C/A(t)D(t) \sin(\omega_1 t + \phi_1(t)) \quad (2.1)$$

$$L2(t) = A_{P2}P(t)W(t)D(t) \cos(\omega_2 t + \phi_2(t)) \quad (2.2)$$

mit

- t : Zeit (gemäß der jeweiligen Uhr des Sendersatelliten),
- A_{P1}, A_{P2}, A_C : Amplituden des P-Code auf L1 und L2 und des C/A-Code auf L1,
- $P(t), W(t), C/A(t)$: Modulationssignale des P- und W-Codes und des C/A-Codes,
- $D(t)$: Modulationssignal der Navigationsnachricht,
- $\omega_i = 2\pi f_i$: Kreisfrequenz der L1, L2-Trägerwellen mit $f_1 = 154 \times f_0$ und $f_2 = 129 \times f_0$ und $f_0 = 10.23$ MHz sowie
- $\phi_1(t), \phi_2(t)$: Phasenverschiebungen im L1- bzw. L2-Signal durch Frequenzabweichungen und Rauschen

liefert der BlackJack-Empfänger auf Ebene der L1A-Daten sechs verschiedene Beobachtungsgrößen für Code- und Phasenmessungen. Dies sind C/A-Code-Messungen auf L1 sowie die P- bzw. Y-Code-Messungen auf L1 und L2, wobei mit dem Y-Code das Produkt aus dem P- und dem unbekanntem W-Code bezeichnet wird. Alle Code-Messungen werden mit einem Sampling von 0.1 Hz abgetastet. Phasenmessungen für die demodulierten Trägerwellen L1 und L2 sowie für den C/A-Code-Anteil des L1-Signals in Gleichung (2.1)³ liegen mit einer Abtastrate von 1 Hz vor.

In der Nachbearbeitung im Bodensegment durch das JPL werden diese L1A-Daten der BlackJack-Empfänger auf die nominelle Datenrate der L1B-Daten von 10 Sekunden für beide Messtypen

³So genannten Phasenmessungen des C/A-Codes.

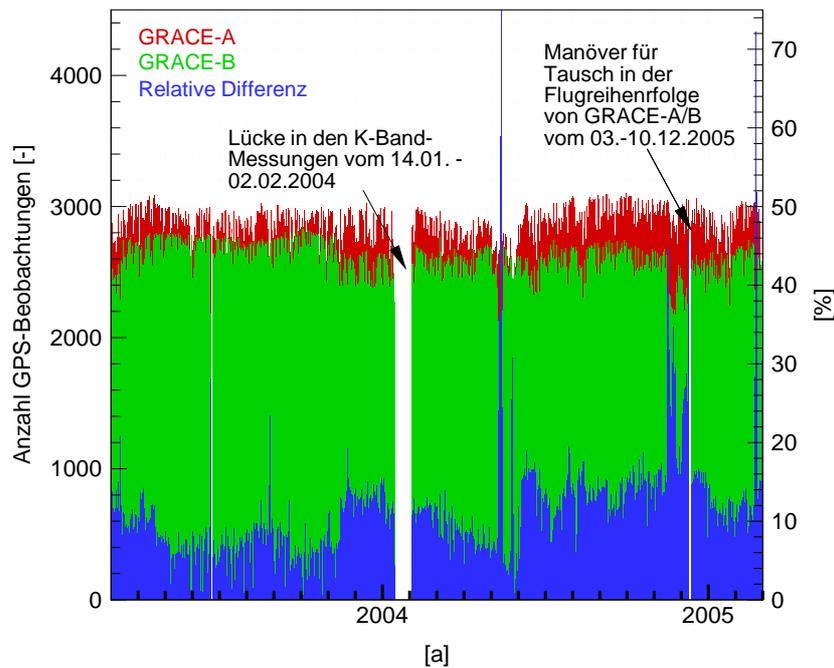


Abbildung 2.5.: Tageweise Statistik der GPS-L1B-Beobachtungen (Datenrate 30 s) im Zeitraum 02/2003 - 02/2005 für GRACE-A (in rot) und GRACE-B (in grün). In blau ist das Verhältnis $\left| (n_{obs}^{GRACE-A} - n_{obs}^{GRACE-B}) / n_{obs}^{GRACE-B} \right|$ in Prozent dargestellt.

transformiert. Neben der Elimination grober Ausreisser und der Aufdeckung von Cycle-Slips beinhaltet diese Vorverarbeitung die notwendige Korrektur der Messungen wegen Fehler der GPS-Senderuhren sowie der GRACE-Empfängeruhren anhand der in Abschnitt 2 genannten Bahnbestimmungen für die GPS-Sender- bzw. für die beiden LEO-Satelliten.

Genauigkeit und Eigenschaften GPS-L1B-Daten

Hinsichtlich der Messgenauigkeit der Code- und Phasenmessungen erhält man erwartungsgemäss für beide Empfänger ähnliche Ergebnisse. Abbildung 2.6 zeigt hierzu exemplarisch Code- und Phasenresiduen für Messungen auf GRACE-A und GRACE-B zu allen möglichen GPS-Sendersatelliten über einen gesamten Monat (11/2003). Die Residuen sind bzgl. dem lokalen Horizontsystem des jeweiligen Satelliten dargestellt. Dessen Ursprung liegt jeweils im geometrischen Referenzpunkt der Antenne auf der Oberseite des Satelliten; die Nullrichtung des Azimuts wird in die Flugrichtung des Satelliten gewählt. Da innerhalb der GFZ-eigenen Bahnbestimmungssoftware *EPOS* die ionosphärenfreie Linearkombination der *P/Y*-Code- bzw. der *L1/L2*-Trägerphasenmessungen verarbeitet werden (siehe Abschnitt 4.3), zeigt Abb. 2.6 Code- und Phasenresiduen dieser Linearkombination und nicht der ursprünglichen L1B-Daten. Entsprechend ergibt sich ein höheres Rauschniveau als mit den ursprünglichen GPS-L1B-Daten erwartet werden kann (etwa um den Faktor 3 größer, siehe z.B. Rothacher [1991]). Sieht man von höheren systematischen Residuen in den Randbereichen ab, so liegt der RMS dieser sog. *L3*-Code-Messungen bei etwa 20-25 cm sowie bei den *L3*-Phasenmessungen im Bereich von etwa 0.5 cm.

Es fällt auf, dass beide Empfänger in Flugrichtung GPS-Messungen erst oberhalb von etwa 7.5° Elevation liefern. In der entgegsetzten Richtung zeigt sich ein unterschiedliches Trackingverhalten

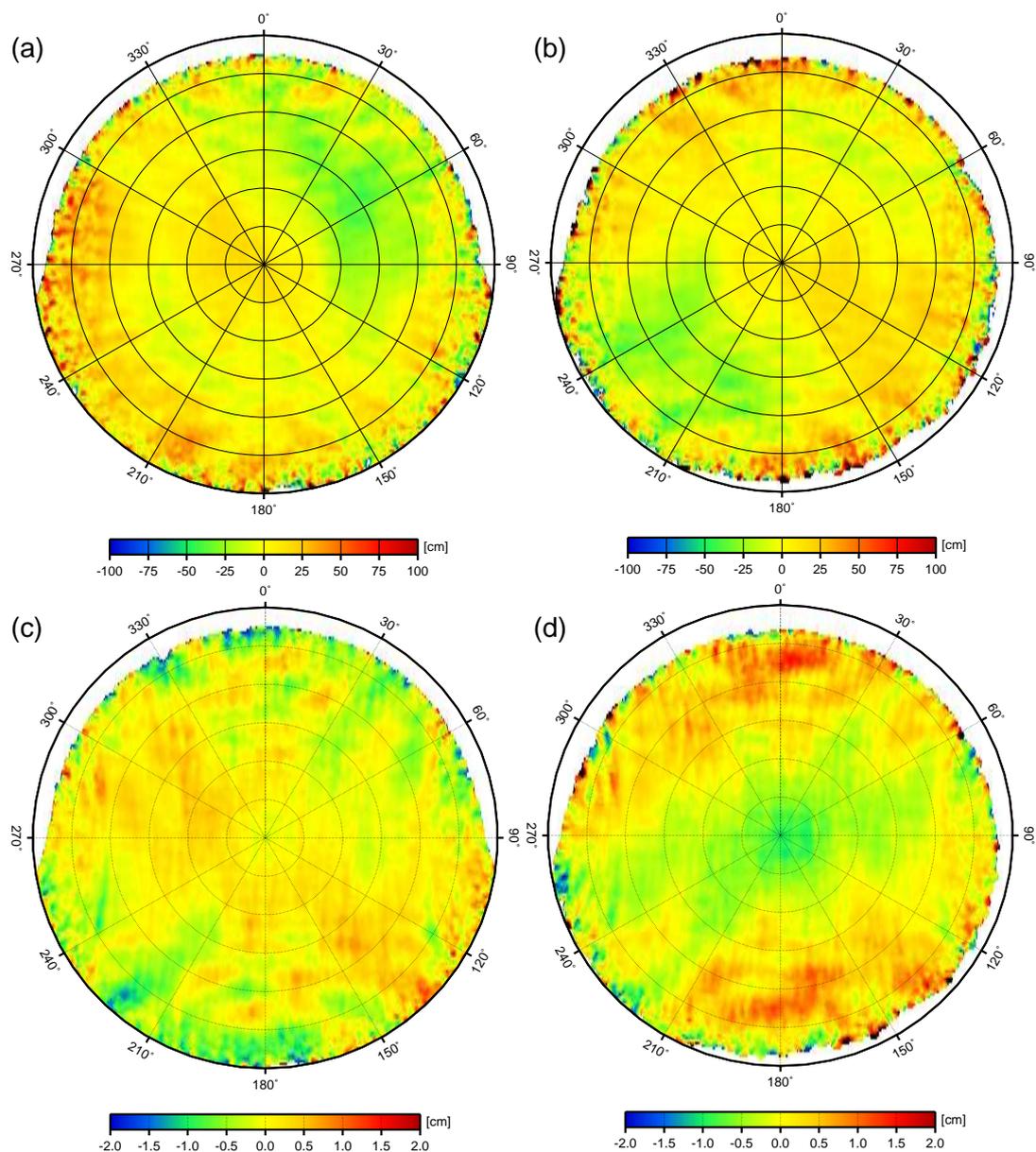


Abbildung 2.6.: Residuen der Code- und Phasenmessungen der ionosphärenfreien L3-Kombination für GRACE-A (Code in Abb. (a), Phase in Abb. (c)) und GRACE-B (Code in Abb. (b), Phase in Abb. (d)) für den Monat 11/2003 bzgl. des lokalen Horizontsystems. Dieses ist wie folgt definiert: Ursprung im geometrischen Nullpunkt der Navigationsantenne (vgl. Abb. 2.3); die Nullrichtung des Azimuts zeigt in Flugrichtung des jeweiligen Satelliten.

von GRACE-A und GRACE-B. Während GRACE-A GPS-Satelliten bis an den Horizont beobachtet, wird das Tracking bei GRACE-B bis in einem Azimut-Sektor von 210° bis 265° wiederum bei einer Elevation von etwa 7.5° beendet. Eine Analyse der Anfangs- und Endzeiten von Beobachtungspassagen zeigt, dass die Empfänger fast ausschließlich aufgehende GPS-Satelliten in Flugrichtung der GRACE-Satelliten anmessen und dann solange wie möglich beobachten. Im rückwärts blickenden Halbraum werden offenbar i.d.R. keine neuen GPS-Satelliten beobachtet. Die elevationsabhängige Akquisition der GPS-Satelliten in Flugrichtung entspringt mutmaßlich einer beabsichtigten Einstellung der Empfängersoftware. Inwiefern hier eine fest implementierte Elevationsschranke verwendet wird und/oder die Steuerung über das Signal-zu-Rausch-Verhältnis der eingehenden Signale gesteuert wird, ist nicht öffentlich dokumentiert. Wodurch das unter-

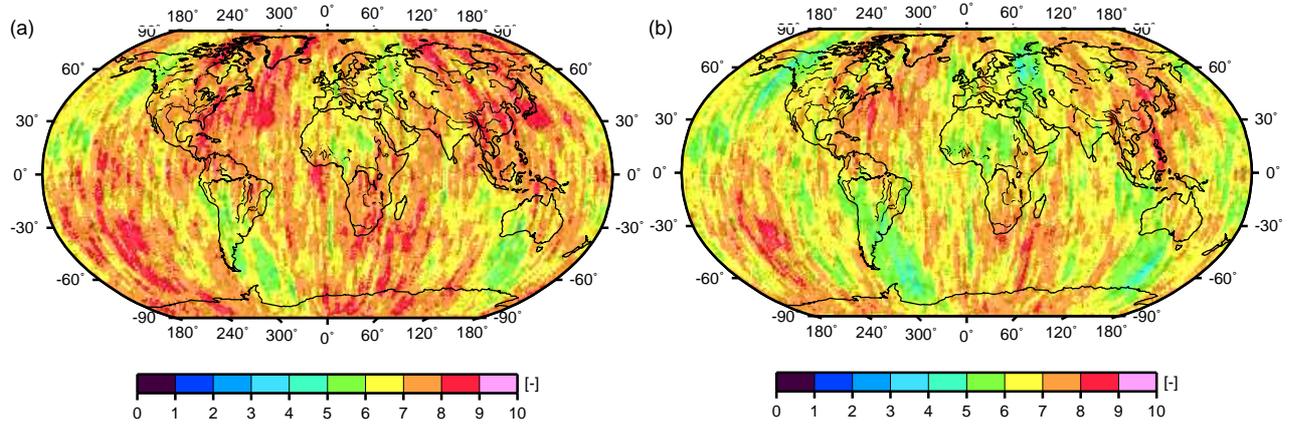


Abbildung 2.7.: Anzahl der simultan beobachteten GPS-Satelliten je BlackJack-Empfänger entlang der Bahn von GRACE-A (a) und von GRACE-B (b) für den Monat 11/2003. Durchschnitt für GRACE-A: 7.5, für GRACE-B: 6.8.

schiedliche Verhalten auf GRACE-A und GRACE-B bedingt wird bleibt daher unklar. Insgesamt erklärt sich dadurch wohl ein Teil der um etwa 8 - 15 % höhere Anzahl von GPS-Messungen auf GRACE-A (siehe Abb. 2.5). Hier kommt hinzu, dass auf GRACE-B scheinbar etwas weniger GPS-Satelliten simultan beobachtet werden als auf GRACE-A. Abbildung 2.7 stellt hierzu die Anzahl der GPS-Satelliten je Epoche entlang der Bahn von GRACE-A und GRACE-B dar, wiederum für den November 2003. Augenscheinlich beobachtet der Empfänger auf GRACE-B - bei sonst grundsätzlich ähnlicher Verteilung - weniger GPS-Satelliten als der auf GRACE-A. Im Durchschnitt sind es für diesen Monat 7.5 GPS-Satelliten für den Empfänger auf GRACE-A und 6.8 GPS-Sendersatelliten für den Empfänger auf GRACE-B. Die Ursache dafür ist unklar. Interessant ist in dieser Darstellung die Verteilung selbst. Es zeigt sich eine Ortsabhängigkeit für das Tracking. Nach der Standardeinstellung der beiden Empfänger wäre ein simultanes Tracking von bis zu 10 Satelliten möglich, was aber nur in wenigen Gebieten tatsächlich erreicht wird. In anderen Bereichen werden teilweise nur 3 - 4 GPS-Satelliten gleichzeitig beobachtet. Dadurch ergibt sich möglicherweise ein Einfluss auf die Güte der Bahnbestimmung in diesen Abschnitten der Bahnen. Inwiefern diese Verteilungen empfänger- und/oder konstellationsbedingt sind und eventuell zeitlich variieren, wurde nicht weiter untersucht.

Ingesamt gesehen kann man von einer hohen Qualität der GPS-Messungen der BlackJack-Receiver ausgehen, wie auch der Vergleich mit SLR-Messungen zeigt (siehe Abschnitt 5.6 bzw. Abb. 5.13). Die ungleiche Anzahl von Beobachtungen zwischen GRACE-A und GRACE-B wird in dieser Arbeit durch die Verwendung einer Mindest-Elevation von GPS-Beobachtungen bzgl. des Horizontsystems von 10° ausbalanciert. Dadurch werden auch zugleich eventuell durch Mehrwegeeffekte beeinflusste, horizontnahe GPS-Beobachtungen reduziert.

2.2. Satellite-to-Satellite-Tracking (SST) vom Typ niedrig-niedrig

Grundlage der hochgenauen Entfernungsmessungen des HAIRS Instrument sind Phasenmessungen zweier Trägerwellen im K und Ka-Band, die als Einwegmessungen zwischen GRACE-A und GRACE-B beobachtet werden. Aus diesen insgesamt vier verschiedenen Phasenmessungen wird im Bodensegment eine Zweifach-Einweg-Entfernungsmessung als primäre Beobachtungsgröße abgeleitet. Da in den ursprünglichen Phasenmessungen ganzzahlige Vielfache der Trägerwellenlänge unbekannt sind, ergibt sich eine bis auf eine Additionskonstante bekannte Entfernungsmessung (*Biased Dual One-Way Range*). Messungen für die Abstandsänderung (*Range-Rate*) bzw. deren Beschleunigung (*Range-Acceleration*) werden in der Nachbearbeitung numerisch aus den Entfernungsmessungen abgeleitet. Abbildung 2.8 stellt die originären Messgrößen und die Verarbeitung zu den K-Band-Beobachtungen im L1B-Format im Bodensegment schematisch dar. Die nachfolgenden formalen Zusammenhänge zwischen den originären Phasenmessungen und der resultierenden Entfernungsmessung sind Kim [2000] entnommen.

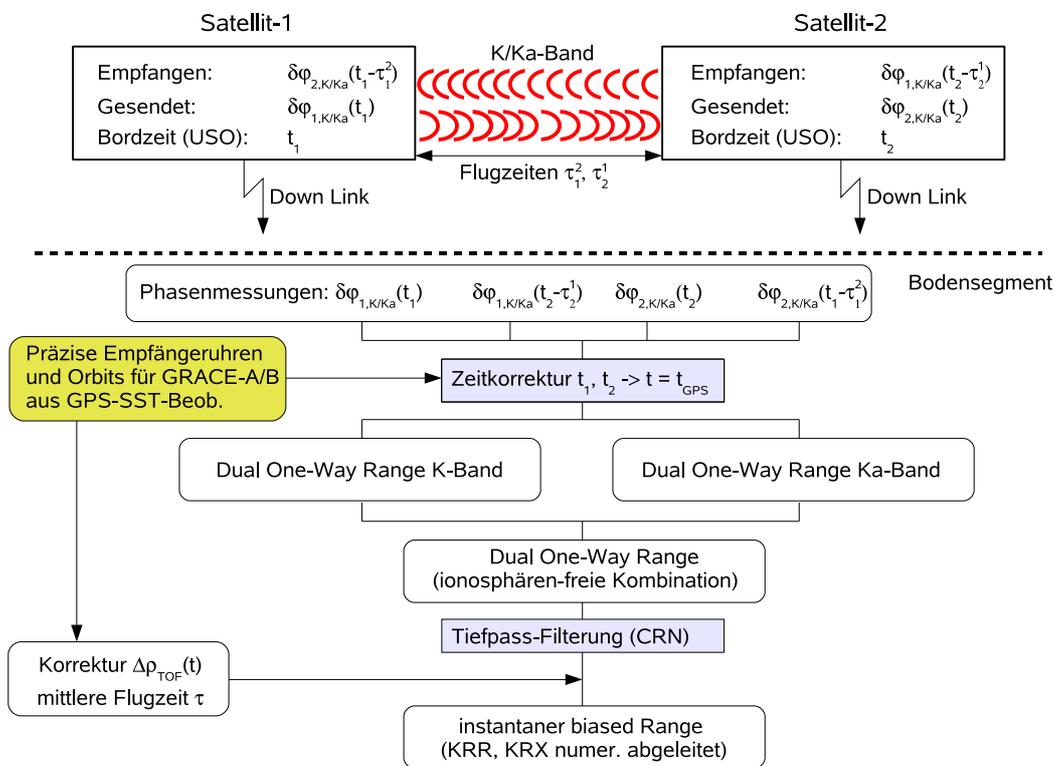


Abbildung 2.8.: Prinzip HAIRS/KBR-Instrument und Vorverarbeitung Entfernungsmessungen

An Bord der Satelliten werden mit dem jeweiligen Oszillator (USO) Trägerwellen im K- und Ka-Band erzeugt und über die Sendeantennen abgestrahlt. Am jeweiligen Empfängersatelliten werden die Phasenlagen der eingehenden K/Ka-Band-Signale $\delta\varphi_{i,K/Ka}(t_i - \tau_i^j)$ gemessen, wobei sich die Messzeitpunkte t_i auf die jeweilige USO-realisierte Bordzeit beziehen. Die eingehenden Phasen unterscheiden sich von einer an Bord erzeugten Referenzphase $\delta\varphi_{i,K/Ka}(t_i)$ um die Signallaufzeit τ_i^j . Diese ist wegen der ko-planaren Bewegung der beiden Satelliten leicht unterschiedlich, d.h. es gilt $\tau_2^1 < \tau_1^2$, wobei mit 1 der vorausfliegende und mit 2 der nachfolgende Satellit bezeichnet sei. τ_2^1 ist die Signallaufzeit von Satellit 1 nach 2, τ_1^2 entspricht der Laufzeit von Satellit 2 nach 1. Die vier Phasenwerte der eingehenden und der Referenz-Signale im K/Ka-Band zur Empfangszeit t_i werden gespeichert bzw. später an das Bodensegment überspielt. Dort werden in einem

ersten Schritt die Phasenmessungen auf die GPS-Zeitskala als gemeinsame Zeit transformiert⁴, da die Borduhren wegen unterschiedlicher Driften und Instabilitäten der Oszillatoren sowohl von der GPS-Zeit abweichen, als auch untereinander asynchron sind, d.h. es ist $t_{GPS} \neq t_1 \neq t_2$. Wie im Abschnitt 2 erläutert werden diese Abweichungen der Borduhren $\Delta t_i = t_i - t_{GPS}$ im Zuge einer reduziert-dynamischen Bahnbestimmung der GRACE-Satelliten unter Verwendung der GPS-SST-Messungen geschätzt. Die dabei erreichbare Genauigkeit für die Fehler der jeweiligen Bordzeit liegt im Bereich einiger ns [Case et al., 2004].

In einem zweiten Schritt werden die Phasenmessungen zu einer Zweifach-Einweg-Phasenmessung $\phi_{K/Ka}(t)$, jeweils separat im K- bzw. Ka-Band, kombiniert. Ohne Darstellung der Ableitung (siehe Kim [2000]) ergibt sich als grundlegender Ausdruck für diese Zweifach-Einweg-Phasenmessung:

$$\begin{aligned} \phi_{K/Ka}(t) = & (f_1 \tau_2^1 + f_2 \tau_1^2) + (\delta f_1 \tau_2^1 + \delta f_2 \tau_1^2) + \\ & (f_1 - f_2)(\Delta t_1 - \Delta t_2) + (\delta f_1 - \delta f_2)(\Delta t_1 - \Delta t_2) + \\ & (N_1^2 + N_2^1) + (I_1^2 + I_2^1) + (d_1^2 + d_2^1) + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Der erste Term in Gleichung (2.3) entspricht dem fehlerfreien Anteil der Phasenmessungen der nominellen Trägerfrequenz im K bzw. Ka-Band von Satellit 1 (f_1) und 2 (f_2) multipliziert mit den unterschiedlichen Signallaufzeiten τ_2^1 und τ_1^2 . Der zweite Term repräsentiert verbleibende Phasenfehler in Form von Instabilitäten der USO-generierten Trägerfrequenzen ($\delta f_1, \delta f_2$), die nicht durch die Kombination der beiden Phasenmessungen eliminiert werden können. Weitere systematische Einflüsse ergeben sich wegen der Uhrenfehler ($\Delta t_1, \Delta t_2$) der USO-Bordzeit gegenüber der GPS-Referenzzeit (Term 3) sowie wegen einer Kopplung von Frequenz- und Uhrenfehlern (Term 4). Sonstige systematische Beiträge resultieren aus den unbekanntem Phasenmehrdeutigkeiten (N_2^1, N_1^2), einer Phasenverschiebung wegen des Einflusses der Ionosphäre, einer Phasenverschiebung wegen des möglichen Einflusses der Neutralgasatmosphäre sowie etwaiger Ablagen der Phasenzentren und durch eventuelle Mehrwegeeffekte (die drei letztgenannten Effekte sind in den Termen d_2^1, d_1^2 zusammengefasst). $\varepsilon_2^1, \varepsilon_1^2$ bezeichnen die durch das Systemrauschen verursachten zufälligen Fehler.

Zur Umrechnung der Zweifach-Einweg-Phasenmessungen in instantane Entfernungsmessungen $R_{K/Ka}(t)$, wiederum je Frequenzband, wird die Gleichung (2.3) mit dem Ausdruck $c/(f_1 + f_2)$ multipliziert. Man erhält:

$$\begin{aligned} R_{K/Ka}(t) = & \frac{c\phi(t)}{f_1 + f_2} \\ = & \rho(t) - \Delta\rho_{TOF}(t) + c\frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}\Delta t(t) + c\frac{\delta f_1 + \delta f_2}{f_1 + f_2}\tau(t) + \\ & c\frac{N_1^2 + N_2^1}{f_1 + f_2} + c\frac{I_1^2 + I_2^1}{f_1 + f_2} + c\frac{d_1^2 + d_2^1}{f_1 + f_2} + c\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^1}{f_1 + f_2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei mit der Approximation

$$(f_1 \tau_2^1 + f_2 \tau_1^2) \approx (f_1 + f_2) \tau(t) - \Delta\phi_{TOF}(t) \quad (2.5)$$

eine mittlere Signallaufzeit $\tau(t)$ eingeführt wird. Die nur geringen Abweichungen der tatsächlichen Laufzeiten τ_2^1, τ_1^2 von dieser mittleren Zeit $\tau(t)$ werden in einer gemeinsamen Korrekturgröße

⁴In der Praxis werden nicht die Zeitmarken korrigiert, sondern die Messwerte unter Verwendung der Uhrenfehler gleichabständig auf die GPS-Zeitskala interpoliert (siehe Wu et al. [2004]).

der Phase $\Delta\phi_{TOF}(t)$ bzw. der Entfernung $\Delta\rho_{TOF}(t)$ zusammengefasst. Diese lässt sich wie die Uhrenfehler nachträglich aus den Örtern der reduziert-dynamischen bestimmten Trajektorien der GRACE-Satelliten mit ausreichender Genauigkeit bestimmen. Die weiteren Größen in der Gleichung (2.4) sind:

- c : Vakuum-Lichtgeschwindigkeit,
- $f_1 + f_2$: Summe der Trägerfrequenzen von Satellit 1 und 2, jeweils für K- und Ka-Band,
- $\Delta t(t)$: zeitabhängige Differenz der Uhrenfehler $\Delta t_1(t), \Delta t_2(t)$.

Einflüsse, die von der Kopplung von Frequenz- und Uhrenfehlern herrühren (d.h. von Term 4 in Gleichung (2.3)), wurden in der Gleichung (2.4) bereits vernachlässigt, da diese hinreichend klein sind (siehe nächster Abschnitt). Schließlich wird der Effekt der Ionosphäre (Term 6 in (2.4)) durch Linear-Kombination der Zweifach-Einweg-Entfernungsmessungen von K- und Ka-Band eliminiert. Man erhält für die instantane Entfernungsmessung:

$$R(t) = \frac{\bar{f}_K^2 R_K - \bar{f}_{Ka}^2 R_{Ka}}{\bar{f}_K^2 - \bar{f}_{Ka}^2}. \quad (2.6)$$

$\bar{f}_{K/Ka}^2$ bezeichnet die effektiven Frequenzen für das K- bzw. Ka-Band entsprechend der Definition $\bar{f}_i^2 = f_{1i} f_{2i}$. R_K und R_{Ka} sind die Zweifach-Einweg-Entfernungsmessungen aus der Gleichung 2.4.

Gleichung (2.6) stellt die primäre, aufbereitete Beobachtungsgröße des K-Band-Instrumentes dar. Diese liegt nun zunächst noch mit der Datenrate von 10 Hz der L1A-Daten vor. In einem letzten Schritt werden diese mittels der in Thomas [1999] dargestellten Tiefpass-Filterung auf der Grundlage von N-fachen Selbstfaltungen eines Rechteck-Fensters im Zeitbereich (sog. CRN-Filter) bearbeitet. Neben einer Unterdrückung hochfrequenter Rauschsignale werden die Daten dabei gleichzeitig auf die nominelle Rate von 0.2 Hz ausgedünnt. Parallel dazu werden auf der Grundlage der ersten und zweiten Zeitableitungen der CRN-Filter Beobachtungen für die Relativgeschwindigkeit und -beschleunigung numerisch bestimmt und ebenfalls als L1B-Daten mit einem Sampling von 5 s ausgegeben.

Diskussion Fehler-Terme Gleichung (2.4)

Im Hinblick auf eine gewünschte Genauigkeit der K-Band-Messungen im Bereich kleiner $1 \mu\text{m}$ bzw. $1 \mu\text{m/s}$ sind die Größenordnungen der Fehler-Terme in Gleichung (2.4) näher zu betrachten.

Beiträge der Uhrenfehler, Term 3. Entscheidend ist die Stabilität der relativen Uhrenfehler $\Delta t(t)$ zwischen GRACE-A und GRACE-B während der Messung. Auf der Basis der geringen Abweichungen der Borduhren von der GPS-Zeitskala im Bereich von einigen Nanosekunden erzielt man eine Synchronisation der beiden Uhren von weit besser als 150 ps [Bertiger et al., 2003], so dass ein Einfluss von Term 3 in Gleichung (2.4) vernachlässigbar klein wird. Dadurch und wegen der hohen Frequenzstabilität der Oszillatoren in der Größenordnung von $\delta f_i / f_i \approx 2 \cdot 10^{-13}$ [Bertiger et al., 2003] können zusätzlich Effekte wegen einer Kopplung von Uhren- und Frequenzfehler (d.h. Term 4 in (2.3)) ignoriert werden.

Verbleibende Frequenzfehler, Term 4. Dieser Term repräsentiert verbleibende Frequenzfehler, die nicht durch die Kombination der Einweg-Phasenmessungen nach Gleichung (2.3) eliminiert werden können. Da der Fehler proportional der Signallaufzeit $\tau \approx 1 \text{ ms}$ ist⁵, können

⁵Bei einem mittleren Satellitenabstand von etwa 220 km.

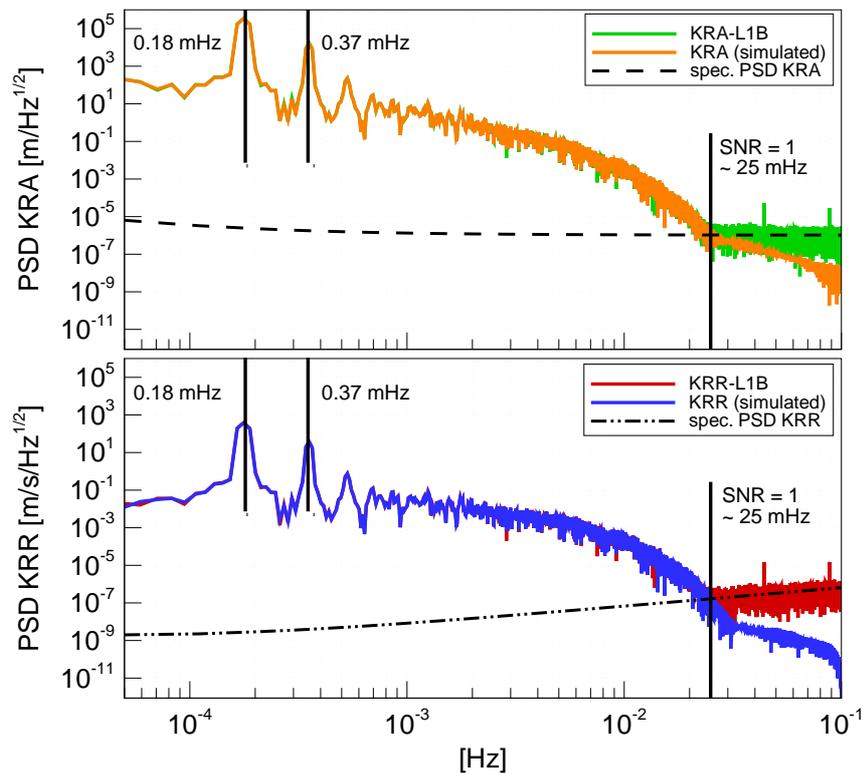


Abbildung 2.9.: Leistungsdichtespektrum (PSD) für das KRA- und KRR-Signal aus L1B-Daten (in rot und grün) und für simulierte Daten (in orange und blau) (15 Umläufe am 23.08.2003). Die gestrichelten Linien geben das erwartete Fehlersignal (nach Thomas [1999]) für das KRA- und KRR-Signal wieder.

die Messungen nur Rauschsignale der Oszillatordriften mit Frequenzen kleiner als 1 kHz enthalten. Zur Reduktion solcher möglicher kurzperiodischer Fehlsignale werden daher in Kim [2000] spezifische K-Band-Instrumenten-Parameter (siehe Abschnitt 4.5) vorgeschlagen, die im Zuge der Bahnbestimmung als zusätzliche Parameter bestimmt werden. Dabei werden in diesen Parametern idealerweise auch die übrigen systematischen Fehler wie Phasenmehrdeutigkeiten, Phasenverschiebungen in der Neutralgasatmosphäre, ionosphärische Einflüsse höherer Ordnung und eventuelle Mehrweg-Effekte abgefangen.

Zufällige Fehler, Term 8. Für zufällige Fehler durch das Systemrauschen ε_i^j erwartet man weißes Rauschen in der Größenordnung von $1 \mu\text{m}$ über die gesamte Messbandbreite [Thomas, 1999].

Abbildung 2.9 zeigt das Leistungsdichtespektrum (Power Spectrum Density, PSD) für Range- bzw. Range-Rate-Beobachtungen aus L1B-Daten. Zum Vergleich ist das PSD für simulierte, fehlerfreie Beobachtungen überlagert. Man erkennt die prinzipiell gute Übereinstimmung zwischen erwartetem und gemessenem Signal mit den dominanten Amplituden bei der ein- bzw. zweifachen Umlauffrequenz (0.18 bzw. 0.37 mHz). Oberhalb von etwa 25 mHz zeigen die PSDs im wesentlichen nur das Systemrauschen des KBR-Instruments. Im Vergleich zu den projektierten Werten (gestrichelten Linien, nach Thomas [1999]), liegt das Rausch-Niveau der tatsächlichen Range-Beobachtungen in der erwarteten Größenordnung von etwa $1 \mu\text{m}$, während bei den Range-Rate-Beobachtungen sogar ein Rausch-Level etwas unterhalb der Spezifikation von $1 \mu\text{m/s}$ erreicht wird (vgl. auch Abb.5.13).

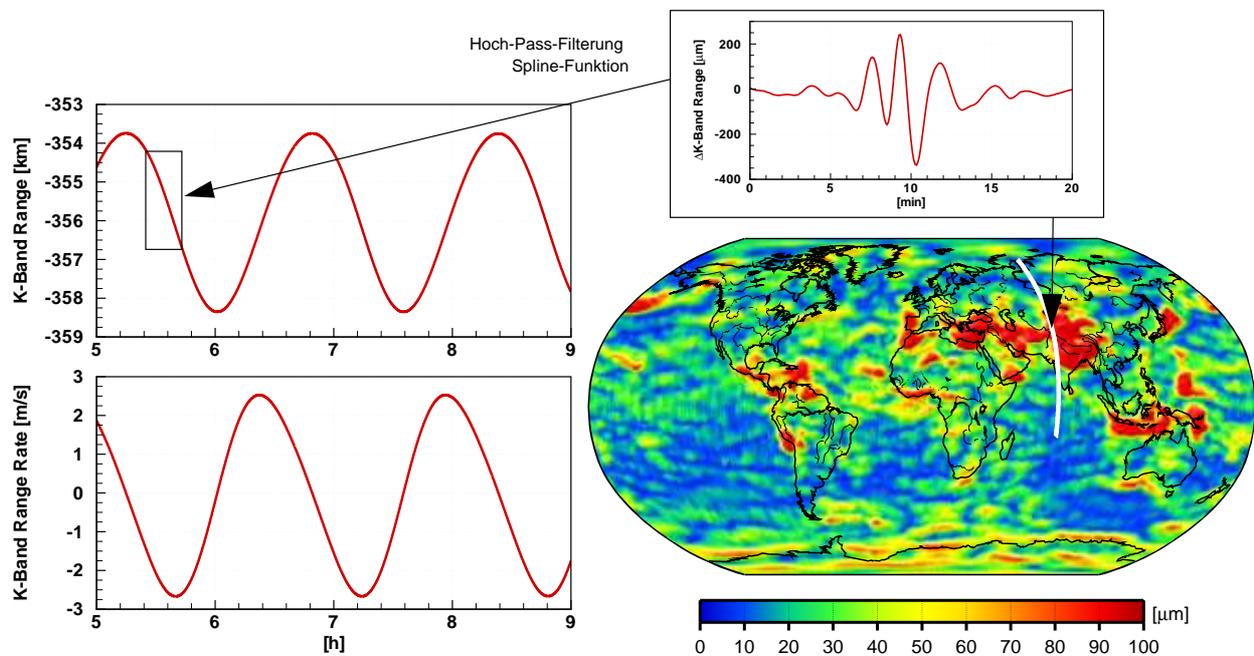


Abbildung 2.10.: Links: KRA- und KRR-1B-Daten im Zeitbereich. Rechts (oben): residuelles KRA-Signal nach Hoch-Pass-Filterung mittels gleitender Spline-Funktion über 75 Sekunden für einen Passage über den Himalaya von Sibirien nach Indien. Rechts (unten): Absolutbetrag der Residuen KRA-Signal nach der Hoch-Pass-Filterung über einen Monat im Ortsbereich.

In der linken Hälfte von Abbildung 2.10 ist der typische Signalverlauf für Range und Range-Rate aus L1B-Daten über 2.5 Umläufe im Zeitbereich dargestellt⁶. Wie aus Abb. 2.9 zu erwarten, werden beide Größen von einer umlaufsperiodischen Variation dominiert. Da eine Einstellung der beiden Satelliten auf einen völlig identischen Orbit i.d.R. nicht vollständig erreicht wird, ergibt sich ein säkularer Trend in den KBR-SST-Daten, der jedoch in dem kurzen Zeitintervall in Abb. 2.10 nicht sichtbar wird. Die Range-Messungen zeigen erwartungsgemäss eine Ablage gegenüber dem nominellen mittleren Abstand der Satelliten von etwa 220 km. Mittels einer Hoch-Pass-Filterung der Range-Beobachtungen mit einer gleitenden Splinefunktion über ein Zeitfenster von 75 Sekunden im Zeitbereich lässt sich die Sensitivität der K-Band-Messungen gegenüber dem inhomogenen Gravitationsfeld aufzeigen. Abbildung 2.10 rechts oben zeigt das Range-Signal nach der Hoch-Pass-Filterung für ein Intervall von 20 Minuten, welches einem Überflug des Himalayas von Sibirien nach Indien entspricht. Abb. 2.10 rechts unten zeigt die Absolutwerte des so gefilterten Range-Signals für den ganzen Monat (08/2003) im Ortsbereich. Obwohl durch die Betragsbildung der Nulldurchgang von Abb. 2.10 rechts oben nicht mehr sichtbar ist, erkennt man deutliche Korrelationen mit den Strukturen des Schwerefeldes, v.a. in Gebieten mit starken Schwereschwankungen, wie etwa für die dargestellte Passage über den Himalaya. Daneben deutet das Ergebnis bereits aber auch eine ausgewählte Sensitivität der Mission in Nord-Südrichtung (= Flugrichtung der Konstellation) an, sowie einen Einfluss der Bodenspurverteilung innerhalb des gewählten Datenzeitraums (*Streifigkeit*).

⁶Die simulierten Beobachtungen wurden nicht geplottet, da kein Unterschied auf der absoluten Skala sichtbar wird.

2.3. Akzelerometer-Daten

Zur Reduktion der nicht-gravitativen Bewegungsanteile aus den SST-Observablen werden Messungen von drei-achsigen Beschleunigungsmessern (SuperSTAR, Toubul et al. [1999]) herangezogen. Dabei handelt es sich um servo-gesteuerte, kapazitive Akzelerometer, die über Steuerungsspannungen eine freibewegliche Testmasse innerhalb eines Käfigs, der fest mit dem Satellitenbus verbunden ist, bewegungslos halten. Die grundlegende Idee ist, dass die Bewegung der Testmasse nur durch gravitative Kräfte beeinflusst wird, während auf den Käfig durch die feste Verbindung mit dem Satellitenbus zusätzlich nicht-gravitativ Beschleunigungen verursacht durch den Luftwiderstand in der Hochatmosphäre, durch solaren Strahlungsdruck, Erdalbedo, etc. wirken. Die notwendigen Steuerungsspannungen, die die geladene Testmasse bewegungslos halten, sind dann proportional zu den auftretenden nicht-gravitativen Beschleunigungen und stellen die ursprüngliche Messgröße der Akzelerometer dar (siehe z.B. Bertin [1998], Frommknecht [2001]).

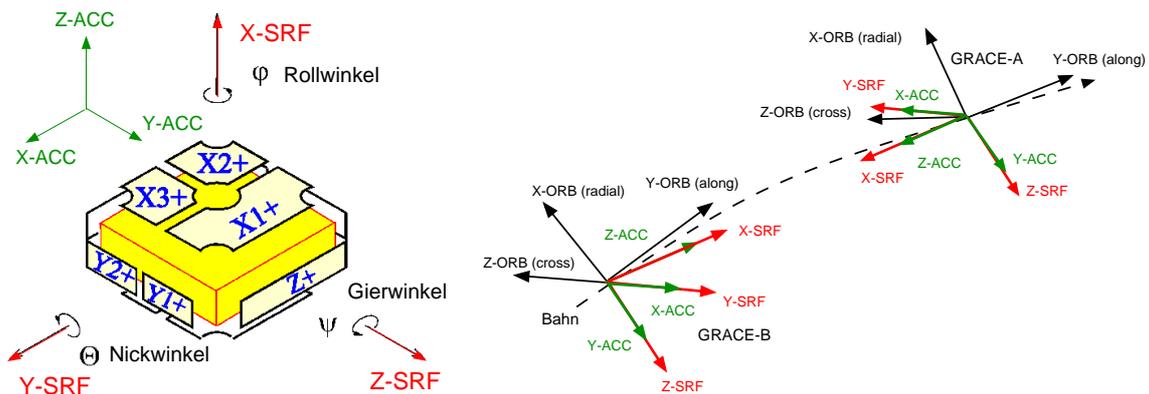


Abbildung 2.11.: Links: Schematische Darstellung des SuperSTAR-Akzelerometers mit dem akzelerometerfesten Referenzsystem S_{ACC} und dem S_{SRF} , Rechts: Orientierung der Akzelerometer in der Flugkonfiguration in Bezug auf den SRF-Rahmen und einem begleitenden Dreibein S_{ORB} .

Abbildung 2.11 links zeigt eine schematische Darstellung der bei GRACE verwendeten SuperSTAR-Akzelerometer [Toubul et al., 1999]. In der Mitte befindet sich die als Titanquader (40x40x10 mm) realisierte Testmasse (70 g) umgeben von den Elektroden zum Anlegen bzw. Abgreifen der Steuerungsspannungen. Gegenüber dem auf CHAMP fliegenden STAR-Akzelerometer [Toubul et al., 1999] sollen die darauf basierenden SuperSTAR-Akzelerometer in jeder Messrichtung eine um eine Größenordnung höhere Genauigkeit von 10^{-9} bis 10^{-10} m/s² (siehe Tab. 2.3) erreichen. Die konstruktionsbedingt ungenauere Achse X_{ACC} ist in Richtung der Bahnnormalen (d.h. cross-track) orientiert, während die beiden anderen Achsen mit der höheren Messgenauigkeit in Flug- bzw. Nadirrichtung orientiert sind (vgl. Abb. 2.11 rechts). Diese Konfiguration beruht auf den numerischen Untersuchungen in Kim [2000], wonach in dieser Anordnung die größte Genauigkeit für die zu bestimmenden Schwerfeldparameter erreicht wird.

Die Akzelerometermessungen repräsentieren idealerweise direkt die Summe aller auf die Bewegung des Satelliten wirksamen nicht-gravitativen Kräfte wie Luftwiderstand und Strahlungsdruck sowie auch durch das Lage-Kontrollsystem verursachte Trägheitsbeschleunigungen. Tatsächlich sind jedoch eine Reihe von systematischen Effekten zu betrachten. Das allgemeine Messmodell der Akzelerometermessungen bzgl. dem akzelerometerfesten Referenzsystem S_{ACC} lautet (Bertin [1998]):

$$\mathbf{f}^{ACC} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \mathbf{f}^{ng} + \mathbf{K}_{mis} \mathbf{f}^{ng} + \mathbf{K}_2 (\mathbf{f}^{ng})^2 + \mathbf{f}^g + \varepsilon \quad (2.7)$$

mit

2. Das Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE)

- \mathbf{f}^{ACC} : Vektorielle Akzelerometermessungen
- \mathbf{f}^{ng} : Vektor der Summe der wahren nicht-gravitativen Kräfte
- \mathbf{K}_0 : Vektor der unbekanntenen Additionskonstanten je Messachse
- \mathbf{K}_1 : Matrix der linearen Skalierungsfaktoren
- \mathbf{K}_2 : Matrix der quadratischen Skalierungsfaktoren
- \mathbf{K}_{mis} : Missorientierungs- und Kopplungsmatrix
- \mathbf{f}^g : gravitative Beschleunigungen wegen Ablage vom Massenzentrum
- ε : Vektor Messrauschen

Additionskonstanten \mathbf{K}_0 und Skalierungsfaktoren \mathbf{K}_1 ergeben sich durch die technisch nicht völlig fehlerfreie Realisierung des Servomechanismus zur Rückstellung der Testmasse auf ihre Nominallage. Weitere Fehlereinflüsse zweiter Ordnung sind in der Matrix der quadratischen Faktoren \mathbf{K}_2 zusammengefasst. Diese ergeben sich z.B. durch Unzulänglichkeiten in der Geometrie des Titanquaders und/oder der Elektrodenoberflächen. Die Matrix \mathbf{K}_{mis} umfasst Fehler, die durch eine Fehlorientierung des Beschleunigungsmessers relativ zum satellitenfesten Referenzsystem (Einbaufehler Alignment) und/oder durch Abweichungen von der Orthogonalität der Messachsen des Beschleunigungsmessers entstehen. ε bezeichnet das frequenzabhängige Messrauschen (vgl. Tab. 2.3). Bis auf die Additionskonstanten und das Messrauschen bewirken alle Einflüsse eine Skalierung der wahren nicht-gravitativen Beschleunigung \mathbf{f}^{ng} . Sofern \mathbf{K}_{mis} und \mathbf{K}_2 nicht als reine Diagonalmatrizen angenommen werden können, ergeben sich dabei Kopplungsterme zwischen den Signalen der Messachsen. Derartige Einflüsse lassen sich jedoch durch eine sorgfältige Herstellung bzw. Integration auf die Träger-Plattform unter das spezifizierte Messrauschen nach Tab. 2.3 reduzieren. Gleiches gilt für den Term \mathbf{f}^g [Frommknecht, 2001]

$$\mathbf{f}^g = \mathbf{G}\delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \delta\mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \delta\mathbf{r} \quad (2.8)$$

mit

- \mathbf{G} : Matrix der Gravitationsgradienten,
- $\boldsymbol{\Omega}$: Winkelgeschwindigkeit des Satelliten bzgl. Inertialsystem,
- $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$: Winkelbeschleunigung des Satelliten bzgl. Inertialsystem,
- $\delta\mathbf{r}$: Vektor Einbaufehler,

der durch eine mögliche Ablage des Ursprungs des Instruments gegenüber dem tatsächlichen Massenschwerpunkt des Satelliten zu Beiträgen gravitativer Beschleunigungen im Messsignal führen kann. Im Falle von GRACE können Anteile wegen (2.8) vernachlässigt werden, sofern die Ablage $|\delta\mathbf{r}| \leq 0.2$ mm gehalten wird. Da solche Abweichungen im Orbit durch eine nicht vollständig symmetrische Entleerung der Kaltgastanks nachträglich entstehen könnten, verfügt jeder Satellit über die bereits erwähnte *Mass Trim Unit* (MTU). Diese besteht aus Trimgewichten, die auf zwei orthogonal zueinander angeordneten Messspindeln angebracht sind und durch geeignete Verschiebungen die Ablagen innerhalb des Toleranzbereichs korrigieren. Diese Trimmung wird auf Basis regelmässiger Kalibrationsmanöver im Orbit durchgeführt und die Ablagen können gegenwärtig sogar unterhalb von 0.1 mm gehalten werden, [Case et al., 2004].

Insgesamt ergibt sich damit für die Verwendung der Akzelerometermessungen (siehe Abschnitt 4.4) folgendes vereinfachtes Modell

$$\mathbf{f}^{ACC} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1\mathbf{f}^{ng} + \varepsilon, \quad (2.9)$$

wobei zudem für \mathbf{K}_1 eine reine Diagonalmatrix angenommen wird.

Tabelle 2.3.: Leistungsdaten SuperSTAR-Akzelerometer aus Bertin [1998]

Achse	Bias [m/s ²]	Skalierungs- faktor [-]	Orientungs- fehler [mrad]	Kopplungs- fehler [mrad]	Rauschen [m/s ² /√Hz]
X_{ACC}	$< 5 \cdot 10^{-5}$	$1 \pm 1 \%$	0.1	0.01	$\sqrt{1 + 0.1/f} \cdot 10^{-9}$
Y_{ACC}	$< 2 \cdot 10^{-5}$	$1 \pm 1 \%$	0.1	0.01	$\sqrt{1 + 0.005/f} \cdot 10^{-10}$
Z_{ACC}	$< 2 \cdot 10^{-5}$	$1 \pm 1 \%$	0.1	0.01	$\sqrt{1 + 0.005/f} \cdot 10^{-10}$

Messbereich: $5 \cdot 10^{-5} \text{ Hz} < f < 4 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$

Abbildung 2.12 links zeigt den Vergleich für die gemessenen nicht-gravitativen Beschleunigungen aller drei Achsen des Instruments auf GRACE-A über etwa drei Umläufe gegenüber Signalen, die mit Hilfe von konventionellen Störkraftmodellen berechnet wurden. Die unbekanntes Additions-konstanten in den Akzelerometermessungen wurden näherungsweise bestimmt und reduziert⁷.

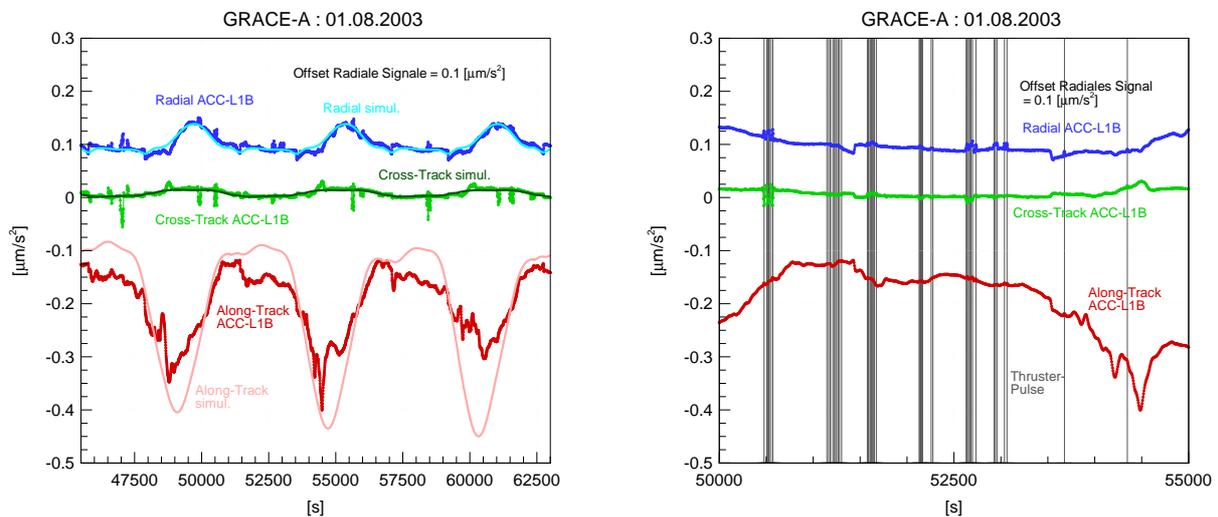


Abbildung 2.12.: Links: Vergleich Akzelerometermessungen L1B GRACE-A über drei Umläufe am 01.08.2003 mit Beschleunigungen aus Störkraftmodellen. Additionskonstanten der Akzelerometermessungen wurden näherungsweise entfernt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde das Signal für den radialen Kanal konstant um $0.1 \mu\text{m/s}^2$ verschoben dargestellt. Rechts: Ausschnitt aus dem linken Bild mit den Epochen der Aktivität der Steurdüsen des Lage-Kontrollsystems (vertikale Linien).

Wie erwartet werden die größten Beschleunigung in Flugrichtung gemessen (negatives Vorzeichen, d.h. Abbremsung der Satelliten), danach folgt die Beschleunigung in radialer Richtung und schließlich die Komponente senkrecht zur Bahnebene (cross-track). Gegenüber den Messungen zeigen die aus Modellen bestimmten Bahnstörungen zwar eine generelle Übereinstimmung, allerdings fehlen in den Modellwerten kurzzeitige Fluktuationen. Diese rühren einerseits von kurzfristigen Variationen der umgebenden Atmosphärendichte und des Strahlungsdrucks her, andererseits ergeben sich zusätzliche Beschleunigungen durch die Steurdüsen des Lage-Kontrollsystems (vgl. Abb. 2.12 rechts). Diese entstehen durch unvermeidbare Unzulänglichkeiten in der gegenseitigen Orientierung der Steurdüsenpaare sowie einer ungleichmässigen Länge der Steuerpulse je Düse.

⁷Die Additionskonstanten werden durch eine kleinste-Quadrate-Ausgleichung aus der Zeitreihe der Akzelerometermessungen und dem Summensignal der Störkraftmodelle je Messachse näherungsweise geschätzt und dann in der Zeitreihe der Akzelerometermessungen mit dem entsprechenden Vorzeichen angebracht.

Als tatsächliche auf den jeweiligen Satelliten wirkende lineare Beschleunigungen sind diese im Zuge der Integration der Bewegungsgleichung zu berücksichtigen.

Aufbereitung der Akzelerometermessungen

Analog den K-Band-Messungen erfolgt eine Nachbearbeitung der 10Hz-Rohdaten der Akzelerometerinstrumente am Boden durch das JPL. Neben der Referenzierung auf die gemeinsame GPS-Zeit und dem Entfernen von groben Ausreißern erfolgt bei den Akzelerometerbeobachtungen - soweit als möglich - ein Füllen von Lücken. Dies ist notwendig, da man zur Berechnung der Trajektorie mittels der dynamischen Methode auf möglichst lange zusammenhängende Zeitreihen der nichtgravitativen Beschleunigungen angewiesen ist, während in den sonstigen Beobachtungen Lücken eher unkritisch sind. Zum Ausdünnen der Daten auf die nominelle L1B-Datenraten von 1-Hz mit einer gleichzeitigen Tiefpass-Filterung zur Rauschunterdrückung, verwendet man wie beim K-Band einen CRN-Filter der Ordnung 7. Jedoch wird der Tiefpass-Bereich bis etwa 35 mHz und einer größeren Fensterbreite von 140.7 Sekunden gewählt. Der Sperrbereich oberhalb 35 mHz wird mit dem SNR der K-Band-Messungen begründet, das oberhalb von 25 mHz kleiner 1 wird (vgl. Abb. 2.9 und z.B. Fackler [2005]). Das längere Zeitintervall von 140.7 Sekunden ergibt sich durch spektralen Vergleich der Restfehler des Filters mit der erwarteten Signalstärke der Schwerefeldkoeffizienten [Thomas, 1999] und erlaubt mit dieser Fensterbreite eine quasi fehlerfreie Auflösung der Schwerefeldkoeffizienten bis etwa Grad 50. Dies wird als ausreichend betrachtet, da signifikante Beiträge durch nicht-gravitative Bewegungsanteile auf die Schwerefeldbestimmung hauptsächlich im niederfrequenten Bereich liegen.

Genauigkeit der Akzelerometermessungen

Obwohl das spezifizierte Rauschverhalten über kurze, ungestörte Zeiträume erreicht wird, zeigen verschiedene Untersuchungen (z.B. Hudson [2003], Fackler [2005]) systematische Einflüsse und Fehler der Akzelerometermessungen, die auf eine insgesamt geringere Genauigkeit der Messungen hindeuten. Neben den Aktivitäten des Lage-Kontrollsystem ergeben sich Störungen durch sog. *Twangs*, die im Zusammenhang mit temperaturbedingten Vibrationen einer Teflon-Folie an der Unterseite der Satelliten stehen. Charakteristischerweise ergeben sich über einen Zeitraum von etwa 4-5 s symmetrische Schwankungen um den Mittelwert des Akzelerometersignals, die mit einer Größenordnung von etwa $2 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ im radialen Kanal am stärksten sind. In den beiden anderen Achsen ist der Einfluss um gut zwei Größenordnungen kleiner ($\approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$).

Ein weiteres Phänomen sind mehr oder minder regelmässige *Peaks* deren Ursache bislang unklar ist. Das Verhalten ist gekennzeichnet durch einen Ausschlag in eine beliebige Richtung, der eine Schwankung in die jeweils entgegengesetzte Richtung mit etwa einem Drittel der ursprünglichen Amplitude folgt. Die maximale Größenordnung der Peaks liegt nach Fackler [2005] bei etwa $1.2 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$ für die along-track-Komponente, bei etwa $6 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$ für die cross-track-Komponenten und bei etwa $4 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$ in der Radialachse. Da das Auftreten der Peaks zwischen den Achsen scheinbar korreliert ist, geht man von einer gerätespezifischen Fehlerquelle aus [Fackler, 2005]. Insgesamt ergeben sich durch diese Einflüsse Abweichungen von der Spezifikation in der Größe von etwa $8 \cdot 10^{-10} \text{ ms}^{-2}$ für den radialen und den along-track-gerichteten Kanal und etwa $2 \cdot 10^{-9} \text{ ms}^{-2}$ im cross-track-Kanal [Fackler, 2005]. Abbildung 2.13 zeigt die Leistungsdichtespektren der along-track- und cross-track-orientierten Messachsen der Akzelerometerinstrumente der L1B-Daten für GRACE-A und -B sowie das erwartete und tatsächliche Rauschniveau. Der Abfall oberhalb von 35 mHz liegt an der Tiefpassfilterung der L1A-Daten mittels des CRN-Filters, so dass etwaige hochfrequente Störsignale dadurch effektiv entfernt werden.

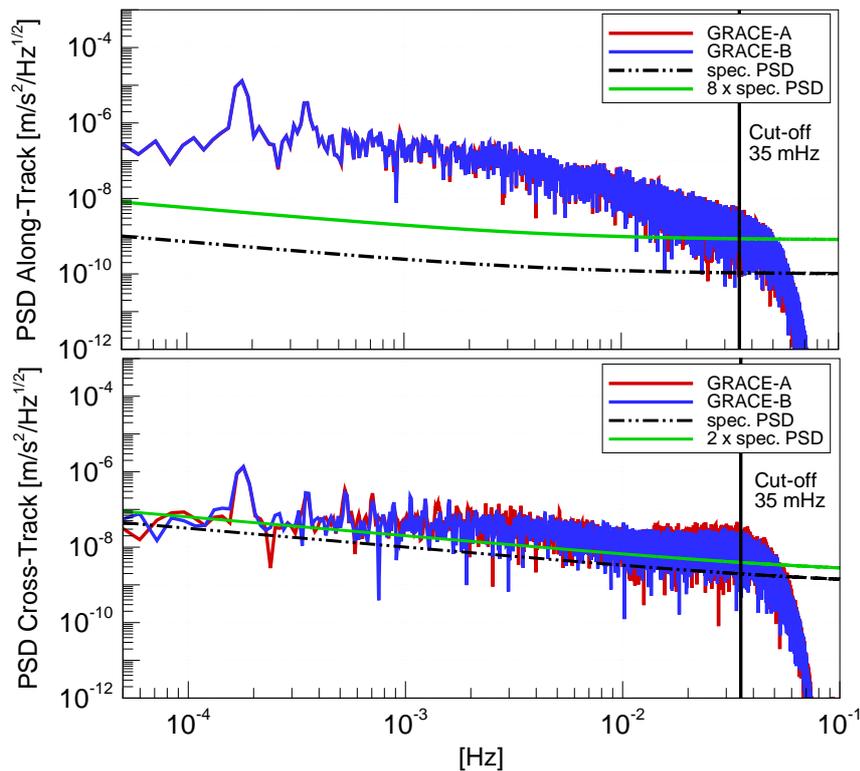


Abbildung 2.13.: Leistungsdichtespektren L1B-Daten along-track- und cross-track-orientierter Messungen GRACE-A und -B sowie spezifiziertes und tatsächliches Rauschniveau. Ergebnisse für die radiale Komponente sind entsprechend der along-track-Achse und daher nicht dargestellt. Oberhalb von 35 mHz erfolgt eine Sperrung hochfrequenter Signale mittels des CRN-Filters im Zuge der Aufbereitung von L1A nach L1B.

2.4. Sternkamera-Daten

Zur aktiven Steuerung durch das Lage-Kontrollsystem sowie zur Orientierung der Beobachtungen im Inertialraum - insbesondere der Akzelerometermessungen - verfügt jeder Satellit über eine Sternkamera (Star Camera Assembly SCA). Diese besteht aus zwei simultan arbeitenden digitalen Kameraköpfen (CCD-Kameras), die in einem Sichtfeld von jeweils 18° mal 16° den Fixsternhimmel beobachten und mit einem intern gespeicherten Sternkatalog abgleichen. Die Kameraköpfe sind fest mit dem Akzelerometergehäuse verbunden und jeweils 45° gegenüber der Zenith-Richtung, links und rechts seitwärts zur Flugrichtung geneigt (siehe Abb. 2.14). Die Verarbeitung der digitalen Bilder (Frames) erfolgt durch die IPU und liefert die Orientierungsinformation in Form von Zeitreihen von Quaternionen.

Nach der Aufbereitung im Bodensegment beschreiben diese die Transformationsmatrix \mathbf{R}_{SRF}^{ICRF} der Rotation vom satellitenfesten S_{SRF} -System⁸ in das raumfeste, geozentrische Inertialsystem, S_{ICRF} (siehe Abb. 2.15), in dem die Bewegungsgleichung zur Bestimmung der Satellitenbahn angesetzt wird (vgl. Abschnitt 4.2):

$$\mathbf{r}_{ICRF} = \mathbf{R}_{SRF}^{ICRF} \cdot \mathbf{r}_{SRF}. \quad (2.10)$$

⁸Auf das alle L1B-Daten bezogen werden

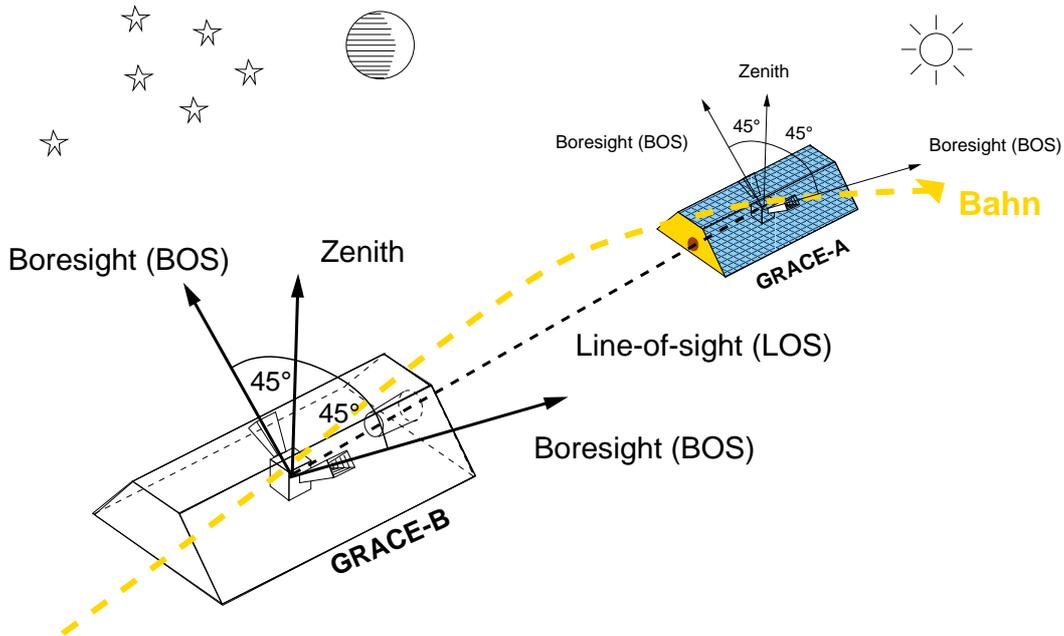


Abbildung 2.14.: Schema Orientierung Star Camera Assembly

Äquivalent ergibt sich für die Transformation zu einem Zeitpunkt t nach Gleichung (2.10) in der Darstellung mittels Quaternionen:

$$\mathbf{r}_{ICRF} = \mathbf{Q}_{SRF}^{ICRF} \cdot \mathbf{r}_{SRF} = (2q_0^2 - 1) \mathbf{r}_{SRF} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{SRF}) \cdot \mathbf{q} - 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{r}_{SRF}) \quad (2.11)$$

mit den Größen und Definitionen (siehe auch Abb.2.15 rechts)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{SRF}^{ICRF} &: [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T, \\ &: q_0 \doteq \cos(\delta/2), \\ &: q_1 \doteq (\delta_x/\delta) \cdot \sin(\delta/2), \\ &: q_2 \doteq (\delta_y/\delta) \cdot \sin(\delta/2), \\ &: q_3 \doteq (\delta_z/\delta) \cdot \sin(\delta/2), \\ &: \delta_x, \delta_y, \delta_z \text{ Richtung der Rotationsachse } \Delta, \\ &: \delta \text{ Drehwinkel um die Rotationsachse } \Delta, \\ \mathbf{q} &: [q_1 \ q_2 \ q_3]^T, \\ \mathbf{r}_{ICRF} &: \text{Ortsvektor bzgl. des ICRF,} \\ \mathbf{r}_{SRF} &: \text{Vektor bzgl. des SRF.} \end{aligned}$$

Durch Auswertung der rechten Seite der Gleichung (2.11) erhält man den Ausdruck zur Bestimmung von \mathbf{R}_{SRF}^{ICRF} anhand von \mathbf{Q}_{SRF}^{ICRF} :

$$\mathbf{R}_{SRF}^{ICRF} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_0) & 2(q_1 q_3 + q_2 q_0) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_0) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_0) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_0) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_0) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_0^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Der Vorteil der Verwendung von Quaternionen anstelle von expliziten Rotationswinkeln (z.B. im Sinne von Eulerwinkeln) liegt in deren numerischen Stabilität, da sie frei von Singularitäten sind. Diese Eigenschaft ist gerade auch für einen störungsfreien, autonomen Betrieb der Sa-

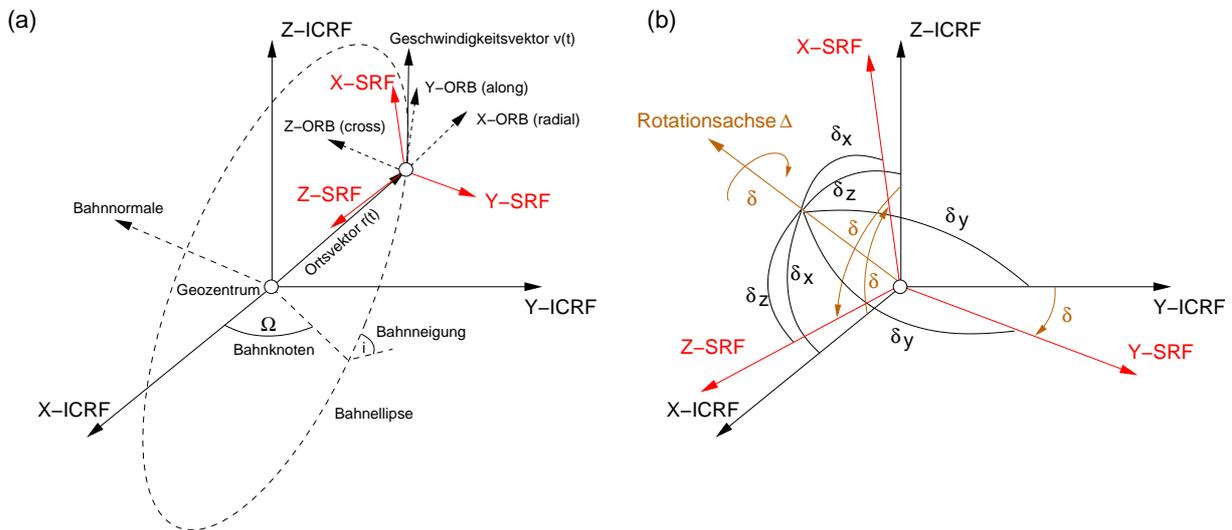


Abbildung 2.15.: (a) Zusammenhang raumfestes, geozentrisches Inertialsystem S_{ICRF} , satellitenfestes S_{SRF} -System und bahnbegleitendes S_{ORB} -System (für GRACE-B). (b) Graphische Erläuterung Quaternionen: Rotationsachse Δ und Drehwinkel δ von S_{SRF} nach S_{ICRF} .

telliten wichtig, da die Quaternionen der Sternkameras unmittelbar an Bord der Satelliten zur automatischen Lagekontrolle verwendet werden.

Aufbereitung der Sternkamera-Messungen

Die ursprünglichen L1A-Quaternionen der beiden Sternkameraköpfe⁹ werden im Bodensegment zu einem gemeinsamen SCA-L1B-Produkt, d.h. Quaternionen mit einer Samplingrate von 5 s kombiniert. Analog den K-Band- und Akzelerometerdaten erfolgt dabei eine Filterung der 1 Hz L1A-Daten mit einem CRN-Filter der Ordnung 7 sowie einer Fensterbreite von 70.7 Sekunden. Die Bandbegrenzung des Tiefpass-Filters wird bei 0.1 Hz gewählt, da oberhalb von 0.03 Hz die SCA1A-Daten kein signifikantes Signal mehr enthalten (siehe z.B. Fackler [2005]). Daneben müssen die Messungen jedes Kamerakopfes entsprechend der jeweiligen Orientierung in das satellitenfesten S_{SRF} -System transformiert werden. Dabei sind zusätzliche geringe Abweichungen von der in Abb. 2.14 dargestellte Nominallage zu berücksichtigen. Diese wurden vor dem Start am Boden bestimmt bzw. werden im Zuge der Kalibrationsmanöver zur Massentrimmung im Flug nachgemessen und in der Aufbereitung durch das JPL entsprechend korrigiert.

In Abhängigkeit von Drehraten der Satelliten um die gemeinsame Sichtline (Line-of-sight, LOS, \approx Flugrichtung) soll die Lage mittels der Sternkameras mit den in Tabelle 2.4 angegebenen Werten bestimmt werden können.

Abbildung 2.16 zeigt den zeitlichen Verlauf der Lage der GRACE-Satelliten (links GRACE-A, rechts GRACE-B) gegenüber dem begleitenden Dreibein S_{ORB} . Die konstante Ablage von ca. ± 1 Grad im Neigungswinkel resultiert aus der gegenseitigen Orientierung der Satelliten zur Etablierung der K-Band-Verbindung. Überlagert sind umlaufperiodische Variationen sowie die Aktivitäten des Lagekontrollsystems, deren Korrelationen vor allem im Roll- und Gierwinkel sichtbar werden. In deren zeitlichem Verlauf erkennt man deutlich die Eingriffe durch das AOCS wobei scheinbar teilweise Überreaktionen durch die Steuerdüsen erzielt werden, so dass mehrmaliges

⁹Sofern nicht einer der Köpfe durch Streulicht oder direkte Einstrahlung durch Sonne und/oder Mond geblendet ist und abgeschaltet ist.

Tabelle 2.4.: Leistungsdaten Star Camera Assembly aus JPL [2000]

Drehrate LOS	Cröß-Axes	Twist-Angle
mrad/s	μrad	μrad
2.5	15	120
5.0	75	605
10.0	300	2400

Nachsteuern notwendig ist. Daneben erkennt man auch längere Zeiträume in denen die Ausrichtung innerhalb der Bandbreite natürlich driftet.

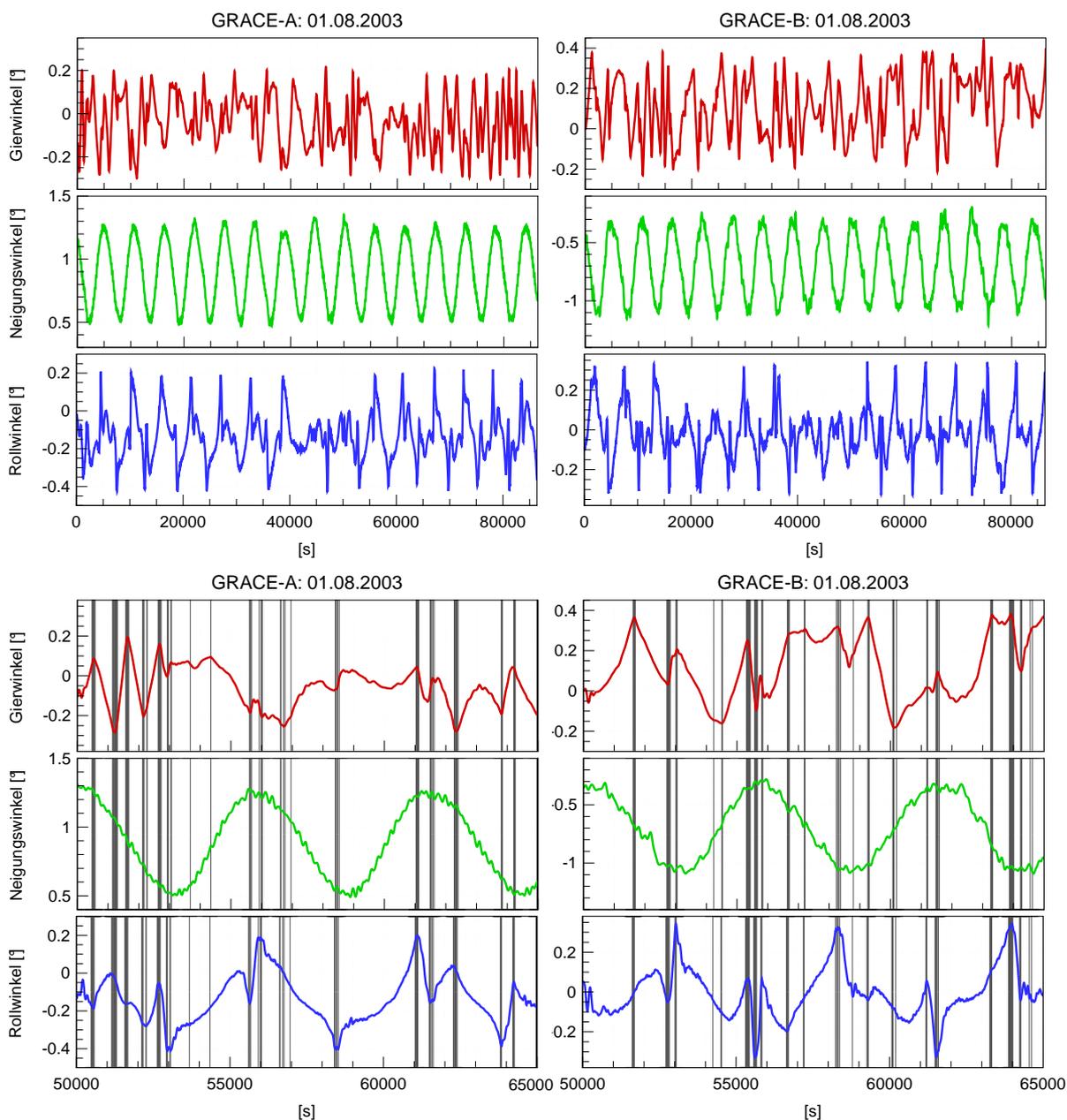


Abbildung 2.16.: Zeitreihen der Lagewinkel, bestimmt aus L1B-Quaternionen über einen Tag (obere Reihe, links GRACE-A, rechts GRACE-B) und einen Ausschnitt über etwa drei Umläufe (untere Reihe, links GRACE-A, rechts GRACE-B, Vertikale Linien = Epochen Düsen-Aktivität des Lage-Kontrollsystems, wobei kurz aufeinander folgende Thrusteraktivierungen teilweise nicht getrennt darstellbar sind).

Abbildung 2.17 zeigt das Leistungsdichtespektrum für die aus den SCA1B-Daten bestimmten Gier- und Neigungswinkeln der beiden Satelliten. Das Spektrum für den Gierwinkel scheint für GRACE-A und GRACE-B identisch. Analoge Ergebnisse (nicht dargestellt) ergeben sich für den Rollwinkel. Im Neigungswinkel werden unterschiedliche Spektren für GRACE-A und GRACE-B sichtbar. Neben einem generell unterschiedlichen Niveau fällt ein Anstieg des PSD bei etwa 7 mHz auf ($T \approx 142$ s), der bei GRACE-A markanter ausfällt als bei GRACE-B. Dieser Anstieg in beiden Spektren erklärt sich möglicherweise mit der durchschnittlichen Aktivierungszeit der Steuerdüsen, die für beide Satelliten bei etwa 145 Sekunden liegt.

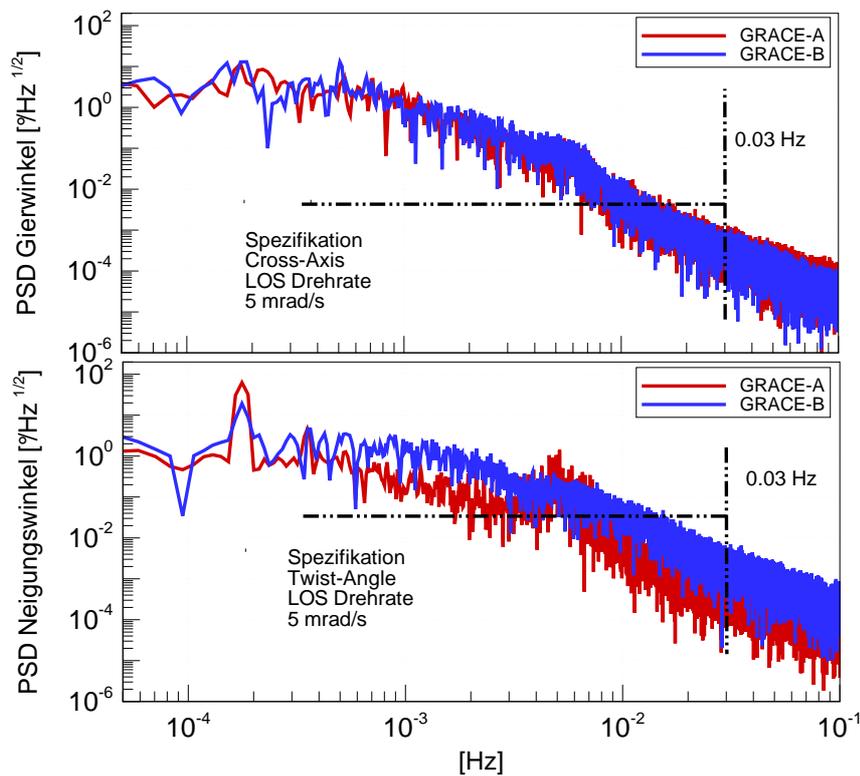


Abbildung 2.17.: Leistungsdichtespektrum der Lagewinkel für den Gierwinkel und den Neigungswinkel für GRACE-A und GRACE-B bestimmt aus L1B-Daten. Entsprechende Leistungsdichtespektren ergeben sich für den Rollwinkel.

3. Modellierung des orts- und zeitvariablen Gravitationsfeldes der Erde

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Modellierung des orts- und zeitvariablen Gravitationsfeldes sowie zur Interpretation der mit GRACE bestimmten Feldvariationen in Hinblick auf gesuchte, nicht apriori modellierte Massenverlagerungen zusammengestellt. Ausgangspunkt ist die bekannte Entwicklung des Newton'schen Gravitationspotentials der statischen Massenverteilung in sphärisch-harmonische Basisfunktionen mit den Stokes-Koeffizienten als gesuchten Unbekannten. Basierend auf der Arbeit von Wahr et al. [1998] erfolgt eine Beschreibung der Erweiterung auf zeitvariable Größen sowie des Zusammenhangs zwischen Änderungen der Potentialfunktion mit Variationen in der Massenverteilung einer kugelförmigen Schicht im Bereich der Erdoberfläche. Im letzten Abschnitt wird das Konzept zur Ableitung von Schwerefeldvariationen aus GRACE-Daten konkretisiert und Aspekte wie Fehlereinflüsse durch Instrumentenfehler oder Aliasing-Effekte allgemein diskutiert. Details bezüglich der Modellierung bekannter gezeiten- und nichtgezeitenperiodischer Schwerefeldvariationen, die im Zuge der Analyse der Satellitendaten apriori reduziert werden, sind in Anhang B zusammengestellt.

3.1. Allgemeines

Ausgangspunkt der Modellierung ist die bekannte Entwicklung des äußeren Gravitationspotentials der Erde hervorgerufen durch eine statische Massenverteilung innerhalb des Erdkörpers

$$V(r, \theta, \lambda) = G \int_{Erde} \frac{dM}{l} = G \int_{Erde} \rho(r', \theta', \lambda') \frac{d\Omega}{l} \quad (3.1)$$

in vollständig normierte Kugelfunktionen [Heiskanen und Moritz, 1967]

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.2)$$

Für eine zeitlich variierende Massenverteilung ergibt sich ein zeitlich variables Gravitationspotential und es gilt entsprechend

$$V(r, \theta, \lambda, t) = G \int_{Erde} \frac{dM(t)}{l} = G \int_{Erde} \rho(r', \theta', \lambda', t) \frac{d\Omega}{l} \quad (3.3)$$

bzw.

$$V(r, \theta, \lambda, t) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}(t) \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}(t) \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.4)$$

Tabelle 3.1.: Bedeutung der Größen in Gleichungen (3.1) bis (3.6)

r, θ, λ	: sphärische Koordinaten eines Aufpunktes P bzgl. einem erdfesten, geozentrischen Koordinatensystem, radialer Abstand r , Poldistanz θ , Länge λ
G	: Gravitationskonstante = $6.673 \cdot 10^{-11} [m^3/kg s^2]$
$dM(t)$: Element der zeitabhängigen Massenverteilungsfunktion
l	: Abstand Aufpunkt - Quellpunkt des Massenelements
$\rho(r', \theta', \lambda')$: Dichtefunktion der Massenverteilung, abhängig von den Koordinaten r', θ', λ' : des Quellpunktes (bzgl. dem erdfesten geozentrischen Koordinatensystem)
$d\Omega$: Volumenelement $d\Omega = r' \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda'$ im Quellpunkt
M	: Gesamtmasse der Erde inklusive der Atmosphäre ($M = const$)
R	: mittlerer Erdradius
$\bar{C}_{nm}(t), \bar{S}_{nm}(t)$: vollständig normierte Kugelfunktionskoeffizienten (<i>Stokes-Koeffizienten</i>) vom Grad n und der Ordnung m
\bar{P}_{nm}	: vollständig normierte zugeordnete Legendre-Polynome vom Grad n und der Ordnung m

Im weiteren seien nur zeitvariable Koeffizienten $\bar{C}_{nm}(t), \bar{S}_{nm}(t)$ betrachtet. Diese repräsentieren die zugrundeliegende, zeitabhängige Massenverteilung und stehen mit ihr in Beziehung über die Ausdrücke

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}(t) \\ \bar{S}_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{M(2n+1)} \int_{Erde} \left(\frac{r'}{R} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta') \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} dM(t) \quad (3.5)$$

bzw. bei Darstellung in Abhängigkeit von der Dichteverteilung

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}(t) \\ \bar{S}_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{M(2n+1)} \int_{Erde} \left(\frac{r'}{R} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta') \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \rho(r', \theta', \lambda', t) d\Omega. \quad (3.6)$$

Das Integral ist das Volumenintegral über den Laufbereich der sphärischen Koordinaten der Massenverteilungs- bzw. Dichtefunktion über die gesamte Erde:

$$\int_{Erde} \doteq \int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \quad (3.7)$$

und schliesst im Falle der Bestimmung der auch als *Stokes-Koeffizienten* bezeichneten $\bar{C}_{nm}(t), \bar{S}_{nm}(t)$ aus Satellitendaten die Massen der Atmosphäre mit ein.

Änderungen in der Potentialfunktion zwischen zwei Epochen t_i, t_j

$$\Delta V(r, \theta, \lambda) = V(r, \theta, \lambda, t_i) - V(r, \theta, \lambda, t_j) \quad (3.8)$$

bzw. die Differenz des instantanen Potentials zur Epoche t gegenüber dem zeitlich unveränderlichen Anteil

$$\Delta V(r, \theta, \lambda) = V(r, \theta, \lambda, t) - \bar{V}(r, \theta, \lambda) \quad (3.9)$$

aufgrund von Variationen in der Massenverteilung $\Delta dM = dM(t_i) - dM(t_j)$ bzw. $\Delta dM = dM(t) - d\bar{M}$ respektive in der Dichteverteilung $\Delta \rho = \rho(t_i) - \rho(t_j)$ bzw. $\Delta \rho = \rho(t) - \bar{\rho}$ führen auf Änderungen der Stokes-Koeffizienten nach Gleichungen (3.5) und (3.6) gemäss

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{M(2n+1)} \int_{Erde} \left(\frac{r'}{R} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta') \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \Delta dM, \quad (3.10)$$

Tabelle 3.2.: Interpretation der Entwicklungskoeffizienten $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ bis Grad und Ordnung 2.

\bar{C}_{00}	repräsentiert das Produkt aus Gravitationskonstante mal Gesamtmasse der Erde in (3.2) bzw. (3.4) und bestimmt den Maßstab des Zentralkörperanteils GM/R . Im weiteren wird $\bar{C}_{00} = 1$ angenommen.
$\bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}$	definieren die Lage des Massenzentrums der Erde in Bezug auf ein erdfestes Koordinatensystem. Konkret bestimmt \bar{C}_{10} die Lage des Massenzentrums in Richtung der Rotationsachse (z-Achse), \bar{C}_{11} in Richtung des Nullmeridians (x-Achse) und \bar{S}_{11} in Richtung y-Achse des erdfesten Systems. Fallen Ursprung des erdfesten Koordinatensystems und Massenzentrum der Erde zusammen gilt $\bar{C}_{10} = \bar{C}_{11} = \bar{S}_{11} = 0$.
\bar{C}_{20}	beschreibt die statische Abplattung des Erdkörpers.
$\bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}, \bar{S}_{22}$	sind proportional den Massenträgheitsprodukten von x- mit z-Achse bzw. y- mit z-Achse. Fallen die Achsen des erdfesten Systems mit den Hauptträgheitsachsen zusammen werden die Koeffizienten $\bar{C}_{21} = \bar{S}_{21} = \bar{S}_{22} = 0$, ansonsten nehmen sie Werte ungleich Null an.
\bar{C}_{22}	beschreibt die Abplattung des Erdäquators.

bzw.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{M(2n+1)} \int_{Erde} \left(\frac{r'}{R}\right)^n \bar{P}_{nm}(\cos\theta') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \Delta\rho d\Omega. \quad (3.11)$$

Für Gleichung (3.8) bzw. (3.9) ergibt sich

$$\Delta V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (3.12)$$

Indirekter Effekt von Massenverlagerungen auf Änderungen des Gravitationspotentials

Neben der unmittelbaren Änderung des Gravitationspotentials nach (3.12) ergibt sich wegen des Auflasteffekts ein indirekter Effekt auf das Potential durch die mit der Deformation einhergehenden zusätzlichen Änderung in der Massen- bzw. Dichteverteilung. Abbildung 3.1 stellt den Auflast-Effekt für das Beispiel von Massenverlagerungen aufgrund von Ozeangezeiten schematisch dar. Die direkte Änderung des Gravitationspotentials zu einem Zeitpunkt t_j durch die Umverteilung des Ozeanwassers aufgrund der luni-solaren Gravitationskräfte ergäbe die gegenüber einem Zeitpunkt t_i veränderte Äquipotentialfläche $V(t_j)$. Durch die Auflast des Wassers auf die feste Erde kommt es zu einer Deformation des Meeresbodens (Durchbiegung und Kompression) und bewirkt dadurch eine zusätzliche Dichteänderung bzw. Massenverlagerung im Untergrund. Wegen der Deformation in Richtung des Geozentrums wirkt der indirekte Effekt der direkten Änderung des Potentials durch die Massenverlagerung des Ozeanwassers entgegen.

Im allgemeinen Fall kleiner Deformationen hängt die zusätzliche Änderung von ΔV nach Gleichung (3.12) linear von diesem ab und es gilt [Farrell, 1972]

$$\Delta V_n^{ind} = k_n' \Delta V_n \quad (3.13)$$

mit

$$\Delta V_n = \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (3.14)$$

Daraus ergibt sich für die Änderung des Potentials wegen der Auflast mittels Summation über alle Grade n

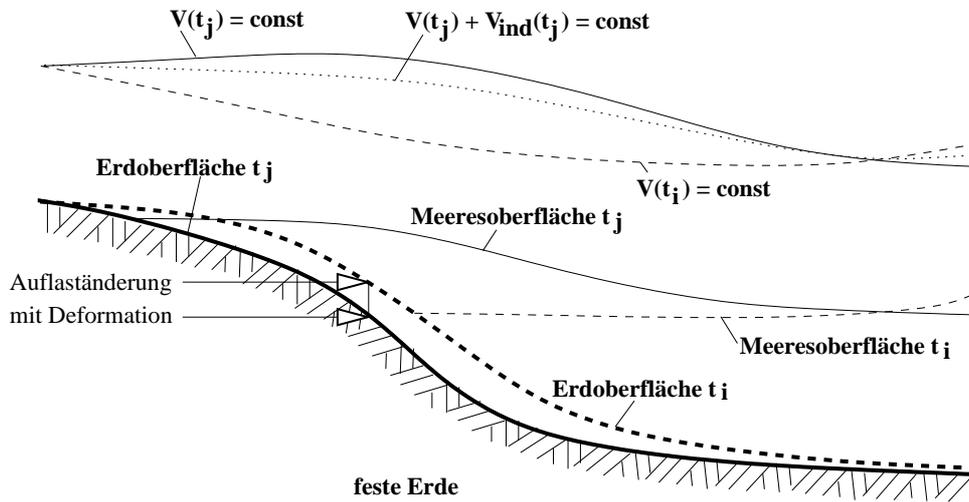


Abbildung 3.1.: Änderungen des Gravitationspotentials wegen Massenverlagerungen und Auflasteffekten

$$\Delta V(r, \theta, \lambda)^{ind} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} k'_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (3.15)$$

mit $\Delta \bar{C}_{nm}$, $\Delta \bar{S}_{nm}$ aus Gleichung (3.12). Addition von (3.12) und (3.15) liefert dann den Gesamteffekt auf die Potentialänderung aus Massenanteil und Auflast

$$\Delta V^{sum} = \Delta V + \Delta V^{ind} \quad (3.16)$$

$$= \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k'_n) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \times \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.17)$$

Für die Änderungen der Potentialkoeffizienten nach Gleichungen (3.10) und (3.11) gilt somit

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{3(1 + k'_n)}{4\pi R \rho_{ave} (2n + 1)} \int_{Erde} \left(\frac{r'}{R}\right)^{n+2} \bar{P}_{nm}(\cos \theta') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \Delta dM \quad (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{3(1 + k'_n)}{4\pi R \rho_{ave} (2n + 1)} \int_{Erde} \left(\frac{r'}{R}\right)^{n+2} \bar{P}_{nm}(\cos \theta') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \Delta \rho d\Omega. \quad (3.19)$$

wobei die Gesamtmasse der Erde durch $M = (4\pi/3)R^3 \rho_{ave}$ ausgedrückt wurde. ρ_{ave} ist die mittlere Dichte der Erde, wobei üblicherweise ein Wert von $\rho_{ave} = 5517 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ verwendet wird. In Abbildung 3.1 stellt die punktierte Linie die resultierende Äquipotentialfläche nach (3.17) zum Zeitpunkt t_j dar.

Die gradabhängigen Proportionalitätsfaktoren k'_n bezeichnen die Love'schen Auflastzahlen und repräsentieren das Deformationsverhalten aufgrund der rheologischen Eigenschaften der Erdkruste. Im Hinblick auf globale Anwendungen stehen gegenwärtig nur gradabhängige Auflastzahlen zur Verfügung (z.B. Han und Wahr [1995] oder Farrell [1972]) und spiegeln deshalb eine tatsächlich räumlich differenzierte Rheologie nur näherungsweise wider.

Tabelle 3.3.: Quellen zeitvariabler Änderungen des Schwerfeldes nach Ilk et al. [2005, Tab. 4.2]

Prozess	Amplitude		Wellenlänge (km)	Perioden
	Geoid	Schwere		
Ozeanzirkulation Meeresspiegel	10 mm mm/Jahr	10 μ Gal	30-5000 1000-5000	saisonal bis zwischenjährlich säkular
Polare Eismassen	1 mm mm/Jahr	1 μ Gal	100-4000 5000	saisonal bis zwischenjährlich säkular
Erdkruste und Erdmantel	mm/Jahr mum/Jahr	1 μ Gal/Jahr 0.01 μ Gal/Jahr	500 - 10000 100 - 2000	säkular säkular
Kontinentale Hydrologie	10 mm	10 μ Gal	100 - 5000	einige Wochen bis zwischenjährlich
Atmosphäre	10 mm	10 μ Gal	50-5000	jährlich, saisonal, täglich, andere
Gezeiten der festen Erde und Ozeane	1000 mm	100 μ Gal	10-10000	täglich, halbtäglich, 14-tägig, monatlich, halbjährlich, jährlich lang-periodisch

Approximation mit sphärischen Schichtpotential

Die als relevant betrachteten Massenverlagerungen (vgl. Tabelle 3.3) finden im wesentlichen innerhalb dünner Schichten im Bereich der Erdoberfläche statt. Entsprechend können die Änderungen des Gravitationspotentials durch rein laterale Variationen einer Massenbelegungs- bzw. Dichtefunktion eines sphärischen Schichtpotentials approximiert werden [Wahr et al., 1998]. Ausgehend von Gleichung (3.11) spaltet man die Integration in radialer Richtung von der Integration in Längen- und Breitenrichtung ab [Wahr et al., 1998]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{3(1 + k'_n)}{4\pi R \rho_{ave} (2n + 1)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{P}_{nm}(\cos \theta') \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \sin \theta' d\theta' d\lambda' \\ \times \int_0^{R+H} \left(\frac{r'}{R} \right)^{n+2} \Delta \rho(\theta', \lambda', r') dr'. \quad (3.20)$$

H bezeichnet die Dicke der Schicht der Massenverteilung. Setzt man eine kugelförmige Erde ohne Topographie voraus, d.h. die Massenverteilung kann mit einer Kugelschalenschicht mit der Dicke H dargestellt werden, so kann die obere Grenze der Integration über den radiale Abstand r' durch $r' \approx R + h$ mit $h \in [0, H]$ ersetzt werden. Da die Dicke H im Verhältnis zum Erdradius R als klein angenommen werden kann, so dass im allgemeinen die Bedingung $H/R \ll 1$ erfüllt ist, gilt

$$\left(\frac{r'}{R} \right)^{n+2} \approx \left(\frac{R + h}{R} \right)^{n+2} \approx 1. \quad (3.21)$$

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Integration über den radialen Abstand der Schicht mit der Dicke H

Tabelle 3.4.: Bedeutung der Größen in Gleichung (3.24)

N	: Geoidhöhen gegenüber Referenzellipsoid in [m]
T	: Störpotential $T \doteq W - U$ in [m ² /s ²]
W	: Schwerepotential $W \doteq V + Z$, W^0 Schwerepotential auf dem Geoid in [m ² /s ²]
U	: Normalpotential $U \doteq \bar{V} + Z$, U^0 Normalpotential auf dem Referenzellipsoid in [m ² /s ²]
Z	: Zentrifugalpotential in [m ² /s ²]
γ	: Normalschwere in [m/s ²]

$$\int_{r'=R}^{R+H} \Delta\rho(\theta', \lambda', r') dr' = H\Delta\rho(\theta', \lambda') = \Delta\sigma(\theta', \lambda'), \quad (3.22)$$

d.h. der Dichtekontrast $\Delta\rho(\theta, \lambda, r)$ kann mit einer rein lateral variierenden Massenbelegungs-funktion $\Delta\sigma(\theta', \lambda')$ (in [kg/m²]) ausgedrückt werden. Setzt man (3.22) in (3.20) ein, erhält man schließlich die Änderung der Potentialkoeffizienten aufgrund zeitlicher Variationen oberflächen-naher Massenanomalien mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{3(1+k'_n)}{4\pi R\rho_{ave}(2n+1)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta\sigma(\theta', \lambda') \bar{P}_{nm}(\cos\theta') \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \sin\theta' d\theta' d\lambda'. \quad (3.23)$$

Zusammenhang Änderungen Geoidhöhen mit Variationen der Massenverteilung

Die durch Änderungen in der Massenbelegungs-funktion $\sigma(\theta, \lambda)$ bedingten Variationen in den Potentialkoeffizienten nach (3.23) führen zu Änderungen des Geoids und sonstiger Funktionale des Gravitationspotentials (Schwereanomalien, Schwerestörung, Lotabweichungen, Störpotential, etc.). Im weiteren wird die Entwicklung der Zusammenhänge für das Geoid als ausgewählte Referenzfläche topographischer Höhen und Massenanomalien hervorgehoben.

Ersetzt man in der Grundgleichung für das Geoid nach dem Theorem von Bruns [Heiskanen und Moritz, 1967],

$$N = \frac{T - (W^0 - U^0)}{\gamma}, \quad (3.24)$$

die Normalschwere γ durch die mittlere Beschleunigung einer kugelförmigen Erde $\gamma \approx \bar{g} = GM/R^2$ und betrachtet nur Änderungen der Geoidhöhen ΔN zwischen diskreten Zeitpunkten oder als instantane Höhen $N(t)$ gegenüber dem quasi-statischen Anteil \bar{N} ,

$$\Delta N(\theta, \lambda) \approx \frac{\Delta V(\theta, \lambda)}{\bar{g}} = \frac{\Delta V(\theta, \lambda)R^2}{GM}, \quad (3.25)$$

ergibt sich mit den Potentialkoeffizienten aus Gleichung (3.23)

$$\Delta N(\theta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (3.26)$$

Der unbekannte, aber konstante Anteil in (3.24) entfällt wegen $\delta W = W^0 - U^0 \neq 0$ bei der Betrachtung von Differenzen der Form (3.26).

Gleichung (3.26) ist die grundlegende Beziehung zur Berechnung von Geoidvariationen bei Kenntnis der Änderungen der Schwerefeldkoeffizienten $\Delta\bar{C}_{nm}$, $\Delta\bar{S}_{nm}$, z.B. abgeleitet aus Satellitenbeobachtungen. Umgekehrt können nach (3.23) Änderungen der Potentialkoeffizienten auch aus bekannten Massenvariationen berechnet werden und daraus Geoidhöhenvariationen nach Gleichung (3.26).

Zur Darstellung der Änderungen der Potentialkoeffizienten bzw. des Geoids in Änderungen der äquivalenten Massenbelegungsfunktion entwickelt man diese in Kugelfunktionen (vgl. Wahr et al. [1998])

$$\Delta\sigma(\theta, \lambda) = R\rho_w \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\Delta\check{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta\check{S}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm} \cos(\theta). \quad (3.27)$$

wobei ρ_w die Dichte von Wasser ($\rho_w = 1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$) ist. Wegen der Skalierung mit ρ_w ergeben sich die $\Delta\check{C}_{nm}$, $\Delta\check{S}_{nm}$ als dimensionslose Koeffizienten der Entwicklung von $\Delta\sigma(\theta, \lambda)$ und stehen mit dieser in Beziehung über

$$\begin{Bmatrix} \Delta\check{C}_{nm} \\ \Delta\check{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi R\rho_w} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta\sigma(\theta', \lambda') \bar{P}_{nm}(\cos\theta') \begin{Bmatrix} \cos(m\lambda') \\ \sin(m\lambda') \end{Bmatrix} \sin\theta' d\theta' d\lambda'. \quad (3.28)$$

Vergleich von Gleichung (3.28) mit (3.23) liefert den Zusammenhang zwischen den Potentialkoeffizienten $\Delta\bar{C}_{nm}$, $\Delta\bar{S}_{nm}$ und den sphärisch-harmonischen Koeffizienten $\Delta\check{C}_{nm}$, $\Delta\check{S}_{nm}$ der Massenbelegungsfunktion $\Delta\sigma(\theta, \lambda)$. Es gilt

$$\begin{Bmatrix} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{3\rho_w(1+k'_n)}{\rho_{ave}(2n+1)} \begin{Bmatrix} \Delta\check{C}_{nm} \\ \Delta\check{S}_{nm} \end{Bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\check{C}_{nm} \\ \Delta\check{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{\rho_{ave}(2n+1)}{3\rho_w(1+k'_n)} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

Mit den Ausdrücken (3.30) ergeben sich die gesuchten Änderungen in der Massenbelegungsfunktion aus bekannten Variationen der Potentialkoeffizienten,

$$\Delta\sigma(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n K_n \left[\Delta\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta\bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm} \cos(\theta), \quad (3.31)$$

mit den gradabhängigen Faktoren

$$K_n = \frac{R\rho_{ave}(2n+1)}{3(1+k'_n)}. \quad (3.32)$$

Dividiert man den Ausdruck (3.31) durch ρ_w erhält man alternativ die Verteilungsfunktion der Dicke einer massenäquivalenten Wasserschicht (kurz als *Höhen Wassersäule* bezeichnet). Umgekehrt erhält man Geoidhöhenänderungen $\Delta N(\theta, \lambda)$ bei bekannten Variationen der sphärisch-harmonischen Entwicklungskoeffizienten der Massenbelegungsfunktion mit (3.29) zu

$$\Delta N(\theta, \lambda) = R^2\rho_w \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{K_n} \left[\Delta\check{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta\check{S}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm} \cos(\theta). \quad (3.33)$$

Die Ausdrücke (3.26), (3.31) und (3.33) bilden die grundlegenden Gleichungen zur Ableitung von GRACE-basierten Massenanomalien und dem Vergleich mit Massenanomalien/Geoidänderungen aus externen Datensätzen.

3.2. Konzept der Ableitung von Massenvariationen aus GRACE-Schwerefeldmodellen

Ausgangspunkt der Ableitung von zeitlichen Variationen des Schwerfeldes mit GRACE ist die Bestimmung quasi-statischer sphärisch-harmonischer Koeffizienten $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ aus den Satellitendaten über vorgegebene Datenzeiträume $[t_i, t_j]$ mit $t_j > t_i$ als Zuschläge zu Näherungswerten des statischen Feldes ($\bar{C}_{nm}^0, \bar{S}_{nm}^0$) (vgl. Abb. 3.2):

$$\left. \begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \right|_{t_i}^{t_j} = \left. \begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^0 \\ \bar{S}_{nm}^0 \end{Bmatrix} \right|_{t_i} + \left. \begin{Bmatrix} \Delta \bar{C}_{nm}^{res} \\ \Delta \bar{S}_{nm}^{res} \end{Bmatrix} \right|_{t_i}^{t_j} + \left. \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \right|_{t_i}^{t_j}. \quad (3.34)$$

Der zweite Term bezeichnet residuale Anteile, die idealerweise nur von unbekanntem Anteil des statischen Feldes sowie von unbekanntem zeitvariablen Schwerfeldvariationen während des Zeitraums $[t_i, t_j]$ herrühren, da bekannte Effekte wie Gezeiten der festen Erde, der Ozeane, der Atmosphäre sowie nicht-gezeitenperiodische Kurzzeitmassenvariationen mittels Hintergrundmodelle apriori aus den Daten reduziert werden (vgl. Gleichung (4.21) und Anhang B). Der Analysezeitraum $[t_i, t_j]$ des verarbeiteten Datenmaterials umfasst bei GRACE typischerweise einen Monat, wobei sich die Aufteilung an den Kalendermonaten orientiert. Die resultierenden Koeffizientensätze $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ bilden die GRACE-Level-2-Produkte (GRACE-L2) und werden im weiteren kurz als *Monatslösungen* bezeichnet. Neben den gesuchten residualen Signalanteilen enthalten die geschätzten Potentialkoeffizienten systematische und zufällige Fehler, die in den Termen $\delta \bar{C}_{nm}, \delta \bar{S}_{nm}$ der Gleichung (3.34) zusammengefasst sind. Aufgrund der verschiedenen Quellen (siehe nächster Absatz) müssen die Anteile allgemein als abhängig vom jeweiligen Zeitraum $[t_i, t_j]$ betrachtet werden.

Zur Ableitung der monatlichen Schwerfeldvariationen werden von den Koeffizienten der Monatslösungen die Koeffizienten einer aufdatierten Version des statischen Schwerfeldmodells abgezogen (siehe Abb. 3.3). Dieses aufdatierte statische Feldmodell kann einerseits durch Inversion des akkumulierten Normalgleichungssystems der monatsweise vorliegenden Normalgleichungssysteme (vgl. Abschnitt 4.1) berechnet werden oder alternativ durch Mittelung¹⁰ der Koeffizienten der Monatslösungen je Grad und Ordnung. Die resultierenden Differenzen $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$ der Koeffizienten der Monatslösungen gegenüber den Koeffizienten $\bar{C}'_{nm}, \bar{S}'_{nm}$ des aufdatierten Langzeitmodells (vgl. Abb. 3.3) werden schließlich mit Hilfe von Gleichungen (3.26), (3.31) in Variationen der Geoidhöhen bzw. von Massenstörungen im Ortsraum umgesetzt. Als Bezugszeitpunkt dieser Feldänderungen kann näherungsweise jeweils der mittlere Zeitpunkt der Monatslösung $\bar{t} = (t_i + t_j)/2$ angenommen werden.

Systematische Fehlereinflüsse der GRACE-Schwerefeldmodelle

Systematische Fehlereinflüsse in den Termen $\delta \bar{C}_{nm}, \delta \bar{S}_{nm}$ können allgemein auf folgende Quellen zurückgeführt werden:

- Sensor-Fehler, die sich durch die Messgenauigkeit und -charakteristik der wissenschaftlichen Instrumente, der Satellitensysteme und ihrem Zusammenspiel (Korrelationen) ergeben.
- Einschränkungen in der Bodenspurüberdeckung (= räumlich-zeitliches Sampling) in Kombination mit
- Modellierungsfehlern in den Hintergrundmodellen, sowie

¹⁰Gewichtetes Mittel in Abhängigkeit der eingegangenen Tage je Monatslösung.

3. Modellierung des orts- und zeitvariablen Gravitationsfeldes der Erde

- Defiziten in der Parametrisierung der Beobachtungs- und/oder der Bewegungsgleichung(en).
- Abbruchfehler verursacht durch ein zu frühes Abschneiden des Lösungsraums der gesuchten Potentialkoeffizienten $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$.

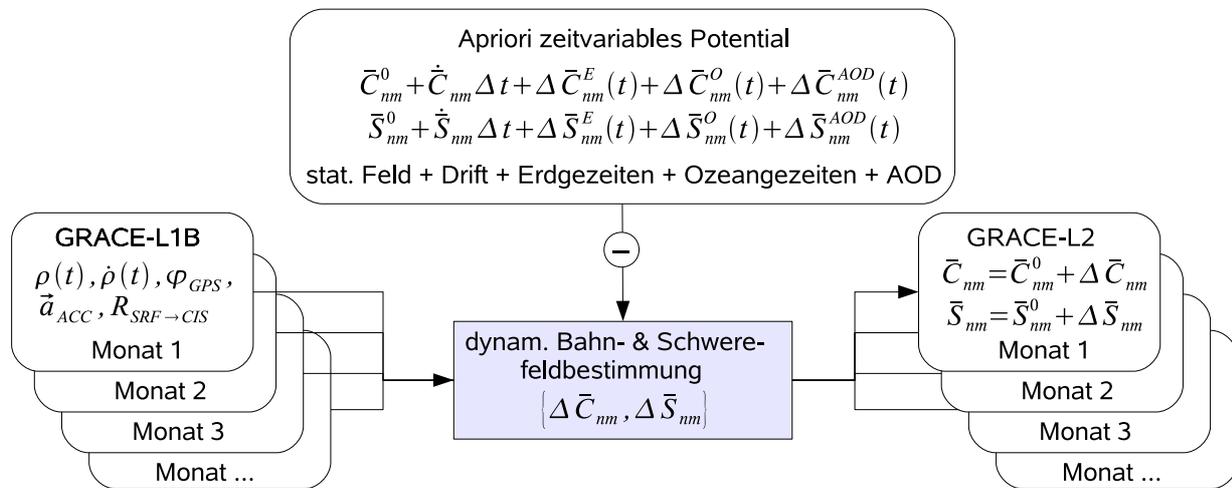


Abbildung 3.2.: Monatsweise Berechnung quasi-statischer sphärisch-harmonischer Koeffizienten.

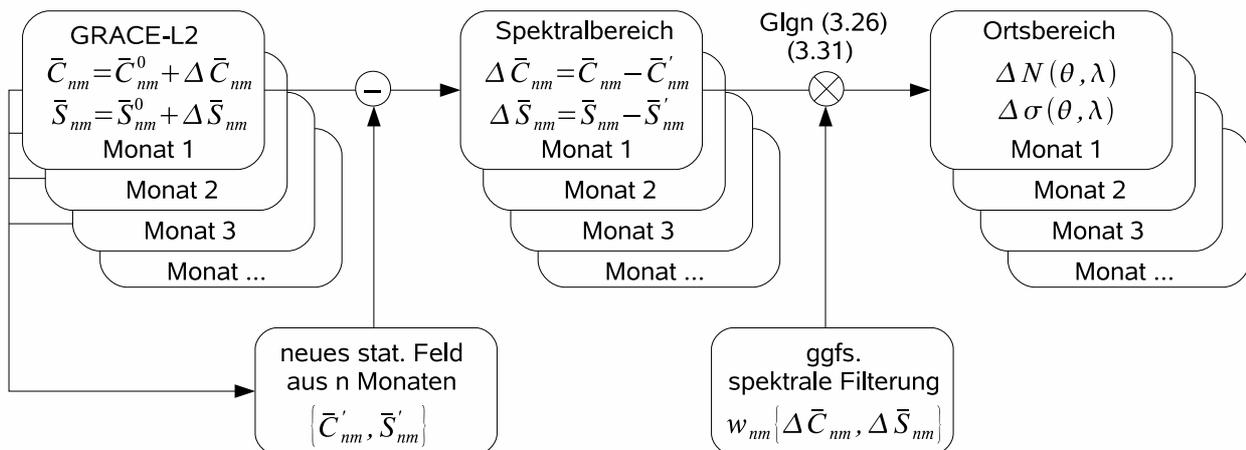


Abbildung 3.3.: Konzept zur Ableitung zeitvariabler Feldvariationen aus Monatslösungen, bezogen auf ein mittleres statisches Langzeitmodell.

Im Falle nomineller Sensor-Eigenschaften sollte sich die im Rahmen von Vorflugstudien (wie z.B. Kim [2000]) bestimmten GRACE-Baseline-Genauigkeit genähert ergeben, vorausgesetzt die Spezifikationen und der Detaillierungsgrad dieser Untersuchungen können als vollständig betrachtet werden. Da sich zumindest bei den tatsächlichen Akzelerometermessungen Einschränkungen feststellen lassen, ist ein niedrigeres Genauigkeitsniveau der resultierenden Schwerefeldmodelle zu erwarten.

Hinsichtlich dem Sampling können zwei Effekte unterschieden werden, die zu einer Verringerung der Güte der Schwerefeldmodelle beitragen. Der erste Einfluss betrifft die räumliche Abtastung des rein statischen Anteil des Feldes. In Analogie zum klassischen Aliasing eines eindimensionalen

Signals ergibt sich durch die Geometrie der GRACE-Bahn eine Unterabtastung des Schwerefeldes. In Nord-Südrichtung beträgt das räumliche Sampling Δ_λ mit einer nominellen Datenrate des K-Band-Instruments von $\Delta t = 5$ s und einer mittleren Geschwindigkeit v_{GRACE} von etwa 7 km/s etwa

$$\Delta_\lambda = v_{GRACE} \cdot \Delta t \approx 35 \text{ km},$$

wobei wegen der hohen Inklination die Bodenspurüberdeckung bis an die Pole heranreicht. Nach dem Theorem von *Shannon-Nyquist* könnten somit Strukturen mit einer minimalen Wellenlänge von

$$\lambda_{min} > 2\Delta_\lambda = 70 \text{ km}$$

aufgelöst werden. Dies entspräche einem Entwicklungsgrad von $N_{max} = 20000/2\Delta_\lambda \approx 286$. Aufgrund der tatsächlichen Sensitivität von GRACE (bedingt durch die Flughöhe und den spezifizierten Messgenauigkeiten) kann für Langzeitmodelle jedoch *nur* ein maximaler Entwicklungsgrad von $N_{max} = 160$ ($\approx \lambda_{min} = 125 \text{ km}$) erwartet werden.

Stärkere Einschränkungen im Sampling ergeben sich jedoch in Ost-West-Richtung. Wegen der natürlichen Bahnabnahme der GRACE-Satelliten durch den Reibungswiderstand in der Hochatmosphäre entstehen von Monat zu Monat variable Bodenspurmuster. Besonders problematisch sind gelegentlich auftretende Wiederholungsbahnen in Abhängigkeit von der Bahnhöhe, wie beispielsweise der ausgeprägte Wiederholungszyklus mit 61 Umläufen in 4 Tagen (61/4-Repeat-Orbit) im September 2004 (vgl. Abb. 6.2). In der Folge kommt es allgemein zu Aliasing-Effekten bei der Bestimmung der Koeffizienten der langwelligen Feldanteile, die sich als streifenförmige Fehleranteile in Nord-Süd-Richtung von Schwerefeldfunktionalen im Ortsraum niederschlagen. In Monaten mit Wiederholungsbahnen ist dieser Effekt besonders ausgeprägt.

Überlagert wird dieser Effekt durch Unsicherheiten in den verwendeten Hintergrundmodellen für zeitvariable Feldvariationen. Hierbei kommt es wegen Fehlern in Amplitude und/oder Phase der jeweiligen Schwereänderung auf Basis des zugrundeliegenden Modells zu einer unvollständigen Reduktion in den GRACE-SST-Beobachtungen. Abhängig von der räumlich-zeitlichen Abtastung entlang der GRACE-Bahn verschwinden derartige residuale Anteile teilweise durch einen Mittelungseffekt bei der Auswertung hinreichend langer Zeiträume. Im allgemeinen ergibt sich dieser Mittelungseffekt jedoch nicht und das Sampling führt auf einen weiteren Aliasing-Effekt bei der Schätzung der harmonischen Entwicklungskoeffizienten, der sich wiederum als Streifen in der Darstellung von Funktionalen im Ortsraum niederschlägt. Von besonderer Bedeutung sind hier Unsicherheiten in den Ozeangezeiten (z.B. Ray et al. [2001], Knudsen und Anderson [2002], Knudsen [2002], Wunsch et al. [2005]) und den Modellen für atmosphärische und ozeanische Kurzzeitmassenvariationen (z.B. Han et al. [2004], Thompson et al. [2004]).

Defizite in der Parametrisierung wirken sich erfahrungsgemäss auf die Bestimmung langwelliger Feldanteile wie z.B. \bar{C}_{20} aus. Diese können daher ebenfalls im weitesten Sinne als Aliasing-Fehler betrachtet werden. Gleiches gilt für einen möglichen Abbruchfehler, bei dem Signalanteile hochfrequenter räumlicher Schwerefeldänderungen in den Beobachtungsresiduen nicht den eigentlich zugehörigen Entwicklungskoeffizienten zugeschlagen werden, sondern in längerwellige Harmonische abgebildet werden.

Sofern ein Regularisierungsverfahren zu Stabilisierung der Lösung verwendet wird, ergeben sich in Abhängigkeit vom jeweiligen Verfahren (siehe z.B. Kaschenz [2006], Bouman [2000]) möglicherweise weitere zusätzliche Fehler der Feldkoeffizienten.

Allgemein setzen sich damit Fehler in den Koeffizienten einer Monatslösung oder eines Langzeitmodells aus Gleichung (3.34) zusammen aus

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{Sensor} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{Aliasing} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{Regularisierung} \quad (3.35)$$

mit den verschiedenen Komponenten für den GRACE-Systemfehler

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{Sensor} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{ACC} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{SCA} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{GPS} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{KBR} \quad (3.36)$$

und den Beiträgen von Aliasing-Effekten

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{Aliasing} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{aprioriModelle} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{Parametrisierung} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \Big|_{Abbruchfehler} \quad (3.37)$$

Eine exakte quantitative Trennung der Einflüsse ist im allgemeinen schwierig, da einerseits die Unsicherheiten der Eingangsgrößen (z.B. im Falle des Aliasing durch Fehler der apriori-Modelle) unbekannt bzw. nur näherungsweise bekannt sind. Im Hinblick auf die Nutzung der Modelle interessiert andererseits nur eine zuverlässige Angabe der Gesamtfehler der Koeffizienten aus Gleichung (3.34).

Filterung von Funktionalen

Aufgrund der Fehleranteile $\delta \bar{C}_{nm}$, $\delta \bar{S}_{nm}$ in den Koeffizienten nach Gleichung (3.34), die mit zunehmenden Grad und Ordnung ansteigen, ist eine Synthese zur Berechnung von Funktionalen nach Gleichungen (3.26), (3.31) über alle verfügbaren Koeffizienten nicht sinnvoll. Alternativ zu einer Filterung der Funktionalen im Ortsraum oder einem Abschneiden der Summationen bei einem hinreichend niedrigen Grad N_{max} besteht die Möglichkeit einer Filterung der Entwicklungskoeffizienten vor der Synthese. Dies entspricht einer Filterung der Funktionalen im Spektralraum und ist gegenüber den vergleichsweise rechenintensiven Faltungsoperationen im Ortsraum einfach.

Mit grad- und ordnungsabhängigen Filterkoeffizienten w_{Cnm} , w_{Snm} erhält man geglättete Funktionale (3.26), (3.31) aus:

$$\Delta \bar{N}(\theta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(w_{Cnm} \Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + w_{Snm} \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (3.38)$$

bzw.

$$\Delta \bar{\sigma}(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n K_n \left[w_{Cnm} \Delta \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + w_{Snm} \Delta \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.39)$$

Die w_{Cnm} , w_{Snm} können dabei als Gewichtungskoeffizienten aufgefasst werden, die je nach Filtercharakteristik für höhere Grade und Ordnung gegen Null gehen und so Beiträge der mit Grad

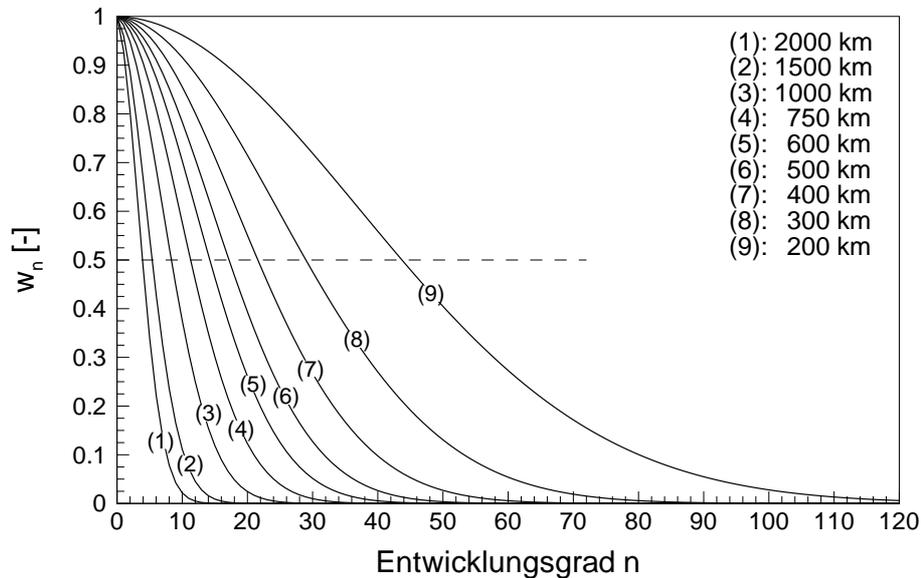


Abbildung 3.4.: Spektrale Gewichtungskoeffizienten w_n des Gauß-Filter je Grad n nach Wahr et al. [1998] für verschiedene Filterradien d .

und Ordnung zunehmend fehlerbehafteten Koeffizienten der Schweremodelle unterdrücken. Im Falle isotroper Filter, wie z.B. dem Gauß-Filter, vereinfachen sich die Koeffizienten zu rein gradabhängigen Faktoren, die zudem für den Sinus- und Cosinus-Term gleich sind, d.h. $w_{Cnm} = w_{Snm} = w_n$. Abbildung 3.4 zeigt als Beispiel die Gewichtungskoeffizienten w_n des Gauß-Filters (nach Wahr et al. [1998]) für verschiedene Filterradien d . Man sieht die deutliche Abnahme der Gewichte w_n (und damit stärkere Glättung) für die zunehmende Länge des Filterradius d .

Aufgrund der angesprochenen Richtungsabhängigkeit der GRACE-Modellfehler sind isotrope Filter wie der Gauß-Filter nicht optimal. Auf Basis von Untersuchungen der tatsächlichen Sensitivität gegenwärtiger GRACE-Modelle werden von verschiedenen Autoren angepasste, anisotrope Filter entwickelt (siehe z.B. Chen et al. [2006], Han et al. [2005], Seo und Wilson [2005]). Damit lassen sich insgesamt plausible Verteilungen der Funktionale im Ortsraum berechnen.

Ein weiterer Aspekt, bei dem Filterungen der sphärisch-harmonischen Koeffizienten eine Rolle spielen, ist die Ableitung Einzugsgebiet-basierter Mittelwerte von Funktionalen aus den globalen GRACE-Modellen nach der Methode von Swenson und Wahr [2001]. Dabei ergibt sich als Problematik, dass zur Berechnung eines exakten Mittelwertes für eine beliebig geformte Gebietsfunktion eine möglichst hohe räumliche Auflösung der Stokes-Koeffizienten erforderlich ist. Es gilt zunächst für den Mittelwert der Änderung einer Massen-anomalie $\overline{\Delta\sigma}_{Becken}$ in einem bestimmten Gebiet (Gleichung (16) in Swenson und Wahr [2001]):

$$\overline{\Delta\sigma}_{Becken} = \frac{1}{\Omega_{Becken}} \int \Delta\sigma(\theta, \lambda) \vartheta(\theta, \lambda) d\Omega \quad (3.40)$$

mit der globalen Verteilungsfunktion der Massen-anomalien $\Delta\sigma(\theta, \lambda)$ sowie der Gebietsfunktion

$$\vartheta(\theta, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{außerhalb des Gebietes} \\ 1 & \text{innerhalb des Gebietes} \end{cases} \quad (3.41)$$

und $d\Omega = \sin\theta d\lambda d\theta$. Unter Verwendung von Gleichung (3.31) für $\Delta\sigma(\theta, \lambda)$, den Faktoren K_n gemäß Gleichung (3.32) sowie der sphärisch-harmonischen Entwicklung der Gebietsfunktion

$$\vartheta(\theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \{ \vartheta_{nm}^c \cos m\lambda + \vartheta_{nm}^s \sin m\lambda \}, \quad (3.42)$$

$$\begin{Bmatrix} \vartheta_{nm}^c \\ \vartheta_{nm}^s \end{Bmatrix} = \int \vartheta(\theta, \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\Omega \quad (3.43)$$

erhält man für $\overline{\Delta\sigma}_{Becken}$ den Ausdruck (vgl. Gleichung (17) in Swenson und Wahr [2001]):

$$\overline{\Delta\sigma}_{Becken} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{K_n}{\Omega_{Becken}} \left[\vartheta_{nm}^c \Delta\bar{C}_{nm} + \vartheta_{nm}^s \Delta\bar{S}_{nm} \right]. \quad (3.44)$$

Man sieht, dass zur Erfassung beliebig komplex geformter Gebiete prinzipiell möglichst hohe Grade und Ordnungen der $\vartheta_{nm}^c, \vartheta_{nm}^s$ in der Summation in Gleichung (3.44) zu berücksichtigen sind. Da aber umgekehrt die GRACE-basierten Schwerefeldkoeffizienten $\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$ für hohe Grade und Ordnungen durch Fehler dominiert sind, werden zur Unterdrückung solcher kurzwelligen Rauschanteile aus den GRACE-Modellen Gewichtungen w_{Cnm}, w_{Snm} eingeführt und es ergibt sich ein *geglätteter* Mittelwert

$$\Delta\tilde{\sigma}_{Becken} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{K_n}{\Omega_{Becken}} \left[w_{Cnm} \vartheta_{nm}^c \Delta\bar{C}_{nm} + w_{Snm} \vartheta_{nm}^s \Delta\bar{S}_{nm} \right]. \quad (3.45)$$

Interpretiert man darin die Gewichtung der hochfrequenten Fehlersignale der GRACE-Modelle in den Produkten $w_{Cnm} \Delta\bar{C}_{nm} \rightarrow 0, w_{Snm} \Delta\bar{S}_{nm} \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$ alternativ als eine Gewichtung der Koeffizienten der Gebietsfunktion, d.h. der Produkte $w_{Cnm} \vartheta_{nm}^c \rightarrow 0, w_{Snm} \vartheta_{nm}^s \rightarrow 0$ so wird der Effekt einer unscharfen Darstellung des Einzugsgebietes unmittelbar klar. Dieser wird als *Leakage*-Effekt bezeichnet und bewirkt, dass Signalanteile außerhalb des eigentlichen Untersuchungsgebietes zu dem Beckenmittelwert beitragen. Der Effekt ist umso größer je kleiner die Gewichte w_{Cnm}, w_{Snm} bereits bei niedrigeren Grade und Ordnung sind. Für eine beispielhafte Darstellung dieses Leakage-Effekts für das Einzugsgebietes des Missouri sei auf Swenson und Wahr [2001] verwiesen.

Hinsichtlich der Frage einer geeigneten Wahl der Glättungsfunktion, d.h. der w_{Cnm}, w_{Snm} , werden in Swenson und Wahr [2001] verschiedene Optimierungsstrategien untersucht. Eine Möglichkeit besteht darin, dass die Summe der Einflüsse der Fehler der GRACE-Modelle und des Leakage-Effekts simultan minimiert werden. Dies setzt jedoch die Kenntnis der Kovarianzfunktion des gesuchten Signals in einem bestimmten Einzugsgebiet apriori voraus, was nicht wünschenswert bzw. nicht unbedingt verfügbar ist. Alternativ besteht die Möglichkeit die Gewichte w_{Cnm}, w_{Snm} bei Vorgabe eines oberen Schwellwertes für den Fehler aus den Schwerefeldmodellen über die Lagrange'sche Multiplikatoren-Methode zu bestimmen. Diese Verfahren wird im Rahmen dieser Arbeit zur Berechnung von beckenbasierten Mittelwerten von Massenanomalien herangezogen. Es gilt:

$$\begin{Bmatrix} w_{Cnm} \\ w_{Snm} \end{Bmatrix} = \left[1 + \lambda \frac{K_n^2 B_n^2}{2n+1} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} \vartheta_{nm}^c \\ \vartheta_{nm}^s \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

mit dem Lagrange'schen Multiplikator λ und B_n^2 den Gradvarianzen der Fehler der GRACE-Modellkoeffizienten. Zur Bestimmung von λ ist das Gleichungssystem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{K_n^2 B_n^2}{2n+1} \frac{\vartheta_{nm}^c + \vartheta_{nm}^s}{\left[1 + \lambda \frac{K_n^2 B_n^2}{2n+1} \right]^2} = \Delta^2 \quad (3.47)$$

bei Vorgabe einer Varianz des Fehlers aus dem Satellitenmodell δ^2 bzw. $\Delta^2 = \delta^2 \Omega_{Becken}^2$ zu lösen.

4. Dynamische Methode der Gravitationsfeldanalyse aus Satellitendaten

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Algorithmen zur Gravitationsfeldbestimmung aus Satellitendaten mittels der dynamischen Methode dargestellt. Ausgangspunkt der Methode ist die Modellierung der gestörten Bewegungsgleichung des Satelliten unter Verwendung parametrischer und numerischer Modelle für die wirksamen Störkräfte entlang der Bahn des Satelliten. Die Lösung des als Anfangswertaufgabe formulierten Bewegungsproblems wird mittels numerischer Integration der gestörten Bewegungsgleichung berechnet. Zur Verbesserung der Anfangswerte bzw. allgemein zur Schätzung von Parametern des Bewegungsproblems aus gegebenen Beobachtungsmaterial wird ein Schätzverfahren mit dem numerischen Integrationsverfahren kombiniert. Die Darstellung der Methode in diesem Kapitel folgt Schwintzer et al. [1991], wobei der Schwerpunkt auf die Besonderheiten bzw. die notwendigen Erweiterungen der Methode für die Verarbeitung der neuen Beobachtungstypen Satellite-to-Satellite Tracking, Akzelerometer- und Sternkamera-Messungen gelegt wird. Zunächst wird das gewählte Schätzverfahren auf der Basis der kleinsten Fehlerquadrate-Ausgleichung dargestellt. Daran anschließend wird das Bewegungsproblem mit den für GRACE relevanten Bewegungsanteilen und der Lösung mittels numerischer Integration beschrieben. Nach einer allgemeinen Beschreibung des linearisierten Funktionalmodells werden in Unterabschnitten die notwendigen Beobachtungsgleichungen für SST-Messungen konkretisiert sowie die Verwendung der Akzelerometermessungen und der Sternkamera-Daten erläutert.

4.1. Schätzverfahren

Zur Bestimmung unbekannter Parameter (z.B. den Stokes-Koeffizienten) wird das bekannte Verfahren der Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate herangezogen. Nachfolgend werden Vektoren und Matrizen mit fett gedruckten Buchstaben bezeichnet, wobei für Vektoren Kleinbuchstaben, für Matrizen Großbuchstaben verwendet werden. Buchstaben mit überschrieben mit einem “^” bezeichnen Schätzgrößen, während Buchstaben mit einem “°” Näherungswerte der Schätzgrößen bezeichnen.

Ausgangspunkt ist die Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen den Beobachtungen \mathbf{b} und den gesuchten Parametern \mathbf{x} mittels der Beobachtungsgleichungen

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

Wegen unvermeidlicher (zufälliger) Messfehler der originalen Beobachtungen, Unsicherheiten in den Modellparametern \mathbf{x} sowie einer Überbestimmung des Gleichungssystems (4.1) erweitert man dieses um Verbesserungen $\hat{\mathbf{v}}$ der Beobachtungen, so dass

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.2)$$

Die Lösung des inkonsistenten Gleichungssystems (4.1), d.h. die Bestimmung der Parameter \mathbf{x} erfolgt durch Minimierung der quadratischen Form der Verbesserungen

$$\hat{\mathbf{v}}' \mathbf{P}_{bb} \hat{\mathbf{v}} = \min, \quad (4.3)$$

mit der Gewichtsmatrix der Beobachtungen \mathbf{P}_{bb} . Diese ergibt sich als Inverse der Dispersionsmatrix

$$\mathbf{P}_{bb} = \mathbf{D}(\mathbf{b})^{-1}, \quad (4.4)$$

die das *stochastische Modell* der Beobachtungen darstellt. Üblicherweise ist die exakte Dispersions- bzw. Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{b})$ im allgemeinen nur bis auf einen konstanten Faktor σ_0^2 bekannt,

$$\mathbf{D}_b = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{bb} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \sigma_{b_1}^2 & \sigma_{b_1 b_2} & \dots & \sigma_{b_1 b_n} \\ & \sigma_{b_2}^2 & \dots & \sigma_{b_2 b_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ sym. & & & \sigma_{b_n}^2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

der jedoch im Zuge der Ausgleichung mitbestimmt wird (siehe Gleichung (4.12)). Die $\sigma_{b_i}^2$ und $\sigma_{b_i b_j}$ bezeichnen die Varianzen bzw. Kovarianzen der Beobachtungen. Entscheidend für den Ausgleichungsprozess ist, dass die relativen Verhältnisse zwischen den $\sigma_{b_i}^2$ und $\sigma_{b_i b_j}$ korrekt in \mathbf{Q}_{bb} repräsentiert werden, da sich eine Abschätzung für das absolute Niveau durch die nachträgliche Skalierung mit $\hat{\sigma}_0^2$ ergibt (siehe Gleichung 4.13). Dies gilt v.a. für die gleichzeitige Verarbeitung verschieden genauer Beobachtungstypen, d.h. deren relative Gewichtung.

Als Vereinfachung geht man im weiteren von unkorrelierten Beobachtungen (sowohl innerhalb eines Beobachtungstyps als auch zwischen verschiedenen Beobachtungstypen) aus, so dass für die Gewichtsmatrix der Beobachtungen gilt:

$$\mathbf{P}_{bb} = \mathbf{Q}_{bb}^{-1} = \sigma_b^{-2} \mathbf{E}. \quad (4.6)$$

Danach wird der Gewichtseinheitsfaktor σ_0^2 mit 1 angenommen bzw. durch das Einheitsgewicht σ_b^{-2} ersetzt. \mathbf{E} bezeichnet die Einheitsmatrix.

Wegen des i.a. nichtlinearen Zusammenhangs der Beobachtungen und der unbekannt Parameter erfolgt eine Linearisierung durch eine Entwicklung in eine Taylor-Reihe mit Abbruch nach dem ersten Glied

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{b} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \Delta\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{b} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \Delta\hat{\mathbf{x}} + \dots - \mathbf{b}. \quad (4.7)$$

Mit der Bezeichnung

$$\mathbf{A} \doteq \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$$

für die Matrix der partiellen Ableitungen der Funktion nach den Unbekannten und dem Widerspruchsvektor

$$\mathbf{l} \doteq \mathbf{b} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$$

ergibt sich das Gleichungssystem (4.7) der linearisierten Beobachtungsgleichungen zu

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}. \quad (4.8)$$

Einsetzen von (4.8) in (4.3) liefert das auch als Normalgleichungssystem bezeichnete Gleichungssystem

$$\mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{r} \quad (4.9)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\doteq \mathbf{A}'\mathbf{P}_{bb}\mathbf{A} \\ \mathbf{r} &\doteq \mathbf{A}'\mathbf{P}_{bb}\mathbf{l} \end{aligned}$$

bzw. für die Lösung der Zuschläge $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ zu den Näherungswerten (unter Voraussetzung der Regularität der Matrix \mathbf{N})

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{r}. \quad (4.10)$$

Damit erhält man die gesuchten Parameter schließlich aus

$$\hat{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{x}} + \Delta\hat{\mathbf{x}}, \quad (4.11)$$

sowie die Schätzergebnisse für den Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$, der Varianz-Kovarianz-Matrix der Beobachtungen $\hat{\mathbf{D}}_{bb}$ und die Varianz-Kovarianz-Matrix der unbekannt Parameter $\hat{\mathbf{D}}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ zu

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}'\mathbf{P}_{bb}\hat{\mathbf{v}}}{n - u}, \quad (4.12)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{bb} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{bb} \quad (4.13)$$

und

$$\hat{\mathbf{D}}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{N}^{-1}. \quad (4.14)$$

Das Normalgleichungssystem (4.9) kann sequentiell erzeugt werden, indem man die Beiträge verschiedener Beobachtungsgruppen akkumuliert. Bezeichnet man die rechten Seiten der Gleichung (4.9) mit \mathbf{r}_i und die zugehörigen Normalgleichungen mit \mathbf{N}_i für die Beobachtungsgruppe i , so ergibt sich das resultierende Normalgleichungssystem zu

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \right) \Delta\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i. \quad (4.15)$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, dass es keine Korrelationen zwischen den beteiligten Beobachtungsgruppen gibt.

Reduktion von Parametern

Gibt es in den Subsystemen \mathbf{N}_i Parameter, die nur in dem jeweiligen Subsystem auftauchen (*interne Parameter*) können diese vorher eliminiert werden. Dieser Vorgang wird als Reduktion bezeichnet und erfolgt durch Aufteilung des gesuchten Parametervektors $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ in interne Parameter $\Delta\hat{\mathbf{x}}_I$ und externe Parameter $\Delta\hat{\mathbf{x}}_E$, so dass Gleichung (4.9) geschrieben wird

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{II} & \mathbf{N}_{EI} \\ \mathbf{N}_{IE} & \mathbf{N}_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{x}}_I \\ \Delta\hat{\mathbf{x}}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_I \\ \mathbf{r}_E \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Löst man das erste Gleichungssystem nach $\Delta\hat{\mathbf{x}}_I$ auf und setzt das Ergebnis in das zweite Gleichungssystem ein, so erhält man das reduzierte Normalgleichungssystem zu

$$\left(\mathbf{N}_{EE} - \mathbf{N}_{IE}\mathbf{N}_{II}^{-1}\mathbf{N}_{IE}\right)\Delta\hat{\mathbf{x}}_E = \mathbf{r}_E - \mathbf{N}_{EI}\mathbf{N}_{II}^{-1}\mathbf{r}_I \quad (4.17)$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{N}}_{EE}\Delta\hat{\mathbf{x}}_E = \bar{\mathbf{r}}_E \quad (4.18)$$

mit den Definitionen $\bar{\mathbf{N}}_{EE} \doteq \mathbf{N}_{EE} - \mathbf{N}_{IE}\mathbf{N}_{II}^{-1}\mathbf{N}_{IE}$ und $\bar{\mathbf{r}}_E \doteq \mathbf{r}_E - \mathbf{N}_{EI}\mathbf{N}_{II}^{-1}\mathbf{r}_I$.

4.2. Bewegungsgleichung und Kräftemodelle

Grundlage ist die bekannte Newton'sche Formulierung der Bewegungsgleichung des Massenmittelpunktes eines erdumlaufenden Satelliten bezüglich eines raumfesten, geozentrischen Koordinatensystems

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (4.19)$$

wobei m die Masse des Satelliten, $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor bezüglich des raumfesten Koordinatensystems und \mathbf{K} die auf den Satelliten wirkenden Kräfte bezeichnen. \mathbf{K} setzt sich aus gravitativen und nicht-gravitativen Komponenten zusammen, so dass für (4.19) allgemein geschrieben werden kann:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{nk} + \mathbf{a}_\varepsilon. \quad (4.20)$$

Der erste Term der rechten Seite beschreibt den dominierenden Zentralterm des äußeren Gravitationsfeldes der Erde hervorgerufen durch die Gesamtmasse der Erde (inklusive ihrer Atmosphäre). Dieser Anteil lässt sich als Gravitationswirkung einer kugelsymmetrischen Erde bzw. einer massenäquivalenten Punktmasse modellieren. \mathbf{a}_k bezeichnet die Summe der übrigen gravitativen (konservativen) Beschleunigungen, wobei im Falle von GRACE folgende Anteile a priori berücksichtigt werden:

- $\mathbf{a}_{stat.Feld}$: restliche Anteile des statischen Feldes,
- \mathbf{a}_E : lunisolare Gezeitenkräfte auf die feste Erde,
- \mathbf{a}_O : die Ozeane und die
- \mathbf{a}_A : Atmosphäre, sowie
- \mathbf{a}_{AOD} : Kurzzeitmassenvariationen in Atmosphäre und Ozean
- : (nicht-gezeitenperiodische Anteile) und
- \mathbf{a}_P : direkte Gezeiteneffekte, verursacht durch die
- : Gravitationswirkung von Sonne, Mond und übrigen Planeten.

Damit ergibt sich

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{stat.Feld} + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{AOD} + \mathbf{a}_P \quad (4.21)$$

Die Beschleunigungen der Terme 1 bis 5 der rechten Seite ergeben sich als Gradienten der zugrundeliegenden Potentialfunktion (siehe Anhang B). Die \mathbf{a}_P werden direkt aus geozentrischen Planetenörtertern und dem Satellitenort berechnet (z.B. Lambeck [1988] oder Seeber [2003]).

Die nicht-gravitativen Beschleunigungen sind im Term \mathbf{a}_{nk} zusammengefasst und umfassen bei den hier betrachteten Satelliten (Bahnhöhe ≤ 500 km, aktive Lageregelung) folgende Komponenten

$$\mathbf{a}_{nk} = \mathbf{a}_L + \mathbf{a}_{SR} + \mathbf{a}_{ER} + \mathbf{a}_{AOCS} + \mathbf{a}_\epsilon. \quad (4.22)$$

Dabei bedeuten im einzelnen:

- \mathbf{a}_L : Luftwiderstand der Hochatmosphäre,
- \mathbf{a}_{SR} : Strahlungsdruck der Sonne,
- \mathbf{a}_{ER} : Strahlungsdruck der Erde (Erdalbedo),
- \mathbf{a}_{AOCS} : lineare Störbeschleunigungen verursacht durch das Lagekontrollsystem und
- \mathbf{a}_ϵ : sonstige nicht-konservative Störbeschleunigungen.

Im Gegensatz zur klassischen Vorgehensweise der Berechnung der Anteile \mathbf{a}_L , \mathbf{a}_{SR} und \mathbf{a}_{ER} über Störkraftmodelle (siehe z.B. Seeber [2003] oder Kang [1998]), werden diese Anteile bei GRACE durch die Akzelerometer erfasst und ersetzen damit die im Hinblick auf eine präzise Schwerfeldbestimmung zu ungenauen Modelle. Wie in Abschnitt (2.3) dargestellt wurde, sind zusätzliche durch das Lagekontrollsystem verursachte lineare Beschleunigungen \mathbf{a}_{AOCS} ebenfalls in den Akzelerometerdaten enthalten, so dass gilt:

$$\mathbf{a}_{nk} = \mathbf{a}_{ACC} = \mathbf{a}_L + \mathbf{a}_{SR} + \mathbf{a}_{ER} + \mathbf{a}_{AOCS}. \quad (4.23)$$

Die \mathbf{a}_ϵ umfassen Beschleunigungsanteile aufgrund relativistischer Effekte und sonstige Restbeschleunigungen. Erstere müssen aufgrund der hohen Geschwindigkeiten der Satelliten berücksichtigt werden und führen damit auf eine Post-Newton'sche Erweiterung der ursprünglichen Bewegungsgleichung (4.19). Mögliche sonstige Restbeschleunigungen, wie z.B. potentielle Wechselwirkungen der Satelliten mit elektrischen und/oder magnetischen Feldern aber auch etwaige mechanische Impulse verursacht durch extreme Temperaturschwankungen während der Umlaufbewegung (Ein-/Austritt Erdschatten) werden als vernachlässigbar angenommen.

Da eine geschlossene Lösung des allgemeinen Bewegungsproblems (4.19) bzw. (4.20) mit einer für die Auswertung realer Satellitendaten ausreichenden Genauigkeit nicht angegeben werden kann, erfolgt die Lösung durch numerische Integration der Gleichung (4.20), formuliert als Anfangswertaufgabe. Da sowohl Startwerte für den Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Satelliten sowie sonstige dynamische, kinematische und geometrische Parameter des Bewegungsproblems nur näherungsweise bekannt sind, erfolgt eine iterative Verbesserung sowohl von unmittelbaren Bahnparametern als auch von sonstigen gesuchten Unbekannten (wie z.B. Stokes-Koeffizienten) durch Kombination des Integrations- mit dem Schätzverfahren aus Abschnitt (4.1).

Linearisierung der Beobachtungsgleichungen

Das *Funktionalmodell* für die Satellitenbeobachtungen in Abhängigkeit von der Satellitenbahn und den Modellparametern lautet allgemein

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), \mathbf{p}) \quad (4.24)$$

mit

- \mathbf{b} : Vektor der Beobachtungen,
- t : Zeit,
- $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)$: Orts- und Geschwindigkeitsvektor zur Epoche t und
- \mathbf{p} : Vektor der Parameter des Bewegungsproblems.

Prinzipiell kann \mathbf{b} alle beliebigen Beobachtungstypen der Satellitengeodäsie umfassen: Richtungen, Entfernungen, Entfernungsänderungen oder Beschleunigungen bzw. Beschleunigungsdifferenzen. Der Vektor \mathbf{p} enthält die Zielgrößen des Bewegungsproblems, für die aber i. a. Näherungen bekannt sind. Ein solcher Satz von geeigneten Näherungswerte sei mit $\overset{\circ}{\mathbf{p}}$ bezeichnet. Numerische Integration von (4.20) liefert mit $\overset{\circ}{\mathbf{p}}$ die Näherungs- oder Referenzbahn $\mathbf{r}(t, \overset{\circ}{\mathbf{r}}), \dot{\mathbf{r}}(t, \overset{\circ}{\mathbf{p}})$ mittels der die theoretischen Beobachtungen

$$\overset{\circ}{\mathbf{b}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), \overset{\circ}{\mathbf{p}}) \quad (4.25)$$

berechnet werden. Die konkreten Beobachtungsgleichungen der SST-Beobachtungen werden im nächsten Abschnitt dargestellt. Analog zu Gleichung (4.8) lauten die linearisierten Beobachtungsgleichungen

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{p} - \mathbf{l} \quad (4.26)$$

mit den Residuen $\hat{\mathbf{v}}$, dem Widerspruchsvektor $\mathbf{l} = \mathbf{b} - \overset{\circ}{\mathbf{b}}$ und den gesuchten Zuschlägen zu den Näherungswerten der Parameter $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \overset{\circ}{\mathbf{p}}$. Die Matrix \mathbf{A} enthält die partiellen Ableitungen der Beobachtungen nach den Unbekannten entlang der Referenzbahn zu den Beobachtungszeitpunkten. Diese lauten in allgemeiner Form

$$\left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\overset{\circ}{\mathbf{p}}} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.27)$$

Die partiellen Ableitungen der Beobachtungen nach Ort- und Geschwindigkeit sowie nach den Unbekannten können direkt aus Gleichung (4.24) bestimmt werden (siehe nächster Abschnitt). Die partiellen Ableitungen des Typs $\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{p}$ und $\partial \dot{\mathbf{r}} / \partial \mathbf{p}$ hingegen werden parallel zur Satellitenbahn durch Integration der sogenannten Variationsgleichungen numerisch bestimmt. Zur Ableitung der Variationsgleichungen differenziert man Gleichung (4.20) nach dem Parametervektor \mathbf{p} und erhält nach Vertauschung der Differentiation nach der Zeit t und nach dem Vektor \mathbf{p}

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right) = \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\text{explizit}}. \quad (4.28)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}}, \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}, \\ \mathbf{C}(t) &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}}, \\ \mathbf{Y}(t) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \end{aligned}$$

erhält man schließlich das als Variationsgleichungen bezeichnete System linearer Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}(t). \quad (4.29)$$

Tabelle 4.1.: Parametergruppen dynamische Bahn- und Schwerefeldbestimmung GRACE

Bezeichnung	Bedeutung	Typ
\mathbf{p}_{Sat}	Anfangswerte: Orts- und Geschwindigkeitsvektor GRACE-A/B	intern
\mathbf{p}_{ACC}	Additionskonstanten und Skalierungsfaktoren der Akzelerometer	intern
\mathbf{p}_{KBR}	kinematisch-empirisch Parameter für das KBR-Instrument (Abschnitt 4.5)	intern
\mathbf{p}_{Amb}	GPS-Phasen-Ambiguitäten der h/l-SST-Messungen GRACE-A/B	intern
\mathbf{p}_{Stokes}	sphärisch-harmonische Entwicklungskoeffizienten	extern

Parametergruppen der dynamischen Bahnbestimmung

Der Parametervektor \mathbf{p} enthält verschiedene Parametertypen, die in verschiedene Gruppen eingeteilt werden können. Wegen der Bearbeitung der Beobachtungen entlang der Bahnbögen verwendet man eine Einteilung in bogenspezifische, interne und externe, globale Parameter. Die erste Gruppe \mathbf{p}_I bezeichnet Parameter, die nur mit dem Datenmaterial des betreffenden Bogens schätzbar sind. Klassische Beispiele hierfür sind die Anfangswerte des Bahnbogens oder Skalierungsfaktoren für nicht-gravitative Störbeschleunigungen. Die zweite Gruppe \mathbf{p}_E beinhaltet globale Parameter, wie beispielsweise die Stokeskoeffizienten, die sich auf alle Beobachtungen auswirken. Daneben treten auch instrumenten-, beobachtungstyp- oder stationspezifische Parameter (Driften, Biase, Skalierungsfaktoren, etc.) auf, die teilweise als interne, aber auch als globale Parameter betrachtet werden können. Tabelle 4.1 zeigt eine Einteilung entsprechend des im Abschnitt 5 gewählten Designs. Danach werden neben den Anfangselementen, Akzelerometer- und K-Band-Parameter sowie GPS-Phasenambiguitäten als bogen-interne Unbekannte behandelt. Zentrale externe Parameter sind die Stokes-Koeffizienten.

4.3. Beobachtungsgleichungen Satellite-to-Satellite-Tracking

GPS-Code- und Phasen-Messungen

Wie in Abschnitt 2.1 bereits erwähnt werden anstelle der ursprünglichen L1B-Daten innerhalb der GFZ-eigenen Bahnbestimmungssoftware *EPOS* die ionosphärenfreie Kombinationen der Code- bzw. der Phasenmessungen verarbeitet. Diese ergeben sich z.B. nach Hoffmann-Wellenhof et al. [1994] mit

$$\rho_{L3} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \rho_{L1} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \rho_{L2} \quad (4.30)$$

für die ionosphärenfreie P-Code-Messung ρ_{L3} bzw. für die entsprechende Phasenmessungen Φ_{L3}

$$\Phi_{L3} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_{L1} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_{L2} \quad (4.31)$$

mit den ursprünglichen P-Code-Messungen ρ_{L1}, ρ_{L2} und den Phasenmessungen Φ_{L1}, Φ_{L2} . f_1, f_2 bezeichnen die nominellen GPS-Trägerfrequenzen.

Im weiteren werden die Pseudo-Entfernungen zwischen dem Sender und dem Empfänger in Form undifferenzierte Messungen (sog. *zero-differences*) für Code und Phase verarbeitet¹¹. Im

¹¹Da diese Auswertung innerhalb der Software je GRACE-Satellit erfolgt, werden die absoluten Bahnen der beiden Satelliten berechnet.

Falle eines Empfängers auf einem LEO-Satelliten lautet die Beobachtungsgleichung für die L3-Codemessung bzw. L3-Pseudoentfernung:

$$\rho_{L3}(t) = |\mathbf{r}^S(t) - \mathbf{r}_E(t)| + c \delta t^S(t) - c \delta t_E(t) + d_{rel} + \varepsilon_{\rho_{L3}} \quad (4.32)$$

mit

- ρ_{L3} : Pseudoentfernung L3-Signal
- \mathbf{r}^S : Ortsvektor des GPS-Sendersatelliten
- \mathbf{r}_E : Ortsvektor des Empfängers
- c : Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
- δt^S : Uhrenfehler des Sendersatelliten
- δt_E : Uhrenfehler des Empfängers
- d_{rel} : Korrektur wegen relativistischer Effekte
- $\varepsilon_{\rho_{L3}}$: Messrauschen inklusive sonstiger (vernachlässigbarer) Fehler

Da die Bahn oberhalb der Neutralgasatmosphäre verläuft und die GPS-Signale der Navigationsantenne ebenfalls oberhalb der Neutralgasatmosphäre empfangen werden, fehlt ein entsprechender Korrekturterm in der Gleichung (4.32). Setzt man die Position des Sendersatelliten sowie dessen Uhrenfehler als bekannt voraus (siehe *2-Schritt-Verfahren* in Abschnitt 5.1), verbleiben als unbekannte Größen \mathbf{r}_E , $\dot{\mathbf{r}}_E$ und δt_E . Die partiellen Ableitungen dafür lauten:

$$\frac{\partial \rho_{L3}}{\partial \mathbf{r}_E} = -\frac{(\mathbf{r}^S - \mathbf{r}_E)^T}{|\mathbf{r}^S - \mathbf{r}_E|} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \rho_{L3}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_E} = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \rho_{L3}}{\partial \delta t_E} = -c \quad (4.35)$$

Für die Beobachtungsgleichung der ionosphärenfreien L3-Trägerwellenphase ergibt sich entsprechend:

$$\Phi_{L3}(t) = |\mathbf{r}^S(t) - \mathbf{r}_E(t)| + c \delta t^S(t) - c \delta t_E(t) + \lambda N_{L3} + d_{rel} + \varepsilon_{\Phi_{L3}} \quad (4.36)$$

mit

- Φ_{L3} : Trägerwellenphase der L3-Kombination
- \mathbf{r}^S : Ortsvektor des GPS-Sendersatelliten
- \mathbf{r}_E : Ortsvektor des Empfängers
- λ : L3-Trägerwellenlänge
- N_{L3} : Mehrdeutigkeiten der L3-Trägerphase
- c : Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
- δt^S : Uhrenfehler des Sendersatelliten
- δt_E : Uhrenfehler des Empfängers
- d_{rel} : Korrektur wegen relativistischer Effekte
- $\varepsilon_{\Phi_{L3}}$: Messrauschen inklusive sonstiger (vernachlässigbarer) Fehler

Die partiellen Ableitungen nach den Unbekannten lauten:

$$\frac{\partial \Phi_{L3}}{\partial \mathbf{r}_E} = -\frac{(\mathbf{r}^S - \mathbf{r}_E)^T}{|\mathbf{r}^S - \mathbf{r}_E|} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \Phi_{L3}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_E} = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \Phi_{L3}}{\partial \delta t_E} = -c \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \Phi_{L3}}{\partial N} = \lambda \quad (4.40)$$

K-Band-Ranging Messungen

Die Beobachtungsgleichung der instantanen Entfernung $\rho(t)$ zwischen den beiden Satelliten zu einem Zeitpunkt t ergibt sich aus den Ortsvektoren der beiden Satelliten

$$\rho = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (4.41)$$

mit

- \mathbf{r}_1 : Ortsvektor Satellit 1 bzgl. dem raumfesten Koordinatensystem,
- \mathbf{r}_2 : Ortsvektor Satellit 2 bzgl. dem raumfesten Koordinatensystem,
- $\mathbf{r}_{12} = \rho \mathbf{e}_{12}$: Abstandsvektor der beiden Satelliten,
- $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{r}_{12}/\rho$: Einheitsvektor des Abstandsvektors \mathbf{r}_{12}

Die Entfernungsänderung $\dot{\rho}$ ergibt sich durch Differentiation des Abstandes nach der Zeit zu

$$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_{12} \mathbf{e}_{12}, \quad (4.42)$$

d.h. die Projektion der Differenz der Geschwindigkeitsvektoren in die Verbindungslinie zwischen den beiden Satelliten. Nochmalige Differentiation nach der Zeit ergibt schließlich die skalare Relativbeschleunigung

$$\ddot{\rho} = \ddot{\mathbf{r}}_{12} \mathbf{e}_{12} + \dot{\mathbf{r}}_{12} \dot{\mathbf{e}}_{12}. \quad (4.43)$$

Der erste Term ist die Projektion der Differenz der Beschleunigungsvektoren in die Verbindungslinie, der zweite Ausdruck ist das Skalarprodukt aus der Geschwindigkeitsdifferenz und der Zeitableitung der Richtung der Verbindungslinie. Für $\dot{\mathbf{e}}_{12}$ erhält man durch Differentiation

$$\dot{\mathbf{e}}_{12} = \dot{\mathbf{r}}_{12} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \mathbf{e}_{12}. \quad (4.44)$$

Setzt man in (4.44) den Ausdruck für $\dot{\rho}$ aus Gleichung (4.42) ein so erhält man schließlich

$$\ddot{\rho} = \ddot{\mathbf{r}}_{12} \mathbf{e}_{12} + \frac{1}{\rho} (|\dot{\mathbf{r}}_{12}|^2 - \dot{\rho}^2). \quad (4.45)$$

Gleichungen (4.41), (4.42) und (4.45) sind die Beobachtungsgleichungen der Entfernungsmessungen, der Range-Rate und der Range-Acceleration-Observablen.

Die partiellen Ableitungen vom Typ $\partial \mathbf{l} / \partial \mathbf{r}$ und $\partial \mathbf{l} / \partial \dot{\mathbf{r}}$ lauten für die Abstandsmessungen ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_1} = \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{\rho} \right)^T, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_2} = - \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{\rho} \right)^T, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2} = 0. \quad (4.47)$$

Für die Range-Rate Observable $\dot{\rho}$ ergibt sich:

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{r}_1} = \frac{1}{\rho} \left(\dot{\mathbf{r}}_{12} - \frac{\mathbf{r}_{12}}{\rho} \right)^T, \quad \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{v}_1} = \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{\rho} \right)^T, \quad \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{v}_2} = -\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{v}_1}. \quad (4.49)$$

Die Ausdrücke für die Range-Acceleration Beobachtung sind komplizierter [Kim, 2000, siehe S.31 ff.] und werden hier nicht weiter angegeben, da dieser Beobachtungstyp im weiteren nicht verwendet wird.

4.4. Akzelerometer- und Sternkameradaten

Die nicht-gravitativen Beschleunigungen in Gleichung (4.23) sind durch die Akzelerometermessungen gegeben. Die Messungen sind wegen der Skalierungsfaktoren und der Additionskonstanten zu korrigieren. Diese Parameter sind zunächst unbekannt, können aber, da sie nur langsam variieren, im Zuge der Bahn- bzw. Schwerefeldbestimmung mitbestimmt werden. Ausgehend von Gleichung (2.7) ergeben sich korrigierte Messungen, zunächst bzgl. des akzelerometerfesten Bezugsrahmens S_{ACC}

$$\mathbf{f}^{korr} = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{f}^{beob} + \tilde{\mathbf{b}}, \quad (4.50)$$

mit der inversen Skalierungsmatrix $\tilde{\mathbf{M}}$ und dem inversen Vektor der Additionskonstanten $\tilde{\mathbf{b}}$:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{M}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_{33} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1/M_{11} \\ -b_2/M_{22} \\ -b_3/M_{33} \end{bmatrix}.$$

Für die Integration der Bewegungsgleichungen müssen die korrigierten Akzelerometermessungen in das interiale Referenzsystem S_{ICRF} transformiert werden, um den \mathbf{a}_{nk} aus Gleichung (4.23) zu entsprechen. Da die ACC-L1B-Daten durch die Vorverarbeitung bei JPL bereits in das Satellitensystem (S_{SRF}) umgesetzt werden, muss im weiteren nur noch die Rotation vom S_{SRF} ins Inertialsystem berücksichtigt werden. Dies erfolgt mit Hilfe der Sternkamera-Daten bzw. der Rotationsmatrix aus Gleichung (2.12), so dass gilt

$$\mathbf{f}^{ICRF} = \mathbf{R}_{SRF}^{ICRF} \left(\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{f}^{beob} + \tilde{\mathbf{b}} \right). \quad (4.51)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Skalierungsfaktoren und Additionskonstanten lauten

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{ICRF}}{\partial \tilde{M}_{ij}} = \begin{bmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ R_{3i} \end{bmatrix} f_i^{beob}, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{ICRF}}{\partial \tilde{b}_i} = \begin{bmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ R_{3i} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

wobei f_i^{beob} die i -te Komponente des Vektors der Akzelerometermessung \mathbf{f}^{beob} und $[R_{1i} R_{2i} R_{3i}]^T$ der i -te Spaltenvektor der Rotationsmatrix \mathbf{R}_{SRF}^{ICRF} ist.

Bemerkung 1: Die Skalierungsfaktoren und Additionskonstanten sind instrumentspezifische Parameter, die die üblichen Skalierungsfaktoren der nicht-gravitativen Störbeschleunigungen bei Verwendung klassischer Störkraftmodelle ersetzen. Da diese nicht explizit von den Bahnverfolgungsdaten abhängen, können sie allgemein als globale Parameter betrachtet werden. Andererseits zeigen sich in einigen Parametern wie z.B. den Additionskonstanten der Messachsen der Akzelerometer in Richtung der Bahnnormalen (siehe Anhang A) Zeitabhängigkeiten, so dass es insgesamt zweckmässig erscheint, diese Parameter als bogenspezifische, interne Parameter zu behandeln (vgl. Tab. 4.1 und Abschnitt 5).

Bemerkung 2: Im Gegensatz zu den GPS- bzw. KBR-Bahnverfolgungsdaten werden die Akzelerometerdaten nicht als Beobachtungen im üblichen Sinne verarbeitet. Dies bedeutet, dass die Akzelerometermessungen bis auf die zu schätzenden Additionskonstanten und Skalierungsfaktoren als fehlerfrei in der rechten Seite von (4.20) eingeführt werden. Im Zuge der Bahnanpassung findet keine Elimination von fehlerhaften Messungen, z.B. nach dem üblichen $3\text{-}\sigma$ -Kriterium, statt. Entsprechend müssen grob fehlerhafte Daten im Zuge der Vorverarbeitung der Akzelerometer-Roh-Daten eliminiert/korrigiert werden bzw. Intervalle mit schlechten Messungen für die Schwerefeldbestimmung apriori ausgeklammert werden. Dies führt auf Unterbrechungen in der nominellen Unterteilung des Datenmaterials.

Bemerkung 3: Analog den Akzelerometerdaten werden die Quaternionen der Sternkameras als fehlerfreie Beobachtungen mitgeführt und es erfolgt keine Daten-Elimination im Zuge des Ausgleichungsprozesses. Entsprechend ist eine Säuberung im Vorfeld vorzunehmen.

Durch diese "fehlerfreie" Verarbeitung der Akzelerometer und Sternkameradaten bleibt allerdings eine Fortpflanzung der Genauigkeitseigenschaften (inklusive etwaiger Korrelationen) dieser Daten auf die Genauigkeiten der gelösten Schwerefeldkoeffizienten unberücksichtigt. Dies stellt eine Einschränkung der hier gewählten Vorgehensweise dar.

4.5. Kinematisch-empirische Parameter

Aufgrund der nominellen Sensorcharakteristik der Akzelerometerinstrumente als auch des K-Band-Instruments haften diesen Messgrößen systematische Fehler an, die nicht als weisses Rauschen betrachtet werden können. Untersuchungen in Kim [2000] zeigen, dass allgemeine Fehlereinflüsse beliebiger Frequenz in den beiden Daten v.a. konstante und umlaufperiodische Beiträge in den Residuen der KBR-Messungen erzeugen und dadurch die Ergebnisse der Schwerefeldbestimmung verschlechtern. Zur Reduktion derartiger Einflüsse wird daher dort die Schätzung sogenannter kinematisch-empirischer Parameter auf der Ebene der KBR-Messungen vorgeschlagen. Ausgangspunkt der Herleitung dieser Parameter ist die Betrachtung von Störeinflüssen beliebiger Frequenz auf die Relativ-Entfernung auf der Basis der Hill-Gleichungen. Nach [Kim, 2000, S.257] ergibt sich für den Fehler auf die Entfernungsmessung

$$\delta\rho(t) = A + Bt + Ct^2 + (E + Ft)\cos(nt) + (G + Ht)\sin(nt) + \sum_{j=1}^N [(E_j + F_j t)\cos(\omega_j t) + (G_j + H_j t)\sin(\omega_j t)] \quad (4.54)$$

mit der mittleren Bewegung des Massenmittelpunktes des Satellitenpaares, n , und ω_j einer Störung beliebiger Frequenz. Danach ist der Fehler in der Entfernungsmessung einer beliebigen Störung die Summe konstanter, linearer, quadratischer und umlaufsperiodischer Terme, unabhängig von der Frequenz ω_j . Überlagert sind Beiträge der frequenz-spezifischen Anteile mit den Amplituden E_j, F_j, G_j und H_j . Aus praktischen Gründen ist die Schätzung beliebig vieler Amplituden zusammen mit sonstigen Parametern des Bewegungsproblems jedoch nicht sinnvoll möglich. Testrechnungen in Kim [2000] zeigen, dass eine Einschränkung auf den Parameterraum der Terme $A - H$ als ausreichend betrachtet werden kann.

Für den Einfluss auf Range-Rate-Beobachtungen erhält man durch Differentiation von Gleichung (4.54) entsprechend

$$\delta\dot{\rho}(t) = A' + B't + (E' + F't) \cos(nt) + (G' + H't) \sin(nt), \quad (4.55)$$

wobei aus Gründen der Vereinfachung unmittelbar nur konstante, lineare und umlaufsperiodische Terme berücksichtigt werden. Die Parameter $A' - H'$ ergeben sich dabei aus Linearkombinationen der Parameter $A - H$ aus der Gleichung (4.54), also z.B. $A' = B$, $B' = 2C$ oder $E' = F + nG$, $F' = nH$, usw. Da später die Schwerefeldbestimmung ausschließlich auf Grundlage der Range-Rate-Beobachtungen erfolgt, werden nur die partiellen Ableitungen nach den Parametern $A' - H'$ angegeben:

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial A'} = 1, \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial B'} = t, \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial E'} = \cos(nt), \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial F'} = t \cos(nt), \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial G'} = \sin(nt), \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial H'} = t \sin(nt), \quad (4.58)$$

5. Design GRACE-only Gravitationsfeldmodelle

5.1. Allgemeines

Allgemein erfolgt die Schwerefeldbestimmung basierend auf den Algorithmen in Kapitel 4 in vier wesentlichen Teilschritten [Schwintzer et al., 1991]:

1. Berechnung von Näherungsbahnen durch numerische Integration der Bewegungsgleichung in Kombination mit dem Schätzverfahren als Referenzbahnen für die Linearisierung. Dieser Schritt umfasst i.d.R. auch eine Säuberung des Datenmaterials (*Data-Screening*).
2. Berechnung der partiellen Ableitungen der Beobachtungen nach den Unbekannten durch numerische Integration der Variationsgleichungen entlang der Referenzbahn und Aufstellen bogenweiser Normalgleichungssysteme.
3. Manipulation der bogenweisen Normalgleichungssysteme (z.B. Reduktion bogen-interner Parameter wie Anfangswerte) und Akkumulation zu einem Gesamtnormalgleichungssystem.
4. Lösung dieses Gesamtsystems durch Matrix-Inversion zur Berechnung der Zuschläge zu den Unbekannten bzw. eines aufdatierten Parametersatzes.

Je nach Güte der zugrundeliegenden Hintergrundmodelle (insbesondere des Schwerefeldmodells) muss dieser Zyklus mehrmals durchlaufen werden, um die gesuchten Parameter iterativ zu verbessern. Die Schritte 1 bis 4 bilden somit einen Iterationsschritt für die Schwerefeldbestimmung und werden im weiteren auch als eine *Schwerefelditeration* bezeichnet. Für die nächste Iteration beginnend mit Schritt 1 wird die Lösung für das Schwerefeldmodell der vorherigen Iteration eingesetzt, sofern sich die Lösung als plausibel erweist.

Hinsichtlich einer konkreten Umsetzung dieser Schritte auf die Feldbestimmung mittels der GRACE-Daten sollen in diesem Kapitel folgende zentrale Fragen untersucht werden:

Wahl der Parametrisierung der Näherungsbahnen: Ziel ist es, die in den Beobachtungsdaten tatsächlich enthaltene Schwereinformation voll den gesuchten Feldkoeffizienten zuschlagen zu können, während andere, i.d.R. fehlerbedingte Signale in den Daten davon zu trennen sind. Im Falle von GRACE sind dies mögliche Einflüsse durch Systematiken in den Akzelerometerdaten (Additionskonstanten, Skalierungen, Driften, farbiges Rauschen) und/oder den K-Band-Beobachtungen (Biase, Driften, farbiges Rauschen). Untersuchungen hierzu sind in Abschnitt 5.3 zusammengestellt.

Wahl der Bogenlänge: Die bogenweise Verarbeitung des Datenmaterials resultiert aus der einfacheren rechentechnischen Handhabung der enormen Datenmengen von Satellitenmissionen einerseits und der Akkumulation von Modellfehlern bei der Berechnung von Näherungsbahnen für die

Linearisierung andererseits. Ein weiterer Aspekt bei der Berechnung früherer Satelliten-basierter Schwerefeldmodelle der Vor-CHAMP-Ära war die Nutzung resonanter Bahnstörungen. Dazu wurden Anforderungen an die minimale Bogenlänge gestellt, die mindestens gleich der Periode der ersten dominanten Resonanzen gewählt werden sollte (siehe z.B. Schwintzer et al. [1991], S.37ff). Anhand von Resonanz-Untersuchungen für CHAMP und GRACE (J. Klokocnik, interne Mitteilungen) wird für diese Missionen eine minimale Bahnlänge von 1.5 Tagen vorgeschlagen. Anhand von simulierten Schwerefeldbestimmungen auf Basis der Verarbeitung des Datenmaterials mit unterschiedlichen Bögenlängen wird untersucht, inwiefern derartige Abhängigkeiten sichtbar bzw. Verbesserungen der Schwerefeldlösungen durch die Verlängerung der Bahnbögen erzielt werden.

Wahl des Lösungsraums der Schwerefeldkoeffizienten: Verbunden mit der Frage der Sensitivität der Mission ist die Frage nach dem geeigneten Entwicklungsgrad für das zu verwendende Näherungsfeld und des Lösungsraums der gesuchten Potentialkoeffizienten. Anhand von Simulationsexperimenten wird in Abschnitt 5.5 der Einfluss von Unter- bzw. Überparametrisierung bei den Schwerefeldkoeffizienten auf die erhaltenen Lösungen untersucht.

Aus den Ergebnissen der Abschnitte 5.3 - 5.5 wird schließlich eine Vorgehensweise entworfen (Abschnitt 5.6), mittels der 3 Jahre GRACE-Daten im Zeitraum Februar 2003 bis Februar 2006 zur Berechnung eines statischen Schwerefeldmodells sowie dessen zeitlicher Variationen in Form von monatsweise berechneten Schwerefeldmodellen ausgewertet werden.

2-Schritt-Verfahren

Für die Auswertung der GPS-SST-Beobachtungen zwischen den GRACE-Empfangsantennen und den GPS-Sendersatelliten in Form der Zero-Differences der ionosphärenfreien L3-Kombination nach Abschnitt 4.3 werden präzise Bahnen und Uhren der GPS-Sendersatelliten benötigt. Diese werden am GFZ¹² in einer unabhängigen Bahnbestimmung auf der Grundlage von GPS-Bodendaten global verteilter Stationen vorab berechnet und dann als bekannte Größen in die Gleichungen (4.32) bzw. (4.36) eingeführt. Diese Vorgehensweise wird GFZ-intern als *2-Schritt-Verfahren* bezeichnet.

Die Motivation für das 2-Schritt-Verfahren liegt einmal in einer homogenen Modellierung der GPS-Konstellationen (bzgl. Referenzsystemen und Transformationen, dynamischen und geometrischen Modelle), die konsistent mit der nachfolgenden Verarbeitung der GRACE-Satelliten ist. Mit extern generierten Senderephemeriden und -uhren, z.B. vom IGS, kann dies nicht gewährleistet werden und es ergeben sich dadurch möglicherweise systematische Einflüsse auf die Schwerefeldbestimmung. Ein zweiter Aspekt ist, dass die vom IGS verfügbaren Uhren-Produkte mit standardmäßig 5 Minuten Schrittweite wegen des spezifischen Verhaltens der Senderuhren nicht genau genug auf die 30s-Schrittweite der GPS-SST-Daten interpoliert werden können und dadurch die präzise Bahnbestimmung der GRACE-Satelliten verschlechtern.

Daneben ist das 2-Schritt-Verfahren weniger rechenintensiv als eine gemeinsame Auswertung von GRACE- und GPS-Bodendaten für eine simultane Bahnbestimmung der GRACE- und GPS-Bahnen und -uhren¹³. Der Nachteil ist, dass gegenüber einem solchen *integrierten Verfahren* etwaige systematische Fehler in den GPS-Konstellationen Zwangsbedingungen bei der Bahnbestimmung der GRACE-Satelliten bewirken können, wodurch letztlich die Qualität der Schwe-

¹²Zu beachten: Die hier zitierten GPS-Senderkonstellationen werden am GFZ Department 1/Sektion 1.2 berechnet und sind unabhängig von am GFZ als IGS-Analyse-Zentrum berechneten GPS-Konstellationen!

¹³Dieser Ansatz wird GFZ-intern allgemein als *1-Schritt-Verfahren* oder *integriertes Verfahren* bezeichnet

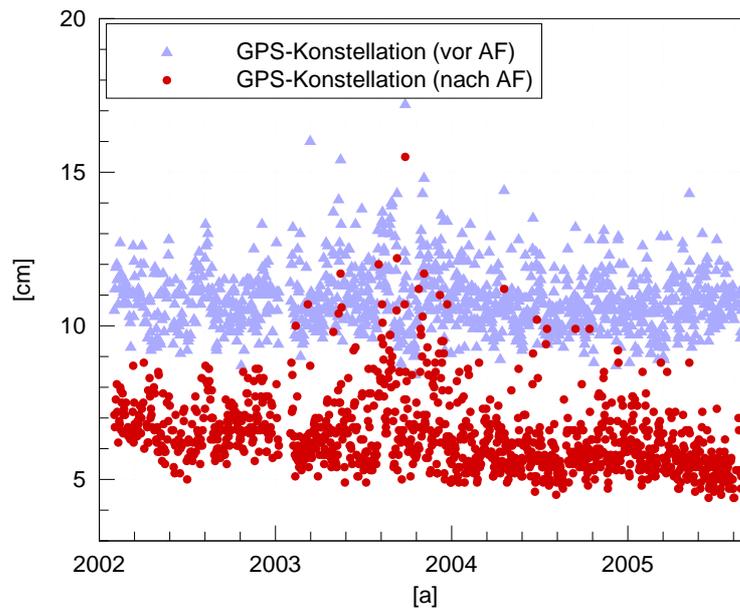


Abbildung 5.1.: RMS-Werte von Positionsabweichungen zwischen den GFZ-intern berechneten GPS-Konstellationen und dem IGS Final-Orbit-Produkt (nach 7-Parameter Helmert-Transformation). Vergleich tageweise. AF = Ambiguity-Fixing.

refeldbestimmung beeinträchtigt wird. Andererseits zeigen Vergleiche der intern berechneten GPS-Konstellationen gegenüber dem IGS-Final-Orbit-Produkt als Referenz eine hohe Qualität der GFZ-internen GPS-Konstellationen. In Abbildung 5.1 sind RMS-Werte der Differenzen der GPS-Senderpositionen aller verfügbaren Satelliten für tageweise Vergleiche zwischen dem internen GFZ- und dem IGS-Final-Orbit-Produkt dargestellt. Eine wesentliche Steigerung der Qualität der GFZ-internen Konstellationen wird durch die Fixierung der Phasenmehrdeutigkeiten (*Ambiguity-Fixing*, AF) der GPS-Bodendaten erzielt. Die beobachteten Differenzen im Vergleich zum offiziellen IGS-Produkt liegen - nach Reduktion systematischer Unterschiede in den Bezugssystemen durch eine 7-Parameter-Helmert-Transformation - im Bereich knapp oberhalb von 5 cm. Dieser Wert entspricht der vom IGS angegebenen äußeren Genauigkeit der IGS-Ephemeriden, so dass die GFZ-eigenen Konstellationen als etwa vergleichbar genau angenommen werden können. Grobe systematische Verschlechterungen der GRACE-Bahnen für die Schwerfeldbestimmung durch Verwendung des 2-Schritt-Verfahrens werden daher nicht erwartet.

Bogenzuschnitt und L1B-Daten

Basierend auf dem GRACE-L1B-Datenmaterial wird die nominelle Bogenlänge auf einen Tag festgelegt, wobei der Zuschnitt der vorliegenden Unterteilung von 0-24 Uhr GPS folgt. Durch Unterbrechungen in den Akzelerometer-Daten werden manche Bahnbögen in kürzere Intervalle aufgeteilt. Dies liegt daran, dass keine sinnvolle Lösung der Bewegungsgleichung (4.20) bei Lücken in den \mathbf{a}_{nk} berechnet werden kann. Allerdings wird die minimale Länge solcher Bahnen auf 8 Stunden beschränkt, da noch kürzere Bögen ohne Änderung der Parametrisierung nicht sinnvoll für die Schwerfeldbestimmung genutzt werden können (Überparametrisierung). Wegen der großen Zahl von Bahnbögen im Intervall $8 \text{ h} \leq T \leq 24 \text{ h}$ je Monat können jedoch die wenigen Bögen $T < 8 \text{ h}$ problemlos ignoriert werden.

Tabelle 5.1.: *Verwendete L1B-Daten für die Schwerefeldbestimmung, Datenraten in [s]*

L1B-Datentyp	Sampling	Bemerkung
ACC	5	Korrektur wegen Additionskonstanten, Skalierungsfaktoren. Datenlücken größer als 1 Minute führen zur Aufspaltung der 1-Tagesbögen.
KRR	5	Apriori Daten-Elimination anhand von L1B-Datenflags.
KRA	5	Wie KRR, jedoch nicht für Schwerefeldbestimmung verwendet.
GPS-SST	30	Verarbeitung als Zero-Differenzen der ionosphärenfreie L3-Kombination für Code- und Phasenmessungen.
SLR	-	Verfügbare Passagen des ILRS-Bodennetzes. Zur Validierung der Mikrowellen-Tracking-Systeme verwendet.
SCA	5	Füllen von Lücken in den Quaternionen bis 2 Minuten mittels kubsicher Spline-Interpolation.

Die im weiteren verwendeten L1B-Daten inklusive ihrer zeitlichen Auflösung sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Wie bereits erwähnt, werden die GPS-SST-Daten mit einer Schrittweite von 30 s verarbeitet. Eine Auswertung mit der verfügbaren höheren zeitlichen Auflösung von 10 s bringt für die Schwerefeldbestimmung keinen weiteren Gewinn, wie Erfahrungen mit CHAMP-Daten zeigen. Dies liegt an der eingeschränkten Sensitivität der hoch-niedrig SST-Beobachtungen. Als grundlegende SST-Beobachtung für die Schwerefeldbestimmung werden die Range-Rate-Messungen des K-Band-Ranging-Systems herangezogen. Die Range-Beobachtungen (KRA) werden im Zuge der Bestimmung der Näherungsbahnen niedriger gewichtet und nur zur Überprüfung der Güte der Bahnanpassung auf der Basis der GPS-SST-Daten verwendet (siehe Abschnitt 5.6). Gleiches gilt für die SLR-Messungen des ILRS-Bodennetzes. Der mutmaßliche Vorteil in der Verwendung der KRR-Beobachtungen gegenüber den KRA-Messungen liegt an dem zu erwartenden besseren Signal-zu-Rausch-Verhältnisses in den Beobachtungsresiduen, wenn der Einfluss des Rauschverhaltens der verschiedenen Instrumentendaten beachtet wird (siehe Kim [2000], Abschnitt 6.3.1).

5.2. Referenzsysteme, Hintergrundmodelle und Konstanten

Die im Rahmen der Schwerefeldbestimmung mit GRACE verwendeten Referenzsysteme, Hintergrundmodelle und Konstanten nach Abschnitt 5.6 sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt. Diese entsprechen weitestgehend den IERS Konventionen 2003 bzw. 1996 [McCarthy und Petit, 2004]. Weitere Details findet man in Flechtner [2005b] und Anhang B.

Neben der Verwendung aktuellerer Hintergrundmodelle für das statische Schwerefeld oder den Ozeangezeiten zeigt Tabelle 5.2 folgende Erweiterungen in der Modellierung des zeitvariablen Gravitationspotentials gegenüber den IERS Konventionen:

- Berücksichtigung atmosphärischer und ozeanischer Kurzzeitmassenvariationen (*Atmospheric and Oceanic De-Aliasing, AOD*, Flechtner [2005a]),
- Einführung eines Modells für tägliche und halbtägliche gezeitenperiodische Variationen der Atmosphärenmassen [Biancale und Bode, 2006], sowie
- Berücksichtigung von Potentialänderungen durch den Effekt der Ocean Pole Tides [Desai, 2002].

Tabelle 5.2.: Referenzsysteme, Hintergrundmodelle und Konstanten GRACE-Schwerefeldbestimmung**Referenzsysteme**

ICRS	Mittlerer Äquator und Äquinoktium J2000.0
Präzession	IAU 1976 entsprechend IERS Konventionen 1996, Referenzepoche J2000.0
Nutation	IAU 1980 mit VLBI-Korrekturen entsprechend IERS Konventionen 1996 (lineare Interpolation der tabellierten Werte aus IERS C04-Reihe)
CTRS	ITRF-2000
Erdrotation	Greenwich Mean Sidereal Time (GMST) mit Korrekturen nach USNO Circular 163 (S. A3), äquatoriale Komponenten von Präzession und Nutation (Aoki & Kinoshita, 1983 bzw. IERS1996 und lineare Interpolation der tabellierten Werte aus IERS C04-Reihe
Polbewegung	Lineare Interpolation der tabellierten Werte aus IERS C04-Reihe
Ursprung	Ursprung ITRF-2000 = Geozentrum
	Lichtgeschwindigkeit: 299792458 m/s

Dynamisches Modell

Erde	$R_{Erde} = 6378136.46 \text{ m}$ $GM_{Erde} = 398600.4415 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $\bar{C}_{00} = 1$ Statisches Feld: EIGEN_CG03C, $N_{max} = 150$ mit $\bar{C}_{10} = \bar{C}_{11} = \bar{S}_{11} = 0$ \bar{C}_{l0} für $l = 2, 3, 4$ (Werte siehe Anhang B.5) $\bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$ als mittlerer Pol mit Korrektur wegen der Pol Tides (IERS Konventionen 2003), keine Driftraten $\dot{\bar{C}}_{21}, \dot{\bar{S}}_{21}$ Erdgezeiten IERS Konventionen 2003: mit frequenzunabhängigen Termen für Grade 2 - 4 (inklusive anelastischer Beiträge der Gezeitendeformation) und frequenzabhängigen Termen für alle Grad 2-Koeffizienten sowie Effekt der permanenten Tide in \bar{C}_{20} Ozeangezeiten IERS Konventionen 2003: Gezeitenargumente für Amplitude und Phase aus dem FES2004-Modell [Letellier et al., 2004] (17 Konstituenten, tlw. bis $N_{max} = 80$, vgl. B.2) Atmosphärengzeiten: Modellierung analog Ozeangezeiten für tägliche und halbtägliche Perioden bis Grad und Ordnung (8,5) [Biancale und Bode, 2006] Atmosphärische und Ozeanische Kurzzeitmassenvariabilität: AOD1B-RL03 siehe Flechtner [2005a] und Anhang B.4 Ocean Pole Tide: IERS Konventionen 2003, Modellwerte aus Desai [2002] bis Grad und Ordnung (30,30)
Drittkörper	Sonne und 5 Planeten als Punktmassen Mondpotential nach Ferrari [1977] entwickelt bis Grad und Ordnung (4,4) Planetenörter DE-405-Ephemeriden von JPL
Relativität	Entsprechend Kapitel 11 IERS Konventionen 1996
Oberflächenkräfte	L1B-Akzelerometer-Daten GRACE-A/B, Schätzung Additionskonstanten und Skalierungsfaktoren zusammen mit den Schwerefeldkoeffizienten

Geometrisches Modell

K-Band	Kinematisch-empirische Parameter nach Kim [2000] (vgl. Abschnitt 4.5)
--------	---

Für bekannte säkulare Änderungen der Potentialkoeffizienten des statischen Feldes werden neben der Drift in \bar{C}_{20} zusätzlich Änderungsraten in \bar{C}_{30} und \bar{C}_{40} apriori berücksichtigt. Die Koeffizienten der Figurenachse \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} werden in den Monatslösungen und statischen Modell explizit gelöst. Apriori-Werte für \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} nach den IERS Konventionen wurden nicht angebracht.

5.3. Parametrisierung von Akzelerometer und K-Band-Instrument

Abgesehen von Additionskonstanten und Skalierungen der Akzelerometermessungen können mögliche Einflüsse der Akzelerometer auf die Schwerefeldbestimmung durch das farbige Rauschen, v.a. im langwelligen Messbereich, erwartet werden. Dies liegt an der speziellen Verarbeitung der ACC-Daten als fehlerfreie Beobachtungen der \mathbf{a}_{nk} in Gleichung (4.20). Im Zuge der Bahnanpassung zur Berechnung von Näherungsbahnen werden durch die numerische Integration von Gleichung (4.20) mögliche Beiträge zunächst akkumuliert und überlagern die tatsächlichen Bahnstörungen wodurch die Bahndynamik verfälscht wird. Zur Illustration der Problematik zeigt Abbildung 5.2 (a) zwei Realisierungen des Rauschverhaltens der Messachse eines GRACE-Akzelerometers in Flugrichtung im Zeitbereich über einen Tag. Diese Zeitreihen wurden mittels einer an der TU München entwickelten *Integrated Sensor Analysis Software* von Frommknecht et al. [2003] erstellt. Grundlage des simulierten Rauschverhaltens bilden die Leistungsdichtespektren der Messfehler, d.h. in Abbildung 5.2 (a) der sensitiven Achsen nach Tabelle 2.3. Betrachtet man nun zunächst das mit Version 1 bezeichnete simulierte Rauschverhalten, so werden neben einem hochfrequenten Anteil von etwa $1 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$ langperiodische Auf- und Abschwüngen bzw. Driften sichtbar. Diese erreichen dabei ein Mehrfaches des hochfrequenten Rauschens und werden durch die Integration entsprechend ihrem Verlauf in die Bahn und damit in die theoretischen Beobachtungen des K-Bands übertragen. Aufgrund der Sensitivität der K-Band-Messungen gegenüber solchen langperiodischen Fluktuationen in der Bahndynamik werden diese Anteile dann im Ausgleichsschritt der Bahnanpassung in die angesetzten Akzelerometerparameter (z.B. Additionskonstanten¹⁴) und in die sonstigen sensitiven Bahnparameter (z.B. Anfangswerte) abgebildet. Entscheidend ist nun, inwiefern solche langwelligen Rauschanteile der Akzelerometer vollständig durch einzuführende Akzelerometer-Parameter über den Verlauf des Bogens abgefangen werden können.

Die mit Version 2 bezeichnete Kurve zeigt ein nahezu weisses Rauschverhalten mit einer Amplitude von $1 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$ über das gesamte Frequenzband (siehe auch Abbildung 5.2 (b)). Aufgrund der fehlenden langperiodischen Auf- und Abschwüngen bzw. Driften liefert ein derartiges Rauschen in der Integration durch die normalverteilte Fehlercharakteristik mit einer Amplitude von $1 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$ einen mutmaßlich vernachlässigbar kleinen Beitrag auf die Bahndynamik. Etwaige von Null verschiedene Beiträge können demnach problemlos in den Additionskonstanten aufgefangen werden. Dieses Rauschverhalten stellt somit ein ideales Akzelerometer dar.

Weitere systematische Fehlereinflüsse auf die Schwerefeldbestimmung wegen langperiodischer Rauschsignale ergeben sich u.U. durch die K-Band-Messungen. Derartige Beiträge resultieren aus den Frequenzinstabilitäten der USOs, die nicht durch die Kombination zu einer Zweifach-Einwegmessung (siehe Abschnitt 2.2, Term 4 Gleichung (2.4)) effektiv eliminiert werden können. Das erwartete Rauschverhalten der Range und Range-Rate-Beobachtungen nach Kim [2000], Seite 105 ff. bzw. Thomas [1999], Seite 125, Gleichung (B.11) ist in Abbildung 5.3 in Form der

¹⁴Derartige Parameter müssen ohnehin angesetzt werden, da in realen Akzelerometermessungen stets Additionskonstanten vorhanden sind.

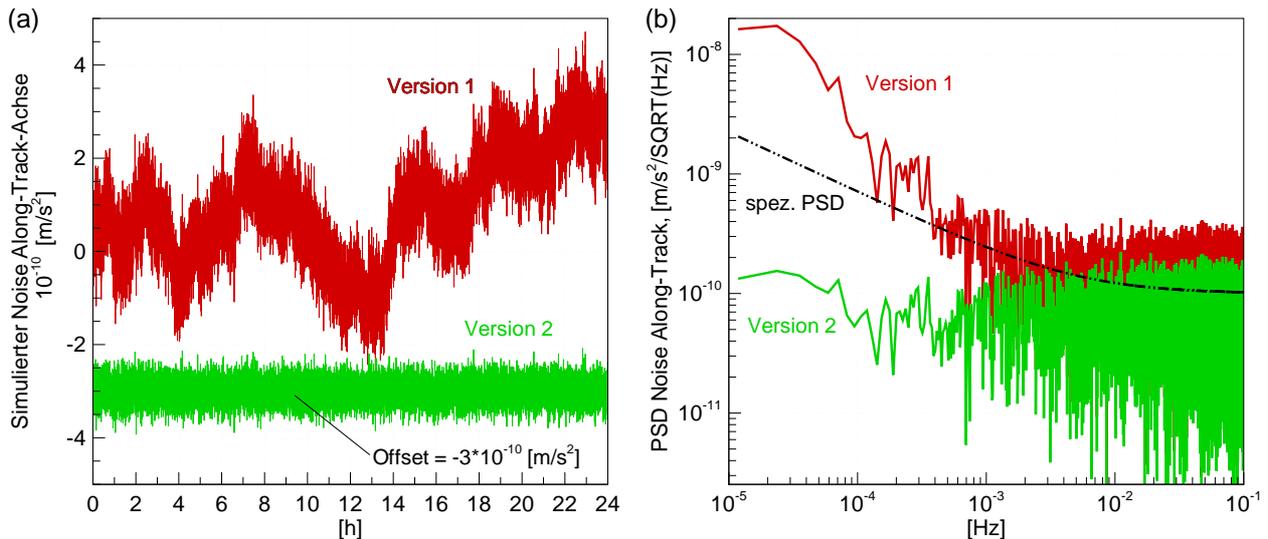


Abbildung 5.2.: Simulierter Akzelerometer-Noise der Messachse in Flugrichtung. (a) Rauschverhalten im Zeitbereich in zwei Versionen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die Kurve des Rauschens in Version 2 konstant verschoben geplottet. (b) Leistungsdichtespektren der Noise-Kurven im Vergleich zur Spezifikation nach Tabelle 2.3. Weitere Erläuterungen siehe Text.

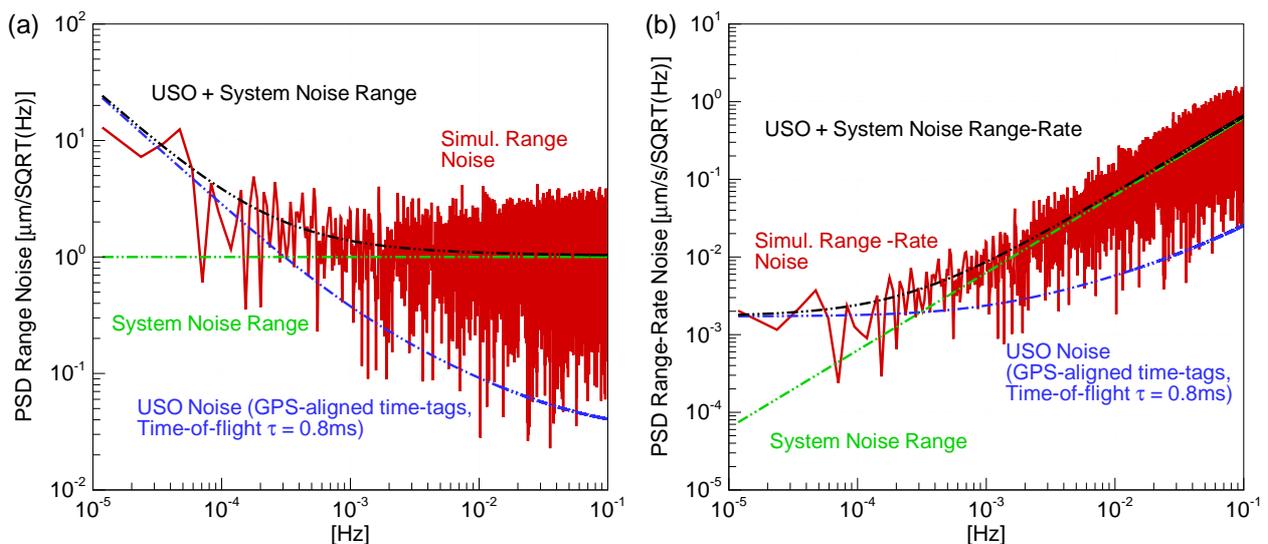


Abbildung 5.3.: Leistungsdichtespektren des simulierten Rauschens der K-Band-Messungen und deren Spezifikationen. (a) Range-Beobachtungen. (b) Range-Rate-Beobachtungen. Weitere Erläuterungen siehe Text.

Leistungsdichtespektren dargestellt. Danach ergeben sich in den Range-Messungen (Abbildung 5.3 (a)) längerperiodische Fehleranteile, die durch das Rauschverhalten der USOs bedingt sind (blaue Kurve). Dabei wurde allerdings schon berücksichtigt, dass durch die nachträgliche Anpassung der Messungen auf die gemeinsame GPS-Zeitskala der Effekt der Frequenzinstabilitäten bei der Kombination der ursprünglichen Phasenmessungen im Bodensegment stark reduziert werden kann [Kim, 2000]. Zu den hohen Frequenzen wird das Spektrum im wesentlichen durch das erwartete Systemrauschen in der Größenordnung von 1μ m dominiert.

In den Range-Rate-Beobachtungen (siehe Abbildung 5.3 (b)) dagegen wird der langwellige Noise-Anteil aufgrund des Differentiation-Effekts deutlich reduziert. Diese Anteile sind im Verhältnis zum hochfrequenten Rauschanteil wesentlich kleiner, so dass die Range-Rate-Beobachtungen mutmaßlich nur durch hochfrequentes Rauschen $< 1 \mu m/s$ beeinflusst sind. Daher scheint eine Verarbeitung für die Schwerefeldbestimmung einfacher als mit den Range-Messungen, so dass im weiteren nur Range-Rate-Messungen herangezogen werden.

Parametrisierung Akzelerometer und K-Band-Instrument

Ausgehend von dem erwarteten Fehlerverhalten im vorigen Abschnitt einerseits und bislang gesammelten Erfahrungen aus der Prozessierung der Echtdata andererseits wird die in Tabelle 5.3 dargestellte Parametrisierung zur Analyse der Echtdata vorgeschlagen.

Bei den Akzelerometern wird eine mögliche lineare Drift in den Additionskonstanten der Akzelerometer innerhalb des Bogens durch ein einfaches lineares Modell erfasst. Es gilt für die Additionskonstante einer Messachse $\tilde{b}_i(t_k)$ aus der Gleichung (4.50) zu einen Zeitpunkt t_k innerhalb des Intervalls $[t_A, t_E]$:

$$\tilde{b}_i(t_k) = \tilde{b}_i(t_A) + m_i(t_k - t_A). \quad (5.1)$$

t_A ist der Zeitpunkt des Bogenanfangs, t_E bezeichnet das Bogenende und es gilt $t_A \leq t_k \leq t_E$. Der Driftparameter m_i wird festgelegt durch die Additionskonstanten am Bogenanfang $\tilde{b}_i(t_A)$ und am Bogenende $\tilde{b}_i(t_E)$:

$$m_i \doteq \frac{\tilde{b}_i(t_E) - \tilde{b}_i(t_A)}{t_E - t_A}, \quad (5.2)$$

wobei diese im Zuge der Bahnanpassung bestimmt bzw. vorhandene Näherungswerte verbessert werden. In Abbildung A.1 in Anhang A sind entsprechende Schätzergebnisse für GRACE-A und GRACE-B dargestellt. Wie bereits erwähnt zeigt sich ein gewisses Langzeitdriftverhalten der Additionskonstanten, insbesondere für die Messachsen in Richtung der Bahnnormalen. In den anderen Achsen sowie in den Skalierungsfaktoren der Achse in along-track-Richtung¹⁵ sind etwaige Trends weniger deutlich ausgeprägt (siehe Abb. A.1 und Abb. A.2 in Anhang A). Dennoch sollen durch die Schätzung von Additionskonstanten und Skalierungsfaktoren nach Gleichung (5.1) gewissen Fluktuationen zugelassen werden, um mit dem langperiodischen Messrauschen verbundene oder sonstige, gegenwärtig nicht näher bekannte instrumentenspezifische Einflüsse absorbieren zu können. Bei den K-Band-Messungen werden K-Band-Parameter nach Abschnitt 4.5 angesetzt, obwohl anhand dem angenommenen Fehlerverhalten der K-Band-Messungen nur ein geringes langperiodisches Rauschen erwartet werden kann.

Verifikation im Rahmen einer Simulationsumgebung

Zur Verifikation der Zweckmässigkeit dieser Parametrisierung werden Schwerefeldbestimmungen in einer Simulationsumgebung durchgeführt. Hierzu werden mittels der GFZ-eigenen Bahnbestimmungssoftware EPOS (*Earth Parameter and Orbit System*) GPS-SST-, KBR-SST- und Akzelerometer-Beobachtungen entlang zweier GRACE-Bahnen durch numerische Integration über einen Zeitraum von 31 Tagen erzeugt. Als Startwerte für die Bahn werden die Zustandsvektoren von GRACE-A/B am 01.08.2003, abgeleitet aus tatsächlichen Bahndaten, verwendet.

¹⁵Skalierungsfaktoren für die Akzelerometersignale in den anderen beiden Achsen lassen sich im Zuge der Bahnbestimmung wegen hohen Korrelationen mit den Additionskonstanten nicht stabil schätzen.

Tabelle 5.3.: Parametrisierung der Näherungsbahnen für die Schwerefeldbestimmung

Datentyp	Freie Parameter in Näherungsbahn
Akzelerometer	Additionskonstante je Achse am Bogenanfang und -ende, modelliert als Polygonzug Skalierungsfaktoren der Achse in Flugrichtung am Bogenanfang und -ende, modelliert als Polygonzug
Range-Rate	Additionskonstante Range-Rate A' , Range-Rate-Drift B' je Orbit, umlaufperiodische Terme E' , G' für jeden 2. Orbit (vgl. Abschnitt 4.5)
Bahn	Anfangswerte (Orts- und Geschwindigkeitsvektor) je GRACE-Satellit je Bogen
GPS-SST	Phasenmehrdeutigkeit N je Beobachtungssession zwischen dem jeweiligen GRACE-Satelliten und den GPS-Sendersatelliten

Die simulierten Daten sind dadurch sehr eng an die Echtdateien der GRACE-Mission für den Monat August 2003 angelehnt. Nicht-gravitative Beschleunigungen werden durch Störkraftmodelle für den Atmosphärenwiderstand, für den solaren Strahlungsdruck und für den Erdalbedo unter Berücksichtigung der tatsächlichen Makromodelle der GRACE-Satelliten entlang der Bahn berechnet. In einer Nachbearbeitung werden die Störbeschleunigungen zu dem integralen Signal der Akzelerometermessungen summiert. Sonstige Elemente der dynamischen Modellierung sowie der Referenzsysteme sind mit den Angaben in Tabelle 5.2 identisch. Zur Beschleunigung der Rechenzeiten wird das statische Feld jedoch auf Grad und Ordnung 70 begrenzt.

Auf Grundlage der simulierten fehlerfreien Daten werden verrauschte Akzelerometer- und K-Band-Beobachtungen nach den oben zitierten Spezifikationen durch die TU München erzeugt. Für das Akzelerometer werden die beiden unterschiedlichen Versionen verrauschter Messungen, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, simuliert. Die GPS-SST-Messungen, d.h. die ionosphärenfreie L3-Kombination der Code- und Phasenmessungen werden jeweils mit einem weißen Rauschen mit den Amplituden $\sigma_{Code} = 30$ cm und $\sigma_{Phase} = 0.85$ cm versehen.

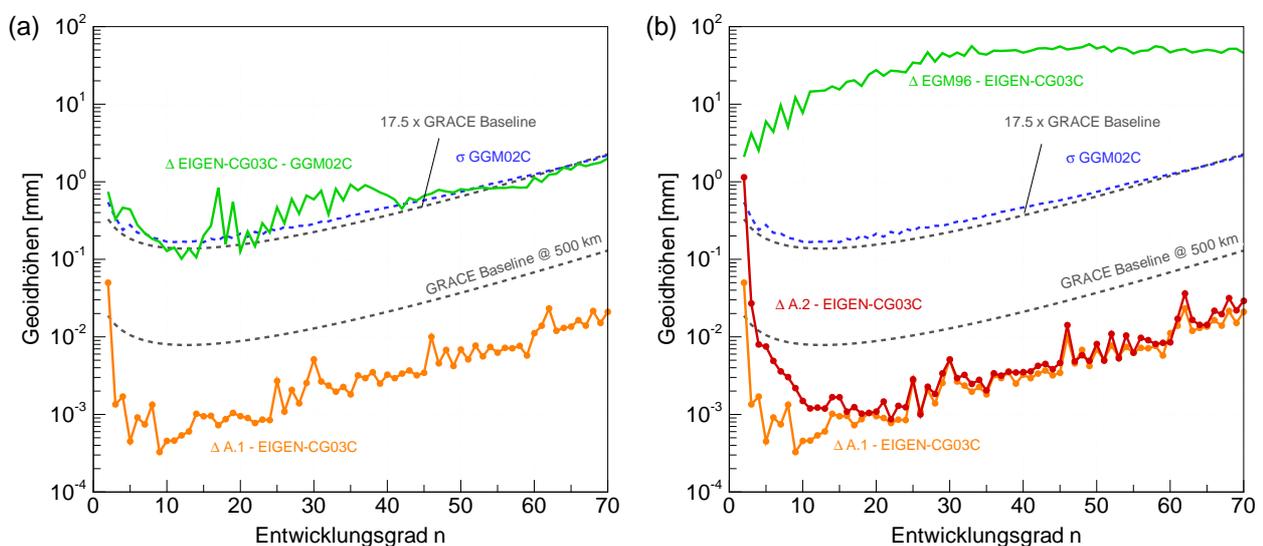
Mit den vorhandenen Datensätzen werden nun Schwerefeldbestimmungen für drei grundlegende Szenarien durchgeführt:

- **A:** Nur Fehler im Näherungsmodell für das statische Feld. Alle verwendeten Beobachtungsdaten sind fehlerfrei.
- **B:** Nur Fehler in den Beobachtungsdaten. Die dynamische Modellierung ist identisch mit der Simulation der Beobachtungsdaten.
- **C:** Kombination von **A** und **B**, d.h. Fehler im Hintergrundmodell für das statische Feld sowie Fehler in den Beobachtungsdaten.

Innerhalb dieser Szenarien werden die in Tabelle 5.4 dargestellten Fälle durchgerechnet. Der Lösungsraum der Stokes-Koeffizienten umfasst stets das volle Spektrum der in den simulierten Daten enthaltenen Schwereinformation bis Grad und Ordnung 70. In den Fällen A.1 und A.2 wird der Einfluss der Güte des Näherungsmodells bzw. mögliche Korrelationen zwischen Akzelerometer- und K-Band-Parametern und Schwerefeldkoeffizienten untersucht. Mit den Fällen B.1 und B.2 soll der Beitrag allein der Fehler in den Beobachtungsdaten approximiert werden und insbesondere der Einfluss des langperiodischen Rauschverhaltens der Akzelerometer betrachtet werden. Die Kombinationsfälle approximieren einen Realfall mit Fehlern im statischen Schwerefeldmodell und den Beobachtungsdaten.

Tabelle 5.4.: Testfälle Schwerefeldbestimmung zur Verifikation Parametrisierung

Fall	Beschreibung
A.1	Nominales statisches Schwerefeldmodell GGM02C, alle Beobachtungsdaten fehlerfrei
A.2	Nominales statisches Schwerefeldmodell EGM96, alle Beobachtungsdaten fehlerfrei
B.1	Nominales Schwerefeldmodell EIGEN-CG03C (= wahres Feld), Verrauschte Beobachtungsdaten, farbiges Rauschen Version 1 in den Akzelerometer-Daten
B.1a	wie B.1, jedoch 1/4-tägliche Auflösung der Akzelerometer-Bias-Parameter
B.2	Nominales Schwerefeldmodell EIGEN-CG03C (= wahres Feld), Verrauschte Beobachtungsdaten, farbiges Rauschen Version 2 in den Akzelerometer-Daten
C.1	Nominales statisches Schwerefeldmodell GGM02C, Verrauschte Beobachtungsdaten, farbiges Rauschen Version 2 in den Akzelerometer-Daten
C.2	Iteration von C.1 mit dessen Lösung als neues nominales statisches Schwerefeldmodell

**Abbildung 5.4.:** Differenz-Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für Fall A.1 (a) und Fall A.2 (b) aus Tabelle 5.4

Ergebnisse

Abbildungen 5.4 (a) und (b) zeigen die Abweichungen der Lösungen aus A.1 und A.2 gegenüber dem wahren Modell EIGEN-CG03C in Form von Differenz-Gradamplituden. Danach ergeben sich in Abhängigkeit von der Güte des Näherungsmodells für das statische Feld Abweichungen in den langwelligen Schwerefeldkoeffizienten, insbesondere in \bar{C}_{20} (siehe Abb. 5.5). Bei Koeffizienten der mittel- und hochfrequenten Anteile dagegen ist der Einfluss der Näherungslösung scheinbar gering. Selbst im Falle der schlechten Näherung mit EGM96 als Modell der Vor-GRACE-Ära werden Anteile oberhalb von Grad 20 bereits nach einer Schwerefelditeration vergleichbar gut bestimmt. Der generelle Anstieg der Differenzen zu den kürzesten Wellenlängen entspricht der erwarteten Verschlechterung in der Bestimmung dieser Anteile wegen der zunehmenden Dämpfung der hochfrequenten Signalanteile mit der Bahnhöhe. Überlagert sind systematische Abweichungen im Bereich von Vielfachen der ersten resonanten Ordnung $m = 15, 16$. Diese sind in den Gradvarianzenplots in Abb. 5.4 als markante Spitzen im Bereich der Grade $n = 30, 45$ und 62 sichtbar. In den Koeffizientendifferenzen in Abb. 5.5 sind diese Abweichungen als Bänder entlang der Ordnungen $m = 30, 45$ und 62 erkennbar. Insgesamt stimmt der qualitative Verlauf

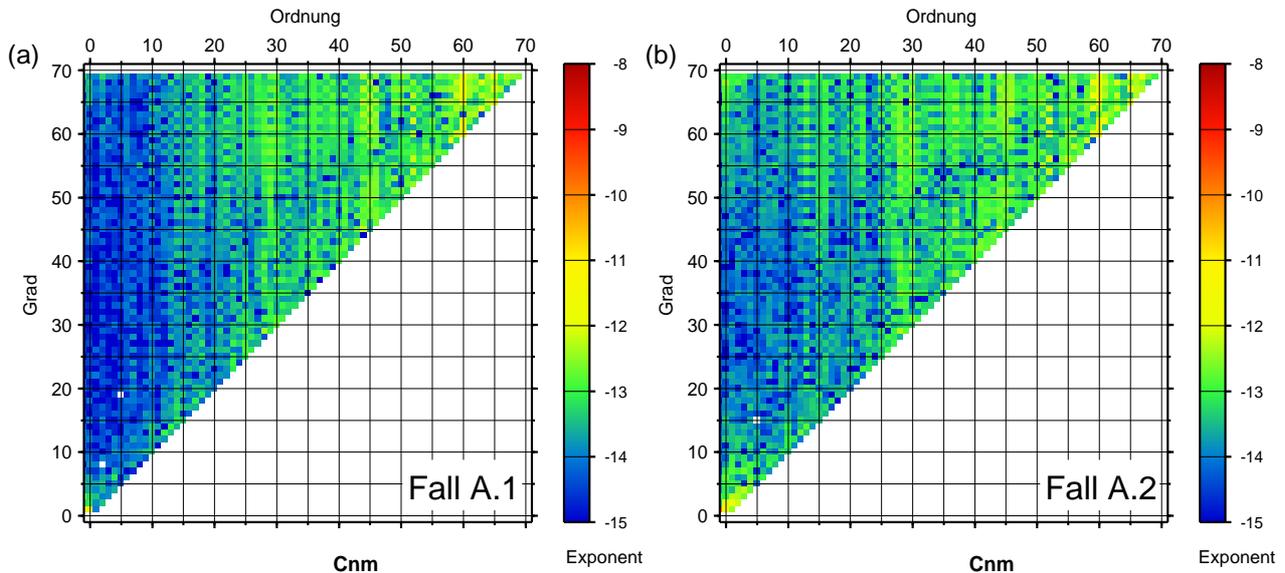


Abbildung 5.5.: Differenzen der Schwerefeldlösungen für Fall A.1 (a) und Fall A.2 (b) aus Tabelle 5.4 je \bar{C}_{nm} -Koeffizient dargestellt als $\log_{10}(\Delta\bar{C}_{nm}) = \bar{C}_{nm}^{A.i} - \bar{C}_{nm}^{EIGEN-CG03C}$

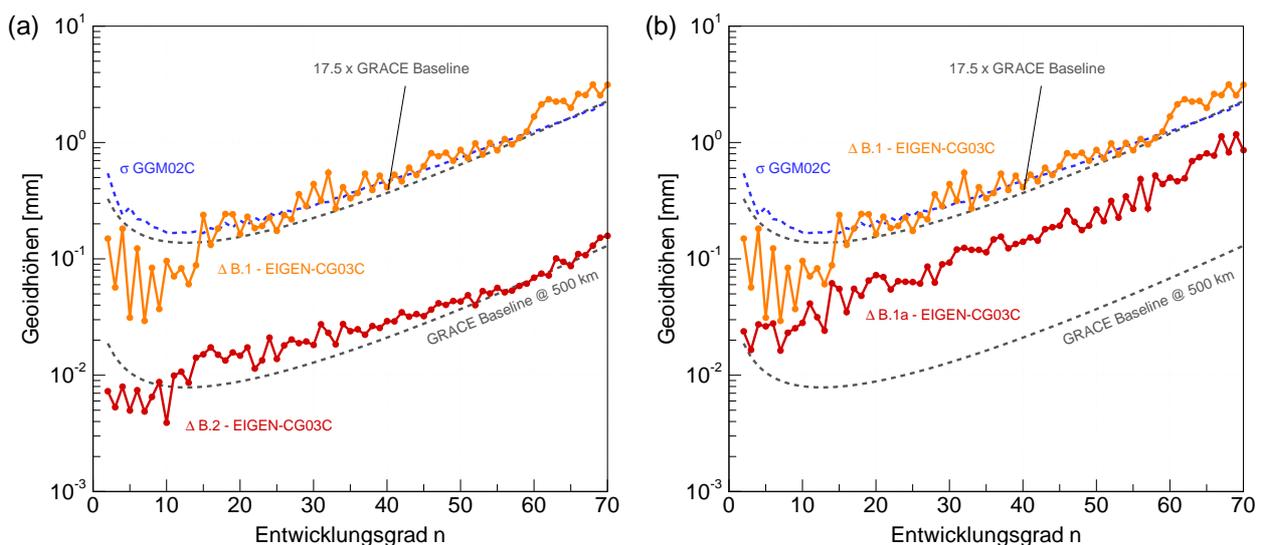


Abbildung 5.6.: Differenz-Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für Fall B.1 und B.2 (a) und Fall B.1a (b) aus Tabelle 5.4

der Differenzen recht gut mit dem Verlauf der Baseline überein. Aufgrund der fehlerfreien Daten ergeben sich allerdings mit Ausnahme der längsten Wellenlängen Abweichungen, die etwa eine Größenordnung unterhalb der Baseline liegen. Eine Analyse der geschätzten Akzelerometer- und K-Band-Parameter, die zusammen mit den Schwerefeldkoeffizienten gelöst werden, zeigt, dass die einzelnen Werte gut mit den Erwartungswerten¹⁶ der jeweiligen Parameter übereinstimmen. Dies bedeutet, dass in Szenario A keine wesentliche Schwereinformation in diesen Parametern absorbiert wird.

Abbildung 5.6 (a) zeigt die Ergebnisse der Schwerefeldlösungen der Fälle B.1 und B.2. Diese

¹⁶Erwartungswert für Skalierungsfaktoren der Akzelerometermessungen ist 1, für sonstige Akzelerometer- und K-Band-Parameter 0.

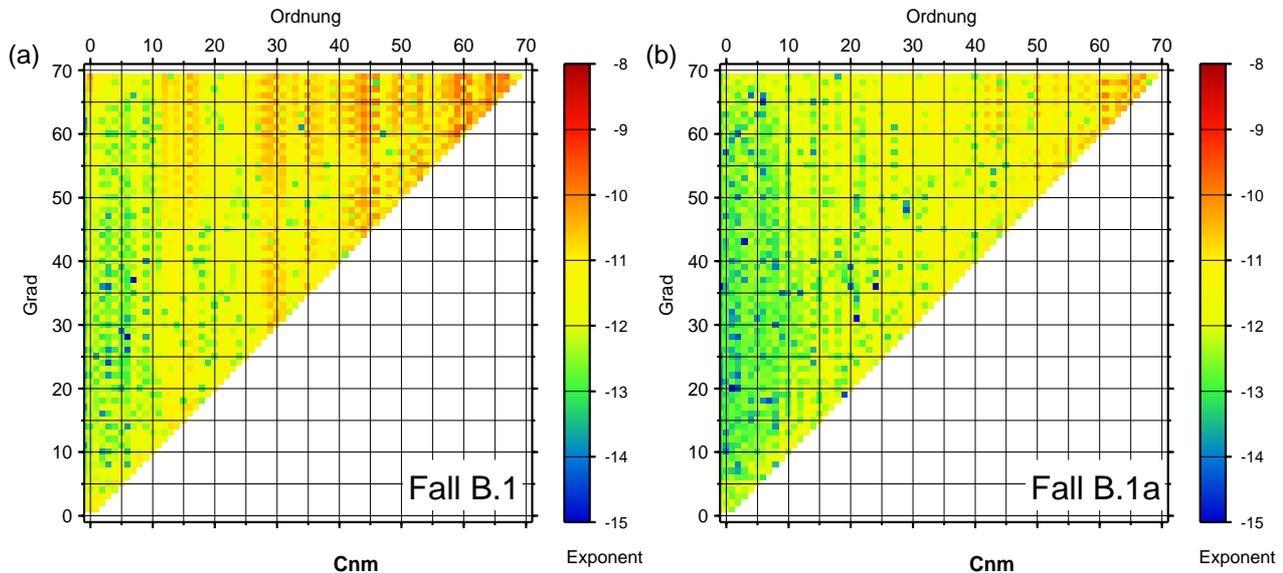


Abbildung 5.7.: Differenzen der Schwerefeldlösungen für Fall B.1 (a) und Fall B.1a (b) aus Tabelle 5.4 je \bar{C}_{nm} -Koeffizient dargestellt als $\log_{10}(\Delta\bar{C}_{nm}) = \bar{C}_{nm}^{B.i} - \bar{C}_{nm}^{EIGEN-CG03C}$

Lösungen sind nur durch das farbige Rauschen in den Akzelerometer- und den K-Band-Range-Rate-Daten beeinflusst. Man sieht, dass im Falle eines ausgeprägten längerperiodischen Rauschens in den Akzelerometermessungen (d.h. Version 1 in Abb. 5.2) die Differenzen der Lösung deutlich oberhalb der Baseline zu liegen kommen. Der konkrete Level von etwa 17.5 mal der Baseline entspricht bemerkenswerterweise dem gegenwärtig angenommenen Genauigkeitsniveau der GRACE Monatslösungen (siehe Abschnitt 6.2), die mit der Parametrisierung aus Tabelle 5.3 berechnet wurden. Im Falle eines mehr oder weniger weißen Rauschens der Akzelerometermessungen im Bereich von $1 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$ bzw. $1 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$ ergeben sich mit der Lösungen B.2 Differenzen, die recht gut mit der prädizierten Baseline-Genauigkeit übereinstimmen. Wie die Ergebnisse des Falls C.2 weiter unter zeigen, entsteht eine noch bessere Anpassung auf das Niveau der Baseline durch eine weitere Schwerefelditeration mit der aktuellen Lösung als neuem Initialmodell.

Die Qualität der Lösung des Falls B.1 kann verbessert werden, indem man die Schätzung der Additionskonstanten am Bogenanfang und am Bogenende nach der Gleichung (5.1) um drei weitere Konstanten $\tilde{b}_i(t_A + n\Delta t)$ mit $\Delta t = 0.25$ Tage und $n = 1, 2, 3$, d.h. also einer vierteltäglicher Auflösung weiter verdichtet. Die resultierenden Differenzen (siehe Abb. 5.6 (b)) fallen dann insgesamt etwa um einen Faktor 3 besser aus als bei der ursprünglichen Parametrisierung im Fall B.1. Daneben ist ein Anstieg der Differenzen bei Grad 16 (d.h. im Bereich der ersten resonanten Ordnung) der Lösungen B.1 und B.2 kaum sichtbar (vgl. Abb. 5.7 (a) und (b)). Sofern nun das Akzelerometer-Rauschen in der Version 1 dem tatsächlichen Rauschverhalten der realen Akzelerometer auf GRACE-A/B entspricht, deutet dieses Ergebnis darauf hin, dass bei der Verarbeitung der Echt Daten eine dichtere Parametrisierung der Additionskonstanten eventuell sinnvoll wäre. Andererseits zeigt eine genaue Betrachtung der Spektren des simulierten Rauschens und dem erwarteten PSD in Abbildung 5.2 (b), dass die Amplituden der niederfrequenten Anteile (oberhalb von etwa $0.35 \text{ mHz} \approx 1/2$ Umlaufperiode) größer ausfallen als erwartet. Danach wäre das simulierte Rauschen in Version 1 zu pessimistisch und die Ergebnisse von vorneherein nicht mit der Baseline vergleichbar.

Auffällig in allen Testfällen des Szenarios B ist, dass die Datenfehler allein scheinbar keinen star-

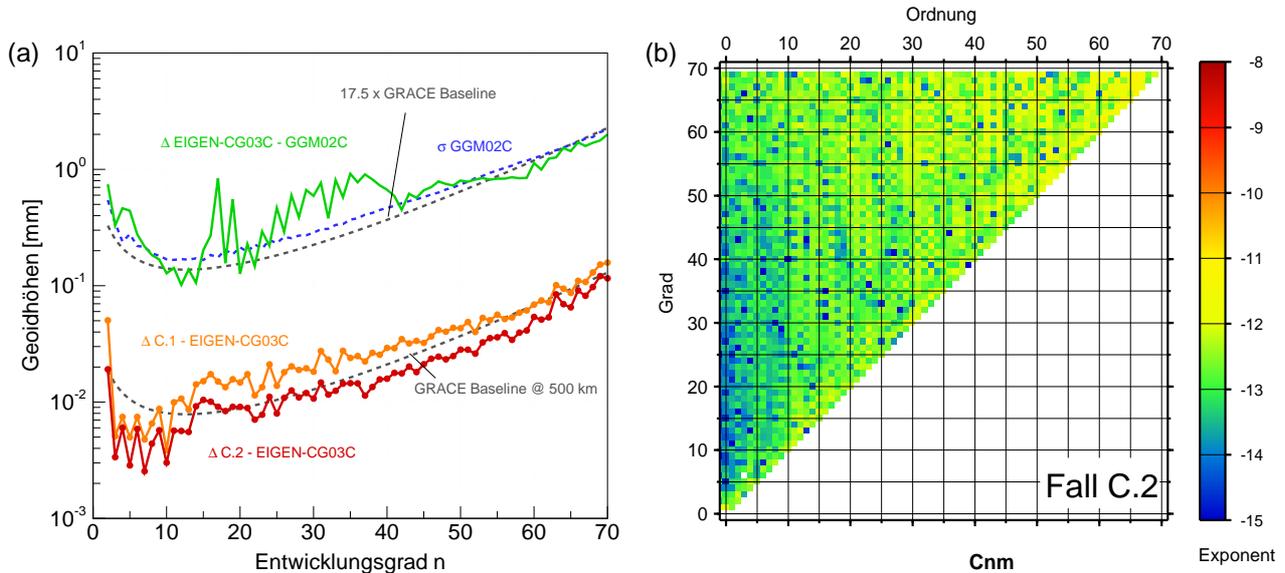


Abbildung 5.8.: Differenz Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für Fall C.1 und C.2 (a) sowie die Differenzen je \bar{C}_{nm} -Koeffizient für Fall C.2 dargestellt als $\log_{10}(\Delta\bar{C}_{nm}) = \bar{C}_{nm}^{C.2} - \bar{C}_{nm}^{EIGEN-CG03C}$

ken Einfluss auf die Bestimmung der längerwelligen Feldanteile wie beispielsweise \bar{C}_{20} haben. Die Differenzen folgen in der logarithmischen Darstellung einem näherungsweise linearen Verlauf über das gesamte Spektrum.

Abbildung 5.8 (a) zeigt schließlich die Ergebnisse der Schwerefeldlösungen C.1 und C.2, d.h. die Ergebnisse der Kombination von Fehlern im Näherungsmodell des statischen Feldes und von Datenfehlern. Betrachtet man zunächst den Fall C.1, so sieht man am Verlauf der Differenz-Gradamplituden eine Überlagerung des Effekts der Modellfehler im Näherungsmodell des statischen Feldes bei der Bestimmung der längsten Wellenlängen und des Effekts der Datenfehler bei der Bestimmung der mittleren und hochfrequenten Feldanteile. Dabei entspricht die Amplitude der Differenzen jeweils dem Niveau der Fälle A.1 und B.2. Offenbar entstehen bei der gewählten Parametrisierung durch die Kombination von Modell- und Datenfehlern keine zusätzlichen Überlagerungseffekte zwischen langwelligen und höherfrequenten Feldanteilen. Da in C.1 bei den Akzeleromatendaten das annähernd weiße Rauschverhalten der Version 2 zugrundeliegt, ergeben sich Differenzen, die gut mit dem Niveau der prädierten Baseline übereinstimmen. Durch eine neuerliche Schwerefelditeration mit der Lösung C.1 als neue Näherung für das statische Feld können die Differenzen nahezu über das gesamte Spektrum noch einmal verbessert werden. Eine besonders deutliche Verbesserung ergibt sich für \bar{C}_{20} durch die Iteration (Differenz \approx Faktor 5 kleiner als in C.1). Dieses Ergebnis zeigt zusammen mit den Fällen A.1/2 die geringere Sensitivität der GRACE-Konstellation in der Bestimmung des Abplattungsterms. Offensichtlich sind signifikante Verbesserungen in \bar{C}_{20} durch mehrmaliges Iterieren möglich.

Insgesamt scheint die vorgeschlagene Parametrisierung für die Auswertung von GRACE-Daten geeignet zu sein und wird daher zur Verarbeitung der Echtdaten verwendet. Untersuchungen zu möglichen Verbesserungen für die Bestimmung des Schwerefeldes aufgrund von Änderungen in der Parametrisierung, wie z.B. Fall B.1a, sind gegenwärtig am GFZ in Vorbereitung.

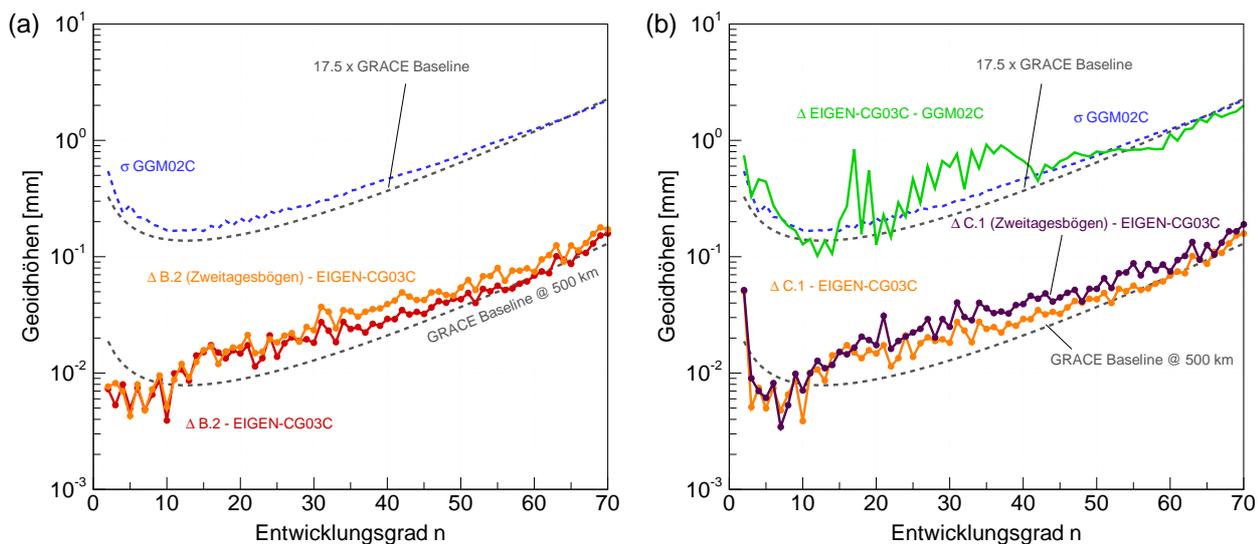


Abbildung 5.9.: (a) Differenz-Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für Fall B.2 aus Tabelle 5.4 sowie der Version auf der Basis von Zweitagesbögen (B.2 (Zweitagesbögen)). (b) Differenz-Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für Fall C.1 aus Tabelle 5.4 sowie der Version auf Basis von Zweitagesbögen. (C.1 (Zweitagesbögen)).

5.4. Einfluss der Bogenlänge

Zur Untersuchung einer Abhängigkeit der Ergebnisse der Feldbestimmung von der Bogenlänge werden die Experimente B.1, C.1 und C.2 wiederholt, wobei die Bogenlänge von einem auf zwei Tage erhöht wird. Die Bahnanpassung geschieht mit einer auf Zweitagesbögen angepassten Parametrisierung nach Tab. 5.3. Dies bedeutet, dass bei den Akzelerometermessungen Additionskonstanten in allen drei Achsen sowie Skalierungsfaktoren in Flugrichtung (alle jeweils als Polygonzug) mit täglicher Schrittweite bestimmt werden. Die Schätzung von Akzelerometerparametern in der Bogenmitte bzw. mit tagesweiser Auflösung ist durch die technische Realisierung des Akzelerometer-Rauschens bedingt, bei dem am Tageswechsel gelegentlich Sprünge auftreten können. Diese sollen dann durch die angesetzten Parameter aufgefangen werden. Im Hinblick auf die Verarbeitung von Echtdateen wäre eine solche Vorgehensweise ohnehin sinnvoll, da die L1B-Daten ebenfalls tageweise zur Verfügung stehen und hinreichend glatte Übergänge an den Nahtstellen nicht immer gegeben sein müssen. Bei den Range-Rate-Beobachtungen kann das Muster aus Tab. 5.3 einfach über zwei Tage ausgedehnt werden.

Abbildung 5.9 (a) zeigt die Differenz-Gradamplituden für den Fall B.2 mit Zweitagesbögen, d.h. es liegen nur Datenfehler im Akzelerometer (Version 2) und K-Band vor. Die Modelldifferenzen gegenüber dem Soll liegen wiederum in der Größenordnung der Baseline (ohne den markanten Anstieg im Bereich der längsten Wellenlängen) analog zum ursprünglichen Testfall B.2. Gegenüber diesem sind die erhaltenen Modelldifferenzen im langwelligen Bereich vergleichbar. Etwa oberhalb von Grad 20 ergeben sich leicht größere Abweichungen gegenüber dem Soll als für Fall B.2. Die Ursache dafür liegt vermutlich darin, dass sich bei der Auswertung längerer Bögen - im sonst fehlerfreien Fall - durch das langerperiodischen Rauschverhalten der Akzelerometer größere Beiträge ergeben. Darin deutet sich bereits an, dass eine Auswertung kürzerer Bögen vorzuziehen ist. Im Falle zusätzlicher Modellfehler im Näherungsmodell ergibt sich ein ähnliches Bild (vgl. Abb. 5.9 (b)). Im langwelligen Bereich werden vergleichbare Differenzen wie für den Fall der Eintagesbögen C.1 erhalten. Insbesondere für die Terme vom Grad 2 sieht man nahezu

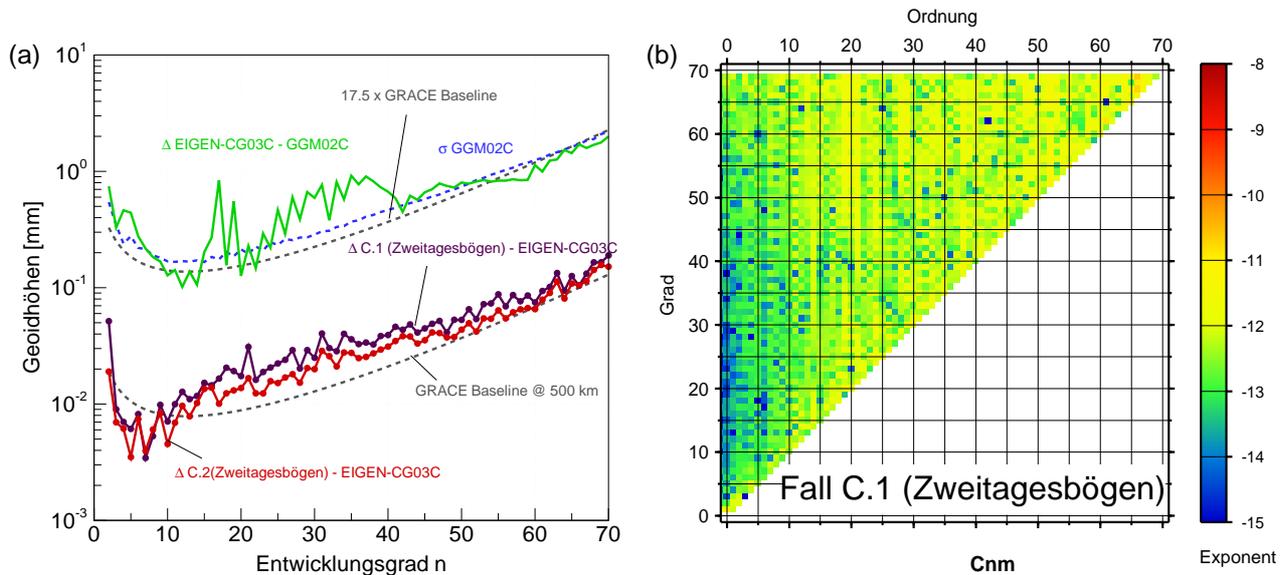


Abbildung 5.10.: (a) Differenz-Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für Fall C.1 (Zweitagesbögen) sowie nach einer weiteren Iteration der Lösung C.1 (Zweitagesbögen) als neues Näherungsmodell (= C.2 (Zweitagesbögen)). (b) Differenzen der Schwerefeldlösung C.1 (Zweitagesbögen) je \bar{C}_{nm} -Koeffizient dargestellt als $\log_{10}(\Delta \bar{C}_{nm}) = \bar{C}_{nm}^{C.1.2-d} - \bar{C}_{nm}^{EIGEN-CG03C}$.

identische Ergebnisse. Oberhalb Grad 16 sind die Differenzen wiederum für den Fall C.1 (Zweitagesbögen) sichtbar schlechter, wobei die gleiche Ursache wie im Fall B.1 (Zweitagesbögen) vermutet werden kann. Ein koeffizientenweiser Vergleich (siehe Abb. 5.10 (b)) deutet leicht systematische Abweichungen in den \bar{C}_{nm} -Termen der Ordnung 20 an. Andere qualitative Unterschiede gegenüber den Ergebnissen C.1/C.2 der Eintagesbögen im vorherigen Abschnitt sind nicht erkennbar.

Wie schon im Fall C.1 können die Schätzergebnisse durch Iteration mit der Verwendung der Lösung C.1 (Zweitagesbögen) als neue Näherung verbessert werden (siehe Abb. 5.10 (a)). Allerdings ist die gewonnene Lösung im Bereich der mittleren und kurzen Wellenlängen, etwa ab Grad 16, wiederum schlechter als die Lösung C.2 auf der Grundlage der Eintagesbögen. Inwiefern hier wieder Verbesserungen durch weitere Iterationen erzielt werden können, wurde nicht weiter untersucht, da anhand der bisherigen Ergebnisse darauf geschlossen werden kann, dass eine Auswertung basierend auf Bögen länger als einem Tag offenbar keine grundsätzlichen Vorteile zu bringen scheint.

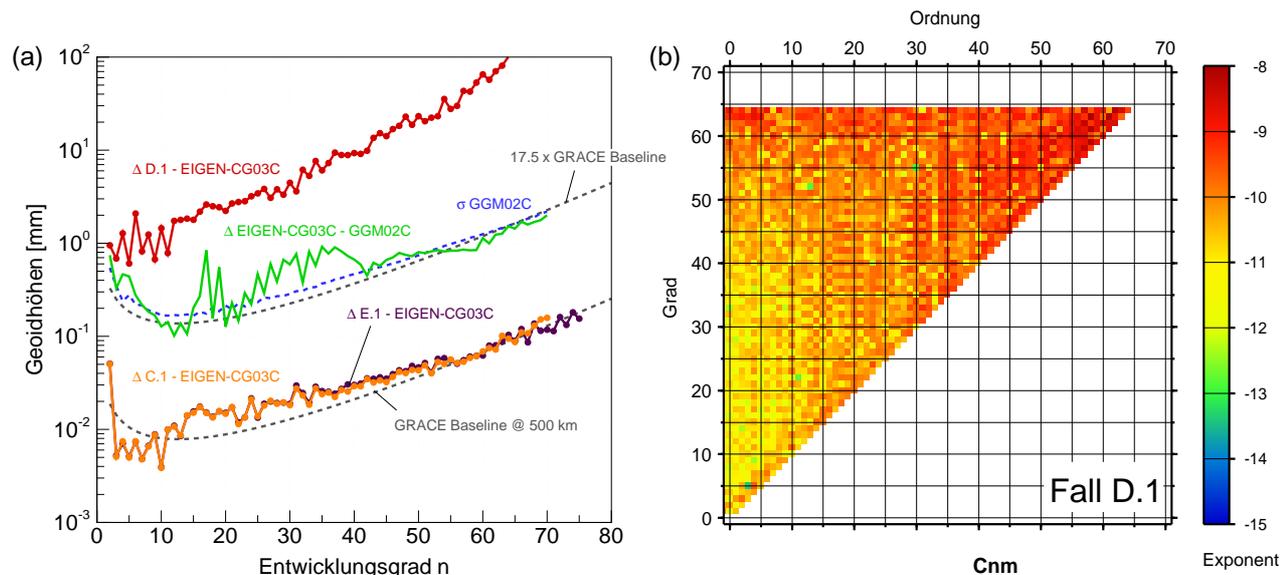
5.5. Lösungsraum der Stokes-Koeffizienten

Im Zusammenhang mit der Wahl eines geeigneten Lösungsraums der gesuchten Potentialkoeffizienten sollen systematische Einflüsse aufgrund einer Unter- bzw. Überparametrisierung bei den Stokes-Koeffizienten untersucht werden. Dies betrifft auch den maximalen Entwicklungsgrad des verwendeten Näherungsfeldes, der die Güte der theoretischen Beobachtungen bzw. der Linearisierung mit beeinflusst. Hierzu werden Simulationsläufe für Feldbestimmungen auf der Grundlage des Falles C.1 (Eintagesbögen) aus Abschnitt 5.3 vorgenommen. Zunächst werden die zwei Fälle D.1 und E.1 aus Tab. 5.5 untersucht.

D.1 repräsentiert den Fall einer Unterparametrisierung des Näherungsmodells als auch des Lösungsraumes. Hierzu wurde der maximale Entwicklungsgrad des Näherungsfeldes und des Lösungs-

Tabelle 5.5.: Testfälle Unter- und Überparametrisierung des Lösungsraumes der Stokes-Koeffizienten. Modell- und Datenfehler entsprechend Fall C.1.

Fall	Beschreibung
D.1	Unterparametrisierung des Lösungsraumes und des Näherungsfeldes, d.h. für die zu lösenden Koeffizienten wird $n_{max} = m_{max} = 65$ gewählt.
E.1	Überparametrisierung des Lösungsraumes und des Näherungsfeldes, d.h. Erweiterung des maximalen Entwicklungsgrades in beiden Fällen auf $n_{max} = m_{max} = 75$. Als Näherungswerte für die Stokes-Koeffizienten oberhalb von $n = m = 70$ werden Nullen angenommen.
F.1	Nur Unterparametrisierung des Lösungsraumes, d.h. der maximale Entwicklungsgrad des Näherungsfeldes wird bei $n_{max} = m_{max} = 70$ gewählt, der Lösungsraum jedoch bei $n_{max} = m_{max} = 65$ abgeschnitten.

**Abbildung 5.11.:** (a) Differenz-Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für die Fälle D.1 und E.1 aus Tabelle 5.5. (b) Differenzen der Schwerefeldlösung D.1 je \bar{C}_{nm} -Koeffizient dargestellt als $\log_{10}(\Delta \bar{C}_{nm}) = \bar{C}_{nm}^{C.1,2-d} - \bar{C}_{nm}^{EIGEN-CG03C}$.

raums bei $n_{max} = m_{max} = 65$ gewählt. Dadurch werden höherfrequente Feldsignale ab $n, m = 66$, die in den simulierten Daten enthalten sind, nicht modelliert. Da keine Filterung der Daten vorgenommen wird, ist mit einer Abbildung der nichtparametrisierten Signalanteile in den zu klein gewählten Lösungsraum der Stokes-Koeffizienten (und andere Parameter) zu rechnen. Anhand der Differenz-Gradamplituden in Abb. 5.11 (a) zeigt sich, dass diese Anteile offenbar über das gesamte Spektrum verteilt werden. Es ergibt sich der charakteristische Verlauf der Differenz-Gradamplituden, d.h. in der logarithmischen Darstellung ein linearer Anstieg zu den kurzen Frequenzen des Schwerefeldspektrums. Im Bereich bis etwa Grad 10 sind stärkere Oszillationen beobachtbar, danach ist der Verlauf eher glatt. Ein koeffizientenweiser Vergleich anhand von Abbildung 5.11 (b) gibt entsprechend keine Hinweise auf eine schlechtere Bestimmung von speziellen Koeffizientenbändern. Stattdessen zeigt Abb. 5.11 (b) ein zu Fall C.1 aus Abschnitt 5.3 qualitativ vergleichbares Bild. Das Niveau der Differenzen ist dabei jedoch deutlich höher als die Abweichungen der ursprünglichen Näherungslösung. Dies bedeutet, dass eine Unterparametrisierung gemäß D.1 zu einer unbrauchbaren Lösung führt.

Mit Fall E.1 wird der Einfluss einer Überparametrisierung des Näherungsfeldes und des Lösungsraumes untersucht. Für beide wird ein maximaler Entwicklungsgrads von $n_{max} = m_{max} = 75$

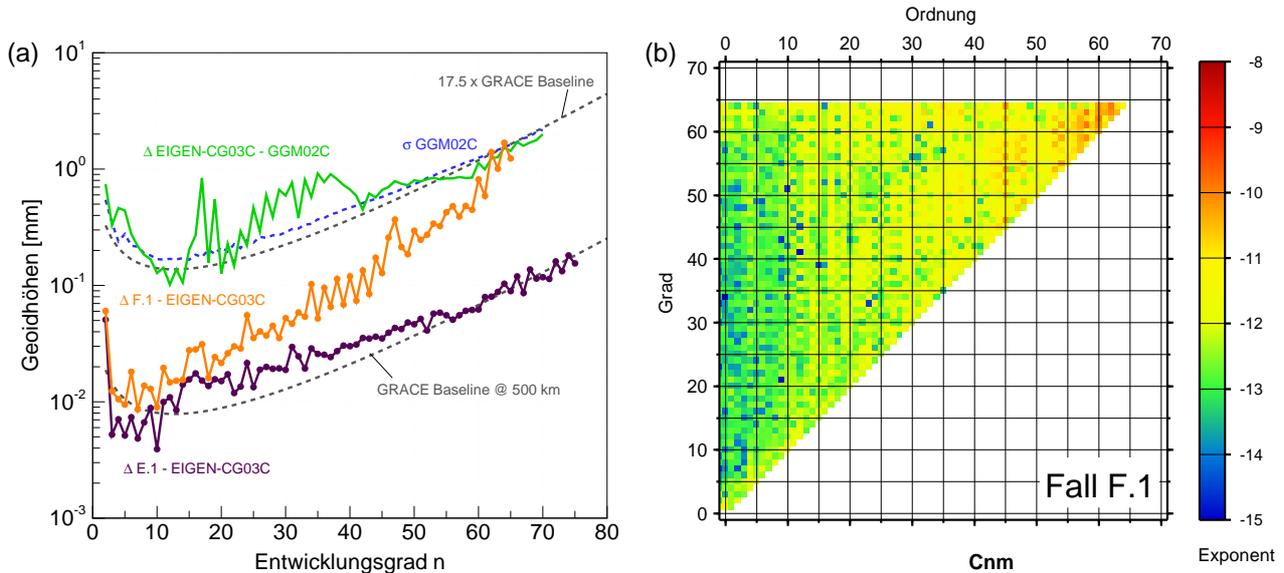


Abbildung 5.12.: (a) Differenz-Gradamplituden der Schwerefeldlösungen für die Fälle E.1 und F.1 aus Tabelle 5.5. (b) Differenzen der Schwerefeldlösung F.1 je \bar{C}_{nm} -Koeffizient dargestellt als $\log_{10}(\Delta \bar{C}_{nm}) = \bar{C}_{nm}^{1.2-d} - \bar{C}_{nm}^{EIGEN-CG03C}$.

verwendet, wobei für die Koeffizienten oberhalb von $n_{max} = m_{max} = 70$ Nullen angesetzt werden. Abbildung 5.11 (a) zeigt die resultierenden Differenz-Gradamplituden der Lösung von E.1 gegenüber dem Soll (d.h. den Koeffizienten von EIGEN-CG03C). Für die Koeffizienten unterhalb von Grad 70 ergibt sich ein zu Fall C.1 vergleichbarer Verlauf, d.h. die Abweichungen der erhaltene Lösung liegen bereits nach einer Iteration im Bereich der angenommenen Baseline-Genauigkeit. Für die Koeffizienten oberhalb Grad 70 erhält man Schätzwerte, die auf der erwarteten Fehlerkurve zu liegen kommen, und daher als nicht signifikant angenommen werden können. Daraus wird insgesamt geschlossen, dass die vorliegende Überparametrisierung des Näherungsfeldes und des Lösungsraumes gemäß E.1 eine nahezu optimale Schwerefeldbestimmung erlaubt.

Als drittes wurde der Testfall F.1 untersucht. Hinsichtlich des Näherungsfeldes wurde ein mit dem Signalgehalt der simulierten Beobachtungsdaten identischer maximaler Entwicklungsgrad $n_{max} = 70$ gewählt und so eine Unterparametrisierung auf der Ebene der Berechnung der theoretischen Beobachtungen vermieden. Beim Lösungsraum wurde dagegen ein Abschneidefehler mit einer Begrenzung bei $n_{max} = m_{max} = 65$ eingeführt, so dass wiederum mit einem Übertrag von Signalenergie kurzweilliger Schweresignale in den eingeschränkten Lösungsraum der Stokes-Koeffizienten gerechnet werden kann. Dieser ist anhand der Differenz-Gradamplituden in Abbildung 5.12 (a) deutlich sichtbar. Im Gegensatz zu E.1 fallen die Abweichungen zwar insgesamt wesentlich geringer aus und für die Terme vom Grad 2 wird sogar in etwa die Güte der Anpassung der Fälle E.1 bzw. C.1 erreicht. Oberhalb von Grad 3 jedoch steigen die Differenzen zunehmend an und die Abbildung der Signalenergie in die Lösungsraum führt auf Abweichungen des gelösten Schwerefeldmodells, die klar oberhalb des erwarteten Fehlerniveaus liegen.

Anhand der Fälle D.1 und E.1, die Extremfälle darstellen, ergibt sich, dass eine gleichzeitige Unterparametrisierung im Näherungsfeld und im Lösungsraum besonders nachteilig ist, während eine geringe Überparametrisierung scheinbar unproblematisch ist. Testfall F.1 entspricht eher der tatsächlichen Situation bei der Analyse der Echt Daten. Dort lässt sich eine Unterparametrisierung des Näherungsfeldes durch Verwendung eines genügend hochauflösenden Schwerefeldmodells einigermaßen einfach vermeiden. Hier kann man z.B. auf ein hochauflösendes Kombinationsmo-

dell zurückgreifen, wobei man zweckmässigerweise ein n_{max} , m_{max} etwas oberhalb der erwarteten Sensitivität der Messdaten für die Schwerefeldbestimmung wählt¹⁷.

Damit bleibt als wesentliches Kernproblem ein Abschneidefehler des Lösungsraumes übrig. Da für Echtdata die tatsächliche Sensitivität nur näherungsweise bekannt ist und wie im hier vorliegenden Fall der GRACE-Daten momentan nur ungefähr bestimmt werden kann (siehe Bestimmung der maximalen räumlichen Auflösung des statischen Feldes in Abschnitt 7.1), ergibt sich als Empfehlung, eher einen tendenziell zu großen Lösungsraum anzusetzen. Dafür spricht zumindest das Ergebnis des Falles E.1. Im Rahmen dieser Arbeit wird für das Näherungsfeld wie auch den Lösungsraum ein maximaler Entwicklungsgrad $n_{max} = 150$ gewählt. Dieser Wert ergibt sich anhand der erwarteten Sensitivität der GRACE-Daten aus den Vorflugstudien, zum anderen deutet eine Analyse von Beobachtungsresiduen und dem Signalgehalt berechneter Schwerefeldlösungen diesen Wert als plausible obere Grenze an. Ein weiterer Aspekt ist, dass die notwendigen Rechenzeiten zur Berechnungen der Näherungsbahnen und insbesondere der Normalgleichungssysteme im Hinblick auf die Auswertung möglichst langer Zeitreihen im Rahmen bleiben.

¹⁷Dies setzt natürlich voraus, dass die Koeffizienten der kurzweiliger Signalanteile - dort wo die Sensitivität der Satellitendaten aufhört - nicht grob fehlerhaft sind.

5.6. Ablaufschema

Auf der Grundlage der Parametrisierung der Näherungsbahnen nach Tabelle 5.3 und der Hintergrundmodelle und Referenzsysteme nach Tabelle 5.2 erfolgt nun die Verarbeitung des GRACE-Beobachtungsmaterials im Zeitraum 02/2003 - 02/2006 zur Berechnung von monatlichen und Langzeit-Schwerefeldmodellen nach dem in Abbildung 5.15 gezeigten Ablaufschema.

In **Schritt 1** werden mittels iterativer Bahnanpassung an das Datenmaterial verbesserte Näherungswerte des Bewegungsproblems bestimmt sowie Ausreißer in den hoch-niedrig GPS-SST-Daten entfernt (*GPS-SST Data Screening*). Abbildung 5.16 stellt diesen Schritt detaillierter dar. Gesuchte Bahnparameter sind in diesem Schritt Orts- und Geschwindigkeitsvektor zur Anfangsepoche t_A für GRACE-A/B, Additionskonstanten und Skalierungsfaktoren der Akzelerometer sowie GPS-SST-Phasen-Mehrdeutigkeiten (GPS-Ambiguities). Das zugrundeliegende Kräftemodell der als bekannt vorausgesetzten Bewegungsanteile umfasst für die gravitativen Anteile nach Tabelle 5.2 das statische Feld, Erd-, Atmosphären- und Ozeangezeiten, atmosphärisch-ozeanische Kurzzeitmassenvariationen, säkulare Driftraten in \bar{C}_{20} , \bar{C}_{30} und \bar{C}_{40} , Potentialvariationen wegen der Erdrotation (siehe Anhang B) sowie die Gravitationswirkung von Sonne, Mond und weiteren Planeten (Mars, Merkur, Venus, Saturn, Jupiter). Die nicht-konservativen Kräfte werden über die Akzelerometermessungen eingeführt, wobei entsprechende Näherungswerte für Additionskonstanten und Skalierungsfaktoren - soweit bekannt - an den Daten angebracht wurden. Weiterhin werden allgemein-relativistische Effekte entsprechend den IERS-Konventionen [McCarthy und Petit, 2004] berücksichtigt.

Da in diesem Schritt möglichst genaue Näherungswerte bestimmt bzw. Ausreisser in den GPS-SST-Messungen plausibel eliminiert werden sollen, werden zusätzlich empirische Kräfte ein-

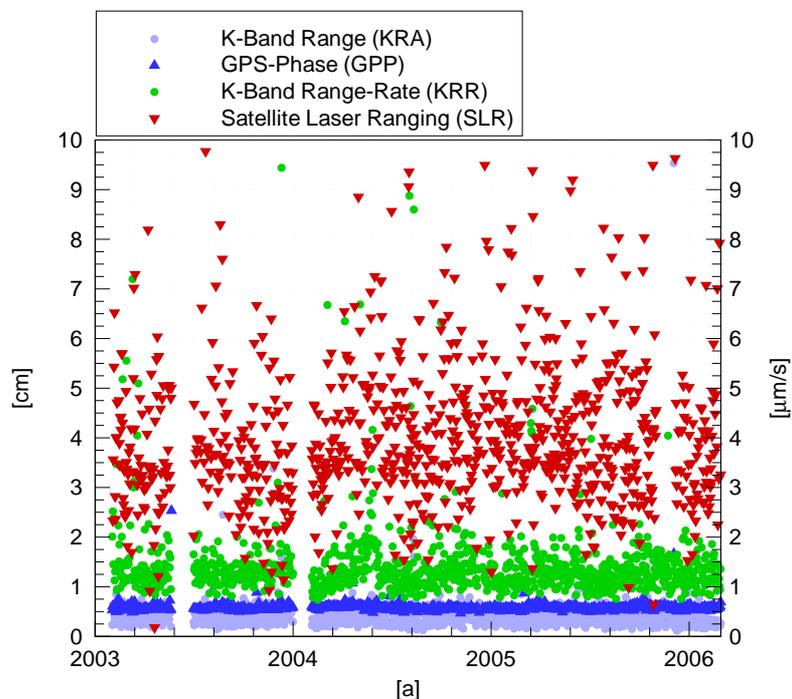


Abbildung 5.13.: RMS-Werte Bahnanpassung **Schritt 1** (Abb. 5.15), bogenweise über den Zeitraum 02/2003 - 02/2006. Quasi-reduziert-dynamische Bahnbestimmung allein aus GPS-SST-Daten. K-Band- und SLR-Beobachtungen sind heruntergewichtet (vgl. Abb. 5.16). Mittelwerte RMS über 1158 Bögen: $m_{GPP} = 0.57 \text{ cm}$, $m_{KRA} = 0.34 \text{ cm}$, $m_{SLR} = 3.8 \text{ cm}$, $m_{KRR} = 1.26 \text{ } \mu\text{m/s}$.

geführt. Diese sollen in Anlehnung an den Ansatz der reduziert-dynamischen Bahnbestimmung zur Reduktion etwaiger Modellierungsfehler, insbesondere im Gravitationsfeld, dienen. Entsprechend wird eine zeitlich dichte Parametrisierung empirischer Störbeschleunigungen mit einer Frequenz von $1/\text{Umlauf}$ und $2/\text{Umlauf}$ in allen drei Bewegungsrichtungen verwendet. Zur Plausibilitätskontrolle werden die Range- und Range-Rate-Messungen des K-Band-Instruments sowie verfügbare SLR-Passagen, stark heruntergewichtet, in der Bahnanpassung mitgeführt. Da die K-Band- und insbesondere die SLR-Messungen unabhängig von den GPS-SST-Beobachtungen sind und wegen der niedrigen Gewichtung keinen Einfluss auf die Bahnbestimmung haben, geben RMS-Werte der Residuen dieser Observablen einen Hinweis auf die äußere Genauigkeit der Bahnbestimmung allein aus den GPS-SST-Messungen. Abbildung 5.13 zeigt Zeitreihen der Residuen der verschiedenen Beobachtungstypen je Bogen über den Untersuchungszeitraum von Februar 2003 bis Februar 2006. Geht man davon aus, dass die SLR-Beobachtungen genähert die absolute radiale Bahngenauigkeit widerspiegeln und die Relativentfernung durch die K-Band-Range-Messungen repräsentiert wird, so ergibt sich demnach für die äußere Genauigkeit der Radialkomponente der Bahnen ein $\sigma_{radial} \approx 4$ cm und für die des Relativabstandes ein $\sigma_{\rho} \approx 3.4$ mm.

Ausgehend von den verbesserten Anfangswerten aus Schritt 1 erfolgt in **Schritt 2** die Berechnung der Näherungsbahnen für die Schwerefeldbestimmung (vgl. Abb. 5.17). Die empirischen Kräfte werden abgestellt, so dass sich die zu erwartenden Modellierungsfehler im statischen Feld bzw. die nicht modellierten Feldvariationen (z.B. wegen Hydrologie) als Systematiken in den Residuen der GPS-SST- und der K-Band-SST-Beobachtungen bemerkbar machen. Zur Herstellung der Linearität muss wiederum eine iterative Bahnanpassung vorgenommen werden, d.h. die gesuchten Bahnparameter werden durch Ausgleichung an das Datenmaterial unter Einfluss der Modellfeh-

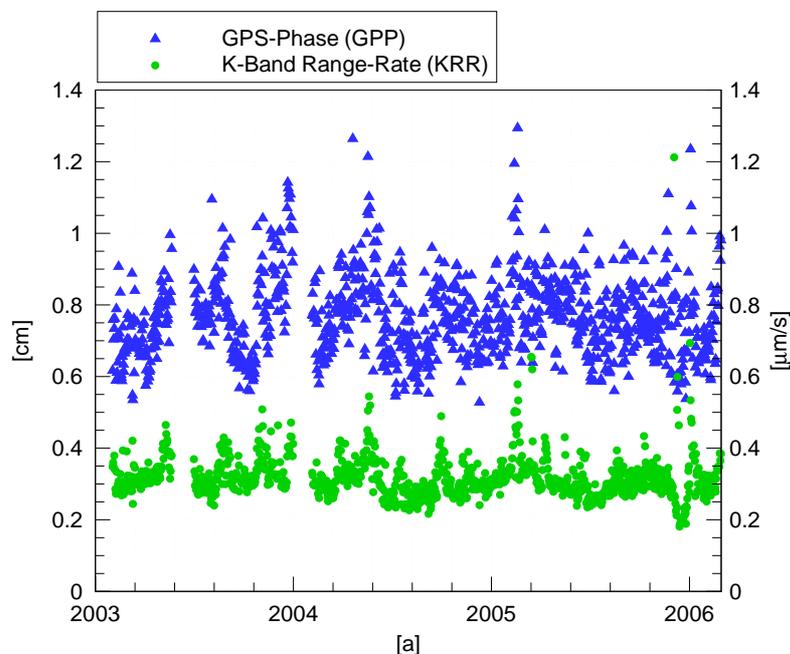


Abbildung 5.14.: RMS-Werte der Bahnanpassung **Schritt 2** (Abb. 5.15), bogenweise über den Zeitraum 02/2003 - 02/2006. Näherungsbahnen auf der Basis von GPS-SST- und K-Band- Range-Rate Beobachtungen vor Schwerefeldbestimmung (vgl. Abb. 5.17). Mittelwerte RMS über 1158 Bögen: $m_{GPP} = 0.76$ cm, $m_{KRR} = 0.31$ $\mu\text{m/s}$.

ler angepasst. Wegen dieser Fehler ergeben sich Residuenwerte, die erwartungsgemäss oberhalb des tatsächlichen Genauigkeitsniveaus der Beobachtungsgrößen liegen. Für die Gewichtung der Beobachtungen kann daher i.a. zunächst nicht deren tatsächliches Genauigkeitsniveau verwendet werden, sondern es müssen zunächst geringere Genauigkeiten, bzw. daraus resultierend geringere Gewichte, angenommen werden, damit der Ausgleichsprozess zur Berechnung der Näherungsbahn konvergiert. Der Übergang auf das tatsächliche Genauigkeitsniveau zur Gewichtung der Beobachtungen geschieht im Zuge der iterativen Verbesserung der Stokes-Koeffizienten. Wesentlich ist dagegen eine plausible relative Gewichtung der GPS- und KRR-SST-Daten, da bei korrekter relativer Gewichtung das absolute Genauigkeitsniveau a-posteriori durch die geschätzte Gewichtseinheit $\hat{\sigma}_0$ festgelegt wird.

Nach Erreichen der Konvergenz der Bahnanpassung in Schritt 2 erfolgt in **Schritt 3** die Aufstellung des Normalgleichungssystems (4.9) je Bahnbogen. Hierzu werden durch numerische Integration die Variationsgleichungen (Gleichung 4.29) gelöst und partielle Ableitungen gemäss Gleichung (4.27) entlang der in Schritt 2 bestimmten Näherungsbahn zu den Beobachtungszeitpunkten berechnet. Dies beinhaltet insbesondere die Berechnung der partiellen Ableitungen für alle Schwerefeldkoeffizienten des Näherungsmodells aus Schritt 1 bzw. Schritt 2 bis zum maximalen Entwicklungsgrad $N_{max} = 150$. Entsprechend entsteht in Schritt 3 der größte numerische Aufwand.

In **Schritt 4** werden die bogenweisen Normalgleichungssysteme gemäss (4.15) zu einem Gesamtsystem akkumuliert. Im Falle der Monatslösungen werden maximal 30 bzw. 31 innerhalb eines Kalendermonats liegende bogenweisen Normalgleichungssysteme summiert (*Monats-NGL*). Für Langzeitmodelle werden n solcher Monats-NGLen akkumuliert. Vor der Akkumulation der bogenweisen NGLen werden nicht explizit interessierende Parameter (interne Unbekannte, hier Anfangswerte und GPS-Ambiguitäten) aus dem jeweiligen NGL-Systemen reduziert (siehe Gleichung (4.16)).

Schließlich erfolgt in **Schritt 5** die Berechnung der Stokes-Koeffizienten bzw. Zuschläge zu den Näherungswerten sowie sonstige Parameter (Akzelerometer- und K-Band-Parameter) gemäss Gleichung (4.10) nach der Inversion der vollständigen Normalgleichung **N**.

Nach diesem Schema wurden im Zeitraum 02/2003 - 02/2006 35 Monatslösungen berechnet (vgl. Tab. 5.6). Es fehlen in der Zeitreihe die Monate 06/2003 und 01/2004 wegen fehlender Akzelerometerdaten. Abweichungen von der nominellen Tageszahl sind auf Datenlücken zurückzuführen, so dass eine Auswertung von Bögen < 8 h nicht sinnvoll möglich ist.

Tabelle 5.6.: Berechnete Monatslösungen im Zeitraum 02/2003 - 02/2006. Anzahl der verwendeten Datentage je Monatslösungen

Monat/Jahr	2003	2004	2005	2006	Bemerkungen	
Januar	‡)	‡)	28	22	*) Einschränkungen in der Bodenspurüberdeckung wegen Über-/Ausgang in/aus 61/4-Repeat-Orbit in 09/2004. Zusätzliche Berechnung von regularisierten Modellversionen nach der Methode von Bettapur et al. [2004].	
Februar	20	25	25	23		
März	27	30	29			
April	29	27	28			
Mai	20	27	30			
Juni	‡)	30	27			
Juli	30	29*)	28			†) Einwöchiges Manöver zum Tausch der Flugreihenfolgen von GRACE-A/B. Seit dem 10.12.2005 ist GRACE-B der vorausfliegende Satellit.
August	26	26*)	28			
September	28	29*)	28			
Oktober	29	30*)	27			
November	27	26	27		‡) Nicht ausgewertet wegen größerer Lücken in den L1B-Daten.	
Dezember	29	25	18†)			

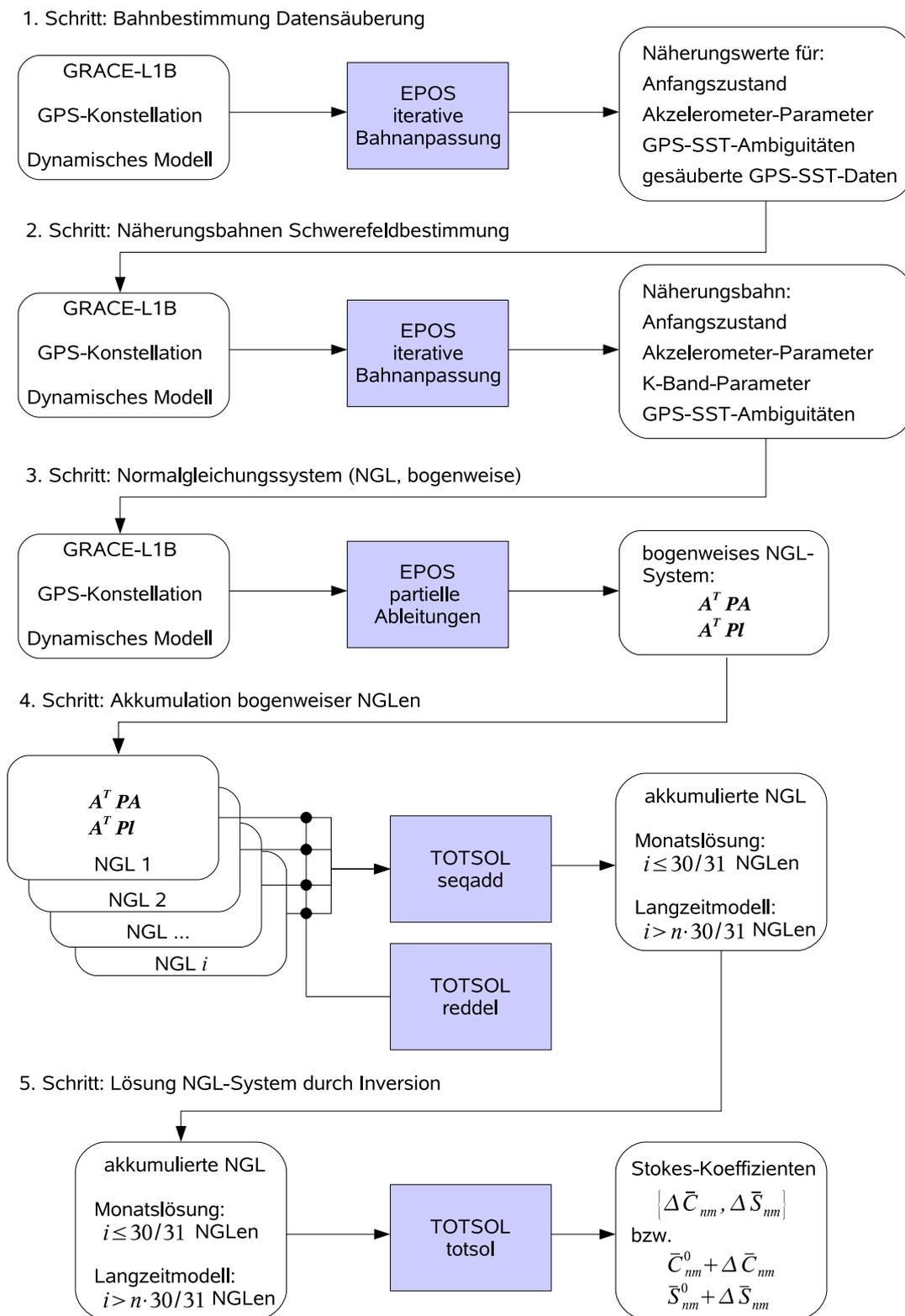


Abbildung 5.15.: Ablauf-Schema der Schwerefeldbestimmung aus GRACE-L1B-Daten. EPOS (Earth Parameter and Orbit System) bezeichnet die GFZ-eigene Software zur Berechnung dynamischer Bahnen und Schätzung der Systemparameter. TOTSOL (TOTAl SOLution) bezeichnet die GFZ-eigene Software zur Manipulation von Normalgleichungssystemen (z.B. Akkumulation, Reduktion von Parametern) sowie die Berechnung der Lösung nach Gleichung (4.10) durch Matrix-Inversion.

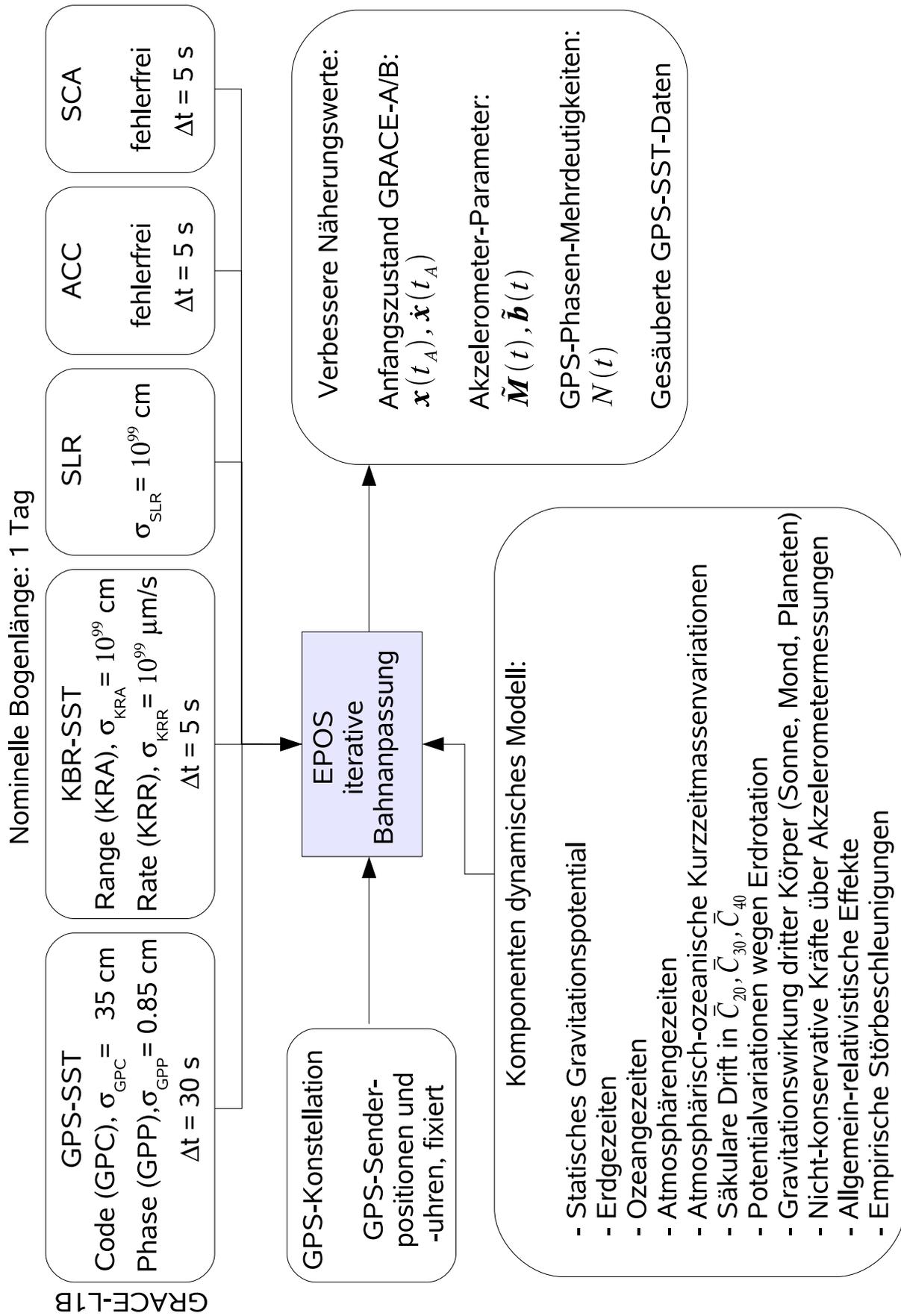


Abbildung 5.16.: Bestimmung von Näherungsbahnen und Säuberung der GPS-SST-Daten **Schritt 1.** Erläuterung siehe Text.

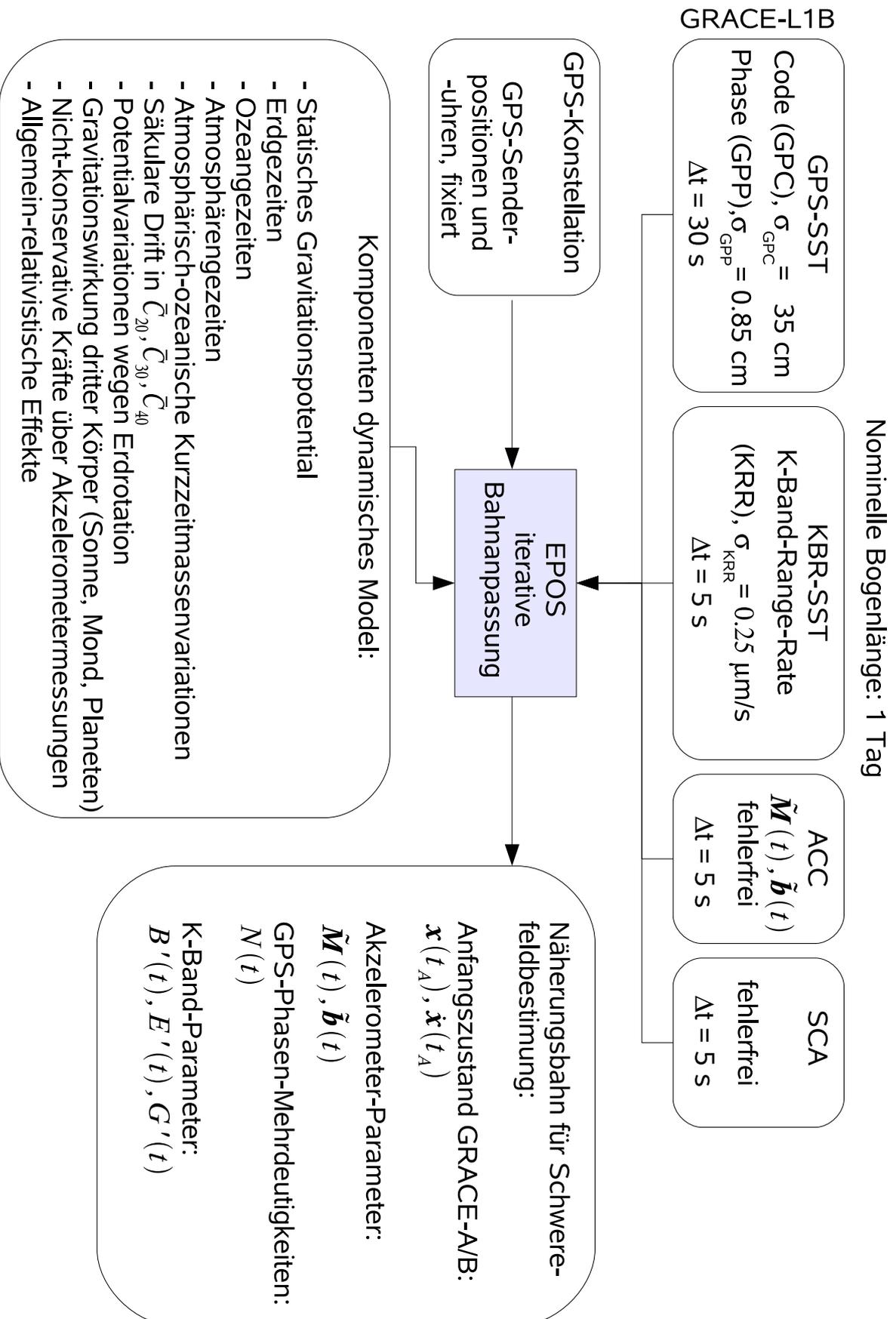


Abbildung 5.17.: Bestimmung Näherungsbahnen für Schwerfeldbestimmung Schritt 2. Erläuterung siehe Text.

6. Qualitätsanalyse

6.1. Innere Genauigkeit

Die innere Genauigkeit der GRACE-Schwerefeldmodelle wird durch die Varianz-Kovarianz-Matrix $\hat{\mathbf{D}}_{\text{xx}}$ beschrieben, die sich im Zuge der Ausgleichung nach Gleichungen (4.14) ergibt. Daraus lassen sich mittels Fehlerfortpflanzung nach Anhang C Genauigkeiten gesuchter Schwerfeldfunktionale bzw. Massenanomalien im Spektral- bzw. Ortsraum berechnen.

Abbildung 6.1 zeigt die Fehler-Amplituden für die Geoidhöhen je Grad nach Gleichung (C.1) unter Verwendung der Diagonalterme der Varianz-Kovarianz-Matrix der jeweiligen Monatslösung im Zeitraum 02/2003 - 02/2006. Zum Vergleich ist die erwartete Genauigkeit der GRACE-Mission (sog. *GRACE Baseline*) berechnet nach der Methode in NRC [1997] für eine Bahnhöhe von 500 km, einem Satellitenabstand von 220 km und einer Genauigkeit der Range-Rate-Messung von $\sigma(\dot{\rho}) = 0.5 \mu\text{m/s}$ dargestellt.

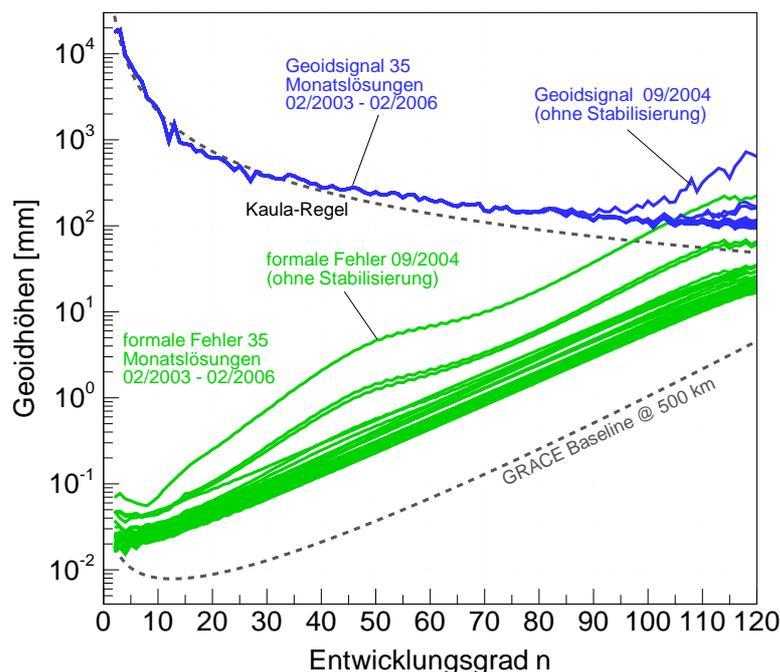


Abbildung 6.1.: Fehler-Amplituden von 35 Monatslösungen basierend auf den formalen Fehlern der Stokes-Koeffizienten. GRACE Baseline-Genauigkeit nach NRC [1997] für eine Bahnhöhe von 500 km, einem Satellitenabstand von 220 km, einer Genauigkeit der Range-Rate-Messung von $\sigma(\dot{\rho}) = 0.5 \mu\text{m/s}$ und einer Missionsdauer von 30 Tagen.

Über das gesamte Spektrum gesehen wird diese Baseline formal etwa bis auf einen Faktor 10 erreicht. Die projizierte Verringerung der Genauigkeit zu den längsten Wellenlängen ist in den formalen Fehlern nur schwach ausgeprägt. Neben einer insgesamt recht homogenen Verteilung

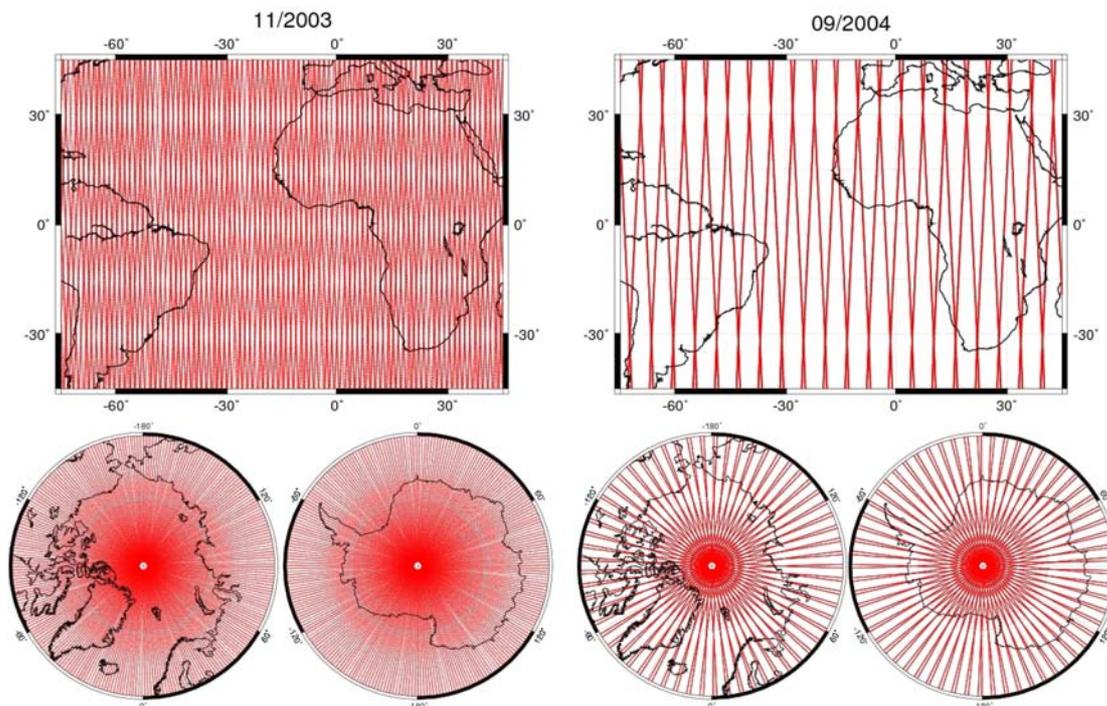


Abbildung 6.2.: Bodenspur-Verteilungen in den Monaten 11/2003 (als Beispiel für eine nominellen Monat) und 09/2004 (61/4-Repeat-Orbit). Darstellung für die Bahn von GRACE-A. Abstand der Bodenspurpunkte: 5 s.

der Fehler-Kurven, deren Streuung mutmaßlich durch die Datenmenge (Anzahl der Tage je Monatslösung) bedingt ist, fallen einige Kurven durch ein deutlich niedrigeres Genauigkeitsniveau als auch einen signifikant unterschiedlichen Verlauf auf. Diese Fehler-Amplituden gehören zu Monatslösungen im Zeitraum Juli bis Oktober 2004, deren Bodenspurverteilung durch den Übergang in bzw. den Austritt aus einem 61/4-Wiederholungsbahn-Zyklus¹⁸ im September 2004 stark eingeschränkt sind (vgl. Abb. 6.2). Durch ein am CSR entworfenes Regularisierungsverfahren [Bettapur et al., 2004] können derartige Monatslösung stabilisiert werden, so dass aus den erhaltenen Stokes-Koeffizienten Schwerevariationen über das übliche Spektrum abgeleitet werden können. Allerdings werden die Schätzergebnisse für die Fehler der Koeffizienten durch die verwendete Bedingung in der Regularisierung auf Null gezwungen, so dass die daraus ableitbaren Genauigkeitsmaße unbrauchbar sind. Im Hinblick auf die Beurteilung der Fehlermaße der Monatslösungen werden die der Monate Juli - Oktober 2004 daher im weiteren separat betrachtet. Die übrigen Monatslösungen wurde ohne eine Regularisierung berechnet (für eine Zusammenstellung siehe Tab. 5.6 auf Seite 81).

Genauigkeitsmaße für Funktionale im Ortsraum ergeben sich durch Fehlerfortpflanzung mittels Gleichungen (C.11) bzw. (C.16), wobei hier hauptsächlich Geoidhöhen sowie Massenanomalien ausgedrückt als Höhen einer massenäquivalenten Wasserschicht betrachtet werden. Da die GRACE-basierten Funktionale sinnvollerweise nur als flächenbezogene Mittelwerte interpretierbar sind und andererseits systematische Fehler unterdrückt werden müssen (vgl. Abschnitt 3.2), werden geglättete Funktionale unter Verwendung der Gauß'schen Filterfunktion für verschiedene Filterradien untersucht. Demnach sind für die Faktoren β_n in (C.11) bzw. (C.16) konkret $\beta_n = w_n R$ (Fehler Geoidhöhen) und $\beta_n = w_n K_n / \rho_w$ (äquivalente Wassersäule) mit den rein grad-abhängigen Entwicklungskoeffizienten w_n der Gauß-Funktion nach Wahr et al. [1998] einzusetzen.

¹⁸61/4 = 61 Umläufe in 4 Tagen.

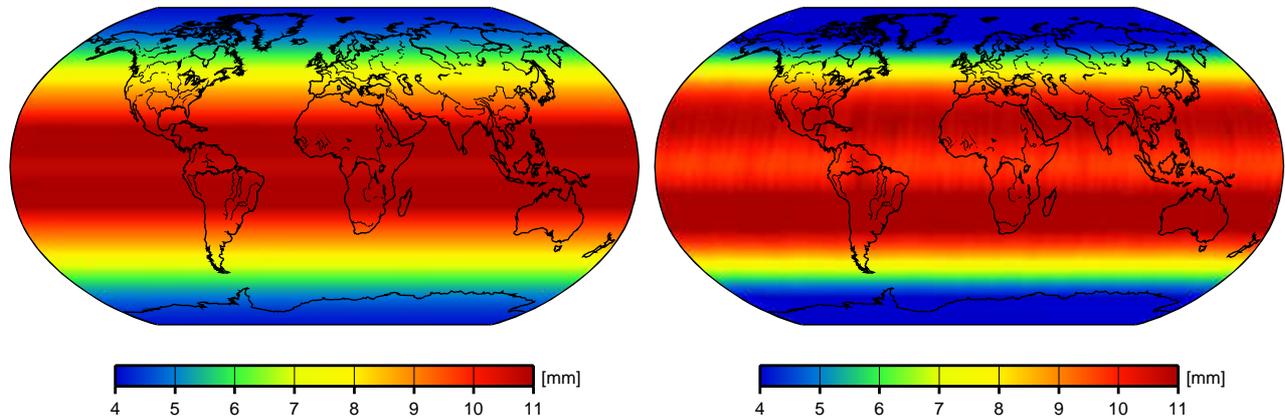


Abbildung 6.3.: Fehlerfortpflanzung für Massen anomalies (äquivalente Wassersäule) unter Verwendung der kompletten Varianz-Kovarianz-Matrix (rechts) und nur der Diagonalelemente (links), jeweils bis $N_{max} = 40$. Dargestellt sind die Mittelwerte von Gauß'schen Mittelwerten für einen Filterradius von 500 km auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter aus 31 Monatslösungen (ohne 07-10/2004).

Abbildung 6.3 zeigt als Beispiel die Fehlerfortpflanzung für Massen anomalies für geglättete Funktionalwerte mit einem Filterradius von 500 km berechnet auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter, gemittelt über die Gitterwerte aus 31 Monatslösungen ohne die Monate 07 - 10/2004. Für die Berechnungen des linken Bildes wurden dabei nur die Diagonalelemente der Varianz-Kovarianz-Matrix verwendet. Im rechten Bild dagegen wurde die komplette Information in der Fehlerfortpflanzung mitgeführt und somit Korrelationen zwischen Stokes-Koeffizienten berücksichtigt. Danach erhält man in beiden Fällen eine ähnliche bänderweise Nord-Südverteilung der Fehler mit der höchsten Genauigkeit im Bereich der Pole und einer Verschlechterung der Genauigkeit in Richtung des Äquators. Diese Verteilung ist anhand der typischen Bodenspürüberdeckungen zu erwarten: zu den Polen verdichtet sich das Sampling wegen der nahezu polaren Bahnneigung und ergibt dadurch eine formal bessere Bestimmung der Feldstruktur, während nördlich und südlich des Äquators die Verteilung der Bodenspuren weniger dicht ausfällt (siehe Abb. 6.2) und dadurch eine geringere Genauigkeit bedingt. Bei Berücksichtigung der Korrelationen ergeben sich neben einer breiteren Ausdehnung des zentralen Bandes zusätzlich meridional orientierte Streifenmuster, die den im Rahmen der Analyse von Zeitreihen von Monatslösungen auftretenden systematischen Fehlern - zumindest näherungsweise - ähneln. Im Hinblick auf die Berechnung globaler Genauigkeitsmaße, d.h. ein gewichteter RMS-Wert ($wRMS$) nach Gleichung (C.7) über alle Pixel, zeigt sich erwartungsgemäss nur ein numerischer Einfluss (siehe Tab. 6.1) für beide Fälle. Lediglich bei Minima und Maxima treten Abweichungen erst bei kleineren Filterradien auf, wobei es insbesondere bei den Fehlern für Massen anomalies¹⁹ durch die Verwendung allein der Diagonalelemente der Varianz-Kovarianz-Matrix zu einer Überschätzung des globalen Minimums kommt.

Abbildung 6.4 (a) zeigt globale Mittelwerte ($wRMS$) für die Fehlerfortpflanzung von Fehlern von Massen anomalies (komplette Kovarianz-Matrix) für die Zeitreihe der 35 Monatslösungen für verschiedene Filterradien. Neben der erwarteten Abnahme der Genauigkeit mit Abnahme des Filterradius erkennt man deutlich die Variabilität der Genauigkeit der Monatslösungen entsprechend Abb. 6.1. Insbesondere wird die eingeschränkte Güte der nicht stabilisierten Lösungen vor und nach der 61/4-Repeat-Bahn im September 2004 gegenüber der i.a. homogenen Qualität der Monatslösungen sichtbar. Anhand von 6.4 (c) und (a) lässt sich die vermutete (Anti-)Korrelation

¹⁹Die deutlichere Ausprägung der Fehler-Strukturen für das Funktional der Massen anomalies hängt mit der Verstärkung der Terme höherer Grade in den grad-abhängigen Faktoren K_n zusammen.

Tabelle 6.1.: Einfluss von Korrelationen nach der (unkalibrierten) Varianz-Kovarianz-Matrix auf die Fehlerfortpflanzung der Genauigkeiten von Geoidhöhen bzw. Massenanomalien. Dargestellt sind Statistiken der Mittelwerte von 31 Monatslösungen (ohne 07-10/2004) für die jeweils Gauß'sche Mittelwerte auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter für verschiedene Filterradien berechnet wurden. Eine breitenabhängige Gewichtung $\cos(\theta)$ für die Berechnung des wRMS-Wertes wurde berücksichtigt. A: Verwendung der vollen Varianz-Kovarianz-Matrix, B: nur Berücksichtigung der Diagonalterme.

Funktional	Filterradius	Einheit	Min.	Max.	wRMS
			A/B	A/B	A/B
Geoid	2000 km	mm	0.02/0.03	0.03/0.03	0.03/0.03
	1500 km	mm	0.03/0.03	0.04/0.04	0.04/0.04
	1000 km	mm	0.04/0.04	0.07/0.06	0.05/0.05
	750 km	mm	0.04/0.05	0.09/0.09	0.07/0.07
	600 km	mm	0.04/0.05	0.11/0.11	0.09/0.09
	500 km	mm	0.04/0.06	0.14/0.14	0.11/0.11
	400 km	mm	0.04/0.07	0.20/0.21	0.16/0.16
Wassersäule	2000 km	mm	0.39/0.43	0.60/0.55	0.51/0.51
	1500 km	mm	0.50/0.56	0.91/0.87	0.76/0.76
	1000 km	mm	0.61/0.82	1.95/1.96	1.59/1.59
	750 km	mm	0.70/1.19	3.61/3.71	2.89/2.89
	600 km	mm	0.81/1.69	5.71/6.04	4.58/4.58
	500 km	mm	0.99/2.58	9.41/10.21	7.55/7.56
	400 km	mm	1.44/4.76	18.87/20.65	14.91/14.95

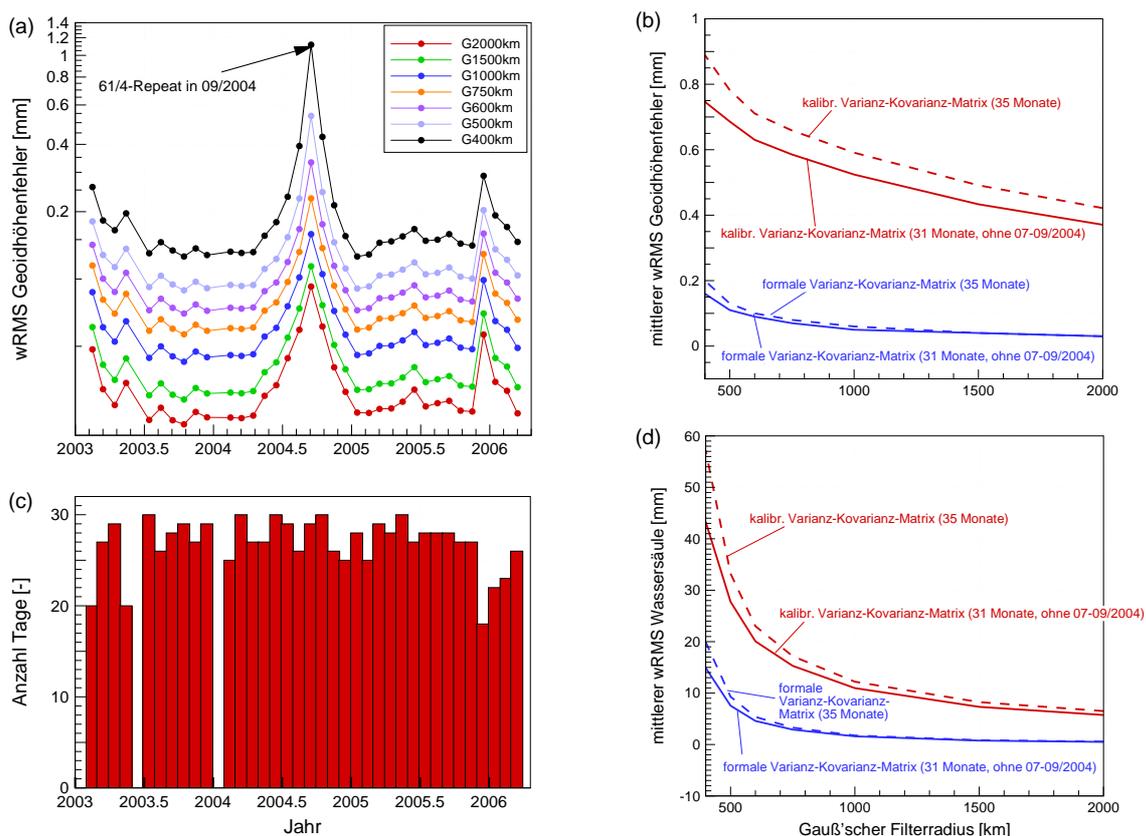


Abbildung 6.4.: (a) Zeitreihen globaler Mittelwerte für die Fehlerfortpflanzung von Fehlern der Massenanomalien (gewichteter RMS, komplette Varianz-Kovarianz-Matrix) für verschiedene Filterradien auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter für 35 Monatslösungen. (b) und (d) formale und kalibrierte Genauigkeit des mittleren wRMS von 35 und 31 Monatslösungen als Funktion des Glättungsradius. (c) Anzahl der Datentage je Monatslösung.

der Genauigkeit der Monatslösungen (außerhalb des Zeitraums der Repeat-Bahn) mit der Menge des eingegangenen Datenmaterials ablesen (z.B. für die Monate ab 12/2005).

Die Graphiken (b) und (d) zeigen aus (a) abgeleitete Mittelwerte für wRMS-Genauigkeiten der Monatslösungen in Abhängigkeit vom Filterradius, wobei alle 35 Monatslösungen bzw. nur 31 Monatslösungen (ohne 07-10/2004) berücksichtigt wurden. Im Falle der Verwendung der formalen Varianz-Kovarianz-Information ist der Einfluss der Fehler der Monatslösungen 07-10/2004 auf die Abschätzung der mittleren Genauigkeit der GRACE-Monatslösungen eher gering und macht sich erst im kurzwelligen Bereich bemerkbar. Für die Fehlerabschätzungen auf der Grundlage kalibrierter Fehler (siehe Abschnitt 6.2) ergeben sich jedoch deutlich pessimistischere Ergebnisse bei Verwendung aller 35 Monatslösungen.

6.2. Äußere Genauigkeit

Da die mit den formalen Varianz-Kovarianz-Matrizen der Monatslösungen abgeleiteten Fehlermaße insgesamt als zu optimistisch betrachtet werden müssen, sind Untersuchungen zur Beurteilung/Ableitung einer äußeren Genauigkeit vorzunehmen. Hierzu stehen Vergleiche von GRACE-basierten Schwerefeldfunktionalen mit externen, unabhängigen Schwerefunktionalen sowie die Anwendung der GRACE-Modelle in Bahntests zur Verfügung. Aufgrund der Beschränkungen der externen Daten in Hinblick auf eine globale Verteilung, Güte und Homogenität gegenüber den mit GRACE berechneten Modellen, können die Vergleiche die äußere Genauigkeit nur eingeschränkt beschreiben. Ähnliches gilt für die üblichen Bahnanpassungstests von verschiedenen geodätischen Satelliten, die bedingt durch die begrenzte Sensitivität der verschiedenen Missionen, im wesentlichen nur Qualitätsverbesserungen eines mehr oder minder statischen Feldes zeigen. Für die Ableitung realistischer Fehlermaße wird daher ein Verfahren basierend auf Zeitreihen der GRACE-Monatslösungen herangezogen, bei dem die enthaltenen hydrologisch bedingten, jahreszeitlichen Feldänderungen durch Anpassung einer Sinus-Funktion genähert entfernt werden. Anhand der verbleibenden residualer Feldänderungen wird damit eine Kalibration der formalen Varianz-Kovarianz-Matrizen vorgenommen.

Vergleiche mit Funktionalen aus externen Datensätzen

Diese stehen zum einen in Form von altimeter-basierten Schwereanomalien (Freiluft-Anomalien) der US National Imaging and Mapping Agency (NIMA) zur Verfügung, die zur Berechnung von EGM96 [Lemoine et al., 1998] verwendet wurden. Zum anderen werden Vergleiche zwischen Geoidhöhen abgeleitet aus den Satellitenmodellen und einem ozeanischen Geoidmodell (Meereshöhen aus CLS01 [Hernandez et al., 2001] reduziert um die Meerestopographie aus ECCO [Stammer et al., 2002]) berechnet. Zur Beurteilung der Güte in Abhängigkeit von der Wellenlänge werden die Vergleiche basierend auf Blockmittelwerten mit verschiedenen Blockgrößen ($5^\circ \times 5^\circ$, $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ und $1.5^\circ \times 1.5^\circ$) durchgeführt. Abbildung 6.5 zeigt wRMS-Werte der Differenzen je Monatslösung. In Tabelle 6.2 ist der resultierende, globale Mittelwert der wRMS-Werte über alle 35 bzw. nur den 31 Monatslösungen angegeben.

Wie im Falle der Ergebnisse auf der Grundlage der formalen Fehler in Abschnitt 6.1, Abb. 6.4(a) zeigen diese Vergleiche neben der allgemeinen Homogenität der GRACE-Monatslösungen die Verringerung der Güte für die nicht-stabilisierten Monatslösungen im Bereich der Wiederholungsbahn im September 2004. Die allgemeine Abnahme des Signalgehalts der Modelle für kleinere Wellenlängen wird durch die Reduzierung der Blockgrößen sichtbar. Im langwelligen Bereich sind die Statistiken der Vergleiche jedoch praktisch identisch und können daher nicht zu einer detaillierten Beurteilung der individuellen Monatslösung verwendet werden, zumal die beobachteten Diskrepanzen weit oberhalb des erwarteten Signals für Geoid- bzw. Schwerevariationen liegen. Wie externe Untersuchungen zeigen, decken die GRACE-Modelle in diesem Wellenlängenbereich

Tabelle 6.2.: Mittelwerte der Vergleiche von 35/31 GRACE-Monatslösungen mit altimeter-basierten Geoidhöhen (N , 'CLS01 minus ECCO' ozeanisches Geoid) und Schwereanomalien (Δg , NIMA Schwereanomalien) für $5^\circ \times 5^\circ$, $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ und $1.5^\circ \times 1.5^\circ$ Blockmittelwerte.

	wRMS (dN), cm			wRMS ($d\Delta g$), cm		
	$5^\circ \times 5^\circ$	$2.5^\circ \times 2.5^\circ$	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	$5^\circ \times 5^\circ$	$2.5^\circ \times 2.5^\circ$	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$
Global (35 Monate)	11	18	39	0.32	2.36	6.43
Global (31 Monate)	11	14	27	0.31	1.52	4.44

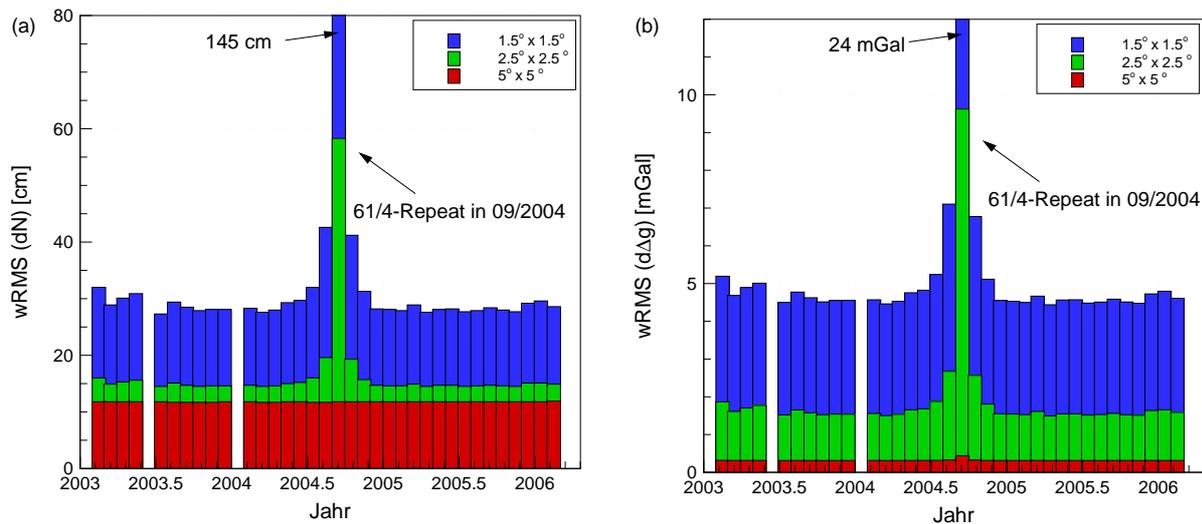


Abbildung 6.5.: Vergleiche der 35 GRACE-Monatslösungen mit (a) altimeter-basierten Geoidhöhen ($N, 'CLS01 \text{ minus } ECCO'$) und (b) Schwereanomalien ($d\Delta g, NIMA$). Dargestellt ist der wRMS von Differenzen von Blockmittelwerten auf verschiedenen Gittern.

insgesamt eher systematische Fehler in den externen Daten auf, als die Daten umgekehrt zur Validierung der GRACE-Modelle verwendet werden können.

Bahntests

Eine weitere klassische Möglichkeit zur Untersuchung von Schwerefeldmodellen liegt in der Verwendung der Modelle für eine dynamische Bahnbestimmung geodätischer Satelliten. Hierzu wird auf der Basis des Beobachtungsmaterials zu den jeweiligen Satelliten eine dynamische Bahnanpassung unter Verwendung des identischen Datenmaterials, Parametrisierung, Störkraftmodelle, etc. für variierende Schwerefeldmodelle durchgeführt. Der RMS der Beobachtungsdaten spiegelt dann die Genauigkeit der Bahnbestimmung wider und sollte bei sonst fehlerfreier Modellierung in der Größenordnung der Beobachtungsgenauigkeit der Daten liegen. Im Rahmen dieser Arbeit werden Bahntests für 10 geodätische Satelliten inklusive CHAMP und GRACE in Bahnbögen von 1.5 - 8 Tagen Länge berechnet. Die verwendeten Satelliten überdecken dabei Bahnhöhen weniger als 400 km (GFZ-1, CHAMP) bis zu 5600 - 5800 km (LAGEOS-1/2) mit Bahnneigungen von 52° (GFZ-1) bis 89.5° (GRACE), vgl. Tabelle 6.4. Entsprechende Ergebnisse sind für verschiedene GRACE-only Langzeitmodelle sowie zwei Multi-Satelliten-Kombinations-Schwerefeldmodelle der Vor-CHAMP/GRACE-Ära in Tabelle 6.3 dargestellt.

Der Vergleich der verschiedenen GRACE-only Langzeit-Schwerefeldmodellen mit den Ergebnissen der alten Kombinationsmodelle zeigt die hohe Güte der GRACE-basierten Modelle, die die Qualität der bisher auf die jeweils beteiligten Satelliten angepassten Multi-Satelliten-Kombinationsmodelle erreichen bzw. teilweise sogar unterbieten. Der Tuning-Effekt der alten Modelle wird anhand der hohen Residuen-Statistiken der Satelliten, die nicht in das jeweilige Modell eingeflossen sind deutlich. Beispiele hierfür sind Daten von GFZ-1, die nicht in EGM96 enthalten sind, aber in GRIM5 oder eben Daten der neuen Missionen CHAMP und GRACE, die weder in GRIM5-C1 noch EGM96 enthalten sind. Mit jeweils aktuellsten Versionen von GRACE-Modellen (EIGEN-GRACE04S, diese Arbeit, EIGEN-GL04S [Schmidt et al., 2006b] und GGM02S [Tapley et al., 2005]) ergeben sich nahezu identische Ergebnisse, die somit alle eine hochgenaue Bahnbestimmung künstlicher Erdsatelliten erlauben.

Tabell 6.3.: Bahnanpassung geodätischer Satelliten in Abhängigkeit vom Schwerfeldmodell. RMS Laser-Residuen in cm. Max. Entwicklungsgrad stets N_{max}
 = 120. Die getesteten Bahnhöhen sind für alle am GFZ berechneten Schwerfeldmodellen nicht in diesen enthalten.

GFZ GRACE-only Modelle	GFZ-1	STEL	STARL	AJI	LAG-1/2	ERS-2	ENVISAT	WESTPAC	CHAMP	GRACE
EIGEN-GRACE01S (39 Tage)	13.5	3.4	2.7	3.5	1.1/1.0	5.9	6.3	-	6.0	7.5
EIGEN-GRACE02S (110 Tage)	14.3	3.2	2.7	3.2	1.1/1.0	5.5	4.5	-	5.8	5.6
EIGEN-GRACE03S (376 Tage)	14.0	3.0	2.7	3.2	1.1/1.0	5.5	4.4	4.1	5.7	5.6
EIGEN-GRACE04S (937 Tage)	13.9	2.9	2.6	3.1	1.1/1.0	5.3	4.2	4.0	5.6	5.3
Externe GRACE-only Modelle										
EIGEN-GL04S*) (700 Tage, Schmidt et al. [2006b])	13.6	3.0	2.6	3.1	1.1/1.0	5.3	4.3	4.0	5.4	5.2
GGM02S (363 Tage, Tapley et al. [2005])	14.3	3.2	2.4	3.2	1.1/1.0	6.0	4.3	4.2	5.3	5.4
Kombinationsmodelle										
GRIM5-C1 [Gruber et al., 2000]	14.7	3.1	2.7	3.3	1.1/1.1	5.5	4.5	-	6.2	217
EGM96 [Lemoine et al., 1998]	24.7	6.7	3.2	4.0	1.2/1.2	9.2	7.1	-	81	70

STEL = Stella, STARL = Starlette, AJI = Ajisai, LAG = LAGEOS

*) Enthält LAGEOS-Daten über den gleichen Datenzeitraum wie GRACE-Daten.

Tabell 6.4.: Bahn-Charakteristika der getesteten Satelliten

Mission	Bahnhöhe [km]	Bahnneigung [°]	Exzentrizität	Bemerkung
GFZ-1 *) (**) †)	385	52	0.0000	*) Passiver Satellit.
Stella *)	815	99	0.0206	***) Bahnhöhe zum Missionsbeginn.
Starlette *)	815	50	0.0206	†) Erhaltung der Bahn durch Manöver.
Ajisai *)	1485	50	0.0010	†) Vergleicht am 23.06.1999.
Lageos-1 *)	5850	110	0.0045	
Lageos-2 *)	5625	53	0.0135	
WESTPAC *)	835	98	0.0000	
ERS-2 †)	800	99	0.0010	
ENVISAT †)	800	98	0.0017	
CHAMP **)	474	87.5	0.0040	
GRACE **)	500	89.5	0.0050	

Quelle: http://ilrs.gsfc.nasa.gov/satellite_missions/list_of_satellites/index.html

Bezüglich der Entwicklung der Genauigkeit von GRACE-only-Modellen zeigt der Vergleich der GFZ-eigenen EIGEN-GRACE-S-Reihe von EIGEN-GRACE01S bis EIGEN-GRACE04S im allgemeinen nur eine geringfügige Verringerung der Residuen-Statistiken gegenüber EIGEN-GRACE01S-Modell. Lediglich bei ENVISAT, CHAMP und GRACE ergeben sich mit EIGEN-GRACE02S noch größere Verbesserungen. Mit nachfolgenden Modellen, die durch die Hinzunahme weiteren Datenmaterials vermutlich verbessert sind bzw. mit dem jeweils vorhergehenden Modell eine bessere Näherung im Zuge der Linearisierung des Funktionalmodells verwenden, werden zwar tendenziell Verbesserungen sichtbar, die aber als nicht signifikant betrachtet werden können. Dies bedeutet einerseits, dass bereits auf der Basis weniger GRACE-Daten (EIGEN-GRACE01S ist aus 39 Tage Daten abgeleitet) signifikante Modellverbesserungen erzielt werden können, die das Datenmaterial von gut zwei Dutzend Satelliten über drei Jahrzehnte wie sie in das EGM- und die GRIM-Modelle eingeflossen sind, ersetzen. Andererseits heben die geringfügigen Änderungen der Statistiken die mangelnde Sensitivität der Missionen hervor, die bei dem gegenwärtigen Genauigkeitsniveau mögliche Modellverbesserungen höchstens tendenziell widerspiegeln. Dies zeigt sich auch bei Testrechnungen für Monatsmodelle (nicht dargestellt), die Ergebnisse in der Größenordnung des GRACE-only Langzeit-Schwerefelds liefern, das als Näherungsmodell in der Prozessierung der Monatslösungen verwendet wurde.

Bemerkung 1: Die gegenüber dem erwarteten Genauigkeitsniveau von SLR-Beobachtungen von 1 - 2 cm insgesamt höheren RMS-Werte resultieren neben möglichen Modellierungsfehlern im Schwerefeld auch aus Problemen bei der Beschreibung nicht-konservativer Kräfte. Ein Beispiel hierfür sind die hohen Residuen des passiven SLR-Satelliten GFZ-1 im Bereich von 14 cm, während für CHAMP in vergleichbarer Bahnhöhe eine Anpassung von knapp 6 cm erreicht wird.

Bemerkung 2: Da die SLR-Beobachtungen bei den meisten der getesteten Satelliten die alleinige oder zumindest dominierende Bahnbeobachtungsgröße ist, sind die erhaltenen Statistiken nicht unabhängig von der jeweils verwendeten Gewichtung der SLR-Beobachtungen. Lediglich bei CHAMP und GRACE wird die Bahnbestimmung allein mit GPS-SST-Daten durchgeführt und die SLR-Beobachtungen werden heruntergewichtet in der Bahnanpassung mitgeführt. Dadurch repräsentieren deren Statistiken eine äußere Genauigkeit für die Güte der Bahnanpassung bzw. des Schwerefeldmodells.

Bemerkung 3: Die gewählte Parametrisierung und sonstige Modellierung ist, um einen relativen Vergleich zu gewährleisten, zu einem bestimmten Zeitpunkt eingefroren worden. Aus historischen Gründen basieren die untersuchten Bögen auf einer Bahnbestimmung für die Schwerefeldbestimmung, die erwartungsgemäß nicht einer bestmöglichen Bahnanpassung auf dem Niveau des Beobachtungsrauschen entspricht. Insofern könnten die Statistiken z.B. durch Änderungen in der Parametrisierung vermutlich etwas reduziert werden.

Kalibration der Genauigkeiten der Monatslösungen

Eine Vorgehensweise zur Ableitung äußerer Genauigkeiten besteht in der Analyse von residuellen Signalen der Zeitreihe von GRACE-Monatslösungen, bei denen die dominierenden jahresperiodischen hydrologisch-induzierten Feldschwankungen reduziert sind. Diese Anteile können durch Anpassung einer Sinusfunktion mit Jahresfrequenz an die Zeitreihe der Stokes-Koeffizienten der Monatslösungen oder von Funktionalen auf Gittern im Ortsraum (je Pixel) berechnet werden (vgl. Wahr et al. [2005]). Alternativ können residuale Anteile von Monatslösungen, die exakt 12 Monate auseinanderliegen, untersucht werden [Schmidt et al., 2006c]. Im weiteren werden

zur Kalibration Koeffizientenresiduen der Zeitreihe der Monatslösungen nach Anpassung der Sinusfunktion herangezogen und daraus grad-abhängige Skalierungsfaktoren der formalen Varianz-Kovarianz-Matrizen analog Schmidt et al. [2006a] abgeleitet.

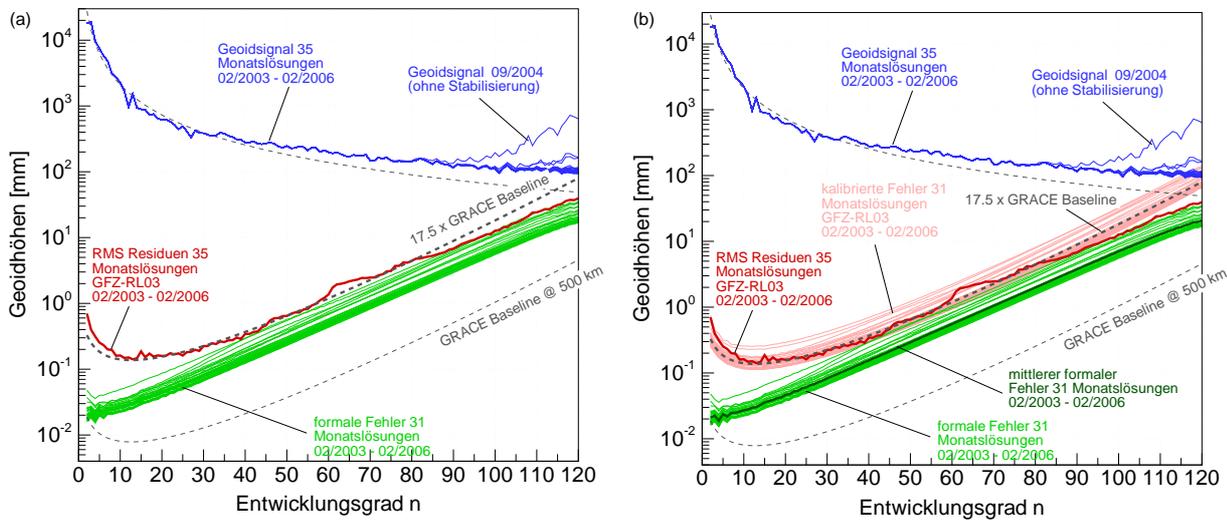


Abbildung 6.6.: (a) Gradamplituden der formalen Fehler von 31 Monatslösungen (ohne 07-09/2004) im Vergleich zum RMS der Monatslösungen, nachdem in den Stokes-Koeffizienten ein bestangepasster Trend, Bias sowie eine Sinus-Funktion mit Jahresperiode reduziert wurden, sowie einer skalierten Version der GRACE-Baseline-Kurve. (b) Gradamplituden der monatsweise individuell kalibrierten Fehler, berechnet analog Schmidt et al. [2006c].

Abbildung 6.6 (a) zeigt für diese Variante die Gradamplituden des RMS der Koeffizientenresiduen der 35 Monatslösungen²⁰ als Näherung für den mittleren Modellfehler. Gegenüber den Fehler-Gradamplituden, basierend auf den formalen Varianzen der Stokes-Koeffizienten, sind die beobachteten RMS-Amplituden etwa um einen Faktor 2 größer. Im Vergleich zur projektierten Baseline-Genauigkeit zeigt sich eine bemerkenswert qualitativ gute Übereinstimmung über das gesamte Spektrum. Insbesondere ergibt sich die erwartete geringere Genauigkeit in den längstwelligen Entwicklungskoeffizienten. Eine Bestimmung eines konstanten Skalierungsfaktors zwischen der RMS-Kurve und der Baseline-Kurve durch Minimierung der Differenz zwischen einer skalierten Version der Baseline-Kurve und den RMS-Gradamplituden im Bereich von $n=2$ bis $n=40$ liefert einen Wert von 17.5. Danach wäre eine GRACE-Monatslösung im Mittel 17.5 mal ungenauer als eine Lösung auf der Grundlage der Baseline-Annahmen. Während im Bereich von $n=15$ bis $n=80$ die Übereinstimmung zwischen skalierten Baseline und RMS-Amplituden augenscheinlich hoch ist, sind größere Abweichungen im langwelligen Bereich $n < 15$ und im kurzwelligen Bereich $n > 80$ sichtbar. Eine Überschätzung des Fehlerniveaus anhand der skalierten Baseline scheint für die hochfrequenten Anteile der Monatslösungen akzeptabel, da in diesem Frequenzbereich ohnehin keine interpretierbaren Signale mehr erwartet werden. Ein vermutlich zu konservatives Fehlermaß wäre eher unkritisch. Im langwelligen Bereich ist die potentielle Unterschätzung der Modellfehler anhand der skalierten Baseline problematischer, da in diesem Frequenzband die Feldvariationen detektiert werden und verlässliche Genauigkeitsangaben benötigt werden. Die sichtbare Diskrepanz könnte nun einerseits auf eine eingeschränkte Güte der Fehlerabschätzung auf der Grundlage der Baseline hindeuten. Die Verwendung der so skalierten Baseline liefert

²⁰Für die Monate 07-10/2004 werden die mittels der CSR-Methode regularisierten Monatslösungen verwendet.

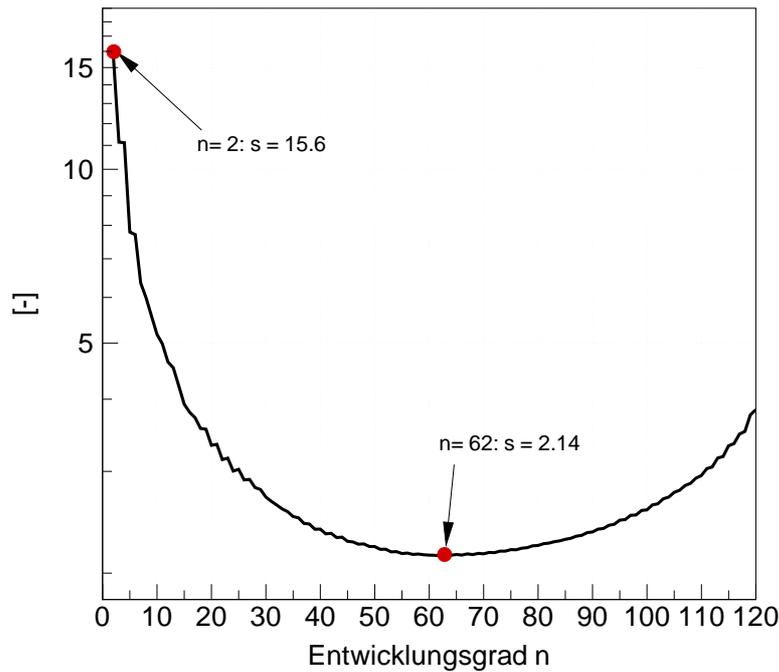


Abbildung 6.7.: Skalierungsfaktoren zwischen der mittleren formalen Fehler-Gradamplituden von 31 Monatslösungen und der skalierten Baseline-Kurve.

somit möglicherweise zu optimistische Genauigkeiten in diesem Frequenzbereich. Andererseits werden durch die Reduktion der rein jahresperiodischen Signale offensichtlich nicht alle möglichen plausiblen Feldvariationen erfasst (vgl. Abb. 6.9), so dass die Abschätzung mittels der RMS-Amplituden in diesem Frequenzbereich eher zu pessimistisch sein könnte. Der qualitative Verlauf der skalierten Baseline-Kurve kann daher durchaus als plausibel angesehen werden und wird im weiteren als mittlere Genauigkeit der Monatsmodelle herangezogen.

Analog der Vorgehensweise in Schmidt et al. [2006a] werden in einem nächsten Schritt Skalierungsfaktoren zwischen der Kurve der mittleren, formalen Fehler-Gradamplituden der GFZ-Monatslösungen (siehe Abb. 6.6(b)) und der skalierten Baseline berechnet. Mittels der so bestimmten Faktoren (siehe Abb. 6.7) werden anschliessend die formalen Varianz-Kovarianz-Matrizen der einzelnen Modelle gradweise skaliert und ergeben somit monatsweise verschiedene kalibrierte Fehler. Abbildung 6.6 (b) zeigt die resultierenden kalibrierten Fehler-Gradamplituden.

Mit der nur gradweisen Skalierung liefern die Berechnungen der Fehlerfortpflanzung im Ortraum qualitativ vergleichbare Ergebnisse wie in Abschnitt 6.1 basierend auf der formalen Fehlerinformation. Abbildung 6.8 zeigt die Verteilung der mittleren Fehler für Massenanomalien auf Basis der Fehlerfortpflanzung der kalibrierten Versionen der monatlichen Varianz-Kovarianz-Matrizen (31 Monate ohne 07-10/2004) analog zu Abb. 6.3. Es ergibt sich die typische Nord-Süd-Struktur mit den meridionalen Streifen im Falle der Verwendung der Kovarianzen. Die Verwendung allein der Diagonalterme zeigt die Überschätzung der minimalen Fehler im Bereich der Pole, wie sie bereits in Tab. 6.1 sichtbar ist. Bei der Berechnung mittlerer globaler wRMS-Werte ergeben sich für den Fall der Diagonalterme und der zusätzlichen Berücksichtigung der Kovarianzen wie im Fall der formalen Fehler nur numerische Unterschiede, so dass die Berücksichtigung allein der Varianzen der Stokes-Koeffizienten zur Berechnung globaler Genauigkeitseigenschaften genügt.

Die resultierenden mittleren globalen Fehlermaße (wRMS) als Funktion des Filtradius sind be-

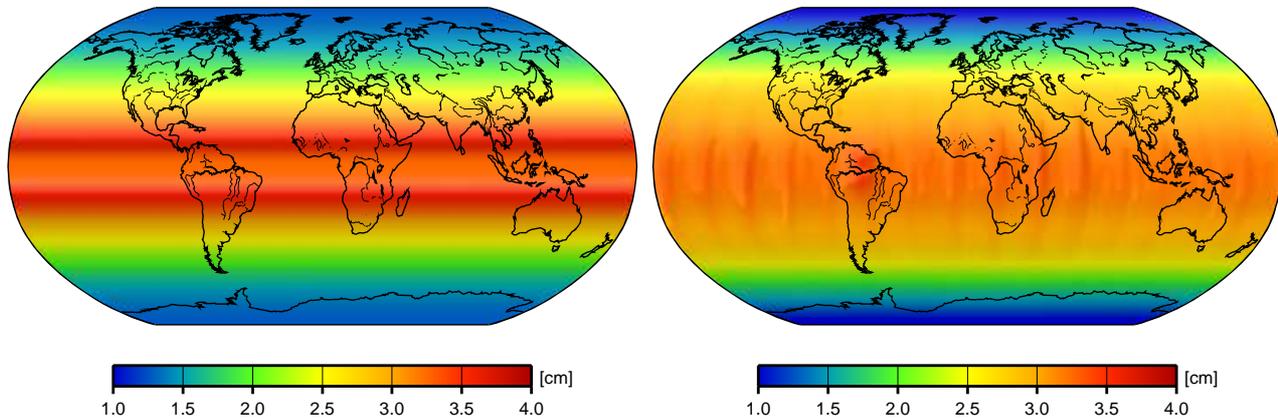


Abbildung 6.8.: Fehlerfortpflanzung für Massenanomalien unter Verwendung der kompletten Varianz-Kovarianz-Matrix (rechts) und nur der Diagonalterme (links) analog zu Abbildung 6.3, jedoch für die kalibrierte Varianz-Kovarianz-Matrizen. Gauß'sche Mittelwerte mit 500 km Filterradius auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter.

reits in Abb. 6.4 (b) und (d) dargestellt. Bei Berücksichtigung der Monate 07-10/2004 ergeben sich um etwa 17 % geringere Genauigkeiten als im Fall der übrigen 31 Monate. Betrachtet man diese Version basierend auf den 31 Monaten als repräsentativ für eine durchschnittliche Monatslösung, so ergeben sich für die Genauigkeiten von Massenanomalien: 0.7 cm, 1.1 cm, 1.5 cm und 2.7 cm für Halbwellenlängen von 1500, 1000, 750 und 500 km. Gegenüber der Ergebnisse in Wahr et al. [2005, vgl. Abb. 3] auf der Basis von 22 CSR-Modellen (1.0 cm/1500 km, 1.5 cm/1000km, 2.1 cm/750 km, 3.9 cm/500 km) ergibt sich hier eine um etwa 30 % höhere Genauigkeit.

Vergleich mit residueller Signal-Variabilität im Ortsraum

Zur Beurteilung der kalibrierten Varianz-Kovarianz-Information kann die residuale Signal-Variabilität der Zeitserien von GRACE-Monatslösungen im Ortsraum herangezogen werden (siehe z.B. Wahr et al. [2004], Horwath und Dietrich [2006], Schmidt et al. [2006a]). Danach sollten Zeitreihen von Funktionalen im Ortsraum aus GRACE, in denen je Pixel die beobachteten hydrologisch induzierten Signalanteile durch Anpassung einer strengen jahresperiodischen Funktion inklusive einer Langzeitdrift und Bias entfernt worden sind, idealerweise rein modellfehler-bedingte Restsignale zeigen.

In Abbildung 6.9 (a) - (f) sind entsprechende Ergebnisse für residuale Geoidhöhen-Variationen und Massenanomalien als RMS-Werte je Pixel für geglättete Funktionale mit verschiedenen Filterradien für die 35 Monatslösungen²¹ dargestellt. Neben klar geophysikalisch-klimatologisch induzierten Restsignalen (z.B. im Bereich von Einzugsgebieten wie dem Amazonas oder die Massenvariationen im Bereich des nördlichen Polarmeeres) zeigen sich mit abnehmenden Filterradius die streifenförmigen Fehlersignale der Monatslösungen. Insbesondere über den Ozeanen können relativ große Amplituden beobachtet werden, die sich nicht plausibel als zeitvariable Schwerefeldeffekte interpretieren lassen und somit als Fehler betrachtet werden sollten.

Diese zeigen im Gegensatz zur Verteilung der Fehler auf Basis von Varianz-Kovarianz-Matrizen (formal und kalibriert) wesentlich komplexere Strukturen als erwartet (vgl. Abb. 6.8 mit Abb. 6.9 (f)). Offensichtlich sind Beiträge der in Abschnitt 3.2 angedeuteten Fehlerquellen (mögliche Sensorfehler, potentielle Korrelationen von Beobachtungsgrößen, Defizite in Parametrisierung der Näherungsbahnen, räumlich-zeitliches Aliasing, etc.) nicht in der Varianz-Kovarianz-Information

²¹Die Monatsmodelle 07-10/2004 wurde durch stabilisierte Lösungen in den Berechnungen ersetzt.

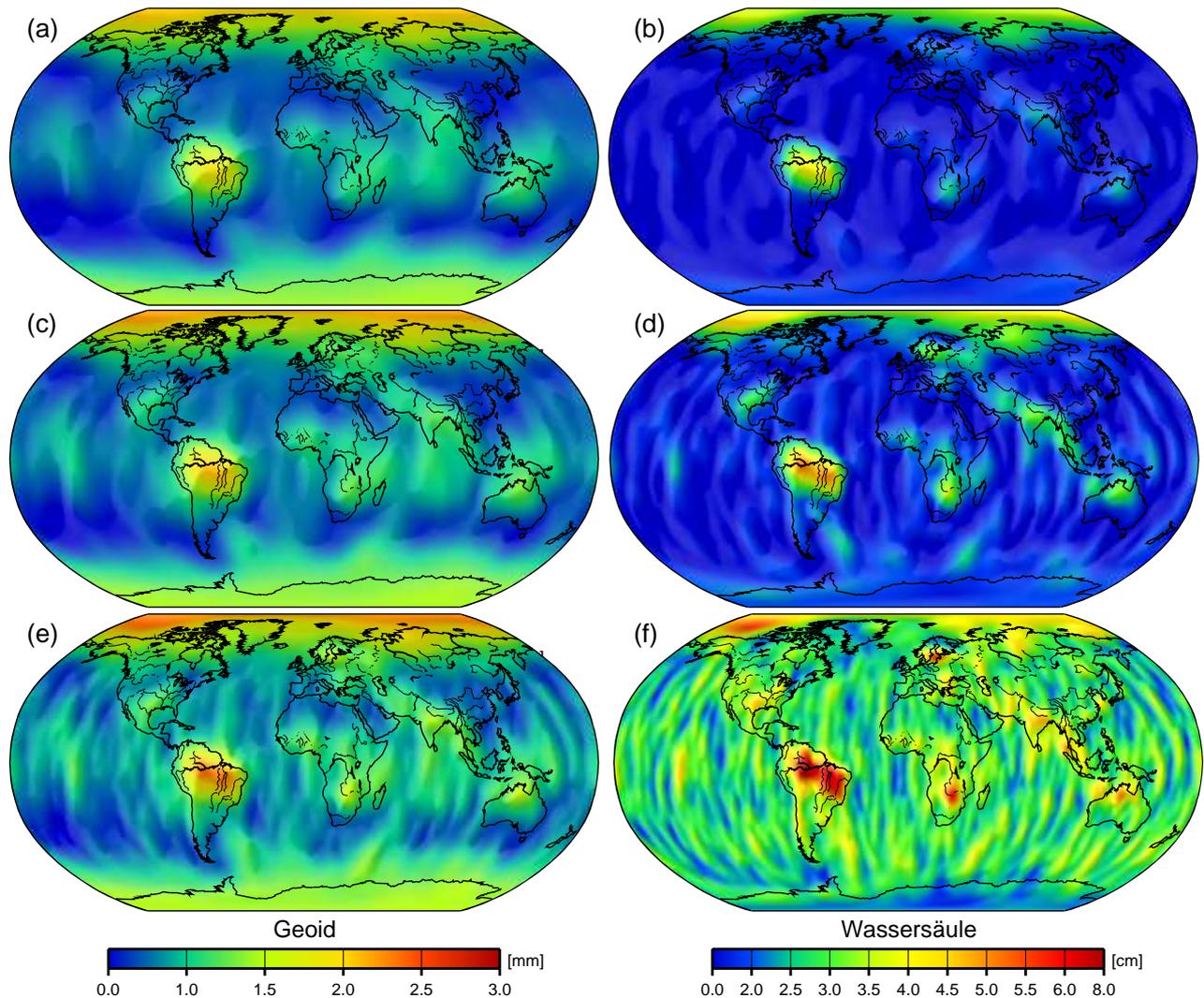


Abbildung 6.9.: Residuale Signal-Variabilität der 35 Monatslösungen gegenüber ihrem Mittel, wobei je Gitterpunkt ein Bias, ein Trend und ein streng jahresperiodisches Signal reduziert wurden. Dargestellt sind Gauß'sche Mittelwerte auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter für Geoidhöhen (Bilder (a), (c) und (e)) und Massenäquivalente Wassersäulen (Bilder (b), (d) und (f)). Filterradien (von oben nach unten): 1000 km, 750 km und 500 km.

enthalten. Diese scheint im wesentlichen, wie ein Vergleich mit den monatweisen Bodenspurverteilungen andeutet (siehe Abb. 6.2), nur die Genauigkeit auf Basis der Beobachtungsgeometrie wiederzugeben.

Empirische Verteilungsfunktion der kalibrierten Modellfehler

Für eine Nutzung der kalibrierten Modellfehler zur Ableitung bedeutsamer Konfidenzintervalle benötigt man Kenntnis der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion. Diese kann, wie in Wahr et al. [2005] angedeutet, empirisch mit der Verteilungsfunktion des residualen Signals im Ortsraum bestimmt werden. Analog der dortigen Vorgehensweise wird ein Histogramm über alle Gitterpunkte der Zeitreihe der 35 Monatslösungen berechnet. Entsprechend wird jeder Datenpunkt des residualen Signals durch den im jeweiligen Gitterpunkt erwartenden Fehler der jeweiligen Monatslösung geteilt. Im Gegensatz zu Wahr et al. [2005], wo mittlere Fehler aus der Fehlerfortpflanzung allein der Koeffizientenfehler ohne Kovarianzen berechnet werden, werden hier die individuellen Fehler der Monatslösungen basierend auf der kompletten, kalibrierten Varianz-

Kovarianz-Matrix verwendet. Zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Größe der Kompartimente der Gitterpunkte erfolgt eine breitenabhängige Gewichtung $p_i = \cos \varphi_j$.

Abbildung 6.10 zeigt die resultierenden Histogramme für Gauß'sche Mittelwerte der Massen-anomalien mit einem Filterradius von 750 und 500 km. Die Übereinstimmung mit der erwarteten Normalverteilung, berechnet aus dem Mittelwert und der Varianz des jeweiligen Histogramms, ist augenscheinlich in weiten Teilen gut. Lediglich in einem engen Bereich um Null ergeben sich Beiträge für die das Verhältnis $(r_i/\varepsilon_i)p_i \ll 1$ ist. Ein χ^2 -Test zeigt entsprechend, dass die Verteilungen grundsätzlich nicht als normalverteilt angenommen werden können. Andererseits deuten die vorliegenden Verteilungen darauf hin, dass für eine Vielzahl von Datenpunkten ein zu großer Wert für den kalibrierten Fehler angenommen wird, d.h. dass diese vermutlich zu pessimistisch sind. Danach ergeben sich bei der Ableitung von Konfidenzintervallen anhand der kalibrierten Fehler möglicherweise zu konservative Abschätzungen.

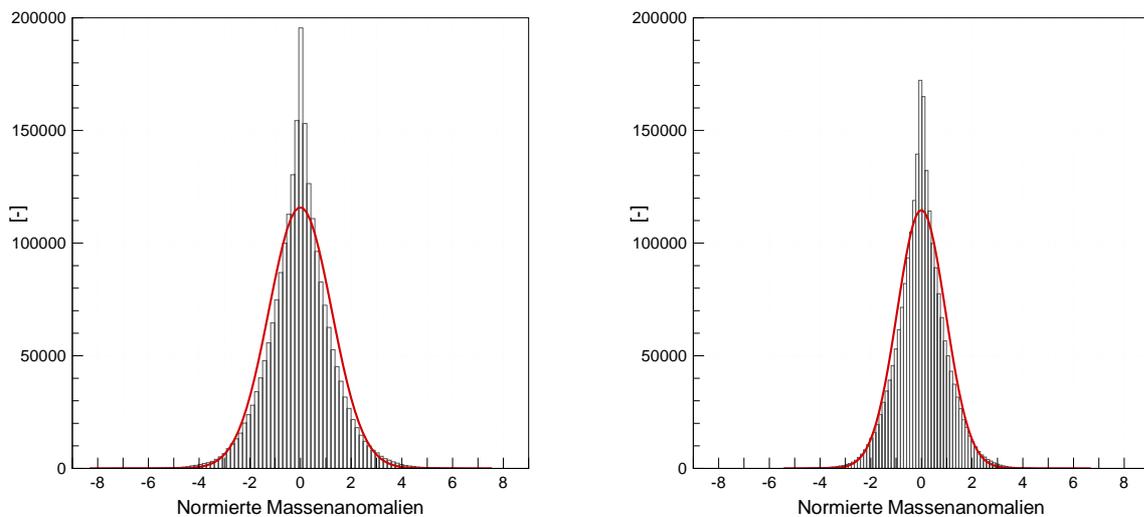


Abbildung 6.10.: Histogramme der residuellen Massen-anomalien (Gauß'sche Mittelwerte auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter; Filterradius 750 km (links) und 500 km (rechts)). Die Residuen wurden mit dem kalibrierten Fehler auf Basis der kompletten Varianz-Kovarianz-Matrix, individuell je Ort und Monatslösung normiert. Es wurde eine breitenabhängige Gewichtung der Datenpunkte verwendet. Normalverteilung berechnet für Mittelwert und Varianz des jeweiligen Histogramms.

Auf globaler Ebene zeigt ein Vergleich der wRMS-Werte des residualen Signals (siehe Tab. 6.5) mit entsprechenden Werten der Fehlerfortpflanzungen mit den kalibrierten Varianz-Kovarianz-Matrizen (siehe Abb. 6.4 (d)) um 10 - 45 % geringere Genauigkeiten als mit den kalibrierten Varianz-Kovarianz-Matrizen erwartet wird.

Tabelle 6.5.: Statistiken residuelle Geoidhöhen bzw. Massen-anomalien Abb. 6.9.

Funktional	Einheit	$r_{1/2} = 1000$ km			$r_{1/2} = 750$ km			$r_{1/2} = 500$ km		
		Min.	Max.	wRMS	Min.	Max.	wRMS	Min.	Max.	wRMS
Geoid	mm	0.4	2.1	0.9	0.4	2.2	1.0	0.4	2.4	1.1
Wassersäule	cm	0.6	4.0	1.6	0.9	5.2	1.9	1.5	7.9	3.0

7. Ergebnisse statisches und zeitvariables Gravitationsfeld

7.1. Statisches Feld

Entsprechend der Vorgehensweise in Abschnitt 5.6 werden Langzeitmodelle auf Basis einer Gesamtakkumulation der verfügbaren monatsweisen NGL-Systeme berechnet (vgl. Schritt 5 Abb. 5.15). Tabelle 7.1 stellt alle bislang berechneten GRACE-only Langzeitmodelle (GFZ-Modelle werden mit EIGEN-GRACE_{xxS} bezeichnet) zusammen. Der Verständlichkeit halber sind zusätzlich die am GFZ berechneten Kombinationsmodelle (GRACE plus terrestrischer und altimetrischer Schwereinformation sowie CHAMP und/oder LAGEOS) aufgelistet²², auf die aber im weiteren nicht eingegangen werden soll. Details zu deren Erzeugung findet man in den angegebenen Referenzen. Im weiteren werden die GRACE-only Modelle EIGEN-GRACE01S bis EIGEN-GRACE04S betrachtet, wobei die aktuellste Version EIGEN-GRACE04S im Zentrum der Untersuchungen steht.

Dieses Modell wurde im Rahmen dieser Arbeit erstellt und basiert auf der Gesamtakkumulation der monatsweisen Normalgleichungen der Monate 02/2003 - 02/2006 und umfasst insgesamt 937 Tage. Die monatsweisen Normalgleichungen wurden entsprechend dem 2-Schrittverfahren (Abschnitt 5.1) mit der Parametrisierung aus Abschnitt 5.3 (Tab. 5.3) und den Standards nach Tab. 5.2 auf der Grundlage der Eintagesbögen nach dem Ablaufschema in Abb. 5.15 erzeugt. Wie die Vorgängermodelle EIGEN-GRACE02S und EIGEN-GRACE03S wird das Modell vollständig bis Grad und Ordnung 150 entwickelt und gelöst. Ausnahmen bilden der Term \bar{C}_{00} und die Koeffizienten des Grades 1, die in allen GRACE-only Lösungen auf ihre Näherungswerte 1 und 0 fixiert werden²³. Die bogenspezifischen Parameter der Eintagesbögen wie Anfangselemente und GPS-Phasen-Mehrdeutigkeiten sowie Akzelerometer- und K-Band-Parameter nach Tab. 5.3 wurden in den bogenweisen bzw. den Monatsnormalgleichungen vor der Gesamtakkumulation reduziert (siehe Gleichungen (4.16) - (4.18) Abschnitt 4.1) und somit nur implizit gelöst. Dadurch wird das resultierende Gesamtsystem mit insgesamt knapp 25000 Unbekannten wesentlich handlicher und kann auf den vorhandenen Großrechenanlagen problemlos invertiert werden. Eine Stabilisierung des Normalgleichungssystems durch ein Regularisierungsverfahren vor der Inversion wurde nicht vorgenommen.

Vergleiche mit EGM96 und EIGEN-CHAMP03S

Für Vergleiche mit einem Multi-Satellitenmodell der Vor-CHAMP-Ära wird EGM96 in der Version als Kombinationsmodell komplett bis Grad und Ordnung 360 herangezogen. Als Referenzmodell der Schwerefeldbestimmung mit CHAMP wird das CHAMP-only Modell EIGEN-CHAMP03S verwendet.

Abbildung 7.1 (a) zeigt Differenz-Gradamplituden für Geoidhöhen zwischen EGM96 gegenüber EIGEN-GRACE04S. Entsprechende Differenz-Gradamplituden zwischen EIGEN-CHAMP03S und

²²Die GGM-Modell-Reihe von CSR umfasst ebenfalls Kombinationsmodelle, die unter den angegebenen Referenzen zu finden sind.

²³Dies gilt für Langzeit- als auch für Monatsmodelle allein aus GRACE-Daten.

Tabelle 7.1.: Globale statische Schwerfeldmodelle der GFZ-EIGEN-GRACE-Reihe sowie externe GRACE-Modelle von CSR, rein CHAMP-basierte Modelle vom GFZ und Multi-Satelliten-/Kombinationsmodelle

Pre-CHAMP Modelle	Beschreibung	N_{max}	Referenz
EGM96S	Multi-Satellitenmodell	70	Lemoine et al. [1998]
EGM96	Kombinationsmodell, d.h. EGM96S plus terrestr./altimetr. Schwerfeld-daten	360	Lemoine et al. [1998]
GRIM5-S1	Pre-CHAMP, Multi-Satellitenmodell	99	Biancale et al. [2000]
CHAMP-only			
EIGEN-CHAMP03S	CHAMP-only Modell (3 Jahre)	120	Reigber et al. [2004]
GRACE-only			
GGM01S	CSR GRACE-only (111 Tage)	120	Tapley et al. [2003]
GGM02S	CSR GRACE-only (14 Monate)	160	Tapley et al. [2005]
EIGEN-GRACE01S	GFZ GRACE-only (39 Tage)	140	Reigber et al. [2003]
EIGEN-GRACE02S	GFZ GRACE-only (110 Tage)	150	Reigber et al. [2005]
EIGEN-GRACE03S	GFZ GRACE-only (376 Tage)	150	nicht veröffentlicht
EIGEN-GRACE04S	GFZ GRACE-only (937 Tage)	150	diese Arbeit
GRACE-Kombinationsmodelle			
EIGEN-CG01C	CHAMP-GRACE-Kombinationsmodell, d.h. EIGEN-CHAMP03S plus EIGEN-GRACE02S plus terrestr./altimetr. Schwerfelddaten	360	Reigber et al. [2006]
EIGEN-CG03C	CHAMP-GRACE-Kombinationsmodell, d.h. EIGEN-CHAMP03S plus EIGEN-GRACE03S plus terrestr./altimetr. Schwerfelddaten	360	Förste et al. [2005]
EIGEN-GL04C	GRACE-LAGEOS-Kombinationsmodell, d.h. GRACE plus LAGEOS plus terrestr./altimetr. Schwerfelddaten	360	Förste et al. [2006]

EIGEN = European Improved Gravity model of the Earth by New techniques

EIGEN-GRACE04S sind in Abb. 7.1 (b) dargestellt. Erwartungsgemäss ergeben sich größere Differenzen für das ältere Multi-Satellitenmodell in Abb. (a). Ausgehend von 2-3 mm Differenz in den längsten Wellenlängen wird ein Maximum um den Grad 50 erreicht, danach fällt die Signalstärke der Abweichungen wieder leicht ab und erreicht ein lokales Minimum etwa bei Grad 110. Danach steigen die Differenzen wieder an. Wie die Signalkurven für die Gradamplituden der beiden Modelle in Abb. (a) andeuten, ist dieser Anstieg zu kürzesten aufgelösten Wellen in EIGEN-GRACE04S auf die abnehmende Schwereinformation in den GRACE-Modellen wegen der zunehmenden Dämpfung des kleinräumigen Schweresignals in der GRACE-Bahnhöhe zurückzuführen, die bei EIGEN-GRACE04S nicht durch eine Regularisierung stabilisiert wird. Geht man davon aus, dass die Modellkoeffizienten in EGM96 im kurzwelligen Bereich wegen der enthaltenen terrestrischen und altimetrischen Schwereinformation grundsätzlich plausibel ist, deutet ein koeffizienterweiser Vergleich zwischen den beiden Modellen in Abbildung 7.2 (a) an, dass im GRACE-Modell tendenziell Koeffizienten oberhalb von Grad und Ordnung 120 von der zunehmenden Dämpfung betroffen sind bzw. in diesem Bereich die Signalinformation der gegenwärtigen GRACE-Daten ausläuft. Im darunterliegenden Spektralbereich dagegen ist davon

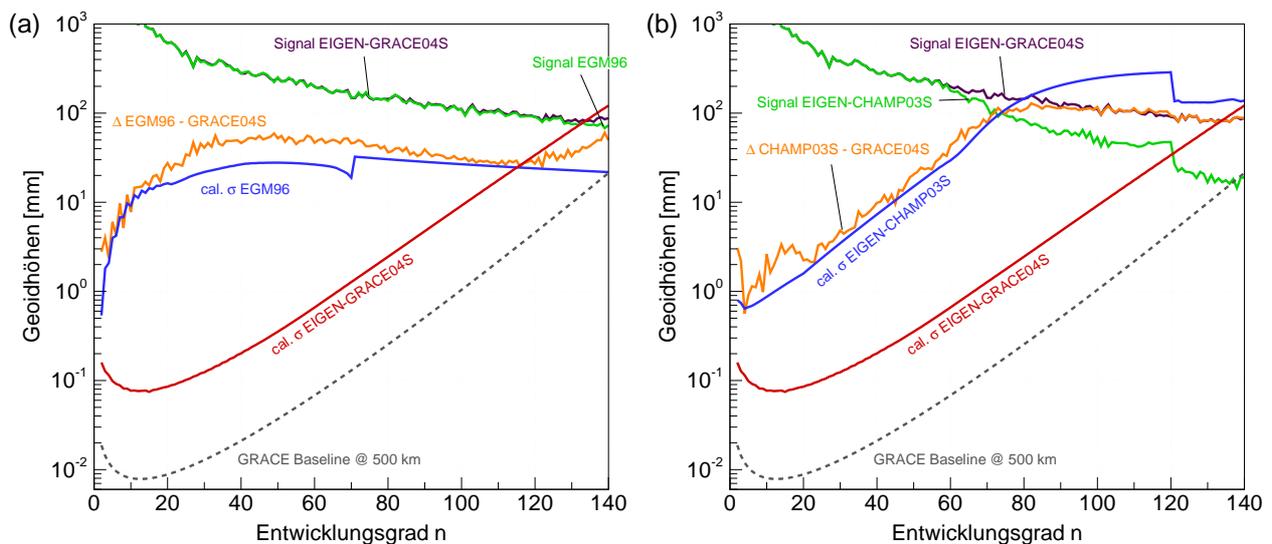


Abbildung 7.1.: Differenz-Gradamplituden in Geoidhöhen für EGM96-EIGEN-GRACE04S (a) und EIGEN-CHAMP03S - EIGEN-GRACE04S (b).

auszugehen, dass die beobachteten Differenzen in Abb. 7.2 (a) im wesentlichen durch fehlende Schwereinformation im EGM96-Modell bedingt sind. Danach lassen sich die Differenzen in diesem Bereich als Verbesserungen mit GRACE interpretieren und der Vergleich deutet an, dass der Hauptbeitrag von GRACE im Bereich bis Grad und Ordnung 90 bis 100 liegt. Die geringen Koeffizienten-Differenzen in Abb. 7.2 (a) zwischen EGM96 und dem GRACE-Modell im Bereich der sektoriellen Terme bis Grad und Ordnung 25 und 30 sowie tesseraler Terme zwischen der Ordnung 10 und 20 bis Grad 25 zeigen den Sensitivitätsbereich der in EGM96 eingegangenen, bisherigen Satellitendaten an.

Entsprechende Vergleiche gegenüber dem rein CHAMP-basierten Modell EIGEN-CHAMP03S zeigen die verbesserte Schwerefeldbestimmung auf der Grundlage der erstmalig mit CHAMP durchgeführten hoch-niedrig GPS-SST-Messungen. Die Differenz-Gradamplituden zwischen dem CHAMP-Modell und EIGEN-GRACE04S (Abb. 7.1 (b)) ergeben im lang- und mittelwelligen Bereich bis Grad 60 wesentlich kleinere Abweichungen (mit Ausnahme Grad 2) als im Vergleich zu EGM96. Der lineare Anstieg der Differenz-Gradamplituden bis Grad 60 ist durch die abnehmende Sensitivität der GPS-SST-Observablen bedingt, die sich auch in der deutlichen Abnahme der Signalamplituden ab dieser Wellenlänge widerspiegelt²⁴. Die Betrachtung der Koeffizientendifferenzen EIGEN-CHAMP03S - EIGEN-GRACE04S der \bar{C}_{nm} -Terme (siehe Abb. 7.2 (b)) ergibt, dass mittels CHAMP ein nahezu vollständiges Spektrum bis Grad und Ordnung 30 sowie Terme bis Grad und Ordnung 65 im Bereich hoher Ordnungen signifikant bestimmt werden können. Oberhalb davon ergeben sich mit GPS-SST-Daten offensichtlich keine wesentlichen Beiträge für statische Schwerefeldmodelle (siehe z.B. auch Koch [2005]).

Im Ortsraum zeigen sich bei Synthese der Koeffizientendifferenzen EGM96- EIGEN-GRACE04S bis $N_{max} = 70$ (ohne Grad-2-Terme) systematische Abweichungen (siehe Abb. 7.3). Im Bereich der Kontinente fallen die Gebiete mit bisher unvollständiger bzw. ungenauer terrestrischer Schwereinformation auf und demonstrieren den grundlegenden Beitrag von GRACE in diesen Bereichen. Beispiele sind die Polregionen (insbesondere Antarktis), Südamerika und Afrika so-

²⁴Die Ursache der Systematiken der Differenz-Gradamplituden etwa bis Grad 20 ist unklar. Identische Vergleiche von EIGEN-CHAMP03S mit externen GRACE-Modellen (z.B. GGM02S) liefern vergleichbare Ergebnisse, so dass die Systematiken mutmaßlich in EIGEN-CHAMP03S enthalten sind.

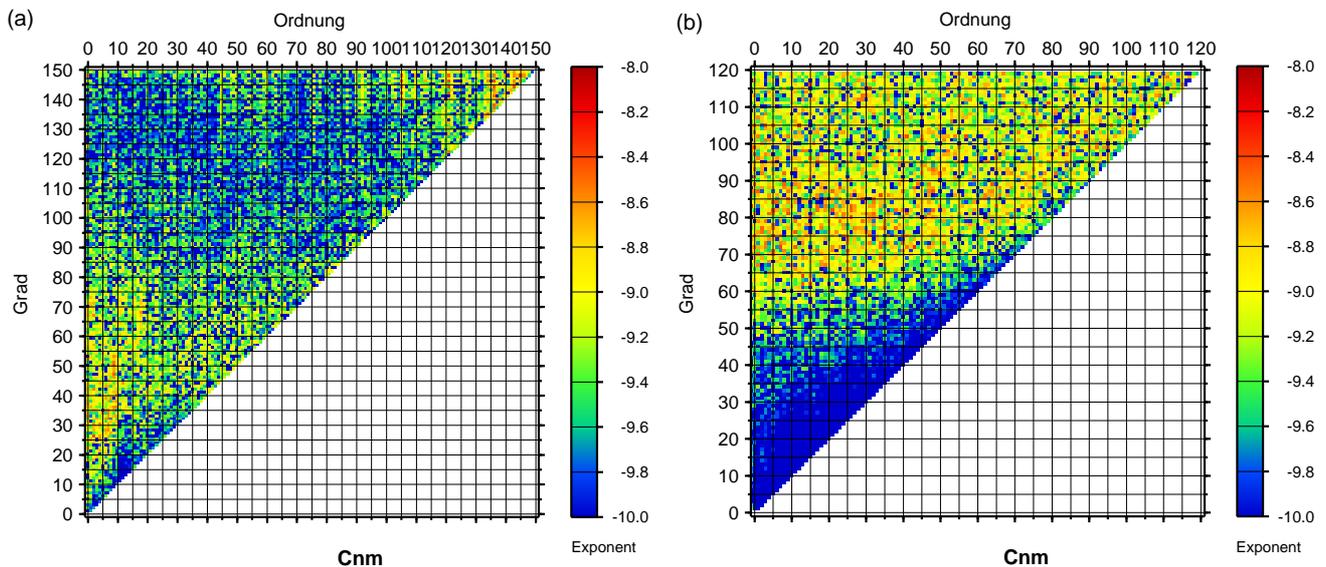


Abbildung 7.2.: Differenzen je \bar{C}_{nm} - Koeffizient als $\log_{10}(\Delta\bar{C}_{nm}) = \bar{C}_{nm}^{EGM96/CHAMP03S} - \bar{C}_{nm}^{GRACE04S}$ für EGM96-EIGEN-GRACE04S (a) und EIGEN-CHAMP03S - EIGEN-GRACE04S (b).

wie die Gebirgsregionen in Asien. Im Bereich der Ozeane ergibt sich ein insgesamt niedrigeres Differenzniveau als über Land (maximales $\Delta_{Ozean} \approx \pm 25$ cm, maximales $\Delta_{Land} \approx \pm 5$ m). Dies liegt an der Verwendung der vergleichsweise homogenen und dichten Altimetrie-basierten Schweredaten in EGM96, wobei allerdings deren Überdeckung aufgrund der Bahneigungen der verschiedenen Altimetermissionen breitenmässig auf einen Bereich von maximal $\pm 81.5^\circ$ beschränkt ist. Dies erklärt die Diskrepanzen im Bereich des Nordpols, die in EGM96 hauptsächlich durch Flug- und Schiffsgravimetermessungen abgedeckt sind. Andererseits resultieren daraus die sichtbaren systematischen Differenzen im Bereich von Tiefseeeräben und den großen Oberflächenströmungssystemen (vgl. Abb. 7.3 (b)), die über die Altimeterdaten in das EGM96 Geoid eingeführt wurden. Das EGM96-Geoid stellt somit kein unabhängiges Geoid für die Bestimmung der dynamischen Meerestopographie dar. Umgekehrt bedeutet das Ergebnis aus Abb. 7.3 (b), dass mit rein GRACE-basierten Modellen und den verfügbaren Altimeterdaten solche Zirkulationssysteme aufgelöst werden können. Eine detaillierte Darstellung erster Ergebnisse zur Bestimmung geostrophischer Strömungen unter Verwendung eines GRACE-Geoids findet man in z.B. Tapley et al. [2003].

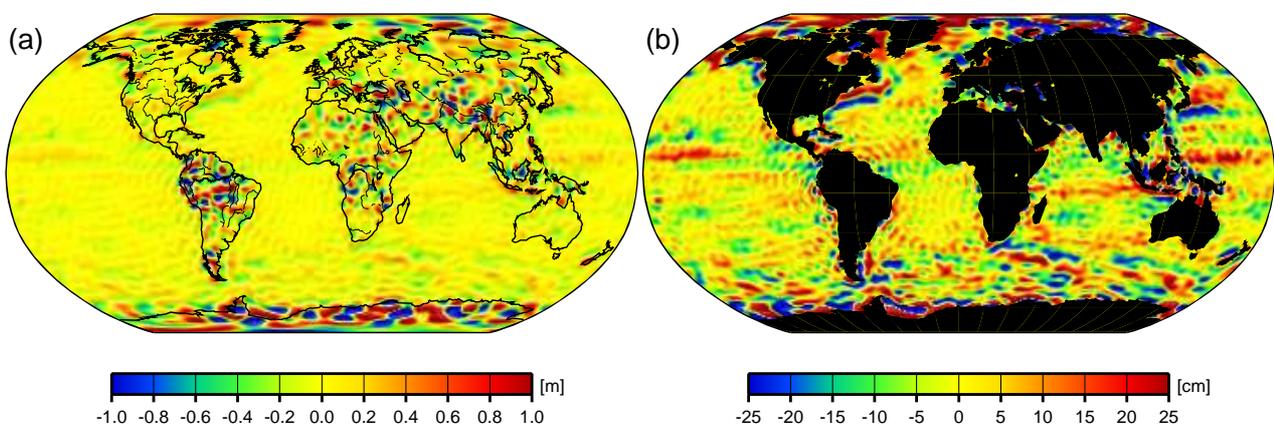


Abbildung 7.3.: Differenzen der Geoidhöhen basierend auf den Modelldifferenzen EGM96 - EIGEN-GRACE04S, global (a) sowie nur über den Ozeanen (b). Maximaler Entwicklungsgrad $N_{max} = 70$ bei der Synthese der Koeffizientendifferenzen. Abweichungen in den Termen vom Grad 2 sind ignoriert.

Entwicklung der EIGEN-GRACE-Modelle

Eine Abschätzung der Entwicklung der EIGEN-GRACE-Modelle im Hinblick auf Steigerungen in der räumlichen Auflösung und der Genauigkeiten soll anhand der Abbildung 7.4 (a) im Spektralraum vorgenommen werden.

Grundlage bilden die Signalamplituden abgeleitet aus den Modell-Koeffizienten sowie deren kalibrierte Genauigkeiten. Letztere werden analog mit dem in Abschnitt 6.2 beschriebenen Verfahren zur Ableitung einer rein grad-abhängigen Skalierung der formalen Varianz-Kovarianz-Matrix des statischen Schwerefeldmodells kalibriert. Zur Bestimmung des Genauigkeitsniveaus bzw. der gradweisen Skalierungsfaktoren werden Differenz-Gradamplituden von internen Teillösungen und Vorgängermodellen herangezogen. In der Anfangsphase zur Berechnung von EIGEN-GRACE01S wurden zunächst Differenzen zu externen Modellen von CSR und JPL verwendet. Bei der Kalibration der Fehlerkurven von EIGEN-GRACE01S und -GRACE02S wurde die dabei erhaltene Variabilität der Differenzen im langwelligen Bereich bis Grad 20 voll beibehalten und erklärt so den charakteristischen Verlauf der Fehleramplituden für diese Modelle in Abb. 7.4 (a). Mit der zunehmenden Stabilisierung der Lösungen und der Annäherung des charakteristischen Verlaufs der Differenz-Amplituden an den prädierten Verlauf der Baseline wurde ab dem Modell EIGEN-GRACE03S eine Anpassung der gradweisen Skalierungsfaktoren an skalierte Versionen der Baseline-Kurve vorgenommen. Dadurch entsteht der glatte Verlauf der Fehlerkurven für EIGEN-GRACE03S und -GRACE04S in Abb. 7.4 (a) über das gesamte Spektrum.

Im kurzwelligen Bereich spiegelt der unterschiedliche Verlauf der Signal- und Fehlerkurven in Abb. 7.4 (a) weitere spezifische Besonderheiten der verschiedenen Modelle wider. Der markante Abfall im Signal- und Fehlerspektrum bei Grad 120 im Fall von EIGEN-GRACE01S liegt beispielsweise am eingeschränkten Lösungsraum für dieses Modell. Aufgrund der geringen Anzahl von Datentagen wurde dieser nur vollständig bis Grad und Ordnung 120 gewählt, ergänzt durch ausgewählte Koeffizienten-Bänder im Bereich der erwarteten resonanten Ordnungen ($m = 16, 32, 48, \dots, 138$). Im Zuge des erweiterten Datenmaterials in den Nachfolgemodellen wurde mit EIGEN-GRACE02S der Lösungsraum auf Grad und Ordnung 150 erhöht.

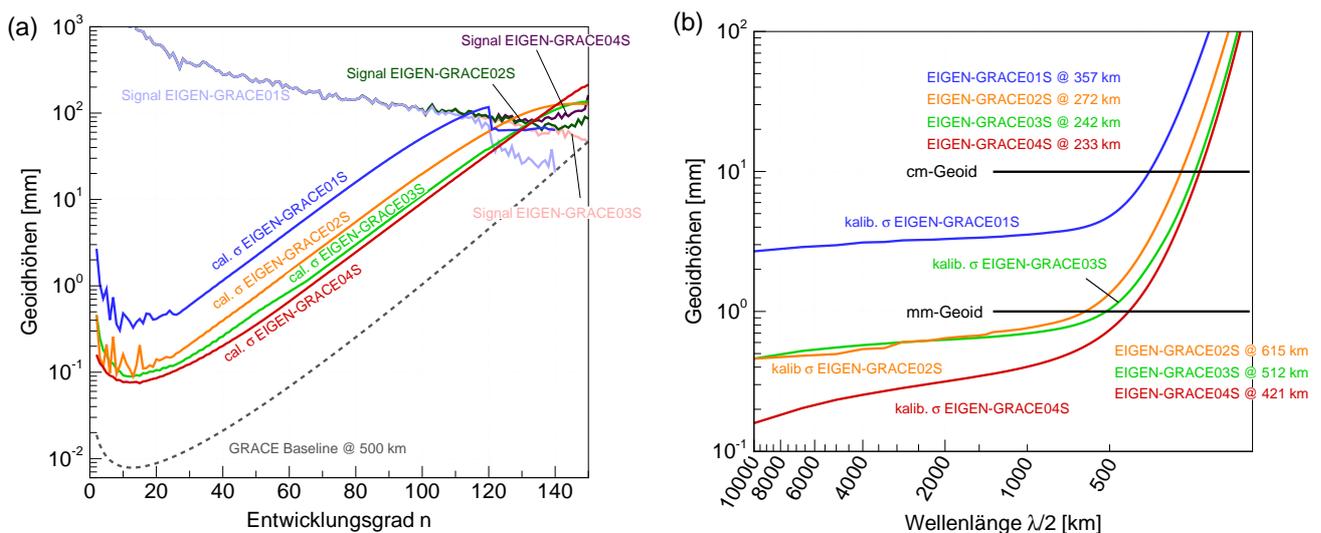


Abbildung 7.4.: Entwicklung der Fehler statischer Langzeitmodelle der EIGEN-Reihe basierend auf GRACE-Daten. (a) Signal- und Fehlergradamplituden (Geoid) reiner GRACE-Modelle (EIGEN-GRACE0XS) pro Grad. (b) Akkumulierte Fehlergradamplituden aus (a) je räumlicher Halbwellenlänge.

Ein weiteres Merkmal der Lösungen EIGEN-GRACE01S bis EIGEN-GRACE03S ist eine Stabilisierung der hochfrequenten Anteile durch Regularisierung der Normalgleichungsmatrix. Hierzu wurde das in Schwintzer et al. [1991] (Abschnitte 3/4, Gleichungen (3.21) und (4.1)) vorgeschlagene Verfahren mit Pseudo-Beobachtungen unter Verwendung der Kaula-Regel für Koeffizienten oberhalb Grad und Ordnung 120 verwendet. Konkret wird je Koeffizient eine Pseudo-Beobachtung vom Typ

$$\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\} = 0 \quad (7.1)$$

mit dem gradabhängigen Gewicht $\sigma_n^2 = k^2 \cdot (10^{-10}/n^4)$ eingeführt, d.h. in Form einer Normalgleichung auf das aus den GRACE-Daten resultierende Normalgleichungssystem addiert. Der Term $10^{-10}/n^4$ ist das Quadrat der bekannten Kaula-Regel, die die Abnahme des mittleren Betrags der Feldkoeffizienten in Abhängigkeit vom Entwicklungsgrad n näherungsweise wiedergibt. Mit dem Faktor k^2 kann eine zusätzliche Gewichtung der Zwangsbedingung vorgenommen werden. Wie der Kurvenverlauf der Signalamplituden zeigt, wurde dadurch insbesondere für EIGEN-GRACE03S eine deutliche Stabilisierung der kurzwelligen Anteile erreicht. Allerdings ist die Einführung einer Bedingung nach Gleichung (7.1) problematisch, da eventuell mit den Daten noch bestimmbare Koeffizienten fälschlicherweise auf Null gezwungen werden bzw. Koeffizienten im lang- und mittelwelligen Bereich verzerrt werden. Bei EIGEN-GRACE04S wurde daher auf eine solche Regularisierung verzichtet, so dass die hohen Frequenzen des Modells nicht durch diese Zwangsbedingung stabilisiert sind. Entsprechend steigen die Signalamplituden für dieses Modell in Abb. 7.4 (a) zu den kürzesten Wellenlängen hin wieder an und die Fehlerkurve läuft im Gegensatz zu denen der anderen Modelle ohne Annäherung an die Signal-Gradvarianzen aus.

Eine Abschätzung der minimalen räumlichen Auflösung der Modelle (bzw. des maximalen Entwicklungsgrades bei vollständiger Bestimmung aus den Satellitendaten) ergibt sich mit dem Schnittpunkt der Signal- und Fehlerkurve des jeweiligen Modells. Dort wird das Verhältnis von Signal zu Fehler - im Sinne eines Signal-zu-Rausch-Verhältnisses (SNR) - ungefähr 1 und die unterhalb des entsprechenden Grades liegenden Modellkoeffizienten können als signifikant bestimmt betrachtet werden, während die Koeffizienten der oberhalb liegenden Grade und Ordnungen mutmaßlich durch Fehler dominiert sind. Entsprechend dieser Argumentation können in Abb. 7.4 (a), die in Tabelle 7.2 angegebenen maximalen Entwicklungsgrade abgelesen werden.

Problematisch ist dabei einerseits, dass die Abschätzungen der Fehler in Form der kalibrierten Fehlerkurven den tatsächlichen Verlauf - gerade auch im kurzwelligen Bereich - möglicherweise unterschätzen. Ein Vergleich mit den Signalamplituden liefert dann in allen Fällen allein deswegen ein zu optimistisches Bild. Andererseits wird die Abschätzung durch den Verlauf der Signalkurve selbst beeinflusst. Im Falle von EIGEN-GRACE01S sieht man bereits vor dem Schnittpunkt mit dessen Fehlerkurve einen Abfall in den Signalamplituden gegenüber EIGEN-GRACE02S und den Folgemodellen. Geht man davon aus, dass ab EIGEN-GRACE02S dieser Spektralbereich besser bestimmt ist als in EIGEN-GRACE01S, so ist die Abschätzung des maximalen Entwicklungsgrades bis $N_{max} = 110$ deutlich zu optimistisch. Bei den regularisierten Modellen EIGEN-GRACE02S und EIGEN-GRACE03S ist der Signalverlauf durch die eingeführten Zwangsbedingungen kontrolliert und hängt wesentlich von ihm ab. Deshalb wird die Bestimmung von N_{max} der ausschließlich aus den Satellitendaten bestimmten Koeffizienten mittels der SNR-Methode ebenfalls nur genähert möglich sein.

Eindeutiges Indiz dafür liefern die Verteilungen von Funktionalen im Ortsraum. Abbildung 7.5 (a) zeigt beispielhaft Schwereanomalien im Bereich des indischen Ozeans, die mittels den Koeffizienten des Modells EIGEN-GRACE02S berechnet wurden. Als maximaler Entwicklungsgrad wurde bei der Synthese $N_{max} = 120$ gewählt, also etwas kleiner als der Schätzwerte $N_{max} = 125$

Tabelle 7.2.: Abschätzung der maximalen Entwicklungsgrade über das Signal-zu-Rausch-Verhältnis von Signal- und Fehleramplituden aus Abb. 7.4(a), sowie mm- und cm-Geoid nach Abb. 7.4(b). In Klammern korrigierte Werte für den maximalen Entwicklungsgrad bzw. für die minimale Halbwellenlänge.

Modell	N_{max}	$\lambda/2$ [km]	$\sigma_N = 1$ mm	$\sigma_N = 1$ cm
EIGEN-GRACE01S	110 (90)	181 (222)	-	357 km
EIGEN-GRACE02S	125 (110)	160 (181)	615 km	272 km
EIGEN-GRACE03S	130 (120)	154 (167)	512 km	242 km
EIGEN-GRACE04S	130 (125)	154 (160)	421 km	233 km

aus Tab. 7.2. Bereits bei diesem Entwicklungsgrad werden typische streifenförmige Strukturen sichtbar, die auf die Verteilung der Bodenspuren und auf Aliasing-Effekten wegen Fehler in der Modellierung hochfrequenter Feldänderungen zurückzuführen sind. Danach muss für dieses Modell die (vollständige) maximale räumliche Auflösung unterhalb von Grad 120 liegen. Für EIGEN-GRACE04S dagegen ist - bei gleichem Entwicklungsgrad - eine Streifenbildung in den Anomalien nicht mehr sichtbar (vgl. Abb. 7.5 (b)). Dies illustriert die erzielten Steigerungen in der räumlichen Auflösung durch die Iterationen von EIGEN-GRACE01S nach EIGEN-GRACE04S mit den Erweiterungen des Datenmaterials sowie den Verbesserungen der Hintergrundmodelle und der sonstigen Standards. Allerdings weisen die in Abb. 7.5 (b) beobachtbaren ringförmigen Artefakte auch hier darauf hin, dass für dieses Modell der mittels der SNR-Methode abgeleitete maximale Grad ($N_{max} = 130$) ebenfalls zu optimistisch ist.

Insgesamt werden daher in Tabelle 7.2 in Klammern korrigierte Werte für den mutmaßlichen maximalen Entwicklungsgrad angegeben. Diesen basieren auf der Erfahrung bei der Visualisierung von Funktionalen im Ortsraum für verschiedene N_{max} . Eine verbesserte Abschätzung des maximalen Entwicklungsgrades könnte sicherlich analog der Arbeiten in Koch [2005] erfolgen. Eine andere zuverlässige Überprüfung sollte mit unabhängigen Feldmodellen der hochauflösenden Schwerefeldmission GOCE möglich werden.

Abbildung 7.4 (b) zeigt schließlich die akkumulierten Fehler-Gradamplituden der vier GRACE-Modelle in Abhängigkeit der räumlichen Halbwellenlänge zur Abschätzung der Auflösung für ein mm- und cm-genaues Geoid, wie sie in Tab. 7.2 zusammengefasst sind. Danach können mit dem aktuellen EIGEN-GRACE04S Geoidstrukturen mit cm-Genauigkeit mit einer räumlichen Auflösung von etwa 460 km berechnet werden. Eine mm-genaue Beschreibung des Geoids wird für Strukturen bis etwa 840 km Ausdehnung erreicht.

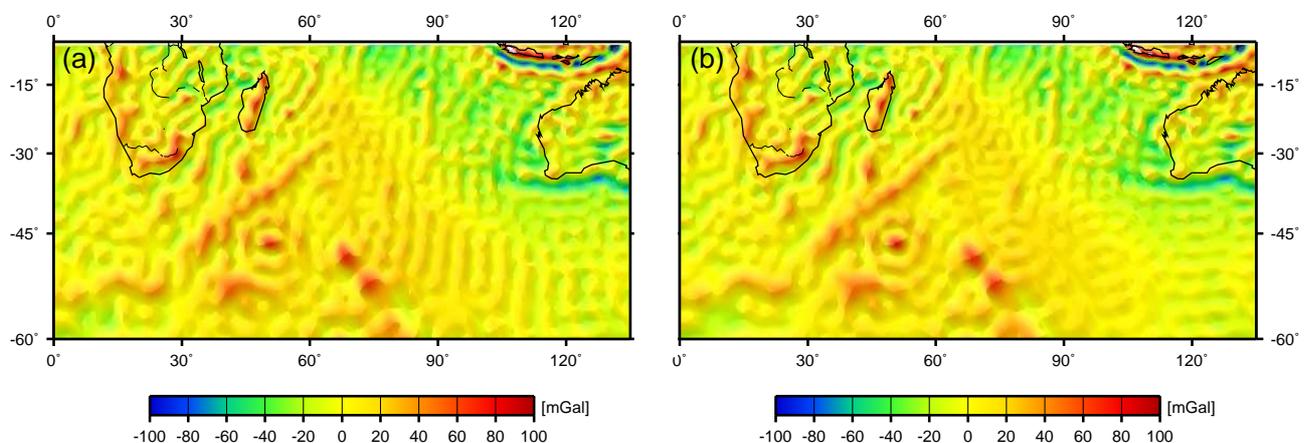


Abbildung 7.5.: Synthese Schwereanomalien im südlichen Teil des indischen Ozeans bis zum maximalen Entwicklungsgrad $N_{max} = 120$ für das Modell EIGEN-GRACE02S (a) und EIGEN-GRACE04S (b).

Bemerkung: Wie in Abschnitt 6.2 erläutert ist eine abschliessende Beurteilung des absoluten Niveaus der in Abb. 7.4 (a) und (b) dargestellten Fehlerkurven der GRACE-basierten Modellen - gerade im langwelligen bis mittelwelligen Bereich - schwierig. Einerseits fehlen dazu unabhängige Vergleichsdaten, andererseits beruht die vorgenommene Kalibration (siehe Abschnitt 6.2, Unterabschnitt "Kalibration der Genauigkeiten der Monatslösungen") auf rein GRACE-internen Vergleichen, bei der zudem die fortgepflanzten Genauigkeitseigenschaften der realen Messungen nicht mehr eingehen bzw. wegen der spezifischen Verarbeitung der Akzelerometer- und Sternkamedaten als fehlerfreie Beobachtungen ohnehin fehlen. Insofern zeigen die erzielten Ergebnisse primär die evolutionäre Entwicklung der Modelle und ihrer Genauigkeiten auf der Grundlage der Verwendung von weiteren, genaueren Beobachtungsmaterials sowie nachweislichen Verbesserungen in der Hintergrundmodellierung (z.B. in den Ozeangezeiten). Die abgeleiteten Genauigkeitsangaben haben den Charakter von globalen Näherungswerten. In spezifischen Gebieten können erheblich größere, systematische Abweichungen auftreten.

7.2. Zeitvariables Feld

Basierend auf den verfügbaren 35 Monatslösungen werden zeitliche Variationen des Schwerefeldes, gemäß der Gleichungen und der Konzeption der Abschnitte 3.1 und 3.2, über die Abweichungen der Monatslösungen gegenüber dem statischen Schwerefeldmodell EIGEN-GRACE04S abgeleitet. Da dabei der Einfluss der nicht-modellierten hydrologischen Massenverlagerungen dominiert, liegt der Schwerpunkt in diesem Abschnitt auf Vergleichen mit einem externen Hydrologiemodell. Für weitere Ergebnisse zu diesem und anderen Prozessen (z.B. Massenvariationen in den Ozeanen oder Änderungen der polaren Eisschilde) sei auf die umfangreiche Literaturzusammenstellung im Internet [Flechtner, 2006] verwiesen.

Vergleiche GRACE und globale Hydrologie-Modelle (GHM)

Für die Vergleiche der aus GRACE abgeleiteten zeitlichen Variationen des Schwerefeldes bzw. der räumlich-zeitlichen Verteilung von Massenanomalien mit erwarteten Signalen aus globalen Hydrologie-Modellen (GHM) sollen folgende Aspekte im Vorfeld angeführt werden:

Bemerkung 1: Der Aspekt Signalüberlagerung der verschiedenen nicht-modellierten Phänomene neben der Hydrologie in den GRACE-Modellreihen wird ignoriert. Eine prinzipiell notwendige Signaltrennung der beobachteten Schwerevariationen in die verschiedenen Komponenten (Hydrologie, post-glaziale Landhebungen, Änderungen der polaren Eisschilde, massen-bedingte Variationen des Meeresspiegels, etc.) sowie eine Reduktion/Abtrennung der GRACE-Modellfehler ist Gegenstand aktueller Forschungsprojekte und liegt außerhalb dieser Arbeit. Erste Ergebnisse zur simultanen Schätzung verschiedener Signalkomponenten unter der Verwendung von geophysikalischen und klimatologischen Apriori-Informationen und GRACE findet man z.B. in Schmidt et al. [2006c].

Die hier eingeschlagene Vorgehensweise ist jedoch insofern zielführend, als dass die gesuchten hydrologischen Massenvariationen in vielen Bereichen einerseits räumlich, andererseits durch ihre stark saisonale Schwankungscharakteristik von säkularen Prozessen wie Landhebungen oder Änderungen der polaren Eiskappen bereits in dieser vereinfachten Betrachtung trennbar sind. In Gebieten, in denen sich die verschiedenen Phänomene überlagern, wie z.B. in Grönland und der Antarktis, ist dieser Ansatz sicherlich problematisch. Daher wird hier auf eine Analyse der Schwerefeldschwankungen in diesen Gebiete verzichtet.

Bemerkung 2: Es steht eine Reihe von unabhängigen globalen Hydrologie-Modellen (GHM) zum Vergleich mit GRACE zur Verfügung. In dieser Arbeit werden als unabhängige Vergleichsgröße Zeitreihen von globalen Verteilungskarten der kontinentalen Wasserspeicher mit ebenfalls monatsweiser Auflösungen des WaterGAP Hydrologie-Modells (WGHM, Döll et al. [2003]) verwendet. Dieses Modell kombiniert global gemessene Niederschlagsdaten sowie Abflussmessungen von 724 weltweit verteilten Beobachtungsstationen zur Beschreibung hydrologischer Variablen, wie etwa Evapotranspiration, Boden-, Grundwasser- und Gewässerspeicher, und stellt insgesamt ein modernes Hydrologie-Modell dar. Gegenüber anderen GHMs, die ebenfalls zum Vergleich herangezogen wurden, ergeben sich vergleichbare Ergebnisse. Die dargestellten Resultate können daher - unter Berücksichtigung von Bemerkung 3 - als repräsentativ betrachtet werden können.

Bemerkung 3: Da die GHM grundsätzlich Defizite in der Beschreibung großräumiger Änderungen des globalen Wasserkreislaufs aufweisen und insbesondere durch GRACE grundlegend verbessert werden sollen, sind Vergleiche mit den GHM von vorneherein problematisch. Dies betrifft einmal die generell erwartete Unterschätzung des Gesamtsignals in den GHM. Andererseits treten

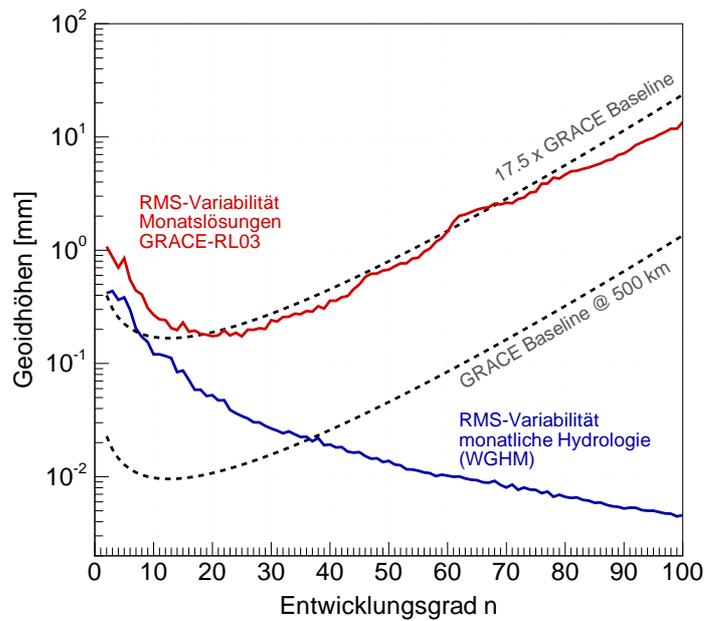


Abbildung 7.6.: Gradvarianzen der RMS-Variabilität der GRACE-Monatslösungen und monatlicher Hydrologie (WGHM) gegenüber ihrem Mittel in Geoidhöhen.

u.U. regionenbezogener Unterschiede auf, die auf spezifische Eigenschaften des jeweiligen GHMs zurückgeführt werden können. Einflussgrößen sind beispielsweise Vollständigkeit, Auflösung und Güte der Eingangsdaten des GHMs (z.B. für Niederschlag) und/oder weiterer Hilfsdaten (z.B. digitale Geländemodelle, Gewässerverteilungskarten, geologische Informationen, etc.), sowie der grundlegende Modellansatz und/oder -grad²⁵. Derartige Diskrepanzen zeigen damit gleichzeitig das Potential der GRACE-Ergebnisse zur Verbesserung von globalen Hydrologie-Modellen.

Bemerkung 4: Wie bereits in Unterabschnitt “Filterung von Funktionalen” in Abschnitt 3.2 erwähnt, ist die Verwendung des Gauß-Filters in diesem Abschnitt wegen der eindeutig anisotropen Verteilung der Modellfehler (vgl. Abschnitt 6.2) nicht optimal. Von verschiedenen Autoren (z.B. Chen et al. [2006], Han et al. [2005], Seo und Wilson [2005]) werden daher angepasste Filter vorgeschlagen. Entsprechende Erweiterungen auf die vorliegende Modellreihe wurden bislang noch nicht vorgenommen. Grundsätzliche Modelleigenschaften zur Auflösung hydrologischer Massenvariationen lassen sich jedoch auch unter Verwendung des Gauß-Filters demonstrieren.

Globale Vergleiche im Spektral- und Ortsraum

Ein Vergleich der monatlichen Signalvariabilität aus GRACE mit WGHM auf spektraler Ebene ist in Abb. 7.6 dargestellt. Die blaue Kurve zeigt die Gradamplituden des RMS der Stokes-Koeffizienten²⁶ der monatsweisen Wasserspeicher-Karten und stellt so die erwartete Signalstärke je sphärischem Grad dar. Die RMS-Gradamplituden der Koeffizienten der GRACE-Monatslösungen sind in rot dargestellt. Die gestrichelte Linie mit der Bezeichnung “17.5 x GRACE Baseline” stellt die angenommene mittlere Genauigkeit der Monatslösungen in Form von Gradamplituden

²⁵Ein Beispiel hierfür ist die Behandlung des Niederschlags in Form von Schnee, der in einigen Modellen (wie WGHM) zeitlich akkumuliert und erst mit der Schneeschmelze transportiert wird, während in anderen Modellen der Schnee unmittelbar nach dem Niederschlag abfließt.

²⁶Diese werden über eine Ausgleichung mit Gleichung 3.31 als Beobachtungsgleichung für die gegebenen $\Delta\sigma(\theta, \lambda)$ bestimmt.

der Modellfehler aus Abschnitt 6.2 (Unterabschnitt “Kalibration der Genauigkeiten der Monatslösungen“) dar.

Der Vergleich mit dem Hydrologie-Signal zeigt nun einen grundsätzlich ähnlichen Verlauf der Kurven, etwa bis Grad 16. Danach läuft die GRACE-Signalkurve in ein Minimum etwa bei Grad 20 und steigt zu den kurzen Wellenlängen wieder an. Analog der Argumentation in Abschnitt 6.2 repräsentiert der Verlauf oberhalb von Grad 20 die mit zunehmenden Graden (und Ordnungen) ansteigenden Modellfehler und legt so etwa das Niveau der mittleren Modellgenauigkeit der Monatslösungen fest. Der Anstieg zu den Längstwellenlängen unterhalb Grad 20 repräsentiert die beobachtete Signalvariabilität wegen Hydrologie und anderer nicht-modellierter zeitvariabler Feldänderungen. Sieht man zunächst von möglichen Modellfehlern auch in diesem Spektralbereich ab, so kann man im Vergleich mit der mittleren, kalibrierten Fehlerkurve die Koeffizienten-Variationen unterhalb Grad 20 als signifikant betrachten. Analog der Argumentation im vorherigen Abschnitt könnten demnach zeitvariable Strukturen mit einem Durchmesser von $\lambda_{min} \approx 40000/20 = 2000$ km aufgelöst werden. Dies wäre im Vergleich zur erwarteten Auflösung bei Erreichen der Baseline und anhand der angenommenen Variabilität der Hydrologie eine etwa 4 mal schlechtere Auflösung (vgl. SNR der RMS-Gradamplituden WGHM und GRACE Baseline ungefähr 1 bei Grad $n = 37 - 38$ in Abb. 7.6).

Mittels Gauß-gefilterter GRACE-Koeffizienten lassen sich jedoch wesentlich höhere Auflösungen erzielen. Besonders deutlich wird dies bei Betrachtung von Funktionalen im Ortsbereich, die nach Gleichungen (3.38) und (3.39) aus den Koeffizienten-Differenzen der Monatslösungen gegenüber ihrem Mittelwert berechnet werden können. Nachfolgend werden beispielhaft Amplituden und Phasen einer jährlichen Signalvariabilität abgeleitet aus den GRACE-Modellen und aus WGHM dargestellt. Diese ergeben sich mittels einer kleinste-Quadrate Anpassung des folgenden einfachen Modells

$$y(t) = a + bt + A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.2)$$

an die Zeitreihe der Massenanomalien je Gitterpunkt $y(t)$. a und b bezeichnen eine Additionskonstante sowie einen linearen Trend, der säkulare Feldänderungen darstellt. A und φ bezeichnen die Amplitude und Phase einer jahresperiodischen Schwingung mit $\omega = 2\pi/T$ und $T = 365.25$ Tage.

Abbildung 7.7 zeigt Ergebnisse der so ermittelten Amplituden für drei verschiedenen Filterlängen des Gaußfilters²⁷. Danach werden mit GRACE hydrologische Strukturen mit großen jährlichen Schwankungen noch bis auf 500 km Radius gut aufgelöst. Klar erkennbar sind die Variationen in den weltgrößten Einzugsgebieten in Südamerika (Amazonas, Orinocco), Afrika (Niger, Sambesi), Asien (Ganges), Sibirien (Lena, Ob) und Alaska (McKenzie), die gut mit der Erwartung aus dem Hydrologie-Modell übereinstimmen (vgl. linke Spalte von Abb. 7.7). Die hohe räumliche Übereinstimmung zeigt sich bei der Berechnung globaler Korrelationskoeffizienten in der Größenordnung von 0.9 zwischen den GRACE-Amplituden und dem WGHM-Signal (siehe Tab. 7.3). Dabei ist bemerkenswert, dass der Korrelationskoeffizient bei Verkürzung des Filterradius nur geringfügig abnimmt, wobei diese Änderungen allerdings nicht signifikant sein dürften.

Andererseits darf die mutmaßlich hohe Korrelation nicht überbewertet werden, da der Vergleich zwischen GRACE und WGHM in Abb. 7.7 auch wesentliche Diskrepanzen zeigt. So fehlen beispielsweise die mit WGHM angezeigten Massenvariationen in Labrador in den GRACE-Ergebnisse

²⁷Es ist zu bemerken, dass die Betrachtung des reinen Jahressignals in den GRACE-Monatslösung einer zusätzlichen Filterung entspricht, da die dargestellten Amplituden in Abb. 7.7 durch eine kleinste-Quadrate Ausgleichung bestimmt werden.

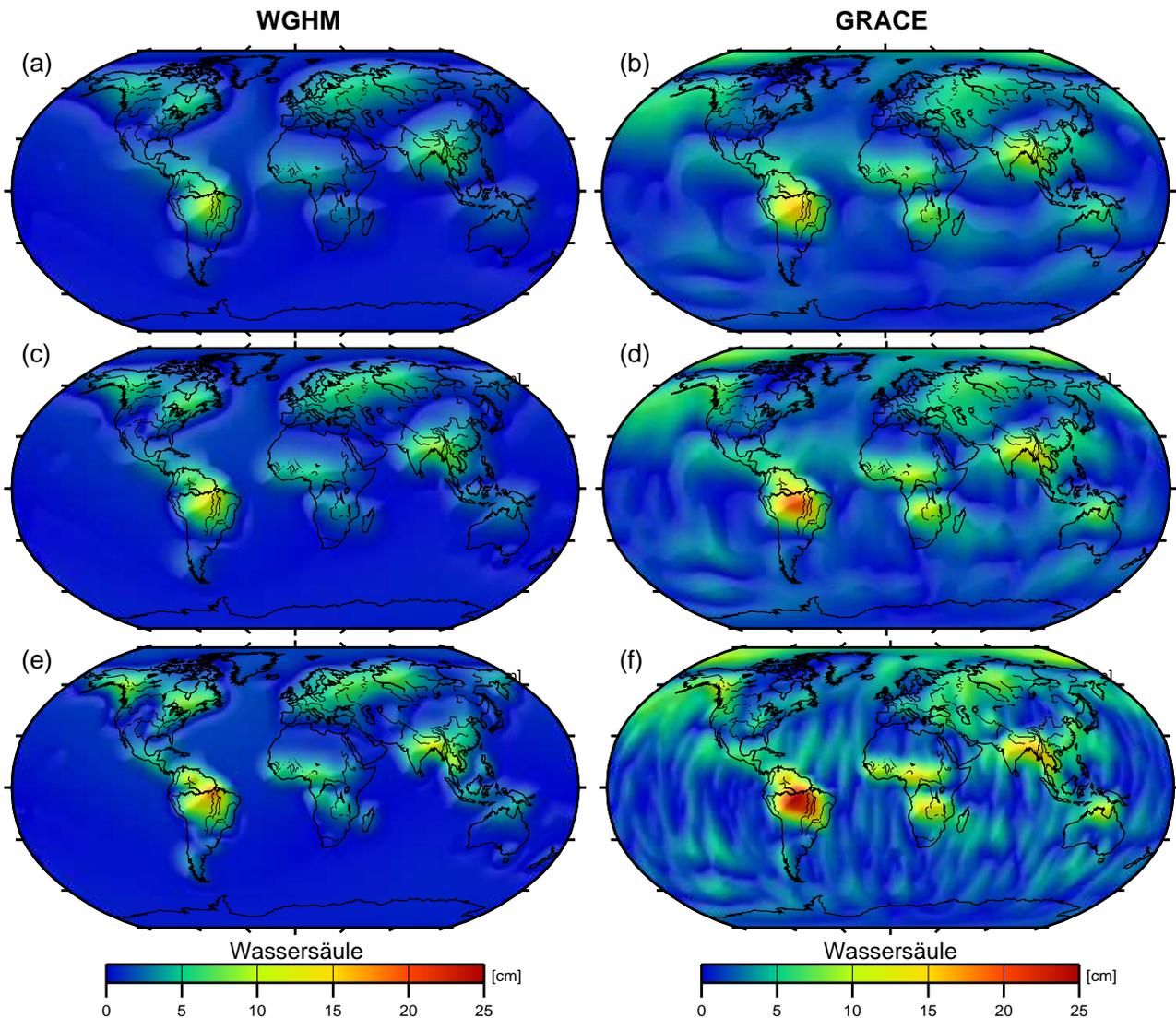


Abbildung 7.7.: Jährliche Signalvariabilität abgeleitet aus monatlichen Verteilungskarten von WGHM und den GRACE-Monatslösungen im Zeitraum 02/2003 - 02/2006. Dargestellt ist die Amplitude eines streng jährlichen Signals nach Anpassung an die Zeitreihen der Massenanomalien gegenüber ihrem Mittel je Gitterpunkt. Gauß'sche Mittelwerte auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter mit einem Filtrerradius von 1000 km (a), (b), 750 km (c), (d) und 500 km (e), (f).

nahezu vollständig. Hinzukommen bei GRACE, die v.a. im Bereich der Ozeane sichtbaren streifenförmigen Artefakte, die mit Reduzierung des Filtrerradius immer prägnanter hervortreten und die tatsächlichen hydrologischen Signale überlagern. Die linke Spalte von Abb. 7.8 zeigt die Verteilung der Phase des Jahressignals aus GRACE in Abb. 7.7. Referenzpunkt, d.h. der Beginn des Farbkeils ist der erste Januar. Farbwerte positiver Phasenlagen gehen daher von Januar bis Ende Juni, Farbwerte negativer Phasenlagen umfassen vom Minimum aufsteigend die Monate Juli - Dezember. Auf der Nordhalbkugel, herunter bis etwa in mittlere Breiten von $\approx 30^\circ$, erreichen die zeitlichen Änderungen ihr Maximum im Hochwinter (Januar, Februar), wenn die Auflast durch Akkumulation von Schneefällen am größten ist. Südlich von 30° in Richtung zum Äquator liegt

Tabelle 7.3.: Korrelationskoeffizienten ρ Abb. 7.7. Berechnung auf Basis von $1^\circ \times 1^\circ$ -Gittern Gauß-geglätteter Massenanomalien für Pixel nur über Land.

Radius [km]	Bilder	ρ [-]
1000	(a),(b)	0.915
750	(c),(d)	0.914
500	(e),(f)	0.911

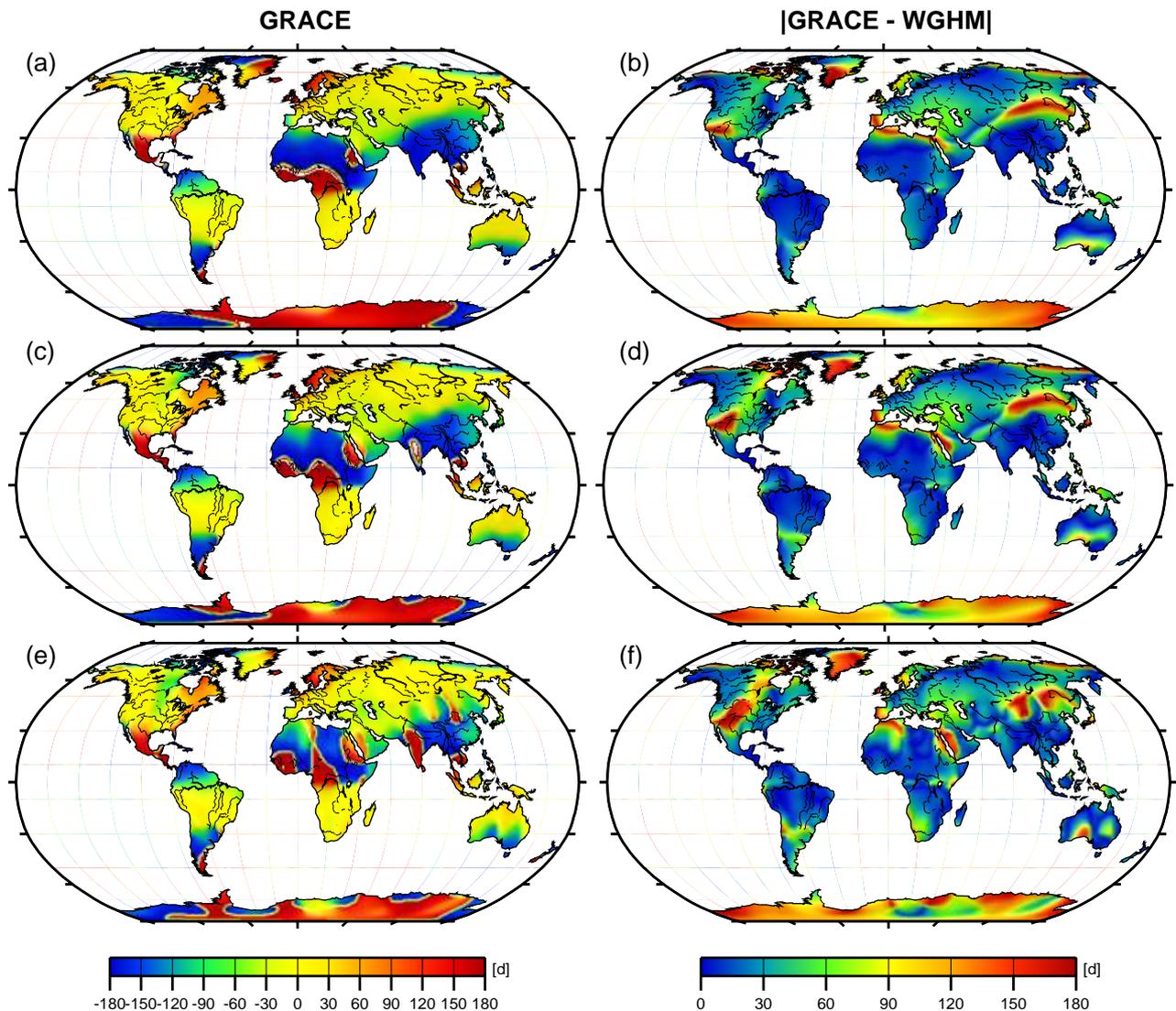


Abbildung 7.8.: Linke Spalte: Phasen zur jährliche Signalvariabilität aus Abb. 7.7 für die verschiedenen Filterradien 1000 km (a), 750 km (c) und 500 km (e). In Tagen bezogen auf den 01. Januar. Rechte Spalte: Absolutwerte der Phasendifferenzen in Tagen gegenüber den Phasenwerten abgeleitet aus WGHM für die entsprechenden Radien (1000 km (b), 750 km (d) und 500 km (f)).

das Maximum im Bereich der Monate Juni/Juli. Der Äquator als natürliche Trennlinie zwischen dem Wettergeschehen auf der Nord- und Südhalbkugel ist deutlich im klaren Phasenwechsel der Variationen in Südamerika und Zentralafrika erkennbar. Jeweils in den südlich anschließenden Gebieten im Amazonas, dem südlichen Kongo-Gebiet und dem Sambesi in Afrika liegt das Maximum im Bereich von November/Dezember (d.h. Frühling auf der Südhalbkugel). Weiter Richtung Südpol wird die maximale Signalamplitude für die zeitlichen Feldvariationen im Bereich Juni/Juli (d.h. Winter auf der Südhalbkugel) erreicht. Über den Ozeanen ergeben sich wegen der nur schwach ausgeprägten jahresperiodischen Signale bzw. wegen dominierender Streifenstrukturen keine plausiblen zeitlichen Variationen, so dass die Ozeane in der Darstellung aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgeblendet wurden.

Wie die rechte Spalte von Abb. 7.8 zeigt, liegt die Übereinstimmung der mit GRACE bestimmten Phasenwerte in den zuvor beschriebenen Gebieten im Bereich von ≤ 30 Tagen. Da die beiden Zeitreihen jeweils nur monatsweise vorliegen, können Abweichungen in dieser Größenordnung als nicht signifikant betrachtet werden. Größere Abweichungen werden in den Randbereichen,

d.h. außerhalb der Gebiete mit starken hydrologisch induzierten Auflaständerungen sichtbar. Die großen Differenzen in Grönland und der Antarktis entsprechen den mit GRACE beobachteten Phasenwerten, da beide Gebiete innerhalb von WGHM nicht erfasst sind und somit kein Vergleichssignal vorliegt (vgl. linke Spalte Abb. 7.7).

Vergleiche auf der Ebene von Einzugsgebieten

Zur Ableitung von Mittelwerten von Massenvariationen in bestimmten Einzugsgebieten wird die in Unterabschnitt "Filterung von Funktionalen" auf Seiten 46 ff. skizzierte Methode von Swenson und Wahr [2001] herangezogen. Bei der Vorgabe eines Schwellwertes für den Fehler der Satellitenmodelle von $\delta = 2$ cm werden unter Verwendung von Gleichung (3.47) bzw. (3.46) Gewichtungskoeffizienten w_{Cnm} , w_{Snm} der Glättungsfunktion berechnet, wobei für die Gradvarianzen der Modellfehler B_n^2 die kalibrierten Varianzen der Stokes-Koeffizienten der GRACE-Monatslösungen aus Abschnitt 6.2 verwendet werden. Der geglättete Mittelwert ergibt sich dann nach Gleichung (3.45).

Abbildungen 7.9 und 7.10 (jeweils auf der linken Seite) zeigen Zeitreihen dieser Beckenmittelwerte (als Wassersäule) exemplarisch für eine Auswahl von Einzugsgebieten. Mit blauen Dreiecken sind jeweils die Resultate für WGHM, mit roten Punkten die Beckenmittelwerte für GRACE dargestellt. Die vertikalen Fehlerbalken in rot entsprechen dem konstanten Richtwert von 2 cm Wassersäule für alle Zeitpunkte. Durch die Zeitreihen der Beckenmittel wurde (nach Reduktion individueller Biase und Driften) wiederum ein rein jahresperiodisches Signal an die jeweils vorliegenden Datenpunkte angepasst und als durchgängige rote bzw. blaue Linien in Abb. 7.9 und 7.10 eingetragen. Die Vergleiche bestätigen allgemein die gute Bestimmung des ausgeprägten Jahressignals der Hydrologie mit GRACE, insbesondere für Einzugsgebiete mit großen Signalamplituden, wie beispielsweise dem Amazonas und dem Ganges (vgl. Abb. 7.9). Abgesehen von größeren Abweichungen, die auf die mutmaßliche Unterschätzung der Signalamplitude in den GHM zurückzuführen sind, liegen die Diskrepanzen zwischen GRACE und WGHM weitgehend innerhalb der erwarteten GRACE-Modellfehler.

Zur Illustration der Güte der Anpassung an die ursprüngliche Beckenfunktion werden in den rechten Spalten von Abb. 7.9 und 7.10 die gewichteten Beckenfunktionen zur Berechnung des Beckenmittels für einen repräsentativen Monat dargestellt. Man beachte, dass die Bestimmung der Gewichtskoeffizienten der Mittelungsfunktion - und damit die Güte der Anpassung an die ursprüngliche Beckenfunktion - mit den monatsweise verschiedenen Modellfehlern variiert. Allerdings sind die Abweichungen von der jeweils in Abb. 7.9 und 7.10 exemplarisch dargestellten geglätteten Beckenfunktion in regulären Monaten eher gering.

Insgesamt sieht man, dass für große Einzugsgebiete wie den Amazonas die Anpassung an die ursprüngliche Beckenfunktion augenscheinlich gut ist, während in kleineren Becken wie dem Ganges relative große Abweichungen auftreten. Dieses Verhalten liegt an den zunehmenden Modellfehlern der mittleren und hohen Grade und Ordnungen der GRACE-Modelle, die einer hohen räumlichen Darstellung der Gebietsfunktion zuwiderlaufen. Für noch kleinere Gebiete, wie z.B. das Donau-Becken mit einer Größe von etwa 800 km² (siehe Abb. 7.10 rechts oben), liegt der Approximationsfehler der Signalamplitude innerhalb des Einzugsgebiets in der Größenordnung von 30 - 50 %, während zusätzlich signifikante Beiträge von Feldvariationen außerhalb des eigentlichen Zielgebietes angezeigt werden. Obwohl die Zeitreihe der Beckenmittelwerte sowie das Jahressignal durchaus plausibel aussehen (Abb. 7.10 links oben), dürfte in diesem Bereich die Grenze der Auflösung mit GRACE erreicht werden.

Im Falle des Mississippi ist die Approximation der Gebietsfunktion wegen der Größe des Einzugsgebiets erwartungsgemäss hoch (vgl. 7.9 rechts unten). Die Übereinstimmung der Zeitreihen der Beckenmittelwerte (vgl. 7.9 links unten) mit WGHM ist gegenüber Amazonas und Ganges jedoch geringer. Da der Mississippi als Gebiet mit einer umfangreichen und genauen hydrologischen Erfassung betrachtet werden kann, sind die Ursachen hierfür eher in den Fehlern der GRACE-Modelle zu vermuten. Diese treten offensichtlich wegen der gegenüber dem Amazonas und Ganges-Gebiet generell kleineren Signalamplitude deutlicher zu Tage. Die starke Zunahme der Massenanomalien im Frühjahr 2005 ist unklar, ebenso die sichtbare Phasenverschiebung.

In Trockengebieten wie z.B. der Sahara oder der arabischen Wüste werden keine zeitlichen Änderungen der Wasserspeicher erwartet. Vergleiche in solchen Regionen könnten somit zur Kalibration der GRACE-Modellfehler herangezogen werden. Anhand Abb. 7.10 (links mitte und unten) werden unerwarteterweise jahresperiodische Fluktuationen sichtbar. Im Fall der Sahara liegt die Ursache dafür bei der gewählten Beckenfunktion. Diese schliesst im Westen das Atlasgebirge und im Osten das Nil-Gebiet mit ein. Die sichtbaren Jahresschwankungen sind daher mutmaßlich auf hydrologische Variationen in diesen Gebieten zurückzuführen. Für den Fall der arabischen Wüste ist die Ursache unklar. Eventuell gibt es hier Beiträge des Jordan und/oder Tigris im nordwestlichen bzw. nordöstlichen Randes durch Leakage. Andererseits ist in beiden Fällen das erhaltene Jahressignal im Vergleich zum angenommenen Fehler aus den GRACE-Modellen nicht signifikant, d.h. diese Gebiete zeigen innerhalb der GRACE-Fehler keine Variation.

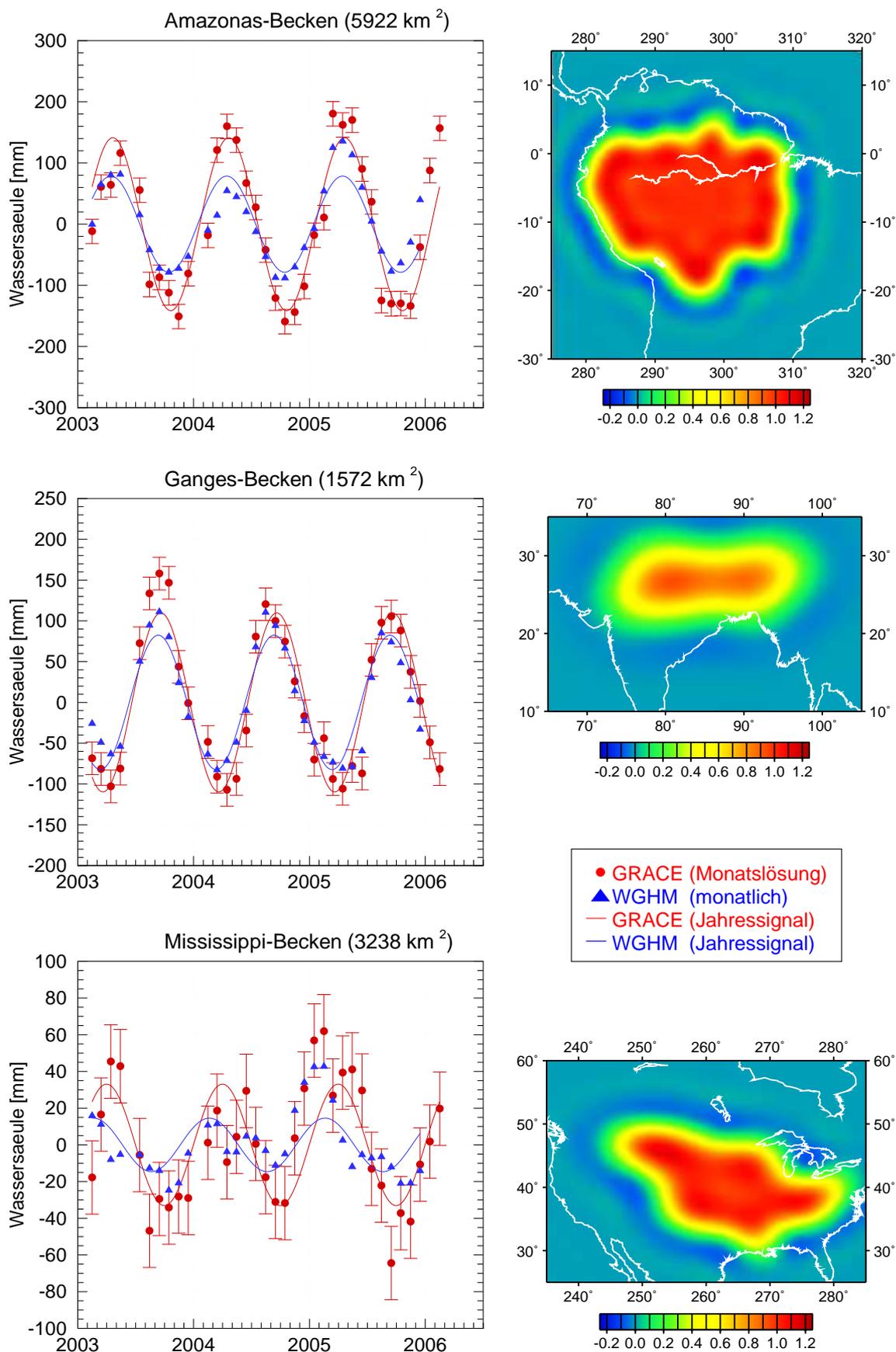


Abbildung 7.9.: Linke Spalte: Zeitreihe monatlicher beckenbezogener Mittelwerte von Massen anomalies aus GRACE (in rot) und WGHM (in blau) berechnet nach der Methode von Swenson und Wahr [2001] mit einem Satellitenmodellfehler von $\sigma_{GRACE} = 2$ cm Wassersäule. Rechte Spalte: Darstellung der gewichteten Beckenfunktion in Abhängigkeit des gewählten Satellitenmodellfehlers von $\sigma_{GRACE} = 2$ cm Wassersäule für einen repräsentativen Monat.

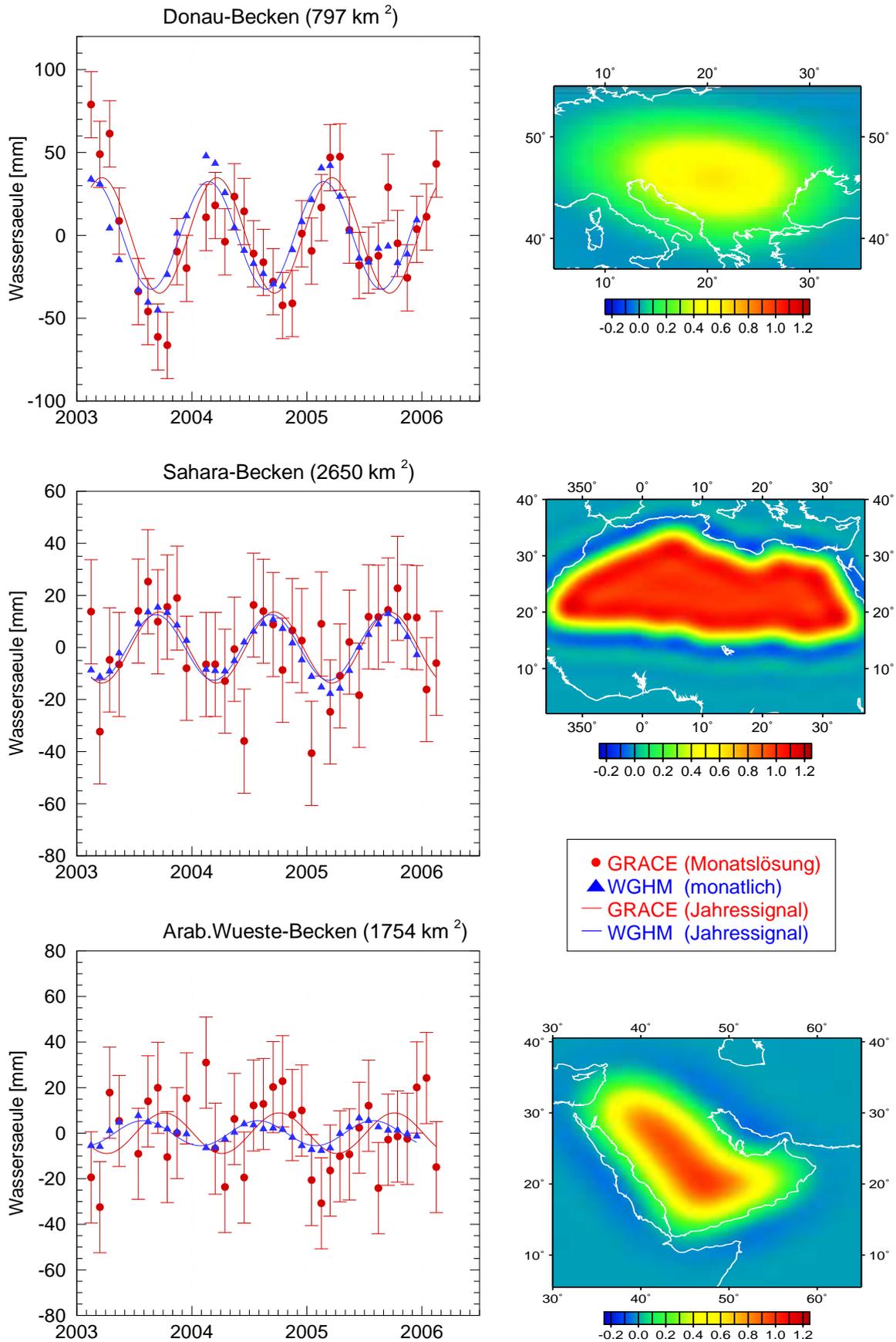


Abbildung 7.10.: Linke Spalte: Zeitreihe monatlicher beckenbezogener Mittelwerte von Massenanomalien aus GRACE (in rot) und WGHM (in blau) berechnet nach der Methode von Swenson und Wahr [2001] mit einem Satellitenmodellfehler von $\sigma_{GRACE} = 2$ cm Wassersäule. Rechte Spalte: Darstellung der gewichteten Beckenfunktion in Abhängigkeit des gewählten Satellitenmodellfehlers von $\sigma_{GRACE} = 2$ cm Wassersäule für einen repräsentativen Monat.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Analysemethode zur Bestimmung von hochgenauen monatlichen und statischen Schwerefeldmodellen aus Daten der GRACE-Mission unter Verwendung der dynamischen Methode entwickelt.

Ausgehend von einer Beschreibung des Missionskonzepts wurden in Kapitel 2 die grundlegenden Messprinzipien sowie wesentliche Eigenschaften der verschiedenen Wissenschaftsdaten zusammengestellt. Hier kann festgestellt werden, dass die GRACE-Mission hochgenaue und kontinuierliche Messdaten liefert, die mit Ausnahme der Akzelerometer innerhalb oder sogar unterhalb der erwarteten Genauigkeiten liegen. Letzteres wird offenbar beim K-Band-Instrument erreicht. Dies deuten zumindest die erreichbaren Residuen der Range-Rate-Beobachtungen an, die in der Größenordnung von etwa $0.25 \mu\text{m/s}$ wesentlich besser als mit dem in Vorflugstudien angenommenen Wert von $1 \mu\text{m/s}$ ausfallen. Die GPS-Empfänger liefern Code- und Phasenmessungen von hervorragender Qualität, was über Bahnresiduen der unabhängigen SLR- und K-Band-Entfernungsmessungen bestätigt wird. Mit typischen Residuenwerten der μm -genauen K-Band-Entfernungsmessungen im Bereich von 3 - 5 mm deutet sich eine Positionierungsgenauigkeit von besser 1 cm an. Einschränkungen scheint es bei der Güte der Akzelerometermessungen zu geben (z.B. Fackler [2005]), die offenbar nur auf kurzen ausgewählten Zeitintervallen innerhalb der Spezifikation liegt. Analysen über längere Zeiträume weisen etwa auf um den Faktor 8 bzw. 2 geringere Genauigkeiten der verschiedenen Instrumentenachsen hin. Teile solcher Anomalien im Messverhalten können durch temperaturbedingte Vibrationen einer Teflonfolie auf der Unterseite der Satelliten erklärt werden, andere sind jedoch bislang ungeklärt. Insgesamt geht man gegenwärtig davon aus, dass die eingeschränkte Güte der Akzelerometermessungen für einen wesentlichen Teil der Abweichungen der tatsächlich erreichten Genauigkeiten der GRACE-Schwerefeldmodelle von der erwarteten GRACE-Baseline verantwortlich ist.

In Kapitel 4 wurden die theoretischen Grundlagen der dynamischen Methode der Bahn- und Schwerefeldbestimmung sowie die notwendigen Erweiterungen der GFZ-eigenen Software *EPOS* zur Analyse der teilweise völlig neuartigen Satellitendaten der GRACE-Mission beschrieben. Der Schwerpunkt lag dort zu einem in der Beschreibung der Nutzung der Akzelerometermessungen, die nach einer Korrektur von Additionskonstanten und einer Signalskalierung als ansonsten fehlerfreie Beobachtungen der nichtgravitativen Störbeschleunigungen in die Bewegungsgleichung eingeführt werden. Dies stellt einen wesentlichen Unterschied gegenüber der Verarbeitung sonstiger Beobachtung dar, die im Zuge der Ausgleichung anhand ihres jeweiligen stochastischen Modells editiert werden können. Entsprechend ist das Augenmerk auf eine Säuberung der Daten im Vorfeld zu richten. Gleiches gilt für die Sternkameradaten. Ein zweiter Schwerpunkt war die Erweiterung der Software für das Beobachtungsmodell der K-Band-Messungen, wobei auf grundlegende Entwicklungen in Kim [2000] zurückgegriffen werden konnte. Es wurden die dort vorgeschlagenen kinematisch-empirischen Parameter zur Behandlung frequenzabhängiger Fehler der K-Band- aber auch der Akzelerometermessungen implementiert.

In Vorbereitung des Auswerteverfahrens von Echtdaten wurden dann zu Beginn von Kapitel 5 mittels Simulationsrechnungen Aspekte hinsichtlich einer geeigneten Parametrisierung der

Bahnbögen (insbesondere der Akzelerometer- und der K-Band-Beobachtungen), Abhängigkeiten von der Bogenlänge sowie Einflüsse einer Unter- und Überparametrisierung der Stokes-Koeffizienten untersucht. Die erzielten Resultate bestätigen die besondere Bedeutung der Akzelerometerdaten für die Schwerefeldbestimmung bzw. die Bedeutung einer effizienten Parametrisierung dieser Messungen bei der hier eingeschlagenen Vorgehensweise. Insbesondere längerperiodische Rauschanteile haben offenbar einen wesentlichen Einfluss auf die Güte der Schwerefeldbestimmung und sind durch Additionskonstanten je Messrichtung abzufangen. Da solche Parameter ohnehin angesetzt werden müssen entsteht dadurch jedoch kein Nachteil. Mögliche Beeinträchtigungen durch farbiges Rauschen in den K-Band-Messungen können durch die angesetzten kinematisch-empirischen Parameter gut kompensiert werden. Allerdings scheinen solche Beiträge durch das K-Band-Instrument ohnehin eher klein zu sein. Dies kann besonders für Range-Rate-Messungen angenommen werden, da dort im wesentlichen nur hochfrequentes Rauschen mit einer kleinen Amplitude dominiert.

Hinsichtlich der Nutzung längerer Bahnbögen wird festgestellt, dass kein Gewinn für die Bestimmung des Schwerefeldmodells erzielt werden konnte, weder im Ganzen noch für ausgewählte Koeffizienten. Im Gegenteil werden - wegen der oben beschriebenen Nutzung der Akzelerometermessungen - unerwünschte Fehlsignale kumuliert und führen so auf leicht schlechtere Ergebnisse. Weitaus dramatischere Verschlechterungen der Lösungen ergeben sich durch Abschneidefehler beim Näherungsmodell des statischen Schwerefeldes als auch dem Lösungsraum der zu bestimmenden Stokes-Koeffizienten. Eine gewisse Überparametrisierung dagegen, sowohl im Näherungsmodell als auch im Lösungsraum, scheint keinen nachteiligen Einfluss auf die Güte der Lösung zu haben. Entsprechend ergibt sich als Empfehlung für die Verarbeitung von Echt Daten eher ein tendenziell zu hohen Entwicklungsgrad beim Näherungsmodell als auch für den Lösungsraum zu wählen.

Anhand dieser Ergebnisse wurde das Analyseverfahren (Parametrisierung, Bogenlänge, maximaler Entwicklungsgrad) festgelegt und GRACE-Daten für einen dreijährigen Zeitraum von Februar 2003 bis Februar 2006 ausgewertet. Als Resultat liegen 35 Monatslösungen, d.h. Schwerefeldmodelle berechnet aus dem Datenmaterial eines Kalendermonats, sowie ein statisches Schwerefeldmodell (mit der Bezeichnung EIGEN-GRACE04), berechnet aus dem gesamten Datenmaterial, vor. Vergleiche von Funktionalen abgeleitet aus EIGEN-GRACE04S mit externen Modellen, unabhängigen altimetrisch-terrestrischen Schweredaten bzw. Geoidhöhen sowie Bahnbestimmungen für geodätische Satelliten zeigen klar den grundsätzlichen Gewinn für die Schwerefeldbestimmung in Bezug auf Genauigkeit und räumlicher Auflösung als auch die Güte des hier berechneten Modells. Obwohl die erwartete Baseline-Genauigkeit nur etwa bis auf einen Faktor 10 erreicht werden kann, ist die erzielte Steigerung gegenüber historischen Satellitenmodellen enorm. So kann die räumliche Auflösung eines cm-genauen Geoids mit EIGEN-GRACE04S bei mittlerweile etwa 230 km (Halbwellenlänge) angenommen werden; mm-genaue Geoidhöhen können bis circa $\lambda/2 = 420$ km abgeleitet werden. Die insgesamt obere Grenze der räumlichen Auflösung von Funktionalen der Schwerefeldes liegt im Bereich $\lambda/2 \approx 160-170$ km.

Zeitliche Variationen des Schweresignals, abgeleitet aus den Abweichungen der monatlichen Schwerefeldmodelle gegenüber dem mittleren statischen Feld zeigen die Sensitivität der Mission gegenüber hydrologisch bedingten Feldänderungen. Dies geht eindeutig bei Vergleichen mit ebenfalls monatsweise vorliegenden Datensätzen der globalen Wasserspeicherung eines modernen Hydrologiemodells hervor. Insbesondere Einzugsgebiete mit großen Speicheränderungen, wie der Amazonas, der Ganges oder das Lena/Ob-Gebiet und andere, können gut beobachtet werden. Neben einer hohen räumlichen Konsistenz wird in diesen Gebieten im allgemeinen auch eine gute zeitliche Korrelation zwischen den verschiedenen Datensätzen erhalten, was sich z.B. für ein abgeleitetes, rein jahresperiodisches Signal besonders gut zeigt. Die räumliche Auflösung der

vorliegenden Version der Monatslösungen erreicht dabei eine untere Grenze von etwa $\lambda/2 = 500$ km, liegt damit aber (noch) nicht innerhalb der Spezifikation. Allerdings ist der hier gewählte Gauß-Filter zur Unterdrückung von Fehleranteilen der Modelle im mittel- und kurzwelligen Signalspektrum nicht optimal. Mit adaptierten Filtern (z.B. Han et al. [2005], Swenson und Wahr [2006]) lassen sich mit der vorliegenden Modellreihe bessere räumliche Auflösung erzielen. Hinsichtlich der Genauigkeit der GRACE-Schwerefeldmodelle ist festzustellen, dass die formalen Fehler der Modelle, wie sie sich im Zuge der Ausgleichung ergeben, als insgesamt zu optimistisch betrachtet werden müssen. Dies trifft sowohl für das Niveau der Fehleramplituden, als auch für die räumliche Verteilung von Fehlern von Funktionalen im Ortsraum zu. Diese scheinen im wesentlichen nur von der Bodenspurverteilung innerhalb des jeweiligen Analysezeitraums bestimmt zu sein. Typische Modellfehler z.B. verursacht durch Aliasing-Effekte nicht- bzw. unvollständig modellierter zeitvariabler Signale, die im Ortsraum als meridional-orientierte Streifen sichtbar sind, werden durch die formale Varianz-Kovarianz-Information offensichtlich nicht ausreichend repräsentiert. Diese können auch nicht nach einer nachträglichen Kalibration der formalen Varianz-Kovarianzen-Matrizen über eine gradweise Skalierung (d.h. je Entwicklungsgrad) dargestellt werden. Allerdings wird zumindest das globale Fehlerniveau der GRACE-Modelle auf der Grundlage der so kalibrierten Varianz-Kovarianzen-Information offenbar plausibel erfasst. Dieses scheint für die vorliegenden Monatsmodelle im Mittel bei etwa 17.5 mal der erwarteten GRACE-Baseline zu liegen.

Insgesamt demonstrieren die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit den enormen Gewinn der Schwerfeldbestimmung auf der Grundlage der GRACE-Missionsdaten. Die abgeleiteten Schwerfeldmodelle erreichen dabei ein hohe Qualität, die mit extern berechneten Modellreihen gut vergleichbar ist, und bestätigen so das im Rahmen der Arbeit entwickelte Analyseverfahren.

Andererseits werden auch grundsätzliche Schwierigkeiten offenbar und die erzielten Resultate sind hinsichtlich verschiedener Aspekte weiter verbesserungsbedürftig. Auf der Ebene der Messdaten bleiben Fragen nach der tatsächlichen Leistungsfähigkeit der Akzelerometer bzw. nach Möglichkeiten einer weiter verbesserten Aufbereitung der Rohmessungen vorerst offen. Hier stellt sich auch die Frage, inwiefern bislang unberücksichtigte Korrelationen zwischen Beobachtungen vorhanden sind und in den Ausgleichungsprozess aufgenommen werden sollten.

Auf der Ebene der Datenanalyse wird man sich weiter vertiefend mit dem grundsätzlichen Problem des Aliasing von nicht- bzw. unvollständig modellierten zeitvariablen Feldänderungen befassen müssen. Hier wären v.a. Möglichkeiten zu deren Vermeidung bzw. Reduzierung interessant, wobei z.B. Möglichkeiten für eine simultane Schätzung solcher Modellparameter zusammen mit den Schwerfeldkoeffizienten zu untersuchen wären. Neben einer Bestimmung allein auf GRACE-Daten könnte man versuchen, Synergie-Effekte mit anderen Datenquellen (z.B. andere Satellitenmissionen) im Sinne des erwähnten *integrierten Verfahrens* zu nutzen. Hierfür wäre die dynamische Methode aufgrund ihres universellen Charakters zur Verarbeitung heterogener Datensätze besonders geeignet. Desweiteren lassen sich eventuell Verbesserungen für die gelösten Feldmodelle durch andere Varianten der vorgeschlagenen Vorgehensweise, z.B. hinsichtlich der Parametrisierung des Bewegungsproblems und/oder durch die Nutzung der Relativentfernungen und/oder der Relativbeschleunigungen des K-Band-Instruments, erzielen.

Schließlich bildet die Modellanalyse, d.h. die Ableitung, Interpretation und letztendlichen Nutzung satelliten-basierter Massenanomalien ein noch weithin offenes Forschungsfeld. Neben der Frage nach einer plausiblen nachträglichen Reduktion der systematischen Modellfehler, deren zuverlässigen Abschätzung im Sinne einer äußeren Genauigkeit sowie der Extraktion von regionalen Massenanomalien aus globalen Schwerfeldmodellen bedarf es der Bearbeitung des bisher ungelösten Problems der Signaltrennung.

Literaturverzeichnis

- Bertiger, W., C. Dunn, I. Harris, G. Kruizinga, L. Romans, M. Watkins, und S. Wu. Relative time and frequency alignment between two low Earth orbiters, GRACE. In *Proceedings of IEEE*. Tampa Florida/USA, 2003.
- Bertin, P.-Y. *SuperSTAR Accelerometer for the Gravity and Climate Experiment, GRACE 327 - 520*. Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 92322 Châtillon Cédex - France, 1998.
- Bettapur, S. *Product Specification Document, GRACE 327-720, Rev. 4.1*. Center for Space Research, The University of Texas, Austin/TX, 2004.
- Bettapur, S., S. Poole, und J. Ries. GRACE Mission Status and Gravity Field Product Improvement Plans. Vortrag G23-A01, AGU Fall Meeting, San Francisco/USA, 2004.
- Biancale, R., G. Balmino, J.-M. Lemoine, J.-C. Marty, B. Moynot, F. Barlier, P. Exertier, O. Laurain, P. Gegout, P. Schwintzer, C. Reigber, A. Bode, T. Gruber, R. König, F.-H. Massmann, J. Raimondo, R. Schmidt, und S. Zhu. A New Global Earth's Gravity Field Model from Satellite Orbit Perturbations: GRIM5-S1. *Geophysical Research Letters*, 27, 2000.
- Biancale, R. und A. Bode. Mean Annual and Seasonal Atmospheric Tide Models Based on 3-hourly and 6-hourly ECMWF Surface Pressure Data. Technischer Bericht, Scientific Technical Report STR06/01, GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ), 2006.
- Bouman, J. *Quality assessment of satellite-based global gravity field models*. Dissertation, Netherlands Geodetic Commission, Delft, 2000.
- Cartwright, D. E. und R. J. Tayler. New Computations of the Tide-Generating Potential. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, (23), 1971.
- Case, K., G. Kruizinga, und S.-C. Wu. *GRACE L1B Data Product User Handbook, GRACE 327-733*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena/California, 2004.
- Chapman, S. und R. Lindzen. *Atmospheric Tides*. D. Reidel, Dordrecht, 1970.
- Chen, J. L., C. R. Wilson, und K. W. Seo. Optimized smoothing of Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) time-variable gravity observations. *J. Geophys. Res.*, 111(B06408, doi:10.1029/2005JB004064), 2006.
- Cheng, M. K., C. K. Shum, und B. D. Tapley. Determination of long-term changes in the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations. *Journal of Geophysical Research*, (Vol. 102, No. B10), 1997.
- Darwin, G. H. Report of a Committee, consisting of Professors G.H. Darwin and J.C. Adams, for the Harmonic Analysis of Tidal Observations. Technischer Bericht 49-118, British Association for the Advan. of Sci., Reprinted in Darwin (1907), 1883.

- Desai, S. D. Observing the pole tide with satellite altimetry. *J. Geophys. Res.*, (107 (C11), 3186, doi:10.1029/2001JC001224), 2002.
- Döll, P., F. Kasper, und B. Lehner. A global hydrological model for deriving water availability indicators: model tuning and validation. *J. Hydrol.*, (270), 2003.
- Doodson, A. The Harmonic Development of the Tide-Generating Potential. *Proc. R. Soc. London*, (A100, 305-29), 1921.
- ESA. Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission. Technischer Bericht ESA SP-1233(1), European Space Agency (ESA), Earth Sciences Division, Earth Observation Preparatory Programme, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, 1999.
- Fackler, U. *GRACE - Analyse von Beschleunigungsmessungen*. Diplomarbeit, Institut für Astronom. und Physik. Geodäsie der Technischen Universität München, München, 2005.
- Farrell, W. Deformation of the Earth by surface loading. *Rev. Geophys.*, 10, 1972.
- Ferrari, A. J. Lunar gravity: a harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, (82):3065–3084, 1977.
- Flechtner, F. *AOD1B Product Description Document. GRACE Project Documentation, JPL 327-750, Rev. 2.1*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena/California, 2005a.
- Flechtner, F. *GFZ Level-2 Processing Standards Document for Level-2 Product Release 0003, GRACE 327-743, Rev. 1.1*. GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ), Department 1: Geodesy and Remote Sensing, Telegrafenberg, 14471Potsdam, 2005b.
- Flechtner, F. Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) Related Publications. http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/index_GRACE.html, 2006.
- Förste, C., F. Flechtner, R. Schmidt, U. Meyer, R. Stubenvoll, F. Barthelmes, R. König, K.-H. Neumayer, M. Rothacher, C. Reigber, R. Biancale, S. Bruinsma, J. M. Lemoine, und J. C. Raimondo. A New High Resolution Global Gravity Field Model Derived From Combination of GRACE and CHAMP Mission and Altimetry/Gravimetry Surface Gravity Data. Poster EGU05-A-04561, EGU General Assembly, Wien, 24-29. April, 2005.
- Förste, C., F. Flechtner, R. Schmidt, U. Meyer, R. Stubenvoll, F. Barthelmes, R. König, K.-H. Neumayer, M. Rothacher, C. Reigber, R. Biancale, S. Bruinsma, J. M. Lemoine, und J. C. Raimondo. http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/index_RESULTS.html, 2006.
- Frommknecht, B. *Simulation des Sensorverhaltens bei der GRACE-Mission*. Diplomarbeit, Institut für Astronom. und Physik. Geodäsie der Technischen Universität München, München, 2001.
- Frommknecht, B., H. Oberndorfer, F. Flechtner, und R. Schmidt. Integrated sensor analysis for GRACE - development and validation. *Advances in Geosciences*, 1, 2003.
- Gerlach, C., L. Földvary, D. Svehla, T. Gruber, M. Wermuth, N. Sneeuw, B. Frommknecht, H. Oberndorfer, T. Peters, M. Rothacher, R. Rummel, und P. Steigenberger. A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral. 30, 20, doi:10.1029/2003GL018025, 2003.
- Gruber, T., A. Bode, C. Reigber, und P. Schwintzer. GRIM5-C1: Combination solution of the global gravity field to degree and order 120. *Geophysical Research Letters*, 27, 2000.

- Han, D. und J. Wahr. The viscoelastic relaxation of a realistically stratified Earth, and a further analysis of post-glacial rebound. *Geophys. J. Int.*, 120, 1995.
- Han, S.-C., C. Jekeli, und C. K. Shum. Time-variable aliasing effects of ocean tides, atmosphere, and continental water mass on monthly mean GRACE gravity field. *J. Geophys. Res.*, Vol. 109, B04403, 2004.
- Han, S.-C., C. K. Shum, und C. Jekeli. Precise estimation of in situ geopotential differences from GRACE low-low satellite-to-satellite tracking and accelerometer data. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 111(B10), 2006.
- Han, S.-C., C. K. Shum, C. Jekeli, C.-Y. Kuo, C. Wilson, und K.-W. Seo. Non-isotropic filtering of GRACE temporal gravity for geophysical signal enhancement. *Geophysical Journal International*, 163(doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02756.x), 2005.
- Haurwitz, B. und A. D. Cowley. The Diurnal and Semidiurnal Barometric Oscillations, Global Distribution and Annual Variation. *Pure Appl. Geophys.*, (102(1)), 1973.
- Heiskanen, W. und H. Moritz. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co., San Francisco, CA/USA, 1967.
- Hernandez, F., P. Schaeffer, M. H. Calvez, J. Dorandeu, Y. Faugère, und F. Mertz. Surface Moyenne Oceanique: Support à la mission altimétrique Jason-1, et à une mission micro-satellite altimétrique. Technischer Bericht CLS/DOS/NT/00.341, CLS, Ramonville St Agne, 2001.
- Hoffmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger, und J. Collins. *GPS Theory and Practice*. Nummer 3rd Revised Edition. Springer-Verlag, 1994.
- Horwath, M. und R. Dietrich. Errors of regional mass variations inferred from GRACE monthly solutions. *Geophys. Res. Lett.*, 33(L07502, doi:10.1029/2005GL025550), 2006.
- Hudson, D. G. *In-Flight Characterization and Calibration of the SuperSTAR Accelerometer*. Diplomarbeit, The University of Texas at Austin, 2003.
- Ilk, K. H., J. Flury, R. Rummel, P. Schwintzer, B. W., C. Haas, J. Schröter, D. Stammer, W. Zahel, H. Miller, R. Dietrich, P. Huybrechts, H. Schmeling, D. Wolf, H. J. Götze, J. Riegger, A. Bardossy, A. Güntner, und T. Gruber. Mass Transport and Mass Distribution in the Earth System. Technischer Bericht 2. Ausgabe, GOCE-Projektbüro Deutschland, Technische Universität München, GeoForschungsZentrum Potsdam, 2005.
- Ilk, K. H., T. Mayer-Gürr, A. Eicker, und M. Feuchtinger. The Regional Refinement of Global Gravity Field Models from Kinematical Orbits, New Satellite Mission Results for the Geopotential Fields und Their Variations. In *Proceedings Joint CHAMP/GRACE Science Meeting*. GFZ Potsdam, 2004.
- JPL. *GRACE - Star Camera Assembly (SCA) Specification, GRACE 327-530*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena/California, 2000.
- Kang, Z. *Präzise Bahnbestimmung niedrigfliegender Satelliten mittels GPS und die Nutzung für die globale Schwerefeldmodellierung*. Dissertation, GeoForschungsZentrum GFZ, Potsdam, 1998.
- Kaschenz, J. *Regularisierung unter Berücksichtigung von Residuentoleranzen*. Dissertation, GeoForschungsZentrum GFZ, Potsdam, 2006.

- Keating, T. Geopotential Research Mission, Science, Engineering, and Program Summary. Technischer Bericht, NASA TM-86240, 1986.
- Kim, J. *Simulation Study of A Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking Mission*. Dissertation, Center for Space Research, The University of Texas at Austin, Austin, Texas, 2000.
- Knudsen, P. Ocean Tides in GRACE Monthly Averaged Gravity Fields. *Space Science Reviews*, 00:1-9, 2002.
- Knudsen, P. und O. Anderson. Correcting GRACE gravity fields for ocean tide effects. *Geophys. Res. Let.*, Vol. 29, No. 8, 2002.
- Koch, K. R. Determining the Maximum Degree of Harmonic Coefficients in Geopotential Models by Monte Carlo Methods. *Geophysica et Geodaetica*, 49:259–275, 2005.
- Kusche, J., K. H. Ilk, S. Rudolph, und M. Thalhammer. Application of spherical wavelets for regional gravity field recovery - a comparative study. In *Geodesy on the Move*, herausgegeben von R. Forsberg, Band 119 von *IAG Symposia*, Seiten 213–218. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- Lambeck, K. *Geophysical Geodesy*. Oxford Science Publications, 1988.
- Lemoine, F., S. Kenyon, J. Factor, R. Trimmer, N. Pavlis, S. Chinn, C. Cox, S. Klosko, S. Luthcke, M. Torrence, Y. Wang, R. Williamson, E. Pavlis, R. Rapp, und T. Olson. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. Technischer Bericht NASA/TP–1998-206861, National Aeronautics and Space Administration (NASA), Goddard Space Flight Center (GSFC), Greenbelt, Maryland, USA, 1998.
- Letellier, T., F. Lyard, und F. Lefebvre. The new global tidal solution: FES2004. *Ocean Surface Topography Science Team Meeting*, 2004.
- Mayer-Gürr, T. *Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE*. Dissertation, Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Bonn, 2006.
- McCarthy, D. D. und G. Petit. IERS Conventions (2003). Technischer Bericht IERS Technical Note No. 32, International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS), Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, 2004.
- NRC. *Satellite Gravity And The Geosphere*. National Research Council, National Academy Press, Washington D.C., 1997.
- Ray, R. D., R. J. Eanes, G. D. Egbert, und N. K. Pavlis. Error spectrum for the global M_2 ocean tide. *Geophys. Res. Let.*, Vol. 28, No. 1, 2001.
- Ray, R. D. und R. M. Ponte. Barometric tides from ECMWF operational analyses. *Annales Geophysicae*, Vol. 21, 2003.
- Reigber, C. Improvements of the gravity field from satellite techniques as proposed to the European Space Agency. In *Proceedings of the 9th GEOP Conference*, Band Department of Geod. Sci. Rep. 280, Seiten 221–232. Ohio State University, Columbus, 1978.

- Reigber, C., H. Jochmann, J. Wunsch, S. Petrovic, P. Schwintzer, F. Barthelmes, K.-H. Neumayer, R. König, C. Förste, G. Balmino, R. Biancale, J.-M. Lemoine, S. Loyer, und F. Perosanz. Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP. In *Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit*, herausgegeben von C. Reigber, H. Lühr, P. Schwintzer, und J. Wickert, Seiten 25–30. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- Reigber, C., R. Schmidt, F. Flechtner, R. König, U. Meyer, K.-H. Neumayer, P. Schwintzer, und S. Y. Zhu. First GFZ GRACE Gravity Field Model EIGEN-GRACE01S. http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/index_RESULTS.html, 2003.
- Reigber, C., R. Schmidt, F. Flechtner, R. König, U. Meyer, K.-H. Neumayer, P. Schwintzer, und S. Y. Zhu. An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S. *Journal of Geodynamics*, 39(1-10, doi:10.1016/j.jog.2004.07.001), 2005.
- Reigber, C., P. Schwintzer, und H. Lühr. The CHAMP geopotential mission. *Boll. Geof. Teor. Appl.*, 40, 1999.
- Reigber, C., P. Schwintzer, R. Stubenvoll, R. Schmidt, F. Flechtner, U. Meyer, R. König, K.-H. Neumayer, C. Förste, F. Barthelmes, S. Y. Zhu, G. Balmino, R. Biancale, J. M. Lemoine, H. Meixner, und J. C. Raimondo. A High Resolution Global Gravity Field Model Combining CHAMP and GRACE Satellite Mission and Surface Data: EIGEN-CG01C. Technischer Bericht, Scientific Technical Report STR06/07, GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ), 2006.
- Rothacher, M. Orbits of Satellite Systems in Space Geodesy. Astronomisches Institut der Universität Bern, 1991.
- Schmidt, R., F. Flechtner, A. Güntner, R. König, U. Meyer, K. H. Neumayer, C. Reigber, S. Petrovic, und S. Y. Zhu. GRACE Time-Variable Gravity Accuracy Assessment. In *Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools*, herausgegeben von P. Tregoning und C. Rizos, Band 130 von *IAG Symposium Series*. Springer-Verlag, 2006a.
- Schmidt, R., F. Flechtner, U. Meyer, R. König, K.-H. Neumayer, M. Rothacher, C. Reigber, R. Biancale, S. Bruinsma, J. M. Lemoine, und J. C. Raimondo. http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/index_RESULTS.html, 2006b.
- Schmidt, R., P. Schwintzer, F. Flechtner, C. Reigber, A. Güntner, P. Döll, G. Ramillien, A. Cazenave, S. Petrovic, H. Jochmann, und J. Wunsch. GRACE observations of changes in continental water storage. *Global and Planetary Change*, 50(doi:10.1016/j.glopacha.2004.11.018), 2006c.
- Schwiderski, E. Atlas of Ocean Tidal Charts and Maps, Part I: The Semidiurnal Principle Lunar Tide M2. *Marine Geodesy*, 6, 1983.
- Schwintzer, P., C. Reigber, F.-H. Massmann, W. Barth, J. C. Raimondo, M. Gerstl, H. Li, R. Biancale, G. Balmino, B. Moynot, J. M. Lemoine, J. C. Marty, Y. Boudon, und F. Barlier. A NEW EARTH GRAVITY FIELD MODEL IN SUPPORT OF ERS-1 AND SPOT-2: GRIM4-S1/C1. Technischer Bericht, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, Abt. I (DGFI), Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale (GRGS), Munich, Germany, Toulouse, France, 1991.
- Seeber, G. *Satellite Geodesy*. Walter de Gruyter, Berlin, 2 Auflage, 2003.

- Seo, K.-W. und C. R. Wilson. Simulated estimation of hydrological loads from GRACE. *Journal of Geodesy*, 78(doi:10.1007/s00190-004-0410-5), 2005.
- Sneeuw, N. *a semi-analytical approach to gravity analysis from satellite observations*. Dissertation, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 2000.
- Stammer, D., C. Wunsch, R. Giering, C. Eckert, P. Heinbach, J. Marotzke, A. Adcraft, C. N. Hill, und J. Marshall. Global ocean circulation during 1992-1997 estimation from ocean observations and a general circulation model. *J. Geophys. Res.*, 107,C9,3118,doi:10.1029/2001JC000888, 2002.
- Swenson, S. und J. Wahr. Methods for inferring regional surface-mass anomalies from Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE measurements) of time-variable gravity. *J. Geophys. Res.*, 107(B9)(2193, doi:10.1029/2001JB000576), 2001.
- Swenson, S. und J. Wahr. Post-processing removal of correlated errors in GRACE data. *Geophys. Res. Lett.*, 33(L08402, doi:10.1029/2005GL025285), 2006.
- Tapley, B., D. Chambers, S. Bettapur, und J. Ries. Large scale ocean circulation from the GRACE GGM01 geoid. *Geophys. Res. Lett.*, 30((22), 2163, doi:10.1029/2003GL018622), 2003.
- Tapley, B. und C. Reigber. The GRACE mission: status and future plans. *EOS Trans. AGU*, (82 (47), Fall Meet., Suppl. G41C-02), 2001.
- Tapley, B., J. Ries, S. Bettapur, D. Chambers, M. Cheng, F. Condi, B. Gunter, Z. Kang, P. Nagel, R. Pastor, T. Pekker, S. Poole, und F. Wang. GGM02 - An improved Earth gravity field model from GRACE. *Journal of Geodesy*, 79, 8, doi:10.1007/s00190-005-0480-z, 2005.
- Thomas, J. B. An Analysis of Gravity-Field Estimation Based on Intersatellite Dual-1-Way Biased Ranging. Technischer Bericht JPL Publication 98-15, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California/USA, 1999.
- Thompson, P. F., S. V. Bettapur, und B. D. Tapley. Impact of short-period, non-tidal, temporal mass variability on GRACE gravity estimates. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 31, L06619, 2004.
- Touboul, P., E. Willemenot, B. Foulon, und V. Josselin. Accelerometer for CHAMP, GRACE and GOCE space missions: Synergy and Evolution. *Boll. Geof. Teor. Appl.*, 40, 1999.
- Wahr, J., M. Molenaar, und F. Bryan. Time variability of the Earth's gravity field: Hydrological and ocean effects and their possible detection using GRACE. *J. Geophys. Res.*, 103(B12), 1998.
- Wahr, J., S. Swenson, und I. Velicogna. Accuracy of GRACE mass estimates. *Geophys. Res. Lett.*, 33(L06401, doi:10.1029/2005GL025305), 2005.
- Wahr, J., S. Swenson, V. Zlotnicki, und I. Velicogna. Time-variable gravity from GRACE: First results. *Geophys. Res. Lett.*, 31(L11501, doi:10.1029/2004GL019779), 2004.
- Wolff, M. Direct Measurement of the Earth's Gravitational Potential Using a Satellite Pair. *J. Geophys. Res.*, Vol. 75(22), 1969.

- Wu, S.-C., G. Kruizinga, und W. Bertiger. *Algorithm Theoretical Basis Document for GRACE Level-1B Data Processing, GRACE 327-741*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena/California, 2004.
- Wünsch, J., P. Schwintzer, und S. Petrovic. Comparison of two different ocean tide models especially with respect to the GRACE satellite mission. Technischer Bericht STR05/08, GeoForschungsZentrum Potsdam (GFZ), 2005.

A. Akzelerometer-Parameter

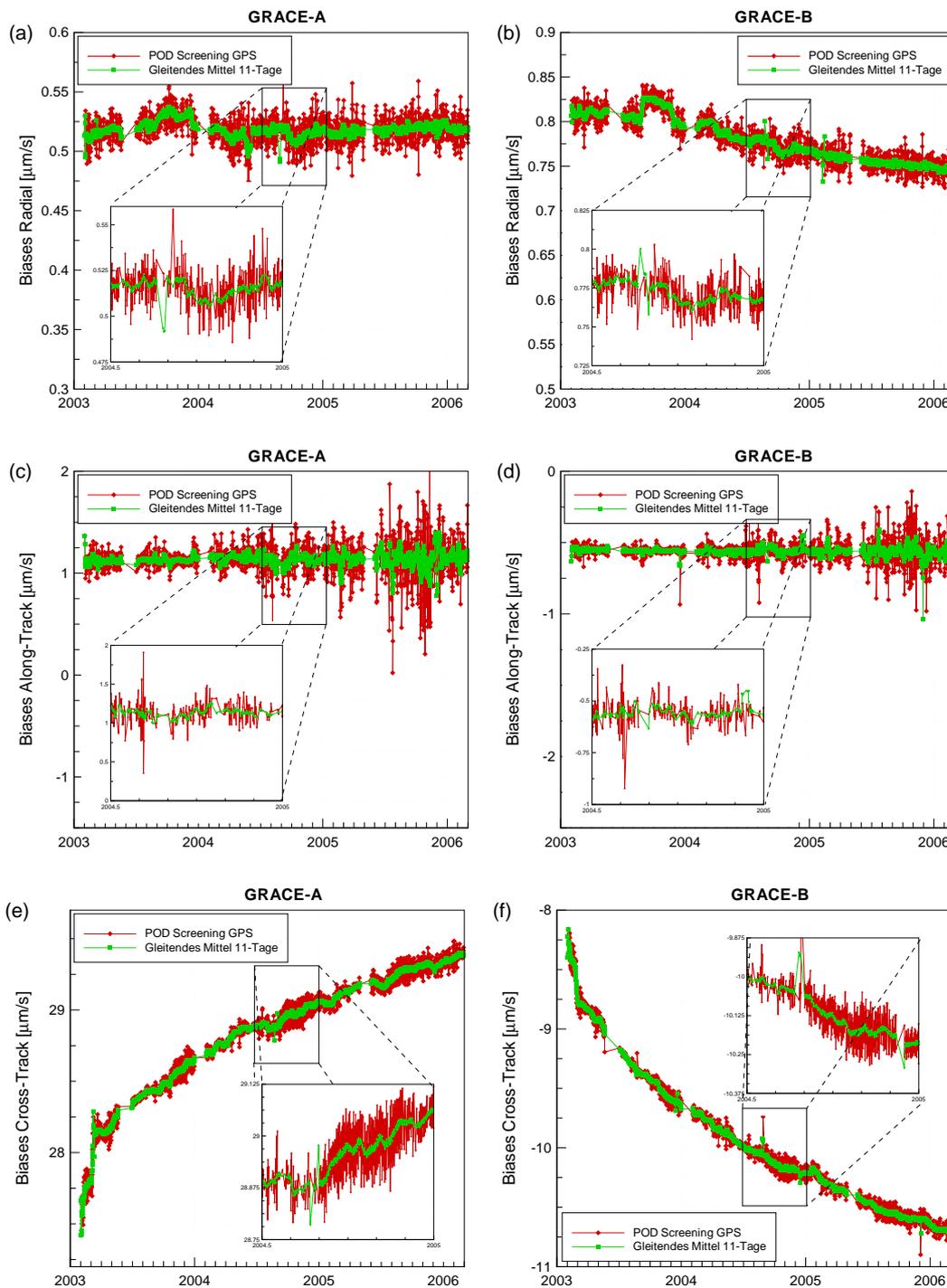


Abbildung A.1.: Additionskonstanten der Akzelerometer GRACE-A/B. Schätzergebnisse aus Bestimmung Näherungsbahnen auf Basis der GPS-SST-Beobachtungen (KBR-SST-Daten nur heruntergewichtet mitgeführt). Tägliche Auflösung sowie gleitendes Mittel über 11-Tageswerte.

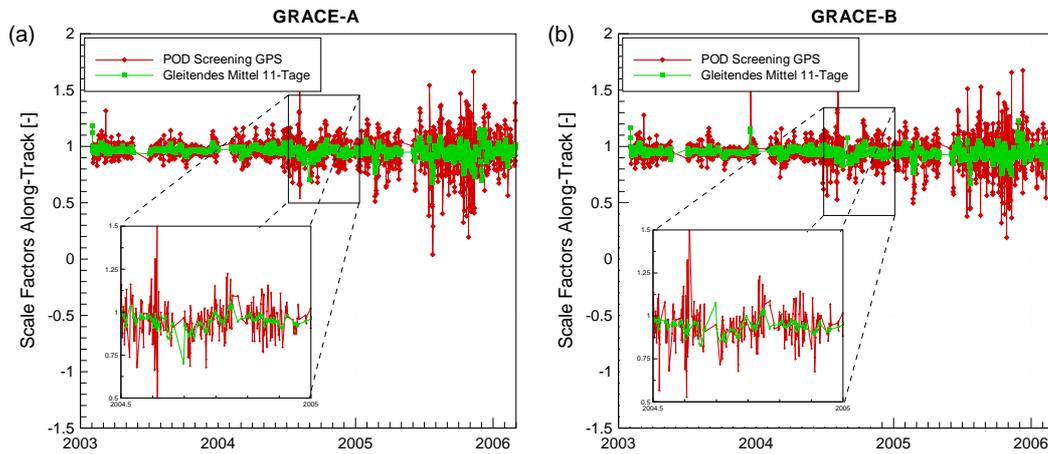


Abbildung A.2.: Skalierungsfaktoren der Along-Track-Achsen Akzelerometer GRACE-A/B. Schätzergebnisse aus Bestimmung Näherungsbahnen auf Basis der GPS-SST-Beobachtungen (KBR-SST-Daten nur heruntergewichtet mitgeführt). Tägliche Auflösung sowie gleitendes Mittel über 11-Tageswerte.

B. Apriori-Modelle zeitvariables Schwerefeld

Um Zugang zu den gesuchten, nicht modellierten Schwerefeldvariationen zu erhalten werden nach Gleichung (4.21) Feldänderungen für Gezeiten der festen Erde, der Ozeane und Atmosphäre, säkulare Änderungen zonaler Schwerefeldkoeffizienten wegen global-isostatischer Landhebungsprozesse, sowie wegen Kurzzeitmassenvariationen in Atmosphäre und Ozean apriori berücksichtigt. Grundlage ist eine separate Modellierung der jeweiligen Potentialfunktion zur Berechnung der zugehörigen Störbeschleunigung (durch Gradientenbildung entlang der Satellitenbahn) und der additiven Überlagerung der Anteile nach (4.21). Die Modellierungskonzepte bzw. Standards für Gezeiteneffekte sind den IERS Konventionen 2003 [McCarthy und Petit, 2004] entnommen, eine ausführliche Beschreibung der Modellierung der ozeanischen und atmosphärischen Kurzzeitmassenvariationen findet man in Flechtner [2005a].

Tabelle B.1 fasst typische Größenordnungen gravitativer und nichtgravitativer Beschleunigungen entlang der Bahn von GRACE zusammen. Man sieht, dass die zeitvariablen Schwerefeldeffekte etwa 3 - 4 Größenordnungen kleiner sind als der Einfluss der räumlichen Variationen des statischen Feldes. Störkräfte verursacht durch Gezeiten der festen Erde und der Ozeane liegen in der Größenordnung von nichtgravitativen Beschleunigungen (Luftwiderstand, solarer Strahlungsdruck, Erdalbedo). Sonstige Schwerefeldvariationen sind noch einmal 1 - 2 Größenordnungen kleiner.

Tabelle B.1.: Größenordnung gravitativer Beschleunigungen entlang GRACE-Orbit als maximaler Betrag (2.Spalte) und RMS (3.Spalte). Zur Berechnung der relativen Größenordnung wurde $\max|\mathbf{b}_i|$ auf den Wert $\max|\mathbf{b}|$ für den Anteil des statischen Feldes allein aus \bar{C}_{00} (Zentral-/Kepler-Term) und \bar{C}_{20} bezogen.

Beschleunigung \mathbf{b}_i	$\max \mathbf{b}_i $ [m/s ²]	RMS $ \mathbf{b}_i $ [m/s ²]	Relative Größenordnung
statisches Feld (Kepler-Term + \bar{C}_{20})	8.5	0.04	1
statisches Feld ($n = m = 200$)	4.6×10^{-4}	7.3×10^{-5}	5.4×10^{-5}
Drittkörper (Sonne, Mond, ...)	1.3×10^{-6}	8.4×10^{-8}	1.5×10^{-7}
Nichtgravitative Beschleunigungen	8.3×10^{-7}	1.1×10^{-7}	9.0×10^{-8}
Gezeiten der festen Erde	3.3×10^{-7}	2.0×10^{-8}	4.0×10^{-8}
Ozeangezeiten	3.0×10^{-7}	5.7×10^{-8}	3.5×10^{-8}
Kurzzeitmassenvariationen Atmosphäre+Ozeane	7.0×10^{-8}	9.1×10^{-9}	8.2×10^{-9}
Atmosphärengzeiten	4.3×10^{-9}	1.0×10^{-9}	5.1×10^{-10}

B.1. Gezeiten der festen Erde

Die Modellierung der Erdgezeiten nach den IERS Standards 2003 [McCarthy und Petit, 2004, Kapitel 6.1] umfasst eine Beschreibung zeitlicher Variationen der Stokes-Koeffizienten bis Grad und Ordnung 4 als Zuschläge $\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$ zu den statischen Koeffizienten. Zur Approximation des komplexen mechanischen Deformationsverhalten der Erde (elastische und anelastische

Deformation, Einfluss der Fliehkräfte wegen Erdrotation, Auflast-Effekte der Ozeane, Nutationsbewegungen des Erdkerns) werden grad- und ordnungsabhängige sowie frequenzabhängige Love-Zahlen verwendet. In einem ersten Schritt erfolgt die Berechnung der Änderungen der Schwerefeldkoeffizienten der Grade $n = 2$ und $n = 3$, verursacht durch das Gezeitenpotential von Sonne und Mond für eine elastische Erde (d.h. von der Erregerfrequenz unabhängigen Love-Zahlen k_{nm}):

$$\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{GM_{Erde}} \left(\frac{R_{Erde}}{r_j} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi_j) e^{-im\lambda_j}. \quad (\text{B.1})$$

Es bedeuten in Gleichung (B.1):

- k_{nm} : nominelle Love-Zahl vom Grad n und Ordnung m ,
- R_{Erde} : mittlerer Erdradius,
- GM_{Erde} : Produkt Gravitationskonstante mal Masse der Erde,
- GM_j : Produkt Gravitationskonstante mal Masse des Mondes ($j = 2$) und Sonne ($j = 3$),
- r_j : Abstand Geozentrum-Mond und Geozentrum-Sonne,
- Φ_j : geozentrische Breite von Mond und Sonne im erdfesten Bezugssystem,
- λ_j : geozentrische Länge (nach Osten von Greenwich) von Mond und Sonne
: im erdfesten Bezugssystem und
- \bar{P}_{nm} : die normalisierten zugeordneten Legendre-Polynome von Grad n und Ordnung m .

Ein vergleichbarer Ausdruck wird für die Terme vom Grad $n = 4$ angegeben (vgl. McCarthy und Petit [2004, Kapitel 6.1]). In einem zweiten Schritt erfolgen Korrekturen der Koeffizienten vom Grad 2 wegen frequenzabhängiger Love-Zahlen k_f aufgrund anelastischer Deformationseigenschaften. Für die zeitliche Korrektur in \bar{C}_{20} gilt:

$$\Delta\bar{C}_{20} = \Re \sum_{f(2,0)} (A_0 \delta k_f H_f) e^{i\theta_f} \quad (\text{B.2})$$

und für \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} sowie \bar{C}_{22} , \bar{S}_{22}

$$\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m} = \eta_m \sum_{f(2,0)} (A_m \delta k_f H_f) e^{i\theta_f}. \quad (\text{B.3})$$

Die A_m und η_m sind von der Ordnung m abhängige Vorfaktoren [McCarthy und Petit, 2004, siehe Gleichungen (5c)-(5e) S.61], die δk_f sind die Differenzen der frequenzabhängigen Lovezahlen gegenüber dem nominellen Wert, die H_f die Amplitude des jeweiligen Terms aus der harmonischen Entwicklung des Gezeitenpotentials (Konvention von Cartwright und Tayler [1971]) und θ_f die zeitabhängige Doodson-Variable (vgl. Variable θ_s in Abschnitt B.2). Für die Berechnung der δk_f siehe Abschnitt 6.1, S. 61 ff in [McCarthy und Petit, 2004]. \Re ist der Realteil der resultierenden komplexen Zahl auf der rechten Seite von Ausdruck (B.2).

Die Variationen in den \bar{C}_{2m} , \bar{S}_{2m} -Koeffizienten erreichen dabei eine absolute Größenordnung von bis zu 10^{-8} und 3×10^{-12} in den \bar{C}_{4m} , \bar{S}_{4m} -Termen. Abbildung B.1 (links) zeigt typische Änderungen der Koeffizienten \bar{C}_{20} und \bar{C}_{21} wegen Erdgezeiten für den Monat November 2003. Rechts daneben wird die Zeitreihe des Gesamteffekts der Erdgezeiten für einen willkürlich gewählten Punkt auf der Erdoberfläche, ebenfalls für den Monat November 2003 gezeigt.

In einem weiteren, dritten Schritt werden die Variationen wegen der Poltide sowie der Permanenten Tide berücksichtigt.

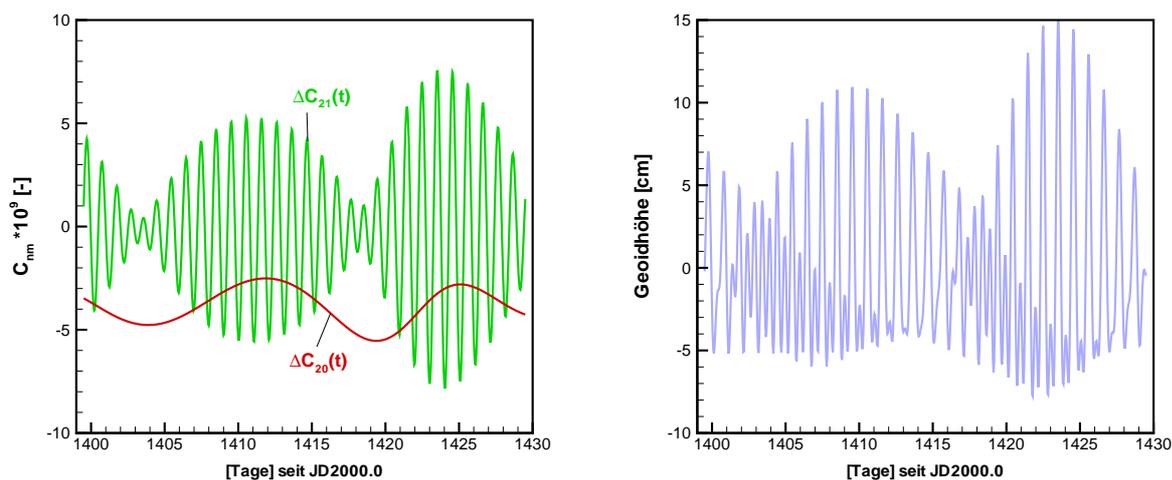


Abbildung B.1.: Links: Variationen der Koeffizienten \bar{C}_{20} und \bar{C}_{21} wegen Erdzeiten nach den IERS Standards 2003 [McCarthy und Petit, 2004, Kapitel 6.1] für den Monat November 2003. Rechts: Resultierende Geoidhöhenvariationen in dem Punkt mit der Breite $\varphi = 45.5^\circ$ und der Länge $\lambda = 0^\circ$

Poltide

Aufgrund der Polbewegung entsteht ein Zentrifugalpotential, welches weitere Deformationen der festen Erde aber auch der Ozeane bewirkt. Die dadurch entstehenden Schwankungen des Schwerfeldes werden als Poltide der festen Erde und Poltide der Ozeane bezeichnet. Der erste Einfluss erzeugt im wesentlichen Änderungen der Schwerfeldkoeffizienten \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} . Das Modell der Poltide der festen Erde mit den von den Polkoordinaten x_p , y_p abhängigen Größen m_1 , m_2 lautet [McCarthy und Petit, 2004, siehe Abschnitt 6.2, S. 62]

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{21} &= -1.333 \times 10^{-9}(m_1 - 0.0115m_2) \\ \Delta\bar{S}_{21} &= -1.333 \times 10^{-9}(m_2 + 0.0115m_1).\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

m_1 , m_2 sind in Bogensekunden einzusetzen und ergeben sich nach Abschnitt 7.1.4 der IERS Konventionen 2003. Abbildung B.2 links zeigt resultierende Variationen für \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} auf Basis täglicher Polbewegungsparameter x_p , y_p (IERS, Bulletin B) für den Zeitraum Januar 1962 - Mai 2005. Die Amplituden erreichen einen Wert von etwa $4 \cdot 10^{-10}$ und werden mit dem Gang der Polwegung moduliert (periodische Anteile z.B. Chandler-Wobble und langfristiger Trend). Während eine Monats ist der Einfluss im wesentlichen säkular (vgl. Abb. B.2 rechts).

Der Effekt der Poltide der Ozeane ist etwa noch einmal eine Größenordnung kleiner als die Poltide der festen Erde. Daher wurde der Einfluss bisher als vernachlässigbar betrachtet und es gab bislang in den IERS Standards kein entsprechendes Modell. Gegenwärtig wird jedoch das Modell von Desai [2002] in die Konventionen aufgenommen, welches für diese Arbeit über das GRACE-SDS vorab zur Verfügung stand. Danach ergeben sich für die dominierenden Variationen in \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} zu (B.4) analoge Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{21} &= -2.2344 \times 10^{-10}(m_1 - 0.01737m_2) \\ \Delta\bar{S}_{21} &= -1.7680 \times 10^{-10}(m_2 + 0.03351m_1).\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Das Modell von Desai ist insgesamt bis Grad und Ordnung 360 hochauflösend entwickelt, wobei jedoch eine Berücksichtigung bis Grad und Ordnung 30 für die Auswertung von GRACE-Daten

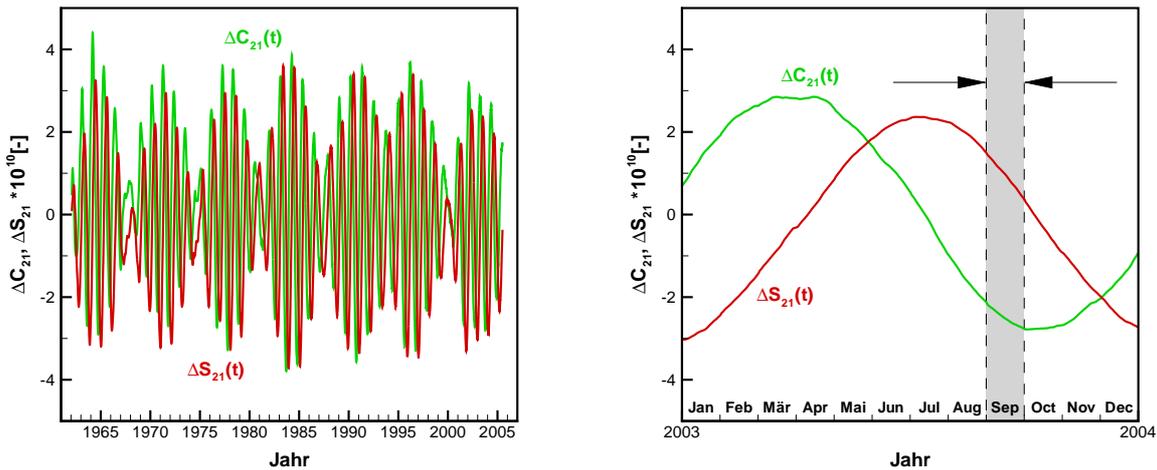


Abbildung B.2.: Links: Variationen \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} wegen Poltide nach dem Modell der IERS Konventionen 2003 [McCarthy und Petit, 2004, Abschnitt 6.2, S. 62] auf Basis täglicher Polbewegungsparameter x_p , y_p (IERS, Bulletin B) für den Zeitraum Januar 1962 - Mai 2005. Rechts: Ausschnitt des linken Bildes für das Jahr 2003.

bei weitem als ausreichend erscheint (Mitteilung CSR/JPL über das GRACE-SDS). Zeitreihen von Variationen in \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} aus GRACE-Monatslösungen, bei denen der Effekt der Poltide der Ozeane apriori nicht berücksichtigt wurden, zeigen klar die Sensitivität der Mission gegenüber diesem Einfluss (siehe Abb. B.3).

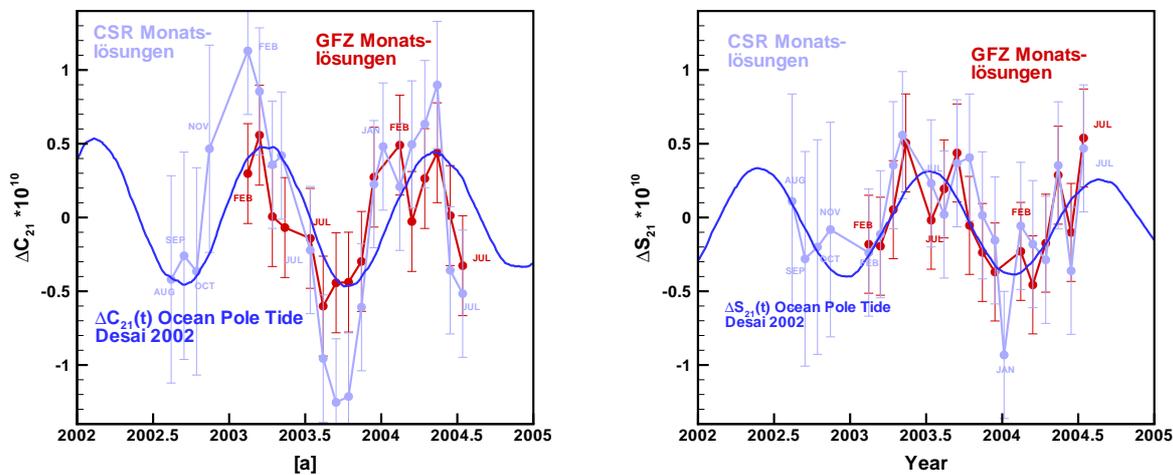


Abbildung B.3.: Variationen für \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} aus monatlichen GRACE-Schwerefeldern vom GFZ und von CSR, die ohne Berücksichtigung der Poltide der Ozeane berechnet wurden. Ein Bias und ein linearer Trend wurden jeweils entfernt. Daneben sind die erwarteten Schwankungen in \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} nach Gleichung (B.5) dargestellt. Die vertikalen Linien geben die Unsicherheiten der GRACE-basierten Werte auf der Grundlage näherungsweise kalibrierter Fehler an.

Permanente Tide

Die Anteile wegen des zonalen Grads $n = 2$ Terms des Gezeitenpotentials sind im zeitlichen Mittel ungleich Null und erzeugen eine permanente Deformation der festen Erde. Wegen $nm = 20$

ergibt sich ein konstanter Beitrag $\Delta\bar{C}_{20}^{PT}$, der im Rahmen der Modellierung des statischen Feldes berücksichtigt werden kann oder nicht. Im ersten Fall, also \bar{C}_{20} enthält $\Delta\bar{C}_{20}^{PT}$, spricht man von einem *zero tide* Wert für \bar{C}_{20} , der mit \bar{C}_{20}^{zt} bezeichnet wird. Im zweiten Fall, d.h. \bar{C}_{20} enthält nicht den Beitrag der Permanenten Tide, spricht man von einem *conventional tide free* Wert für \bar{C}_{20} , der mit \bar{C}_{20}^{tf} bezeichnet wird. Im Zuge der Auswertung der Erdgezeiten nach obiger Vorgehensweise nach McCarthy und Petit [2004] ist zwischen der Verwendung von \bar{C}_{20}^{tf} und \bar{C}_{20}^{zt} zu unterscheiden. Benützt man den *tide free* Wert von \bar{C}_{20} , so kann der oben zitierte Algorithmus direkt verwendet werden. Im Fall der Nutzung des *zero tide* Wertes würde die ursprüngliche Vorgehensweise zu einer doppelten Berücksichtigung der permanenten Tide führen und es ist eine modifizierte Gleichung zur Berechnung von $\Delta\bar{C}_{20}$ zu verwenden [McCarthy und Petit, 2004, siehe Abschnitt 6.3, S. 67]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der *tide free* Wert von \bar{C}_{20} verwendet.

B.2. Ozeangezeiten

Die Berechnung der zeitabhängigen Zuschläge zu den sphärisch-harmonischen Koeffizienten wegen der luni-solaren Gravitationswirkung auf die Ozeanmassen erfolgt mittels [McCarthy und Petit, 2004, Abschnitt 6.4, S.67]

$$\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = F_{nm} \sum_{s(n,m)} \sum_{+} (C_{snm}^{\pm} \mp iS_{snm}^{\pm}) e^{\pm i\theta_s}. \quad (\text{B.6})$$

Die Skalierungsfaktoren F_{nm} ergeben sich mit

$$F_{nm} = \frac{4\pi G\rho_w}{g} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{om})}} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1}\right) \quad (\text{B.7})$$

wobei in (B.6) und (B.7)

- g : mittlere Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche ($g = GM/R$),
- G : die Gravitationskonstante,
- ρ_w : die mittlere Dichte von Seewasser ($\rho_w = 1025 \text{ kg m}^{-3}$),
- k'_n : die gradabhängigen Load-Love-Zahlen,
- $C_{snm}^{\pm}, S_{snm}^{\pm}$: harmonischen Koeffizienten der Ozeangezeitenhöhen vom Grad n und der Ordnung m des Konstituenten s und
- θ_s : Argument des Konstituenten s

bedeuten. Die Summationen über $+$ und $-$ bezeichnen die Addition retrograder Wellen (entgegengesetzt zur Erddrehung) unter Verwendung des hochgestellten Vorzeichens bzw. prograder Wellen (in Richtung der Erddrehung) unter Verwendung des tiefgestellten Vorzeichens. Die Zeitabhängigkeit ist in der auch als Doodson-Variable bezeichneten Größe θ_s enthalten. θ_s stellt den Bezug des Gezeitenpotentials zur Bewegung der gezeitenerzeugenden Körper (d.h. Mond und Sonne) her und ergibt sich nach der Theorie von Doodson [Doodson, 1921] als Linearkombination der Fundamentalargumente der Mond- und Sonnenposition

$$\theta_s(t) = n_1\tau + n_2S + n_3h + n_4p + n_5N^l + n_6p_s. \quad (\text{B.8})$$

mit den zeitabhängigen Variablen

- τ : Mondzeit,
- s : mittlere Länge des Mondes,
- h : mittlere Länge der Sonne,
- p : mittlere Länge des Perigäums de Mondes,
- N' : negative mittlere Länge des Mondknotens und
- p_s : mittlere Länge des Perigäums der Sonne.

Die Linearfaktoren n_i wiederum können für alle Konstituenten s in der sogenannten Doodsonzahl A nach folgender Vorschrift kodiert werden [Doodson, 1921]

$$A = n_1(n_2 + 5)(n_3 + 5).(n_4 + 5)(n_5 + 5)(n_6 + 5). \quad (\text{B.9})$$

Die Doodsonzahl der halbtägliche Ozeantide verursacht durch die Anziehung des Mondes lautet damit beispielsweise $A = 255.555$. Daneben werden für eine Vielzahl von Konstituenten noch die auf Darwin [Darwin, 1883] zurückgehenden Bezeichnungen verwendet, z.B. M_2 = halbtägliche Mondtide, M_f = 14-tägige Mondtide, S_a = jährliche Sonnentide, usw.

Alternativ werden die harmonischen Koeffizienten C_{snm}^\pm, S_{snm}^\pm auch in Amplituden und Phasen [Schwiderski, 1983] dargestellt:

$$C_{snm}^\pm - iS_{snm}^\pm = -i\hat{C}_{snm}^\pm e^{i(\epsilon_{snm}^\pm + \chi_s)} \quad (\text{B.10})$$

mit

- i : imaginäre Einheit
- \hat{C}_{snm}^\pm : Amplitude des Konstituenten s in Schwiderski Notation,
- ϵ_{snm}^\pm : Phase des Konstituenten s und
- χ_s : Phasenwinkel entsprechend der Amplitude H_s nach Cartwright und Tayler [1971] für langperiodische, tägliche und halbtägliche Gezeiten (siehe Tabelle 6.4, S.68 McCarthy und Petit [2004]).

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Amplituden und Phasen des französischen FES2004-Modells [Letellier et al., 2004] verwendet. Es umfasst 8 langperiodische (jährlich, halbjährlich, monatlich, 14-tägig) sowie 4 tägliche und 5 halbtägliche Wellen, mit einem maximalen Entwicklungsgrad bis $n = 80$ für ausgewählte Konstituenten. Abbildung B.4 (links) zeigt die RMS-Variabilität stündlicher Ozeangezeiten (aller Tiden) dieses Modells gegenüber dem Monatsmittel für den Monat November 2003. Rechts daneben ist die resultierende Änderung der Geoidhöhe für einem Punkt im Atlantik dargestellt.

B.3. Atmosphärengzeiten

Analog den Ozeangezeiten werden Schwerefeldvariationen wegen gezeitenperiodischer Änderungen in der Verteilung der Atmosphärenmassen (Atmosphärengzeiten) nach Gleichung (B.6) erfasst, wobei entsprechende Werte für C_{snm}^\pm, S_{snm}^\pm bzw. $\hat{C}_{snm}^\pm, \epsilon_{snm}^\pm$ zu verwenden sind. Konkrete Modellwerte wurden in verschiedenen Untersuchungen (z.B. Chapman und Lindzen [1970], Haurwitz und Cowley [1973], Ray und Ponte [2003]) aus Atmosphärendaten bestimmt. In dieser Arbeit werden aktuelle Ergebnisse aus Biancale und Bode [2006] benützt. Da im Spektrum der Atmosphärengzeiten im wesentlichen tägliche und halbtägliche Tiden dominieren, sind die zur Verfügung stehenden Modelle i.a. nur bzgl. der S_{1-} und S_{2-} Tide entwickelt. In dem hier verwendeten Modell von Biancale und Bode [2006] sind die täglichen und halbtäglichen Wellen bis Grad

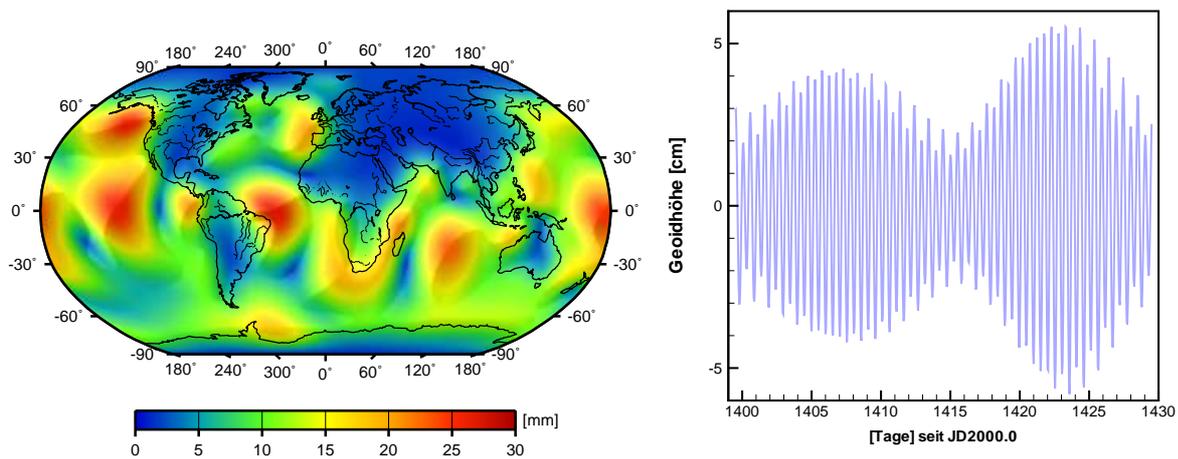


Abbildung B.4.: Links: RMS-Variabilität der Ozeangezeiten für das Modell FES2004 [Letellier et al., 2004] für den Monat November 2003. Gauß'sche Mittelwerte für Geoidhöhen mit einem Filterradius von 500 km. Rechts: Zeitreihe der (ungeglätteten) Geoidhöhenvariationen für einen Punkt im Atlantik mit der Breite $\varphi = 0^\circ$ und $\lambda = 30^\circ$ westl. Länge.

8. Ordnung entwickelt, wobei der Hauptanteil mit den Termen von Grad und Ordnung 1 der täglichen Tide und von Grad und Ordnung 2 der halbtäglichen Tide erfasst wird. Abbildung B.5 (links) zeigt die RMS-Variabilität stündlicher Atmosphärengezeiten gegenüber dem Monatsmittel für das Modell von Biancale und Bode [2006] für den Monat November 2003. Hierbei wurden alle vorhandenen Entwicklungskoeffizienten der S_1 und S_2 -Tide berücksichtigt. Rechts daneben sind exemplarisch Variationen für die Koeffizienten \bar{C}_{20} und \bar{S}_{22} für Anfang November 2003 dargestellt. Wie die Abbildungen zeigen und man aus Tabelle B.1 entnehmen kann, ist der zu erwartende Einfluss klein, aber nicht vernachlässigbar. Wegen saisonaler, zwischenjährlicher, v.a. aber kurzperiodischer Variabilitäten in der Verteilung der Atmosphärenmassen ist die Ableitung langzeitlich gültiger Atmosphärengezeitenmodelle mit täglichen und halbtäglichen Tiden insgesamt schwierig (vgl. Ray und Ponte [2003]).

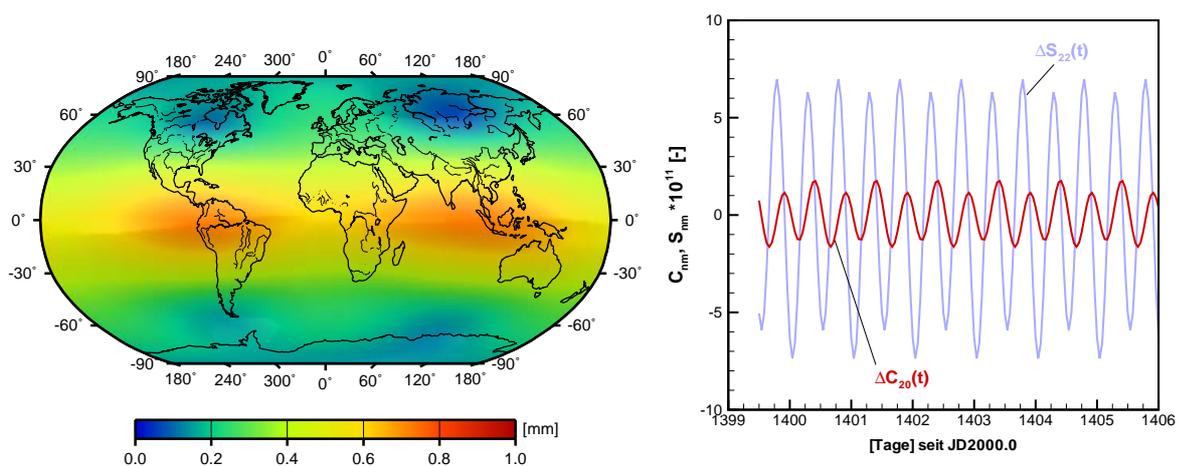


Abbildung B.5.: Links: RMS-Variabilität der Geoidvariationen in mm verursacht durch Atmosphärengezeiten für das Modell Biancale und Bode [2006] für den Monat November 2003. Rechts: Zeitreihen der durch Atmosphärengezeiten verursachten Variationen von Schwerefeldkoeffizienten \bar{C}_{20} , \bar{S}_{22} im Zeitraum 1. - 7. November 2003.

B.4. Kurzzeitmassenvariationen der Atmosphäre und Ozeane

Aperiodische, durch klimatologische Strömungsvorgänge in der Atmosphäre und den Ozeanen bedingte Massenvariationen werden mittels sogenannter AOD-Produkte (*Atmosphere-Ocean-De-Aliasing*, Flechtner [2005a]) berücksichtigt. Dabei handelt es sich um Zeitreihen von Potentialkoeffizienten $\Delta \bar{C}_{nm}^{AOD}(t)$, $\Delta \bar{S}_{nm}^{AOD}(t)$, die aus globalen Gittern der atmosphärischen und ozeanischen Massenverteilung nach Gleichung (3.20) bzw. (3.23) berechnet werden. Über Gradientenbildung der zugehörigen Potentialfunktion werden die resultierenden Signalanteile im Bewegungsverlauf apriori berücksichtigt (vgl. \mathbf{a}_{AOD} in Gleichung (4.21)). Für die Atmosphäre werden konkret operationell verfügbare Gitter-Daten des europäischen Wetterdienstes (ECMWF) mit einer 6-h Zeitaufösung verwendet, wobei anstelle der Vereinfachung über ein Schichtpotential in (3.20) über die gegebene dreidimensionale Massenverteilung der Atmosphäre integriert wird. Zugehörige Gitter für die Massenverteilung im Ozean werden mittels eines barotropen (PPHA, JPL) bzw. alternativ eines baroklinen Ozeanmodell (OMCT, TU Dresden) berechnet, die in beiden Fällen über die ECMWF-Daten angetrieben werden. Für den Gesamt-Effekt werden die 6-stündigen Gitter des Atmosphären- und Ozeanteils kombiniert und anschliessend in sphärisch-harmonische Koeffizienten bis Grad und Ordnung 100 entwickelt.

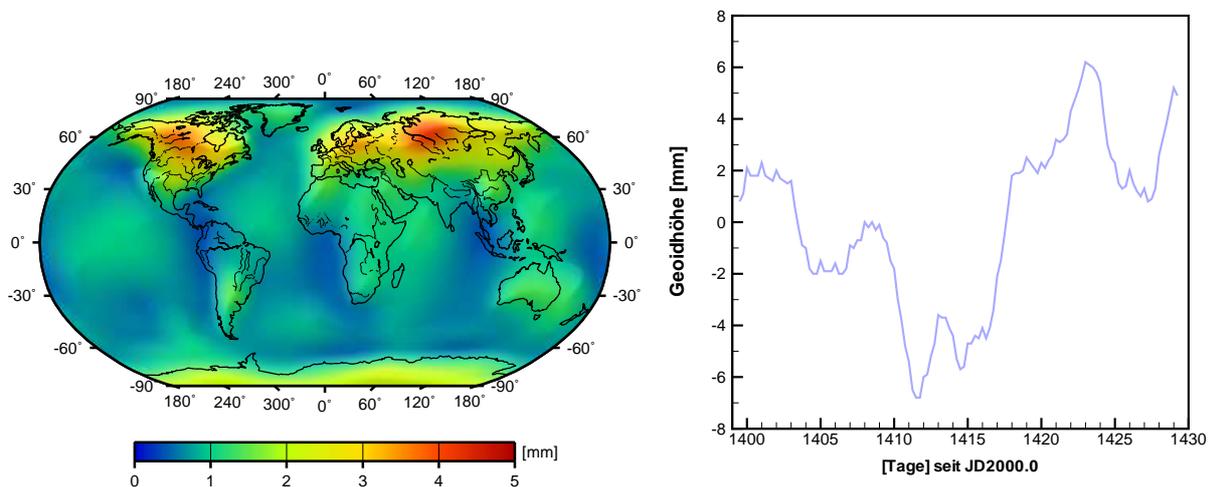


Abbildung B.6.: Links: RMS-Variabilität der Geoidvariationen in mm verursacht durch Kurzzeitmassenvariationen der Atmosphäre und der Ozeane für den Monat November 2003 gegenüber dem Monatsmittel. Dargestellt sind Gauß'sche Mittelwerte mit einem Filterradius von 500 km. Rechts: Zeitreihe der (ungeglätteten) Geoidhöhenänderung wegen atmosphärisch-ozeanischer Kurzzeitmassenvariationen für den Punkt $\phi = 60^\circ$, $\lambda = 110^\circ$ für den Monat November 2003 (bezogen auf das Monatsmittel).

Abbildung B.6 (links) zeigt die RMS-Variabilität für den Gesamteffekt von Atmosphäre und Ozeane für den Beispielmontat November 2003. Man sieht, dass die atmosphärischen Massenvariationen über den Kontinenten dominieren und die größten Amplituden im Bereich der in den Wintermonaten typischen stationären Hochdruckgebieten in Sibirien und Nordkanada erreicht werden. Im Bereich der Ozeane ergeben sich erwartungsgemäss deutlich geringere, aber im Hinblick auf die erwartete GRACE-Baseline-Genauigkeit nicht vernachlässigbare Variationen. Abbildung B.6 (rechts) zeigt exemplarisch die Zeitreihe der Geoidhöhenänderungen im Punkt $\phi = 60^\circ$, $\lambda = 110^\circ$ im November 2003.

Im Hinblick auf eine konsistente Modellierung mit den Ozean- und Atmosphärengezeitenmodellen werden die Wetterdaten um die täglichen und halbtäglichen Variationen des verwendeten Atmosphärengezeitenmodells reduziert.

B.5. Säkulare Feldvariationen

Säkulare Änderungen des Schwerefeldes wegen global-isostatischer Ausgleichsprozesse im Zusammenhang mit historischen und/oder rezenten Änderungen in der Eisbedeckung der Erde und des Meeresspiegels sowie wegen eines langzeitlichen Trends des mittleren Rotationspols werden im Rahmen dieser Arbeit apriori nur in den Koeffizienten \bar{C}_{20} , \bar{C}_{30} und \bar{C}_{40} berücksichtigt:

$$\bar{C}_{n0}(t) = \bar{C}_{n0} + \dot{\bar{C}}_{n0} \cdot (t - t_0). \quad (\text{B.11})$$

t bezeichnet den aktuellen Zeitpunkt, t_0 die Referenzeпоche bezüglich der die Driftrate $\dot{\bar{C}}_{n0}$ gilt. Wie man Tabelle B.2 entnehmen kann ergeben sich die größten Einflüsse auf das globale Feld im Abplattungsterm \bar{C}_{20} bzw. in der den Hauptträgheitsachsen proportionalen Termen \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} . Gegenüber den übrigen modellierten Schwerefeldvariationen sind die säkularen Feldänderungen klein, aber wiederum nicht vernachlässigbar.

Tabelle B.2.: Säkulare Änderungsraten Schwerefeldkoeffizienten

Koeffizient	Driftrate [1/a]	Quelle	Berücksichtigt
\bar{C}_{20}	$+1.162755 \times 10^{-11}$	McCarthy und Petit [2004]	ja
\bar{C}_{21}	-0.337×10^{-11}	McCarthy und Petit [2004]	nein
\bar{S}_{21}	$+1.606 \times 10^{-11}$	McCarthy und Petit [2004]	nein
\bar{C}_{30}	$+0.49 \times 10^{-11}$	[Cheng et al., 1997]	ja
\bar{C}_{40}	$+0.47 \times 10^{-11}$	[Cheng et al., 1997]	ja

C. Kenngrößen und Genauigkeitsmaße Schwerefeldfunktionale

Spektrale und Ortsraumbezogene Kenngrößen

Als spektrale Kenngrößen werden die bekannten Gradamplituden [Heiskanen und Moritz, 1967], zur Darstellung der Signalamplituden je sphärischem Entwicklungsgrad verwendet. In Verallgemeinerung von Heiskanen und Moritz [1967, (7-28), p.259] ergeben sich im Falle der sphärischen Approximation für Geoidhöhen N je Grad n

$$\sigma_n(N) = R \sqrt{\sum_{m=0}^n (w_{Cnm}^2 \bar{C}_{nm}^2 + w_{Snm}^2 \bar{S}_{nm}^2)}, \quad (C.1)$$

bzw. akkumuliert bis zu einem maximalen Grad N_{max}

$$\sigma_{N_{max}}(N) = R \sqrt{\sum_{n=0}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n (w_{Cnm}^2 \bar{C}_{nm}^2 + w_{Snm}^2 \bar{S}_{nm}^2)}. \quad (C.2)$$

Darin bezeichnen die w_{Cnm} , w_{Snm} sphärisch-harmonische Entwicklungskoeffizienten einer Filterfunktion, wobei im Falle ungeglätteter Stokes-Koeffizienten w_{Cnm} , $w_{Snm} = 1 \forall n, m$ gilt. Gradamplituden für Massenstörungen $\Delta\sigma$ (eines sphärischen Schichtpotentials) aus Schwerefeldkoeffizienten ergeben sich durch Erweiterung von (C.1), (C.2) mit den grad-abhängigen Skalierungsfaktoren K_n nach Gleichung (3.32) je Grad

$$\sigma_n(\Delta\sigma) = \sqrt{\sum_{m=0}^n K_n^2 (w_{Cnm}^2 \bar{C}_{nm}^2 + w_{Snm}^2 \bar{S}_{nm}^2)} \quad (C.3)$$

bzw. akkumuliert bis zu einem maximalen Grad N_{max}

$$\sigma_{N_{max}}(\Delta\sigma) = \sqrt{\sum_{n=0}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n K_n^2 (w_{Cnm}^2 \bar{C}_{nm}^2 + w_{Snm}^2 \bar{S}_{nm}^2)}. \quad (C.4)$$

Entsprechende Fehlergradamplituden erhält man durch Einsetzen der Koeffizientenfehler $\sigma_{\bar{C}_{nm}}$, $\sigma_{\bar{S}_{nm}}$ anstelle der Koeffizienten \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} .

Fehlergradamplituden für Differenzen unterschiedlicher Koeffizientensätze i, j ergeben sich durch Fehlerfortpflanzung, für Fehler von Geoidhöhendifferenzen ΔN , je Grad mit

$$\sigma_n(\sigma_{\Delta N}) = R \sqrt{\left(\sum_{m=0}^n (w_{Cnm}^2 \sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 + w_{Snm}^2 \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2) + \sum_{m=0}^n (w_{Cnm}^2 \sigma_{\bar{C}_{nm}^j}^2 + w_{Snm}^2 \sigma_{\bar{S}_{nm}^j}^2) \right)} \quad (C.5)$$

bzw. für Fehler von Differenzen von Massenstörungen

$$\sigma_n(\sigma_{\Delta\sigma}) = \sqrt{\left(\sum_{m=0}^n K_n^2 (w_{Cnm}^2 \sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 + w_{Snm}^2 \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2) + \sum_{m=0}^n K_n^2 (w_{Cnm}^2 \sigma_{\bar{C}_{nm}^j}^2 + w_{Snm}^2 \sigma_{\bar{S}_{nm}^j}^2) \right)}. \quad (C.6)$$

Als globale Kenngröße von Funktionalen im Ortsraum (z.B. durch Synthese-Gleichungen (3.26), (3.31) berechnet auf regelmässigen Gittern) verwendet man den gewichteten RMS ($wRMS$)

$$wRMS = \frac{\sum_i p_i (F_i - m_p(F_i))^2}{\sum_i p_i} \quad (C.7)$$

mit dem gewichteten Mittel m_p

$$m_p = \frac{\sum_i F_i}{\sum_i p_i} \quad (C.8)$$

für $i = 1, \dots, k$ der Funktionalwerte F_i . Die p_i bezeichnen die von der Breite φ_i des Funktionalwerts abhängigen Gewichte $p_i = \cos \varphi_i$ (*breitenabhängige Gewichtung*).

Fehlerfortpflanzung im Ortsbereich

Fehler der Geoidhöhenänderungen $\Delta N(\theta, \lambda)$ bzw. der Variationen der Massenbelegungsfunktion $\Delta \sigma(\theta, \lambda)$ zwischen verschiedenen Koeffizientensätzen (z.B Monatsmodell gegenüber Langzeitmittel) können durch lineare Fehlerfortpflanzung auf Basis von Varianz-Kovarianz-Matrizen der Koeffizienten $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ bzw. $\check{C}_{nm}, \check{S}_{nm}$ berechnet werden. Ausgangspunkt ist die Berechnung der Varianz des Funktionals $F(\theta, \lambda, t_i) = F_i$ für jeweiligen Koeffizientensatz nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$var(F_i) = \mathbf{A} \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}^T, \quad (C.9)$$

mit

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial \{c_{nm}, s_{nm}\}} \right] = \left[\begin{array}{c} f_{nm} \cos(m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \\ g_{nm} \sin(m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{array} \right] \quad \text{und} \quad \mathbf{\Lambda} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{\Lambda}^{cc} & \mathbf{\Lambda}^{cs} \\ \mathbf{\Lambda}^{sc} & \mathbf{\Lambda}^{ss} \end{array} \right]. \quad (C.10)$$

\mathbf{A} enthält die partiellen Ableitungen nach den Parametern $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ bzw. $\check{C}_{nm}, \check{S}_{nm}$ der Synthese-Ausdrücke (3.26), (3.31). Die Matrizen $\mathbf{\Lambda}^{ij}$ enthalten die Kovarianzen der Cosinus-Koeffizienten ($ij = cc$), der Sinus-Koeffizienten ($ij = ss$) und zwischen den Cosinus- und Sinus-Koeffizienten ($ij = cs$) bzw. ($ij = sc$) für alle Kombinationen der Grade n und Ordnungen m . Die Faktoren f_{nm}, g_{nm} enthalten die Größen R, K_n bzw. $R\rho_w, 1/K_n$ je nach Eingangsgrößen $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ bzw. $\check{C}_{nm}, \check{S}_{nm}$ sowie gegebenenfalls Gewichtskoeffizienten w_{Cnm}, w_{Snm} .

Im Falle rein gradabhängiger Vorfaktoren $f_{nm} = g_{nm} = \beta_n$ (z.B. keine Filterung bzw. Verwendung des Gauß-Filters) lautet Gleichung (C.9) ausgeschrieben

$$\begin{aligned} var(F_i) &= \sum_{n,m} \sum_{n',m'} \beta_n \beta_{n'} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \bar{P}_{n'm'}(\cos \theta) \\ &\quad \times [\Lambda_{nn'mm'}^{cc} \cos(m\lambda) \cos(m'\lambda) + \Lambda_{nn'mm'}^{cs} \cos(m\lambda) \sin(m'\lambda) \\ &\quad + \Lambda_{nn'mm'}^{sc} \sin(m\lambda) \cos(m'\lambda) + \Lambda_{nn'mm'}^{ss} \sin(m\lambda) \sin(m'\lambda)] \end{aligned} \quad (C.11)$$

mit den Abkürzungen

$$\sum_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n',m'} = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'}. \quad (C.12)$$

Im Falle unkorrelierter Koeffizienten sowohl für Cosinus- und Sinus-Terme als auch zwischen den Cosinus- und Sinus-Termen, d.h.

$$\Lambda_{nn'mm'}^{cc} = \begin{cases} var(c_{nm}) : & n = n', m = m' \\ 0 : & n \neq n', m \neq m' \end{cases}, \quad (C.13)$$

$$\Lambda_{nn'mm'}^{cs} = \Lambda_{nn'mm'}^{sc} = 0 : \forall n, n', m, m', \quad (C.14)$$

$$\Lambda_{nn'mm'}^{ss} = \begin{cases} var(s_{nm}) : & n = n', m = m' \\ 0 : & n \neq n', m \neq m' \end{cases}, \quad (C.15)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{var}(F_i) &= \sum_{n,m} \beta_n^2 \bar{P}_{nm}^2 (\cos \theta) \\ &\quad \times [\text{var}(c_{nm}) \cos^2(m\lambda) + \text{var}(s_{nm}) \sin^2(m\lambda)], \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

mit $\text{var}(c_{nm})$, $\text{var}(s_{nm})$ den Varianzen der Koeffizienten \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} bzw. \check{C}_{nm} , \check{S}_{nm} .

Die Varianz der Differenz des Funktionals $\Delta F_i = F_i^b - F_i^a$ berechnet aus den beiden verschiedenen Koeffizientensätzen, ergibt sich schließlich durch Fehlerfortpflanzung als Summe der einzelnen Varianzen sowie der Kovarianz der Funktionale allgemein zu

$$\text{var}(\Delta F_i) = \text{var}(F_i^b) + \text{cov}(F_i^b, F_i^a) + \text{var}(F_i^a). \quad (\text{C.17})$$

Sofern man für die Kovarianz $\text{cov}(F_i^b, F_i^a) = 0$ annehmen kann, vereinfacht sich (C.17) zu

$$\text{var}(\Delta F_i) = \text{var}(F_i^b) + \text{var}(F_i^a). \quad (\text{C.18})$$

D. Abkürzungen

ACC	Accelerometer
AF	Ambiguity-Fixing
AOCS	Attitude and Orbit Control System
AOD	Atmosphere-Ocean-De-Aliasing
CHAMP	CHALLENGING Mini Payload Satellite
CRN	N-fold self-Convolutions of a Rectangular time-domain window function
CSR	Center for Space Research
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
ECMWF	European Center for Medium Range Weather Forecast
EIGEN	European Improved Gravity model of the Earth by New techniques
EPOS	Earth Parameter and Orbit System Software
GFZ	GeoForschungsZentrum Postdam
GHM	Globales Hydrologie Modell
GOCE	Gravity and Steady-State Ocean Circulation Explorer
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
GRGS	Groupe de Recherche Geodesie Spatiale
GRIM	GRGS and Geodetic Institute in Munich gravity field Model
HAIRS	High Accurate Inter-satellite Ranging System
ICRF	International Celestial Reference Frame
IGS	International GNSS Service
IERS	International Earth Rotation and Reference System Service
ILRS	International Laser Ranging Service
IPU	Instrument Processing Unit
JPL	Jet Propulsion Laboratory
KBR	K-Band-Ranging System
KRA	K-Band-Range
KRR	K-Band-Range-Rate
KRX	K-band-Range-Acceleration
LEO	Low Earth Orbiter
L1A/B	Level-1A/B
LRR	Laser Retro Reflector
MTU	Mass Trim Unit
NASA	National Aeronautics and Space Administration
OBDH	OnBoard Data Handler
OMCT	Ocean Model for Currents and Tides
PPHA	Pacanowski, Ponte, Hirose and Ali
PRARE	Precise Range And Range-Rate Experiment

SAR	Synthetic Aperture Radar
SCA	Star Camera Assembly
SDS	Science Data System
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SST	Satellite-to-Satellite Tracking
SRF	Science Reference Frame
TOTSOL	Total Solution Software
USO	Ultra Stable Oscillator
VLBI	Very Long Baseline Interferometry

