



GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM
STIFTUNG DES ÖFFENTLICHEN RECHTS

Scientific Technical Report

ISSN 1610-0956

Publication: Scientific Technical Report
No.: STR 03/08
Author: R. Hengst

Wavelet-Analysen ozeanischer Drehimpulszeitreihen

Rico Hengst

GeoForschungsZentrum Potsdam, Department 1: Geodäsie und Fernerkundung,
Sektion 1.3: Gravitationsfeld und Erdmodelle, Telegrafenberg, D-14473 Potsdam, Germany;
E-mail: rico@gfz-potsdam.de

Abstract

This report presents the results of a wavelet analysis of Ocean Angular Momentum (OAM) time series, that were generated by the OMCT-Model (Ocean Model for Circulation and Tides). The findings from this analysis were then compared with the same time series that had been projected in the frequency domain, using the Fast Fourier Transformation.

The oscillations we studied are located in the period window between 14 days to 20 years. From the wavelet transformation, we find that the strictly periodic oscillations (e.g. fortnightly, semiannual, annual) of the tide-driven OAM are modulated by the moon cycle (18.6 years).

In addition to the dominant annual oscillation in the mass term of the atmospheric-driven part, we find also non-strictly periodic signals with periods up to one year. The cycle durations of the powerful quasiperiodic oscillations are between 4 and 12 years. A quasiperiodic oscillation in the axial mass term of the atmospheric-driven part can also be correlated with the eleven-years solar cycle. Furthermore, the atmospheric-driven part of the OAM time series shows some aperiodic oscillation between one and three years.

Key words

Atmosphäre, CWT, FFT, Gezeiten, OMCT, ozeanische Dynamik, Polbewegung, Tageslängenschwankung, Wavelet, Zirkulation

Anmerkung

Der Scientific Technical Report (STR) 03/08 ist die teilweise überarbeitete Diplomarbeit des Autors, welche im November 2002 am Lehrstuhl für Astronomie des Instituts für Planetare Geodäsie der Fakultät Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften an der Technischen Universität Dresden eingereicht wurde.

Aus Kapazitätsgründen wurde auf die Beilage der in der Anlage verwiesenen CD-ROM verzichtet. Es besteht die Möglichkeit die erstellten Programmmodule sowie die Ergebnisse der Analyse von ozeanischer Drehimpulszeitreihen und von Beobachtungsdaten des IERS auf Anfrage vom Autor zu erhalten.

In Abschnitt 5 werden die Ergebnisse der Analyse von Zeitreihen dargestellt. Die Signale besitzen teilweise spezielle Charakteristika, deren Bezeichnungen, um Missverständnisse zu vermeiden, an dieser Stelle kurz beschrieben sind :

Periodische Schwingungsanteile in einem Signal können durch Signalanteile anderer Frequenzen moduliert werden. Diese Frequenzmodulationen finden in dieser Arbeit auch eine Bezeichnung als Überlagerung. Hiermit sei ausschließlich die Modulation einer bestimmten periodischen Schwingung durch mindestens einen niederfrequenteren Signalanteil umschrieben. Quasiperiodische Schwingungen beschreiben sich als nahezu periodische Komponenten, welche über ein bestimmtes Untersuchungsintervall kein Kontinuum in ihrem zeitlichen Auftreten besitzen müssen. Im Gegensatz dazu erscheinen aperiodische Signalanteile in einem bestimmten Frequenzbereich ohne erkennbaren Wiederholzyklus. Daneben stellen sich episodische Schwingungen vorwiegend unterhalb der Jahresperiode dar. Hiermit werden vor allem Variationen beschrieben, die nur in sehr kurzen Zeitabschnitten wirken. So sind beispielsweise Vulkanausbrüche, die unter Umständen eine Erdrotationsschwankung nach sich ziehen, einem episodischen Signalanteil im Beobachtungsmaterial zur Erdrotation zuzuordnen.

Inhaltsverzeichnis

Glossar	5
1 Einleitung	8
2 Die Fourier-Analyse	10
2.1 Die diskrete Fourier-Transformation	10
2.2 Die kontinuierliche Fourier-Transformation	12
2.3 Vor- und Nachteile der Fourier-Analyse	12
3 Wavelet-Transformation	13
3.1 Theoretische Grundlagen	13
3.2 Die unterschiedlichen Formen der Wavelet-Analyse	17
3.2.1 Die kontinuierliche Wavelet-Transformation	17
3.2.2 Die diskrete Wavelet-Transformation	19
3.2.3 Die schnelle Wavelet-Transformation und die Mehrfachauflösung	20
3.3 Wavelet-Familien	21
3.4 Vor- und Nachteile der Wavelet-Transformation	24
4 Die Bewegung der Erde	25
4.1 Einfluss anderer Himmelskörper – externe Kräfte	25
4.2 Massenverlagerungen im System Erde – interne Kräfte	25
4.3 Polbewegung und Variation der Tageslänge	26
4.4 Dynamik starrer Körper	28
4.5 Dynamik deformierbarer Körper	30
4.6 Modifizierte Euler - Liouville - Gleichungen	31
4.6.1 Anregungsfunktionen	31
4.6.2 χ -Funktionen	33
4.7 Verifikationsebenen	34
5 Analyse von Zeitreihen mit Hilfe der kontinuierlichen Wavelet-Transformation	36
5.1 Datengrundlage	36
5.1.1 Simulierte ozeanische Drehimpulszeitreihen	36
5.1.2 Zeitreihe EOP-C04 des IERS	37
5.2 Analysewerkzeuge	37
5.2.1 Wavelet-Toolbox	38
5.2.2 Wavelet-Analyse ohne Toolbox	40
5.2.3 Besonderheiten der programmierten MATLAB-Funktionen zur CWT	41
5.2.4 Ausdehnung des Zeit-Perioden-Fensters	42
5.3 Probleme bei der Untersuchung	43
5.3.1 Energiereiche Signalanteile	43

5.3.2	Randeffekte	48
5.4	Analyse der Drehimpulse ozeanischer Gezeiten	49
5.4.1	Ozeanische Dynamik im kurzperiodischen Bereich	50
5.4.2	Ozeanische Dynamik im langperiodischen Bereich	52
5.5	Die Wirkung der Zirkulation auf den Drehimpulshaushalt des Ozeans	58
5.5.1	Gemeinsamkeiten der Zirkulationen hpe und $hp0$	60
5.5.2	Unterschiede der Zirkulationsprozesse hpe und $hp0$	61
5.6	Vergleich mit beobachteten Parametern der Erdrotation	63
5.6.1	Einfluss der lunisolaren Gezeiten	64
5.6.2	Einflüsse der Zirkulation	68
6	Zusammenfassung	71
	Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	75
	Quellenverzeichnis	79
	Anhang	83

Glossar

Verwendete mathematische Symbole

α_j	numerische Faktoren der Anregungsfunktionen
β	Grundschrift der diskreten Wavelet-Transformation zur Erzeugung von Wavelet-Funktionen
η	Translationsfaktor zur Schrittweitensteuerung der diskreten Wavelet-Transformation
κ	Faktor zur allgemeinen Schrittweitensteuerung der diskreten Wavelet-Transformation
λ	Formparameter der Morlet-Funktion
σ	Zoomschritt der DWT zur Erzeugung von Wavelet-Funktionen
σ_{EULER}	Eulersche Periode
$\underline{\sigma}_{CW}$	komplexwertige Winkelgeschwindigkeit der Chandlerschen Bewegung
τ	Verschiebungsparameter
$\varphi_{a,n}$	Skalierungsfunktion
$\chi_{1,2}$	äquatoriale Drehimpulsfunktionen
χ_3	axiale Drehimpulsfunktion
ψ	Mutter-Wavelet (Basisfunktion der Wavelet-Transformation)
$\hat{\psi}$	Fourier-Transformierte von ψ
ψ_{ab}	Wavelet-Funktionen
$\psi_{1,2}^{EF}$	horizontale Anregungsfunktionen
ψ_3^{EF}	axiale Anregungsfunktion
Ω	konstante Winkelgeschwindigkeit der Erde
ω	Frequenz
$\Delta\omega$	Höhe des Zeit-Frequenz-Fensters
ω_0	Grundfrequenz
$\vec{\omega}_0$	konstante Winkelgeschwindigkeit der Erde
$\Delta\vec{\omega}_E$	Variation der Rotation der Erde
$\vec{\omega}_E$	Winkelgeschwindigkeit der Erde
$\vec{\omega}_k$	Winkelgeschwindigkeit (allg.)
A, B, C	mittlere Hauptträgheitsmomente der Erde
a	Skale (Dilatationsparameter der Wavelet-Transformation)
Δa	Höhe des Zeit-Perioden-Fensters
b	Verschiebung (Translationsparameter der Wavelet-Transformation)
Δb	Länge des Zeit-Perioden-Fensters
a_k, b_k	Fourier-Koeffizienten
\mathbf{C}	Zahlenmenge der komplexen Zahlen
C_m	polares Hauptträgheitsmoment des Erdmantels
c	Faktor zur Kalibrierung der Transformation in der Funktion „ $cwt_ml.m$ “

c_ψ	Zulässigkeitsfaktor
E_\pm	obere und untere Energieebene
E_G	Gesamtenergie eines Signals
$e_{folding}$	Bereich der Kanteneffekte
F	Kraft
$f(t)$	zeitabhängiges Signal oder Funktion
$\hat{f}(\omega)$	Fourier-Transformierte
$\hat{f}(\omega_k)$	diskrete Fourier-Transformierte
H_k	Unterraum der Mehrfachauflösung mit hohen Frequenzanteilen
i	imaginäre Zahl
\bar{I}	Trägheitstensor
$\Delta\bar{I}$	Störung des Trägheitstensors
J	Anzahl der untersuchten Skalen
j	Laufvariable
dj	Anstiegsparameter zur Schrittweitensteuerung
k	Laufvariable
k_0	Oszillationszahl
kM	Anzahl der verschwindenden Momente des Wavelets
\bar{L}	Drehmomentvektor
$L_\psi f(a, b)$	Wavelet-Transformierte der zeitabhängigen Funktion $f(t)$ zum Wavelet ψ
$LOD, \Delta LOD$	Tageslänge (Length Of Day) und deren Variation
\vec{M}	Drehimpulsvektor
\vec{M}^r	relativer Drehimpuls
$\Delta\vec{M}^r$	Störung des relativen Drehimpulses
MW	Mittelwert
m_p	Massenpunkt
$\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)^T$	momentaner Rotationspol im terrestrischen System
\mathbf{N}	Zahlenmenge der natürlichen Zahlen
N	Nutation (Matrix)
P	Präzession (Matrix)
$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$	beobachtbarer Rotationsvektor
Q	Dämpfungsfaktor
Qs	spektraler Energiequotient
\mathbf{R}	Zahlenmenge der reellen Zahlen
\mathbf{R}^+	positive Teilmenge der reellen Zahlen
\mathfrak{R}	Matrix der Gesamtrotation
R_{Pol}	Polbewegung (Matrix)
RG_ψ	Regularitätsgrad des Wavelets
r	Radius (allg.)
\vec{r}	Radiusvektor
S	Erddrehung (Matrix)

T	Periode bzw. Schwingungsdauer
T_{CW}	Chandlerperiode
T_{Effekt}	scheinbare Periode im Wavelet-Power-Spektrum
T_{Gesamt}	Zeitintervall der Untersuchung
t	Zeit
VAR	Varianz
v	Polynomkoeffizient
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
W_k	Unterraum der Mehrfachauflösung mit langperiodischen Anteilen
$W_w f(a, b)$	Energiedichte
X_{POL}	Polbewegung in Richtung des Meridians von Greenwich
Y_{POL}	Polbewegung in Richtung 90° West
\vec{X}^{ICRS}	Positionsvektor im celestischen Bezugssystem ICRS
\vec{X}^{ITRS}	Positionsvektor im terrestrischen Bezugssystem ITRF

Verwendete Abkürzungen

AvM	Anzahl verschwindender Momente
CEP	Himmelsephemeridenpol (CEP = Celestial Ephemeris Pole)
CFT	kontinuierliche Fourier-Transformation (Continuous Fourier Transformation)
CTP	konventioneller terrestrischer Pol (CTP = Conventional Terrestrial Pole)
CWT	kontinuierliche Wavelet-Transformation (Continuous Wavelet Transformation)
DORIS	Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated by Satellite
DWT	diskrete Wavelet Transformation
ENSO	El Nino Southern Oscillation
EOP	Erdorientierungsparameter
FFT	schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transformation)
FT	Fourier-Transformation
FWT	schnelle Wavelet-Transformation (Fast Wavelet Transformation)
GPS	Satellitennavigationssystem (Global Positioning System)
ICRS	Himmelsreferenzsystem (International Celestial Reference System)
IERS	Internationaler Erdrotationsdienst (International Earth Rotation Service)
ILS	Internationaler Breitendienst (International Latitude Service)
ITRF	Internat. terrestrisches Referenznetz (International Terrestrial Reference Frame)
ITRS	Internat. terrestrisches Referenzsystem (International Terrestrial Reference System)
MRA	Multi-Skalen-Analyse (Multi Resolution Analysis)
OMCT	Ocean Model for Circulation and Tides
POCM	Parallel Ocean Climate Model
SLR/LLR	Laserentfernungsmessung. zu Satelliten/Mond (Satellite/Lunar Laser Ranging)
VLBI	Very Long Baseline Interferometry
WPS	Wavelet-Power-Spektrum
WT	Wavelet-Transformation

1 Einleitung

Auf das Gesamtsystem Erde wirken eine Vielzahl innerer und äußerer Prozesse, die sich sowohl in kurzperiodischen mehrstündigen als auch in langzeitlichen säkularen Veränderungen ausdrücken. So resultieren die als Präzession und Nutation bezeichneten Bewegungen der Erdrotationsachse im Raum aus gravitativen Wechselwirkungen der Erde mit anderen Himmelskörpern. Die internen geophysikalischen Prozesse bewirken neben Polbewegungen Rotationsschwankungen, die auch als Variation der Tageslänge beschrieben werden können. Mit Hilfe geodätischer Raumverfahren gelingt die Beschreibung der Erdorientierung. Die Beobachtungen sind stets das Ergebnis aus der Summation geophysikalischer und externer Prozesse und reflektieren ausschließlich den Gesamteffekt. Nach dem Separieren der Einflüsse externer Prozesse gelingt es, die Beobachtungen der Polbewegung und der Rotationsschwankungen auf die zahlreichen internen Prozesse zurückzuführen, deren Anregungen hauptsächlich aus den Teilsystemen Erdkern, Hydrosphäre und Atmosphäre resultieren. Eine differenzierte Zuordnung von Beobachtungsergebnissen zu den einzelnen geophysikalischen Anregungsmechanismen ist aufgrund des komplexen Verhaltens der einzelnen Teilsysteme nur begrenzt möglich. Zeitabhängige Massenordnungen und Bewegungsvorgänge induzieren Drehimpulsänderungen in den jeweiligen Teilsystemen, die zu einem Austausch von Drehimpulsen und somit zu einer Polbewegung und einer Änderung der Rotationsgeschwindigkeit führen. Anhand von Modellen versucht man die Dynamik der internen Prozesse näher zu beschreiben. Im Falle des Ozeans existieren Modelle, die es gestatten physikalische Vorgänge mathematisch zu formulieren und numerisch zu lösen. Die in dieser Arbeit untersuchten ozeanischen Drehimpulszeitreihen sind die Resultate der Simulation des von *Thomas* [2002] vorgestellten OMCT-Modells (Ocean Model for Circulation and Tides), dessen Antriebsquellen die lunisolare Gravitation und die Atmosphäre sind. Durch diese Modelldaten gelingt es, Aussagen über die Beteiligung der ozeanischen Anregungen an gemessenen Variationen der Erdorientierung zu treffen. Die Vergleiche der Drehimpulszeitreihen erfolgen mit den beobachteten und publizierten Erdrotationsparametern des IERS (International Earth Rotation Service). Ein Ziel ist es, mit Hilfe mathematischer Analyseverfahren neben den periodischen und quasiperiodischen Signalanteilen insbesondere aperiodische und episodische Strukturen in den jeweiligen Zeitreihen zu erkennen.

Für die Extraktion bestimmter Informationen in zeitabhängigen Signalen nutzt man Transformationen, um die Eigenschaften der Signale in einem Bildraum zu separieren. Traditionell dient die Fourier-Analyse zum Überführen von Signalen vom Zeit- in den Spektralbereich. Der entscheidende Nachteil dieser Transformation ist der fehlende Zeitbezug der Spektraldarstellung. Kurzzeitige Änderungen der Signalcharakteristik können im Frequenzbereich nicht wahrgenommen werden. Sowohl episodische als auch aperiodische Signalanteile bekommen bei der schnellen Fourier-Analyse feste Frequenzen zugeordnet, die zu Fehlinterpretationen führen können. Eine Gefahr besteht darin, die in einem sehr begrenzten Zeitfenster auftretenden Signalanteile anhand der Spektraldarstellung als periodisch einzustufen. Die integrale Abbildung dieses Signalanteiles lässt mit Hilfe der Fourier-Transformation keinerlei Zeitbezug zu. Eine Alternative stellt die Wavelet-Transformation dar, die zeitlokale Basisfunktionen mit beschränkter Trägerbreite zur Signalanalyse nutzt. Im Unterschied zu den unbegrenzt lang schwingenden Basisfunktionen *Sinus* und *Kosinus* der Fourier-Analyse nutzt

man bei der Wavelet-Transformation sehr kurzschwingende Funktionen, die allgemein unter dem Namen *Wavelets* bekannt sind. Mit Hilfe dieser zeitlokalen Basisfunktionen gelingt es Signale in Räume abzubilden, die einer Synthese aus Zeit und Frequenz entsprechen. Vereinfacht ausgedrückt erhalten eindimensionale zeitabhängige Signale die Zuordnung in einem mit zwei Variablen beschriebenen Bildraum, was jedoch zu Abstrichen in der Genauigkeitsaussage zur Frequenz- und Zeitinformation führt. Episodisch und aperiodisch auftretende Signale oder Signalsequenzen können nunmehr ihrem zeitlichen Auftreten zugeordnet werden, ohne auf Frequenzinformationen verzichten zu müssen. Angewendet auf die ozeanischen Drehimpulszeitreihen und die beobachteten Erdrotationsparameter bedeutet dies, neben periodischen Signalanteilen weitere spektrale Charakteristika mit zeitlichem Bezug analysieren zu können. Somit ist es möglich, die Auswirkung geophysikalischer Prozesse (hier ozeanische Drehimpulse) in Form variierender Massenarrangements und Bewegungen im Ozean in einer Abhängigkeit von Frequenz und Zeit zu beschreiben.

In Abschnitt 2 werden zunächst die fundamentalen Zusammenhänge der Signaltransformation vom Zeit- in den Frequenzbereich erläutert. Der theoretische Vergleich der beiden unterschiedlichen Formen der Fourier-Transformation bezieht sich vorwiegend auf die Anforderungen, die man an Signale hinsichtlich ihres periodischen Verhaltens stellt, um Ergebnisse von Spektraldarstellungen exakt interpretieren zu können. Das Vorstellen der Wavelet-Analyse in Abschnitt 3 schließt eine grundlegende Betrachtung der Signaltransformation in den Zeit-Frequenzraum ein. Neben den unterschiedlichen Formen der Wavelet-Transformation findet man im Speziellen Zugang zur kontinuierlichen Wavelet-Analyse. In Bezug auf die untersuchten Zeitreihen behandelt Abschnitt 4 die Ursachen der Polbewegung und der Änderung der Rotationsgeschwindigkeit. Die theoretische Beschreibung dieser Variation mit Hilfe der Drehimpulsmethode bezieht sich im weiteren Sinne auf die in Abschnitt 5 dargestellten Ergebnisse analysierter ozeanischer Drehimpulse. Zudem offerieren die Vergleiche mit den wavelet-analysierten Erdorientierungsparametern des IERS gemeinsame Signalstrukturen und ermöglichen somit Rückschlüsse zwischen der atmosphärischen und gezeiteninduzierten Dynamik des Ozeans sowie deren Auswirkung auf die Orientierung der Erde in einem Zeit-Frequenz-Raum zu ziehen. Aussagen zur Genauigkeit der Wavelet-Analyse werden am Beispiel der Morlet-Basisfunktion getroffen. Die numerische Umsetzung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation erfolgt mit der Software MATLAB. Die Visualisierung der Ergebnisse übernehmen die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und in Abschnitt 5 vorgestellten Programmmodule „*cwt_ml.m*“ und „*cwt_compo.m*“.

2 Die Fourier-Analyse

Für eine Untersuchung eines beliebigen Signals $f(t)$ als Träger von Informationen müssen zunächst einige Eigenschaften von $f(t)$ bekannt sein. So unterscheidet man prinzipiell zwischen zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Signalen. Das Anschlagen einer Klaviersaite und die damit verbundene Schwankung des Luftdrucks ist beispielsweise ein zeitkontinuierliches Signal. Der gleiche Ton auf einer Compact Disc ist die zeitdiskrete Umsetzung des Signals. Der Rechner als Werkzeug zur Analyse arbeitet generell nur mit diskreten Zahlenwerten. Neben der Zeit muss auch der Wert des Signals zu diesem Zeitpunkt diskret sein oder besser als Binärzahl vorliegen. Der in dieser Arbeit häufig genutzte Begriff der Funktion als mathematische Zuordnungsvorschrift $y = f(t)$ ist mit dem zeitkontinuierlichen Signal $f(t)$ vergleichbar. Im Folgenden soll die Bezeichnung *Signal* ausschließlich für zeitdiskrete Daten Anwendung finden.

Eine präzise und umfassende Extraktion von Informationen, die in Funktionen oder Signalen enthalten sind, ist in vielen Fällen im Zeitbereich nicht möglich. Deshalb wechselt man mit Hilfe einer Transformation vom Zeit- in den Bildbereich. Bei der Fourier-Transformation (FT) ist die Information im Bildbereich frequenzabhängig. Die von Jean Baptiste Joseph Fourier (1807) entwickelte Theorie der gleichnamigen Transformation beschreibt ein mathematisches Analysewerkzeug, mit dem es gelingt, Funktionen $f(t)$ in einzelne Frequenzen zu zerlegen. Die Analyse von Funktionen und Signalen hinsichtlich ihres Frequenzgehalts führte zu einer vollkommen neuen Betrachtungsweise. Neue Werkzeuge, wie z.B. der Bandpassfilter, konnten nun Funktionen oder Signale außerhalb des Zeitbereichs manipulieren. Die Schreibweise der FT unterscheidet sich in den einzelnen Literaturquellen. In dieser Arbeit wird auf die Notation nach *Schubert* [2001] in Verbindung mit *Bartsch* [1997] zurückgegriffen.

In der Signaltheorie benennt man die Summe der quadrierten Beträge von diskreten Signalpunkten als Gesamtenergie E_G (1). Hierbei handelt es sich *nicht* um eine konkrete physikalische Größe [*Große-Erdmann*, 2002], sondern um eine allgemeine Bezeichnung. Voraussetzung hierfür ist die Existenz eines Signals mit endlicher Länge.

$$E_G = \sum_k |f_k(t)|^2 \quad (1)$$

Nach dem *Parseval'schen* Theorem gilt der Grundsatz, dass sich auch bei diskreten zeitabhängigen Signalen die Gesamtenergie nach der Transformation in den Frequenzraum nicht ändert. Deshalb kann man die Darstellung des Frequenzraums eines Signals auch als Energiespektrum definieren. Der gleiche Sachverhalt (1) wird auch häufig als Power- oder Leistungsspektrum bezeichnet.

2.1 Die diskrete Fourier-Transformation

Nach *Fourier* kann eine *periodische* Funktion $f(t)$ in eine Summe unendlich vieler Sinus- und Kosinusschwingungen mit den Frequenzen ω_k zerlegt werden. Diese Summation ist auch unter dem Namen Fourier-Reihe bekannt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t)) \quad (2)$$

Im Falle der diskreten Fourier-Transformation wird $f(t)$ nicht auf unendlich viele Frequenzen untersucht, sondern nur auf diskrete ganzzahlige Vielfache k der Grundfrequenz ω_0 mit der Schwingungsdauer T .

$$\omega_k = \omega_0 \cdot k \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (3)$$

Praktisch bricht man die Fourier-Reihe (2) nach einer endlichen Anzahl von k Gliedern ab, was einer Approximation der Funktion durch ein trigonometrisches Polynom entspricht [Bartsch, 1997]. Die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k fungieren als Gewichte für die Amplituden der jeweiligen Frequenzen ω_k . Unendlich kleine Beträge für die Koeffizienten ergeben sich nur für Frequenzen, die nicht in $f(t)$ vorhanden sind. Der Koeffizient a_0 ist der Gleichanteil oder Offset der Funktion, welche die Symmetrie von $f(t)$ zur Zeitachse beschreibt. Schwingt die Funktion ohne einen Trend um diese Achse, so ist $a_0 = 0$ [o.A. Goldammer, [http: 03.06.2002](http://03.06.2002)]¹.

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt \quad (4)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega_k \cdot t) dt \quad (5)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(\omega_k \cdot t) dt \quad (6)$$

Die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega_k)$ beschreibt die Eigenschaften des Signals im Frequenzraum. Zur Transformation bzw. zur Abbildung des Signals vom Zeit- in den Frequenzraum nutzt man die Gleichung (8). Eine kompakte Darstellung der Sinus- und Kosinusfunktion erhält man mit Hilfe der Zahl e und der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$:

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega \quad (7)$$

$$\hat{f}(\omega_k) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik \cdot \omega_0 t} dt \quad (8)$$

Der notwendige Rechenaufwand zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten lässt sich mit dem so genannten *Cooley-Tukey-Algorithmus* bzw. der schnellen Fourier-Transformation (FFT = Fast-Fourier-Transformation) reduzieren. Wesentliche Teile der einmal berechneten Koeffizienten werden für die Berechnung weiterer Koeffizienten genutzt [Pertz, 2001]. Dank dieser effizienten spektralen Analysemöglichkeit für Signale hielt die Fourier-Transformation Einzug in viele Bereiche der Signal-

¹ Quellenangaben in dieser Form sollen im Folgenden auf Dokumente aus dem Internet verweisen, deren Seiten explizit *keinen* Autor ausweisen (o.A.= ohne Autor). Das Datum bezieht sich auf den Zeitpunkt des Aufrufs der im Literaturverzeichnis angegebenen <http>-Adresse. Bei persönlichen Mitteilungen (p.M.) ist neben dem Namen des Autors das Datum des letzten Schriftwechsels angeführt. Weitere Angaben zur entsprechenden Quelle sind dem Literaturverzeichnis zu entnehmen.

verarbeitung. Für die Anwendung der diskreten FT sind stationäre Prozesse nötig. Eine Zeitreihe heißt stationär, sofern die gemeinsame Verteilung $f(t_1), \dots, f(t_n)$ der gemeinsamen Verteilung $f(t_1 + \tau), \dots, f(t_n + \tau)$ gleicht. Eine Verschiebung des Anfangspunktes um τ hat keinen Einfluss auf die gemeinsamen Verteilungen; diese sind nur von den Intervallen zwischen t_1, t_2, \dots, t_n abhängig [Chaffield, 1980]. Der Unterschied zwischen der diskreten und kontinuierlichen FT liegt in der Art der Transformation vom Zeit- in den Frequenzraum oder umgekehrt. Das Fourier-Integral wird im diskreten Fall zur Fourier-Reihe.

2.2 Die kontinuierliche Fourier-Transformation

Die kontinuierliche Fourier-Transformation (CFT= Continuous Fourier Transformation) ist nach Bartsch [1997] ein mathematisches Werkzeug zur Zerlegung von nichtperiodischen Funktionen $f(t)$ mit dem Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ in ein Fourier-Integral. Im Unterschied zur diskreten Fourier-Transformation zerlegt man eine Funktion $f(t)$ in eine Summe unendlich vieler Sinusschwingungen mit stetig variierender Frequenz ω . Eine Darstellung der Funktion im Frequenzbereich zeigt ein kontinuierliches Spektrum auf. Die Fourier-Transformierte berechnet sich wie folgt:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (9)$$

Der entscheidende Vorteil der kontinuierlichen gegenüber der diskreten FT ist die exakte Darstellung von Signal- oder Funktionsanteilen im Spektralraum, die *keinen* periodischen Zyklus aufweisen. Jedoch ist die Berechnung unendlich vieler Fourier-Koeffizienten nötig. Die CFT besitzt wegen der Forderung nach großer Rechenkapazität in den numerischen Anwendungen nur eine geringe Bedeutung.

2.3 Vor- und Nachteile der Fourier-Analyse

Häufig liegt das Signal $f(t)$ nicht kontinuierlich, sondern auf ein endliches Intervall begrenzt in diskret abgetasteten Stützstellen vor. Unter der Annahme $f(t)$ sei periodisch und harmonisch, zerlegt man das Signal mit Hilfe der Fourier-Reihe in seine diskreten Frequenzanteile. Ein Wechsel vom Zeitbereich in den Frequenzraum des Signals ist mit Hilfe der FFT schnell und präzise möglich. Deshalb eignet sich die diskrete Form der Fourier-Transformation ideal als Werkzeug zur Analyse von Signalen o.g. Eigenschaften.

Andererseits sind auch einige Nachteile der Fourier-Analyse zu beachten. Im Unterschied zur CFT verfälschen aperiodische oder episodische Signalanteile das Ergebnis der FFT. Diese nur zu bestimmten Zeitpunkten auftretenden „Störungen“ bekommen bei der Integraltransformation (8) ein Frequenzband zugewiesen, das sie eigentlich über dem betrachteten Untersuchungsintervall nicht besitzen. Da die CFT das Signal nach allen auftretenden Frequenzen hin untersucht, erhalten aperiodische und episodische Signalanteile im Bildraum schmale und kontinuierliche Frequenzbänder. Anwender könnten der fehlerhaften Annahme verfallen und das Frequenzspektrum dahingehend interpretieren, dass periodische Signalanteile genau in diesem Frequenzband wirken. Im Bildraum des Signals $f(t)$

kann ausschließlich eine Variable, bei der FT ist dies die Frequenz, betrachtet werden. Alle Frequenzinformationen beziehen sich auf das gesamte Zeitintervall. Kurzzeitige Signaländerungen oder -störungen fallen entweder im Frequenzraum nicht auf oder sie erhalten eine Zuordnung und werden periodischen Signalanteilen gleichgestellt.

3 Wavelet-Transformation

Im letzten Viertel des 20. Jahrhunderts hat eine neue Transformationsmethode in zahlreichen Natur- und Ingenieurwissenschaften Einzug gehalten. Für die Analyse von Erdschichten entwickelte der Geophysiker *Jean Morlet* für die französische Ölgesellschaft ELF-Aquitaine bereits Anfang der 80er Jahre das Konzept der Wavelet-Analyse. Mit praktischem Bezug nutzte er Wavelets als Werkzeug, um an Informationen über die Existenz erdölführender Bereiche in den verschiedenen Erdschichten zu gelangen [Hubbard, 1997]. Die Erdoberfläche musste dazu künstlichen Schwingungen ausgesetzt werden. Das Echo der Schwingungen unterschiedlichster Frequenzen, früher fourier-transformiert, erlaubt nun mit Hilfe der Wavelet-Analyse eine bessere Interpretation der Signale. Von *Yves Meyer* und *Ingrid Daubechies* wurde der Oberbegriff Wavelet-Transformation (WT) geprägt und die heute verwendeten Grundlagen zur Analyse theoretisch gesichert [Misiti et al., 2001]. Im Gegensatz zur Fourier-Analyse kann bei der WT ein zeitabhängiges Signal $f(t)$ in einem Zeit-Frequenz-Raum ausgedrückt werden. Die Verknüpfung beider Bereiche lässt eine neue Interpretation von Signalen zu. Untersucht man beispielsweise den Ton der Sirene eines vorbeifahrenden Krankenwagens, so ist von einer Änderung der Signalfrequenz im Zeitverlauf auszugehen. Die Fourier-Analyse zeigt die Frequenzen auf, aus denen sich Signalanteile von $f(t)$ zusammensetzen, jedoch nur als Integral über den gesamten Zeitbereich. Mit Hilfe der Wavelet-Transformation können zeitabhängig auftretende Schwingungsanteile des Signals eine Lokalisierung im Zeitbereich und eine zusätzliche Aussage zur Frequenz erhalten. Der Grund dieser Lokalisierung von Frequenzen im Zeitraum ist auf die Analysefunktion Wavelet ψ zurückzuführen. Im Gegensatz zu den Analysefunktionen der Fourier-Transformation, den Sinus und Kosinus, ist das Wavelet eine Art endlich oft schwingende Welle. Im Zeitbereich verläuft ein Wavelet rasch gegen Null und schmiegt sich der Abszisse an.

Obwohl das Transformationsverfahren aus den Geowissenschaften heraus entwickelt wurde, wendet die Geodäsie das neue Analysewerkzeug erst seit den 90er Jahren an. In den geodätischen Anwendungen nutzt man das Verfahren vorwiegend im Bereich der Datenanalyse, wie Untersuchungen beispielsweise zu den mit VLBI beobachteten Nutationsreihen [Schmidt und Schuh, 1999] oder zur kurzperiodischen Variation der Polbewegung durch *Arfa-Kaboodvand und Groten* [1998] zeigen.

3.1 Theoretische Grundlagen

Die Analyse- oder Basisfunktionen der Fourier-Transformation (Sinus, Kosinus) haben den entscheidenden Nachteil, dass sie im Zeitbereich unendlich oft schwingen. Im Frequenzbereich sind diese Funktionen jedoch sehr präzise und scharf lokalisiert. Jeder unendlich lang andauernden Kosinusschwingung kann man genau eine diskrete Frequenz zuordnen (Abb. 1b). Wavelets ψ als Analyse-

funktionen² besitzen den Vorteil der Zeitlokalisierung, d.h. sie schwingen nur in einem begrenzten Intervall um die Abszisse (Abb. 1a). Außerhalb dieses Intervalls konvergieren sie gegen Null. Wavelets in den Frequenzraum abgebildet erzeugen ein Frequenzband und sind damit weniger gut im Bildraum fixiert. Hingegen lassen sich die Analysefunktionen der FT (Sinus und Kosinus) mit nur *einer* diskreten charakteristischen Frequenz im Bildraum beschreiben (Abb. 1b).

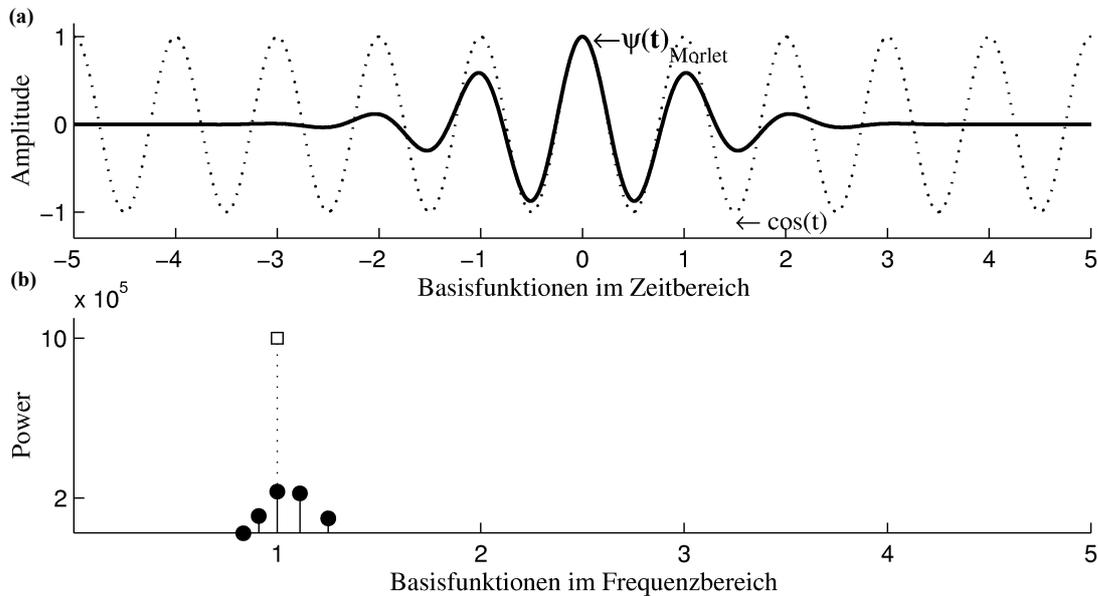


Abbildung 1: **(a)** Ein Vergleich der Basisfunktionen Morlet-Wavelet (zeitlokal begrenzt) und Kosinus im Zeitbereich. **(b)** Das Ergebnis der Spektralanalyse beider Basisfunktionen (FFT). Für die Kosinusfunktion existiert bei einer Schwingung von $-\infty$ bis $+\infty$ nur eine diskrete charakteristische Frequenz (frequenzlokalisiert), hingegen erkennt man beim Morlet-Wavelet ein breites Frequenzband (weniger gut lokalisiert im Frequenzbereich).

Die Lokalisation des Wavelets im Frequenzbereich ist abhängig von der Ausdehnung und der Form des Wavelets im Zeitbereich. Jedoch erreicht man mit den zeitlokalen Wavelets nie die Frequenzschärfe der bei der FT eingesetzten Sinus- und Kosinusfunktion. Allgemein liefern schmale Wavelets eine gute und breitere Wavelets eine schlechte, unpräzise Zeitinformation. Die theoretische Grundlage liefert die aus der Quantentheorie bekannte *Heisenbergsche Unschärferelation*, die besagt, dass sich der Ort und der Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmen lassen. Für die Signalverarbeitung gilt diese Relation entsprechend, angewendet auf das Paar Zeit-Frequenz oder Zeit-Periode. Funktionen oder im speziellen Falle Wavelets können nur mit endlicher Genauigkeit lokal im Zeit- und im Frequenzbereich beschrieben werden. Für ein zeitlokales und damit im Zeitbereich sehr kurz schwingendes Wavelet ist eine Aussage zu dessen Frequenz nur mit einer begrenzten Genauigkeit möglich. Das Produkt aus Schwingungsdauer T und der Frequenzlokalisierung $\Delta\omega$ ergibt, abhängig vom Wavelet, minimal den Wert $\frac{1}{2}$.

$$T \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2} \quad (10)$$

² Wavelets sind nicht in jedem Falle im Zeitbereich analytisch definiert. Eine Approximation von Wavelets ist auch über Koeffizienten möglich, wie z.B. beim Daubechies-Wavelet.

Diese allgemeine Aussage gilt für jedes Wavelet. In Abschnitt 5.2.4 sind detailliertere Angaben zur Zeit- und Frequenzlokalisierung am speziellen Fall des Morlet-Wavelets aufgeführt. Für weitere Informationen wird an dieser Stelle auf *Große-Erdmann* [2002] verwiesen.

Vor Beginn der Analyse ist die Basisfunktion, die allgemein unter dem Namen Mutter-Wavelet bekannt ist, festzulegen. In dieser Arbeit soll das Mutter-Wavelet nur die Bezeichnung Wavelet tragen. Nur in den Abschnitten, wo die Eindeutigkeit nicht gewährleistet ist, wird auf die Bezeichnung Mutter-Wavelet zurückgegriffen. Die Wavelet-Transformation stützt sich auf die beiden Parameter a und b . Eine Untersuchung und damit das Abtasten des Signals $f(t)$ erfolgt mit den parametrisierten Kopien des Wavelets, welche auch die Bezeichnung Wavelet-Funktionen tragen. Der Parameter a deutet auf die Skalierung³ oder Dilatation des Wavelets und damit auf die unterschiedliche Frequenzselektivität hin. Das Dehnen von ψ im Zeitbereich ändert den für die Wavelet-Funktion charakteristischen Frequenzbereich. Näherungsweise entspricht a der mittleren Periode des um a skalierten Wavelets ($a \approx T$). Eine präzise Aussage zur Schwingungsdauer T von ψ ist nicht möglich, da zeitlokale Wavelets immer eine Unschärfe im Frequenzraum besitzen (s. auch Abschnitt 5.2.4).

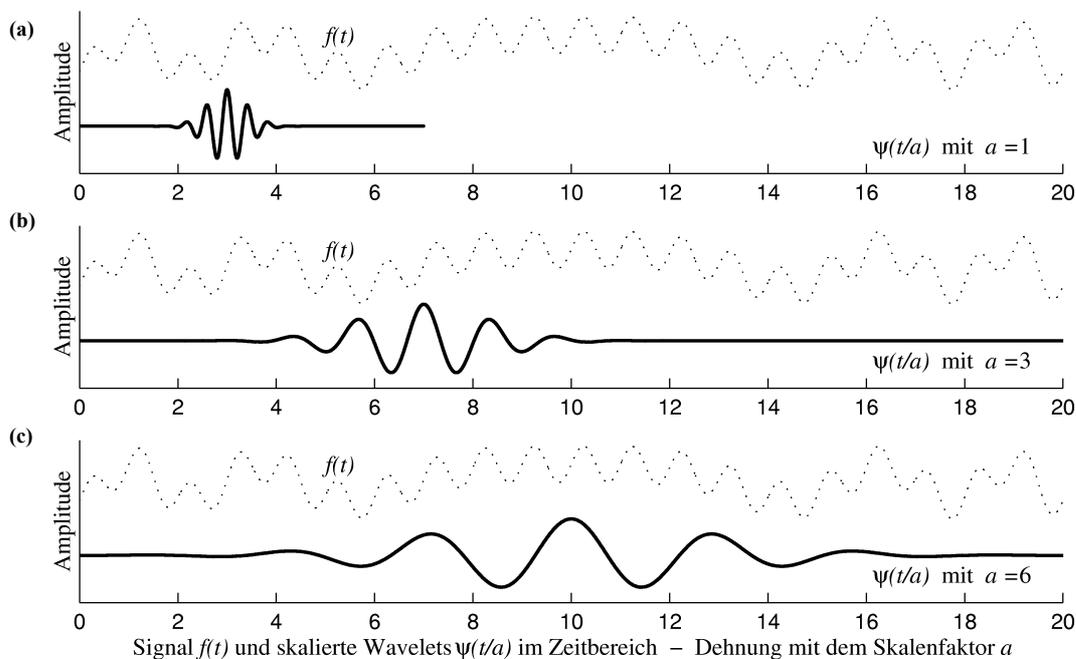


Abbildung 2: Abtasten des Signals $f(t)$ mit unterschiedlich skalierten Wavelets $\psi(t/a)$. **(a)** Zur Analyse hochfrequenter Signalanteile nutzt man gestauchte Wavelets. **(b)** Bei Dehnung des Wavelets erkennt man Signalanteile im mittleren Frequenzbereich. **(c)** Zum Detektieren niederfrequenter Schwingungen muss das Wavelet stärker gedehnt werden.

Die Wavelet-Funktion $\psi_{a,b}(t)$ wird entlang des Signals $f(t)$ um den Parameter b verschoben (Translation). Der Vergleich zwischen dem translatierten $\psi_{a,b}(t)$ und dem Signal zu allen Zeitpunkten ermöglicht eine Aussage zur Ähnlichkeit beider Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit (Abb. 3). Nach der vollständigen Translation der Wavelet-Funktion über $f(t)$ wird eine nächste Kopie des weiter um a dilatierten Wavelets bereitgestellt (Abb. 2).

³ Skalierung sowie Dilatation umfassen das Dehnen und Stauchen eines Wavelets

Dieser Algorithmus der Dehnung des Wavelets und dessen anschließende Translation, in Abbildung 3 sinngemäß vorgestellt, wiederholt sich beliebig oft.

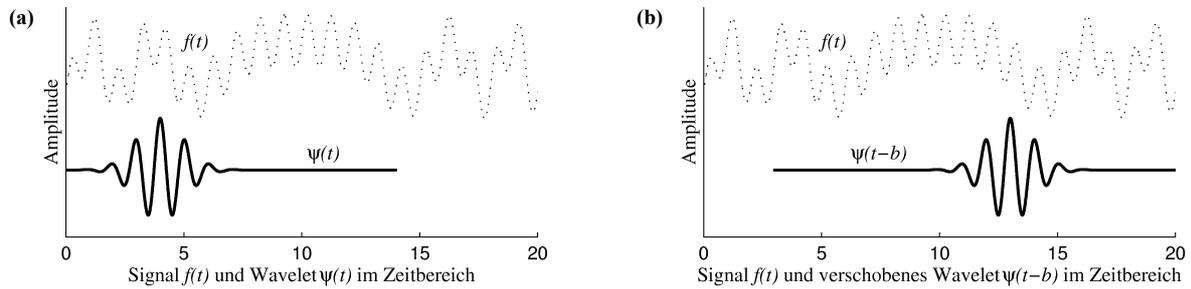


Abbildung 3: Verschiebung des Wavelets mit konstanter Skalierung a entlang des Signals $f(t)$ im Zeitbereich um den Parameter b . An den Zeitpunkten b wird das Signal auf „Ähnlichkeit“ in der Form zum entsprechend skalierten Wavelet (=Wavelet-Funktion) geprüft.

Grundlage für die Zeit-Frequenzdarstellung eines Signals ist die Koeffizientenmatrix oder auch Wavelet-Transformierte $L_\psi f(a, b)$. In der Literatur findet man unterschiedliche Notationen für die Wavelet-Transformierte. In dieser Arbeit soll die Notation nach *Louis et al.* [1994] Anwendung finden. $L_\psi f(a, b)$ drückt den Grad der Ähnlichkeit des Signals $f(t)$ in der Umgebung b mit der um den Faktor a skalierten Wavelet-Funktion $\psi_{a,b}$ aus. Bei großer Übereinstimmung oder hoher Ähnlichkeit zwischen einem Signalabschnitt und einer Wavelet-Funktion ergibt sich ein großer Koeffizient im Bereich $0 \leq L_\psi f(a, b) \leq 1$. Für ein Zeitintervall in dem sich $f(t)$ nicht ändert und somit einen konstanten Wert besitzt, kann man von geringer Übereinstimmung des Signals zur schwingenden Wavelet-Funktion ausgehen. Die Koeffizienten dieses Zeitabschnitts sind Null. Die Wavelet-Transformierte in ihrer Abhängigkeit von zwei Variablen gewinnt an Anschaulichkeit, wenn man den Translationsparameter b als konstant betrachtet. $L_\psi f(a, b)$ beschreibt dann die zum Zeitpunkt b auftretenden periodischen Signalanteile⁴ in $f(t)$. Um als Analysefunktion für die WT Verwendung zu finden, müssen die Wavelet-Kandidaten $\psi(t)$ folgenden Kriterien genügen.

Das Hauptkriterium für ein Wavelet ist die Existenz des Integrals (11); d.h. alle Funktionen $\psi(t)$, für die ein solches Integral einen endlichen Wert c_ψ annimmt, sind Wavelets [Pertz, 2001].

$$0 < c_\psi = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (11)$$

Nach *Louis et al.* [1994] ergibt sich für die Fourier-Transformierte $\hat{\psi}(\omega)$, welche stetig in \mathbf{R} (Menge der reellen Zahlen) ist, die Bedingung für die Form des Wavelets. Der Integralmittelwert von $\psi(t)$ ist Null; somit verläuft das Wavelet teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der Abszisse.

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0 \quad (12)$$

⁴ Zusätzlich werden auch aperiodische und episodische Anteile im Signal beschrieben.

Ein Nebenkriterium an Wavelets ist deren Kontinuität im Zeitbereich [Misiti et al., 2001]. Um den Vorteil des lokalen Verhaltens im Zeitbereich gegenüber den Basisfunktionen der Fourier-Transformation (Sinus und Kosinus) wahrnehmen zu können, sollten Wavelets nur in einem begrenzten Intervall Werte verschieden von Null annehmen. In diesem Zusammenhang spricht man auch von einer endlichen Trägerbreite - dem *Finite Support* - des Wavelets mit einer für $\psi(t)$ $t \rightarrow \infty$ schnellen Konvergenz gegen Null [Esser, 2001].

3.2 Die unterschiedlichen Formen der Wavelet-Analyse

Die Wandlung eines zeitabhängigen Signals in einen Zeit-Frequenz- oder Zeit-Perioden-Raum kann grundsätzlich mit drei unterschiedlichen Formen der Wavelet-Transformation erfolgen. Je nach Anwendung müssen zu Beginn einer Wavelet-Analyse Vor- und Nachteile der jeweiligen WT abgewogen werden, um die gewünschten Informationen aus dem Signal $f(t)$ zu extrahieren.

3.2.1 Die kontinuierliche Wavelet-Transformation

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT = Continuous Wavelet Transformation) ist eine verallgemeinerte Transformation von einem als Funktion dargestellten reellwertigen Signal $f(t)$ in die Zeit-Frequenz-Ebene. Die Wavelet-Transformierte $L_\psi f(a, b)$ ist zum Wavelet ψ durch:

$$L_\psi f(a, b) = c_\psi^{-1/2} \cdot |a|^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (13)$$

mit $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbf{R}^+$ definiert.

Für einfache Datenanalysen ist es nicht nötig, den Zulässigkeitsfaktor c_ψ nach (11) in den Transformationsalgorithmus zu integrieren. Steht die Forderung einer Synthese, d.h. einer inversen Wavelet-Transformation an, so ist c_ψ als Normalisierung von Bedeutung. In dieser Arbeit soll jedoch nur die Datenanalyse ohne Signalrekonstruktion im Vordergrund stehen. Weitere Einzelheiten zum Zulässigkeitsfaktor und der Fourier-Transformierten können Louis et al. [1994] entnommen werden. Mit den beiden reellen Parametern a und b erfolgt die Generierung einer Schar von Wavelet-Funktionen $\psi_{a,b} = \psi(t - b/a)$. Die kontinuierliche WT überführt das eindimensionale zeitabhängige Signal $f(t)$ in die Wavelet-Transformierte $L_\psi f(a, b)$. Das Adjektiv kontinuierlich steht hierbei nicht für das Wavelet, sondern ausschließlich für die Art der Transformation. Man betrachtet theoretisch eine unendlich große Menge an Wavelet-Funktionen mit den Parametern a und b . Im Prinzip besteht die Möglichkeit, alle Frequenzanteile eines endlichen Signals an jedem Zeitpunkt zu analysieren [Misiti et al., 2001]. Jedoch treten bei der CWT sehr große Redundanzen auf, die unerwünscht sind und zu einer aufgeblähten, unendlich großen Koeffizientenmatrix $L_\psi f(a, b)$ führen. Grund hierfür ist auch das Überlappen von Frequenzbändern benachbarter Wavelet-Funktionen. Ein Teil der Information im Wavelet-Koeffizienten ist auch in dessen Nachbarkoeffizienten enthalten. Es gilt eine geeignete Schrittweite der Parameter a und b zu finden, um die Redundanzen und somit auch den Rechenaufwand zu verringern. Bei der praktischen Umsetzung der CWT stehen nur endlich viele diskrete Zah-

lenwerte zur Verfügung. Zur Eliminierung hochredundanter Informationen und zur schnellen Berechnung der CWT existieren heute effektive Algorithmen. Vorteil der kontinuierlichen Analyse ist vor allem die einfache Interpretierbarkeit der Koeffizientenmatrix, was in den Bereichen der Datenanalyse und Bilderkennung einen großen Vorteil darstellt.

Die Multiplikation des Signals $f(t)$ mit der Analysefunktion $\psi_{a,b}$ und die darauffolgende Integration über das Produkt liefert die Koeffizienten $L_\psi f(a,b)$. Die Wavelet-Transformation in (13) fasst man auch als Faltung des Signals $f(t)$ auf. Eine Faltung bedeutet immer eine Filterung des Signals. Neben den Eigenschaften des genutzten Wavelets in Bezug auf seine Zeitlokalisierung beeinflussen die dilatierten Wavelet-Funktionen die Durchlasscharakteristik des Filters im Frequenzbereich. Je größer die Beträge des Skalierungsparameters a , desto niederfrequenter Signalanteile können analysiert werden. In jedem Falle wirken Wavelets als eine Art Bandpass-Filter [Keller, 1996]. Im Zeitbereich eng lokalisierte Wavelets führen zu einem breiten Frequenzband. Langoszillierende⁵ Wavelets erzeugen hingegen einen sehr schmalen Bandpass. Die unterschiedlich skalierten Wavelet-Funktionen führen zu einer Art Filterung mit variabler Bandbreite. Im Grenzfall der Skalierung $a \rightarrow 0$ wirkt die Faltung als Hochpass [Beyer und Meier, 2001].

Ähnlich der Energieaussage zur Fourier-Transformation (1) findet man auch bei der CWT die Gesamtenergie eines Signals im Bildraum vollständig wieder. In der Literatur zum Thema Wavelets wird die Gesamtenergie auch als Energiedichte oder Power benannt. Konkrete physikalische Einheiten verbergen sich jedoch nicht dahinter. Alle drei Bezeichnungen entsprechen dem gleichen Sachverhalt nach (14).

In der als Wavelet-Power-Spektrum (WPS) benannten Darstellung der Koeffizienten $L_\psi f(a,b)$ treten zwei unabhängige Parameter auf, d.h. der Energieanteil eines Ausschnittes im WPS ist von der Frequenz bzw. der Periode und dem Zeitpunkt abhängig. Die Gesamtenergie E_G im Bildraum des Signals berechnet sich daher aus:

$$E_G = \sum_a \sum_b |L_\psi f(a,b)|^2 \quad \text{für } a, b \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\} \quad (14)$$

Um die Vorteile der CWT gegenüber der FFT zu verdeutlichen soll ein Musiksignal analysiert werden, das sich aus den Tönen e^1 und e^2 zusammensetzt. Das mittels einer Stimmpfeife eingespielte Signal verhält sich periodisch und zur sicheren Abgrenzung beider Töne ist, in der zeitabhängigen Darstellung der Abbildung 4a erkennbar, eine kurze Pause eingefügt. Mit 44.100 Abtastpunkten pro Sekunde liegt das Signal zeitdiskret vor. Die FFT gibt nun Aufschluss über die Frequenzen, die in den verschiedenen Signalanteilen Einfluss nehmen. Das Spektrum beschreibt auftretende Frequenzen nur über den gesamten Zeitraum hinweg. Die Schwingungen mit der höchsten Energie sind nach dem Ergebnis der FFT in Abbildung 4b bei ca. 330 und 660 Hertz, was auch der Tonhöhe der Noten e^1 und e^2 entspricht.

⁵ Das Wavelet schwingt in einem sehr großen Zeitbereich, d.h. die Funktionswerte von $\psi(t)$ nehmen mit Ausnahme der Nulldurchgänge große Beträge an.

Bei jedem Musikinstrument treten Obertöne auf. Sie sind als natürliches Schwingungsphänomen bekannt und betragen ein Vielfaches der Frequenz des Grundtones. Obertöne sind im Vergleich zum Grundton weniger dominant und damit weniger gut hörbar. Sie besitzen somit auch geringere Energie. Die Frequenzen bei 1320 und 1980 Hertz sind den Oberschwingungen zuzuordnen.

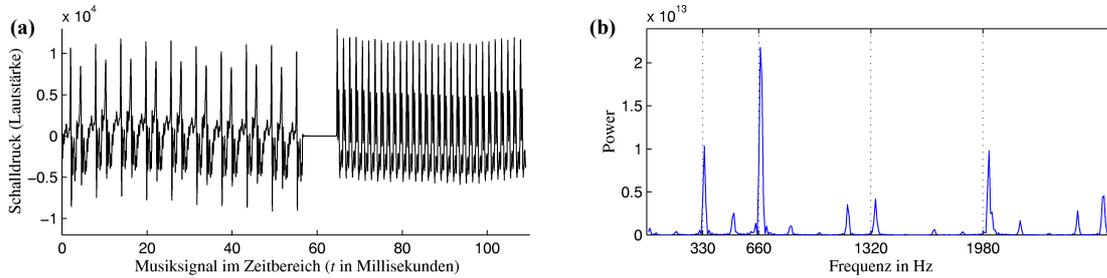


Abbildung 4: **(a)** Zeitdiskretisiertes Musiksignal bestehend aus den Tönen e^1 und e^2 . **(b)** Fourier-Analyse des Musiksignals mit charakteristischen Frequenzbildern um 330 und 660 Hertz und sowie Oberschwingungen, die zunächst keinem Ton zugeordnet werden können.

Die Transformation des Musiksignals in den Bildraum mit Hilfe der CWT greift in diesem Beispiel auf die Morlet-Funktion als Mutter-Wavelet zurück. Im ersten Teil des Signals (Abb. 5) ist deutlich der Grundton e^1 mit 330 Hertz zu erkennen. Zu ihm kann man nun, im Gegensatz zur FFT, die vierte Oberschwingung mit 1320 Hertz zuordnen. Der energiereiche Grundton mit 660 Hertz im zweiten Signalabschnitt tritt markant hervor. Signalanteile mit der Frequenz von 1980 Hertz treten entsprechend erst in der zweiten Hälfte des Musiksignals auf und stellen die dritte Oberschwingung von e^2 dar. Die extrahierten Informationen der CWT sind natürlich nur in begrenztem Maße genau. An diesem einführenden Beispiel wird bereits der Vorteil einer gemeinsamen Ebene, bestehend aus Zeit- und Frequenzinformation, deutlich. Weiterführende Betrachtungen zur Genauigkeit der kontinuierlichen Wavelet-Transformation sind Bestandteil des Abschnitts 5.2.4.

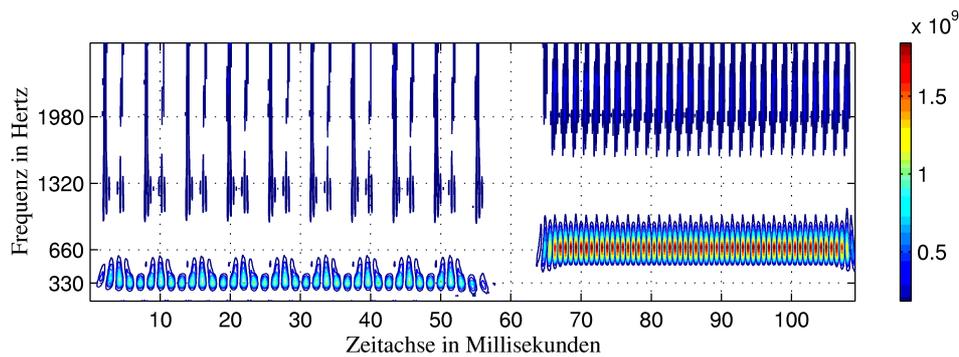


Abbildung 5: Das Ergebnis der CWT des Musiksignals dargestellt im Wavelet-Power-Spektrum. Als Analysefunktion wurde das Morlet-Wavelet gewählt.

3.2.2 Die diskrete Wavelet-Transformation

Ein Signal $f(t)$ wird bei der CWT redundanzbehaftet in der Koeffizientenmatrix $L_\psi f(a, b)$ abgelegt. Mit der diskreten Wavelet-Transformation (DWT) versucht man den Rechenaufwand und die Redundanz zu minimieren. Es genügt, nur einen bestimmten Anteil von $L_\psi f(a, b)$ und nicht mehr unend-

lich viele Koeffizienten zu berechnen. Das Wavelet wird nur noch in diskreten abzählbaren Schritten skaliert und am Signal in diskreten Schritten entlanggeschoben. Die Schrittweite der Parameter a und b stellt nur noch eine Teilmenge im Bereich der natürlichen Zahlen (\mathbf{N}) dar. Dilatierte Wavelet-Funktionen erzeugt man über den Zoomschritt mit der Potenz zur Basis $\sigma > 1$. Am gebräuchlichsten ist die Transformation mit der Skalierung zur Basis $\sigma = 2$, die auch unter dem Ausdruck *dyadische* WT bekannt ist. Mit dem Grundschrift β steuert man die Schrittweite der translatierten Wavelet-Funktion entlang der Zeitachse. *Blatter* [1998] stellt die diskrete Wavelet-Funktion $\psi_{a,b}$ mit den Laufvariablen κ und η vor:

$$\psi_{a,b}(t) = \sigma^{\kappa/2} \cdot \psi(\sigma^{-\kappa}t - \eta\beta) \quad (15)$$

$$a = \sigma^\kappa \quad \text{und} \quad b = \eta\sigma^\kappa \cdot \beta \quad \text{mit} \quad \kappa, \eta \in \mathbf{N} \quad (16)$$

Je nach genutztem Mutter-Wavelet liegt es nahe, dass bei der Wahl zu großer Zoom- und Grundschrift Informationen über das Signal verloren gehen. Der gewünschte Erfolg bei der Transformationsvereinfachung mit Hilfe der Diskretisierung der Wavelet-Parameter kam jedoch nicht in erhofftem Maße zustande [*Esser*, 2001]. Der Durchbruch für die Wavelet-Technologie vor allem im Bereich der Bildbearbeitung erfolgte im Jahre 1986.

Stephane Mallat und *Yves Meyer* entwickelten für das Konzept der Mehrfachauflösung eine numerische Implementierung, welche unter dem Namen schnelle Wavelet-Transformation (FWT = Fast Wavelet-Transformation) bekannt wurde.

3.2.3 Die schnelle Wavelet-Transformation und die Mehrfachauflösung

Die Mehrfachauflösung (MRA = Multiresolution Analysis) nutzt zur Transformation des zeitabhängigen Signals in den Zeit-Frequenz-Raum neben dem Wavelet noch die Skalierungsfunktion φ_a , die einer Abspaltung niederfrequenter Signalanteile dient. Das Hauptkriterium für φ ist die Existenz eines aus der Skalierungsfunktion und seinen um $\eta \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ verschobenen Versionen erzeugten Orthonormalsystems. Die Skalarprodukte aus φ und seinen ganzzahligen Translatierten müssen Null ergeben. Als die einfachste aller Skalierungsfunktionen sei die in Abbildung 6a dargestellte Haarskalierung genannt, deren zugehörige Basisfunktion das Haar-Wavelet ist.

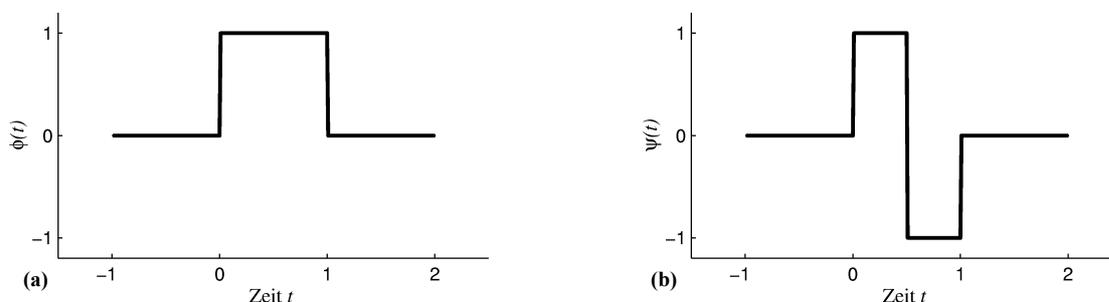


Abbildung 6: (a) Die Haar-Skalierungsfunktion $\varphi(t)$, die auch der Daubechies-Skalierungsfunktion 1. Ordnung entspricht und (b) das Haar-Wavelet $\psi(t)$, welches dem Daubechies-Wavelet 1. Ordnung gleicht.

Die Mehrfachauflösung stellt sich als eine Art Verschachtelung von Räumen dar, bei der sich ein Raum⁶ W_k aus einem „groben“ Anteil W_{k+1} und einem dazu orthogonalen hochfrequenten Anteil H_{k+1} zusammensetzt. Der niederfrequente Anteil W_{k+1} spaltet sich in der zweiten Auflösungsstufe in wiederum zwei Unterräume auf. Die Räume H_{k+1} und W_{k+1} mit weiter steigendem Index beinhalten immer niederfrequenterer Schwingungsanteile. Dieser Algorithmus findet anwendungsspezifisch oft Wiederholung (Abb. 7). Die Filterung und damit die Abspaltung des Signalteiles W_k übernimmt die Skalierungsfunktion φ . Zur Analyse des hochfrequenten Anteiles (H_k) kommen die skalierten Wavelet-Funktionen zum Einsatz. Bei einer erneuten Filterung wird die Skalierungsfunktion dilatiert, um immer „gröbere“ Signalanteile abzutrennen. Aus der Vereinigungsmenge aller hochfrequenten Unterräume $\sum_{k=1}^J H_k$ mit $k = 1, 2, \dots, J$ und des Unterrumes W_k ergibt sich das Gesamtsignal $f(t)$.

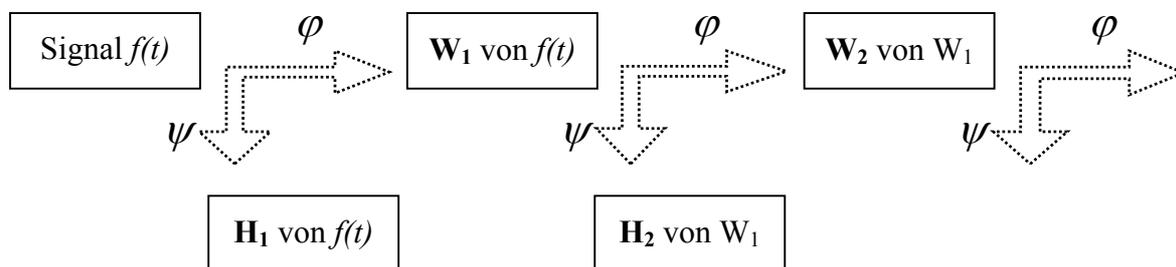


Abbildung 7: Die Zerlegung des Signals $f(t)$ in unterschiedliche Frequenzbänder H_k mit Hilfe der Skalierungsfunktion φ (Tiefpassfilter) und des Wavelets ψ (Hochpassfilter).

Das Konzept der Mehrfachauflösung bedarf jedoch noch einer leistungsfähigen numerischen Implementierung, um sich gegenüber der DWT zu behaupten. Dieser effiziente Algorithmus ist unter dem Namen schnelle Wavelet-Transformation bekannt. Die Funktionen φ und ψ müssen bei jeder Filterung perfekt harmonieren. Nicht zu jedem Wavelet lässt sich eine passende Skalierungsfunktion finden, die auch noch orthogonal zu seiner Translatierten ist. Für das Morlet-Wavelet existiert im Unterschied zu anderen Wavelets (Abb. 8) keine Skalierungsfunktion. Zur Synthese der Räume muss der Funktionsverlauf von φ und ψ nicht explizit bekannt sein. Über Koeffizienten für eine Skalierung und Näherungsformeln für Wavelets (z.B. Daubechies-Wavelet) können die Verläufe approximativ beschrieben werden. Für den interessierten Leser sei für weitergehende Informationen auf *Louis et al.* [1994], *Blatter* [1998] und *Pertz* [2001] verwiesen.

3.3 Wavelet-Familien

Im Prinzip ist es möglich, für jede praktische Anwendung der WT ein speziell zugeschnittenes Wavelet zu konstruieren oder eines der zahlreichen bereits bekannten Wavelets zu nutzen. Die Frage nach der Wahl des „richtigen“ Wavelets sollte erst nach der Entscheidung für oder gegen die diskrete oder kontinuierliche WT anstehen, da einige Wavelets (z.B. Morlet, Mexikanischer Hut, Gauss) keine orthogonalen Transformationen unterstützen [*Misiti et al.*, 2001]. Dem Nutzer steht nach seiner Ent-

⁶ In Stufe 0 ist dies das Gesamtsignal $f(t)$.

scheidung für eine Transformationsart aus der großen Vielfalt der bekannten Basisfunktionen (Wavelets) eine verkleinerte Auswahl zur Verfügung.

Die wichtigsten Kriterien bei der Auswahl des Mutter-Wavelets sind im Folgenden aufgeführt. Die Abbildungen 6 und 8 dienen unterstützend zur Differenzierung der einzelnen Mutter-Wavelets.

Trägerbreite: Häufig haben die Basisfunktionen einen Träger mit unendlich großer Breite, wobei sich die $\psi(t)$ außerhalb eines begrenzten Intervalls an die Abszisse anschmiegen. Von Vorteil wäre ein Wavelet, welches nur in einem endlichen Bereich ungleich null ist, wie z. B. das Symlet-, Haar- und Daubechies-Wavelet (Abb. 6b und 8a,b). Diese Eigenschaft von Wavelets wurde schon in Abschnitt 3.1 als *Finite Support* oder als Lokalisation im Zeitbereich eingeführt. Die im Beispiel des Abschnittes 3.2.1 genutzte Morlet-Funktion besitzt einen breiten Träger, der jedoch nach schnellem Abfall der Amplituden minimal oszilliert (Abb. 8d).

Regularitätsgrad: Der Regularitätsgrad (RG_ψ) drückt die „Glattheit“ eines Wavelets aus und ist als Anzahl der stetigen Ableitungen eines Wavelets definiert [Hubbard, 1997]. Das Haar-Wavelet weist aufgrund seiner Treppenform eine geringe Regularität auf, hingegen ist das Daubechies-Wavelet⁷ in seiner Glattheit höher und RG_ψ verstellbar [Keller, 1996]. Die Morlet-Funktion ist unendlich regulär, jedoch nur bedingt zeitlokal, da die Funktionswerte mit abnehmender Amplitude um die Abszisse schwingen. Die Rechengeschwindigkeit ist bei Transformationen mit glatteren Wavelets um bis zu eine Größenordnung geringer. Weniger glatte Wavelets führen im Anwendungsbereich der Bildcodierung teilweise zu unerwünschten Artefakten. So entstehen im reproduzierten Abbild Kanten, wo im Original überhaupt keine vorhanden sind [Hubbard, 1997].

Symmetrie: In der Bildbearbeitung spielt die Symmetrie von Analysefunktionen eine große Rolle. Diese Eigenschaft, die eine Phasenverschiebung bei der Faltung des Bildes unterbindet, ist nur gegeben, wenn sich das verschobene Wavelet an der Ordinate spiegelt. In den Beispielen der Abbildung 8 ist ausschließlich die Morlet-Funktion symmetrisch. Symlets besitzen, trotz des naheliegenden Wortstammes, keine vollständige Symmetrie.

Anzahl verschwindender Momente (AvM): Die Anzahl der verschwindenden Momente ($kM+1$), die ein Wavelet ψ und die zugehörige Skalierungsfunktion φ besitzen, sind für die Kompression von Daten ein entscheidender Faktor. Näherungsweise kann man die AvM mit der Zahl der Oszillationen des Wavelets im Zeitbereich beschreiben. Zudem ist die Möglichkeit bestimmte Signalanteile zu extrahieren abhängig von der Anzahl der verschwindenden Momente des Wavelets. Basisfunktionen mit einem verschwindenden Moment analysieren keine linearen Signale. Andere Wavelets mit $kM + 1 = 2$ sind zusätzlich „blind“ für quadratische Signalverläufe [Hubbard, 1997]. Die Wavelet-Koeffizienten, gebildet aus dem Skalarprodukt von Wavelet $\psi(t)$ und einem Signal $f(t)$, erhalten nach (17) für ein Wavelet mit $kM+1$ verschwindenden Momenten den Wert

⁷ Das Haar-Wavelet entspricht dem Daubechies (1) – Wavelet.

Null. Im Falle eines Polynoms der Form $f(t) = \sum_{0 \leq k \leq kM} v_k t^k$ mit den Koeffizienten v_k gilt nach *Misiti et al.* [2001]:

$$\int_0^{98} f(t) \cdot \psi(t) dt = 0 \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots, kM \quad (17)$$

Die explizit angehangene Ordnungszahl bei der Bezeichnung der Wavelets entspricht der Anzahl der verschwindenden Momente (z.B. db2 = Daubechies-Wavelet mit $\text{AvM}=2$).

Skalierungsfunktion: Die schnellen Algorithmen der MRA bedingen die Existenz einer Skalierungsfunktion φ . Bei einigen Analysefunktionen, wie z.B. beim Morlet-Wavelet, existieren keine Skalierungsfunktionen.

Orthogonalität: Die perfekte Signalrekonstruktion sowie die redundanzfreie Analyse eines Signals setzen orthogonale Wavelets bzw. -funktionen voraus. Um Wavelet-Koeffizienten $L_\psi f(a, b)$ berechnen zu können, nutzt man das mathematische Werkzeug des Skalarproduktes. Die geometrischen Eigenschaften orthogonaler Wavelets erleichtern und beschleunigen das Berechnen der Transformation, denn nur hier ergibt sich „ *jeder Wavelet-Koeffizient aus einem einzigen Skalarprodukt, und dessen Berechnung ist unabhängig von den anderen in die Transformation eingehenden Koeffizienten*“ [Hubbard, 1997, S.160].

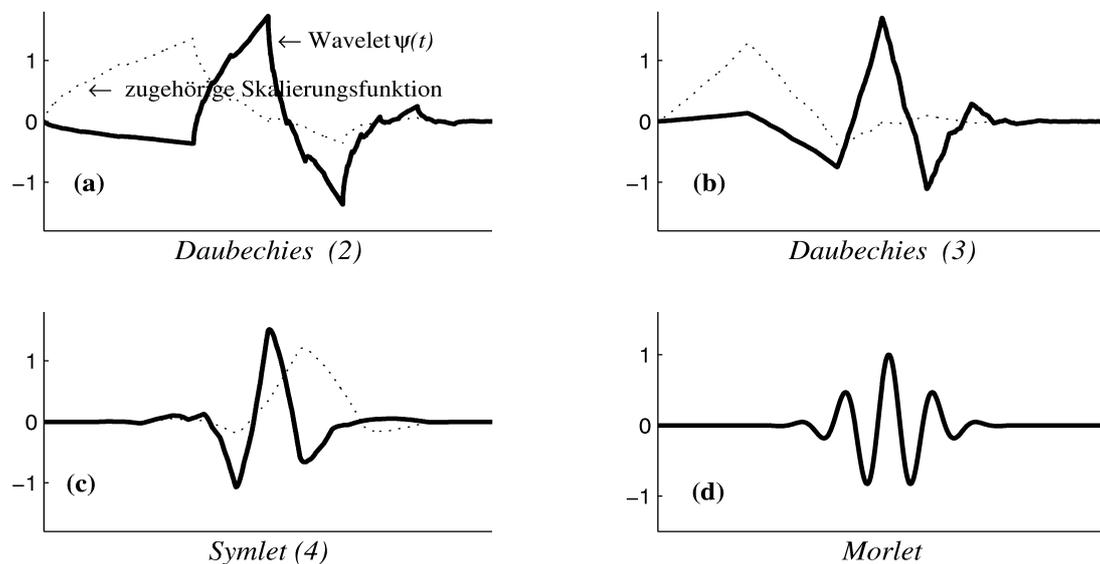


Abbildung 8: Gegenüberstellung ausgewählter Wavelets und zugehöriger Skalierungsfunktionen: (a) asymmetrisches orthogonales Daubechies (2)-Wavelet mit endlichem Träger und $\text{AvM}=2$; (b) Daubechies (3)-Wavelet mit höherer Regularität im Vergleich zu (a) und $\text{AvM}=3$; (c) Symlet als ein orthogonales, fast symmetrisches Wavelet mit endlichem Träger und $\text{AvM}=4$; (d) Symmetrisches Morlet-Wavelet mit unendlicher Regularität. Eine orthogonale Wavelet-Analyse ist nicht möglich, eine Skalierungsfunktion existiert nicht und der Träger ist nicht kompakt (schwingt unendlich lang um die Abszisse).

Der interessierte Leser erhält in *Misiti et al.* [2001] eine umfangreiche Zusammenstellung zu Wavelets und Skalierungsfunktionen. Im Speziellen findet man bei *Hubbard* [1997] und *Pertz* [2001] leicht verständliche Einführungen zum Sachverhalt orthogonaler Wavelets und „verschwindender Momente“.

3.4 Vor- und Nachteile der Wavelet-Transformation

Die positiven Eigenschaften der Wavelet-Transformation findet man im Vergleich zur Fourier-Analyse besonders im lokalen Charakter des Zeit-Frequenz-Raumes. Grundsätzliche Änderungen im Signal, wie z.B. zeitabhängige Frequenzvariationen oder episodische Signalstörungen, bekommen neben ein Frequenz- auch ein Zeitintervall zugewiesen, in dem diese Änderungen aufgetreten sind. Im Unterschied zur Fourier-Analyse, deren Frequenzspektrum sich auf den gesamten Signalzeitraum bezieht, treten bei der WT die Probleme des fehlenden Zeitbezuges nicht auf. Bei den Anwendungen dieses Werkzeuges im Bereich der Datenanalyse gelingt es, Signalanteile unterschiedlicher Frequenzen im entsprechenden Untersuchungsintervall zu fixieren. Zudem besteht die Möglichkeit, Variationen im Frequenzverlauf zu erkennen, die beispielsweise auf die Überlagerung verschiedenster Signalperioden zurückzuführen sind.

Ungenügende Frequenz- und Zeitschärfe sind die negativen Aspekte dieser Integraltransformation. Selbst bei der Untersuchung mit einer unendlich großen Anzahl an Parametern a und b überführt die CWT ein Signal nur begrenzt lokal in den Bildbereich. Mit dem Vorteil der begrenzten Breite der Analysefunktion ψ im Zeitbereich erhält man gleichzeitig die Unschärfe im Frequenzbereich von ψ . Eine optimale Extraktion von Signalinformationen gelingt jedoch beim parallelen Einsatz von Spektral- und zusätzlicher Wavelet-Analyse. So erhält man mit der schnellen Fourier-Transformation präzise Aussagen zu Frequenzen bei den streng periodischen Anteilen im Signal, währenddessen die CWT die zeitliche Zuordnung u.a. von aperiodischen und episodischen Signalanteilen ermöglicht.

4 Die Bewegung der Erde

Auf den Erdkörper, vom Erdkern bis hin zur Atmosphäre, wirken *interne* und *externe* Prozesse unterschiedlichster Größenordnung, welche die Bewegung im Raum beeinflussen. Die Wirkung von geophysikalischen Prozessen auf das Rotationsverhalten der Erde kann man mathematisch beschreiben. Die Schwankungen der Erdrotation sind unter den Namen Präzession, Nutation, Polbewegung und Tageslängenvariation bekannt. Die Zusammenhänge der internen und externen Prozesse mit der physikalischen Interpretation der Erdrotation werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

4.1 Einfluss anderer Himmelskörper – externe Kräfte

Sonne und Mond üben mit ihren Massen Anziehungskräfte auf den Planeten Erde aus. Die Bahn der Erde um die Sonne - oder besser um den gemeinsamen Schwerpunkt, das Baryzentrum – ist nahezu elliptisch. Die Neigung der Erde um die Normale der Ekliptikebene mit einem Winkel von $23,5^\circ$ bezeichnet man auch als den nördlichen und südlichen Wendekreis der Sonne. Der die Erde umkreisende Mond mit einer ebenfalls geneigten Bahnebene übt mit der Sonne auf die Äquatorwulst der Erde eine Anziehungskraft aus. Im Falle einer nicht rotierenden Erde würde sich die Neigung der Bahnebenen zueinander verringern. Die Bahnneigungen bleiben jedoch stabil, da die Erde rotiert und sich wie eine Art Kreisel mit freien Achsen verhält. Die Drehimpulsachse der Erde bewegt sich in 25770 Jahren (Platonisches Jahr) um den Pol der Ekliptik, d.h. die Rotationsachse führt eine gleichförmige säkulare Kreisbewegung um den Pol der Ekliptik aus, wobei die Ekliptik selbst konstant bleibt. Die Ausweichbewegung der Rotationsachse nennt man im Falle von Sonne und Mond *lunisolare* Präzession. Weitere periodische, aber in ihrer Amplitude wesentlich kleinere Anteile der Bewegungen der Erdrotationsachse liegen in den Inklinationsdifferenzen der Bahnebenen dieser Himmelskörper begründet. Diese als astronomische Nutation oder einfach als Nutation bezeichnete Bewegung ist im Falle des Mondes als rückwärtige Drehung der Knotenlinie der Mondbahn mit einer Dauer von 18,6 Jahren bekannt. Die weit geringeren Einflüsse anderer Himmelskörper lassen sich als allgemeine oder auch planetare Präzession und Nutation bezeichnen.

4.2 Massenverlagerungen im System Erde – interne Kräfte

Ebenso wie externe Gravitationswirkungen ziehen interne geophysikalische Prozesse Schwankungen der Rotation der Erde nach sich. Die geometrische Form unseres Planeten lässt sich im einfachen Fall als Rotationsellipsoid beschreiben, welches jedoch deformierbar ist. Die einzelnen Teilsysteme der Erde wie beispielsweise Erdkern, Kryosphäre, Ozean und Atmosphäre können Drehimpulse untereinander austauschen.

So finden in der Kryosphäre beim Abtauen von Gletschern große Massenverlagerungen statt, die den Drehimpuls dieses Teilsystems verändern. Die Erde reagiert auf diese Massentransporte mit einem Drehimpulsaustausch zwischen Kryosphäre und Ozean. Im Wechselspiel zwischen den Teilsystemen existieren neben den langandauernden Prozessen, wie z.B. Mantelkonvektion und Plattentektonik, auch sehr schnelle und kleinräumigere Prozesse. Der Drehimpulsaustausch zwischen Ozean und Atmosphäre unterliegt diesen kurzperiodischen Schwankungen im Bereich von einzelnen Stunden bis

hin zu mehreren Jahren. Zu einem veränderten Drehimpuls des Teilsystems Ozean tragen die anregenden Momente der thermohalinen, der wind- und druckgetriebenen Zirkulation und der Wirkung von lunisolaren Gezeiten bei. Über den Ansatz der Drehimpulserhaltung im Gesamtsystem Erde kann man, anhand der Wechselwirkung zwischen den Teilsystemen, auf das veränderte Rotationsverhalten der Erde schließen. Die Massenverlagerungen treten linear, periodisch, aperiodisch, quasiperiodisch und episodisch auf. Die größten Beiträge zur Massenverlagerung, häufig als primäre Einflüsse bezeichnet, kommen von der Atmosphäre und dem Ozean [o.A. *DGFI*, [http: 22.04.02](http://22.04.02)]. Schwankungen des Grundwasserspiegels und die Verlagerung von Biomassen infolge des Vegetationszyklus der Erde treten unter der Bezeichnung Sekundäreffekte meist jahresperiodisch auf. Künstliche Wasserspiegeländerungen, wie z.B. der stark gesenkte Wasserspiegel des Aralsees als zweitgrößtes Binnengewässer der Welt, führen aufgrund wechselnder Auflasten zu lokalen Deformationen im Zentimeterbereich. Die Massenverlagerungen und Deformationen verlaufen wegen des einseitigen Wasserabzuges bzw. Wasserzulaufes unperiodisch. Ein weiterer Sekundäreffekt sind die langfristigen klimatischen Veränderungen in den polaren Gebieten. Das Abschmelzen der Eismassen führt zu postglazialen Landhebungen und die Massenverlagerung bewirkt einen säkularen Trend in der Polbewegung [o.A. *DGFI*, [http: 22.04.02](http://22.04.02)]. Vulkanausbrüche und anderweitig episodische Ereignisse haben im Vergleich zu den vorher genannten Effekten weit weniger Anteil an der Änderung des Rotationsverhaltens der Erde.

4.3 Polbewegung und Variation der Tageslänge

Bereits Ende des 19. Jahrhunderts beobachtete man an mehreren Sternwarten periodische Veränderungen der geographischen Breite. Diese Variation wurde als Polbewegung gedeutet [*Schnödlbauer*, 2000]. Massenverlagerungen und Strömungen zwischen den einzelnen Teilsystemen Erdkern, Kryosphäre, Ozean und Atmosphäre und der damit verbundene Drehimpulsaustausch induzieren die Polbewegung. Die beobachtete Polbewegung ist von einer Vielzahl periodischer Einflüsse geprägt. Zusätzlich driftet der Pol in Richtung West ab. Neben zahlreichen weiteren Ursachen sind postglaziale Landhebungen und nichtperiodische Massenverlagerungen im Inneren der Erde für die Drift des Rotationspols mit $0,3''/\text{Jahrhundert}$ verantwortlich [*Schnödlbauer*, 2000]. Die beiden größten periodischen Anteile sind als *jährliche* Polbewegung und die, nach seinem Entdecker *Seth Carlo Chandler* (1885) benannte, *Chandler-Periode* mit $T_{CW} = 431$ Tage (CW = Chandler Wobble) bekannt. Durch die Überlagerung von sehr dominanten Signalanteilen mit nah beieinander liegenden Perioden kann im Zeitbereich des Signals ein Muster entstehen, das allgemein als Schwebung bezeichnet wird. Im Falle der beobachtbaren Polbewegung (Abb. 9a) beträgt die Periode der Schwebung 6,75 Jahre. Sie setzt sich zum Großteil aus der Überlagerung der jährlichen und der *Chandler'schen* Periode der Polbewegung zusammen. Die der Abbildung 9 zugrunde liegenden Daten wurden in der EOP-C04-Zeitreihe (Abschnitt 5.1.2) vom Internationalen Erdrotationsdienst (IERS = International Earth Rotation Service) veröffentlicht. Aus Kombination der Beobachtungen mit unterschiedlichen Raumverfahren sind die Erdrotationsparameter dieser Langzeitreihe seit dem 01.01.1962 bis in die Gegenwart mit täglicher Auflösung zugänglich. Zu Beginn dieser Zeitreihe konnte man durch klassische optische Beobachtungen ausgewählter Sterne auf die Erdrotationsparameter schließen. Seit den letzten drei Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts gewinnen zunehmend die Raumverfahren VLBI (Very Long Baseline Interferometry), SLR/LLR (Satellite/Lunar Laser Ranging), GPS (Global Positioning System) und DORIS (Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated by Satellite) bei der Beobachtung der Erdorientierung

bachtung der Erdorientierung an Bedeutung. Die beobachtete Polbewegung ist die Summe aller geophysikalischen Prozesse, die durch Massenverlagerungen Drehimpulse austauschen. Die Zuordnung bestimmter Effekte der Polbewegung zu den einzelnen internen Prozessen ist recht schwierig und derzeit Gegenstand intensiver Forschungen [Schnödlbauer, 2000].

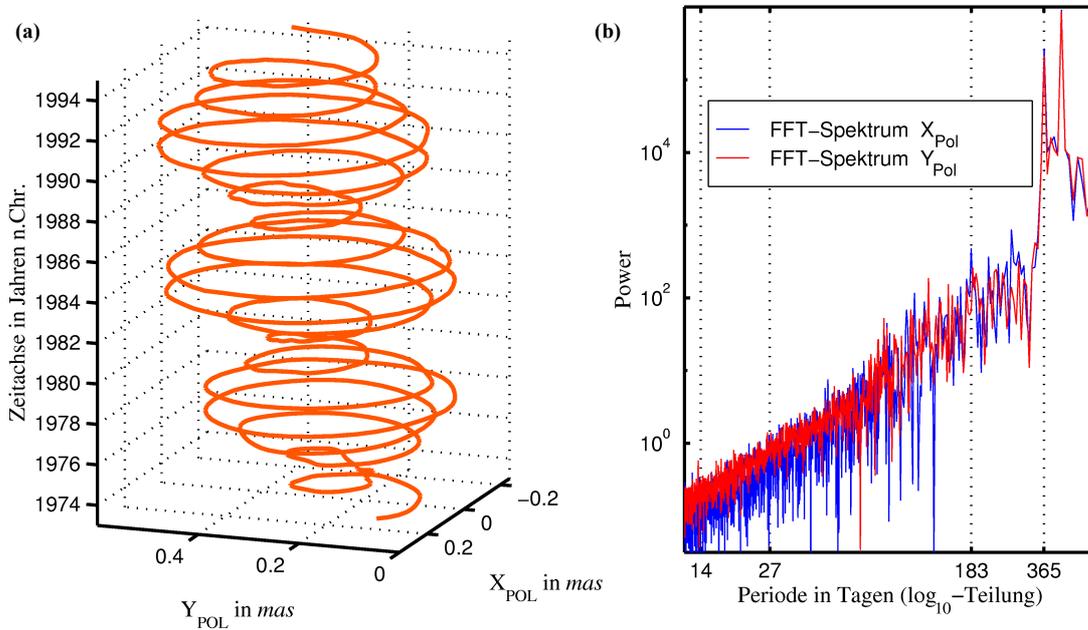


Abbildung 9: **(a)** Die Polbewegung des CEP X_{Pol} und Y_{Pol} relativ zum erdfesten CIO-Pol aus der Zeitreihe EOP-C04 des IERS im Zeitintervall 01.01.1973 – 31.12.1994. **(b)** Die Ergebnisse der Fourier-Analyse der Polbewegung.

Zur Beschreibung der Polbewegung wurde der Himmelspol CEP (Celestial Ephemeris Pole) eingeführt. Die Änderung des CEP bezüglich eines terrestrisch festen Bezugssystems stellt die Polbewegung dar. Die Position des CEP wird definiert mit $[p_1, p_2] \equiv [X_{Pol}, -Y_{Pol}]$. In diesem linkshändigen Koordinatensystem verläuft die X_{Pol} -Achse in Richtung des Greenwicher Meridians und die Achse des Y_{Pol} in Richtung des Meridians 90° West. Der Koordinatenursprung ist der CIO (Conventional International Origin), der die mittlere Rotationsachse der Erde der Jahre 1900 – 1905 darstellt. Die Achse des CEP ist von tagesperiodischen Schwankungen befreit und stellt die freie mittlere Drehimpulsachse der Erde dar [Schnödlbauer, 2000].

Die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit als axiale Komponente beschreibt die Variation des Rotationswinkels um den CEP. Die Schwankung der Tageslänge ΔLOD (Δ Length Of Day) entspricht der Änderung der Rotationsgeschwindigkeit [Thomas, 2002]. In erster Linie verursachen geophysikalische Prozesse in einem großen Periodenspektrum diese Variation [Höpfner, 1995b]. Beispielsweise führen atmosphärische Störungen zur Variation der Tageslänge von einigen Millisekunden pro Tag.

Die Beschreibung des Rotationsverhaltens der Erde ist grundsätzlich mit Hilfe eines beliebigen Bezugssystems möglich. Jedoch nutzt man vorwiegend aus Gründen der Zweckmäßigkeit folgende beiden Systeme. Zum *einen* ist dies das quasi-inertiale Himmelsreferenzsystem (ICRS = International Celestial Reference System), dessen Ursprung sich im Baryzentrum befindet. Das ICRS kommt ei-

dem Inertialsystem, in dem das Newtonsche Trägheitsgesetz gilt, sehr nahe⁸. Beobachtungen mit geodätischen Raumverfahren - wie z.B. VLBI und optische Messungen (Hipparcos) - setzen das ICRS in ein nutzbares Bezugssystem um [Zebhauser, 2001]. Zum *anderen* benötigt man ein erdfestes, terrestrisches Bezugssystem. Dieses System bedingt, dass die Summe aller Rotationen bezüglich der horizontalen tektonischen Bewegung gleich null sind. Der Ursprung des internationalen terrestrischen Referenzsystems ITRS (International Terrestrial Reference System) liegt im Massenzentrum der Erde. Die Realisierung des ITRS durch das ITRF (International Terrestrial Reference Frame) erfolgt über Messungen in einem dichten Netz weltumspannender Beobachtungsstationen. Die geodätischen Raumverfahren VLBI, SLR/LLR, GPS und DORIS tragen zur Umsetzung des ITRS bei [o.A. IFAG, http: 06.03.02]. Den Durchstoßpunkt der \vec{X}_3^{ITRS} -Achse bezeichnet man als Conventional Terrestrial Pole (CTP). Die Realisierung des CTP ist der CIO.

Die Verbindung zwischen dem erdfesten (\vec{X}^{ITRS}) und dem astronomischen (\vec{X}^{ICRS}) Bezugssystem erhält man mit Hilfe der Rotationsmatrix \mathfrak{R} :

$$\vec{X}^{ITRS} = \mathfrak{R} \cdot \vec{X}^{ICRS} \quad (18)$$

Nach Schnödlbauer [2001] ist die Rotationsmatrix \mathfrak{R} das Produkt aus vier Einzelmatrizen. Neben der Präzession P und der Nutation N setzt sich dieses Produkt aus der Polbewegung R_{Pol} und der Erdrehung S zusammen.

$$\mathfrak{R} = R_{Pol} \cdot S \cdot N \cdot P \quad (19)$$

4.4 Dynamik starrer Körper

Um die Bewegung der Erde im Raum beschreiben zu können, sind Vereinbarungen und Annahmen zu treffen. Zunächst wird von einem starren Erdkörper ohne jegliche Deformationseigenschaften ausgegangen. Das Drehmoment \vec{L} beschreibt in diesem Fall die Rotation der Erde im erdfesten System mit einer tangential angreifenden Kraft \vec{F} . Die konstante Kraft wirkt umso effektiver, je größer der Abstand zwischen dem Angriffspunkt und der Rotationsachse ist:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (20)$$

Der Massenpunkt m_p eines Körpers am Ort \vec{r} mit der Geschwindigkeit \vec{v} besitzt den Drehimpuls \vec{M} .

$$\vec{M} = m_p \cdot \vec{r} \times \vec{v} \quad (21)$$

Die Geschwindigkeit \vec{v} des Massenpunktes berechnet sich aus dem Kreuzprodukt der als konstant angenommenen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und dem Ort \vec{r} .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (22)$$

⁸ Ein ideales Inertialsystem hätte seinen Ursprung in der Galaxis, zu der unser Sonnensystem gehört.

Alle aufsummierten Massenpunkte eines Körpers mit entsprechenden Positionen und Geschwindigkeiten ergeben den Gesamtdrehimpuls \vec{M} .

$$\vec{M} = \sum m_{p_j} \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j \quad (23)$$

Die zeitliche Ableitung von (23) und damit die Drehimpulsänderung $\frac{d\vec{M}}{dt}$ führt zur Aussage des Drehimpulssatzes eines rotierenden Körpers im Inertialsystem. Dieser besagt, dass nur äußere Kräfte eine Drehimpulsänderung hervorrufen können [Vogel, 1995].

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum m_{p_j} \cdot \frac{d\vec{r}_j}{dt} \times \vec{v}_j + \sum m_{p_j} \cdot \vec{r}_j \times \frac{d\vec{v}_j}{dt} \quad (24)$$

Der erste Summand in (24) muss nicht weiter beachtet werden, da das Kreuzprodukt zweier paralleler Vektoren ($\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{v}_j$) verschwindet.

Wirken auf den rotierenden Körper von außen keine Kräfte, so bleibt der zweite Summand null, d.h. der Drehimpuls ändert sich weder in Richtung noch im Betrag [Vogel, 1995]. Die aufsummierten von außen wirkenden Drehmomente \vec{L} entsprechen nach dem Prinzip der Drehimpulserhaltung der Änderung des Gesamtdrehimpulses. Die Beziehung für einen rotierenden Körper kann aus der Newtonschen Bewegungsgleichung abgeleitet werden und ist als *Euler-Gleichung* bekannt [Moritz and Mueller, 1987].

$$\vec{L} = \frac{d\vec{M}}{dt} \quad (25)$$

Beim Übergang vom Inertialsystem auf das mitrotierend, terrestrisch fixierte System ergibt sich das Drehmoment gemäß (26), wobei für eine weiterführende Abhandlung beim Wechsel des Bezugssystems auf Moritz and Mueller [1987] verwiesen wird.

$$\vec{L} = \frac{d\vec{M}}{dt} + \vec{\omega}_E \times \vec{M} \quad (26)$$

Im Fall einer starren rotationssymmetrischen Erde und dem Vernachlässigen externer Drehmomente ($\vec{L} = 0$) reduziert sich (26) wie folgt, wobei an dieser Stelle nur das Ergebnis des Umformungsprozesses nach Moritz and Mueller [1987] dargestellt ist.

$$0 = \frac{d\omega_{E1}}{dt} + \sigma_{EULER} \cdot \omega_{E2} \quad (27)$$

$$0 = \frac{d\omega_{E2}}{dt} - \sigma_{EULER} \cdot \omega_{E1} \quad (28)$$

$$0 = \frac{d\omega_{E3}}{dt} \quad (29)$$

Auf die Möglichkeit einer Polbewegung hat *Leonhard Euler* im Jahre 1765 erstmals hingewiesen. Die Periode der freien Schwingung einer starren Erde wurde nach ihm benannt (mit $\sigma_{EULER} = 2\pi / 304 \text{ d}$).

4.5 Dynamik deformierbarer Körper

Im terrestrischen Bezugssystem eines deformierbaren Körpers, in diesem Falle das der Erde, setzt sich dessen Gesamtdrehimpuls \vec{M} aus zwei Anteilen zusammen. Dies ist zum einen das Produkt aus dem Trägheitstensor \vec{I} und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_E$ der Erde. Der Trägheitstensor repräsentiert zeitabhängig die Massenverteilung im Gesamtsystem Erde. Zum anderen trägt der Drehimpuls \vec{M}^r „infolge von Relativbewegungen zum rotierenden terrestrischen Referenzsystem“ [Thomas, 2002, S.9] zum Gesamtdrehimpuls \vec{M} bei:

$$\vec{M} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}_E + \vec{M}^r \quad (30)$$

Nach dem Zusammenführen von (26) und (30) erhält man die sogenannten *Liouville-Gleichung*. Diese Gleichung beschreibt mathematisch die Polbewegung eines deformierbaren Körpers [Moritz and Mueller, 1987].

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{I} \cdot \vec{\omega}_E + \vec{M}^r) + \vec{\omega}_E \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}_E + \vec{M}^r) \quad (31)$$

Bei der Betrachtung starrer Körper verschwindet der Relativdrehimpuls \vec{M}^r vollständig und der Trägheitstensor \vec{I} verliert seine Zeitabhängigkeit. Nach *Moritz and Mueller* [1987] genügt zur Beschreibung der Zeitabhängigkeit von \vec{I} und $\vec{\omega}_E$ für deformierbare Körper ein linearer Ansatz (Störungstheorie 1. Ordnung). So repräsentiert der konstante Anteil \vec{I}_0 den Trägheitstensor und damit die Massenverteilung einer starren, nicht deformierbaren Erde. Die Massentransporte zwischen den einzelnen Teilsystemen der Erde, hervorgerufen durch innere Prozesse, unterliegen einer zeitlichen Variabilität. Diese drückt sich im Störanteil $\Delta\vec{I} \ll \vec{I}_0$ aus. Die Elemente der Matrix $\Delta\vec{I}$ sind auch unter der Bezeichnung Deviationsmomente bekannt. Jeder Körper kann um drei freie Achsen, die sogenannten Hauptträgheitsachsen rotieren. Diese bilden ein orthogonales System. Jedoch sind nur Rotationen um die Achsen mit dem kleinsten oder dem größten Trägheitsmoment stabil [Vogel, 1995]. Wählt man ein terrestrisches mitrotierendes Bezugssystem so, dass die Achse des größten Trägheitsmomentes und die X_3 -Achse des Koordinatensystems zusammenfallen, so kann man den Trägheitstensor \vec{I}_0 in Diagonalform darstellen:

$$\vec{I} = \vec{I}_0 + \Delta\vec{I} \quad \text{mit} \quad \vec{I}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B = A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (32)$$

Die mittleren Hauptträgheitsmomente A, B, C sind für eine rotationssymmetrische, an den Polen abgeplattete Erde ($B = A$ und $C > A$) konstant. Für die deformierbare Erde ist die Winkelgeschwin-

digkeit der Erdrotation $\vec{\omega}_E$ in (31) wie auch der Trägheitstensor von der Zeit abhängig. *Moritz and Mueller* [1987] stellen $\vec{\omega}_E$ als eine Summe aus dem konstanten Anteil $\vec{\omega}_0$ der Winkelgeschwindigkeit und einem zeitabhängigen Störanteil $\Delta\vec{\omega}_E$ dar. Die Störung des Relativdrehimpulses $\Delta\vec{M}^r$ und des Trägheitstensors $\Delta\vec{I}$ aufgrund geophysikalischer Prozesse führt zu einer Störung der gleichförmigen Rotation. Folglich reagiert das Gesamtsystem Erde infolge der Drehimpulserhaltung entsprechend mit $\Delta\vec{\omega}_E$. Die Einflüsse werden als sehr klein angenommen ($|\Delta\omega_{E_j}| \ll \Omega$ mit $j=1,2,3$), weshalb nur ein linearer Ansatz in die Beschreibung von $\Delta\vec{\omega}_E$ eingeht.

$$\vec{\omega}_E = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega}_E \quad \text{mit} \quad \vec{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta\vec{\omega}_E = \Omega \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Nach den *Numerical Standards* des IERS des Jahres 1999 beträgt die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde $\Omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ [o.A. *IERS*, [http: 15.06.02](http://15.06.02)]. Die dimensionslosen Größen m_1 und m_2 beschreiben die Position des instantanen Rotationspols. Die Variation der Rotationsgeschwindigkeit der Erde findet Ausdruck über die dimensionslose Größe m_3 . Das Zusammenführen der Substitutionen (33), (32) mit der *Liouville*-Gleichung (31) führt zur *Euler-Liouville*-Gleichung:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} A\Omega \cdot \frac{dm_1}{dt} + (C - A) \cdot \Omega^2 \cdot m_2 + \Omega \cdot \frac{d\Delta I_{13}}{dt} - \Omega^2 \cdot \Delta I_{23} + \frac{d\Delta M_1^r}{dt} - \Omega \cdot \Delta M_2^r \\ A\Omega \cdot \frac{dm_2}{dt} - (C - A) \cdot \Omega^2 \cdot m_1 + \Omega \cdot \frac{d\Delta I_{23}}{dt} + \Omega^2 \cdot \Delta I_{13} + \frac{d\Delta M_2^r}{dt} + \Omega \cdot \Delta M_1^r \\ C \cdot \Omega \cdot \frac{dm_3}{dt} + \Omega \cdot \frac{d\Delta I_{33}}{dt} + \frac{d\Delta M_3^r}{dt} \end{pmatrix} \quad (34)$$

4.6 Modifizierte Euler - Liouville - Gleichungen

4.6.1 Anregungsfunktionen

Im Falle einer deformierbaren Erde wirken durch interne Prozesse Kräfte, die ein verändertes Rotationsverhalten der Erde auslösen. Die geophysikalisch bedingten Terme $\Delta\vec{I}$ und \vec{M}^r fasst man in den umgestellten *Euler-Liouville*-Gleichungen zu den sogenannten Anregungsfunktionen ψ^{EF} (Excitations Functions) zusammen. Die Notation nach *Munk and MacDonald* [1960] beinhaltet den unter dem Namen *Chandler-Wobble* bekannten Eigenmodus der Polbewegung $\underline{\sigma}_{CW}$.

$$\psi_1^{EF} = m_1 - \frac{1}{\sigma_{CW}} \cdot \frac{dm_2}{dt} \quad (35)$$

$$\psi_2^{EF} = m_2 + \frac{1}{\sigma_{CW}} \cdot \frac{dm_1}{dt} \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_3^{EF} = \frac{dm_3}{dt} \quad (37)$$

$$\underline{\sigma}_{CW} = \frac{2\pi}{T_{CW}} \cdot \left(1 + \frac{i}{2 \cdot Q} \right) \quad (38)$$

Die auf Beobachtungen beruhende *Chandler*-Periode T_{CW} variiert in den einzelnen Literaturquellen. In dieser Arbeit wird bei der Transformation der beobachteten Erdorientierungsparameter (X_{Pol} , Y_{Pol} , ΔLOD) in die dimensionslosen χ -Funktionen (Abschnitt 4.6.2) auf die *Numerical Standards* des IERS (o.A. *IERS*, [http: 15.06.02](http://15.06.02)) mit $T_{CW} = 433,1$ Tage zurückgegriffen. Die komplexwertige Winkelgeschwindigkeit $\underline{\sigma}_{CW}$ in (38) steht nach *Wahr* [1983] in Abhängigkeit des dimensionslosen Dämpfungsfaktors $Q = 100 \dots 200$. In dieser Arbeit wird die Dämpfung mit $Q = 170$ nach *Wilson and Vicente* [1980] benutzt.

In diesem Zusammenhang sei die sehr kompakte Schreibweise mit der imaginären Einheit i eingeführt. Alle komplexwertigen Variablen sind nachfolgend an den Unterstrichen zu erkennen:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}^{EF} &= \psi_1^{EF} + i \cdot \psi_2^{EF} \quad , & \underline{m} &= m_1 + i \cdot m_2 \quad , & (39) \\ \underline{\Delta M}^r &= \Delta M_1^r + i \cdot \Delta M_2^r \quad , & \underline{\Delta I} &= \Delta I_{13} + i \cdot \Delta I_{23} \quad . \end{aligned}$$

Die Horizontalkomponenten der ψ^{EF} -Funktionen ergeben sich aus der Kombination von (35) und (36):

$$\underline{\psi}^{EF} = \underline{m} + \frac{i}{\underline{\sigma}_{CW}} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (40)$$

Die axiale Komponente kann man durch die Integration von (37) überführen zu:

$$\psi_3^{EF} = m_3 + \text{const.} \quad (41)$$

In den dimensionslosen ψ^{EF} -Funktionen kann jeder geophysikalische Prozess Betrachtung finden, der die Rotation der Erde beeinflusst. Das viskoelastische Verhalten der Erde aufgrund einwirkender Kräfte kann mit Erdmodellen beschrieben werden. In den Anregungsfunktionen bringt man das viskoelastische Verhalten der Erde anhand der numerischen Faktoren α_j ($j = 1, 2, 3, 4$) ein, mit deren Hilfe die rheologischen Eigenschaften des Erdkörpers sowie Auflastdeformationen approximiert werden und folglich das Rotationsverhalten realistischer beschrieben werden kann. Die vom Anregungsprozess abhängigen Faktoren α_j sind teilweise das Produkt aus der Kombination der *Love*'schen Zahlen. Bei einer starren Erde gilt $\alpha_j = 1$. Für atmosphärisch und ozeanisch bedingte Auflastprozesse gibt *Wahr* [1982, 1983] im Falle einer viskoelastischen Erde, bei einem vorausgesetzten Gleichgewichtsozean und einem vom Erdmantel entkoppelten äußeren Kern, folgende Werte an:

$$\alpha_1 = 1,12 \quad \alpha_2 = 1,61 \quad \alpha_3 = \frac{C}{C_m} = 1,129 \quad \alpha_4 = 0,756$$

Barnes et al. [1983] geben für das axiale Hauptträgheitsmoment des Erdmantels den Wert $C_m = 7,04 \cdot 10^{37} \text{ kgm}^2$ an. Die komplexwertigen Horizontalkomponenten und die axiale Komponente der ψ^{EF} -Funktionen kann man beschreiben durch:

$$\underline{\psi}^{EF} = \frac{1}{\Omega^2 (C - A)} \cdot \left[\alpha_1 \cdot \left(\Omega^2 \cdot \underline{\Delta I} - i\Omega \cdot \frac{d\underline{\Delta I}}{dt} \right) + \alpha_2 \cdot \left(\Omega \cdot \underline{\Delta M}^r - i \cdot \frac{d\underline{\Delta M}^r}{dt} \right) \right] \quad (42)$$

$$\psi_3^{EF} = -\frac{\alpha_3}{\Omega \cdot C} \cdot [\alpha_4 \Omega \cdot \Delta I_{33} + M_3^r]. \quad (43)$$

4.6.2 χ -Funktionen

Die Anregungsfunktionen ψ^{EF} besitzen unterschiedliche physikalische Charaktere. Die Funktionen ψ_1^{EF} und ψ_2^{EF} (42) drücken die Polbewegung mit Hilfe von Drehmomenten aus, währenddessen ψ_3^{EF} (43) mit Hilfe des Drehimpulses berechnet wird [Moritz and Mueller, 1987]. Der Gesamtdrehimpuls der Erde setzt sich nach (30) aus dem Massenterm $\vec{I} \cdot \vec{\omega}_E$, der die Verteilung von Massenelementen repräsentiert und dem Bewegungsterm \vec{M}^r zusammen. Die horizontalen ψ^{EF} -Anregungsfunktionen als Ergebnis der Transformation (42) beinhalten die zeitlichen Ableitungen des Massen- und Bewegungsterms, entsprechend $d\underline{\Delta I}/dt$ und $d\underline{\Delta M}^r/dt$ [Barnes et al. 1983]. Die involvierten Beschleunigungsterme sind bei praktischen Berechnungen mit Beobachtungsmaterial, z.B. meteorologischen Daten, wenig geeignet. *Barnes et al.* [1983] führen die als effektive Drehimpulsfunktionen (EAM=Effective Angular Momentum) bekannten χ -Funktionen ein. Mit der komplexen Notation $\underline{\chi} = \chi_1 + i \cdot \chi_2$ kann man die Schwankungen der instantanen Rotationsachse mit Hilfe der Beziehungen (37) und (40) ausdrücken mit:

$$\underline{\chi} - \frac{i}{\Omega} \cdot \frac{d\underline{\chi}}{dt} = \underline{m} + \frac{i}{\sigma_{CW}} \cdot \frac{d\underline{m}}{dt}, \quad (44)$$

$$\frac{d\underline{\chi}_3}{dt} = -\frac{d\underline{m}_3}{dt} \quad (45)$$

Die dimensionslosen χ -Funktionen beschreiben die Wirkung der internen Prozesse auf das Rotationsverhalten der Erde und finden nach *Thomas* [2002] Darstellung in:

$$\underline{\chi} = \frac{1}{\Omega(C - A)} \cdot (\alpha_1 \Omega \cdot \underline{\Delta I} + \alpha_2 \cdot \underline{\Delta M}^r) \quad (46)$$

$$\chi_3 = \frac{1}{\Omega \cdot C_m} \cdot (\alpha_4 \Omega \cdot \Delta I_{33} + \Delta M_3^r) \quad (47)$$

Der Vergleich der in dieser Arbeit zu untersuchenden Drehimpulszeitreihen des Ozeans mit realen Beobachtungsdaten (ΔLOD , X_{Pol} , Y_{Pol}) des IERS verläuft in der Ebene der χ -Funktionen. Die Transformation der modellierten ozeanischen Zeitreihen (nähere Erläuterung in Abschnitt 5.1.1) in die

Ebene der χ -Funktionen verwendet die Beziehungen (46) und (47). Die Störungen der Relativedrehimpulse $\Delta\vec{M}^r$ und die Störungen der Trägheitstensoranteile $\Delta\vec{I}$ können als Abweichungen von einem mittleren Zustand angesehen werden. Für einen „hinreichend langen Zeitraum“ genügt zur Berechnung der Störungen nach *Thomas* [2002, S.56] die Subtraktion des Mittelwertes von \vec{M}^r und von \vec{I} , da nur Abweichungen von einem mittleren Zustand zu einem veränderten Rotationsverhalten der Erde führen.

4.7 Verifikationsebenen

Prinzipiell besteht die Möglichkeit, die gemessenen Erdrotationsparameter (Abschnitt 5.1.2) mit den simulierten Drehimpulszeitreihen des Ozeans (Abschnitt 5.1.1) in verschiedenen Ebenen miteinander zu vergleichen. Die Simulation gibt Auskunft über die Einflussnahme einzelner Prozesse auf das Rotationsverhalten der Erde. Neben den Gezeiten wirken thermohaline sowie wind- und druckgetriebene Zirkulationen auf den Gesamtdrehimpuls des Ozeans, die im Modell zum Teil separat hinsichtlich ihres Einflusses betrachtet werden können. Ein Vergleich zwischen den gemessenen Erdrotationsparametern, in dieser Arbeit werden ausschließlich X_{Pol} , Y_{Pol} , ΔLOD betrachtet, und den dimensionsbehafteten Drehimpulszeitreihen einer Simulation ist nur in einer gemeinsamen Vergleichsebene sinnvoll. Dies bedarf der Transformation von Modell- bzw. Messdaten oder auch einer Umformung beider Datenreihen. Den Übergang der Drehimpulse zu den dimensionslosen χ -Funktionen kann man mit (46) und (47) problemlos realisieren. Eine Umwandlung der Anregungsfunktionen, im Speziellen χ_1 und χ_2 , in die Horizontalschwankungen X_{Pol} und Y_{Pol} birgt die Gefahr in sich, signifikante kleinere Signalanteile im Anregungsbereich nach der Transformation zu überdecken [*Thomas*, 2002]. Die Übertragung vom Anregungs- in den Rotationsbereich erfolgt mit Hilfe einer Resonatorgleichung, welche die empirisch bestimmten Eigenmoden der Erde als freie Schwingung beschreibt, sofern keine äußeren Drehmomente wirken [*Polzer*, 1997]. Die Rotationsmoden der Erde sind die freie Kernnutation und die Chandlersche Bewegung. Kleine Variationen der Signale im Anregungsbereich lassen sich durch die Transformation in den Bereich der Polbewegung durch die starken Eigenmoden der Erde kaum verifizieren. Im Rahmen dieser Arbeit werden deshalb die gemessenen Erdorientierungsparameter in den Anregungsbereich χ überführt, wobei die resonanten Schwingungsanteile in dieser Ebene größtenteils eliminiert sind. Für diesen Übergang gibt *Gross* [1992] folgende Beziehung zwischen dem instantanen Rotationspol \vec{m} und dem bezüglich des CEP beobachteten Rotationsvektor \vec{p} an.

$$\vec{m} = \vec{p} - i \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \frac{1}{\Omega} \quad (48)$$

$$m_3 = \frac{dp_3}{dt} \cdot \frac{1}{\Omega} \quad (49)$$

Barnes et al. [1983] zeigen für m_3 ebenso auf, dass eine Verknüpfung mit der Variation der Rotationsgeschwindigkeit problemlos möglich ist. So ergibt sich der Zusammenhang zwischen m_3 und ΔLOD :

$$m_3 = \frac{\Delta LOD}{LOD} \quad (50)$$

Die komplexe Notation der horizontalen Schwankung sei entgegen der Festlegung (39) wie folgt definiert:

$$\underline{p} = p_1 - i \cdot p_2 \quad (51)$$

Grund dieser Änderung ist die Richtung der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Y_{Pol} -Achse nach West. Zum Wahren der Rechtshändigkeit der ab 4.3 behandelten Koordinatensysteme nach der Transformation der Horizontalschwankungen in den Anregungsbereich ist deshalb diese komplexe Schreibweise als Ausnahme zur Notation nach (39) zu sehen. Zum Beschreiben der beobachteten Polbewegung mit Hilfe der dimensionslosen $\underline{\chi}$ -Funktion verbindet man (48) und (44) zu:

$$\underline{\chi} = \underline{p} + i \cdot \frac{d\underline{p}}{dt} \cdot \frac{1}{\sigma_{CW}} \quad (52)$$

Die Verifikation von Drehimpulszeitreihen und gemessenen Erdrotationsparametern erfolgt in dieser Arbeit auf der Ebene der $\underline{\chi}$ -Funktionen. Weiterhin ist eine Unterscheidung der einzelnen Anregungen in deren zeitlicher Variation oder im Frequenzraum möglich. In den Untersuchungen (Abschnitt 5.6) wird zunächst der Anregungsbereich im Frequenzraum analysiert. Die hierfür benutzte schnelle Fourier-Transformation separiert periodische⁹ Signalanteile in den Daten. Ein Großteil der Untersuchungen bezieht sich jedoch auf den durch die kontinuierliche Wavelet-Transformation aufgespannten Zeit-Perioden-Raum der Anregungsfunktionen. Eine zeitliche Lokalisierung von Schwingungsanteilen verschiedenster Frequenzen ermöglicht bei der Verifikation von Modell- und Beobachtungsdaten vor allem den Unterschied bei aperiodischen und episodischen Signalanteilen herauszustellen.

⁹ Das Spektrum eines über die FFT transformierten Signals kann fehlinterpretiert werden, sofern starke episodische oder aperiodische Signalanteile im Signal vorhanden sind. Hier sei zusätzlich auf Abschnitt 2.3 verwiesen.

5 Analyse von Zeitreihen mit Hilfe der kontinuierlichen Wavelet-Transformation

5.1 Datengrundlage

Die Grundlage der Untersuchung ist das Datenmaterial von simulierten ozeanischen Drehimpulszeitreihen. Sie sind das Ergebnis eines numerischen Modells nach *Thomas* [2002] und zeigen den Einfluss des Teilsystems Ozean auf die Orientierung der Erde im Raum. Zum Vergleich sollen reale Beobachtungsdaten des IERS für die Polbewegung und die Tageslängenschwankung in Form von Langzeitreihen mit Hilfe der CWT analysiert werden.

5.1.1 Simulierte ozeanische Drehimpulszeitreihen

Neben den äußeren gravitativen Einflüssen anderer Himmelskörper wirken auch die in Abschnitt 4.2 beschriebenen internen Prozesse mit ihren dynamischen Massenverlagerungen auf das Rotationsverhalten der Erde. Durch das Abspalten der äußeren Einflüsse sind die mit geodätischen Raumverfahren beobachtete Polbewegung und Tageslängenschwankung auf die geophysikalischen Prozesse zurückzuführen. Das Ergebnis der Beobachtungen ist stets eine Summation aus den einzelnen internen Prozessen in den Teilsystemen Erdkern, Hydrosphäre und Atmosphäre. Der Umfang der Anregungsbeiträge der einzelnen Teilsysteme kann nur mit begrenzter Genauigkeit abgeschätzt werden. Speziell die Prozesse im Erdkern entziehen sich direkten Beobachtungen zur Bestimmung der Anregungsbeiträge. Im Falle des Ozeans sind Beobachtungen nur bedingt, z. B. mit Methoden der Fernerkundung, möglich. Messungen der Wassertemperatur und des Salzgehaltes des Ozeans in den tieferen Schichten der Weltmeere können mit den Methoden der Fernerkundung nur begrenzt erfolgen [*Thomas*, 2002]. Der Zustand der Atmosphäre ist mit Hilfe der unterschiedlichsten Beobachtungssysteme - Wetterballon, Satellit und Wasserdampfstrahlometer - verhältnismäßig gut bekannt. Das Netz von weltweit verteilten Beobachtungsstationen zur permanenten Erfassung des Atmosphärenzustandes ist, im Vergleich zu den anderen Teilsystemen, auch am weitesten ausgebaut. Die gemessene Variation des Rotationsverhaltens der Erde lässt sich derzeit nur sehr begrenzt den jeweiligen geophysikalischen Prozessen zuordnen.

Eine Möglichkeit zur Darstellung der globalen ozeanischen Dynamik sind numerische Modelle, die mathematisch die physikalischen Prozesse beschreiben. Auf der Grundlage des von *Thomas* [2002] entwickelten OMCT-Modells (Ocean Model for Circulation and Tides) sollen in dieser Arbeit ozeanische Drehimpulszeitreihen untersucht werden. In diesem Modell sind strömungsbedingte und die auf die Gezeiten zurückzuführende Dynamik des Ozeans miteinander vereint, wobei auch die Effekte Auflast und die Selbstanziehung einbezogen sind. Der Vorteil dieses Modells liegt in der simultanen Betrachtung der Hauptkomponenten ozeanischer Dynamik. Die Hauptantriebsquellen sind zum einen die Atmosphäre und zum anderen die Gravitation durch Sonne und Mond. Die numerischen Lösungen der OMCT-Modellgleichungen verknüpfen die Wechselwirkungen der Zirkulations- und Gezeitendynamik im Ozean. Herkömmliche Modelle betrachten den Antrieb von Atmosphäre und Gravitation auf die Weltmeere separat, wie z.B. das atmosphärisch getriebene Parallel Ocean Climate Model (POCM) nach *Semtner and Chervin* [1992].

Die zur Verfügung stehenden Daten stellen die Ergebnisse der numerischen Simulation ozeanischer Drehimpulse für den Zeitraum 1949 bis 1994 mit der zeitlichen Auflösung von einer Stunde dar. Aufgrund von Einschwingvorgängen der mathematischen Modellgleichungen zeigen die ersten Jahrzehnte dieser Simulation stärkere Variationen. Deshalb finden ausschließlich die Zeitreihen der Jahre 1962 bis 1994 Eingang in die Untersuchung.

5.1.2 Zeitreihe EOP-C04 des IERS

Erst am Ende des 19. Jahrhunderts konnten an mehreren Sternwarten periodische Veränderungen der geographischen Breite gemessen und mit der *Euler'schen* Theorie der Polbewegung (1875) in Verbindung gebracht werden. Aufgrund der Ergebnisse der Breitenbeobachtungen von *F. Küster* wurde im Jahre 1899 der Internationale Breitendienst ILS (International Latitude Service) gegründet, dessen Aufgaben seit 1962 der Internationale Erdrotationsdienst IERS wahrnimmt. Mit einem Netz aus Beobachtungsstationen werden seit 1900 permanent die Variationen der Polkoordinaten $[X_{Pol}, Y_{Pol}]$ des CEP und die der Tageslänge ΔLOD erfasst. Trugen in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts klassische astronomische Beobachtungen zur Berechnung der Erdorientierungsparameter (EOP) bei, so sind es seit den siebziger Jahren periodische (VLBI) und permanente (GPS) Messungen mit den modernen geodätischen Raumverfahren. Nicht zuletzt erhöhte sich mit der VLBI-Beobachtung sehr weit entfernter Radioquellen die Genauigkeit der Erdorientierungsparameter. Auch die ständig wachsende Anzahl an Beobachtungsstationen im weltweiten Netz des IERS führt zu geringeren Messunsicherheiten, weshalb die erzielten Genauigkeiten für die Schwankung der Tageslänge derzeit bei 0,02 ms und für die Polbewegung bei 0,3 mas liegen [*Klüngel und Schreiber, 2001*]. Der IERS bietet neben zahlreichen anderen Produkten, eine Langzeitreihe mit Erdorientierungsparametern unter dem Namen EOP-C04 an, die jedem Interessenten kostenlos unter <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/> (Stand: 04.08.2002) zugänglich ist. Diese Langzeitreihe stellt die Beobachtung des Gesamteinflusses interner Prozesse dar, deren größten Beträge aus den Teilsystemen Erdkern, Hydrosphäre und Atmosphäre stammen. Von den sechs offerierten Parametern werden jedoch nur drei für eine vollständige Beschreibung zur Orientierung der Erde benötigt. In dieser Arbeit werden die Parameter ΔLOD sowie die Koordinaten des Himmelpols CEP $[X_{Pol}, Y_{Pol}]$ untersucht. Die EOP-C04 – Reihe enthält die Orientierungsparameter seit dem 1. Januar 1962 bis in die Gegenwart mit einer zeitlichen Auflösung von einem Tag.

5.2 Analysewerkzeuge

Zur Untersuchung des Datenmaterials wurde in dieser Arbeit die Software MATLAB, Version 5.0.0.4069, der Firma „*The MathWorks, Inc.*“ verwendet. MATLAB ist eine wissenschaftlich-technische Software, die außer an Hochschulen auch zunehmend in der Wirtschaft Verbreitung findet. Leistungsstarke numerische Berechnungen und Simulationen können mit den zahlreichen bereits vorgefertigten Funktionen durchgeführt werden. Ein großer Vorteil ist die professionelle Visualisierung von Daten oder Ergebnissen. Zur Standardversion sind zusätzliche Werkzeuge für spezielle Anwenderprofile in sogenannte *Toolboxen* integriert. Diese Toolboxen selbst enthalten vorgefertigte m-Files¹⁰, die für die entsprechende Problemklasse, zusätzlich zu den Standard-MATLAB-Routinen,

¹⁰ Funktionen mit Befehlen in der Programmiersprache MATLAB.

spezifische Befehle anbieten. Im Rahmen dieser Arbeit schränkt sich der Einsatz auf zwei dieser Toolboxen ein. Dies ist zum einen die *Signal-Processing-Toolbox*, deren Funktionen eine Signalfilterung und eine Signalanalyse, hier im Sinne der Fourier-Transformation nach Abschnitt 2, ermöglichen. Zum anderen bietet die *Wavelet-Toolbox* dem Anwender die Möglichkeit einer zeit- und frequenzabhängigen Signalanalyse entsprechend Abschnitt 3, mit einer großen Vielfalt vorgefertigter Wavelets und Transformationen, wie z.B. CWT, DWT und MRA. Mit eigenen Funktionen in der Programmiersprache von MATLAB gelingt es dem Nutzer numerische Berechnungen, Simulationen, etc. zu steuern.

5.2.1 Wavelet-Toolbox

Die Werkzeuge zur Wavelet-Transformation liegen in gleichnamiger Toolbox bereits vor. Neben einer Analyse von Signalen im Sinne kontinuierlicher und diskreter WT bietet sich u.a. mit der MRA die Möglichkeit einer schnellen Analyse und einer komprimierten Speicherung von Daten an. Bei der Untersuchung der simulierten Drehimpulszeitreihen und der Langzeitreihen von Messungen des IERS kommt ausschließlich die CWT zur Anwendung. *Hubbard* [1997] begründet den Vorteil der kontinuierlichen WT mit der verschiebungsinvarianten Darstellung der Transformationsergebnisse. Im Vergleich zur DWT kann die redundante Koeffizientenmatrix $L_\psi f(a, b)$ der CWT in Form des Wavelet-Power-Spektrum (WPS) viel einfacher interpretiert werden. *Schmidt und Schuh* [1999] sowie *Arfa-Kaboodvand und Grotten* [1998] empfehlen für geophysikalische und geodätische Analysen, im Besonderen für die der Orientierung der Erde, den Einsatz des Morlet-Wavelets:

$$\psi_{Morlet}(t) = e^{ik_0 \cdot t} \left(e^{-t^2/2 \cdot \lambda^2} - \sqrt{2} \cdot e^{-1/4 \cdot k_0^2 \cdot \lambda^2} \cdot e^{-t^2/\lambda^2} \right) \quad (53)$$

In der Praxis finden häufig Wavelets mit der Grundfrequenz $5 \leq k_0 \leq 6$ Anwendung. Der zweite Term im Klammerausdruck fällt dann sehr klein aus und kann vernachlässigt werden [*Große-Erdmann*, 2002]. Die Konstante λ sei als Formparameter des Morlet-Wavelets eingeführt. Je kleiner der Wert dieser Konstante, desto lokalisierter beschreibt sich ψ_{Morlet} im Zeitbereich.

Die in der Toolbox implementierte Funktion „*cwt.m*“ entwickelt Wavelet-Koeffizienten mit diskreter Schrittweite. Das Spektrum an Wavelet-Funktionen, die am zu untersuchenden Signal entlanggeschoben und zusätzlich dilatiert werden, unterliegt einer steuerbaren Dezimierung. Je nach Anwendung kann man zwischen konstanten und variablen Schrittweiten zur Berechnung der Koeffizienten $L_\psi f(a, b)$ wählen. Als äußerst ungünstig erwies sich in den Untersuchungen „*cwt.m*“ mit *konstanten* Schrittweiten. Als Ergebnisse einer Analyse umfangreicher Datensätze stellten sich große Koeffizientenmatrizen dar, deren Berechnungsdauer sich mit der Anzahl der berechneten Skalen vergrößerte. Als problematisch und sehr zeitintensiv erwies sich die Umsetzung der Resultate in Form einer Monitorgrafik. Bei einem Umfang der Matrizen von 12000×15 (diskrete Datenpunkte \times Anzahl der Skalen) ist die Rechenzeit für die grafische Darstellung um mehr als eine Größenordnung höher als die Zeit für die Berechnung der Koeffizienten. Größerdimensionierte Matrizen konnten mit der Funktion „*cwt.m*“ berechnet, jedoch nicht dargestellt werden. Für die Untersuchung von Zeitreihen ist es häufig nötig, einen weitumfassenden Spektralbereich zu analysieren. Ein Kompromiss zwischen großen Frequenzbändern und möglichst kleinen Koeffizientenmatrizen ist die *exponentielle* Schrittwei-

tensteuerung. Die erstellte Funktion „*cwt_ml.m*“ entwickelt auf der Basis des MATLAB-Algorithmus dilatierte Wavelet-Funktionen mit exponentiell steigenden Skalen zur Basis 2 in Anlehnung an das Konzept (54) nach *Torrence and Compo* [1998]. Für eine kalibrierte Darstellung der Ergebnisse muss das Morlet-Wavelet als Analysefunktion gewählt werden.

In kurzperiodischen Bereichen arbeitet die CWT nach dem Algorithmus (54) zur Skalierung sehr sensitiv, da sich die Schrittweite der einzelnen Skalen nur langsam ändert. Niederfrequenterer Signalanteile mit $a_j \rightarrow a_j$ werden dann mit zunehmender Schrittweite untersucht.

$$a_j = a_0 \cdot 2^{j \cdot dj} \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (54)$$

Mit a_0 wählt man die Größe der ersten Skale aus, wobei a_0 mindestens der Größe des doppelten Abtastintervalls im Zeitbereich des Signals entsprechen sollte, um Alaisingeffekte zu unterbinden. Der dimensionslose Anstiegsparameter dj ($dj \in \mathbf{R}^+$) legt den Abstand zwischen den Skalen fest und sollte je nach Anwendung Beträge um 0,25 annehmen. Beträge von $dj < 0,25$ erhöhen die Auflösung im kurzperiodischen Bereich. Für eine Anzahl J der diskreten Skalenparameter a_j schränkt sich die Größe des Periodenspektrums des Signals ein. Sind neben dem zu analysierenden Signal alle Parameter¹¹ und das Mutter-Wavelet gewählt, ruft „*cwt_ml.m*“ den MATLAB-CWT-Algorithmus auf und gibt das Ergebnis der kontinuierlichen WT in Form einer Isoliniengraphik aus.

Im Falle des Morlet-Wavelet der MATLAB-CWT entspricht jedoch die Skale a_j nicht der Periode T_j . Anders ausgedrückt sind die Resultate der Transformation nicht mit den im Signal auftretenden Schwingungen synchronisiert. Verschiedene Kalibrierungen der CWT-Ergebnisse mit Testdaten bekannter Frequenzen führten zum Ergebnis, dass sich Skale und Periode u.a. mit einem konstanten Faktor c voneinander unterscheiden. *Maass* [p.M., e-mail: 08.04.02] führt diese Erkenntnis auf die Grundschwingung des Mutter-Wavelet zurück, die im Falle der Morlet-Funktion verstellbar ist (53). Ist die Grundfrequenz der Analysefunktion, die auch die Bezeichnung Oszillationszahl k_0 trägt, bekannt, so lässt sich für jede Skale die Periode T_j von Signalanteilen zuweisen. Der MATLAB-Algorithmus nutzt jedoch eine feste und damit nicht verstellbare Grundschwingung bei der speziellen CWT mit ψ_{Morlet} . Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 aufgeführt, ist die WT eine Art Bandpassfilterung des Signals um die mittlere Frequenz der entsprechenden Wavelet-Funktion. Nach *Maass* [p.M., e-mail: 08.04.02] ist die Durchlasscharakteristik des eingesetzten Wavelets nur auf ein schmales Periodenband begrenzt, das nicht genau mit der Skale übereinstimmen muss. Die zu analysierende Periodendauer T_j des Signals ist beim Einsatz von „*cwt_ml.m*“ neben der Skale a_j vom konstanten Faktor c abhängig. Dieser Faktor dient der Verknüpfung der wavelet-typischen Skalierung a_j und der mittleren Schwingungsdauer, die das Wavelet bei der Dilatation aufweist.

$$T_j \cong c \cdot a_j \quad (55)$$

Maass [p.M., e-mail: 08.04.02] schlägt vor, den direkten Zusammenhang zwischen Skalierung und Periode mit Hilfe von Testfunktionen zu bestimmen. Die durchgeführten Untersuchungen bestätigen größtenteils den linearen Zusammenhang in (55). In den Wavelet-Power-Spektren der Funktion „*cwt_ml.m*“ analysiert man zunächst das Signal mit den Skalen a_j entsprechend (54). Die Ergebnisse

¹¹ Mit Verweis auf die Instruktion innerhalb der Funktion „*cwt_ml.m*“.

dieser Transformation müssen anschließend mit der Multiplikation des Kalibrierungsfaktors $c = 1,2121$ den Perioden T_j zugeordnet werden, um das Signal im Bildraum interpretieren zu können. Tests zeigten teilweise eine nicht korrekte Zuordnung der im Signal enthaltenen Frequenzen. Dieser Effekt war u.a. von der Größe des Anstiegsparameters d_j abhängig und konnte nicht vollständig beseitigt werden.

5.2.2 Wavelet-Analyse ohne Toolbox

Grundsätzlich besteht die Option, nicht auf die Wavelet-Toolbox des Softwareherstellers zurückzugreifen, da im *World Wide Web* Funktionen in Form von m-Files für die Wavelet-Analyse zum Download bereitstehen. Meist sind diese Funktionen für nur ganz bestimmte Formen der WT zugeschnitten. Die Auswahl an integrierten Mutter-Wavelets ist damit auch sehr begrenzt. *Torrence and Compo* [1998] von der University of Colorado stellen Funktionen zur kontinuierlichen WT bereit. Beide Autoren untersuchen Zeitreihen der Oberflächentemperaturen des Ozeans im Zusammenhang mit dem Klimaphänomen *El Niño* und stellen die Ergebnisse ihrer Wavelet-Analyse vor. Der Anwender kann sich beim Einsatz des Werkzeuges der beiden Autoren zwischen den Analysefunktionen Morlet, Paul und „Mexikanischen Hut“ entscheiden. Der Algorithmus nach *Torrence and Compo* [1998] arbeitet sehr schnell und zuverlässig und wurde deshalb vorwiegend bei der Untersuchung der Zeitreihen in dieser Arbeit eingesetzt. Die erstellte und im Anhang bereitgehaltene Funktion „*cwt_compo.m*“ greift auf die Transformationswerkzeuge von *Torrence and Compo* [1998] zurück und übergibt anschließend eine Visualisierung der Wavelet-Koeffizienten.

Häufig findet man in der Literatur ohne zusätzliche Hinweise eine Morlet-Wavelet eingeführt, das *nicht* der im Jahre 1983 von *Morlet* definierten Basisfunktion entspricht (53). Bei diesem Derivat (56) handelt es sich vielmehr um die modulierte Gauß-Funktion. Sie entspricht näherungsweise der Morlet-Funktion (53) bei der Oszillationszahl $5 \leq k_0 \leq 6$. *Torrence and Compo* [1998] integrieren in ihrem CWT-Analysewerkzeug „*wlet.m*¹²“ u.a. die modulierte Gauß-Funktion und bezeichnen diese als Morlet-Wavelet. Deshalb wird im Folgenden das Derivat der Gauß-Funktion (56) als Morlet-Wavelet benannt.

$$\psi_{\text{Morlet}}(t) = \pi^{-0,25} \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot t} \cdot e^{-0,5 \cdot t^2} \quad (56)$$

Mit k_0 verbindet man die Form und Lokalisierung des komplexwertigen Wavelets im Zeitbereich. Im Gegensatz zur Morlet-Funktion in der Wavelet-Toolbox („*cwt.m*“) ist in der Funktion „*cwt_compo.m*“ die Einstellung der Zahl der Oszillationen k_0 möglich. Die Untersuchung erfolgte ausschließlich mit dem konstanten Parameter $k_0 = 6$, da hierbei das Kriterium an Wavelets (12) am besten erfüllt wird. Zudem gelingt es, das Auftreten von Frequenzänderungen im Signal oder von *nicht* periodischen Signalanteilen im Zeitbereich eng einzugrenzen. Der Formparameter λ ist für das Morlet-Wavelet im Werkzeug nach *Torrence and Compo* [1998] nicht veränderlich. Beim Vergleich der ersten Summanden in (53) und (56) erkennt man, dass die Funktion „*cwt_compo.m*“ den Parameter $\lambda = 1$ nutzt, da $e^{-t^2/2 \cdot \lambda^2} = e^{-0,5 \cdot t^2}$.

¹² Die Funktion „*cwt_compo.m*“ greift auf den CWT-Algorithmus in „*wlet.m*“ zurück.

Die Steuerung der Schrittweite der Skalenparameter a_j bei der Funktion „*cwt_compo.m*“ ist im Vergleich zu „*cwt_ml.m*“ weniger variabel. Dem Anwender steht ausschließlich die exponentielle Schrittweitensteuerung (54) zur Verfügung, was jedoch für die durchgeführten Analysen in dieser Arbeit genügt. Zur weiteren Beschreibung einer CWT-Analyse mit Hilfe der Funktion „*cwt_compo.m*“ soll auf die Erläuterung in der gleichnamigen Datei im Anhang verwiesen sein.

5.2.3 Besonderheiten der programmierten MATLAB-Funktionen zur CWT

Zur Visualisierung der Wavelet-Koeffizienten werden o.g. Funktionen bereitgestellt. Die Unterschiede in den zu erzeugenden Darstellungen ergeben sich zum großen Teil aus den im Hintergrund ablaufenden Routinen zur Berechnung der CWT. Grundsätzliche Unterschiede und optionale Einstellungen sind in tabellarischer Form zusammengestellt.

Tabelle 1: Unterschiede der zur Visualisierung der Wavelet-Koeffizienten programmierten MATLAB-Funktionen.

	<i>cwt_ml.m</i>	<i>cwt_compo.m</i>
Skalierung der Wavelet-Funktionen (Schrittweite der Skalen):	Die Schrittweite kann in <i>cwt.m</i> (Toolbox) über funktionalen Zusammenhang definiert werden, in <i>cwt_ml.m</i> wird aus Gründen der Zweckmäßigkeit nur die exponentielle Schrittweitensteuerung eingesetzt.	Mit dieser Funktion ist ausschließlich eine exponentielle Schrittweitensteuerung möglich.
Auswahl an Mutter-Wavelets ¹³ :	Morlet, Mexikanischer Hut, Daubechies, Symlet, Coiflet	Morlet, Paul, Mexikanischer Hut
Entfernen von Randeffekten (Abschnitt 5.3.2):	Mit „ <i>cwt_ml.m</i> “ ist lediglich ein Auslöschen der Randeffekte mit fest definierter Maske möglich.	Der Zero-Padding-Algorithmus zur Beseitigung der Randeffekte ist integriert.
Parametereinstellung für das Morlet-Wavelet:	Der Formparameter λ und die Grundfrequenz k_0 sind nicht verstellbar.	Der Formparameter λ ist nicht verstellbar; Grundfrequenz k_0 kann verändert werden – jedoch ist „ <i>cwt_compo.m</i> “ nur für $k_0=6$ kalibriert.
benötigter Zeitumfang zur Visualisierung der Ergebnisse:	sehr groß; bei Koeffizientenmatrizen $> 12.000 \times 20$ ist keine Darstellung möglich	normal
Zuweisung des Skalenparameters a_j zur Periode T_j :	Automatisierte Zuweisung, jedoch mit empirisch ermittelten Faktor $c = 1,2121$ (nicht für alle Frequenzbereiche) kalibriert.	Zuweisung verläuft automatisiert und ist für alle Frequenzbereiche kalibriert.

¹³ Kalibriert sind die Funktionen „*cwt_compo.m*“ und „*cwt_ml.m*“ ausschließlich für das Morlet-Wavelet („*cwt_ml.m*“ ist nicht über den gesamten Spektralbereich kalibriert).

Bei den Untersuchungen von Zeitreihen wurde ausschließlich die Funktion „*cwt_compo.m*“ eingesetzt. Das Umsetzen der Analyseergebnisse in eine graphische Form nimmt bei dieser Funktion deutlich weniger Zeit in Anspruch. Die Qualität der Transformationsergebnisse der MATLAB-Funktion „*cwt.m*“, auf die „*cwt_ml.m*“ zurückgreift, war nicht konsistent und neben den gewählten Parametern in großem Maße vom Datensatz abhängig. Sehr kleine Variationen an den Parametern zur Skalenberechnung führten zu starken Änderungen der Wavelet-Koeffizienten. Zudem ergaben sich bei bestimmten Kombinationen der Parameter Maxima in der Koeffizientenmatrix, die nicht interpretiert werden konnten. Diese sehr energiereichen „pseudo-periodischen“ Schwingungen sind über das gesamte Zeitintervall wirksam.

5.2.4 Ausdehnung des Zeit-Perioden-Fensters

Die *Heisenbergsche Unschärferelation*, im Sinne der Signalverarbeitung angewandt (Abschnitt 3.1), ist bei der Wavelet-Analyse immer als eine Kombination von Lokalisierung der Zeit- und Frequenzinformation zu verstehen. Die Genauigkeit einer Analyse ist zu einem großen Teil vom gewählten Mutter-Wavelet abhängig und wird wegen der parallelen Verfügbarkeit von Perioden- und Zeitinformation üblicherweise in Form eines Zeit-Perioden-Fensters ausgewiesen. Im Falle des Morlet-Wavelets ist die Lokalisation¹⁴ mit dem Formparameter λ und der Oszillationszahl k_0 verstellbar. *Schmidt und Schuh* [1999] geben für die Berechnung der Fensterhöhe Δa und der Fensterweite Δb folgende Beziehung an:

$$\Delta a_j = a_j \cdot \frac{2^{5/2} \cdot \pi \cdot \lambda}{2 \cdot k_0^2 \cdot \lambda^2 - 1} \quad \Delta b_j = \sqrt{2} \cdot a_j \cdot \lambda \quad (57)$$

Beide Größen sind demnach direkt proportional und abhängig von der jeweiligen Skalierung des Wavelets. Die Fensterfläche steigt bei höheren Skalen mit dem Produkt aus Δa und Δb quadratisch an. In Abbildung 10a ist die Variation der Fensterfläche in Abhängigkeit vom Skalenparameter a_j dargestellt. Für eine Analyse mit dem Morlet-Wavelet ($k_0 = 6$) der Funktion „*cwt_compo.m*“ ergibt sich daher folgende Genauigkeit für die Perioden- und Zeitinformation:

$$\Delta a_j = a_j \cdot \frac{2^{5/2} \cdot \pi}{2 \cdot 36 - 1} \approx 0,25 \cdot a_j \quad \Delta b_j = \sqrt{2} \cdot a_j \quad (58)$$

Aus den Beziehungen in (58) lässt sich schließen, dass niederfrequente Schwingungen relativ unscharf im zeitlichen Auftreten und der Periodendauer einzugrenzen sind. Die Gültigkeit der *Heisenbergschen Unschärferelation* kann man bei der WT zum besseren Verständnis anhand eines Zeit-Frequenz-Fensters beschreiben. Im Unterschied zum Zeit-Perioden-Raum ist hier diese Fläche stets konstant. Nach *Schmidt und Schuh* [1999] variiert lediglich das als adaptives Fenster bezeichnete Verhältnis von Fensterhöhe $\Delta \omega_j = \sqrt{2} / (a_j \cdot \lambda)$ und Fensterweite Δb_j (Abb. 10b).

¹⁴ Bei den hier genutzten Werkzeugen „*cwt_ml.m*“ und „*cwt_compo.m*“ ist der Formparameter stets konstant.

Die Zeitlokalisierung und damit die Fensterbreite ist direkt und die Frequenzschärfe indirekt proportional vom Formparameter λ und von der Skale a_j abhängig. Eine hohe Auflösung der Signalfrequenzen, d.h. $\Delta\omega_j \rightarrow \min$ geht auf Kosten einer niedrigen Zeitauflösung. Niederfrequente Signalanteile werden mit breitem Zeitfenster, hochfrequente Signalinformationen hingegen mit einem schmalen Zeitfenster analysiert.

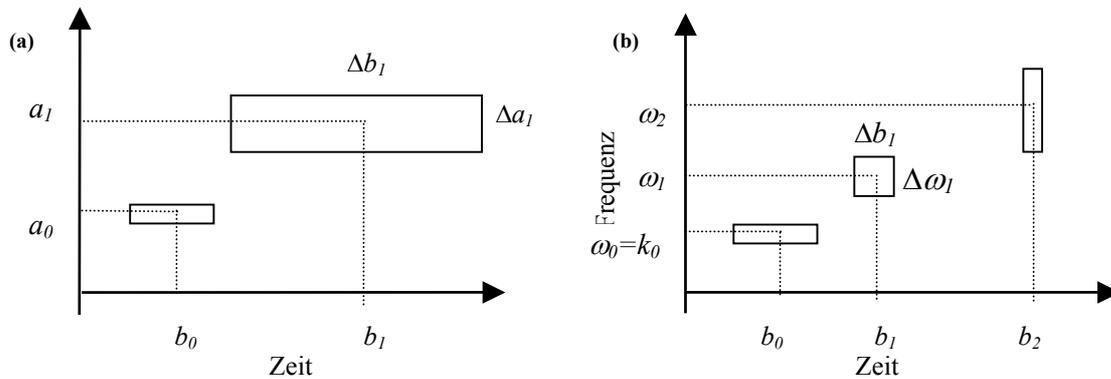


Abbildung 10: Die Genauigkeit der Ergebnisse einer CWT mit dem Morlet-Wavelet als Analysefunktion (a) ausgedrückt mit Hilfe eines Zeit-Perioden-Fensters oder eines (b) Zeit-Frequenz-Fenster (nicht maßstäblich). Sinngemäß nach Schmidt und Schuh [1999].

5.3 Probleme bei der Untersuchung

5.3.1 Energiereiche Signalanteile

Um Besonderheiten und Probleme bei der Darstellung der Transformationsergebnisse aufzuzeigen, wird zunächst ein Testdatensatz aus den im Abschnitt 5.1.1 vorgestellten simulierten ozeanischen Drehimpulszeitreihen ausgewählt. In diesem Falle umfasst der Testdatensatz den Zeitbereich der Jahre 1962 bis einschließlich 1971. Die zeitliche Auflösung des analysierten gezeiteninduzierten Relativedrehimpulses M_1^r beträgt 24 Stunden. Das Ergebnis der Fourier-Analyse in Abbildung 11a weist im Spektralbereich des Testdatensatzes die „erwarteten“ Perioden bzw. Haupttiden des Gezeitenpotentials aus, wie z.B. Ssa=182,621 Tage - die Deklinationstide zu S_0 , Mm=27,554 Tage – die elliptische Tide 1.Ordnung zu M_0 und MSf=14,765 Tage – die Variationstide zu M_0 . Sehr stark und energiereich treten die Tiden im Umfeld von MSf hervor. Die CWT der Testdaten mit dem Werkzeug „cwt_compo.m“ liefert die Koeffizientenmatrix $L_\psi f(a, b)$ und deren Visualisierung in Form eines Wavelet-Power-Spektrums (WPS) in Abbildung 11b. Die Einflüsse der Gravitation im 14-tägigen Bereich sind sehr hoch und verdrängen Signalanteile mit geringerer Energie in Bereichen anderer Perioden. Auch eine höhere Auflösung im Skalenbereich der CWT mit kleineren exponentiellen Schrittweiten dj extrahieren nur Informationen im Bereich der energiereichsten Perioden.

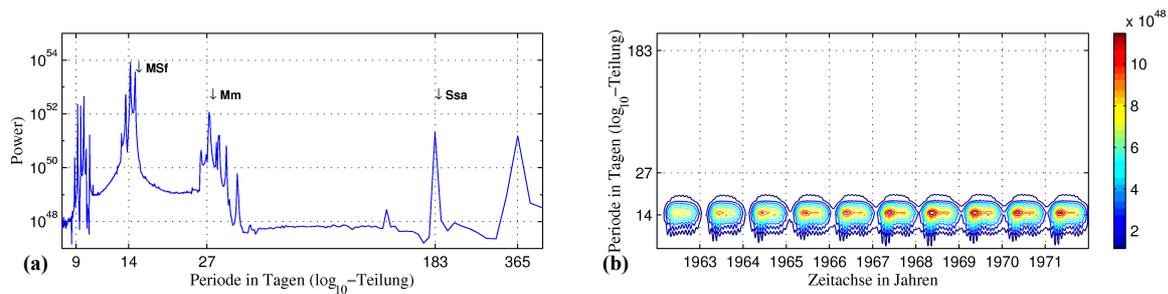


Abbildung 11: **(a)** Ergebnis der Fourier-Analyse (FFT) des gezeiteninduzierten Relativedrehimpulses des Ozeans M_1^r mit täglicher Auflösung im Zeitintervall 1962 – 1972. **(b)** Wavelet-Power-Spektrum des Signals M_1^r erzeugt mit der Funktion „cwt_compo.m“ und Anstiegsparameter $dj=0,25$.

Diese ersten Ergebnisse der Wavelet-Analyse haben eine sehr geringe Aussagekraft. Die folgenden drei Ansätze verfolgen deshalb ein gemeinsames Ziel. Dominante Einflüsse (Abb. 11b) auf das Gesamtsignal sollten in der Darstellung zurücktreten, um auch weniger energiereiche Signalanteile in Periode und zeitlichem Auftreten analysieren zu können. Im speziellen Fall sind dies die periodischen Einflüsse im monatlichen und halbjährlichen Bereich.

Filterung im Frequenzbereich - Bandstopp

Eine Filterung des Signals hätte zur Folge, dass ein bestimmter Bereich an „störenden“ Frequenzen im Signal eliminiert wird. Nach der Rücktransformation des gefilterten Signals in den Zeitbereich und der anschließenden CWT steht theoretisch das Hervortreten energieärmerer Signalanteile in Aussicht. Das Signal $f(t)$ wird bei der Filterung zunächst in den Frequenzbereich transformiert. Eine Multiplikation des Frequenzganges $f(\omega)$ mit der Filter-Übertragungsfunktion ist als eine Art Gewichtung von Frequenzbereichen zu verstehen. Die Frequenzen des Signalspektrums werden entsprechend dem Frequenzgang der Übertragungsfunktion verstärkt oder gedämpft. Stark gedämpfte Frequenzen sind im Produkt nicht mehr vorhanden. Wird das Signalbild mit Hilfe der inversen FFT in den Zeitbereich zurücktransformiert, ist je nach der Wahl des Filters ein verändertes Signal zu erwarten.

Als Filter kam zunächst ein Bandstopp-Filter in Betracht. Ein sehr enges Eingrenzen des Stoppbereiches zwischen 13- und 15-tägiger Periode gewichten diesen Bereich mit Null. In Testläufen zeigten die *Butterworth* und *Chebyshev*-Filter zufriedenstellende Ergebnisse bei der Selektion von breiten Periodenbändern. Im kurzperiodischen Bereich mit dem schmalen Band zwischen 13 und 15 Tagen konnten die Ergebnisse jedoch nicht genutzt werden. Die Dämpfung im Bereich des Stoppbandes war nur mäßig. Zudem wirken die Filter auch außerhalb des vorgegebenen Fensters, was im Zeitbereich zu unerwünschter Amplitudendämpfung im Signal führt. Selbst der Einsatz eines *Butterworth*-Filters 10. Ordnung, wie ihn *Arfa-Kaboodvand und Groten* [1998] zur Hochpassfilterung von Daten der Polbewegung nutzen, führte zu keinem besseren Ergebnis. Für diese Anwendung konnte der Bandstopp-Filter keine zufriedenstellende Lösung des Problems darstellen. Das zu selektierende Periodenband scheint für diese Filterung zu eng begrenzt. Für entsprechende schmale Bandbereiche muss der Filter eine hohe Flankensteilheit aufweisen, um den Signalbereich der Perioden um 14 Tage effektiv zu löschen. Numerische Probleme bei der Berechnung eines Bandstopp-Filters entstehen jedoch bei der Kombination von hoher Flankensteilheit und eng begrenztem Selektionsband. Man

doch bei der Kombination von hoher Flankensteilheit und eng begrenztem Selektionsband. Man kann davon ausgehen, aufgrund dieser numerischen Probleme nie vollständig senkrechte Flanken dieser Filter erzeugen zu können, was sich in den unzureichenden Ergebnissen der Testsignale niederschlägt.

Filterung im Frequenzbereich - least-square-Methode

Eine andere Art der Filterung im Frequenzbereich ist die *least-square*-Methode. Hierbei werden Signale nach nur einer ganz bestimmten Periode oder Frequenz hin untersucht. Sofern diese Periode im Signal enthalten ist, wird dieser Anteil auf Null gedämpft und das Signal in den Zeitraum zurücktransformiert. Das Entfernen der dominanten Perioden im Testdatensatz entsprechend den Ergebnissen in Abbildung 11 bedarf also der genauen Beschreibung der Frequenzen zum Selektieren nach der *least-square*-Methode. In Abbildung 12 sind jeweils ausgewählte Ergebnisse der Filterung aufgeführt.

Die Anzahl der selektierten Maximalperioden aus dem Testdatensatz $f(t)$ beläuft sich im linken Teil der Abbildung 12 auf fünf, im rechten Teil auf zehn. Abbildung 12a zeigt den Unterschied zwischen Testdatensatz und selektierten Daten $f_5(t)$ im Zeitbereich, Abbildung 12b analog dazu das um zehn Perioden reduzierte Signal $f_{10}(t)$. Jeweils unterhalb sind die Periodenspektren $f_5(\omega)$ bzw. $f_{10}(\omega)$ der gefilterten Signale dargestellt.

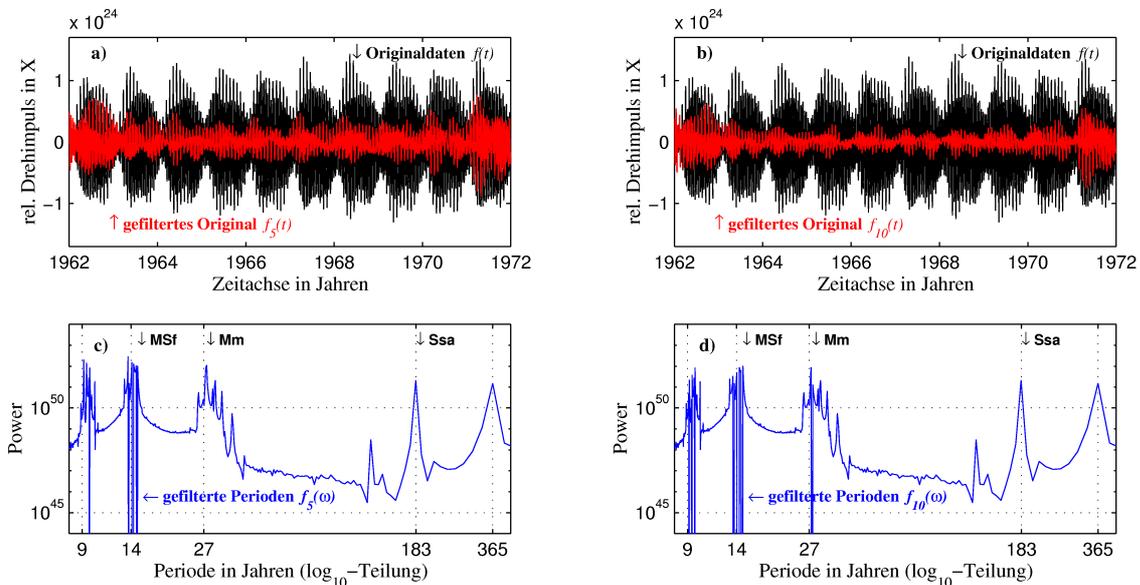


Abbildung 12: **(a)** Testdatensatz im Original und *least-square* gefiltertes Signal im Zeitintervall von 1962 – 1971 (Filterung der fünf Maximalperioden im Bereich 9 und 14 Tage). **(b)** Inhaltlich wie (a) jedoch mit 10 selektierten Perioden. **(c)** Spektralanalyse des gefilterten Signals von (a). **(d)** Spektralanalyse des gefilterten Signals von (b).

In den Randbereichen der gefilterten Signale treten Effekte in Form einer Amplitudenverstärkung auf (Abb. 12a,b). Sofern man die Zahl der selektierten Perioden erhöht, führt dies zu einer zusätzlichen Verstärkung der Randeffekte. Im Beispiel der Abbildung 12 geschah die Auswahl der einzelnen Perioden automatisiert, entsprechend dem maximalen Energiegehalt. Deshalb wurde der Testdatensatz vorwiegend von Signalschwingungen im Bereich von 14 Tagen bereinigt.

Bei manueller Auswahl wenig energiereicher Perioden (27, 183 Tage) entstehen die Randeffekte in abgeschwächter Form. Auf eine Darstellung wurde an dieser Stelle verzichtet. Die Annahme, es könnte sich bei dieser Verzerrung des Signals um eine Eigenheit des Testdatensatzes handeln, ist nicht zutreffend. In den separat untersuchten unterschiedlichen Teilbereichen des Signals traten die Randeffekte immer wieder auf. Bei vollkommen anderen Testsignalen, mit dominanten Perioden im Bereich langwelliger Schwingungen zeigte die *least-square*-Filterung deutlich bessere Ergebnisse, ohne Verzerrungen am Signalanfang und –ende. Eine Ursache für das Zustandekommen dieser Randeffekte wurde nicht gefunden. Es bleibt jedoch die Annahme, dass die numerische Umsetzung der *least-square*-Filterung nur in begrenzter Genauigkeit durchführbar ist und eine Vielzahl von zu selektierenden Perioden in einem engen kurzperiodischen Bereich liegt. Die Energie des Signals im Frequenzbereich wird bei diesen Signalschwingungen in einem sehr schmalen Bereich auf Null gesetzt (Abb. 12c,d), obwohl in der unmittelbaren Umgebung Werte um 10^{50} einem geglätteten Spektrum entsprechen. Eine Vielzahl von Selektionen in diesem engen Bereich führt möglicherweise zu den Abnormalitäten im Zeitbereich der Filterantwort.

Varianzabhängige Isoliniendarstellung

Eine Lösung des Problems der deutlicheren Visualisierung weniger energiereicher Signalanteile wurde mit dem Abschalten des Automatismus der äquidistanten Isoliniendarstellung erreicht. Standardmäßig berechnet der in MATLAB integrierte Algorithmus Isolinien aus einer Vielzahl von gitterartig strukturierten Koordinatentripel. Die beiden Koordinatenachsen Periodendauer (Skale) und Zeit bilden im WPS eine Ebene. Senkrecht zu dieser Ebene kann man sich die Energie als dritte Achse vorstellen. Die Wertigkeit der Wavelet-Koeffizienten stellt den Energieanteil einer bestimmten Periode zu einem Zeitpunkt dar. Die Isolinien repräsentieren im WPS Gebiete gleicher Energie. MATLAB geht in der Standardeinstellung von einer vertikalen Energiekonstanz zwischen den einzelnen Isolinien aus, d.h. der Schritt von einer Isolinie zur nächsten entspricht einer konstanten Energiedifferenz. Im Falle sehr dominanter Energiebereiche kann eine äquidistante Schrittweite im WPS leicht zu Informationsverlusten führen, wie in Abbildung 11b zu sehen ist. Wünscht man eine Visualisierung von zehn unterschiedlichen Energieklassen im WPS, so unterteilt sich die Wertigkeit der Wavelet-Koeffizienten in elf gleichabständige Klassen. Die niederwertigste Klasse der Koeffizienten erfährt keine Darstellung, da sonst die Übersichtlichkeit nicht gewahrt bliebe. Im speziellen Beispiel der ozeanischen Drehimpulszeitreihe M_1^r befinden sich genau in dieser untersten Klasse die Einflüsse von energieschwächeren Perioden wie z.B. der monatlichen und der halbjährlichen Schwingung (Abb. 11). In den Funktionen „*cwt_ml.m*“ und „*cwt_compo.m*“ wird nun die äquidistante Darstellung der Isolinien gebrochen. Somit gelingt es mit Hilfe der varianzabhängigen Darstellung weniger energetische Bereiche in $L_\psi f(a,b)$ hervorzuheben. Das Moment der neuen Klassifizierung zur Darstellung der Wavelet-Koeffizienten ist die Energievarianz VAR von $L_\psi f(a,b)$ in den einzelnen berechneten Skalen. Somit entspricht $VAR_j(L_\psi f(a_j, 0 \dots T))$ der Streuung der Energie in a_j über das gesamte Zeitintervall $0 \dots T$ des Signals. In Verbindung mit der mittleren Energie MW_j pro Skale werden jeweils zwei Energieebenen E_\pm errechnet (Abb. 13):

$$E_{\pm}(a_j) = MW_j(L_{\psi}f(a_j, 0 \dots T)) \pm (VAR_j(L_{\psi}f(a_j, 0 \dots T)))^{0,5} \quad (59)$$

Folglich entstehen beim Betrachten aller Skalen a_j genau $2 \cdot J$ Energieebenen. Abbildung 13 stellt für das Testsignal des relativen Drehimpulses M_1^r die ersten drei berechneten Skalen und deren Energie über einen Zeitraum von 500 Tagen dar.

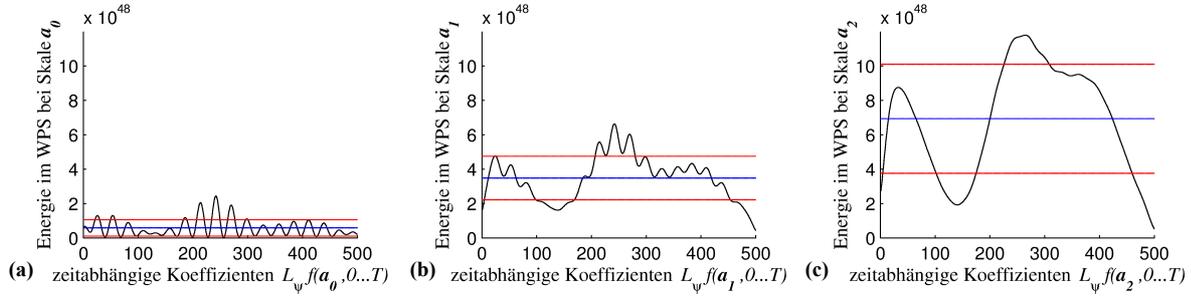


Abbildung 13: Varianzabhängige Energieebenen $E_{\pm}(a_j)$ (rot) für die ersten drei berechneten Skalen a_j des Testsignals und der Energiemittelwert MW_j (blau) im Zeitraum von 500 Tagen.

Die nach dem Betrag sortierten Energieniveaus $E_{\pm}(a_j)$ sind *nicht* äquidistant. Je nach Wavelet-Skalierung sind die Abstände zwischen den $E_{\pm}(a_j)$ unterschiedlich groß. Die Visualisierung der Wavelet-Koeffizienten im WPS erfolgt nun über die betragsmäßig höchsten Energieniveaus (Abb. 14a). Dies führt zum entscheidenden Vorteil der varianzabhängigen Isoliniendarstellung, dem Hervortreten von energieärmeren Signalanteilen ohne jegliche Manipulation am numerischen Ergebnis der CWT. Signalanteile in den einzelnen Skalen erfahren keine Filterung, sondern werden nur nicht mehr äquidistant dargestellt. Hingegen ändert sich bei den vorher beschriebenen Möglichkeiten der Signalfilterung im Frequenzbereich das in den Zeitraum zurücktransformierte Signal und damit auch die Koeffizientenmatrix $L_{\psi}f(a, b)$.

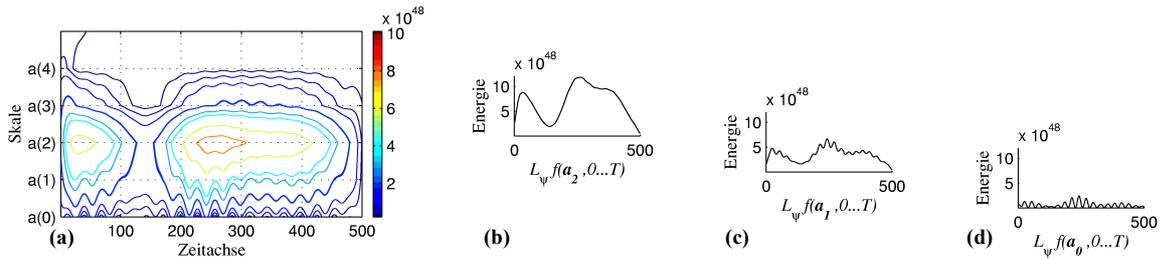


Abbildung 14: (a) Varianzabhängige Isoliniendarstellung der CWT-Koeffizienten des Testsignals im Zeitraum von 500 Tagen. Energieanteil in der jeweiligen Skala a_j in Abhängigkeit der Zeit: (b) a_2 ; (c) a_1 ; (d) a_0 .

Die Berechnung von nur zwei Energieebenen pro Skale birgt jedoch auch Eigenheiten in sich, die bei der Interpretation der folgenden Wavelet-Power-Spektren zu beachten sind. So können die Unterschiede in Skalen mit großem Energiegehalt und großer Varianz vom Anwender nicht weiter differenziert werden. Die Koeffizienten der Skala a_2 (Abb. 13c) des Testsignals variieren sehr stark. Die varianzabhängige Isoliniendarstellung gewährt diesem Teilsignal der Koeffizientenmatrix nur eine Visualisierung von zwei Energieebenen (Abb. 14a). In diesem Fall kann man von einem Informati-

onsverlust in Bereichen hoher Signalenergie sprechen. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit den angesprochenen Nachteil durch das Integrieren zusätzlicher Energieebenen zu beheben. Besonders käme dies der Visualisierung hochenergetischer Signalperioden zu gute, deren Koeffizienten eine hohe Varianz besitzen. In dieser Arbeit genügt jedoch die entwickelte nichtäquidistante Isolinien-darstellung, mit zwei Ebenen $E_{\pm}(a_j)$ pro berechneter Skale, zum Hervorheben von Bereichen niedrigen Energiegehaltes. Die beiden Funktionen „*cwt_ml.m*“ und „*cwt_compo.m*“ nutzen die varianzabhängige Visualisierung der CWT-Ergebnisse.

Zum Vergleich der Darstellungsformen der Koeffizienten des Testdatensatzes mit Hilfe äquidistanter und varianzabhängiger Energieebenen sollen die Abbildungen 11b und 15b dienen. Sehr deutlich ist der Informationszuwachs für die längerperiodischen und energieärmeren Anteile bei 27 und 183 Tagen in Abbildung 15b zu erkennen. Weniger Details enthält die Skale bei der 14-tägigen Periode, da bei der varianzabhängigen Isoliniendarstellung auch der energiereichsten Skale $E_{\pm}(a_j=14 \text{ Tage})$ nur zwei Isolinien zugebilligt werden. Wünscht man eine genauere Darstellung spezieller Periodenbänder (Abb. 15a), so liefert ein „Zoom“ mit einem kleineren Anstiegsparameter dj detailliertere Informationen.

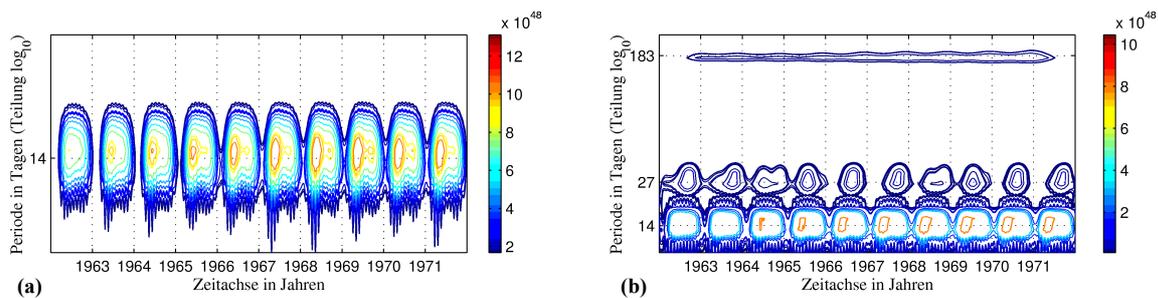


Abbildung 15: **(a)** Wavelet-Power-Spektrum des ozeanischen Relativdrehimpulses M_1^r mit täglicher Auflösung im Zeitintervall 1962 – 1972 mit varianzabhängiger Isoliniendarstellung (Anstiegsparameter $dj=0,08$). **(b)** Inhalt der Abbildung wie (a) jedoch mit dem Anstiegsparameter $dj=0,25$. Im Vergleich zu Abbildung 11b sind hier die monatlichen und halbjährlichen Perioden deutlich zu erkennen.

5.3.2 Randeffekte

In den Randbereichen des WPS, d.h. in Wavelet-Koeffizienten am Beginn und am Ende der Zeitreihe, kommt es bei Signalen mit begrenzter Länge zu Fehlern, da die in der WT integrierte FFT für eine präzise Abbildung in den Spektralbereich streng periodische und zyklische Signale voraussetzt (s. Abschnitt 2.3). Diese Voraussetzung ist in der praktischen Anwendung der Transformation meist nicht gegeben. Die als Kanteneffekte benannten Störungen treten in direkter Abhängigkeit zur Skalierung auf, d.h. bei der Betrachtung großer Skalenwerte und damit langperiodischer Signalanteile ragen die Fehlerbereiche im Sinne von unverhältnismäßig großen Wavelet-Koeffizienten weit in den Signalraum hinein. Weiterhin hängen die Kanteneffekte vom gewählten Mutter-Wavelet ab. Für das in der Funktion „*cwt_compo.m*“ verwendete Morlet-Wavelet definieren *Torrence and Compo* [1998] diesen Fehlerbereich als *e-folding-time* mit:

$$e_{\text{folding}}(j) = \sqrt{2 \cdot a_j} \quad (60)$$

Um diese Störeinflüsse zu eliminieren, besteht bei *Torrence and Compo* [1998] die Option, das Signal im Zeitbereich zu erweitern, d.h. die Randbereiche mit Nullwerten aufzufüllen. Nach der CWT werden diese Füllbereiche vom Signal bzw. dessen Abbild getrennt und es steht eine Koeffizientenmatrix zur Verfügung, die um die Kanteneffekte bereinigt ist.

In der Wavelet-Toolbox von MATLAB steht diese Option nicht zur Verfügung. Randbereiche werden in ihrem Energiegehalt sehr hervorgehoben, was zu Informationsverlusten im restlichen WPS führen kann. Zur Vermeidung dieser Effekte setzt „*cwt_ml.m*“ die Koeffizienten in den Randbereichen auf Null. Tests ergaben, dass die Ausdehnung der Störungen größer als die in (60) beschriebene *e-folding-time* ist. Die Funktion „*cwt_ml.m*“ nutzt den hier empirisch ermittelten Fehlerbereich.

$$e_{\text{folding}}(j) = 1,8 \cdot a_j \quad (61)$$

Für praktische Anwendungen der CWT mit dem Werkzeug „*cwt_ml.m*“ in sehr langperiodischen Bereichen oberhalb von Jahresschwingungen werden an dieser Stelle weitere Untersuchungen zu den Randeffekten empfohlen. Vorstellbar wäre ein Auffüllen des Zeitsignals an den Rändern mit Nullen, entsprechend dem oben erläuterten Konzept nach *Torrence and Compo* [1998].

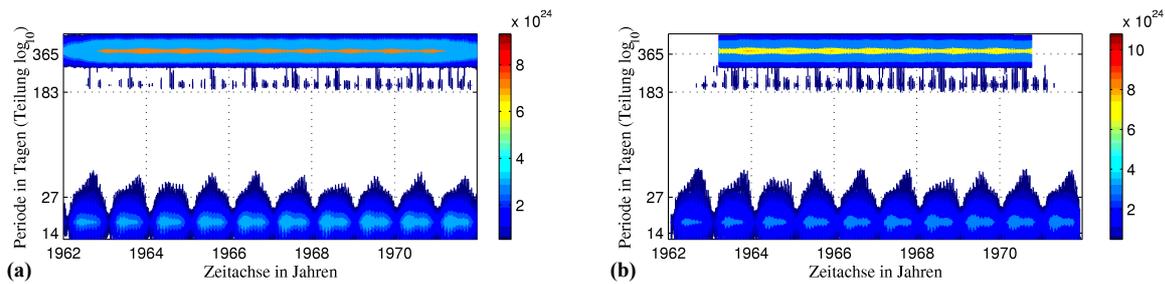


Abbildung 16: (a) Randeffekte im langperiodischen Bereich bei Untersuchung des Testsignals mit der Original-MATLAB-CWT. (b) Ein Beschneiden der Ränder aus (a) mit der Funktion „*cwt_ml.m*“. In der Jahresperiode sind energetische Variationen besser zu erkennen.

5.4 Analyse der Drehimpulse ozeanischer Gezeiten

Im Falle ozeanischer Gezeiten drücken sich Drehimpulsänderungen zum einen in den Variationen der Meereshöhe und damit einer Verlagerung von Massen aus (Massenterm). Zum andern wirken Gezeitenströmungen (Bewegungsterm), die zu einem Austausch von Drehimpulsen mit der festen Erde führen. Die Beziehung (62) beschreibt zunächst den Drehimpuls des Ozeans als Überlagerung von Bewegungsterm M_j^r und Massenterm I_{j3} . Für die Untersuchung des ozeanischen Einflusses auf Tageslängenschwankungen und Polbewegung sollen in dieser Arbeit Effekte der Massenverlagerungen M_j^r und Strömungen I_{j3} separat Betrachtung finden.

$$M_j(t) = M_j^r + I_{j3}(t) \cdot \Omega \quad j = 1, 2, 3 \quad (62)$$

Die Relativedrehimpulse M_j^r und die Massenverlagerungen repräsentierenden Trägheitstensor-komponenten I_{j3} sollen zunächst in zwei Auflösungsstufen unterschieden werden. Der Betrachtung des

langperiodischen Bereichs von 14 Tagen bis 18,6 Jahren liegen Tageslösungen zugrunde, die sich aus der arithmetischen Mittelung der vorliegenden Modelldaten in Stundenlösungen ergeben. Das betrachtete Zeitintervall beginnt am 01.01.1962 und endet am 31.12.1994. Zum *kurzperiodischen* Bereich zählen in dieser Arbeit alle Signalanteile mit der Dauer einer Schwingung von 9 Stunden bis einschließlich 14 Tage. In diesem Falle beträgt die Auflösung der analysierten Daten eine Stunde und das Zeitintervall beschränkt sich aufgrund des Datenumfangs auf das Jahr 1994.

Die CWT-Algorithmen im Hintergrund der Funktionen „*cwt_ml.m*“ und „*cwt_compo.m*“ liefern sehr schnell die numerischen Ergebnisse der Transformation. Für die graphische Darstellung der Wavelet-Koeffizienten liegt der Zeitaufwand jedoch einige Größenordnungen darüber. Jeder Wavelet-Analyse sollte eine Spektraluntersuchung des Signals vorausgehen. Nah beieinanderliegende Periodenbänder erkennt man mit der Wavelet-Analyse nur bedingt. Grund hierfür ist die unscharfe Lokalisierung der Wavelets im Frequenzraum (Abschnitt 5.2.4). Mit einer Spektralanalyse kann man zunächst abwägen, welche Periodenbänder „interessant“ sind und einer Untersuchung bedürfen. Des Weiteren gelingt es, die Energiebeträge einzelner Signalschwingungen abzuschätzen. Eine grobmaschige CWT mit dem Anstiegsparameter $dj > 0,3$ und der Skale $a_0 = 10$ Tage überdeckt beispielsweise ein großes Spektralband im Wavelet-Power-Spektrum¹⁵. Man analysiert hiermit nur die energetisch größten Signalanteile. Bei der weiteren Untersuchung nutzt man die CWT als eine Art Sammellinse. Interessierende Frequenzbereiche des Signals erfahren eine weitere Betrachtung mit einer höheren Auflösung der Wavelet-Funktionen in der Skalierung. Die Interpretierbarkeit der CWT-Ergebnisse ist zum großen Teil von der Anzahl der analysierten Skalen J bzw. Perioden abhängig. Bei der exponentiellen Schrittweitensteuerung gemäß (54) sollte man daher für eine hohe Auflösung im Skalenbereich kleine Anstiegsparameter dj wählen. Die Wavelet-Funktionen mit der geringsten Dilatation a_0 gleichen näherungsweise den „kurzperiodischen“ Signalanteilen, die mit Hilfe der Wavelet-Analyse noch erfasst werden können. Die Größe des Anstiegsparameters ist zusätzlich vom zu untersuchenden Skalenbereich abhängig. Effektive Berechnungen mit hoher Auflösung bedingen Anstiegsparameter beispielsweise im 14-tägigen Bereich mit $dj < 0,2$ und für jährliche Schwingungen mit $dj < 0,05$.

Diese partielle Analyse findet auch in den Untersuchungen der Zeitreihen in dieser Arbeit Anwendung. Hinsichtlich ihres Energiegehaltes sind die separat analysierten Periodenbänder einer Zeitreihe direkt miteinander vergleichbar.

5.4.1 Ozeanische Dynamik im kurzperiodischen Bereich

Mit Hilfe der FFT gewinnt man im Vorfeld einer Wavelet-Analyse von Drehimpulszeitreihen einen Überblick bezüglich der darin auftretenden Signalanteile mit entsprechender Schwingungsdauer. Für einen großen Teil des ozeanischen Drehimpulses zeigt sich der Massenterm verantwortlich, der sich in den Trägheitstensoranteilen I_{j3} ausdrückt. In den Fourier-Spektren der Abbildung 17 sind die maßgeblichen Perioden des Relativedrehimpulses denen der Trägheitstensoranteile (grün) gegenübergestellt. Die Analyse dieser hochfrequenten Anregungen aus den Gezeiten erfolgte mit den Daten des OMCT-Modells für das Jahr 1994 mit einer zeitlichen Auflösung von einer Stunde. Beim Vergleich der spektralen Signalenergien zeigt sich eine starke Dominanz der im Massenterm integ-

¹⁵ Bei diesem Beispiel werden zeitdiskrete Datensätze in Tageslösungen vorausgesetzt.

rierten I_{j3} (Abb. 17). Diese große Differenz zum Bewegungsterm liegt in (62) begründet und lässt sich mit der Multiplikation von I_{j3} und der Winkelgeschwindigkeit der Erde aufheben. Für die spektrale Betrachtung und die Wavelet-Analyse der Signale genügen in diesem Falle die direkten Vergleiche von I_{j3} und M_j^r .

Alle Bewegungs- und Massenkomponenten besitzen im hochfrequenten Bereich von $\frac{1}{2}$ und einem Tag maximale Signalenergien. Unterschiede zeigen sich bei Perioden von 9 und 14 Tagen. Hier weisen I_{23} und M_2^r , im Vergleich zu den Komponenten der anderen Richtungen, keine signifikanten Energieanteile auf. Besonders auffällig, im Gegensatz zu den zonalen Anteilen des Trägheitstensors, ist die Wirkung der 14-tägigen Gezeit bei I_{33} (Abb. 17c).

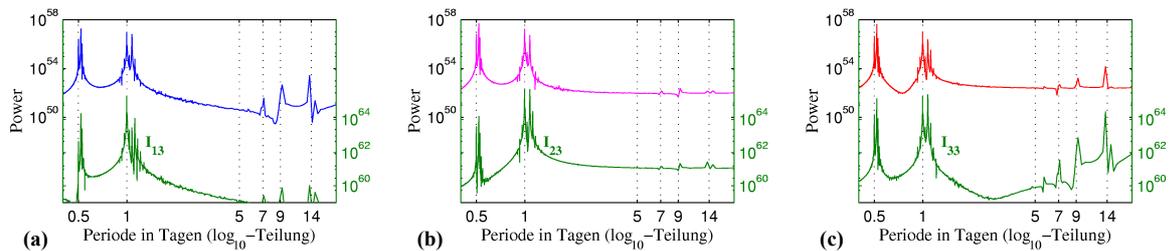


Abbildung 17: Fourier-Spektren der Trägheitstensor-Komponenten (grün) und Relativdrehimpulse mit einstündiger Auflösung des zugrunde liegenden Zeitsignals des Jahres 1994: (a) I_{13} und M_1^r (blau); (b) I_{23} und M_2^r (violett); (c) I_{33} und M_3^r (rot).

Folgend wird der Relativdrehimpuls M_1^r mit Hilfe der CWT im Zeit-Perioden-Raum näher untersucht, um Aussagen treffen zu können, in welchen Zeitabschnitten die einzelnen in Abbildung 17a analysierten Perioden energetisch dominieren. Die Betrachtung der hochfrequenten Anteile in M_1^r erfolgt exemplarisch, da die übrigen Relativdrehimpulse und Trägheitstensor-Komponenten ähnliche Resultate im Zeit-Perioden-Raum zwischen 9 und 36 Stunden zeigen. Wegen der unterschiedlichen Bereiche der betrachteten Periodenbänder wird hier nochmals darauf hingewiesen, dass jedes Wavelet-Power-Spektrum getrennt eine Interpretation erfahren sollte. Beispielsweise unterscheiden sich die maximalen Energiebeträge in den Abbildungen 18a und 18b um bis zu drei Größenordnungen. Der direkte Vergleich ist nur unter Zuhilfenahme der Farbmaßstäbe des jeweiligen WPS möglich.

Bei Signalanteilen, die sich in der Dauer ihres Wiederholzyklus stark unterscheiden - z.B. Tages-schwingung und Halbjahresschwingung - gelingt es, die Modulation der Amplituden kurzperiodischer Anteile (hier: $\frac{1}{2}$, 1 und 14 Tage) durch langperiodische Signalanteile (hier: jährlich) nachzuweisen und im Zeitbereich zu fixieren. So ist die eintägige Periode in ihrer Intensität halbjährlichen Schwankungen unterworfen (Abb. 18a). Im energetischen Sinne deutlich schwächer fällt diese Variation bei der halbtägigen Tide aus. Erst bei der separaten Betrachtung¹⁶ dieser Signalperiode ohne den Einfluss der dominanten eintägigen Gezeit tritt die zeitvariable Intensität der Energie deutlicher hervor. Die Energien der Signalanteile von Perioden im näheren Umfeld der Haupttiden von $\frac{1}{2}$ und einem Tag werden aufgrund der unscharfen Frequenzlokalisierung der Wavelets nicht erkannt. Mit Verweis auf die Genauigkeitsbetrachtung in Abschnitt 5.2.4 lässt sich beispielsweise für Signalanteile mit einer

¹⁶ Auf eine zusätzliche Abbildung wurde in diesem Falle verzichtet.

Schwingungsdauer von 24 Stunden ein Zeit-Perioden-Fenster für das Morlet-Wavelet angeben, dessen Höhe $\Delta a_{24h} = 6$ h und Breite $\Delta b_{24h} = 34$ h beträgt.

Für den Nachweis einer Modulation der 14-tägigen Gezeit muss sich jedoch auf einen längeren Untersuchungszeitraum bezogen werden. Selbiger umfasst den Zeitintervall von 1993 bis 1994 (Abb. 18b). In den Ergebnissen der CWT erkennt man deutlich die Überlagerung der 14-tägigen Tide von einem Halbjahreszyklus sowie eine zusätzliche sukzessive Signalmodulation mit einem eher niederfrequenten Zyklus. In Vorblick auf die Betrachtung langperiodischer Einflüsse soll an dieser Stelle auf die Abbildung 22a verwiesen sein, welche die Auswirkung der Mondknotenwanderung in Form einer allmählichen und langandauernden Überlagerung der 14-tägigen Gezeit (Modulation mit der Periode von 18,6 Jahren) erkennen lässt. Das Störsignal am rechten Rand der Abbildung 18b könnte auf einen von der Funktion „*cwt_compo.m*“ nicht vollständig beseitigten Randeffect schließen lassen. Reale Störeffekte im Sinne von simulierten „Störsignalen“ des OMCT-Modells werden weitestgehend ausgeschlossen, da die Untersuchungsergebnisse dieser Datenreihe über die Jahre 1962 – 1994 in Tagesauflösung keine „verwaschenen“ Randbereiche bei der 14-tägigen Tide aufweisen (Abb. 22a).

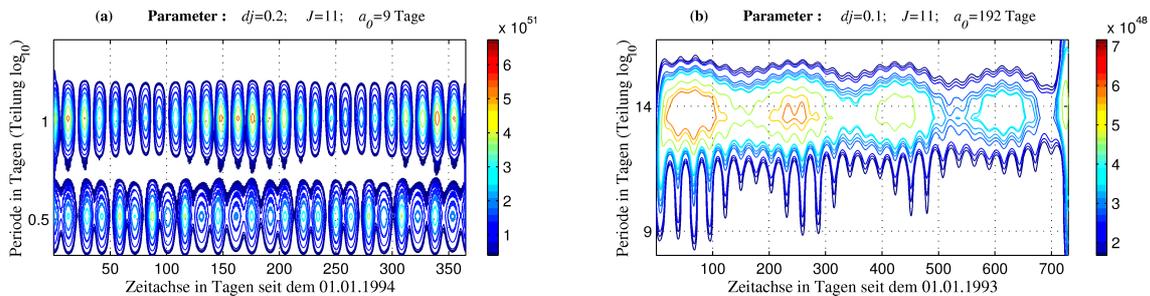


Abbildung 18: **(a)** Wavelet-Power-Spektrum von M_1^r mit den Skalen zwischen 9 und 36 Stunden für das Jahr 1994. **(b)** Wavelet-Power-Spektrum von M_1^r mit den Skalen zwischen 8 und 15 Tagen im Zeitintervall 1993 – 1994.

Für den interessierten Leser sei angemerkt, dass die in den WPS integrierten Parameter die Kennwerte für die Berechnung der einzelnen Skalen der Wavelet-Funktionen darstellen. Randeffecte in den Wavelet-Koeffizienten treten jedoch trotz des von *Torrence and Compo* [1998] bereitgestellten Algorithmus in einigen Bereichen hoher Skalierung hervor. Die Effekte, wie z.B. in Abbildung 18b zu erkennen, sind im Vergleich zu den in Abschnitt 5.3.2 aufgeführten Randbeschneidungen der Funktion „*cwt_ml.m*“ sehr klein. Auf eine zusätzliche Bearbeitung der Randeffecte in „*cwt_compo.m*“ wurde verzichtet, da die Transformationsergebnisse in Bereichen großer Skalierungen noch gut zu interpretieren sind.

5.4.2 Ozeanische Dynamik im langperiodischen Bereich

Die Spektralanalyse der Relativdrehimpulse und Trägheitstensorcomponenten des Untersuchungszeitraumes 1962 – 1994 zeigen in Abbildung 19 die Ergebnisse in Bezug auf die eher langperiodischen Einflüsse der Gezeiten auf den Ozean. Neben Jahres- und Halbjahresperioden zeichnen sich 14-tägige und monatliche Signalanteile mit hoher Energie ab. Vergleichend zum Spektrum der hochfrequenten Schwingungen in Abbildung 17 erkennt man Differenzen in der spektralen Signalenergie. Den Er-

gebnissen in beiden Abbildungen liegen unterschiedliche Analysezeiträume und Signalaufösungen zugrunde. So weisen die Fourier-Spektren der Signale mit stündlicher Auflösung *geringe* Energiebeiträge bei kurzperiodischen Einflüssen im Bereich von 9 bis 14 Tagen aus. Genau diese periodischen Signalanteile sind in den Resultaten der Fourier-Analyse der auf Tageslösungen reduzierten Signale hochenergetisch und bei der 14-tägigen Gezeit maximal. In diesem Fall erstreckt sich das Zeitintervall über die Jahre 1962 – 1994. Die Diskrepanz tritt besonders deutlich bei den Komponenten I_{23} und M_2^r des Jahres 1994 hervor, deren 14-tägige Gezeiten in Abbildung 17b kaum erscheinen, in Abbildung 19b jedoch eine hohe Signalenergie reflektieren. Spektraluntersuchungen von I_{j3} und M_j^r (einstündige Auflösung im Zeitbereich) anderer Jahre¹⁷ unterscheiden sich nicht signifikant von denen des Jahres 1994. Aufgrund der geringen Varianzen in den verschiedenen jährlichen Signalabschnitten kann *nicht* davon ausgegangen werden, dass sich I_{j3} und M_j^r in den einzelnen Jahren im Periodenbereich von 14 Tagen stark unterscheiden. Erst nach der Datenreduktion auf Tageslösungen bekommen diese Bereiche einen Großteil der Signalenergie zugewiesen, welche sich vorher in der Umgebung der halb- und ganztägigen Tiden befand (Abb. 17 und 19).

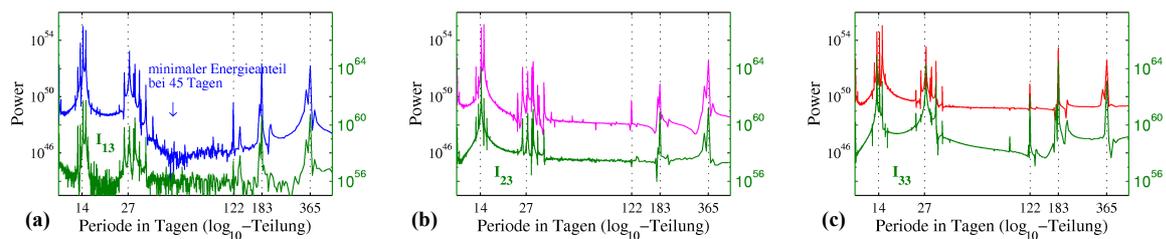


Abbildung 19: Fourier-Spektren der Tragheitstensor-Komponenten (grün) und Relativdrehimpulse mit eintägiger Auflösung des Zeitsignals im Intervall von 1962 – 1994: **(a)** I_{13} und M_1^r (blau); **(b)** I_{23} und M_2^r (violett); **(c)** I_{33} und M_3^r (rot).

Die Differenzen in den Spektren beider Auflösungsstufen können somit auf die Datenreduktion zurückgeführt werden. Es gilt, den Einfluss des Reduktionsalgorithmus (arithmetisches Mittel) als mögliche Ursache, zu analysieren.

Dazu erfährt der Relativdrehimpuls M_2^r im Zeitraum 1962 – 1994 in zwei verschiedenen Auflösungsstufen – 24 und 96 Stunden – eine Reduktion (Abb. 20). Zum besseren Überblick sei im Zeitbereich nur der Ausschnitt des Jahres 1994 vorgestellt. Die hohen Energieanteile im halb- und ganztägigen Bereich lassen überlagernde langperiodische Anteile im „Originalsignal“ (Abb. 20a) kaum erkennen. Die beiden reduzierten Datensätze weisen diese starke Variation nicht mehr auf. Dafür treten periodische Schwingungen hervor. Markant ist hier die 14-tägige Periode (Abb. 21b,c).

¹⁷ Auf eine zusätzliche Darstellung wurde an dieser Stelle verzichtet.

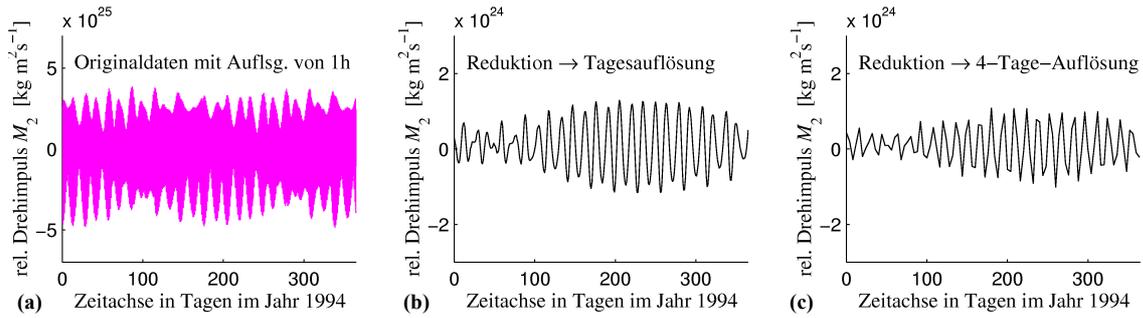


Abbildung 20: Zeitreihen über das Jahr 1994 in unterschiedlichen zeitlichen Auflösungen durch eine Datenreduktion über arithmetisches Mittelbildung: **(a)** Originaldaten in stündlicher Auflösung. **(b)** Gemittelte Daten in Tagesauflösung (Dämpfung der Amplituden um mehr als eine Größenordnung gegenüber des Originals). **(c)** Gemittelte Daten in 4-Tages-Auflösung (Dämpfung der Amplituden um mehr als eine Größenordnung gegenüber des Originals).

Für eine gemeinsame Betrachtung der Spektralanalysen sei angemerkt, dass die Frequenzauflösungen vom gewählten Mittelungsintervall abhängen. So werden bei großen Intervallen gleichzeitig große Frequenzbänder im kurzperiodischen Bereich liquidiert. Für die Interpretation der FFT in Abbildung 21 ist daher ein Vergleich der Ergebnisse erst ab einer Periode von 9 Tagen sinnvoll.

Die Mittelbildung in den Intervallen über einen Tag und über 4 Tage zeigt sowohl im Zeitbereich als auch im Spektrum ähnliche Effekte (Abb. 21b,c). Man erkennt im Bereich von 27 bis 365 Tagen nur geringfügige Änderungen der Verhältnisse der Signalenergien zum Spektrum der Stundenauflösung (Abb. 21a). Lediglich der Bereich von 14 Tagen wird in den reduzierten Datensätzen energetisch etwas angehoben.

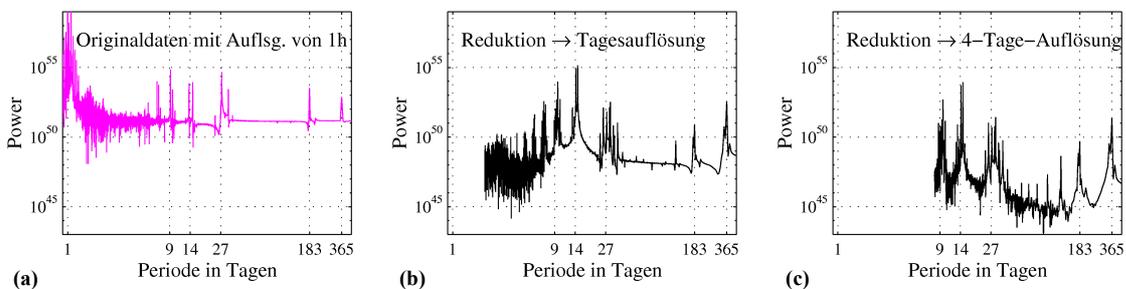


Abbildung 21: Fourier-Spektren der Zeitreihen aus Abbildung 20 über den Zeitraum 1962 – 1994, Reduktion der zeitabhängigen Signale über arithmetischen Mittelalgorithmus: **(a)** Originaldaten mit Stundenauflösung; **(b)** auf Tageslösung reduziert; **(c)** 4-Tages-Lösung.

Mit diesem Beispiel wird der Einfluss der Datenreduktion im Zeitbereich auf das Spektrum der Perioden sichtbar. Die Energie hochfrequenter Signalanteile von $\frac{1}{2}$ und einem Tag wird nach der Reduktion zum Großteil auf die Periode der 14-tägigen Gezeit übertragen. Analysiert man bestimmte Perioden in einem Datensatz, der in unterschiedlichen zeitdiskreten Auflösungsstufen vorliegt, so sollte der o.g. Energieübergang bei der Mittelbildung beachtet werden, um Fehlinterpretationen auszuschließen. Im Falle der Datenreduktion von stündlichen Signalen auf Tageswerte erscheint deshalb der Energiegehalt der 14-tägigen Periode etwas größer. Dies gilt sowohl für die Fourier- als auch für die Wavelet-Power-Spektren.

Die langperiodischen Einflüsse der ozeanischen Gezeiten sollen exemplarisch am Relativdrehimpuls M_1^r mit Hilfe der kontinuierlichen Wavelet-Transformation analysiert werden. Im WPS (Abb. 22) sind die maßgeblichen 14-tägigen, monatlichen und halbjährlichen Perioden (siehe auch Abb. 19a) aufgezeigt und es gelingt zudem der Nachweis von Signalmodulationen im 18,6-Jahre-Zyklus sowie das zeitliche Fixieren dieser Überlagerungen. Im Speziellen kann man die Modulation der 14-tägigen Gezeit und die Variation der halbjährlichen Gezeit in M_1^r sehr präzise erfassen. Die Bestätigung eines ähnlichen Effektes bei der monatlichen Periode war nicht möglich (Abb. 22a).

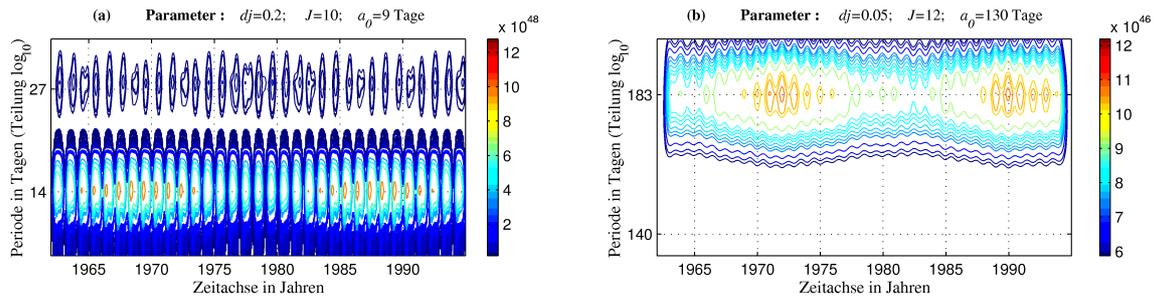


Abbildung 22: Wavelet-Power-Spektrum von M_1^r im Zeitintervall 1962 – 1994 **(a)** mit den Skalen zwischen 10 und 40 Tagen. **(b)** Inhaltlich wie **(a)** jedoch mit den Skalen zwischen 130 und 205 Tagen.

Im Gezeitenpotential treten zwischen den halbjährlichen und jährlichen Tiden keine lunisolaren Einflüsse auf. Deshalb ist die Analyse des M_1^r erst im Bereich der jährlichen Periode weitergeführt, die eine deutliche Modulation durch den 18,6-Jahre-Zyklus erfährt (Abb. 23a).

Ähnlich der Spektralanalyse sind auch der Wavelet-Transformation im hochfrequenten Bereich Grenzen gesetzt, die sich durch das *Sampling*- oder Abtasttheorem beschreiben lassen. Der Mathematiker *Claude Shannon* (1949) entdeckte diesen Zusammenhang für zeitdiskrete Signale. Dieser besagt, dass man Schwingungsanteile mindestens zweimal pro Schwingung abtasten muss, um das Signal anschließend wieder mit entsprechender Genauigkeit reproduzieren zu können. Für zeitdiskrete Signale mit der Abtastrate Δt berechnet sich die höchste noch erfassbare Frequenz mit: $\omega_{\max} = (2 \cdot \Delta t)^{-1}$, die auch als Nyquist-Frequenz bezeichnet wird. Im Gegensatz dazu ist die Minimalfrequenz eines Signalanteils von der Länge der Zeitreihe abhängig. Das Untersuchungsintervall beschränkt sich in dieser Arbeit auf die Jahre 1962 – 1994. Für die kontinuierliche Wavelet-Transformation mit den Funktionen „*cwt_ml.m*“ und „*cwt_compo.m*“ wurde empirisch der Zusammenhang (63) ermittelt. Realistische Ergebnisse werden bei den Untersuchungen erzielt, sofern man die maximale Skalierung der Mutter-Wavelets a_j so wählt, dass deren charakteristische Periode T_j kleiner gleich dem halben Untersuchungsintervall T_{Gesamt} ist.

$$a_j \cong T_j \leq 0,5 \cdot T_{\text{Gesamt}} \quad (63)$$

Beim Einfluss der rückwärtigen Drehung der Mondbahn auf den ozeanischen Drehimpuls beträgt die Zeit einer Schwingung 18,6 Jahre. Nach (63) wird für die CWT dieses periodischen Signalanteils ein Datensatz über mindestens $2 \cdot 18,6 = 37,2 \approx 38$ Jahre benötigt. Der Zeitumfang der ausgewählten

Datensätze beschränkt sich jedoch auf nur 33 Jahre. Deshalb erscheint es problematisch, o.g. Schwingung realistisch in den Bildraum des wavelet-transformierten Signals wiederzugeben.

Die Analyse des ozeanischen Relativdrehimpulses M_1^r zeigt im langperiodischen Bereich (Abb. 23b) keine signifikanten Ergebnisse, die auf eine Drehung des Mondbahnknotens hinweisen. Jedoch konnte eine Schwingung fixiert werden, deren Periode dem halben Untersuchungszeitraum entspricht. Deshalb besteht die Annahme, dass die CWT das Auftreten von Signalanteilen suggeriert, die eigentlich einem niederfrequenten Spektralbereich zuzuordnen sind. Auf das Beispiel des Relativdrehimpulses M_1^r bezogen, entspricht das in Abbildung 23b dargestellte Signal möglicherweise der Drehung des Mondbahnknotens und ist deshalb nur als ein Effekt der CWT zu sehen.

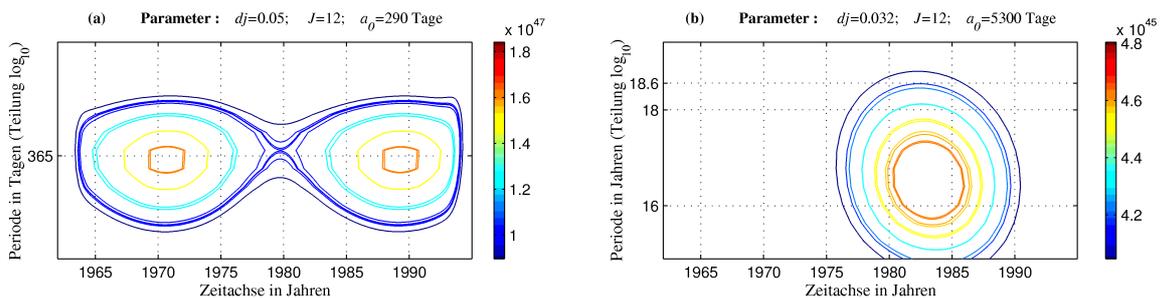


Abbildung 23: **(a)** WPS von M_1^r mit den Skalen zwischen 290 Tagen und 440 Tagen. **(b)** Inhaltlich wie (a) jedoch mit den Skalen zwischen 14,5 und 19,0 Jahren.

Verkleinert man das bisherige Untersuchungsintervall, so müssten die Effekte der CWT, die sich in der Schwingung in Abbildung 23b darstellen, im Falle einer neuen Wavelet-Transformation eine kürzere Periodendauer zugewiesen bekommen.

In der folgenden Analyse wurde der Untersuchungsintervall auf 27 Jahre verkürzt. In Abbildung 24a ergibt sich für die Ergebnisse der CWT im Hinblick auf die Jahresperiode von M_1^r keine Veränderung zu Abbildung 23a. Die Modulation des Jahressignals durch den 18,6-Jahre-Zyklus weist ebenso im eingeschränkten Zeitintervall von 1965 – 1991 starke Signalenergien in den Jahren 1971 und 1989 auf. Hingegen wird dem in Abbildung 23b dargestellten Signal beim gekürzten Zeitfenster eine Periode zugewiesen, welche näherungsweise dem halben Untersuchungsintervall entspricht (Abb. 24b). Weitere Tests mit unterschiedlich langen Zeitreihen bestätigten den Effekt der CWT, dass langperiodische Signalanteile (T_j), die der Beziehung (63) nicht entsprechen, eine Schwingungsdauer T_{Effekt} zugewiesen bekommen, die dem halben Untersuchungszeitraum entspricht $T_{\text{Effekt}} \approx 0,5 \cdot T_{\text{Gesamt}}$. Somit stellt sich die Wirkung der rückwärtigen Drehung der Mondbahn auf den ozeanischen Relativdrehimpuls in den Ergebnissen der CWT in einem höherfrequenten Bereich dar. Zusätzlich erzeugt die CWT Effekte oberhalb der Periodendauer von 18,6 Jahren (Abb. 24b). Eine Begründung für das Auftreten der maximalen Wavelet-Koeffizienten in diesem Bereich konnte nicht gefunden werden.

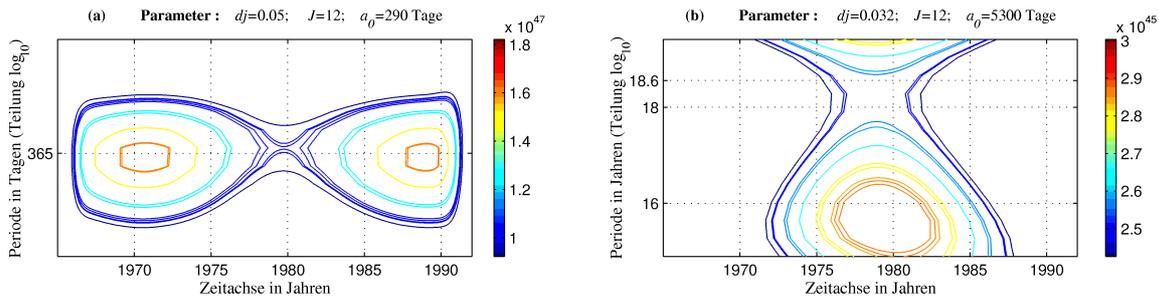


Abbildung 24: **(a)** WPS von M_1^r mit eingeschränktem Untersuchungszeitraum von 1965 bis 1991 mit den Skalen zwischen 290 und 440 Tagen. **(b)** Inhaltlich wie (a) jedoch mit den Skalen zwischen 14,5 und 19,0 Jahren.

Die Gezeiten bewirken ozeanische Drehimpulse, die sich auf Änderungen der Massenordnungen im Ozean und auf Variationen der Relativdrehimpulse zurückführen lassen. Die spektralen Charakteristika von I_{j3} und M_j^r differieren dabei nur geringfügig (Abb. 19). Jedoch sind die Signalenergien im nieder- und hochfrequenten Bereich zwischen Massen- und Bewegungsterm unterschiedlich verteilt. Betrachtet man den spektralen Energiequotienten Q_{S_j} aus I_{j3} und M_j^r , so besteht die Möglichkeit das sich mit der Frequenz ändernde Verhältnis der Energiebeträge abzuschätzen. Im Falle des spektralen Energiequotienten Q_{S_3} in Abbildung 25 erkennt man eine Zunahme der massenbedingten Einflüsse im halbjährlichen Bereich. Ozeanische gezeiteninduzierte Drehimpulse spiegeln sich im hochfrequenten Spektrum zwischen 9 und 14 Tagen aus signalenergetischer Sicht verhältnismäßig stark im Bewegungsterm wieder (Schlussfolgerung aus Abbildung 25 mit $Q_{S_3} = 10^{10...11}$). Hingegen steigt der massenbedingte Einfluss in monatlichen und halbjährlichen Schwingungen deutlich an ($Q_{S_3} = 10^{11...12}$). Dieser Effekt liegt im trägen Verhalten des Wasserkörpers Ozean begründet. Mit der Zunahme der Anregungsperiode wächst demzufolge der Einfluss des Massenterms.

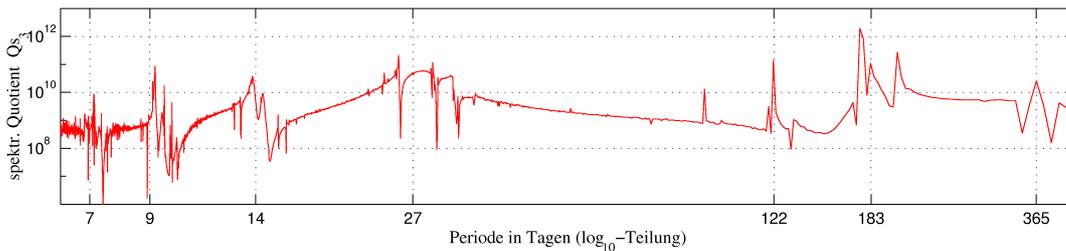


Abbildung 25: Quotient Q_{S_3} der Energiespektren aus der Trägheitstensor- und der Relativdrehimpulskomponente im Zeitintervall 1962 – 1994.

Die Wirkung lunisolärer Gezeiten auf den ozeanischen Drehimpuls schlägt sich sowohl im Bewegungstermen M_j^r , als auch in den Komponenten des Massenterms I_{j3} nieder. Die Ergebnisse der Wavelet-Analysen zeigen neben den periodischen Einflüssen, die sich aus den Haupttiden ergeben, zusätzlich Signalmodulationen durch niederfrequente Schwingungen auf. Am Beispiel des Relativdrehimpulses M_1^r wurden die Resultate der CWT in den einzelnen spektralen Bereichen dargestellt. Die Einflüsse der ozeanischen Gezeiten auf die verbliebenen Relativdrehimpulse M_2^r , M_3^r und Träg-

heitstensorkomponenten I_{j3} unterscheiden sich nur bedingt von den CWT-Ergebnissen des M_1^r . So sind periodische Signalanteile (z.B. täglich, 14-tägig) von niederfrequenten Überlagerungen (jährlich, 18,6 Jahre) beeinflusst, die sich in den einzelnen Komponenten der Bewegungs- und Massenterme ähnlich auswirken. Modulationen der monatlichen Schwingungen in M_j^r und I_{j3} sind nicht ausgeprägt. Eine Ausnahme tritt jedoch in der Trägheitstensorkomponente I_{33} auf, deren monatliche Periode sehr stark vom Zyklus der Drehung des Mondbahnknotens überlagert ist. Auf eine Darstellung der Resultate der CWT wurde an dieser Stelle verzichtet. Im Anhang kann der interessierte Leser die Wavelet-Power-Spektren der jeweiligen I_{j3} und M_j^r einsehen.

5.5 Die Wirkung der Zirkulation auf den Drehimpulshaushalt des Ozeans

Die Wirkungen der lunisolaren Gezeiten auf den ozeanischen Drehimpuls manifestieren sich, rückblickend auf die Ergebnisse in Abschnitt 5.4, im Spektralraum als periodische Schwingungen, deren Variation in der Signalstärke mit Hilfe der kontinuierlichen Wavelet-Transformation nachgewiesen werden konnte. Neben den Anziehungskräften von Sonne und Mond wirken außerdem atmosphärisch bedingte Zirkulationen im Ozean, die zu ozeanischen Drehimpulsvariationen führen. Die drei wichtigsten globalen Ozeanzirkulationssysteme sind die windgetriebene, die durch Dichtevariation induzierte und die druckgetriebene Zirkulation. Letztere lässt sich auf den direkten Impulsaustausch der Teilsysteme Atmosphäre und Ozean zurückführen. Den Schwankungen des Atmosphärendruckes folgen Variationen in der Meereshöhe entsprechend eines nahezu inversen Barometers. Weiterhin bewirkt die windgetriebene Zirkulation Strömungen in Oberflächennähe der ozeanischen Wassersäule. Die angesprochenen Teilsysteme interagieren auch über den Windschub, der zur Zirkulation an der Oberfläche des Wassers beiträgt. Die Dichtevariation im Ozean ist hauptsächlich von der Temperatur und vom Salzgehalt abhängig. Die Modifikation dieser beiden Größen erzeugt Strömungen und führt zu Änderungen der Massenanordnungen, die gemeinsam unter dem Namen *thermohaline* Zirkulation bekannt sind.

Im Folgenden soll der Einfluss der Zirkulation in zwei verschiedenen Untergruppen von Anregungsprozessen mit deren Wirkung auf den Gesamtdrehimpuls des Ozeans untersucht werden. Die vorliegenden zeitabhängigen Relativedrehimpulse und Trägheitstensorkomponenten der Zirkulation des Ozeans sind ein Ergebnis des von *Thomas* [2002] vorgestellten OMCT-Modells. Selbiges liefert zum einen die Zirkulationseinflüsse, die sich aus thermohalinen und windgetriebenen Strömungen zusammensetzen (Gruppe *hpe*). Die zweite Gruppe (*hp0*) beinhaltet neben dem atmosphärischen Antrieb *hpe* (thermohalin und windgetrieben) zusätzlich den des Atmosphärendrucks¹⁸ mit seiner Wirkung auf den Ozean.

Die Spektralanalysen in den Abbildungen 26 symbolisieren den Charakter der Komponenten der Massen- (I_{j3}) und Bewegungsterme (M_j^r) in Bezug auf die zirkulationsbedingten Anregungen *hp0*. Signifikante periodische Signalanteile mit bis zu einjähriger Schwingungsdauer treten in keinem der hier untersuchten Signale hervor. Neben den typischen annualen Signalen in der Zirkulation unterliegen atmosphärisch getriebene ozeanische Drehimpulse ausgeprägten Tagesschwingungen, die infolge

¹⁸ Ohne den invers barometrischen Ansatz.

des nur 12-stündigen atmosphärischen Modellantriebes nicht wiedergegeben werden können. Die ozeanischen Drehimpulse des OMCT-Modells aufgrund atmosphärischer Zirkulationen liegen in einständigen Zeitschritten vor, welche aus der Interpolation der halbtägigen Auflösung des Echtzeitantriebs des OMCT-Modells stammen. Letztgenannte Auflösung entspricht genau der Nyquist-Frequenz der täglichen Schwingungen. Um Fehlinterpretationen von Spiegelfrequenzen (Alaising) durch die FFT zu unterbinden, sollten nur Signalanteile betrachtet werden, die unterhalb der Nyquist-Frequenz liegen. Eine mögliche Beschreibung der atmosphärischen Zirkulation beschränkt sich deshalb auf Variationen oberhalb der eintägigen Periode.

Im gesamten hochfrequenten Spektralbereich bis zu jährlichen Schwingungen der Zirkulationen hpe und $hp0$ (Abb. 26) ist die Signalenergie im Vergleich zur Energie gezeiteninduzierter Variationen relativ groß. Die kontinuierlich hohen Energien in diesem Teil der Spektren liegen im stochastischen Charakter des atmosphärischen Antriebs begründet und reflektieren sich sowohl im Massen- als auch im Bewegungsterm des ozeanischen Drehimpulses. Da sich die Resultate der FFT in den Zirkulationen hpe und $hp0$ nur unwesentlich unterscheiden, sollen an dieser Stelle nur die Ergebnisse der Spektralanalyse von $hp0$ wiedergegeben werden.

Bei einem Vergleich aller Komponenten der Massen- und Bewegungsterme fällt neben der dominanten Jahresperiode ebenso eine energiereiche Halbjahresschwingung auf (Abb. 26). Eine Begründung für die atmosphärische Zirkulation mit starker halbjähriger Variation ist zunächst vom klimatologischen Standpunkt nicht nachzuvollziehen.

Betrachtet man jedoch das semiannuelle Signal als erste Oberschwingung der Jahresperiode, so kann man davon ausgehen, dass die hohe Energie dieses Signalanteils nur über den mathematischen Umformungsprozess der FFT vom Zeit- in den Spektralbereich zustande gekommen sein kann. Unterscheiden sich beispielsweise die einzelnen Amplituden eines Signalanteils mit Jahresperiode geringfügig, so zeigt die FFT neben der Jahresperiode noch zusätzliche Schwingungen an, deren Frequenzen Vielfache des annuellen Signals sind. Diese Frequenzen treten im ursprünglichen Signal nicht mit dieser Intensität auf, sondern sind durch die Fourier-Transformation in den Spektralbereich hineinprojiziert.

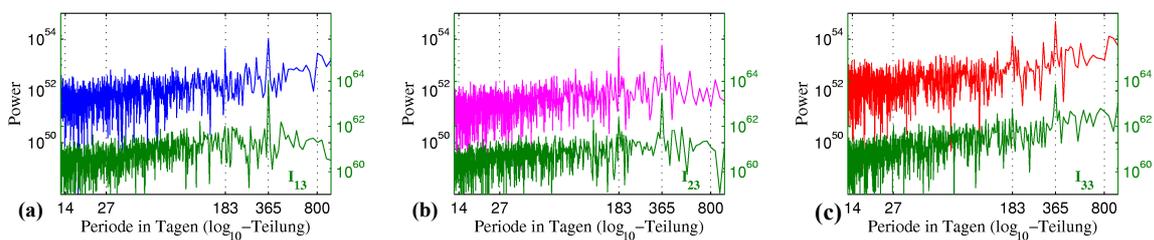


Abbildung 26: Vergleich der Fourier-Spektren der relativen Drehimpulse mit den Trägheitstensor-komponenten (grün) des Ozeans im Zeitintervall 1962 - 1994 ($hp0$ -Antrieb = thermohaline, wind- und atmosphärendruckgetriebene Zirkulation): (a) M_1^r und I_{13} ; (b) M_2^r und I_{23} ; (c) M_3^r und I_{33} .

Die Resultate der kontinuierlichen Wavelet-Analysen im Abschnitt 5.5.1 und 5.5.2 bestätigen eine dominante Jahresperiode. Des Weiteren kann die getroffene Annahme der Oberschwingungen für das semiannuelle Signal mit Hilfe der CWT-Ergebnisse gestützt werden. Beispielsweise sind beim Relativedrehimpuls M_1^r (Abb. 27b) keinerlei Periodizitäten im halbjährigen Signalanteil vorhanden. In diesem Frequenzbereich treten lediglich schwach aperiodische und episodische Signalvariationen auf.

5.5.1 Gemeinsamkeiten der Zirkulationen *hpe* und *hp0*

Die CWT-Analyse der beiden Zirkulationen *hpe* und *hp0* bezüglich des ozeanischen Drehimpulses zeigte im Bereich der Strömungsterme M_j^r hohe Übereinstimmungen. Dies belegt, dass sich die Anregung durch den Atmosphärendruck nur in geringem Maße auf den Bewegungsterm des Drehimpulses auswirkt. Exemplarisch sei an dieser Stelle der Relativedrehimpuls M_1^r der *hp0*-Zirkulation analysiert. Weitere Wavelet-Power-Spektren der Relativedrehimpulse aus den Zirkulationen *hpe* und *hp0* können im Anhang eingesehen werden.

Im hochfrequenten Bereich (von wenigen Tagen bis unterhalb des Jahressignals)¹⁹ des Wavelet-Power-Spektrums variiert die Zirkulation sehr stark. Es treten keine signifikanten Frequenzen auf (Abb. 27a), jedoch ist bereits ein Großteil der Gesamtenergie des Signals in diesem Spektralbereich enthalten (Abb. 26a). Das WPS stellt den stochastischen Charakter des atmosphärischen Antriebs an dieser Stelle als „ungeordnet“ und über große Spektralbereiche aperiodisch wirkend dar. Hingegen erkennt man in Abbildung 27b deutlich die periodische Jahresschwingung von M_1^r und deren Modulation im Zyklus zwischen 3 und 5 Jahren. Im Unterschied zu den gezeiteninduzierten Drehimpulsen besitzt das Signal beim atmosphärischen Antrieb im Bereich der jährlichen Periode eine gewisse Variabilität. Die Zirkulation weist in der annuellen Skale der Wavelet-Power-Spektren kein strenges Kontinuum auf. Die zeitlich fixierten Signalanteile im halbjährlichen Bereich lassen auf einen aperiodischen oder episodischen Einfluss der Zirkulation auf den ozeanischen Relativedrehimpuls schließen. Somit unterliegt der Relativedrehimpuls, entgegen der Aussage der Fourier-Analyse in Abbildung 26a, keiner halbjährlichen, streng periodischen Variation. Mit dem Vergleich der Resultate der CWT (Abb. 27b) bestätigt sich die im Abschnitt 5.5 getroffene Annahme, dass es sich bei der semiannuellen „Periode“ um eine projizierte Oberschwingung des jährlichen Signals handelt.

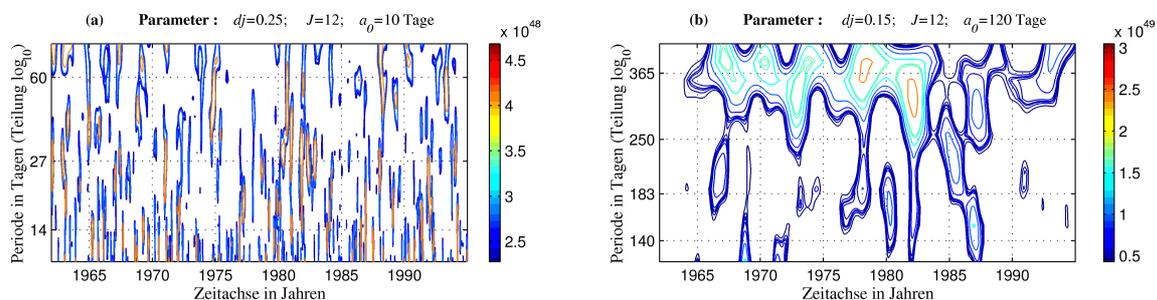


Abbildung 27: WPS des Relativedrehimpulses M_1^r des Ozeans aus thermohaliner, windgetriebener und druckgetriebener Zirkulation (*hp0*): (a) mit den Skalen von 10 – 80 Tagen. (b) Inhaltlich wie (a) jedoch mit den Skalen zwischen 120 und 420 Tagen.

¹⁹ In Abbildung 27a sind nur die Ergebnisse der CWT im Spektralband zwischen 10 und 80 Tagen dargestellt. Auf die Visualisierung eines größeren Bandes wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Oberhalb der Jahresschwingungen im Bereich zwischen 1,5 und 4,7 Jahren weisen die Relativdrehimpulse M_j^r (hier: M_1^r) zu einem großen Teil aperiodische und episodische Signalanteile auf. Mit Hilfe der CWT gelingt es, das Auftreten dieser kurzandauernden Schwingungen zeitlich einzugrenzen (Abb. 28a). Hier stellt sich deutlich der Vorteil der zeitlokalisierten Wavelet-Transformation gegenüber der Fourier-Analyse heraus. Im Falle der FFT wurden den zeitlich begrenzt wirkenden Signalanteilen mehrere diskrete Frequenzen zugewiesen, was im Bildraum nichtperiodischer Signale zu Fehlinterpretationen führen kann (Abb. 26a). Die Variationen im unteren Teil der Abbildungen 28a sind ausschließlich modulierte Jahresschwingungen. Weiterhin wirken niederfrequente Signalanteile der Relativdrehimpulse M_j^r der Zirkulationen hpe und $hp0$ mit einem ca. 16-jährigen Wiederholzyklus (hier: M_1^r in Abb. 28b). Bei den einzelnen Strömungstermen M_j^r variiert diese Schwingung in Frequenz und zeitlichem Auftreten nur gering. Jedoch entspricht die 16-jährige Periode nahezu dem Zeitumfang des halben Untersuchungsintervalls. Es stellt sich daher die Frage, ob die exakte Auflösung der Schwingungsdauer nach Beziehung (63) überhaupt gewährleistet ist. Zusätzliche Untersuchungen mit Simulationsdaten, die einen größeren Zeitintervall (z.B. 1962 - 2000) betrachten, könnten die Existenz dieser periodischen Schwingung bestätigen.

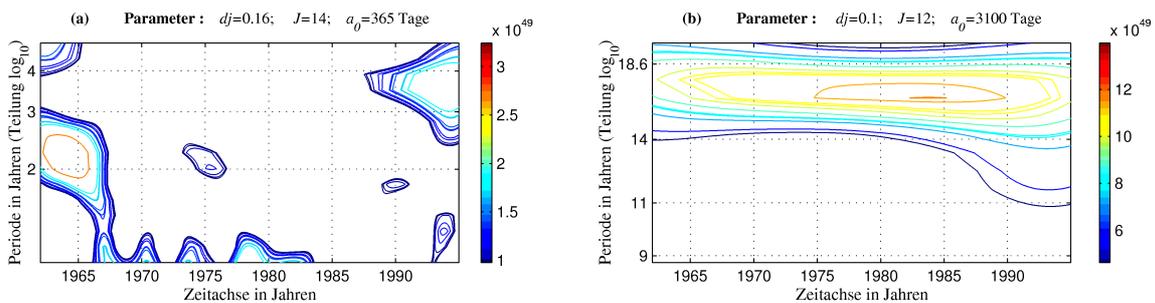


Abbildung 28: WPS des Relativdrehimpulses M_1^r des Ozeans aus thermohaliner, windgetriebener und druckgetriebener Zirkulation ($hp0$): (a) mit den Skalen von 1,0 bis 4,7 Jahren; (b) mit den Skalen zwischen 8,5 und 20,0 Jahren.

5.5.2 Unterschiede der Zirkulationsprozesse hpe und $hp0$

Allgemein sind im hochfrequenten Bereich der Zirkulationsprozesse keine hervortretenden Strukturen zu erkennen. Eine Ausnahme bilden die täglichen Variationen, welche jedoch aufgrund der nur 12-stündigen Schrittweite des atmosphärischen Modellantriebes *nicht* aufgelöst werden können. Hier sei auf die Ausführungen zu den stündlichen Interpolationen im OMCT-Modell und deren Zusammenhang mit der Nyquist-Frequenz in Abschnitt 5.5 verwiesen. Die Relativdrehimpulse der analysierten Zirkulationen (hpe und $hp0$) unterscheiden sich kaum voneinander, was als Indiz für ein nahezu invers barometrisches Verhalten der Meeresoberfläche gedeutet werden kann. In Abschnitt 5.5.1 wurde bereits angemerkt, dass diese Zirkulationen hauptsächlich in den Komponenten der Massenterme differente Ergebnisse aufweisen. Aus diesem Grunde wird an dieser Stelle nur der Unterschied im Massenterm I_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) beider Zirkulationen untersucht. Die deshalb berechneten Differenzträgheitstensor-komponenten aus $hp0$ und hpe entsprechen ausschließlich der Wirkung des Atmosphärendrucks auf die Oberfläche des Ozeans und der damit verbundenen Massenverlagerung. Oder vereinfacht ausgedrückt induziert die atmosphärendruckgetriebene Zirkulation *keine* Relativbewegungen von Wassermassen im Ozean.

Ausgewählte Ergebnisse der CWT stellen im Folgenden die Besonderheiten in der Signalstruktur der modellierten Zirkulation heraus. Mit Ausnahme der Komponente²⁰ I_{12} erscheint in den übrigen Gliedern des Trägheitstensors das Jahressignal nahezu periodisch. In den Abbildungen 29a, 30a und 31a erkennt man die Auswirkung des Atmosphärendruckes besonders gut. Die Überlagerung der annuellen Periode ist in den einzelnen Komponenten jedoch recht unterschiedlich; zudem wirkt die Modulation nicht streng periodisch. Die modulierten Jahresschwingungen mit einem Zyklus zwischen 5 und 7 Jahren lassen sich ebenso in allen Komponenten I_{j3} feststellen (Abb. 31a). In den Horizontalkomponenten I_{13} und I_{23} weisen die überlagerten Jahressignale maximale Energiewerte um die Jahre 1969 und 1990 auf (Abb. 29a und 30a).

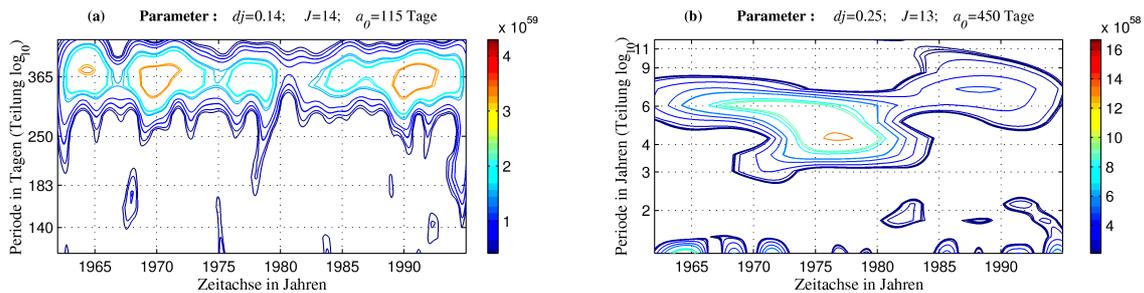


Abbildung 29: WPS des Differenzsignals der Trägheitstensor-Komponente I_{13} aus den Zirkulationen $hp0$ und hpe : (a) im Skalenbereich von 115 – 447 Tagen; (b) inhaltlich wie (a) mit einem Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren.

Aperiodische und episodische Schwankungen erkennt man in den Signalen I_{23} und I_{33} vor allem im halbjährigen Bereich. Mit Hilfe der CWT gelingt eine relativ genaue zeitliche Fixierung der auftretenden halbjährlichen Schwankungen, wobei sich deren spektraler Charakter meist nur in einem sehr großen Periodenband abbildet (Abb. 30a und 31a). Diesen Effekt kann man an dieser Stelle nicht auf die begrenzte Zeit-Perioden-Lokalisation der CWT zurückführen. Die Schwankungen besitzen eine Signalstruktur, die einer Vielzahl unterschiedlich skaliertes Wavelet-Funktionen im Bereich $\psi(a_{183} \text{ Tage}, b)$ gleichen, was zu großen Wavelet-Koeffizienten und somit zu den dargestellten Ergebnissen der CWT führt (Abb. 30a und 31a).

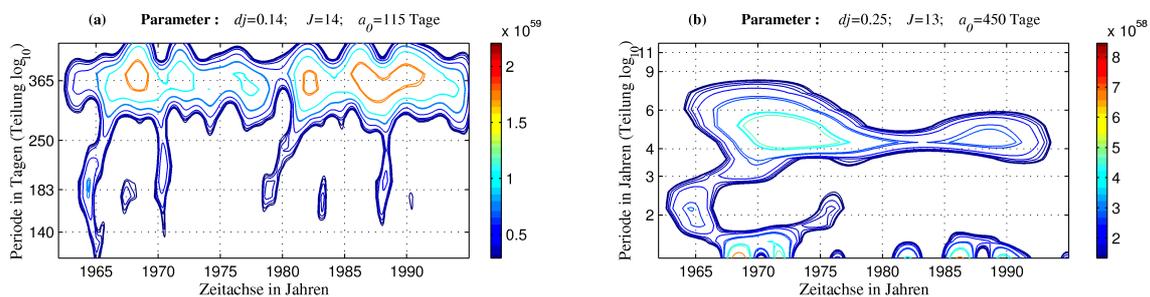


Abbildung 30: WPS des Differenzsignals der Trägheitstensor-Komponente I_{23} aus den Zirkulationen $hp0$ und hpe : (a) im Skalenbereich von 115 – 447 Tagen; (b) im Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren.

²⁰ Die Ergebnisse der CWT aller Trägheitstensor-Komponenten I_{jk} befinden sich im Anhang.

Interessant sind die einzelnen niederfrequenten Wirkungen des Atmosphärendrucks auf die Massenverteilung im Ozean. Neben aperiodischen und episodischen Variationen induziert der Atmosphärendruck vor allem in den ozeanischen Horizontalkomponenten I_{13} und I_{23} Schwingungen mit quasiperiodischem Charakter. Selbige wirken in einem breiten Spektrum zwischen 3,5 und 10 Jahren (Abb. 29b und 30b), wobei sich die quasiperiodische Ausprägung der Signalanteile bei I_{13} vorwiegend in 4- und 7-jährigen Variationen und bei I_{23} im Bereich einer 4,5-jährigen Schwingung bemerkbar machen. Zusätzlich erzeugen atmosphärische Druckänderungen im Horizontalbereich der ozeanischen Trägheitstensoranteile aperiodische bzw. episodische Signalanteile bei $T_j \approx 2$ Jahre, deren zeitlich eng begrenzte Wirkung in I_{13} und I_{23} zu vollkommen unterschiedlichen Zeitpunkten im Untersuchungsintervall auftreten. Die in den Jahren 1982 und um 1990 auftretenden Impulse in der Komponente I_{13} können mit der stärksten natürlichen Klimaschwankung, dem *El Niño Southern Oscillation* Phänomen (ENSO) in Verbindung gebracht werden. Während eines *El Niño*s kommt es beispielsweise zu Variationen des Luftdrucks über Südostasien sowie dem westlichen und dem östlichen Pazifik. Die u.a. in den Jahren 1982 und 1988 aufgetretenen *El Niño*s können demnach mit der I_{13} -Komponente der druckgetriebenen Massenverlagerungen in Verbindung gebracht werden. Im axialen Teil des Trägheitstensors I_{33} schlagen sich im niederfrequenten Bereich (1,5 bis 3,5 Jahre) des Differenzsignals der Zirkulationen hpe und $hp0$ aperiodische bzw. episodische Variationen nieder (Abb. 31b). Außerdem konnte für diese Trägheitstensoranteile eine Quasiperiode bei 11 Jahren analysiert werden, deren Signalenergie im Zeitintervall 1973 – 1980 Maximalwerte annimmt. Eine weitere Quasiperiode wirkt Ende der siebziger bis Mitte der achtziger Jahre mit einer Schwingungsdauer zwischen 5 und 7 Jahren (Abb. 31b).

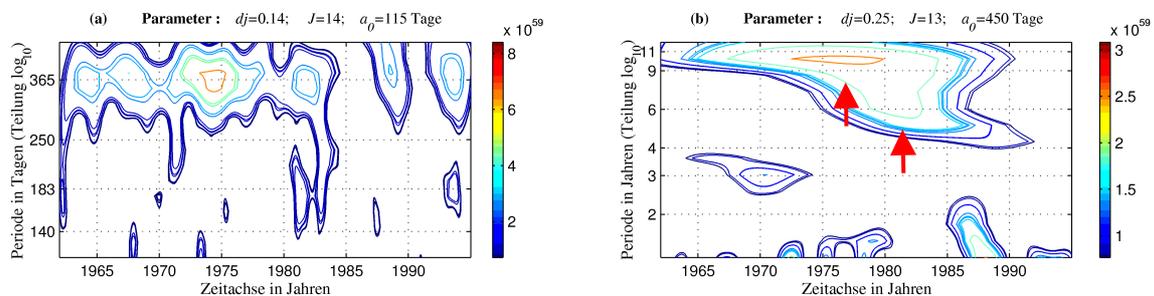


Abbildung 31: WPS des Differenzsignals der Trägheitstensoranteile I_{33} aus den Zirkulationen $hp0$ und hpe : (a) im Skalenbereich von 115 – 447 Tagen; (b) im Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren.

Die Ergebnisse der Wavelet-Analysen der in diesem Abschnitt nicht aufgeführten Komponenten I_{jk} befinden sich im Anhang dieser Arbeit.

5.6 Vergleich mit beobachteten Parametern der Erdrotation

Um beobachtete Parameter der Erdrotation und die numerischen Modellresultate miteinander in Beziehung zu setzen, bedarf es zunächst der Transformation in eine gemeinsame Verifikationsebene (s. Abschnitt 4.7). Die folgenden Untersuchungen im Spektral- und im Zeit-Perioden-Raum beziehen sich auf Beobachtungs- und Modelldaten, die in die Ebene der χ -Funktionen transformiert wurden.

Zur Umformung der ozeanischen Relativdrehimpulse und Trägheitstensoranteile in den dimensionslosen Anregungsbereich χ wird an dieser Stelle auf die Beziehungen (46) und (47) verwiesen.

Die vom IERS (s. Abschnitt 5.1.2) beobachteten Parameter der Erdrotation X_{Pol} , Y_{Pol} , ΔLOD überträgt man mit Hilfe von (52) und (50) in die Ebene der χ -Funktionen. Gemessene zeitabhängige Variationen der Erdrotationsachse offerieren nur den Gesamteinfluss aller geophysikalischen Prozesse. Hingegen betrachtet man seitens des OMCT-Modells ausschließlich die ozeanische Dynamik und kann mit den χ -Funktionen die Auswirkungen des Teilsystems Ozean auf die Erdorientierung angeben.

5.6.1 Einfluss der lunisolaren Gezeiten

Die gezeiteninduzierten ozeanischen Drehimpulse nehmen im Horizontalbereich und in der axialen Komponente der χ -Funktionen äußerst unterschiedlich Einfluss auf die Orientierung der Erde. Einen sehr geringen Einfluss auf die gemessene Polbewegung besitzen die ozeanischen Variationen im Bereich der 14-tägigen, monatlichen und halbjährlichen Gezeiten (Abb. 32a,b). Die ozeanische Anregung aufgrund der jährlichen Tide zeigt vorwiegend im Horizontalbereich der Beobachtungsergebnisse Auswirkungen. Das starke Zurücktreten der 14-tägigen und monatlichen Anteile bei den „beobachteten“ χ_1 und χ_2 zugunsten der jährlichen Tide begründet *Thomas [2002]* mit der Periodennähe von Jahresschwingung und Chandlerscher Bewegung. Resonanzfernere Perioden wirken demnach vergleichsweise weniger effizient als die ozeanischen Schwingungsanteile in der Nähe der Eigenmoden der Erde. Bei den Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit (und somit auch in χ_3) kann man hingegen im Bereich der 14-tägigen, monatlichen und der halbjährlichen Tiden von einer starken Anregung seitens der ozeanischen Dynamik ausgehen (Abb. 32c). Der Einfluss zonaler Tiden auf die axiale Komponente ist besonders effizient, da das Gezeitenpotential hier keine Abhängigkeit zur geographischen Länge aufweist.

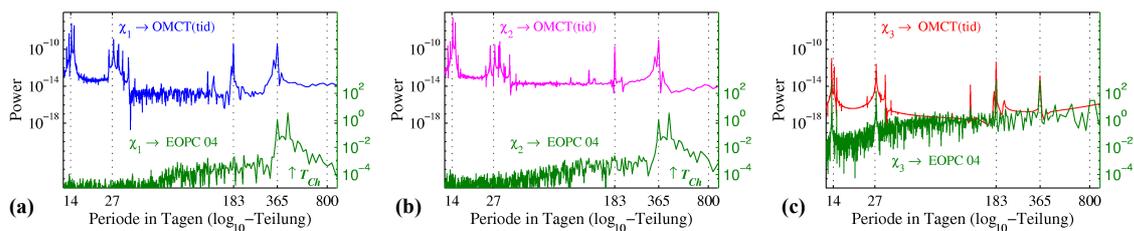


Abbildung 32: Spektralanalyse der Beobachtungsdaten des IERS (grün) und der gezeiteninduzierten ozeanischen Drehimpulse (Massen- und Bewegungsterm) im Zeitintervall 1962 - 1994: **(a)** χ_1 ; **(b)** χ_2 ; **(c)** χ_3 .

Beim Spektralimpuls der ozeanischen Anregungsfunktion χ_3 im Bereich von 122 Tagen handelt es sich um eine Oberschwingung der Jahresperiode (Abb. 32c). Ein anregendes Moment aus dem Gezeitenpotential ist an dieser Stelle im Spektrum nicht vorhanden [*Dietrich et al., 1975*]. Tests mit der CWT ergaben keinerlei signifikante Informationen bei dieser Periode der ozeanischen χ_3 -Funktion. In Abschnitt 5.5 wurde bereits auf den Zusammenhang zwischen den FFT-bedingten „Störungen“ im Spektralbereich und den Oberschwingungen eingegangen.

Sowohl im Bildraum der wavelet-transformierten Daten der Simulation als auch im Bildraum der Beobachtungsergebnisse der EOP-C04 Zeitreihe erkennt man den Überlagerungseffekt von niederfrequenten Anteilen auf höherfrequente Signalperioden. So werden die 14-tägigen Perioden der χ_3 -Komponente vom 18,6-Jahre-Zyklus deutlich überlagert (Abb. 34). Die energetischen Maxima eben genannter Periode treten in den Jahren 1969 und 1988 auf und sind bei den Beobachtungs- und Modelldaten identisch. Weit weniger gleichen sich die Anteile der monatlichen χ_3 -Anregungen. Hier erfahren ausschließlich die gezeiteninduzierten ozeanischen Drehimpulse, dargestellt in den χ_3 -Funktionen, eine Modulation im 18,6-Jahre-Zyklus. Jedoch unterscheidet sich die Struktur dieser Modulation von der einfachen sinusförmigen Überlagerung der 14-tägigen Periode. In Abbildung 34a sind die verschiedenen Maxima der monatlichen Schwingung zusätzlich hervorgehoben. So treten neben zeitlich sehr kurzen Impulsen in den Jahren 1969 und 1987 (grün markiert) auch sehr lang anhaltende Signalüberlagerungen auf, wobei in diesem Falle das Signalmaxima im Jahre 1978 und zusätzlich in den Randbereichen des Zeitintervalls auftritt (rot markiert). Bezogen auf die Variationen der Tageslänge kann man speziell bei der 14-tägigen Periode von einer relativ großen Auswirkung gezeiteninduzierter ozeanischer Dynamik auf den beobachteten Gesamteffekt der Tageslängenschwankung ausgehen. Die Modellergebnisse zeigen im Vergleich zu den Beobachtungsdaten bei den axialen Anregungsfunktionen gute Übereinstimmung in der Phase der modulierten 14-tägigen Schwingungen (moduliert durch 18,6-Jahre-Zyklus). In den höherfrequenten Modulationen der 14-tägigen Variation differieren jedoch die Ergebnisse in Form einer halbjährlichen und einer jährlichen Überlagerungsschwingung (Abb. 34). So zeigen sich in den Analysen der Beobachtungsdaten semi-annuelle Modulationen, währenddessen lunisolare Gezeiten scheinbar annuelle Überlagerungen auf die 14-tägige Periode von χ_3 ausüben. Diesem „Widerspruch“ soll zunächst nachgegangen werden, da das Gezeitenpotential bei der halbjährlichen Tide (Ssa) im Vergleich zur jährlichen Gezeit (Sa) sehr stark ist und entsprechend großen Einfluss auf die Komponenten des Massen- und Bewegungsterms im Spektralraum hat (Abb. 19c).

Bei der Betrachtung des Massen- und des Bewegungsterms mit den stündlichen Auflösungen des OMCT-Modells zeigt sich für die 14-tägige Tide eine signifikante Modulation des Signals durch die halbjährliche Gezeit sowohl im Massen- als auch im Bewegungsterm (Abb. 33). Die Energieanteile der jeweilig 14-tägigen Periode unterscheiden sich im Bildraum um bis zu drei Größenordnungen. Entsprechend dominant muss deshalb der Einfluss des Massenterms im Bereich der χ_3 -Anregung sein. Aufgrund der großen Datenmenge bei der stündlichen Auflösung sind in Abbildung 33 nur die CWT-Ergebnisse von $\Omega \cdot I_{33}$ und M_3^r der Jahre 1993 und 1994 aufgeführt.

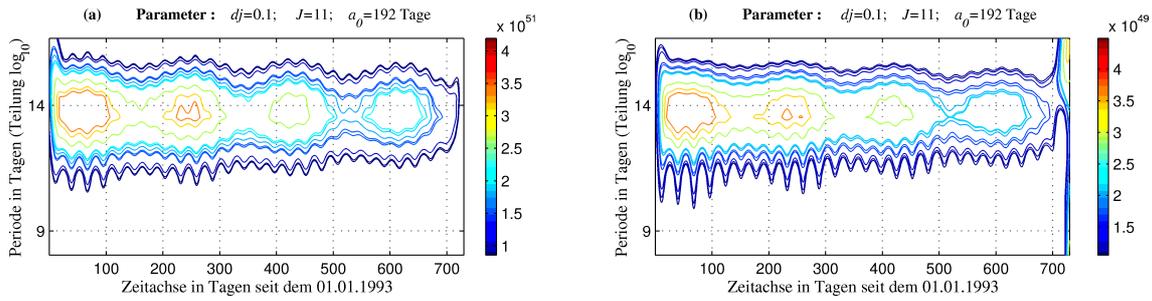


Abbildung 33: Nachweis der halbjährlichen Modulation der 14-tägigen Tide mit den Stundenlösungen des OMCT-Modells im Zeitintervall 1993 – 1994: **(a)** für den Massenterm $\Omega \cdot I_{33}$ **(b)** und den Bewegungsterm M_3^r .

Die eben angesprochene semiannuelle Überlagerung der 14-tägigen Gezeit lässt sich in den wavelet-analysierten χ_3 -Tageslösungen der Modelldaten *nicht* extrahieren (Abb. 34a). Der Unterschied in der Modifikation dieser Tide muss daher auf den spektralen Charakter der jeweiligen Zeitauflösung zurückzuführen sein. So steigt bei der Datenreduktion von Stunden- auf Tageslösungen der relative Unterschied des Energiebetrages zwischen der annuellen und der semiannuellen Periode an. In diesem Zusammenhang sei auf die Ausführungen zur Datenreduktion mit Hilfe des arithmetischen Mittels in Abschnitt 5.4.2 verwiesen.

Testanalysen mit der FFT ergaben, dass sich die relativen Unterschiede in den Energiebeträgen oben genannter Perioden auch in M_3^r und I_{33} nach der Mittelung leicht ändern. Infolgedessen führen die modifizierten Energiebeträge der einzelnen Tiden, in Zeitreihen mit Tagesauflösung, zur Modulation der 14-tägigen Gezeit durch den annuellen Signalanteil. Die in Abbildung 33 ermittelte semiannuelle Überlagerung bei $\Omega \cdot I_{33}$ und M_3^r in der 14-tägigen Gezeit ist somit bei der Wavelet-Analyse von χ_3 -Tageslösungen nicht mehr nachzuweisen.

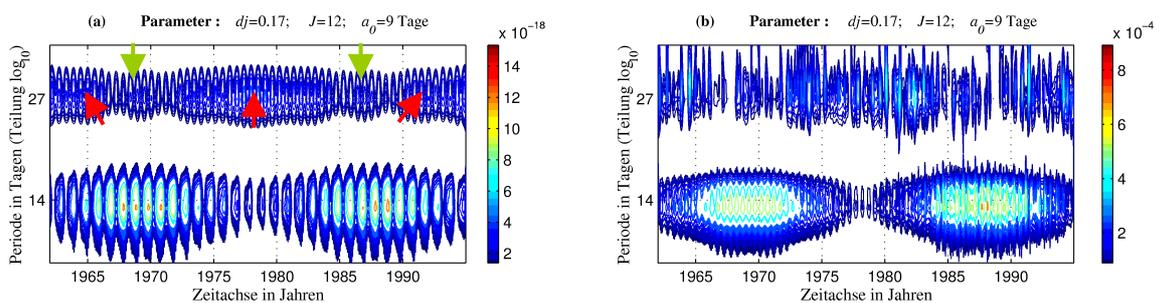


Abbildung 34: WPS der axialen Anregung χ_3 im Skalenbereich von 9 – 37 Tagen **(a)** der ozeanischen Gezeiten im Vergleich zu den **(b)** Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.

Im Bereich der Halbjahres- und Jahressignale der axialen Anregungsfunktion differieren die Ergebnisse der CWT-transformierten Beobachtungs- und Simulationsdaten viel deutlicher voneinander (Abb. 35). So ist die Jahresperiode aufgrund ozeanischer Gezeiten nur sehr schwach ausgeprägt und erfährt eine Überlagerung durch den 18,6-Jahres-Zyklus. Das semiannuelle Signal tritt in diesem Teil des Spektrums mit hoher Dominanz und ohne signifikante Modulation auf. Die sich aus den Messun-

gen ergebenden Rotationsschwankungen, transformiert in die χ_3 -Anregungsebene, zeigen neben zyklischen Überlagerungen des semiannuellen Signals vor allem eine Modulation der Jahresperiode mit einem unterschiedlich stark ausgeprägten 5-jährigen Zyklus (Abb. 35b). Eine Begründung für das Auftreten dieser nahezu periodischen Überlagerung kann nicht gegeben werden. Die Wavelet-Analyse zeigt, dass die ozeanischen Gezeiten im längerperiodischen annuellen Bereich auf die Rotationsschwankungen der Erde weit weniger Einfluss besitzen als die 14-tägigen Tiden. Aus diesem Zusammenhang kann man schließen, dass die jährlichen χ_3 -Variationen aus dem Beobachtungsmaterial nur in geringem Maße durch die gezeiteninduzierten ozeanischen Drehimpulse ausgelöst werden.

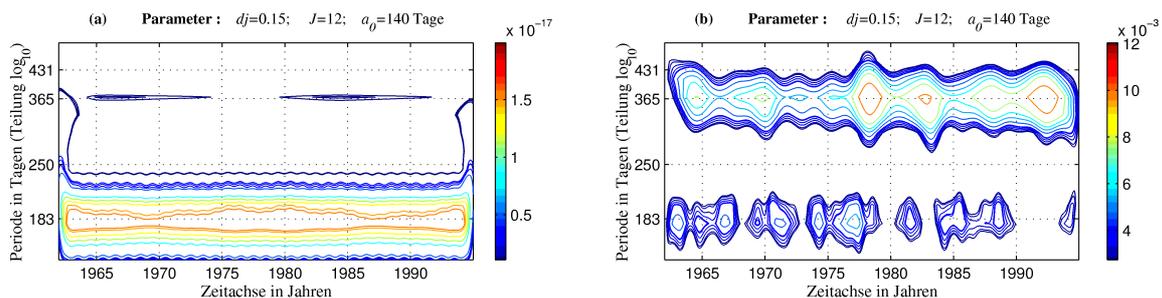


Abbildung 35: WPS der axialen Anregung χ_3 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen **(a)** der ozeanischen Gezeiten im Vergleich zu den **(b)** Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.

Die CWT-Ergebnisse der horizontalen χ_1 - und χ_2 -Funktionen unterscheiden sich für die Daten des OMCT-Modells kaum voneinander. Ebenso gleichen sich die Strukturen der horizontalen Anregungen im wavelet-transformierten Bildraum der beobachteten Polbewegung. Exemplarisch sind deshalb nur die Ergebnisse der Analysen der χ_1 -Anregung von Simulation und Beobachtung wiedergegeben (Abb. 36). Aufgrund der Unschärfe der CWT und dem daraus resultierenden großen Zeit-Periodenfenster im Skalenbereich von 365 Tagen gelingt es *nicht*, den noch erkennbaren Eigenmodus der Erde (Chandlerschen Bewegung) vom Jahressignal in $\underline{\chi}$ klar voneinander abzutrennen (für χ_1 s. Abb. 36b). Die Lokalisation der Periodeninformation beträgt im Falle des Morlet-Wavelets bei einer Skale von 365 Tagen zirka ± 45 Tage.

So erfahren die Chandlersche Bewegung und die Jahresperiode, welche man im fourierschen Spektralraum gut unterscheiden konnte (Abb. 32a,b), eine Darstellung in einem gemeinsamen Signal mit einer Skalierung von zirka 400 Tagen (Abb. 36b). Besonders auffällig ist die Modulation des Signals im Zyklus von 6,75 Jahren, die aus der Überlagerung der Chandlerschen Bewegung und der Jahres-schwingung entsteht. Die Variation in diesem Bereich ist das Produkt der bereits in Abschnitt 4.3 erläuterten Schwebung. Die ozeanischen Gezeiten haben im Horizontalbereich besonders beim jährlichen Signal großen Einfluss auf die Polbewegung. Hochfrequenteren Schwingungen, so z.B. auch die semiannuelle Variation, werden jedoch nicht in dem hohen Maße in den Beobachtungsdaten reflektiert (Abb. 36). Die Überlagerung der jährlichen ozeanischen Gezeit resultiert aus der Rückwärtsdrehung des Mondbahnknotens. Interessant ist die Übereinstimmung der Maximalamplituden annueller Schwingungen um die Jahre 1972 und 1990 bei Simulation und Beobachtung. Die Variationen der

halb- und gantzägigen Tiden können an dieser Stelle nicht analysiert werden, da die Zeitreihe EOP-C04 des IERS nur in Tageslösungen vorliegt.

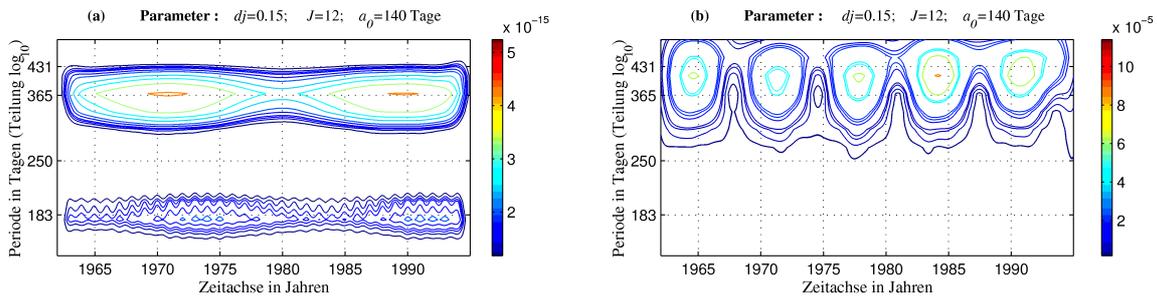


Abbildung 36: WPS der horizontalen Anregung χ_1 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen (a) der ozeanischen Gezeiten im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.

5.6.2 Einflüsse der Zirkulation

Mit den Daten des OMCT-Modells ist es möglich, ozeanisch induzierte Erdrotationsschwankungen sowohl für den Gezeitenantrieb als auch für den atmosphärischen Antrieb abzuschätzen. Im folgenden wird ein Vergleich der $hp0$ -zirkulationsgetriebenen Dynamik des Ozeans mit den Beobachtungsdaten der EOP-C04-Zeitreihe in der Ebene der χ -Funktionen geführt. Zudem kann man im wavelet-transformierten Bildraum der Modelldaten die Signalenergien durch den Zirkulationsantrieb dem in Abschnitt 5.6.1 analysierten Gezeitenantrieb gegenüberstellen.

Typische Variationen in der atmosphärischen Zirkulation sind neben den täglichen Schwingungen auch die Jahreszyklen. In den Abbildungen 37 und 38 sind die χ_3 - und die χ_1 -Komponenten mit denen der simulierten $hp0$ -Zirkulation verglichen. So erkennt man in den Ergebnissen der CWT im annuellen $hp0$ -Signal Effekte der Überlagerung. Die Modulation des Jahressignals verläuft in quasi-periodischer Form. Zyklen zwischen 3 und 5 Jahren führen zu variierendem Energieanteil in der jährlichen Periode. Das zeitliche Auftreten der annuellen Energiemaxima gleicht teilweise denen der Beobachtungsdaten. Eine Interpretation der Wavelet-Power-Spektren des Beobachtungsmaterials ist bereits in Abschnitt 5.6.1 geschehen. Zum besseren Vergleich mit der zirkulationsbedingten ozeanischen Dynamik wurden die Transformationsergebnisse (WPS) der EOPC-04-Zeitreihe übernommen.

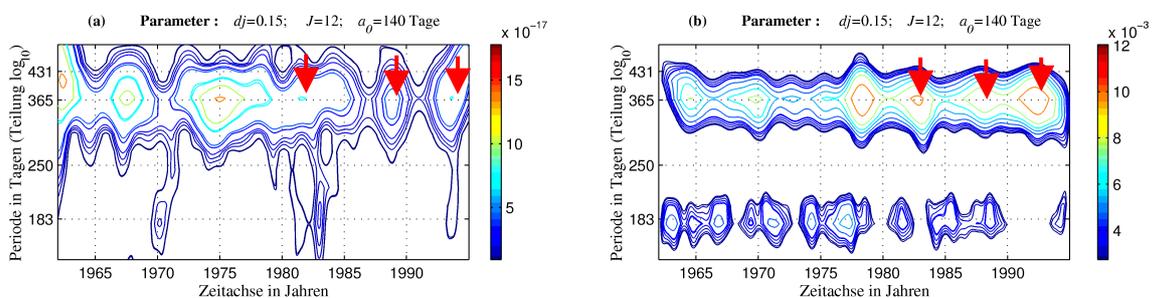


Abbildung 37: WPS der Anregung χ_3 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen: (a) Antrieb durch die Zirkulation $hp0$ im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS. Teilweise gleichen hier die Phasen der Modulation annueller Signale denen der Zirkulation (rot).

Die maximalen annualen Signalenergien im Bildraum der jeweiligen Zeitreihe konnten im Untersuchungsintervall von 1962 – 1994 zeitlich fixiert werden. In den Abbildungen 37 und 38 ist zu erkennen, dass sich die Verstärkung der Amplituden der jährlichen Schwingungen bis auf 4 Jahre genau gleicht (rote Markierung).

Im Allgemeinen erweist sich der Einfluss der atmosphärischen Zirkulation auf die Erdrotationsschwankungen als sehr stark im Vergleich zu den Variationen, die aus den ozeanischen Gezeiten resultieren. So differieren beispielsweise die Energiebeträge der χ_1 -Jahresschwingungen der *hp0*-Zirkulation und des Gezeitenantriebes um bis zu drei Größenordnungen (Abb. 38a, 36a). In der axialen Anregungskomponente χ_3 dominieren Zirkulationseinflüsse vor allem in der annualen Schwingung gegenüber den Einflüssen des Gezeitenpotentials. Energiereiche semiannuelle Signalanteile entstammen jedoch ausschließlich den Auswirkungen ozeanischer Gezeiten (Abb. 35a, 37a) und zeigen deren Anteil an der Variation der Beobachtungsdaten (χ_3) und damit an der Rotationsgeschwindigkeit der Erde (Abb. 35b).

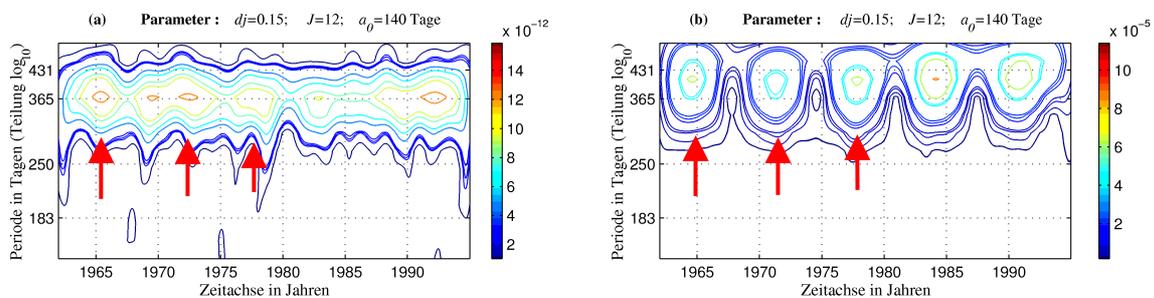


Abbildung 38: WPS der Anregung χ_1 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen: **(a)** Antrieb durch die Zirkulation *hp0* im Vergleich zu den **(b)** Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS. Teilweise gleichen hier die Phasen der Modulation annualer Signale denen der Zirkulation (rot).

Die quasiperiodischen Anteile bei 6 und 8 Jahren in den χ_1 -Anregungen sind sowohl in den CWT-Ergebnissen der Beobachtung als auch der Modellzeitreihen deutlich zu erkennen (Abb. 39). Aufgrund der hochenergetischen Signalanteile im annualen χ_1 -Signal des Beobachtungsmaterials stellt sich das zeitliche Auftreten der beiden Quasiperioden vorwiegend um die Jahre 1968 und 1990 dar (Abb. 39b). Die Wirkung dieser quasiperiodischen Signalanteile über diesen Zeitraum hinaus erkennt man bei einem Zoom in den spektralen Bereich der CWT zwischen 3 und 9 Jahren, wobei hier auf eine zusätzliche Darstellung verzichtet wurde. Die Übereinstimmung zwischen Simulation und Beobachtung lässt sich damit für diese sehr speziellen niederfrequenten Anteile in χ_1 belegen (Abb. 39).

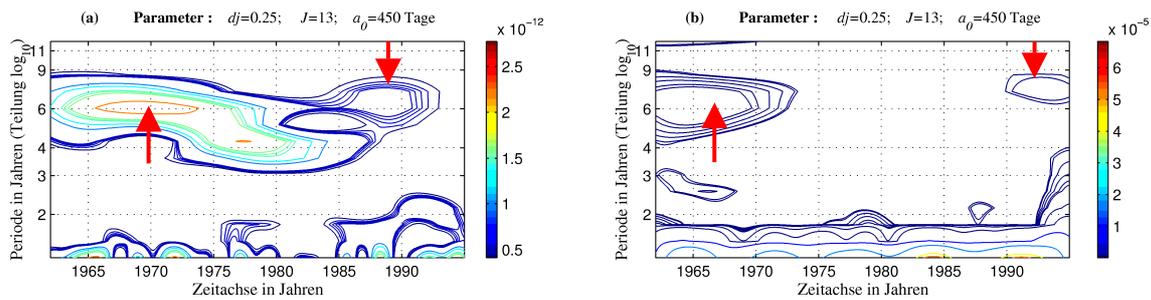


Abbildung 39: WPS der Anregung χ_1 im Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren, mit quasiperiodischen Strukturen bei 6 und 8 Jahren: (a) Antrieb durch die Zirkulation $hp\theta$ im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.

Die bereits in Abschnitt 5.5.2 analysierten Horizontalkomponenten der Massenterme ozeanischer Drehimpulse enthalten im langperiodischen Spektrum neben periodischen Jahresschwingungen auch Anteile quasiperiodischer Signale (Abb. 29b, 30b). So sind vornehmlich die atmosphärisch getriebenen Massenverlagerungen im Ozean in den Anregungskomponenten χ_1 und χ_2 für Energieanteile oberhalb der Jahresperiode verantwortlich. Die χ_2 -Anregung zeigt bei Beobachtung und $hp\theta$ -Zirkulation im Bereich von 4 Jahren aperiodische Signalanteile, jedoch mit einem um 11 Jahre zeitversetzten Auftreten (grüne Markierung). Interessant sind jedoch die zusätzlichen quasiperiodischen Variationen bei der ca. 11-jährigen Schwingungsdauer (rote Markierung). Diese Signalanteile erscheinen sowohl im Zirkulationssignal als auch in der EOP-C04-Reihe in den Randbereichen der Wavelet-Power-Spektren. Es ist nicht auszuschließen, dass es sich bei diesen Variationen um Randeffekte der CWT handelt. Beispielsweise könnte eine Analyse mit Simulations- und Beobachtungsergebnissen über das Zeitintervall 1962 – 1994 hinaus genauere und sichere Aufschlüsse bezüglich dieser Signalanteile liefern. Jedoch standen in dieser Arbeit die Daten des OMCT-Modells nur bis einschließlich 1994 zur Verfügung.

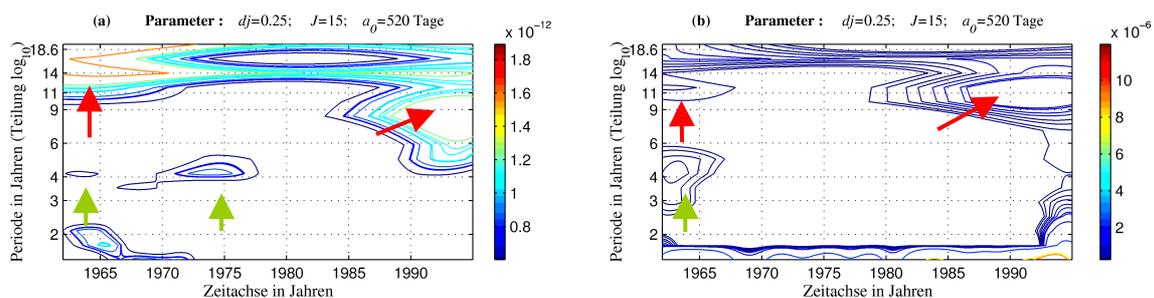


Abbildung 40: WPS der Anregung χ_2 im Skalenbereich von 520 Tagen – 19 Jahren, u.a. mit quasiperiodischen Variationen: (a) Antrieb durch die Zirkulation $hp\theta$ im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.

6 Zusammenfassung

Die Beobachtung der Erdorientierung geschieht mit den unterschiedlichsten geodätischen Raumverfahren. In jedem Falle beschreiben die Messungen stets das Ergebnis der Summe interner geophysikalischer und externer Prozesse. Nach dem Separieren der Einflüsse externer Prozesse kann man die beobachteten Polbewegungen und Rotationsschwankungen auf die geophysikalischen Prozesse zurückführen. Die Momente der Anregung entstammen hauptsächlich aus den Teilsystemen Erdkern, Hydrosphäre und Atmosphäre. Die gemessene Variation der Erdorientierung stellt nur den Gesamteffekt aller internen Prozesse dar. Mit Hilfe von Modellen versucht man beispielsweise im Falle des Ozeans physikalische Vorgänge mathematisch zu beschreiben und numerisch zu lösen. In dieser Arbeit wurden ozeanische Drehimpulszeitreihen des OMCT-Modells (Ocean Model for Circulation and Tides) untersucht, dessen Antrieb auf lunisolare Gezeiten sowie auf atmosphärischer Zirkulation beruht. Die Analyse der Drehimpulszeitreihen und der Beobachtungsergebnisse der Erdorientierung erfolgte grundsätzlich in zwei unterschiedlichen Ebenen, dem Spektralraum und dem Zeit-Periodenraum. Somit gelingt es die ozeanische Dynamik mit ihren charakteristischen Signalstrukturen näher zu beschreiben und einen Vergleich zu den Charakteristika des beobachteten Gesamteffekts aller geophysikalischen Prozesse zu ziehen. Der Umformung der zeitabhängigen Signale in die einzelnen Räume dient einerseits die schnelle Fourier-Transformation (FFT) und andererseits die kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT). Im Falle der Wavelet-Transformation werden Frequenzinformationen aus dem Signal extrahiert, deren Auftreten man zusätzlich im Zeitbereich beschreiben kann. Daneben gelingt es Frequenzmodulationen nachzuweisen und die einzelnen Modifikationen im Energiegehalt der Frequenzen zeitlich zu fixieren.

Auf Basis der Software MATLAB setzen die Module „*cwt_ml.m*“ und „*cwt_compo.m*“ auf, die zur Darstellung der Ergebnisse der CWT programmiert wurden. Im Hintergrund dieser Werkzeuge laufen die Transformationsalgorithmen ab, die durch den Anwender gesteuert werden können. Eine optimale Kalibrierung der Transformationsergebnisse in Bezug auf die Frequenzzuordnung der jeweiligen Wavelet-Funktionen ($\psi_{a,b}$) gelang mit dem Werkzeug „*cwt_compo.m*“, welches den von *Torrence and Compo* [1998] entwickelten CWT-Algorithmus anwendet. Das Abbild der untersuchten zeitabhängigen Signale entspricht hierbei einer Synthese aus Zeit- und Periodeninformation. Neben quasi-periodischen, aperiodischen und episodischen Signalanteilen konnten auch Frequenzmodulationen in ihrem zeitlichen Auftreten eingegrenzt werden. Jedoch zeichnet sich in der eingeschränkten Genauigkeit von Frequenzinformationen der Vorteil anderer Integraltransformationen (z.B. FFT) bei der Analyse periodischer Signalanteile ab. Wegen des fehlenden Zeitbezuges der Fourier-Transformation sind selbst Modulationen, die im Falle mehrerer periodischer Schwingungen auftreten, im Spektralraum nicht zu erkennen.

Der gezeiteninduzierte ozeanische Drehimpuls variiert in einer streng periodischen Form. So treten in den einzelnen Massen- und Bewegungstermen halb- und gantztägige Schwingungen mit einer Überlagerung durch die halbjährige Tide auf. Zudem wirkt sich die rückwärtige Drehung der Mondbahn als Modulationsschwingung mit der Periodendauer von 18,6 Jahren auf den ozeanischen Drehimpuls aus. Die in den Massen- und Bewegungstermen involvierten Schwingungen der 14-tägigen, halb- und ganzjährigen Tiden sind allesamt vom 18,6-Jahre-Zyklus überlagert. Mit der Wavelet-Analyse gelingt

es zudem mehrere Modulationsfrequenzen für eine bestimmte Signalperiode nachzuweisen und deren Auftreten zeitlich zu lokalisieren. Beispielsweise ist die ganztägige Periode des Relativdrehimpulses M_1^r sowohl von der halbjährigen Tide als auch von der 14-tägigen Tide überlagert.

Die in der Atmosphäre ablaufenden dynamischen Prozesse besitzen einen stochastischen Charakter. Außer den thermohalinen Antriebsmechanismen führen Windschubspannungen und der sich zeitlich ändernde Atmosphärendruck zu Reaktionen im Ozean, die als allgemeine Zirkulation bezeichnet werden. Die Variation des ozeanischen Drehimpulses ist lediglich im Tagesgang und im Jahressignal nahezu periodisch. Im Frequenzspektrum der atmosphärisch induzierten Drehimpulse des Ozeans sind keine weiteren permanenten periodischen Schwingungen signifikant. Im Gegensatz zur Signalanalyse auf der Basis der schnellen Fourier-Transformation gelingt es, mit Hilfe der CWT Informationen aperiodischer, quasiperiodischer und episodischer Signalanteile aus den atmosphärisch induzierten ozeanischen Drehimpulszeitreihen zu separieren. So zeichnen sich in den Bewegungstermen vorwiegend aperiodische und episodische Variationen ab, deren Bandbreite eine hohe Varianz um die halbjährliche Periode (± 50 Tage) aufweist. Im Unterschied dazu sind bei den Massentermen vor allem aperiodische und quasiperiodische Signalanteile im niederfrequenten Bereich oberhalb der Jahresschwingung deutlich zu erkennen. Der Atmosphärendruck bewirkt zu einem großen Teil quasiperiodische Variationen im Massenterm, die sich in der axialen Komponente mit hoher Signalenergie bei 11 Jahren befinden. Das energetische Maximum dieser ozeanischen Reaktion beschränkt sich auf das Zeitintervall von 1973 bis 1980. Parallel dazu treten aufgrund der atmosphärendruckinduzierten Zirkulation Ende der siebziger bis Mitte der achtziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts Massenverlagerungen auf, welche in der Trägheitstensorkomponente I_{33} quasiperiodische Eigenschaften mit einer Schwingungsdauer zwischen 5 und 7 Jahren aufweisen. Weiterhin veranlasst die vom Atmosphärendruck induzierte Zirkulation Variationen der Horizontalkomponenten I_{13} und I_{23} im Spektralbereich zwischen 3,5 und 10 Jahren, die mit Hilfe der kontinuierlichen Wavelet-Transformation in ihrem zeitabhängigen Auftreten lokalisiert werden konnten.

Ein Vergleich der simulierten gezeiten- und atmosphäreninduzierten Dynamik im Ozean mit den vom IERS (International Earth Rotation Service) beobachteten und publizierten Erdrotationsschwankungen findet in der Ebene der dimensionslosen χ -Funktionen statt. Die an dieser Stelle zusammengefassten Massen- und Bewegungsterme offerieren den Einfluss des Teilsystems Ozean mit dem jeweiligen gezeiteninduzierten und atmosphärisch bedingten Antrieb auf die Änderungen der Erdrotation. Im kurzperiodischen Band der Wavelet-Power-Spektren zeigen die Beobachtungsergebnisse und die ozeanischen, auf die Gravitationswirkung zurückzuführenden, Drehimpulszeitreihen Gemeinsamkeiten in der 18,6-Jahre-Modulation der 14-tägigen und der monatlichen Periode. Eine große Identität herrscht im zeitlichen Auftreten der Überlagerung von 14-tägigen Schwingungen. Die 14-tägigen und monatlichen Gezeiten werden ausschließlich in der axialen Anregungskomponente (χ_3) der Messergebnisse reflektiert. Hingegen resultieren beobachtete jahresperiodische Änderungen in χ_3 vorwiegend aus der thermohalinen, windschub- und druckgetriebenen Zirkulation (*hp0*-Zirkulation).

Im Horizontalbereich der Anregung dominieren im Falle der gemessenen Polbewegung in Tagesauflösung die Chandlersche Bewegung und die Jahresperiode. Die Fourier-Transformation ermöglicht

eine präzise Bestimmung dieser beiden periodischen Schwingungen. Dagegen vermag es die Wavelet-Transformation *nicht*, mit dem in dieser Arbeit speziell eingesetzten Morlet-Wavelet als Analysefunktion, die Jahresperiode und die Chandlersche Bewegung zu trennen. Der Hauptgrund dieser unscharfen Frequenzlokalisierung ist auf den zeitlokalen Charakter des Morlet-Wavelets mit der Oszillationszahl $k_0 = 6$ zurückzuführen. Die Genauigkeit der jeweils analysierten Schwingungsdauer steigt linear mit der betrachteten Periode an. Die in dieser Arbeit erbrachten Resultate der CWT sind mit einer Unsicherheit in der Periodeninformation von $\pm 12,5\%$ behaftet. Die Einschränkung der Frequenzlokalisierung geht zugunsten einer zeitlichen Zuordnung aller im Signal integrierten Schwingungsanteile verloren. Im Unterschied zur Fourier-Transformation können bei der CWT auch aperiodische und episodische Signalvariationen erkannt und ihrem zeitabhängigen Auftreten zugeordnet werden. Dieser Umstand gestattet beispielsweise im Horizontalbereich des Beobachtungsmaterials die, allgemein als Schwebung benannte, Überlagerung der Jahresperiode durch die Chandlersche Bewegung zu erkennen. Überdies gelingt es, die Amplituden der Schwebungsfrequenz von 6,75 Jahren im analysierten Zeitintervall zu fixieren. Im Gegensatz dazu moduliert die rückwärtige Drehung der Mondbahn im langperiodischen Spektrum der gezeiteninduzierten Simulation ausschließlich die annuelle (jährliche) und die semiannuelle Schwingung. Aufgrund der großen Resonanzentfernung zum Eigenmodus der Erde, der Chandlerschen Bewegung, schlägt sich letztgenannte Schwingung nicht in den beobachteten Parametern der Polbewegung nieder.

Im Bereich der jährlichen Periode besitzt die atmosphärisch bedingte Dynamik im Ozean ein deutlich höheres Gewicht im Vergleich zum ozeanischen, auf Gravitationswirkung basierenden, Drehimpuls. Die wavelet-transformierten χ -Funktionen weisen bei den Jahresschwingungen Signalenergien auf, die sich von denen der ozeanischen Gezeitenwirkung um bis zu drei Größenordnungen unterscheiden. Die energetische Konstellation in der Zeit-Perioden-Ebene der Signale führt zu dem Schluss, dass atmosphärisch induzierte ozeanische Drehimpulse weit stärker zur annuellen Variation der Erdorientierung beitragen als die gezeiteninduzierten Drehimpulse. Ferner wurden eine Reihe an quasiperiodischen und aperiodischen Signalinformationen im Anregungsbereich der Beobachtungsdaten oberhalb der Jahresschwingung extrahiert. Ein Teil dieser Schwingungen lässt sich auf die Zirkulation (*hp0*) zurückführen. Die Ergebnisse der CWT zeigen speziell für die χ_1 -Komponente eine hohe Übereinstimmung von Simulation (*hp0*) und Beobachtung in Form zweier quasiperiodischer Signalanteile. Die Schwingungsdauer beläuft sich auf 6 und 8 Jahre, wobei die maximalen Energien dieser Quasiperioden einerseits um die Jahre 1968 und 1990 auftreten. Hingegen erscheinen in den Randbereichen der χ_2 -Wavelet-Power-Spektren (Untersuchungsintervall von 1962 – 1994) signifikante quasiperiodische Strukturen bei 11 Jahren. Obwohl diese Signalstrukturen in den Beobachtungsdaten und in der Simulation *hp0* gleichermaßen auftauchen, wird dem CWT-Ergebnis für die χ_2 -Komponente etwas geringere Bedeutung beigemessen. So können bei der Wavelet-Transformation niederfrequenter Signalanteile Randeffekte entstehen, die unter Umständen zu Fehlinterpretationen der Ergebnisse führen. Die angesprochenen quasiperiodischen Variationen der χ_2 -Anregung treten jedoch auch außerhalb der Randbereiche des Untersuchungsintervalls auf. In fortführenden Arbeiten bietet sich deshalb die Möglichkeit Schwingungsanteile mit niedrigerer Frequenz in den Beobachtungs- und Modelldaten zu untersuchen und eventuell auftretende Randeffekte abzuspalten.

Die Resultate der kontinuierlichen Wavelet-Transformation stellen einen Informationsgewinn bei der Analyse ozeanischer Drehimpulszeitreihen dar. Hinsichtlich der OMCT-Simulationen konnten die Signalstrukturen ozeanischer Drehimpulse im Zeit-Perioden-Raum analysiert und mit den beobachteten Variationen der Erdorientierung verglichen werden. Die turbulente Atmosphäre bewirkt ozeanische Drehimpulse, welche sich nur im Tages- und im Jahresgang nahezu periodisch verhalten. Zusätzliche Informationen und Gemeinsamkeiten zwischen atmosphärischer Zirkulation und Beobachtungsergebnissen konnten vor allem mit der CWT im Falle quasiperiodischer und aperiodischer Signalanteile oberhalb der Jahresperiode analysiert werden.

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Abbildungen

- Abbildung 1: **(a)** Ein Vergleich der Basisfunktionen Morlet-Wavelet (zeitlokal begrenzt) und Kosinus im Zeitbereich. **(b)** Das Ergebnis der Spektralanalyse beider Basisfunktionen (FFT). Für die Kosinusfunktion existiert bei einer Schwingung von $-\infty$ bis $+\infty$ nur eine diskrete charakteristische Frequenz (frequenzlokalisiert), hingegen erkennt man beim Morlet-Wavelet ein breites Frequenzband (weniger gut lokalisiert im Frequenzbereich). 14
- Abbildung 2: Abtasten des Signals $f(t)$ mit unterschiedlich skalierten Wavelets $\psi(t/a)$. **(a)** Zur Analyse hochfrequenter Signalanteile nutzt man gestauchte Wavelets. **(b)** Bei Dehnung des Wavelets erkennt man Signalanteile im mittleren Frequenzbereich. **(c)** Zum Detektieren niederfrequenter Schwingungen muss das Wavelet stärker gedehnt werden. 15
- Abbildung 3: Verschiebung des Wavelets mit konstanter Skalierung a entlang des Signals $f(t)$ im Zeitbereich um den Parameter b . An den Zeitpunkten b wird das Signal auf „Ähnlichkeit“ in der Form zum entsprechend skalierten Wavelet (=Wavelet-Funktion) geprüft. 16
- Abbildung 4: **(a)** Zeitdiskretisiertes Musiksignal bestehend aus den Tönen e^1 und e^2 . **(b)** Fourier-Analyse des Musiksignals mit charakteristischen Frequenzbildern um 330 und 660 Hertz und sowie Oberschwingungen, die zunächst keinem Ton zugeordnet werden können. 19
- Abbildung 5: Das Ergebnis der CWT des Musiksignals dargestellt im Wavelet-Power-Spektrum. Als Analysefunktion wurde das Morlet-Wavelet gewählt. 19
- Abbildung 6: **(a)** Die Haar-Skalierungsfunktion $\varphi(t)$, die auch der Daubechies-Skalierungsfunktion 1. Ordnung entspricht und **(b)** das Haar-Wavelet $\psi(t)$, welches dem Daubechies-Wavelet 1. Ordnung gleicht. 20
- Abbildung 7: Die Zerlegung des Signals $f(t)$ in unterschiedliche Frequenzbänder H_k mit Hilfe der Skalierungsfunktion φ (Tiefpassfilter) und des Wavelets ψ (Hochpassfilter). 21
- Abbildung 8: Gegenüberstellung ausgewählter Wavelets und zugehöriger Skalierungsfunktionen: **(a)** asymmetrisches orthogonales Daubechies (2)-Wavelet mit endlichem Träger und $AvM=2$; **(b)** Daubechies (3)-Wavelet mit höherer Regularität im Vergleich zu (a) und $AvM=3$; **(c)** Symlet als ein orthogonales, fast symmetrisches Wavelet mit endlichem Träger und $AvM=4$; **(d)** Symmetrisches Morlet-Wavelet mit unendlicher Regularität. Eine orthogonale Wavelet-Analyse ist nicht möglich, eine Skalierungsfunktion existiert nicht und der Träger ist nicht kompakt (schwingt unendlich lang um die Abszisse). 23
- Abbildung 9: **(a)** Die Polbewegung des CEP X_{Pol} und Y_{Pol} relativ zum erdfesten CIO-Pol aus der Zeitreihe EOP-C04 des IERS im Zeitintervall 01.01.1973 – 31.12.1994. **(b)** Die Ergebnisse der Fourier-Analyse der Polbewegung. 27
- Abbildung 10: Die Genauigkeit der Ergebnisse einer CWT mit dem Morlet-Wavelet als Analysefunktion **(a)** ausgedrückt mit Hilfe eines Zeit-Perioden-Fensters oder eines **(b)** Zeit-Frequenz-Fenster (nicht maßstäblich). Sinngemäß nach *Schmidt und Schuh* [1999]. 43

- Abbildung 11: **(a)** Ergebnis der Fourier-Analyse (FFT) des zeiteninduzierten Relativdrehimpulses des Ozeans M_1^r mit täglicher Auflösung im Zeitintervall 1962 – 1972. **(b)** Wavelet-Power-Spektrum des Signals M_1^r erzeugt mit der Funktion „*cwt_compo.m*“ und Anstiegsparameter $dj=0,25$. 44
- Abbildung 12: **(a)** Testdatensatz im Original und *least-square* gefiltertes Signal im Zeitintervall von 1962 – 1971 (Filterung der fünf Maximalperioden im Bereich 9 und 14 Tage). **(b)** Inhaltlich wie (a) jedoch mit 10 selektierten Perioden. **(c)** Spektralanalyse des gefilterten Signals von (a). **(d)** Spektralanalyse des gefilterten Signals von (b). 45
- Abbildung 13: Varianzabhängige Energieebenen $E_{\pm}(a_j)$ (rot) für die ersten drei berechneten Skalen a_j des Testsignals und der Energiemittelwert MW_j (blau) im Zeitraum von 500 Tagen. 47
- Abbildung 14: **(a)** Varianzabhängige Isoliniendarstellung der CWT-Koeffizienten des Testsignals im Zeitraum von 500 Tagen. Energieanteil in der jeweiligen Skale a_j in Abhängigkeit der Zeit: **(b)** a_2 ; **(c)** a_1 ; **(d)** a_0 . 47
- Abbildung 15: **(a)** Wavelet-Power-Spektrum des ozeanischen Relativdrehimpulses M_1^r mit täglicher Auflösung im Zeitintervall 1962 – 1972 mit varianzabhängiger Isoliniendarstellung (Anstiegsparameter $dj=0,08$). **(b)** Inhalt der Abbildung wie (a) jedoch mit dem Anstiegsparameter $dj=0,25$. Im Vergleich zu Abbildung 11b sind hier die monatlichen und halbjährlichen Perioden deutlich zu erkennen. 48
- Abbildung 16: **(a)** Randeffekte im langperiodischen Bereich bei Untersuchung des Testsignals mit der Original-MATLAB-CWT. **(b)** Ein Beschneiden der Ränder aus (a) mit der Funktion „*cwt_ml.m*“. In der Jahresperiode sind energetische Variationen besser zu erkennen. 49
- Abbildung 17: Fourier-Spektren der Trägheitstensorcomponenten (grün) und Relativdrehimpulse mit einstündiger Auflösung des zugrunde liegenden Zeitsignals des Jahres 1994: **(a)** I_{13} und M_1^r (blau); **(b)** I_{23} und M_2^r (violett); **(c)** I_{33} und M_3^r (rot). 51
- Abbildung 18: **(a)** Wavelet-Power-Spektrum von M_1^r mit den Skalen zwischen 9 und 36 Stunden für das Jahr 1994. **(b)** Wavelet-Power-Spektrum von M_1^r mit den Skalen zwischen 8 und 15 Tagen im Zeitintervall 1993 – 1994. 52
- Abbildung 19: Fourier-Spektren der Trägheitstensorcomponenten (grün) und Relativdrehimpulse mit eintägiger Auflösung des Zeitsignals im Intervall von 1962 – 1994: **(a)** I_{13} und M_1^r (blau); **(b)** I_{23} und M_2^r (violett); **(c)** I_{33} und M_3^r (rot). 53
- Abbildung 20: Zeitreihen über das Jahr 1994 in unterschiedlichen zeitlichen Auflösungen durch eine Datenreduktion über arithmetisches Mittelbildung: **(a)** Originaldaten in stündlicher Auflösung. **(b)** Gemittelte Daten in Tagesauflösung (Dämpfung der Amplituden um mehr als eine Größenordnung gegenüber des Originals). **(c)** Gemittelte Daten in 4-Tages-Auflösung (Dämpfung der Amplituden um mehr als eine Größenordnung gegenüber des Originals). 54
- Abbildung 21: Fourier-Spektren der Zeitreihen aus Abbildung 20 über den Zeitraum 1962 – 1994, Reduktion der zeitabhängigen Signale über arithmetischen Mittelalgorithmus: **(a)** Originaldaten mit Stundenauflösung; **(b)** auf Tageslösung reduziert; **(c)** 4-Tages-Lösung. 54
- Abbildung 22: Wavelet-Power-Spektrum von M_1^r im Zeitintervall 1962 – 1994 **(a)** mit den Skalen zwischen 10 und 40 Tagen. **(b)** Inhaltlich wie (a) jedoch mit den Skalen zwischen 130 und 205 Tagen. 55

Abbildung 23:	(a) WPS von M_1^r mit den Skalen zwischen 290 Tagen und 440 Tagen. (b) Inhaltlich wie (a) jedoch mit den Skalen zwischen 14,5 und 19,0 Jahren.	56
Abbildung 24:	(a) WPS von M_1^r mit eingeschränktem Untersuchungszeitraum von 1965 bis 1991 mit den Skalen zwischen 290 und 440 Tagen. (b) Inhaltlich wie (a) jedoch mit den Skalen zwischen 14,5 und 19,0 Jahren.	57
Abbildung 25:	Quotient Q_{S_3} der Energiespektren aus der Trägheitstensor- und der Relativdrehimpulskomponente im Zeitintervall 1962 – 1994.	57
Abbildung 26:	Vergleich der Fourier-Spektren der relativen Drehimpulse mit den Trägheitstensoranteilen (grün) des Ozeans im Zeitintervall 1962 - 1994 ($hp0$ -Antrieb = thermohaline, wind- und atmosphärendruckgetriebene Zirkulation): (a) M_1^r und I_{13} ; (b) M_2^r und I_{23} ; (c) M_3^r und I_{33} .	59
Abbildung 27:	WPS des Relativdrehimpulses M_1^r des Ozeans aus thermohaliner, windgetriebener und druckgetriebener Zirkulation ($hp0$): (a) mit den Skalen von 10 – 80 Tagen. (b) Inhaltlich wie (a) jedoch mit den Skalen zwischen 120 und 420 Tagen.	60
Abbildung 28:	WPS des Relativdrehimpulses M_1^r des Ozeans aus thermohaliner, windgetriebener und druckgetriebener Zirkulation ($hp0$): (a) mit den Skalen von 1,0 bis 4,7 Jahren; (b) mit den Skalen zwischen 8,5 und 20,0 Jahren.	61
Abbildung 29:	WPS des Differenzsignals der Trägheitstensoranteile I_{13} aus den Zirkulationen $hp0$ und hpe : (a) im Skalenbereich von 115 – 447 Tagen; (b) Inhaltlich wie (a) mit einem Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren.	62
Abbildung 30:	WPS des Differenzsignals der Trägheitstensoranteile I_{23} aus den Zirkulationen $hp0$ und hpe : (a) im Skalenbereich von 115 – 447 Tagen; (b) im Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren.	62
Abbildung 31:	WPS des Differenzsignals der Trägheitstensoranteile I_{33} aus den Zirkulationen $hp0$ und hpe : (a) im Skalenbereich von 115 – 447 Tagen; (b) im Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren.	63
Abbildung 32:	Spektralanalyse der Beobachtungsdaten des IERS (grün) und der gezeiteninduzierten ozeanischen Drehimpulse (Massen- und Bewegungsterm) im Zeitintervall 1962 - 1994: (a) χ_1 ; (b) χ_2 ; (c) χ_3 .	64
Abbildung 33:	Nachweis der halbjährlichen Modulation der 14-tägigen Tide mit den Stundenlösungen des OMCT-Modells im Zeitintervall 1993 – 1994: (a) für den Massenterm $\Omega \cdot I_{33}$ (b) und den Bewegungsterm M_3^r .	66
Abbildung 34:	WPS der axialen Anregung χ_3 im Skalenbereich von 9 – 37 Tagen (a) der ozeanischen Gezeiten im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.	66
Abbildung 35:	WPS der axialen Anregung χ_3 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen (a) der ozeanischen Gezeiten im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.	67
Abbildung 36:	WPS der horizontalen Anregung χ_1 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen (a) der ozeanischen Gezeiten im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.	68
Abbildung 37:	WPS der Anregung χ_3 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen: (a) Antrieb durch die Zirkulation $hp0$ im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS. Teilweise gleichen hier die Phasen der Modulation annualer Signale denen der Zirkulation (rot).	68
Abbildung 38:	WPS der Anregung χ_1 im Skalenbereich von 140 – 490 Tagen: (a) Antrieb durch die Zirkulation $hp0$ im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der	

	Langzeitreihe EOP-C04 des IERS. Teilweise gleichen hier die Phasen der Modulation annueller Signale denen der Zirkulation (rot).	69
Abbildung 39:	WPS der Anregung χ_1 im Skalenbereich von 450 Tagen – 12 Jahren, mit quasiperiodischen Strukturen bei 6 und 8 Jahren: (a) Antrieb durch die Zirkulation $hp\theta$ im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.	70
Abbildung 40:	WPS der Anregung χ_2 im Skalenbereich von 520 Tagen – 19 Jahren, u.a. mit quasiperiodischen Variationen: (a) Antrieb durch die Zirkulation $hp\theta$ im Vergleich zu den (b) Beobachtungsdaten der Langzeitreihe EOP-C04 des IERS.	70

Tabellen

Tabelle 1:	Unterschiede der zur Visualisierung der Wavelet-Koeffizienten programmierten MATLAB-Funktionen.	41
------------	---	----

Quellenverzeichnis

- Arfa-Kaboodvand, K. und E. Groten, *Einsatz des Wavelet-Transforms zur Untersuchung der kurzperiodischen Variation der Polbewegung*, ZfV S. 259 - 265, 1998
- Barnes, R.T.H., R. Hide, A.A. White, C.A. Wilson, *Atmospheric angular momentum fluctuations length of daychanges and polar motion*, Proc. R. Soc. London Ser. A, 387 S. 31-69, 1983
- Bartsch, H.-J., *Taschenbuch mathematischer Formeln*, Fachbuchverlag Leipzig, 1997
- Beyer, G. und S. Meier, Geländeneigung und -wölbung aus Waveletkoeffizienten. Approximation für Profile, ZfV S. 23 - 33, 2001
- Blatter, C., *Wavelets - eine Einführung*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, Monographie, 1998
- Brosche, P. und H. Schuh, *Neue Entwicklungen in der Astronomie und ihre Bedeutung für die Geodäsie*, ZfV S. 343 - 349, 1999
- Chatfield, C., *The Analyse of Time Series: An Introduction*, 2nd ed. Chapman and Hall, London-New York, 1980
- Dietrich, G., K. Kalle, W. Krauss, G. Siedler, *Allgemeine Meereskunde: "Eine Einführung in die Ozeanographie"*, Verlag Gebrüder Borntraeger Berlin-Stuttgart, 1975
- Esser, C., *Wavelet-Transformation von Standbildern*, Universität Mannheim, Stand: 05.01.2002, Online im Internet: <http://www-mm.informatik.uni-mannheim.de/-veranstaltungen/animation/-multimedia/-wavelet/documentation/-WaveletDemo.pdf>, 2001
- Gross, R.S., *Correspondence between theory and observations of polar motion*, Geophys. J. Int., 109, 162-170, 1992
- Große-Erdmann, K.-G., *Wavelets, Grundzüge der Signaltheorie*, Fern-Universität Hagen - Vorlesungsskript, 2002
- Hanselmann, D.C., *Mastering Matlab 5*, Prentice Hall Upper Saddle River, New Jersey, 1998
- Hering, T.A., *Geophysical Applications of Earth Rotation Measurements*, IVS 2000 General Meeting Proceedings, Stand:13.04.2002, Online im Internet: http://ieec.fcr.es/hosted/-15wmevga/proceedings/ivs_wg2/ivs_wg2.html, 2000
- Hoffmann, J., *MATLAB und Simulink*, Addison Wesley Longmann Verlag GmbH Bonn, 1998
- Höpfner, J., *Atmosphärische und nicht-atmosphärische Erregung der saisonalen Erdrotationsschwankungen*, AVN S. 65 - 74, 1995
- Höpfner, J., *Periodische Anteile in der Erdrotation und dem atmosphärischen Drehimpuls und ihre Genauigkeiten*, ZfV S. 8 - 16, 1995
- Höpfner, J., *Saisonale atmosphärische und nicht-atmosphärische Polbewegungsanteile*, ZfV S. 502 - 508, 1995
- Höpfner, J., *Zur saisonalen Erregung der Polbewegung*, ZfV S. 119 - 133, 1995

- Höpfner, J., *Interannual variations in length of day and atmospheric angular momentum with respect to ENSO cycles*, ZfV S. 39 - 49, 2001
- Hubbard, B.B., *Wavelets - Die Mathematik der kleinen Wellen*, aus dem Amerikanischen von M. Basler, Birkhäuser-Verlag Boston - Berlin, 1997
- Keller, W., *Kontinuierliche Wavelet Transformation*, ZfV S. 563 - 572, 1996
- Keller, W., *Anwendung von Wavelets in der Verarbeitung geowissenschaftlicher Daten*, ZfV S. 335 - 339, 1997
- Keller, W., *Schnelle Algorithmen zur diskreten Wavelet Transformation*, ZfV S. 126 -136, 1997
- Klüngel, T. und U. Schreiber, *Lokale Einflüsse auf inertielle Erdrotationssensoren*, Vorträge beim 4. DFG-Rundgespräch im Rahmen des Forschungsvorhabens 'Rotation der Erde' zum Thema 'Wechselwirkungen im System Erde', Höllenstein - Wetzell, 2001
- Louis, A.K., P. Maass, A. Rieder, *Wavelets: Theorie und Anwendungen*, Verlag Teubner Stuttgart, 1994
- Melchior, P., *The Tides Of The Planet Earth*, Pergamon Press Frankfurt, 1983
- Misiti, M., Y. Misiti, G. Oppenheim, J.-M. Poggi, *Wavelet Toolbox - User Guide*, The Mathsoft, Inc., Stand: 26.06.2002, Online im Internet: <http://www.mathworks.com>, 2001
- Mohr, R., *Numerische Methoden in der Technik*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH Braunschweig - Wiesbaden, 1998
- Montag, H., *Zur Definition und Überwachung der Parameter des Internationalen Terrestrischen Referenzsystems ITRF mit besonderer Berücksichtigung der Variation des Geozentrums*, ZfV S. 215 - 221, 1998
- Moritz, H. and I.I. Mueller, *Earth rotation*, The Ungar Publishing Company New York, 1987
- Munk, W.H. and G.J.F. MacDonald, *The Rotation of the Earth*, Cambridge University Press New York, 1960
- Pertz, O., *Anwendung von waveletbasierten Verfahren bei der Simulation von Millimeter- und Mikrometerwellenschaltungen mit der Methode der Geraden*, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Dissertation, Stand: 21.01.2002, Online im Internet: <http://www.ub.uni-duisburg.de/ETD-db/theses/submitted/duett-07042001-111656/unrestricted/index.html>, 2001
- Polzer, G., *Analyse von Erdzeitenbeobachtungen zur Bestimmung der Parameter der Erdkernresonanz*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1997
- Schmidt, M. und H. Schuh, *Wavelet-Analyse der mit VLBI beobachteten Nutationsreihen*, ZfV S. 24 - 29, 1999
- Schmidt, M., *Wavelet-Analyse von Erdrotationsschwankungen*, ZfV S. 94 -100, 2001
- Schmitz-Hübsch, H. und R. Dill, *Atmosphärische, ozeanische und hydrologische Einflüsse auf die Erdrotation*, ZfV S. 275 - 283, 2001
- Schödlbauer, A., *Geodätische Astronomie*, Verlag Walter de Gruyter Berlin, 2000
- Schubert, K.R., *Experimentalphysik III - Wellen und Quanten*, Technische Universität Dresden - Vorlesungsskript, 2001

- Semtner, A.J. and R.M. Chervin, *Ocean general circulation from a global eddy-resolving model (POCM)*, J. Geophys. Res., 97, 5493 - 5550, 1992
- Thomas, M., *Ozeanisch induzierte Erdrotationsschwankungen*, Universität Hamburg, Dissertation, 2002
- Torrence, C. and G.P. Compo, *A Practical Guide to Wavelet Analysis*, Bulletin of the Amer. Meteorol. Soc. Vol.79, Stand: 08.01.2002, Online im Internet: <http://paos.colorado.edu/research/wavelets/>, 1998
- Vicente, R.O. and C.R. Wilson, *On long-period polar motion*, Journal of Geodesy, S. 199 - 208, 2002
- Vogel, H., *Gerthsen Physik*, Springer-Verlag Berlin, 1995
- Wahr, J.M., *The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble*, Geophys. J. R. astr. Soc, 1982
- Wahr, J.M., *The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble and on the seasonal variations in the length of day - II Results*, Geophys. J. R. astr. Soc, 1983
- Wenzel, H.-G., *Zum Stand der Erdzeitenanalyse*, ZfV S. 242 - 254, 1996
- Wilson, C.R. and R.O. Vicente, *An analysis of the homogeneous ILS polar motion series*, Geophys. J. R. astr. Soc, 1980
- Zebhauser, B., *Realisierungen von Bezugssystemen*, Technische Universität München, Stand: 05.09.2002, Online im Internet: http://step.iapg.verm.tu-muenchen.de/users/-bene/bezug_txt.PDF, 2001
- Zhou, Y.H., D.W. Zheng, X.H. Liao, *Wavelet analysis of interannual LOD, AAM, and ENSO: 1997-1998 El Nino and 1998-1999 La Nina signals*, Journal of Geodesy, S. 164 - 168, 2001

Quellennachweis „Internet“ ohne Autorenangabe

- IERS, *Constants*, Stand:15.06.2002, Online im Internet: <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/models/constants.html>, 2002
- IERS, *Earth Rotations Parameters*, Stand:04.08.2002, Online im Internet: <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/>, 2002
- Goldammer, *Zeitdiskrete, digitale Filter und schnelle Fourier-Transformation*, Stand: 03.06.2002, Online im Internet: http://www.goldammer.de/deutsch/info/produktlei-stungen/digitale_Filter.htm, ohne Datum
- Geo-Uni-Jena, *Spektralanalyse von Zeitreihen*, Stand:20.06.2002, Online im Internet: http://www.geo.uni-jena.de/geophysik/gw_thur/kapitel4.htm, ohne Datum
- DGFI, *Einfluß von Massenverlagerungen auf die Erdrotation, Polbewegung (polar motion) und Tageslängenvariation (LOD)*, Stand:22.04.2002, Online im Internet: <http://dgfi2.dgfi.badw-muenchen.de>, ohne Datum

IFAG, *VLBI - Ein Messsystem für präzise geodätische Messungen*, Stand:06.03.2002, Online im Internet: <http://www.wetzell.ifag.de>, ohne Datum

persönliche Mitteilung

Maass, P., Betreff: *Frage nach der Skalierung bei Wavelets*, Online im Internet: e-mail von Prof. Dr. rer. nat. Peter Maass <pmaass@math.uni-bremen.de>, 08.04.02

Anhang

Der Anhang in Form der erstellten Programmmodule und der Analyseergebnisse kann auf Anfrage beim Autor zugesandt werden. Aus Kapazitätsgründen wurde auf die Beilage des Anhangs (CD-ROM) verzichtet.

Programmmodule: „m-Files“

- *cwt_compo.m*: Diese Funktion nutzt das bereits vorgefertigte Werkzeug „*wlet.m*“ zur Berechnung der kontinuierliche Wavelet-Transformation. Die Ergebnisse werden in graphischer Form dargestellt. Kalibriert ist „*cwt_compo.m*“ bei dem Einsatz des Morlet-Mutter-Wavelets mit $k_0 = 6$.
- *cwt_compo2.m*: Dieses Werkzeug entspricht „*cwt_compo.m*“, wobei hier Analysen mit zwei vollkommen verschiedenen Datensätzen parallel möglich sind. Alle Skalierungsparameter können unabhängig voneinander eingestellt werden.
- *cwt_ml.m*: Die CWT mit dieser Funktion setzt die Installation der MATLAB-Toolbox voraus und greift auf den Algorithmus von „*cwt.m*“ zurück.
- *cyanka.m* : Berechnung und Darstellung des Powerspektrums eines zeitdiskreten Signales.
- *wave_bases.m*: Softwaremodul von *Torrence. and Compo* [1998], welches Wavelet-Funktionen berechnet. Dieses Modul wird automatisch von „*wlet.m*“ bzw. „*cwt_compo.m*“ aufgerufen.
- *wlet.m*: Softwaremodul von *Torrence. and Compo* [1998], welches die CWT berechnet. Dieses Modul wird automatisch von „*cwt_compo.m*“ aufgerufen.

Ergebnisse der Analyse ozeanischer Drehimpulszeitreihen und Beobachtungsdaten des IERS:

- *tid*: Ozeanische Dynamik aufgrund von Gravitationseinwirkung.
- *hpe*: Ozeanische Dynamik aufgrund der atmosphärischer Einflüsse (thermohalin, Windschub).
- *hp0*: Ozeanische Dynamik aufgrund der atmosphärischer Einflüsse (thermohalin, Windschub, Atmosphärendruck).
- *eop*: Langzeitreihe EOP-C04 des IERS, welche die beobachtete Variation der Erdorientierung beschreibt (hier: in der Ebene der χ -Funktionen).

- *vgl_hpe_hp0*: Vergleich der sich durch den Atmosphärendruck unterscheidenden Zirkulationen *hpe* und *hp0*.
- *vgl_tid_eop*: Vergleich der Anregungsfunktionen (χ) zwischen der gezeiteninduzierten ozeanischen Dynamik und den Beobachtungen des IERS.
- *vgl_hp0_eop*: Vergleich der Anregungsfunktionen (χ) zwischen der *hp0*-Zirkulation und den Beobachtungen des IERS.

Die Ergebnisse der Analysen stehen im Dateiformat *.gif bereit. Die Bezeichnung der einzelnen Files setzt sich aus Buchstaben- und Zahlenkombinationen zusammen, die Aufschluss über den Inhalt der Datei geben. Im folgenden sind diese Abkürzungen erläutert.

01	Datenauflösung von einer Stunde im Zeitbereich
24	Datenauflösung von einem Tag im Zeitbereich
chi	Anregungsfunktion
cwt	Wavelet-Power-Spektrum (Art der Analyse → CWT)
diff	Differenzsignal zwischen der Zirkulation <i>hp0</i> und <i>hpe</i>
double	FFT unterschiedlicher Signale
eop	Signal auf der Grundlage der EOP-C04-Reihe des IERS
fft	Spektralanalyse (Art der Analyse → FFT)
hpe	Signal auf der Grundlage der Zirkulation <i>hpe</i>
hp0	Signal auf der Grundlage der Zirkulation <i>hp0</i>
I	Analyse von Trägheitstensorkomponenten
Mr	Analyse von Relativedrehimpulsen
Qs	spektraler Energiequotient
tid	Signal auf der Grundlage der Gezeiten
vgl	Vergleich, nur bei WPS mit unterschiedlichen Daten