

GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Jan M. Hagedoorn

Glaziale Isostasie und rezente Meeresspiegeländerung

Scientific Technical Report STR05/13

Imprint

GeoForschungsZentrum Potsdam
Member of the Helmholtz-Association
Telegrafenberg
D-14473 Potsdam

e-mail: postmaster@gfz-potsdam.de
www: <http://www.gfz-potsdam.de>

Printed in Potsdam, Germany
September 2005

ISSN 1610-0956

This text is available in electronic form:
<http://www.gfz-potsdam.de/bib/zbstr.htm>

Glaziale Isostasie und rezente Meeresspiegeländerung

Von der Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Jan M. Hagedoorn
aus Wanne-Eickel

Hauptberichter: Prof. Dr. habil. Detlef Wolf
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. tech. h. c. mult.
Dr.-Ing. E. h. mult. Erik W. Grafarend
Prof. Dr.-Ing. habil. Bernhard Heck
Tag der mündlichen Prüfung: 21.07.2005

Geodätisches Institut der Universität Stuttgart

Jan M. Hagedoorn

Glaziale Isostasie und rezente Meeresspiegeländerung

Scientific Technical Report STR05/13

Im Anfang schuf Gott den Himmel und die Erde.

Die Erde aber war Irrsal und Wirrsal.

Finsternis über Urwirbels Antlitz.

Braus Gottes schwingend über dem Antlitz der Wasser.

Gott sprach: Licht werde! Licht ward.

Gott sah das Licht: daß es gut ist.

Gott schied zwischen dem Licht und der Finsternis.

Gott rief dem Licht: Tag! und der Finsternis rief er: Nacht!

Abend ward und Morgen ward: Ein Tag.

Gott sprach:

Gewölb werde inmitten der Wasser

und sei Scheide von Wasser und Wasser!

Gott machte das Gewölb

und schied zwischen dem Wasser das unterhalb des Gewölbs war

und dem Wasser das oberhalb des Gewölbs war.

Es ward so.

Dem Gewölb rief Gott: Himmel!

Abend ward und Morgen ward: zweiter Tag.

Gott sprach:

Das Wasser unterm Himmel stau sich an einem Ort,

und das Trockene lass sich sehn!

Es ward so.

Dem Trockenen rief Gott: Erde! und der Stauung der Wasser rief er Meere!

Gott sah, daß es gut ist.

Genesis 1, 1–10 (Übersetzung von Buber & Rosenzweig, 1976)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	vii
Zusammenfassung	ix
Summary	xi
1 Einleitung	1
1.1 Beobachtung der Meeresspiegeländerung	1
1.2 Historischer Rückblick	3
1.3 Modellbildung	8
2 Theorie	9
2.1 Komponenten des Modells	9
2.2 Viskoelastische Relaxation einer sphärischen Erde	10
2.2.1 Einleitung	10
2.2.2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	10
2.2.3 Differenzenschema für Maxwell-Viskoelastizität	13
2.2.4 Schwache Formulierung des Randwertproblems	14
2.2.5 Repräsentation durch Kugelflächenfunktionen	17
2.2.6 Repräsentation durch finite Elemente	19
2.2.7 Berechnung der dissipativen Energie	21
2.2.8 Spektrale Finite-Elemente-Repräsentation	26
2.3 Meeresspiegelgleichung	26
2.3.1 Einleitung	26
2.3.2 Meeresspiegelgleichung im Raum- und Spektralbereich	26
2.3.3 Ozeanrepräsentationen	28
2.4 Postglaziale Variation der Erdrotation	32
2.4.1 Einleitung	32
2.4.2 Trägheitstensor im Referenzzustand	32
2.4.3 Inkrementieller Trägheitstensor	34
2.4.4 Linearisierte Liouville-Gleichung	35
2.4.5 Lokales Inkrement der Dichte	37
2.4.6 Alternative Beschreibung	39
2.4.7 Lokales Inkrement des Gravitationspotentials	40
2.4.8 MacCullagh-Formel	41
2.4.9 Zentrifugalpotential	43
2.4.10 Sphärische Approximation	44
2.5 Kopplung der Komponenten	46
2.5.1 Einleitung	46
2.5.2 Differenzenschema und Meeresspiegelgleichung	47
2.5.3 Differenzenschema und Variation der Erdrotation	48

3	Eingabemodelle	49
3.1	Erdmodelle	49
3.1.1	Elastische Parameter	49
3.1.2	Viskositätsmodell VM1	50
3.1.3	Viskositätsmodell VMA	50
3.1.4	Viskositätsmodell VMF	51
3.1.5	Viskositätsmodell VMI	51
3.2	Eismodelle	51
3.2.1	Eismodell ICE-3G-M	53
3.2.2	Eismodell SCAN	55
3.2.3	Eismodell NAWI	57
4	Implementierung	59
4.1	Viskoelastische Relaxation	59
4.2	Meeresspiegelgleichung	62
4.3	Variation der Erdrotation	62
4.4	Sensitivitätsuntersuchungen	65
4.4.1	Räumliche und zeitliche Auflösung bei der VR	65
4.4.2	Ozeanrepräsentationen in der MSG	69
4.4.3	Alternative Beschreibung des Trägheitstensors in der RT	74
4.4.4	Einfluß der rotationsbedingten Deformation in der RT	75
5	Bewertung der Eingabemodelle	78
5.1	Konzept der Bewertung	78
5.2	Beobachtungsdaten	80
5.3	Quantitative Bewertung	81
5.3.1	Qualitätsfunktionen	82
5.3.2	Ergebnisse der Bewertung	84
6	Pegeldaten	87
6.1	Pegelstationen und Datenreihen	87
6.2	Berücksichtigte Pegelstationen	89
6.3	Bearbeitung der Pegeldaten	90
6.4	Einteilung der Pegelstationen in Regionen	108
7	Reduzierte Pegeldaten	111
7.1	Reduzierte lineare Trends der Pegeldaten	111
7.1.1	Reduzierte Pegeldaten der Region R1	113
7.1.2	Reduzierte Pegeldaten der Region R2	116
7.1.3	Reduzierte Pegeldaten der Region R3	120
7.1.4	Reduzierte Pegeldaten der Region R4	122
7.1.5	Reduzierte Pegeldaten der Region R5	122
7.1.6	Reduzierte Pegeldaten für einheitliches Zeitintervall	124
7.2	Globaler mittlerer Meeresspiegelanstieg	126
7.3	Abschließende Bewertung	132
7.4	Weiterentwicklung	134
	Literaturverzeichnis	137
A	Ergänzungen zu Kapitel 2	147
A.1	Euler- und Lagrange-Formulierung, lokale und materielle Inkremente	147

A.2	Definition der Kugelflächenfunktionen	148
A.3	Integrale der finiten Elemente	150
A.4	Dyadische Komponenten der Tensoren a , b und c	152
A.5	Repräsentation des Trägheitstensors durch Kugelflächenfunktionen	153
A.6	Repräsentation des relativen Drehimpulses durch Kugelflächenfunktionen	154
B	Ergänzungen zu Kapitel 3	156
B.1	Polynome der Parameter von PREM	156
B.2	Ergänzende Angaben zu Eismodell ICE-3G-M	157
C	Ergänzungen zu Kapitel 4	158
C.1	Berechnung von $C^{(1)\text{in}}$ und $C_{33}^{(1)\text{in}}$	158
C.2	Integration der Liouville-Gleichung	159
D	Ergänzungen zu Kapitel 6	161
D.1	Angaben zu den Pegelstationen	161
D.2	LTA-Diagramme der ausgewählten Pegelstationen	164
E	Ergänzungen zu Kapitel 7	193
F	Liste der Symbole und Abkürzungen	196
F.1	Lateinische Symbole	196
F.2	Griechische Symbole	199
F.3	Abkürzungen	200
	Danksagung	202

Abbildungsverzeichnis

1.1	Skizze der Pegelmessung	1
2.1	Schematische Darstellung der Komponenten des Modells	9
2.2	Schematische Darstellung der Größen in der MSG	27
2.3	Schematische Darstellung der ORA	29
2.4	Schematische Darstellung der ORB	29
2.5	Schematische Darstellung der ORC	30
2.6	Schematische Darstellung der Änderung der Ozeanfunktion \mathcal{O}	31
2.7	Skizze des initialen und aktuellen Rotationszustands der Erde	33
2.8	Lösungsschema der MSG	47
2.9	Lösungsschema der VR, RT und MSG	48
3.1	Evolution des Volumens von Eismodell ICE-3G-M	53
3.2	Mächtigkeit von Eismodell ICE-3G-M	54
3.3	Evolution des Volumens von Eismodell SCAN	55
3.4	Mächtigkeit von Eismodell SCAN	56
3.5	Evolution des Volumens von Eismodell NAWI	57
3.6	Mächtigkeit von Eismodell NAWI	58
4.1	Vergleich der Spektren für $j_{\max} = 90$ und $j_{\max} = 340$	66
4.2	Vergleich der Spektren für $j_{\max} = 270$ und $j_{\max} = 340$	66
4.3	Differenz der Geschwindigkeiten der Radialverschiebung für $j_{\max} = 90$ und $j_{\max} = 340$	67
4.4	Differenz der Geschwindigkeiten der Radialverschiebung für $j_{\max} = 270$ und $j_{\max} = 340$	67
4.5	Meeresspiegelanstieg für ORA	70
4.6	Meeresspiegelanstieg für ORB	70
4.7	Differenz des Meeresspiegelanstiegs zwischen ORB und ORA	71
4.8	Meeresspiegelanstieg für ORC	72
4.9	Differenz des Meeresspiegelanstiegs zwischen ORC und ORB	73
4.10	Differenz des Meeresspiegelanstiegs seit 18 ka BP zwischen ORC und ORB	73
4.11	Meeresspiegelanstieg seit 18 ka BP für ORC	74
4.12	Inkrementeller Trägheitstensor für alternative Beschreibungen	76
4.13	Differenz der Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs bei Berücksichtigung und Vernachlässigung der RT	77
4.14	Differenz der Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs bei Berücksichtigung und Vernachlässigung der rotationsbedingten Deformation	77
5.1	Einteilung der SLI in Regionen	79
5.2	Geographische Position ausgewählter SLI an der holländischen Küste	82
5.3	Relativer Meeresspiegelanstieg für die SLI in Abb. 5.2	83
6.1	Globale Verteilung der ausgewählten Pegelstationen	88
6.2	Verteilung der ausgewählten Pegelstationen Nordamerikas	90
6.3	Verteilung der ausgewählten Pegelstationen Nordeuropas	91
6.4	LTA-Diagramm für die Pegelstation Genova (PSMSL-ID 250011)	92
6.5	LTA-Diagramm für die verkürzte Zeitreihe der Pegelstation Genova	93

6.6	LTA-Diagramm für die Pegelstation Reykjavik (PSMSL-ID 010001)	96
6.7	LTA-Diagramm für die Pegelstation Murmansk (PSMSL-ID 030018)	97
6.8	LTA-Diagramm für die Pegelstation Venezia (PSMSL-ID 270054)	98
6.9	LTA-Diagramm für die Pegelstation Bakar (PSMSL-ID 280011)	99
6.10	LTA-Diagramm für die Pegelstation Ko Taphao Noi (PSMSL-ID 545001)	100
6.11	LTA-Diagramm für die Pegelstation Petropavlovsk (PSMSL-ID 630021)	101
6.12	LTA-Diagramm für die Pegelstation Manila (PSMSL-ID 660011)	102
6.13	LTA-Diagramm für die Pegelstation Port Pirie (PSMSL-ID 680391)	103
6.14	LTA-Diagramm für die Pegelstation Yakutat (PSMSL-ID 821026)	104
6.15	LTA-Diagramm für die Pegelstation Port Isabel (PSMSL-ID 940001)	105
6.16	Einteilung der Pegelstationen in Regionen	109
7.1	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMI/SCAN	112
7.2	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMI/SCAN(Nordeuropa)	113
7.3	Reduzierte Pegelraten der Region R1	114
7.4	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VM1/NAWI	115
7.5	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VM1/NAWI (Nordamerika)	116
7.6	Reduzierte Pegelraten der Region R2	117
7.7	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMA/NAWI	118
7.8	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMA/NAWI (Nordeuropa)	119
7.9	Reduzierte Pegelraten der Region R3	120
7.10	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMF/SCAN	121
7.11	Reduzierte Pegelraten der Region R4	122
7.12	Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VM1/SCAN	123
7.13	Reduzierte Pegelraten der Region R5	124
7.14	Reduzierte Pegelraten für das einheitliche Zeitintervall	125
7.15	Differenzen zwischen \dot{s}^R und \bar{s}^R	127
7.16	Differenzen zwischen \dot{s}^R und \bar{s}^R in Europa	128
7.17	Differenzen zwischen \dot{s}^R und \bar{s}^R in Nordamerika	130
D.1	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 010001–030480	165
D.2	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 030535–040081	166
D.3	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 040091–040261	167
D.4	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 040301–050051	168
D.5	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 050071–050141	169
D.6	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 050161–060011	170
D.7	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 060021–060241	171
D.8	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 060281–120012	172
D.9	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 120022–130041	173
D.10	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 130051–130121	174
D.11	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 140012–150041	175
D.12	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 150051–160021	176
D.13	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 170012–200011	177
D.14	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 200030–250011	178
D.15	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 270054–298041	179
D.16	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 300001–545001	180
D.17	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 600021–645011	181
D.18	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 647071–680471	182
D.19	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 690002–820011	183
D.20	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 821026–822071	184
D.21	LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 822101–823013	185

D.22 LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 823021–823081	186
D.23 LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 840011–904011	187
D.24 LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 940001–960011	188
D.25 LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960021–960076	189
D.26 LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960078–960101	190
D.27 LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960121–960181	191
D.28 LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960201–970141	192

Tabellenverzeichnis

3.1	Diskretisierung der Radialentfernung r	50
3.2	Viskositätsmodell VM1	50
3.3	Viskositätsmodell VMA	51
3.4	Viskositätsmodell VMF	51
3.5	Viskositätsmodell VMI	52
4.1	Zeitdifferenzen Δt und Länge der finiten Elemente h	68
4.2	Varianz, χ_{var} , für die Diskretisierungstests	69
5.1	Anzahl der SLI in den Regionen R1, , R5	81
5.2	Bewertung der Eingabemodelle durch den Abweichungswert $\chi^{\text{SLI}[1]}$	85
5.3	Bewertung der Eingabemodelle durch den Abweichungswert $\chi^{\text{SLI}[2]}$	85
5.4	Optimale Eingabemodellkombinationen	86
6.1	Pegelstationen mit verkürztem Zeitintervall	94
6.2	Ausgeschlossene Pegelstationen	95
6.3	Linearer Meeresspiegelanstieg für die ausgewählten Pegelstationen	106
6.4	Mittelwerte für die Pegelstationen der Regionen	110
7.1	Zusammenfassung der Mittelwerte der linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs	126
7.2	Vergleich der Literaturwerte des globalen mittleren Meeresspiegelanstiegs	131
B.1	Polynome der Parameter von PREM	156
B.2	Zeitschritte der Mächtigkeitsverteilungen von ICE-3G-M	157
D.1	Untersuchte Pegelstationen des PSMSL	161
E.1	Pegelstationen der Region R1	193
E.2	Pegelstationen der Region R2	194
E.3	Pegelstationen der Region R3	194
E.4	Pegelstationen der Region R4	195
E.5	Pegelstationen der Region R5	195

Zusammenfassung

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit dem Einfluß des durch die letzte pleistozänen Enteisung hervorgerufenen glazial-isostatischen Ausgleichs auf die rezente Meeresspiegeländerung. Diese Änderung kann sowohl durch Satellitenaltimetrie als auch durch Pegelmessungen bestimmt werden. Mit Hilfe der Altimetrie-Satelliten TOPEX/Poseidon und Jason wurde ein globaler mittlerer Meeresspiegelanstieg von $2.8 \pm 0.4 \text{ mm a}^{-1}$ abgeschätzt (Cazenave & Nerem, 2004). Hingegen wurde aus ausgewählten Pegelaufzeichnungen ein mittlerer globaler Meeresspiegelanstieg von $1.5 \pm 0.5 \text{ mm a}^{-1}$ bestimmt (Church et al., 2001). Der Vergleich der Ergebnisse beider Methoden zeigt die geographischen Variationen der Meeresspiegeländerungen. Weiterhin bestehen große Unsicherheiten hinsichtlich der einzelnen Beiträge (z. B. thermosterische und halioosterische Änderung, Schmelzwasserbilanz, Grundwasserspeicherung). In der vorliegenden Untersuchung wird eine Methode präsentiert, die die Pegelmessungen hinsichtlich des Einflusses der letzten pleistozänen Enteisung reduziert.

Ein Modell, das diesen Einfluß beschreibt, muß die viskoelastische Relaxation (VR) durch die zeitveränderlichen Eis- und Ozeanlasten berücksichtigen. Dies wird durch die Meeresspiegelgleichung (MSG) erreicht, die bei der Berechnung des Meeresspiegels die Vertikalverschiebung, die Geoidhöhenänderung und den Schmelzwasserbeitrag von den pleistozänen Eisschilden berücksichtigt. Infolge dieser Umverteilung der Oberflächenmassen verändert sich auch die Erdrotation (RT) und bewirkt eine Änderung des Zentrifugalpotentials. Dies wiederum verursacht eine zusätzliche Geoidhöhenänderung, die ebenfalls in der MSG berücksichtigt werden muß.

Als theoretische Beschreibung der VR wird die von Martinec (2000) für ein sphärisches, selbstgravitierendes, inkompressibles, Maxwell-viskoelastisches Kontinuum entwickelte spektrale Finite-Elemente-Repräsentation (SFER) verwendet. Die bestimmenden Feldgleichungen werden in der schwachen Formulierung aufgestellt, wobei die Winkelabhängigkeit durch Kugelflächenfunktionen und die Radialabhängigkeit durch finite Elemente repräsentiert wird. Der Hauptvorteil der SFER ist, daß die Gleichungen im Zeitbereich gelöst werden. Dies vereinfacht die Implementierung der MSG im Vergleich zu Laplace-Transformationsmethoden. Ähnlich wird im Zeitbereich die RT durch die Liouville-Gleichung beschrieben, die mit Hilfe der MacCullagh-Formeln gelöst wird. Dies gestattet die Bestimmung der Vertikalverschiebung und Geoidhöhenänderung und damit die Lösung der MSG.

Zur numerischen Berechnung ist es erforderlich, die Erd- und Eismodelle vorzugeben. Das verwendete radialsymmetrische Erdmodelle ist durch Dichte, Schermodul und die Viskosität parametrisiert. Die Dichte und der Schermodul werden durch Polynome gemäß PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) approximiert. Zur Parametrisierung der Viskosität werden vier Modelle getestet. Weiterhin werden drei Eismodelle verwendet.

Um die Erd- und Eismodelle zu bewerten, sind von den Pegelmessungen unabhängige Observable erforderlich. Hierzu werden paläontologische und geologische Hinweise (z. B. Muscheln, Walknochen, Isolationsbecken) auf den früheren Meeresspiegel herangezogen, wobei jede Probe datiert und auf den gegenwärtigen Meeresspiegel bezogen wird. Diese Observablen werden Meeresspiegel-Indikatoren

(SLI)¹ genannt. Ein Vergleich der berechneten und beobachteten Meeresspiegeländerungen für die Orte und Zeiten der einzelnen SLI gestattet dann, die optimalen Kombinationen von Erd- und Eismodell zu wählen.

Die Pegelzeitreihen sind der Datenbank des PSMSL² entnommen. Die ausgewählten Zeitreihen überdecken mindestens 45 a und sind nur schwach von anderen Prozessen als denen der glazialen Isostasie (z. B. tektonisch oder anthropogen bedingte Vertikalbewegungen, Luftdruckvariationen oder hydrodynamische Effekte) beeinflusst. Für diese Zeitreihen werden aus den monatlichen Mittelwerten lineare Trends abgeschätzt. Die zuvor bestimmten optimalen Kombinationen von Erd- und Eismodell werden dann verwendet, um den Einfluß der pleistozänen Eisschildevolution auf die rezente Meeresspiegeländerung vorherzusagen und die geschätzten linearen Trends hinsichtlich dieses Beitrags zu reduzieren.

Ein Vergleich mit den unreduzierten linearen Trends zeigt eine signifikante Verringerung der Varianz und geographischen Variabilität der reduzierten linearen Trends, insbesondere in den früher eisbedeckten Gebieten Nordamerikas und Skandinaviens. Tests mit einem festen Zeitintervall von 70 a für die Pegelzeitreihen oder mit regionalen Gruppierungen der Pegelstationen zeigen nur eine schwache Abhängigkeit des reduzierten globalen mittleren Meeresspiegelanstiegs von dem Zeitintervall oder der Gruppierung. Der favorisierte Wert des in dieser Untersuchung bestimmten reduzierten globalen mittleren Meeresspiegelanstiegs beträgt $1.46 \pm 0.2 \text{ mm a}^{-1}$.

¹Abgeleitet von "Sea-Level Indicator".

²Permanent Service for Mean Sea Level am Proudman Oceanographic Laboratory. Zur weiteren Information wird auf <http://www.pol.ac.uk/psmsl/> verwiesen.

Summary

This study is concerned with the influence of the glacial-isostatic adjustment caused by the last Pleistocene deglaciation on the present-day sea-level change. This change can be inferred both from satellite altimetry and from tide-gauge measurements. Using the altimetry satellites TOPEX/Poseidon and Jason, a global mean sea-level rise of $2.8 \pm 0.4 \text{ mm a}^{-1}$ was estimated (Cazenave & Nerem, 2004). In contrast to this, a global mean sea-level rise of $1.5 \pm 0.5 \text{ mm a}^{-1}$ was determined from selected tide-gauge records (Church, 2001). The comparison of the results of both methods demonstrates the geographical variations in the sea-level change. Moreover, there are large uncertainties regarding the individual contributions (e. g. thermo-steric and halio-steric change, melt-water budget, ground-water storage). In this study, a method is presented that reduces tide-gauge measurements for the influence of the last Pleistocene deglaciation.

A model describing this influence must consider the viscoelastic relaxation (VR) due to the time-variable ice and ocean loads. This is achieved by the sea-level equation (MSG), which considers the vertical displacement, the geoid-height change and the melt-water contribution from the Pleistocene ice sheets for the calculation of the sea level. Due to this surface-mass redistribution, the earth rotation (RT) also changes and causes a variation in its centrifugal potential. This, in turn, gives rise to an additional geoid-height change, which must also be considered in the MSG.

As theoretical description of the VR, is used the spectral finite-element representation (SFER) developed by Martinec (2000) for a spherical, self-gravitating, incompressible, Maxwell-viscoelastic continuum. The governing field equations are given in the weak formulation, where the angular dependence is represented by spherical harmonics and the radial dependence by finite elements. The main advantage of the SFER is that the equations are solved in the time domain. This simplifies the implementation of the MSG in comparison with Laplace-transform methods. Similarly, the RT is described in the time domain using the Liouville equation, which is solved in terms of the MacCullagh formulae. This allows the determination of the vertical displacement and geoid-height change and, thus, the solution of the MSG.

For the numerical calculation, it is necessary to prescribe the earth and ice models. The used radially symmetric earth models are parameterized by density, shear modulus and viscosity. The density and shear modulus are approximated by polynomials according to PREM (Dziewonski & Anderson, 1981). For the parameterization of the viscosity, four models are tested. Furthermore, three ice models are used.

To evaluate the earth and ice models, observables independent of tide-gauge measurements are required. For this, palaeontological and geological indications (e. g. shells, whale bones, isolation basins) of the former sea level are used, where each sample is dated and related to today's sea level. These observables are called sea-level indicators (SLI). Comparing the calculated and observed sea-level changes for the locations and times of the individual SLI then enables to choose optimum combinations of earth and ice models.

The tide-gauge time series are taken from the PSMSL³ data base. The time series selected cover at

³Permanent Service for Mean Sea Level at Proudman Oceanographic Laboratory. For further information see <http://www.pol.ac.uk/psmsl/>.

least 45 a and are only weakly influenced by processes other than glacial isostasy (e. g. tectonically or anthropogenically induced vertical displacements, air-pressure variations or hydrodynamic effects). For these time series, linear trends are estimated from the monthly mean values. The previously determined optimum combinations of earth and ice models are then used to predict the influence of the Pleistocene ice-sheet evolution on present-day sea-level change and to reduce the estimated linear trends for this contribution.

A comparison with the unreduced linear trends shows a significant reduction of the variance and geographical variability of the reduced linear trends, in particular in the formerly ice-covered regions of North America and Scandinavia. Tests using a fixed time interval of 70 a for the tide-gauge time series or using regional groupings of the tide-gauge stations indicate only a weak dependence of the reduced global mean sea-level rise on the time interval or the grouping. The favoured value of the reduced global mean sea-level rise determined in this study is $1.46 \pm 0.2 \text{ mm a}^{-1}$.

1. Einleitung

Die Zeilen aus dem Schöpfungsbericht (Genesis 1,1–10), die dieser Arbeit voran gestellt sind, zeugen von dem Erklärungswunsch der Menschen. Die Beobachtung von Vorgängen in der Natur hat Menschen schon immer veranlaßt, nach Erklärungen zu suchen. Vermutlich haben auch die Erfahrungen des Lebens an den Küsten der Meere dazu beigetragen, daß der jüdisch-christliche Schöpfungsbericht die Aufteilung der Erde in Land und Meere eine große Bedeutung beimißt. Die alltäglichen Erfahrungen und zufällige Entdeckungen haben auch dazu beigetragen, daß mit der Beobachtung des Meeresspiegels begonnen wurde. Beispielhaft sollen hier die Küsten der Ostsee betrachtet werden, an denen Felsen auftauchten, die vormals mit Wasser bedeckt waren (z. B. Lyell, 1835), und Überreste von im Wasser versinkenden Wäldern entdeckt wurden (Thunberg, 1764). Die systematische Beobachtung des Meeresspiegels wurde hier zuerst mit in Felsen geschlagenen Wassermarken vorgenommen (z. B. Lyell, 1835), und später durch das Einrichten von Pegeln erweitert. Die ersten Pegel wurden in Stockholm (1774), Swinemünde (1811) und Kronstadt (1841) eingerichtet, und mit diesen begann die kontinuierliche Beobachtung des Meeresspiegels (Ekman, 1988, 1999; Bogdanov et al., 2000). Die weitere Entwicklung konzentrierte sich auf die Verbesserung der registrierenden Instrumente. In Abschnitt 1.1 wird auf die Beobachtung des Meeresspiegels und die dazu angewandten Methoden eingegangen. Eine Zusammenfassung der Beobachtungen und Diskussion von Meeresspiegeländerungen in der historischen Literatur findet sich anschließend in Abschnitt 1.2.

1.1 Beobachtung der Meeresspiegeländerung

Den verschiedenen Meßmethoden zur Beobachtung des Meeresspiegels ist gemeinsam, daß Messungen grundsätzlich nur relativ zu einer Referenzfläche vorgenommen werden können. In Abbildung 1.1 ist diese Situation skizziert. Ob es frühe Beobachtungen an in Felsen geschlagenen Wassermarken waren, langzeitliche Beobachtungen mit Pegeln oder auch die Registrierung der Druckvariationen eines Sensors auf dem Ozeanboden sind, in allen Fällen wird bezüglich der Oberfläche der Erde gemessen. Dies gilt auch für Drucksensoren, die auf dem Ozeanboden fixiert sind. Eine Ausnahme bilden nur Altime-

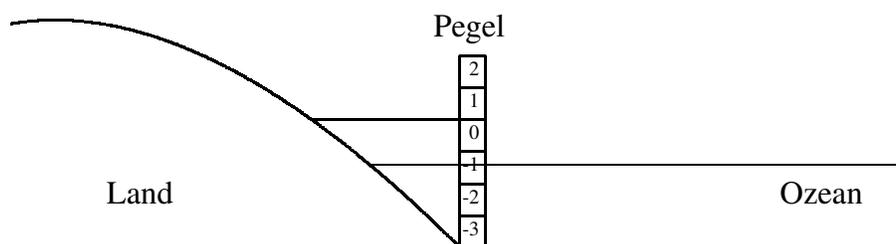


Abbildung 1.1: Skizze des Prinzips der Pegelmessung.

triemessungen von Satelliten, da sich diese auf die Orbits und diese wiederum auf das Massenzentrum der Erde beziehen. Hieraus ergeben sich allerdings andere Probleme, wie die genaue Orbitbestimmung der Satelliten und deren Langzeitstabilität. Desweiteren ist der Vergleich von Altimetriemessungen mit Pegelmessungen nicht direkt möglich, da die Altimetriemessungen an den Küsten zumeist durch diese gestört sind (Kuo et al., 2004). Für alle anderen Methoden, die relativ zur Erdoberfläche messen, ergibt sich demnach ein grundlegendes Problem. Die relativen Messungen beschreiben nur die Variation des Abstands zwischen den beiden Referenzflächen. Aus solchen Messungen kann daher nicht hervorgehen, ob der Meeresspiegel oder die Erdoberfläche ihre Lage verändert hat oder ob sich beide Flächen bewegt haben.

Gegenwärtig stellen Pegelmessungen und Altimetriemessungen die wichtigsten Beobachtungen des Meeresspiegels dar. Diese beiden Methoden unterscheiden sich nicht nur durch die verschiedenen Referenzflächen, zu denen gemessen wird, sondern auch in der Länge des Beobachtungsintervalls und der räumlichen Verteilung. Altimetriemessungen der Satelliten TOPEX/Poseidon und Jason werden seit etwa zehn Jahren mit einer annähernd globalen Verteilung (60° N bis 60° S) durchgeführt (Cabanes et al., 2001a,b). Hingegen werden Pegelmeßwerte an einigen Pegelstationen seit weit mehr als 100 a registriert. Jedoch konzentrieren sich die Pegelstationen an den Küsten Nordamerikas und Europas (Woodworth & Player, 2003). In Abschnitt 7.3 werden die unterschiedlichen Längen und die räumlichen Verteilungen der Meßwerte betrachtet und die Auswirkungen diskutiert.

Die beschriebenen Probleme bei der Beobachtung des Meeresspiegels mit unterschiedlichen Methoden verdeutlichen, daß neben den Meßwerten selbst auch die Prozesse betrachtet werden müssen, die diese beeinflussen können. Ein globaler Prozeß, der neben Vertikalbewegungen auch die Variation des Geoids verursacht, ist die glaziale Isostasie. Bedingt durch ihre Materialeigenschaften reagiert die Erde auf verschiedenen Zeitskalen, von der instantanen elastischen Deformation bis zur viskoelastischen Relaxation über Jahrhunderte und Jahrtausende, auf die Auflastveränderungen durch das Anwachsen und Abschmelzen der pleistozänen Eisschilde. An den in Abschnitt 3.2 vorgestellten Eismodellen ist die geographische Verteilung dieser Eisschilde zu erkennen. Gleichzeitig ist das Absenken (beim Anwachsen der Eisschilde) und das Ansteigen (beim Abschmelzen der Eisschilde) des Meeresspiegels aufgrund der Massenerhaltung des Wassers auf der Erde dafür verantwortlich, daß eine globale Massenumverteilung stattfindet. Die Geoidänderung sowie die Vertikalbewegung beeinflussen die Pegelmeßwerte, indem die beiden Flächen, zwischen denen gemessen wird, deformiert werden. Altimetriemessungen werden direkt durch die Geoidänderung beeinflusst und indirekt durch die Vertikalbewegung, da diese eine Variation des Ozeanbeckens und dessen Volumens bedingen.

Die verschiedenen tektonischen Prozesse an konvergenten Plattenrändern und mittelozeanischen Rücken sowie Vulkanismus führen ebenfalls zu Meeresspiegeländerungen. Diese lokalen Prozesse beeinflussen die Pegelmeßwerte in erster Linie durch die Vertikalbewegungen. Der indirekte Effekt durch die Variation des Ozeanbeckens ist hier äußerst gering. Ein weiterer lokaler Prozeß, der Vertikalbewegungen verursacht, ist die Sedimentkompaktion. Gerade in Schelfgebieten, die aus mächtigen Sedimentschichten bestehen, können signifikante Vertikalbewegungen beobachtet werden. Desweiteren verursachen anthropogene Einflüsse, z. B. Grundwassergewinnung oder Bergbau, Vertikalbewegungen, die ebenfalls in die

Pegelmeßwerte eingehen.

In dieser Arbeit werden nur Pegelmeßwerte betrachtet und somit müssen alle Prozesse berücksichtigt werden, die diese beeinflussen. Pegelstationen, die durch tektonische Prozesse, Vulkanismus, Sedimentkompaktion oder anthropogene Einflüsse verursachte Vertikalbewegungen aufweisen, werden von der Auswertung ausgeschlossen (Abschnitt 6.2). Der Einfluß der glazialen Isostasie auf rezente Meeresspiegeländerungen wird hingegen berechnet. Im folgenden Abschnitt 1.2 ist deshalb die Diskussion in der historischen Literatur zu diesem Thema zusammengefaßt.

1.2 Historischer Rückblick

Wie im vorausgegangenen Abschnitt 1.1 dargestellt, besteht eine der Schwierigkeiten bei der Betrachtung der Meeresspiegeländerung in der gleichzeitigen Veränderung des Meeresspiegels und der Erdoberfläche. Dementsprechend ist die Beschreibung der Meeresspiegeländerung durch Deformation des Geoids und/oder Änderung des Wasservolumens und/oder der Deformation der Erdoberfläche Gegenstand des wissenschaftlichen Diskurses. Im historischen Rückblick fällt besonders die Auseinandersetzung zum Ende des 19. Jahrhunderts zwischen drei Theorien auf, die auch als Geoiddeformationstheorie, eustatische Theorie und isostatische Theorie bezeichnet werden. Zu dieser Zeit begann die Diskussion eine neue Qualität zu gewinnen.

Damit es zu dieser Diskussion kommen konnte, mußten zuerst die notwendigen Beobachtungen und Hypothesen zur Verfügung stehen. In Skandinavien wurden zu Beginn des 18. Jahrhunderts verschiedene Beobachtungen des relativ absinkenden Meeresspiegels gesammelt und von Hjärne (1706), Swedenborg (1719), Celsius (1743) und Kalm (1746) veröffentlicht. Von Thunberg (1764) wurde dagegen ein versunkener Wald beim Hafen von Karlskrona beschrieben, womit schon zu dieser Zeit Beobachtungen vorgestellt wurden, die auf das uneinheitliche relative Absinken oder Ansteigen des Meeresspiegels in Skandinavien schließen lassen. Gleichzeitig mit der Diskussion dieser Phänomene wurden neue Beobachtungen gesammelt und veröffentlicht (Linné, 1745; Runeberg, 1765; Buch, 1810; Lyell, 1835).

In der Arbeit von Lyell (1835) wird versucht die Hypothese der unterschiedlichen Hebung bestimmter Gebiete in Schweden zu stützen. Auf seinen Reisen durch Süd- und Mittelschweden sammelte Lyell (1835) dazu Beobachtungen, z. B. die Kartierung von mit Muscheln durchsetzten Sedimenten, das Ausmessen von Wassermarken, die von anderen Forschern zuvor in verschiedene Felsen geschlagen wurden, und das Sammeln von Aussagen der Bewohner und Fischer aus den betreffenden Gebieten. Aus diesen Beobachtungen zog er den Schluß, daß sich in bestimmten Gebieten Schwedens das Land unterschiedlich gehoben hat. Lyell (1835, S. 32) faßte zusammen: "From what I saw at Calmar and Stockholm as compared with Oregrund and Gefle, I have no doubt that the rate of elevation is very different in different places; and in the south of Scania I could not ascertain, either from the testimony of the inhabitants or from any appearances on the coast, that the slightest change of relative level can be detected." Nicht nur die Landhebung wird von ihm beschrieben sondern auch die lokal variierende Rate der Landhebung.

In die Diskussion dieser Zeit fallen auch Untersuchungen zur möglichen Ausdehnung einer Vereisung in Nord- und Mitteleuropa. Maclaren (1842) faßte die Theorien Prof. Agassiz zusammen und stellte

dessen Beobachtungen an vormalig vergletscherten Gebieten in den Alpen und deren Übertragung auf Beobachtungen in Schottland und Skandinavien dar. Maclaren (1842) ergänzte die Ausführungen Agassiz durch Betrachtungen zur Meeresspiegeländerung. Wenn, wie Agassiz beschrieb, während der letzten Eiszeit Europa vom Nordpol bis zum 35. Breitenkreis vergletschert war, so müßte das Wasser dieser Eismassen den Ozeanen entnommen worden sein, was zur einer Absenkung des Meeresspiegels um bis zu 700 ft (~ 213 m) führt. So wurden in die Diskussion über die Meeresspiegeländerungen neben den Beobachtungen zur Landhebung, insbesondere in Skandinavien, auch die Argumente für eine Variation der Wassermassen in den Ozeanen eingebracht.

In der Diskussion der theoretischen Beschreibung wurde von einer Vielzahl von Wissenschaftlern die Geoiddeformationstheorie vertreten. Bruchhausen und Penck (1882) entwickelten diese Theorie zuerst. In seiner Arbeit stellte Penck (1882) die Idee der Attraktion des Wassers durch die Eismassen vor, wobei er auch darlegte, daß dies der entscheidende Effekt ist, da jegliche Deformation der Erdkruste "auf der Voraussetzung einer ungemeynen Biegsamkeit und Nachgiebigkeit der Erdkruste, welche thatsächlich nicht vorhanden ist" (Penck, 1882, S. 49) beruht.

Schon im Jahre 1865 veröffentlichte Jamieson (1865) einen Artikel, in dem er nicht die Geoiddeformation als die Hauptursache betrachtet, sondern die Deformation der Erde unter dem Auflastdruck der Vergletscherung der letzten Eiszeit. Seine Argumente stellte Jamieson (1882) dann noch einmal detailliert dar, um auf Kritik an dem ersten Artikel zu reagieren. Hier entwickelte er, nachdem er auf einige Kritikpunkte eingegangen war, die Hypothese, daß die Erde kein starrer Körper sein kann, der nicht unter einer gewaltigen Eislast von 1000–3000 ft (~ 300 –900 m) deformiert wird, wenn andererseits elastische Erdbebenwellen und geringe Erschütterungen beobachtet werden können (Jamieson, 1882, S. 404). Diese Überlegungen führten ihn dazu, die Erdoberfläche als im Gleichgewicht befindlich und auf veränderten Auflastdruck reagierend zu beschreiben ("It appears more likely that the position of the surface is in a state of delicate equilibrium, and that any considerable transference of pressure will cause a re-adjustment of levels", Jamieson, 1882, S. 405). In seinen Worten beschrieb er hier die isostatische Ausgleichsbewegung. Auch die Abhängigkeit der Ausgleichsbewegung von der Zeitdauer des Auflastdrucks oder der Auflastdruckveränderung stellte Jamieson (1882) schon dar. Daher sind hier Hinweise auf die viskoelastische Relaxation des Erdkörpers gegeben.

Die im folgenden betrachteten Arbeiten diskutieren insbesondere, ob die Geoidänderung aufgrund der Massenumverteilung oder die vertikale Deformation durch die pleistozäne Eisschildevolution die hauptsächliche Ursache für die Meeresspiegeländerungen ist. Die Arbeit von Hergesell (1887) bezieht sich nach einer kurzen Einleitung mit historischen Bezügen auf die Untersuchungen von Penck (1882), in der die Geoidänderung als Hauptursache bezeichnet wird. Hergesell führte aus, daß die zu erklärenden Hinweise auf Strandlinienverschiebungen nicht von Penck erklärt würden, da die von ihm vertretene Theorie und deren Anwendung fehlerhaft sind. Hergesell kritisierte bei Penck neben der fehlerhaften Berechnung der Auswirkung der Schwerpunktsverlagerung im Erdinneren zusätzlich drei weitere Punkte. Als erstes betonte Hergesell, daß während der maximalen Eisbedeckung der Meeresspiegel durch das Ausbilden der Eisschilde global absinken muß, trotz der Attraktion des Ozeans durch diese Eisschilde. Als zweites wies Hergesell auf die unterschiedlichen Zeitpunkte des maximalen Eisvolumens und des

maximalen relativen Meeresspiegelanstiegs hin, was einer Attraktion des Wassers durch die Eismassen widerspricht. Schließlich kritisiert Hergesell, daß Penck mit Geoidänderungen nicht die räumlich stark variierende Höhe der Strandlinienverschiebung erklären konnte. Der Erklärungsversuch von Penck ist nach Hergesell (1887, S. 104) demnach gescheitert, und Hergesell schließt mit der Feststellung, er halte es nicht für möglich, “daß die Unregelmäßigkeit der Vereisung und der Mächtigkeit der Eisdecke im Stande ist, die Höhendifferenzen, welche bei den Spuren früherer Meeresniveaus zu Tage treten, zu erklären”.

Diese Ansicht wird ebenso in der Arbeit von Drygalski (1887) vertreten. Im ersten Teil dieser Arbeit wird auf die gegenwärtige Deformation eingegangen, hingegen liegt im zweiten Teil der Schwerpunkt auf der Betrachtung der Meeresspiegelschwankungen. Auch Drygalski (1887) diskutierte die Frage, worin die fundamentale Ursache der Verschiebung der Strandlinien liegt. Zur Beantwortung betrachtete er verschiedene Gebiete (z. B. Nordamerika, Grönland, Nordeuropa) und den Einfluß der Geoiddeformation auf verschiedene Flüsse in diesen Gebieten. Das Resultat dieser Untersuchung ist, “daß der Einfluß des Inlandeises auf die Lage des Horizontes nicht imstande war, die hohen Spuren des Eiszeitlichen Meeresspiegels zu erklären” (Drygalski, 1887, S. 276). Somit blieb für ihn der “Rückzug auf Bewegungen der Lithosphäre unvermeidlich” (Drygalski, 1887, S. 276).

Ebenso befaßte sich Woodward (1888) mit dem Problem der Veränderung des Meeresspiegels. Im ersten Teil seiner Arbeit werden die mathematischen Betrachtungen der Potentialtheorie ausgeführt, die dann im zweiten Teil auf die Berechnung der Niveauänderungen von Seen und des Meeresspiegels aufgrund der Attraktion durch Eis- oder Wassermassen angewandt werden. Weiterhin verglich er seine Ergebnisse mit denen von Pratt (1871), Thomson & Tait (1883) und anderen (Woodward, 1888, S. 79). Allerdings gab Woodward keine Bewertung der berechneten Eismächtigkeiten, die zur Erklärung von Strandlinien und Niveauänderungen von Seen benötigt werden.

In der Arbeit von De Geer (1892) werden ausschließlich Beobachtungen aus Skandinavien und Nordamerika herangezogen, um verschiedene Erklärungsmöglichkeiten zu bewerten. Die Beobachtung von Linien gleicher Deformation in Skandinavien, die er Isobasen nannte, und deren maximale Differenz im Zentrum von mehr als 300 m zum aktuellen Meeresspiegel (De Geer, 1892, S. 457) ließ ihn zu dem Schluß kommen, daß diese Beobachtungen nicht allein durch die lokale Attraktion des Wassers durch Eismassen oder durch globale Oszillationen der Meeresoberfläche erklärt werden können. Desweiteren stellte er die auffällige Übereinstimmung des von den Isobasen eingegrenzten Gebiets und des Gebiets der letzten Vereisung dar. Diese Übereinstimmung fand De Geer (1892, S. 473) auch in Nordamerika, wobei er diese im Vergleich zu Skandinavien als noch deutlicher bewertete. De Geer (1892, S. 477) schloß mit der Feststellung, daß die Niveauänderungen eng mit der lokalen Struktur der Erdkruste und der Vereisung zusammenhängen und mit Vertikalbewegungen der Erdkruste einhergehen müsse.

Im Gegensatz zu den obigen Arbeiten befaßte sich Rudzki (1899) nicht nur mit der Geoidänderung durch die Attraktion der Eis- und Wassermassen (Drygalski, 1887; Woodward, 1888) oder mit Beobachtungen, die diese Erklärungsmöglichkeit ausschließen (De Geer, 1892), sondern auch mit der Deformation der Erde durch die entsprechenden Auflasten. Nach einem Überblick, in dem auch auf Hergesell (1887), Drygalski (1887) und Woodward (1888) eingegangen wird, entwickelte er die theoretische Be-

schreibung der Deformation einer perfekt elastischen isotropen Kugel (Rudzki, 1899, Kap. 2). Diese Theorie wendete er auf die Hypothesen der gleichzeitigen und der abwechselnden Vereisung der Hemisphären an. Desweiteren betrachtet er die Theorien der Niveauänderung und der Strandverschiebungen und kommt zu dem Schluß, "dass, hauptsächlich Dank der doppelt so grossen allgemeinen Erniedrigung des Wasserspiegels, bei gleichzeitiger Vereisung beider Hemisphaeren, am Rande des Eises nur negative, dazu beträchtliche negative Strandverschiebungen auftreten können" (Rudzki, 1899, S. 213). Nur so können die Beobachtungen mit Hilfe der Geoidänderung, der elastischen Deformation und der allgemeinen Erniedrigung des Wasserspiegels erklärt werden. Außerdem wies er darauf hin, daß seine Untersuchungen auf die elastischen Effekte beschränkt bleiben und nicht auf die der "elastischen Nachwirkung" (Rudzki, 1899, S. 214) ausgeweitet werden konnten. Mit diesen Effekten ist die viskoelastische Relaxation gemeint. Die Notwendigkeit der viskoelastischen Beschreibung des Problems war ihm demnach schon bewußt, jedoch gab es noch keine theoretische Formulierung dieses Problems.

Ramsay (1924) stellte die eustatische der isostatischen Änderung des Meeresspiegels gegenüber, wobei er den Begriff der eustatischen Meeresspiegeländerung wie Maclaren (1842) verwendete. Er beschränkte sich auf Skandinavien als Beobachtungsgebiet und faßte zu Beginn die maximalen eustatischen Änderungen zusammen, die sich für die pleistozäne Vereisung finden lassen. Hierzu bezog er sich neben eigenen auch auf die Beobachtungen anderer Autoren (z. B. Penck, 1882; Drygalski, 1887). Nach Einführung der Begriffe "Transgression" und "Regression" beschrieb Ramsay (1924) das Zusammenwirken von eustatischer und isostatischer Änderung, die sich in einem der beiden definierten Verhalten widerspiegelt. Er untermauerte dies durch geologische Beobachtungen in Skandinavien, in denen die sogenannten "fini-glazialen" und "gothi-glazialen" Transgressionen zu erkennen sind. Diese erklärte er durch das Zusammenwirken von eustatischer und isostatischer Änderung des Meeresspiegels aufgrund der letzten glazialen Periode. Desweiteren beschrieb Ramsay (1924) in diesem Zusammenhang den "Baltischen Eisse", den "Ancyclus-See" und das "Litorina-Meer", die verschiedene Stadien der heutigen Ostsee als separierter Binnensee oder mit den Ozeanen verbundenes Randmeer darstellen. Auch diese Beobachtungen lassen sich ihm zufolge nur durch das Zusammenwirken eustatischer und isostatischer Prozesse erklären.

Die theoretische Betrachtung der relativen Meeresspiegeländerung wurde in der Mitte des 20. Jahrhunderts erweitert, als hinreichende Beobachtungen zur Verfügung standen, um sich neben der Erklärung des Phänomens auch mit der Vorhersage der zukünftigen Meeresspiegeländerung zu befassen. Dies wird z. B. im Artikel von Kuenen (1954) deutlich, in dem nicht nur geologische Beobachtungen zur Erklärung herangezogen werden, sondern auch darauf hingewiesen wird, daß für das Verständnis der eustatischen Meeresspiegeländerungen der Zusammenhang mit den kontinentalen Vereisungen von besonderer Bedeutung ist. Im Hinblick auf zukünftige Meeresspiegeländerungen stellte der Autor die Gefahr des Meeresspiegelanstiegs für Länder mit niedriger Topographie in eindeutigen Zusammenhang mit den großen heutigen Eisschilden und deren zukünftigem Verhalten ("The sword of Damocles hanging over Low Countries is formed by the water pent up in the ice sheets of Greenland and Antarctica. An adverse shift in the water budgets of these countries could easily render the situation critical if not hopeless within a century's time", Kuenen, 1954, S. 153). Diese theatralischen Worte drücken unmißverständ-

lich die Notwendigkeit des Verstehens und der Vorhersage von Meeresspiegeländerungen aus. Kuenen (1954) diskutierte auch den möglichen Einfluß einer durch eustatische Meeresspiegelschwankungen zeitverzögerten isostatischen Reaktion des Ozeanbodens auf die veränderte Last, jedoch kam er für seinen Untersuchungsschwerpunkt, die niederländische Küste, zu der Schlußfolgerung, daß dieses Phänomen hier keinen entscheidenden Beitrag liefert.

Ein weiterer Schritt in der Entwicklung der theoretischen Beschreibung der Meeresspiegeländerung wurde in der für die sogenannte "Meeresspiegelgleichung" (MSG) grundlegenden Veröffentlichung von Farrell & Clark (1976) gemacht. In dieser Untersuchung werden die Methoden der Kontinuumsmechanik für einen viskoelastischen Körper benutzt, um nicht nur die sich durch Auflastveränderungen ergebenden Deformationen der Erde zu bestimmen, sondern auch deren Rückwirkungen auf den Meeresspiegel zu berücksichtigen. Hierzu wird der Erdkörper mit den Eis- und Ozeanlasten als selbstgravitierender Körper mit Hilfe der Potentialtheorie beschrieben. Durch diese konsistente Beschreibung können die gekoppelten Gleichungen der Kontinuumsmechanik und der Potentialtheorie gelöst werden und dadurch neben der Deformation der Erdoberfläche auch die Geoidänderung durch die Umverteilung der Eis- und Ozeanmassen und des viskoelastischen Kontinuums, das den Erdkörper beschreibt, angegeben werden. Innerhalb der Ozeane ist die Meeresspiegeländerung durch die Änderung des Abstands zwischen diesen beiden Flächen, nämlich des Geoids und der Erdoberfläche (Ozeanboden), gegeben. Die Meeresspiegeländerung beschreibt wiederum die Ozeanlast als Teil der Auflast. In ihrer Arbeit bestimmten Farrell & Clark (1976) nacheinander die postglazialen Meeresspiegeländerungen für eine feste, eine elastische und eine viskoelastische Erde, wobei im letzten Fall die Maxwell-Rheologie verwendet wurde. Hierbei wurden die Auswirkungen realistischer pleistozäner Eisschilde auf die Deformation des Ozeanbodens und des Geoids und im viskoelastischen Modell auch die Relaxation des Erdkörpers berücksichtigt. Bei der Betrachtung der selbstgravitierenden Eisschilde und des selbstgravitierenden Ozeans wurde eine Integralgleichung der Meeresspiegeländerung angegeben (Farrell & Clark, 1976, S. 654, Glg. (4)), die als Grundlage aller später entwickelten Formen der MSG bezeichnet werden kann.

Für historische Rückblicke sei noch auf Mörner (1979), Wolf (1993) und Ekman (2000) hingewiesen. Mörner (1979) beschrieb die Beobachtungen, die in Skandinavien gesammelt wurden, und die Entwicklung der qualitativen Erklärungsversuche der beobachteten Phänomene. Die Entwicklung der Theorie der glazialen Isostasie wurde von Wolf (1993) zusammengefaßt, wobei der Schwerpunkt auf die Berücksichtigung der Lithosphäre gelegt ist. Ekman (2000) betrachtete die Entwicklung der Bestimmung des globalen Meeresspiegelanstiegs, wobei auf einen Überblick über die verwendeten Methoden und auf die Variation des Meeresspiegelanstiegs in langzeitliche Beobachtungen eingegangen ist. Die Entwicklung der Methoden für die Berechnung des Einflusses der pleistozänen Eisschildevolution auf Pegelmeßwerte und deren Bearbeitung ist ein fortschreitender Prozeß. Gegenwärtig werden z. B. neben den Pegelmeßwerten weitere Beobachtungsmethoden herangezogen, um diese dann gemeinsam auszuwerten und zu interpretieren. Wolf et al. (2004) verwendeten zusätzlich zu den Pegelmeßwerten Absolut-Schweremessungen und Vertikalverschiebungen aus GPS-Messungen.

1.3 Modellbildung

Für die Modellbildung stellt sich aufgrund der ausschließlichen Verwendung von Pegelmeßwerten die Frage, welche durch die pleistozäne Eisschildevolution verursachten Prozesse die Pegelmeßwerte beeinflussen. Bei der historischen Diskussion wurde neben der eustatischen Meeresspiegeländerung auch der isostatische Prozeß und der Prozeß der Geoidänderung durch Massenverlagerung angeführt. Dabei werden Geoidänderungen nicht nur durch die Umverteilung von Eis und Wasser verursacht, sondern auch durch die viskoelastische Relaxation des Erdkörpers. Einen zusätzlichen Anteil an der Geoidänderung bewirkt die Erdrotation, da durch die Variation der Rotationsachse oder der Rotationsgeschwindigkeit das resultierende Zentrifugalpotential verändert wird.

Das zu entwickelnde Modell muß es ermöglichen, die hier genannten Prozesse zu berücksichtigen und die interessierenden Größen zu bestimmen. Das Verhalten des Erdkörpers wird dabei durch das Modell eines viskoelastischen, sphärischen Kontinuums beschrieben und durch die Vorgabe von Volumenmassendichte, Schermodul und Viskosität charakterisiert (Abschnitt 2.2). Desweiteren muß die Eisschildevolution vorgegeben werden, die einen Teil der die Deformation verursachenden Auflast darstellt. Das zu entwickelnde Modell muß gewährleisten, daß zum einen alle entstehenden Eisschilde aus dem Wasser der Ozeane gebildet werden und dieses beim Abschmelzen wieder zurückfließt und zum anderen durch die Meeresspiegeländerung sowie die Vertikalbewegungen eine zeitabhängige Verteilung zwischen Land und Ozean bewirkt wird. Ebenso müssen Vertikalbewegungen der Erdoberfläche und Geoidänderungen bei der Berechnung der Meeresspiegeländerungen berücksichtigt werden (Abschnitt 2.3). Diese bildet den zweiten Teil der variierenden Auflast. Für die Beschreibung der Variation der Erdrotation wird die Erde durch ein rotierendes Ellipsoid approximiert. Alle Massenverlagerungen auf und in der Erde wirken sich auf die Erdrotation aus. Durch die Variation der Rotationsachse oder der Rotationsgeschwindigkeit wird eine Variation des Zentrifugalpotentials bedingt, die wiederum das Geoid und somit den Meeresspiegel verändert (Abschnitt 2.4). Wie aus diesen Prozessen ein Modell entwickelt wird, dessen Komponenten theoretisch beschrieben werden können, ist in Abschnitt 2.1 dargestellt.

Die interessierenden Größen, die als Ergebnis der Modellierung berechnet werden sollen, sind die Vertikalbewegung, Geoidänderung und Meeresspiegeländerung an allen betrachteten Pegelstationen, die Variation der Rotationsachse und der Rotationsgeschwindigkeit der Erde und die sich aus der Vertikalbewegung, Geoidänderung und eustatischer Meeresspiegeländerung ergebende Verteilung von Kontinenten und Ozeanen.

Der Einfluß der pleistozänen Eisschildevolution auf die rezente Meeresspiegeländerung ist von besonderem Interesse, da ohne Berücksichtigung dieses Einflusses keine Interpretation der Pegelmeßwerte möglich ist. Das Ziel dieser Arbeit ist es, diesen Einfluß zu berechnen, wobei die notwendigen Eingabemodelle, Viskositätsmodelle und Eismodelle, unabhängig von den Pegeldaten bewertet werden sollen (Kapitel 5). Desweiteren werden Kriterien zur Auswahl von Pegelstationen entwickelt und angewendet (Kapitel 6). Für die ausgewählten Pegelstationen werden lineare Trends bestimmt, die als Grundlage für die Reduktion und die Interpretation dienen (Kapitel 7).

2. Theorie

2.1 Komponenten des Modells

Die komplexe Situation der Meeresspiegeländerung durch glaziale Isostasie ist in den einleitenden Abschnitten 1.1 und 1.3 dargestellt, wobei letzterer auf die Modellbildung eingeht. Für die theoretische Beschreibung wird das Modell in drei Komponenten zerlegt: die viskoelastische Relaxation einer sphärischen Erde (VR), die Lösung der Meeresspiegelgleichung (MSG) und die Variation der Erdrotation (RT). In Abbildung 2.1 ist skizziert, wie die Erde durch ein Modell aus den genannten Komponenten approximiert wird, um die rezente Meeresspiegeländerung durch glazial-isostatische Prozesse zu berechnen. Für die VR wird die Erde als Maxwell-viskoelastisches sphärisches Kontinuum angenommen. Die sich unter dieser Annahme ergebende theoretische Formulierung ist in Abschnitt 2.2 dargestellt. Die MSG setzt bei realistischer Beschreibung, die in Abschnitt 2.3 gegeben ist, die Kenntnis der Topographie auf der Erde voraus, die bei der VR vernachlässigt wird. Zur Beschreibung der RT in Abschnitt 2.4 wird als Referenzzustand ein Ellipsoid gewählt und nicht eine Kugel, die den nichtrotierenden hydrostatischen Gleichgewichtszustand bei der VR darstellt.

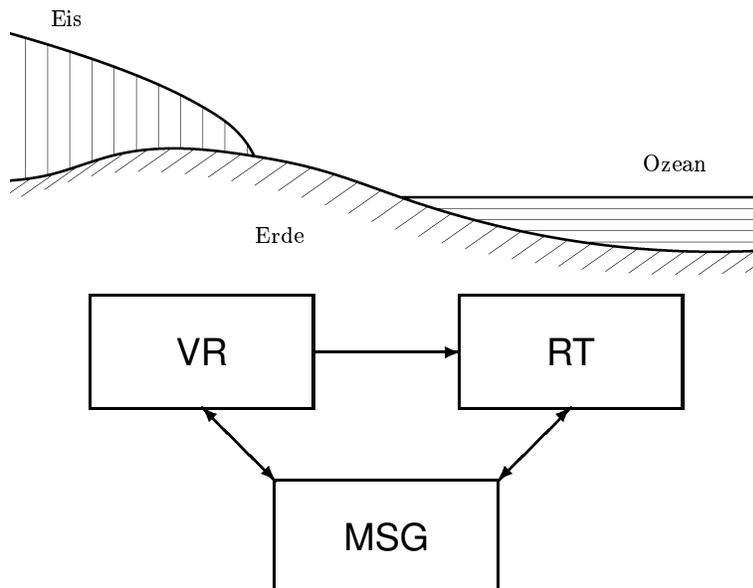


Abbildung 2.1: Skizze des betrachteten Szenarios (oben) und schematische Darstellung durch drei Modellkomponenten (unten). Hier bezeichnet VR die viskoelastische Relaxation einer sphärischen Erde, MSG die durch die Meeresspiegelgleichung beschriebene Umverteilung des Wassers in den Ozeanen und RT die Variation der Erdrotation.

In Abschnitt 2.5 wird die Kopplung der Komponenten beschrieben, so daß diese dann die Reaktion der realen Erde approximieren. Zur Qualität der Approximation werden in Abschnitt 4.4 verschiedene Untersuchungen durchgeführt.

2.2 Viskoelastische Relaxation einer sphärischen Erde

2.2.1 Einleitung

Der historische Rückblick in Abschnitt 1.2 zeigt die Notwendigkeit auf, die Reaktion der Erde auf Auflastveränderungen zu beschreiben. Schon in der Arbeit von Rudzki (1899) wird auf die unvollständige Beschreibung durch die elastische Deformation der Erde hingewiesen und die Idee der viskoelastischen Reaktion aufgezeigt. Zuerst wurden Lösungsverfahren für die Maxwell-Rheologie entwickelt und, als die numerischen Methoden vorhanden waren, für zunehmend komplexe Geometrien der Last implementiert (z. B. Farrell, 1972; Peltier, 1974; Wu & Peltier, 1982; Wolf, 1984, 1985; Lambeck et al., 1990; Wolf, 1991; Mitrovica et al., 1994; Vermeersen & Sabadini, 1997; Martinec, 1999). Auch wurden unterschiedliche Rheologien betrachtet (z. B. Rüpker & Wolf, 1996; Wiczerkowski et al., 1999; Wu, 2001) sowie alternative Lösungstechniken entwickelt (z. B. Gasperini & Sabadini, 1989; Gasperini et al., 1991; Kaufmann et al., 1997; Martinec, 2000) wobei hier Martinec (2000) hervorgehoben werden soll. Die dort präsentierte spektrale Finite-Elemente-Repräsentation (SFER) bildet die Grundlage der in dieser Arbeit abgeleiteten theoretischen Beschreibung der VR eines inkompressiblen, Maxwell-viskoelastischen sphärischen Kontinuums. Hierzu wird in den folgenden Abschnitten die Störung des hydrostatischen Gleichgewichts beschrieben.

2.2.2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Für die Beschreibung der VR wird die Lagrange-Formulierung gewählt (z. B. Wolf, 2003), die in Anhang A.1 eingeführt wird. Die Störungen der mechanischen Größen der Kontinuumsmechanik werden mit materiellen Inkrementen beschrieben. Hingegen wird die Änderung des Gravitationspotentials als lokales Inkrement dargestellt. Die verschiedenen Inkremente werden ebenfalls in Anhang A.1 definiert. Für weitere Angaben zur Ableitung der inkrementiellen Beschreibung aus der für die Totalfelder wird auf Wolf (1997) verwiesen. Im folgenden werden in Abschnitt 2.2 die Argumente \mathbf{X}, t für raum- und zeitabhängige und \mathbf{X} für raumabhängige Größen zur Vereinfachung der Notation nicht aufgeführt.

Die heterogene Erde wird hier als ein inkompressibles, Maxwell-viskoelastisches, sphärisches, selbstgravitierendes Kontinuum, B , aufgefaßt, das durch den Schermodul, μ , die Viskosität, ν , und die Volumenmassendichte, ρ , parametrisiert ist. Die auf der Oberfläche, ∂B , durch Umverteilung von Eis- und Wassermassen entstehende Auflastverteilung wird analog zur "Helmert-Kondensationstheorie" durch das materielle Inkrement der Piola-Flächenmassendichte, σ^P , approximiert. Da im Referenzzustand des hydrostatischen Gleichgewichts keine Auflast vorhanden ist, gilt $\sigma^P(t = 0) = 0$. Für kleine, quasi-statische Störungen des hydrostatischen Gleichgewichts des Kontinuums in einem nicht-rotierenden Koordinaten-

system folgt die VR von B der Impulserhaltungsgleichung und der Poisson-Gleichung:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{(\delta)} - \rho^{(0)} \operatorname{grad} \phi^{(\Delta)} + \operatorname{div}(\rho^{(0)} \mathbf{u}) \operatorname{grad} \phi^{(0)} - \operatorname{grad}(\rho^{(0)} \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \phi^{(0)}) = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \phi^{(\Delta)} + 4\pi G \operatorname{div}(\rho^{(0)} \mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } B. \quad (2.2)$$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{\tau}^{(\delta)}$ das materielle Inkrement der Cauchy-Spannung, $\rho^{(0)}$ die ungestörte Volumenmasse, \mathbf{u} den Verschiebungsvektor, $\phi^{(0)}$ das ungestörte Gravitationspotential von B , G Newtons Gravitationskonstante und $\phi^{(\Delta)} = \phi^{(\Delta)\text{in}} + \phi^{(\Delta)\text{ex}}$ die Summe der lokalen Inkremente des Gravitationspotentials. Das lokale Inkrement $\phi^{(\Delta)\text{in}}$ bezieht sich dabei auf das Gravitationspotential von B und $\phi^{(\Delta)\text{ex}}$ ist das durch die Masse der Auflastverteilung hervorgerufene lokale Inkrement des externen Gravitationspotentials. Es wird angenommen, daß $\rho^{(0)}$ nur eine Funktion der Radialentfernung, r , ist, was die ausschließlich radiale Abhängigkeit von $\phi^{(\Delta)\text{in}}$ zur Folge hat. Die Materialgleichung für inkompressible Maxwell-Viskoelastizität ist gegeben durch

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(\delta)} = \dot{\boldsymbol{\tau}}^{(\delta)\text{E}} - \frac{\mu}{\nu} (\boldsymbol{\tau}^{(\delta)} - p^{(\delta)} \mathbf{I}) \quad \text{in } B, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(\delta)\text{E}} = p^{(\delta)} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{in } B, \quad (2.4)$$

wobei $p^{(\delta)}$ das materielle Inkrement des Auflastdrucks, \mathbf{I} die Identitätsmatrix und $\boldsymbol{\epsilon}$ den symmetrischen Teil der infinitesimalen Dehnung, $\boldsymbol{\epsilon} := (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u})/2$, bezeichnet. Das materielle Inkrement der Cauchy-Spannung wird in einen elastischen, $\boldsymbol{\tau}^{(\delta)\text{E}}$, und in einen viskosen, $\boldsymbol{\tau}^{(\delta)\text{V}}$, Anteil aufgespalten, für die $\boldsymbol{\tau}^{(\delta)} = \boldsymbol{\tau}^{(\delta)\text{E}} + \boldsymbol{\tau}^{(\delta)\text{V}}$ gilt. Der Punkt über den Größen in (2.3) symbolisiert die materielle Ableitung nach der Zeit. Es wird weiterhin angenommen, daß der Schermodul nur eine Funktion der Radialentfernung ist, $\mu = \mu(r)$. Hingegen wird die Viskosität als radial und lateral variabel zugelassen, $\nu = \nu(r, \Omega)$, wobei mit Ω das sphärische Koordinatenpaar von Poldistanz, ϑ , und geographischer Länge, φ , abgekürzt wird. Die Inkompressibilität erfordert

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } B. \quad (2.5)$$

Für eine Diskontinuität Σ innerhalb des Kontinuums B gelten die folgenden Grenzflächenbedingungen:

$$[\mathbf{u}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{auf } \Sigma, \quad (2.6)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(\delta)}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{auf } \Sigma, \quad (2.7)$$

$$[\phi^{(\Delta)}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{auf } \Sigma, \quad (2.8)$$

$$[(\operatorname{grad} \phi^{(\Delta)} + 4\pi G \rho^{(0)} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{auf } \Sigma. \quad (2.9)$$

Mit \mathbf{n} ist hier die nach außen weisende Einheitsnormale auf Σ bezeichnet, und mit $[f]_{\pm}^{\pm}$ wird die Differenz der Größe f , die sie intern (−) und extern (+) auf der Grenzfläche Σ annimmt, wie folgt beschrieben:

$$[f]_{\pm}^{\pm} := f^+ - f^-. \quad (2.10)$$

Im hydrostatischen Gleichgewicht des Referenzzustands sind \mathbf{n} und die radiale Einheitsnormale, \mathbf{e}_r , parallel, d. h. die Grenzflächen sind auch orthogonal zu \mathbf{e}_r .

Besondere Grenzflächenbedingungen ergeben sich für den Fall, daß B auf die Lithosphäre und den Erdmantel beschränkt wird, und ein inviskoser Kern nur mit Hilfe der Grenzflächenbedingungen berücksichtigt wird. Neben den Grenzflächenbedingungen (2.8) und (2.9) gelten dann anstelle von (2.6) und (2.7) für die Kern-Mantel-Grenze, Σ^{CMB} , folgende Bedingungen:

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_{\pm}^{+} = 0 \quad \text{auf } \Sigma^{\text{CMB}}, \quad (2.11)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(\delta)} \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{+} = 0 \quad \text{auf } \Sigma^{\text{CMB}}, \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(\delta)} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(\delta)} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Sigma^{\text{CMB}}. \quad (2.13)$$

Die Gleichungen (2.11) und (2.12) geben die Kontinuität der Normalkomponenten der Verschiebung und Spannung wieder. Das sogenannte “free-slip” Verhalten wird durch (2.13) beschrieben und charakterisiert das Verhalten einer Flüssigkeit an einer Grenze zu einem festen Kontinuum.

Eine weitere besondere Grenzfläche ist die Oberfläche ∂B von B , wo das Kontinuum B mit dem materiellen Inkrement der Piola-Flächenmassendichte, σ^{P} , belastet wird. Dadurch ergeben sich folgende Oberflächenbedingungen:

$$\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau}^{(\delta)-} \cdot \mathbf{e}_r = -g^{(0)}(a) \sigma^{\text{P}} \quad \text{auf } \partial B, \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(\delta)-} \cdot \mathbf{e}_r - (\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau}^{(\delta)-} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r = 0 \quad \text{auf } \partial B, \quad (2.15)$$

$$[\phi^{(\Delta)}]_{\pm}^{+} = 0 \quad \text{auf } \partial B, \quad (2.16)$$

$$[\text{grad}\phi^{(\Delta)}]_{\pm}^{+} \cdot \mathbf{e}_r + 4\pi G\rho^{(0)-}(\mathbf{u}^{-} \cdot \mathbf{e}_r) = 4\pi G \sigma^{\text{P}} \quad \text{auf } \partial B, \quad (2.17)$$

wobei \mathbf{e}_r die radiale Einheitsnormale und $\boldsymbol{\tau}^{(\delta)-}$, $\rho^{(0)-}$ und \mathbf{u}^{-} die jeweilige Größe an der inneren Seite der Oberfläche ∂B bezeichnet. Der Erdradius ist mit a bezeichnet und $g^{(0)}(a) := d\phi^{(0)}(r)/dr|_{r=a}$ ist die Gravitationsbeschleunigung auf ∂B für die ungestörte Dichteverteilung.

Das Randwertproblem der Bestimmung der inkrementiellen Verschiebung, \mathbf{u} , des inkrementiellen Gravitationspotentials, $\phi^{(\Delta)}$, und des inkrementiellen Auflastdrucks, $p^{(\delta)}$, im Kontinuum B wird durch die partiellen Differentialgleichungen (2.1) und (2.2) beschrieben, wobei die Bedingungen (2.3)–(2.5) zu erfüllen sind. Zusätzlich gelten die Grenzflächenbedingungen (2.6)–(2.9) an internen Flächen, Σ , bzw. (2.11)–(2.13) an der Kern-Mantel-Grenze, Σ^{CMB} , sowie die Oberflächenbedingungen (2.14)–(2.17) an der Oberfläche, ∂B .

Cathles (1975, S. 97) bewies als Konsequenz der Eigengravitation die Existenz einer Lösung für das durch (2.1)–(2.17) gegebene Randwertproblem. Für den Fall einer homogenen Oberflächenbedingung mit $\sigma^{\text{P}} = 0$ folgt $\epsilon = 0$, und es werden noch zwei zusätzliche Bedingungen benötigt, um die Eindeutigkeit der Lösung für die Verschiebung \mathbf{u} zu gewährleisten:

$$\int_B \rho^{(0)} \mathbf{u} d^3 X = 0 \quad \text{und} \quad \int_B (\mathbf{e}_r \times \rho^{(0)} \mathbf{u}) d^3 X = 0. \quad (2.18)$$

Diese Bedingungen sind mathematisch hinreichend, jedoch sind auch andere Eindeutigkeitsbedingungen möglich. Für die Wahl dieser Eindeutigkeitsbedingungen ist das Verhalten des Massenschwerpunktes entscheidend. Durch (2.18) wird ein raumfester Massenschwerpunkt beschrieben. Insbesondere ist dies

erforderlich, wenn berechnete Feldgrößen mit Satellitenmeßwerten verglichen werden sollen, da sich die Satellitenbahnen auf den Massenschwerpunkt der Erde beziehen.

In der weiteren Betrachtung wird zur Vereinfachung die Kennzeichnung der materiellen und lokalen Inkremente unterdrückt.

2.2.3 Differenzenschema für Maxwell-Viskoelastizität

Die Ableitung der Materialgleichung (2.3) bezüglich der Zeit wird mit Hilfe eines Differenzenschemas berücksichtigt. Hierzu werden die Variablen \mathbf{u} , $\boldsymbol{\tau}$, p und ϕ durch ihre Werte zu den diskreten Zeiten $t^0 = 0 < t^1 < \dots < t^{i-1} < t^i < t^{i+1} < \dots < t^I = T$ dargestellt, wobei $t = 0$ und $t = T$ die untere bzw. obere Grenze des Berechnungszeitintervalls bezeichnen. Die einfachste Form eines Differenzenschemas ist die, in der der Wert der Variablen zur Zeit t^{i+1} aus den bekannten diskreten Werten für die Zeit t^i berechnet wird. Die allgemeine Form eines solchen Differenzenschemas für (2.3) ist

$$\frac{\boldsymbol{\tau}^{i+1} - \boldsymbol{\tau}^i}{t^{i+1} - t^i} = \frac{\boldsymbol{\tau}^{\text{E},i+1} - \boldsymbol{\tau}^{\text{E},i}}{t^{i+1} - t^i} - \frac{\mu}{\nu} [\omega(\boldsymbol{\tau}^i - p^i \mathbf{I}) + (1 - \omega)(\boldsymbol{\tau}^{i+1} - p^{i+1} \mathbf{I})], \quad (2.19)$$

wobei der Hochindex i den Wert einer Variablen zur Zeit t^i bezeichnet und mit dem Parameter $\omega \in [0, 1]$ verschiedene Differenzenschemen beschrieben werden können. Für $\omega = 0$ ($\omega = 1$) ergibt sich das implizite (explizite) Euler-Differenzenschema. Desweiteren wird das Crank-Nicolson-Differenzenschema erhalten, wenn $\omega = 1/2$ gewählt wird. Der Initialwert des Differenzenschemas (2.19) ist durch

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{\tau}^{\text{E},0} \quad (2.20)$$

gegeben. Für die weitere Ableitung des verwendeten Differenzenschemas wird (2.19) hinsichtlich eines elastischen, $\boldsymbol{\tau}^{\text{E}}$, und eines viskosen, $\boldsymbol{\tau}^{\text{V}}$, Anteils aufgespalten, und es ergibt sich

$$\boldsymbol{\tau}^{i+1} = m_0^i \boldsymbol{\tau}^{\text{E},i+1} + (1 - m_0^i) p^{i+1} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^{\text{V},i}. \quad (2.21)$$

Der hier verwendete Faktor m_0^i ist wie folgt definiert:

$$m_0^i := \frac{1}{1 + M^i(1 - \omega)} \quad \text{mit} \quad M^i := \frac{\mu}{\nu}(t^{i+1} - t^i). \quad (2.22)$$

Der Term $\boldsymbol{\tau}^{\text{V}}$ in (2.21), der das viskose Verhalten des Kontinuums widerspiegelt, wird durch

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{V},i} := m_1^i \boldsymbol{\tau}^i - m_0^i \boldsymbol{\tau}^{\text{E},i} + (m_0^i - m_1^i) p^i \mathbf{I} \quad (2.23)$$

beschrieben, wobei

$$m_1^i := \frac{1 - M^i \omega}{1 + M^i(1 - \omega)} \quad (2.24)$$

ist. Aus (2.21) läßt sich für $\boldsymbol{\tau}^{\text{V}}$ der folgende alternative Ausdruck finden:

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{V},i} = m_1^i \boldsymbol{\tau}^{\text{V},i-1} - (m_0^i - m_0^{i-1} m_1^i) (\boldsymbol{\tau}^{\text{E},i} - p^i \mathbf{I}). \quad (2.25)$$

Mit dem Initialwert (2.20) ergibt sich für das rekursive Differenzenschema (2.25) der Anfangswert

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{V},0} = -(m_0^0 - m_1^0) (\boldsymbol{\tau}^{\text{E},0} - p^0 \mathbf{I}). \quad (2.26)$$

Für die numerische Implementierung ist ω und damit das Differenzenschema zu wählen. Bei der Auswahl von ω sind die Annahmen bezüglich der Radialabhängigkeit von $\mu = \mu(r)$ und der zusätzlichen Winkelabhängigkeit von $\nu = \nu(r, \Omega)$ zu beachten, da somit die Funktion m_0^i , außer für $\omega = 1$, radial- und winkelabhängig ist. Durch das Anwenden des Divergenzoperators auf das Produkt von m_0^i und dem elastischen Anteil der Spannung in (2.21) ergibt sich dann in (2.1) eine Kopplung winkelabhängiger Terme. Wird allerdings $\omega = 1$ gewählt, ergibt sich $m_0^i = 1$ und somit tritt keine Kopplung mit winkelabhängigen Termen auf. Durch die Wahl eines expliziten Euler-Differenzenschemas wird eine Kopplung mit winkelabhängigen Termen vermieden, und dadurch werden numerisch günstigere Gleichungen geschaffen (Martinec, 2000, S. 120), jedoch ist solch ein explizites Differenzenschema nicht notwendig stabil. Deshalb muß der Zeitschritt für das Differenzenschema beschränkt werden, was bei der numerischen Implementierung zu berücksichtigen ist. Für das explizite Euler-Differenzenschema ($\omega = 1$) folgt aus (2.21), (2.25) und (2.26)

$$\boldsymbol{\tau}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}^{\text{E},i+1} + \boldsymbol{\tau}^{\text{V},i}, \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{V},i} = (1 - M^i)\boldsymbol{\tau}^{\text{V},i-1} - 2\mu M^i \boldsymbol{\epsilon}^i, \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{V},0} = -2\mu M^0 \boldsymbol{\epsilon}^0. \quad (2.29)$$

Mit dem vereinfachten Differenzenschema (2.27) läßt sich auch die Impulserhaltungsgleichung (2.1) für t^{i+1} in $\boldsymbol{\tau}^{\text{E}}$ - und $\boldsymbol{\tau}^{\text{V}}$ - Anteile zerlegen und es ergibt sich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{\text{E},i+1} - \rho^{(0)} \operatorname{grad} \phi^{i+1} + \operatorname{div}(\rho^{(0)} \mathbf{u}^{i+1}) \operatorname{grad} \phi^{(0)} - \operatorname{grad}(\rho^{(0)} \mathbf{u}^{i+1}) \cdot \operatorname{grad} \phi^{(0)} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{\text{V},i}. \quad (2.30)$$

Diese inhomogene partielle Differentialgleichung gibt zum einen mit dem Term $-\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{\text{V},i}$ das viskose Verhalten des Maxwell-viskoelastischen Kontinuums wieder und zum anderen zeigt die Gleichung, daß das Problem der viskoelastischen Relaxation für t^{i+1} die gleiche Struktur aufweist wie das elastische Problem.

2.2.4 Schwache Formulierung des Randwertproblems

Das im vorhergehenden Abschnitt 2.2.2 beschriebene Randwertproblem soll hier in der schwachen Formulierung (z. B. Křížek & Neittaanmäki, 1990) dargestellt werden. Hierzu wird für jede Zeit t^{i+1} ein Raum \mathcal{V} von Testfunktionen benötigt, der durch

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{u} \in W_2^1(B)^3, \phi \in W_2^1(B), p \in L_2(B)\} \quad (2.31)$$

gegeben ist. Hier ist $L_2(B)$ der Raum der quadratintegrablen skalaren Funktionen für den Raum B , $W_2^1(B)$ ist der Sobolev-Raum skalarer Funktionen ϖ in B und $W_2^1(B)^3$ der Sobolev-Raum vektorieller Funktionen $\boldsymbol{\varpi}$ in B :

$$W_2^1(B) := \{\varpi \in L_2(B), \operatorname{grad} \varpi \in L_2(B)^3\}, \quad (2.32)$$

$$W_2^1(B)^3 := \{\boldsymbol{\varpi} \in L_2(B)^3, \operatorname{grad} \boldsymbol{\varpi} \in L_2(B)^3\}. \quad (2.33)$$

Für das Aufstellen der Variationsgleichung in der schwachen Formulierung wird das Energiefunktional \mathcal{E} benötigt, das sich aus der Summe von Energiefunktionalen ergibt, die mit dem Druck, \mathcal{E}_p , der elastischen

Scherung, \mathcal{E}_s , der Gravitation, \mathcal{E}_g , und der Eindeutigkeitsbedingung, \mathcal{E}_e , verbunden sind. Es ergibt sich damit

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi, p) := \mathcal{E}_p(\mathbf{u}, p) + \mathcal{E}_s(\mathbf{u}) + \mathcal{E}_g(\mathbf{u}, \phi) + \mathcal{E}_e(\mathbf{u}), \quad (2.34)$$

wobei die einzelnen Energiefunktionale wie folgt definiert sind:

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{u}, p) := \int_B p \operatorname{div} \mathbf{u} \, d^3 X, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{u}) := \int_B \mu(\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}) \, d^3 X, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g(\mathbf{u}, \phi) &:= \int_B \rho^{(0)} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \phi^{(0)}) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \phi^{(0)}) + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \phi) \right] d^3 X \\ &+ \frac{1}{8\pi G} \int_B (\operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \phi) \, d^3 X, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\mathcal{E}_e(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \int_B \rho^{(0)} \mathbf{u} \, d^3 X \cdot \int_B \rho^{(0)} \mathbf{u} \, d^3 X + \frac{1}{2} \int_B (\mathbf{e}_r \times \rho^{(0)} \mathbf{u}) \, d^3 X \cdot \int_B (\mathbf{e}_r \times \rho^{(0)} \mathbf{u}) \, d^3 X. \quad (2.38)$$

In (2.36) und im weiteren kennzeichnet $:$ das tensorielle Doppelpunkt-Produkt. Weitere Erklärungen zu diesem Produkt und zur Ableitung der Energiefunktionale finden sich in Martinec (2000, S. 121 f.). Desweiteren wird für die Variationsgleichung in der schwachen Formulierung das lineare Funktional \mathcal{F}^{i+1} benötigt, das durch die Summe aus dem Funktional verbunden mit dem dissipativen Term zur Zeit t^i , \mathcal{F}_d^i , und mit den Oberflächenbedingungen (2.14)–(2.17) zur Zeit t^{i+1} , \mathcal{F}_o^{i+1} , gegeben ist. Es ist

$$\mathcal{F}^{i+1}(\mathbf{u}, \phi) := \mathcal{F}_d^i(\mathbf{u}) + \mathcal{F}_o^{i+1}(\mathbf{u}, \phi), \quad (2.39)$$

mit

$$\mathcal{F}_d^i(\mathbf{u}) := - \int_B (\boldsymbol{\tau}^{\nu, i} : \boldsymbol{\epsilon}) \, d^3 X, \quad (2.40)$$

$$\mathcal{F}_o^{i+1}(\mathbf{u}, \phi) := \int_{\partial B} (\mathbf{b}_0^{i+1} \cdot \mathbf{u} + b_1^{i+1} \phi) \, d^2 X. \quad (2.41)$$

Die hier eingeführten Variablen \mathbf{b}_0 und b_1 geben die Inhomogenität der Oberflächenbedingungen (2.14)–(2.17) wieder und sind auf der Oberfläche ∂B durch

$$\mathbf{b}_0 := -g^{(0)}(a) \sigma^P \mathbf{e}_r, \quad (2.42)$$

$$b_1 := \frac{1}{4\pi G} (\operatorname{grad} \phi^+ \cdot \mathbf{e}_r) - \sigma^P \quad (2.43)$$

definiert, wobei mit ϕ^+ das gestörte Gravitationspotential auf der Außenseite der Oberfläche ∂B bezeichnet wird. Das lineare Funktional \mathcal{F}^{i+1} wird zur Zeit t^{i+1} berechnet, wobei allerdings nur \mathcal{F}_o^{i+1} für t^{i+1} bestimmt wird, hingegen \mathcal{F}_d^i aus den Variablen zur Zeit t^i abgeleitet wird. Dies begründet sich dadurch, daß der viskose Anteil der Spannung, $\boldsymbol{\tau}^{\nu, i}$, zur Zeit t^{i+1} als bekannte Funktion aus t^i verwendet wird.

Für die Beschreibung des Randwertproblems in der schwachen Formulierung wird die infinitesimale Variation, analog zum Gâteaux-Differential, des Energiefunktionals, \mathcal{E} , benötigt (Křížek & Neittaanmäki, 1990, Abs. 18.3), die sich mit den einzelnen Komponenten zu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi, p, \delta\mathbf{u}, \delta\phi, \delta p) &= \delta\mathcal{E}_p(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}, \delta p) + \delta\mathcal{E}_s(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \delta\mathcal{E}_g(\mathbf{u}, \phi, \delta\mathbf{u}, \delta\phi) \\ &+ \delta\mathcal{E}_e(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

ergibt. Die Variation der Energiefunktionale in (2.44) ist gegeben durch

$$\delta\mathcal{E}_p(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}, \delta p) = \int_B \operatorname{div}\mathbf{u}\delta p d^3X + \int_B p \operatorname{div}\delta\mathbf{u} d^3X, \quad (2.45)$$

$$\delta\mathcal{E}_s(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_B 2\mu(\boldsymbol{\epsilon} : \delta\boldsymbol{\epsilon}) d^3X, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_g(\mathbf{u}, \phi, \delta\mathbf{u}, \delta\phi) &= \int_B \rho^{(0)} [\operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}\phi^{(0)}) - \operatorname{div}\mathbf{u} \operatorname{grad}\phi^{(0)} + \operatorname{grad}\phi] \cdot \delta\mathbf{u} d^3X \\ &+ \int_B \left[\frac{1}{4\pi G} (\operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{grad}\delta\phi) + \rho^{(0)} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}\delta\phi) \right] d^3X, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_e(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \int_B \rho^{(0)} \mathbf{u} d^3X \cdot \int_B \rho^{(0)} \delta\mathbf{u} d^3X \\ &+ \int_B (\mathbf{e}_r \times \rho^{(0)} \mathbf{u}) d^3X \cdot \int_B (\mathbf{e}_r \times \rho^{(0)} \delta\mathbf{u}) d^3X. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Hier gilt $\delta\boldsymbol{\epsilon} := (\operatorname{grad}\delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}^T\delta\mathbf{u})/2$. Die Ableitung für (2.47) ist detailliert in Martinec (2000, Anh. A) dargestellt. Ebenso wird die Variation des linearen Funktionals \mathcal{F}^{i+1} gemäß

$$\delta\mathcal{F}^{i+1}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \delta\mathcal{F}_d^i(\delta\mathbf{u}) + \delta\mathcal{F}_o^{i+1}(\delta\mathbf{u}, \delta\phi) \quad (2.49)$$

benötigt, wobei die beiden Komponenten $\delta\mathcal{F}_d^i$ und $\delta\mathcal{F}_o^{i+1}$ durch

$$\delta\mathcal{F}_d^i(\delta\mathbf{u}) = - \int_B (\boldsymbol{\tau}^{\nu, i} : \delta\boldsymbol{\epsilon}) d^3X, \quad (2.50)$$

$$\delta\mathcal{F}_o^{i+1}(\delta\mathbf{u}, \delta\phi) = \int_{\partial B} (\mathbf{b}_0^{i+1} \cdot \delta\mathbf{u} + b_1^{i+1} \delta\phi) d^2X \quad (2.51)$$

gegeben sind. Das beschriebene Problem läßt sich damit wie folgt formulieren:

Die schwache Formulierung des Randwertproblems (2.1)–(2.18) ist das Auffinden von $(\mathbf{u}, \phi, p) \in \mathcal{V} \times W_2^1(0, T)$, so daß die Initialbedingung (2.20) erfüllt ist und so daß zu jeder Zeit t^{i+1} mit $t^{i+1} \in [0, T]$, $T > 0$ die folgende Variationsgleichung gilt:

$$\delta\mathcal{E}(\mathbf{u}^{i+1}, \phi^{i+1}, p^{i+1}, \delta\mathbf{u}, \delta\phi, \delta p) = \delta\mathcal{F}^{i+1}(\delta\mathbf{u}, \delta\phi) \quad \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\phi, \delta p) \in \mathcal{V}. \quad (2.52)$$

Die Bilinearform $\delta\mathcal{E}$ und das lineare Funktional $\delta\mathcal{F}^{i+1}$ sind durch (2.44) und (2.49) gegeben. Desweiteren wird angenommen, daß $\mu > 0$ und $\nu > 0$, wobei der elastische Schermodul und die Viskosität realwertige beschränkte Funktionen in B sind. Auf der Oberfläche ∂B sind die Randwerte \mathbf{b}_0 und b_1 quadratintegrale Funktionen.

2.2.5 Repräsentation der Winkelabhängigkeit durch Kugelflächenfunktionen

Da hier das sphärisches Kontinuum B als Modell der Erde verwendet wird, sollen sphärische Koordinaten, (r, Ω) , eingeführt und die Variablen durch Kugelflächenfunktionen repräsentiert werden. Zur gewählten Zeit t^{i+1} soll die Winkelabhängigkeit der Lösung des Randwertproblems, $(\mathbf{u}, \phi, p) \in \mathcal{V}$, und der Testfunktionen, $(\delta\mathbf{u}, \delta\phi, \delta p) \in \mathcal{V}$, durch Kugelflächenfunktionen approximiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \Omega, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left[\begin{array}{l} U_{jm}(r, t) \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + V_{jm}(r, t) \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) + W_{jm}(r, t) \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) \\ \delta U_{jm}(r, t) \delta \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + \delta V_{jm}(r, t) \delta \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) + \delta W_{jm}(r, t) \delta \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) \end{array} \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \phi(r, \Omega, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \Phi_{jm}(r, t) Y_{jm}(\Omega), \\ \delta\phi(r, \Omega, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \delta\Phi_{jm}(r, t) Y_{jm}(\Omega), \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} p(r, \Omega, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j P_{jm}(r, t) Y_{jm}(\Omega), \\ \delta p(r, \Omega, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \delta P_{jm}(r, t) Y_{jm}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.55)$$

$Y_{jm}(\Omega)$ bezeichnet die skalaren und $\mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$, mit $\lambda = -1, 0, 1$, die vektoriellen Kugelflächenfunktionen. Deren Definitionen sind in Anhang A.2 gegeben (siehe auch Martinec, 2000, Anh. B). Zu dieser Repräsentation der Variablen mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen ist außerdem anzumerken, daß in (2.53) die Summation in den meisten Veröffentlichungen zu diesem Thema erst mit $j = 1$ beginnt, da mit der Inkompressibilitätsbedingung (2.5) für $j = 0$ die Bedingung $\mathbf{u} = 0$ begründet werden kann. Da in dieser Arbeit in der MSG die Radialverschiebung auch für $j = 0$, also auch U_{00} benötigt wird, soll diese hier auch berechnet werden. Diese Approximation der Variablen und der Testfunktionen mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen wird im folgenden als spektrale Repräsentation bezeichnet.

Mit der spektralen Repräsentation von \mathbf{u} und ϕ folgt für $\text{div}\mathbf{u}$, ϵ und $\text{grad}\phi$:

$$\text{div}\mathbf{u} = \sum_{jm} \left(\frac{dU_{jm}}{dr} + \frac{2U_{jm}}{r} + \frac{JV_{jm}}{r} \right) Y_{jm}(\Omega), \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{jm} \left[\frac{dU_{jm}}{dr} \mathbf{Z}_{jm}^{(1)}(\Omega) + \left(\frac{dV_{jm}}{dr} - \frac{V_{jm}}{r} + \frac{U_{jm}}{r} \right) \mathbf{Z}_{jm}^{(2)}(\Omega) + \left(\frac{dW_{jm}}{dr} - \frac{W_{jm}}{r} \right) \mathbf{Z}_{jm}^{(3)}(\Omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{W_{jm}}{r} \mathbf{Z}_{jm}^{(4)}(\Omega) - \frac{1}{2r} (2U_{jm} - JV_{jm}) \mathbf{Z}_{jm}^{(5)}(\Omega) + \frac{V_{jm}}{2r} \mathbf{Z}_{jm}^{(6)}(\Omega) \right], \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\text{grad}\phi = \sum_{jm} \left[\frac{d\Phi_{jm}}{dr} \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + \frac{\Phi_{jm}}{r} \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) \right], \quad (2.58)$$

wobei $J := j(j+1)$ gilt und $\mathbf{Z}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$ die tensoriellen Kugelflächenfunktionen bezeichnet, die in Anhang A.2 definiert sind (siehe auch Martinec, 2000, Anh. B). Desweiteren ist die Abkürzung \sum_{jm} für die Doppelsumme $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j$ eingeführt. Zudem sind hier und in den folgenden Abschnitten des Kapitel 2 die Argumente r, t der Koeffizienten der spektralen Repräsentation unterdrückt.

Im folgenden werden die Variationen der Energiefunktionale (2.45)–(2.48) mit Kugelflächenfunkti-

onen approximiert. Für (2.45) ergibt sich mit (2.56)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_p &= \sum_{jm} \int_0^a \left(\frac{dU_{jm}}{dr} + \frac{2U_{jm}}{r} + \frac{JV_{jm}}{r} \right) \delta P_{jm}^* r^2 dr \\ &+ \sum_{jm} \int_0^a \left(\frac{d\delta U_{jm}^*}{dr} + \frac{2\delta U_{jm}^*}{r} + \frac{J\delta V_{jm}^*}{r} \right) P_{jm} r^2 dr. \end{aligned} \quad (2.59)$$

In obiger Gleichung und im folgenden symbolisiert * die komplex-konjugierte Größe. Zur Integration hinsichtlich der Winkelkoordinate, Ω , ist auch die Orthogonalitätseigenschaft (A.14) herangezogen. Für die weitere Ableitung wird die Radialsymmetrie des Schermoduls, $\mu = \mu(r)$, verwendet. Aus (2.46) folgt dann mit (2.57) und für die Integration hinsichtlich Ω mit den Orthogonalitätseigenschaften für tensorielle Kugelflächenfunktionen (Martinez, 2000, (B12), (B13))

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_s &= \sum_{jm} \int_0^a \mu \left[2 \frac{dU_{jm}}{dr} \frac{d\delta U_{jm}^*}{dr} + J \left(\frac{dV_{jm}}{dr} - \frac{V_{jm}}{r} + \frac{U_{jm}}{r} \right) \left(\frac{d\delta V_{jm}^*}{dr} - \frac{\delta V_{jm}^*}{r} + \frac{d\delta U_{jm}^*}{r} \right) \right. \\ &+ J \left(\frac{dW_{jm}}{dr} - \frac{W_{jm}}{r} \right) \left(\frac{d\delta W_{jm}^*}{dr} - \frac{\delta W_{jm}^*}{r} \right) + \frac{1}{r^2} J(J-2) W_{jm} \delta W_{jm}^* \\ &\left. + \frac{1}{r^2} (2U_{jm} - JV_{jm}) (2\delta U_{jm}^* - J\delta V_{jm}^*) + \frac{1}{r^2} J(J-2) V_{jm} \delta V_{jm}^* \right] r^2 dr. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die Voraussetzung, daß der Schermodul, μ , nur eine Funktion von r ist, spiegelt sich in der Entkopplung von μ und \mathbf{u} wider.

Für die Ableitung der spektralen Repräsentation der Variation des Energiefunktionals $\delta\mathcal{E}_g$ ist es hilfreich, zuerst die Volumenkräftdichte \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} := \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi^{(0)}) - \text{div } \mathbf{u} \text{ grad } \phi^{(0)} + \text{grad } \phi, \quad (2.61)$$

zu definieren und deren spektrale Repräsentation zu bestimmen. Mit (2.53), (2.56) und (2.58) ergibt sich

$$\mathbf{f} = \sum_{jm} \left[\left(-\frac{4g^{(0)}U_{jm}}{r} + \frac{g^{(0)}JV_{jm}}{r} + \frac{d\Phi_{jm}}{dr} + 4\pi G\rho^{(0)}U_{jm} \right) \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) \right. \quad (2.62)$$

$$\left. + \left(\frac{g^{(0)}U_{jm}}{r} + \frac{\Phi_{jm}}{r} \right) \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) \right]. \quad (2.63)$$

Aus (2.47) mit dem obigen Zusammenhang und den Orthogonalitätseigenschaften (A.21) und (A.22) für vektorielle Kugelflächenfunktionen folgt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_g &= \sum_{jm} \int_0^a \rho^{(0)} \left[\left(-\frac{4g^{(0)}U_{jm}}{r} + \frac{g^{(0)}JV_{jm}}{r} + \frac{d\Phi_{jm}}{dr} + 4\pi G\rho^{(0)}U_{jm} \right) \delta U_{jm}^* \right. \\ &+ J \left(\frac{g^{(0)}U_{jm}}{r} + \frac{\Phi_{jm}}{r} \right) \delta V_{jm}^* \left. \right] r^2 dr \\ &+ \sum_{jm} \int_0^a \left[\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{d\Phi_{jm}}{dr} \frac{d\delta\Phi_{jm}^*}{dr} + J \frac{\Phi_{jm}}{r} \frac{\delta\Phi_{jm}^*}{r} \right) + \rho^{(0)} \left(U_{jm} \frac{d\delta\Phi_{jm}^*}{dr} + \frac{JV_{jm}}{r} \delta\Phi_{jm}^* \right) \right] r^2 dr. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Für die Bilinearform (2.48) läßt sich mit Hilfe von (A.23) der folgende Ausdruck finden:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_e &= \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 \left[\int_0^a \rho^{(0)} (U_{1m} + 2V_{1m}) r^2 dr \int_0^a \rho^{(0)} (\delta U_{1m}^*(a) + 2V_{1m}^*(a)) r^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a \rho^{(0)} W_{1m} r^2 dr \int_0^a \rho^{(0)} \delta W_{1m}^* r^2 dr \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Die Flächenmassendichte, σ^P , wird mit Hilfe der skalaren Kugelflächenfunktionen dargestellt, und es ergibt sich die spektrale Repräsentation von σ^P zu

$$\sigma^P(\Omega, t) = \sum_{jm} \sigma_{jm}(t) Y_{jm}(\Omega). \quad (2.66)$$

Da sich die Variation des Gravitationspotentials, ϕ , außerhalb von B harmonisch verhält und der Übergang von ϕ über die Oberfläche ∂B kontinuierlich ist, lassen sich mit (2.66) die spektralen Repräsentationen für b_0 und b_1 angeben, die die Randwerte des Problems beschreiben:

$$b_0 = -g^{(0)}(a) \sum_{jm} \sigma_{jm}(t) \mathcal{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega), \quad (2.67)$$

$$b_1 = -\frac{1}{4\pi G a} \sum_{jm} (j+1) \Phi_{jm}(a) Y_{jm}(\Omega) - \sum_{jm} \sigma_{jm}(t) Y_{jm}(\Omega). \quad (2.68)$$

Das lineare Funktional $\delta\mathcal{F}_o$ aus (2.51) läßt sich dann durch

$$\delta\mathcal{F}_o^{i+1} = -\frac{a}{4\pi G} \sum_{jm} (j+1) \Phi_{jm}^{i+1}(a) \delta\Phi_{jm}^*(a) - a^2 \sum_{jm} \sigma_{jm}^{i+1} [g^{(0)}(a) \delta U_{jm}^*(a) + \delta\Phi_{jm}^*(a)] \quad (2.69)$$

beschreiben. Die spektrale Repräsentation des linearen Funktional \mathcal{F}^{i+1} kann erst mit Hilfe der spektralen Repräsentation des dissipativen linearen Funktional $\delta\mathcal{F}_d^i$ angegeben werden, die allerdings erst in Abschnitt 2.2.7 abgeleitet wird.

2.2.6 Repräsentation der Radialabhängigkeit durch finite Elemente

Zur Repräsentation der Radialabhängigkeit durch finite Elemente wird das Intervall $[0, a]$ in P Teilintervalle mit den Randwerten $0 = r_1 < r_2 < \dots < r_P < r_{P+1} = a$ unterteilt. Für den Sobolev-Raum $W_2^1(0, a)$ können stückweise lineare Basisfunktionen durch

$$\psi_k(r_i) = \delta_{ki} \quad (2.70)$$

beschrieben werden, wobei δ_{ki} das Kronecker-Delta-Symbol ist. Im Intervall $r \in [r_k, r_{k+1}]$ sind nur zwei Basisfunktionen ungleich Null:

$$\psi_k(r) = \frac{r_{k+1} - r}{h_k}, \quad \psi_{k+1}(r) = \frac{r - r_k}{h_k}, \quad (2.71)$$

wobei $h_k := r_{k+1} - r_k$ ist. Da die gesuchten Amplituden der spektralen Repräsentation, $U_{jm}, V_{jm}, W_{jm}, \Phi_{jm}$, sowie die Amplituden der Testfunktionen, $\delta U_{jm}, \delta V_{jm}, \delta W_{jm}, \delta \Phi_{jm}$ ¹, Elemente des Sobolev-Raums, $W_2^1(0, a)$, sind, lassen sich diese mit einer endlichen Reihe finiter Elemente, ψ_k , approximieren, und es folgt

$$\begin{bmatrix} U_{jm}(r) \\ V_{jm}(r) \\ W_{jm}(r) \\ \Phi_{jm}(r) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{P+1} \begin{bmatrix} U_{jm}^k \\ V_{jm}^k \\ W_{jm}^k \\ \Phi_{jm}^k \end{bmatrix} \psi_k(r), \quad \begin{bmatrix} \delta U_{jm}(r) \\ \delta V_{jm}(r) \\ \delta W_{jm}(r) \\ \delta \Phi_{jm}(r) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{P+1} \begin{bmatrix} \delta U_{jm}^k \\ \delta V_{jm}^k \\ \delta W_{jm}^k \\ \delta \Phi_{jm}^k \end{bmatrix} \psi_k(r). \quad (2.72)$$

Für den Raum $L_2(0, a)$ stellen die stückweise konstanten Funktionen ξ_k Basisfunktionen dar, die durch

$$\xi_k(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \in [r_k, r_{k+1}] \\ 0 & \text{für } r \notin [r_k, r_{k+1}] \end{cases} \quad (2.73)$$

gegeben sind. Mit diesen finiten Elementen lassen sich die Amplituden der spektralen Repräsentation des Auflastdrucks und der zugehörigen Testfunktion wie folgt approximieren:

$$\begin{bmatrix} P_{jm}(r) \\ \delta P_{jm}(r) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^P \begin{bmatrix} P_{jm}^k \\ \delta P_{jm}^k \end{bmatrix} \xi_k(r). \quad (2.74)$$

Für den Schermodul, μ , und die ungestörte Dichte, $\rho^{(0)}$, ist bisher nur die einschränkende Annahme gemacht, daß sie Funktionen der Radialentfernung, r , und quadratintegrale Funktionen sind, so daß $\mu(r) \in L_2(0, a)$ und $\rho^{(0)}(r) \in L_2(0, a)$ gilt. Unter diesen Annahmen können sie mit stückweise konstanten Funktionen approximiert werden, so daß

$$\mu(r) = \mu_k, \quad \rho^{(0)}(r) = \rho_k \quad \text{für } r \in [r_k, r_{k+1}] \quad (2.75)$$

gilt, wobei μ_k und ρ_k konstant sind. Mit der so beschriebenen Dichteschichtung ist es möglich, die Gravitationsbeschleunigung im k -ten Intervall, $r \in [r_k, r_{k+1}]$, durch

$$g^{(0)}(r) = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho_k r + \frac{R_k}{r^2} \right) \quad (2.76)$$

anzugeben, wobei

$$R_k := \begin{cases} 0 & \text{für } k = 1 \\ \sum_{i=2}^k (\rho_{i-1} - \rho_i) r_i^3 & \text{für } k = 2, \dots, P \end{cases} \quad (2.77)$$

ist. Um die Variationen der Energiefunktionale, $\delta \mathcal{E}$, und der linearen Funktionale, $\delta \mathcal{F}^{i+1}$, durch finite Elemente zu approximieren, werden die obigen Ausdrücke verwendet. Für $\delta \mathcal{E}_s$ wird jeder Summand in (2.60) einzeln integriert, wobei die Integrale über die finiten Elemente ψ_k und deren Ableitungen mit $I_{kk}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, \dots, 7$, bezeichnet werden und in Anhang A.3 gegeben sind. Es ergibt sich

$$\delta \mathcal{E}_s = \sum_{jm} \sum_{k=1}^P \mu_k \sum_{\alpha=k}^{k+1} \sum_{\beta=k}^{k+1} \left\{ 2I_{\alpha\beta}^{(1)} U_{jm}^\alpha \delta U_{jm}^{\beta*} + J \left[I_{\alpha\beta}^{(1)} V_{jm}^\alpha \delta V_{jm}^{\beta*} I_{\alpha\beta}^{(3)} (-V_{jm}^\alpha + U_{jm}^\alpha) \delta V_{jm}^{\beta*} \right] \right\}$$

¹Die Amplituden der spektralen Repräsentation sowie der Testfunktionen sind Funktionen von r und t , jedoch wird das Argument t unterdrückt.

$$\begin{aligned}
 & + I_{\beta\alpha}^{(3)} V_{jm}^\alpha \left(-\delta V_{jm}^{\beta*} + \delta U_{jm}^{\beta*} \right) + I_{\alpha\beta}^{(6)} \left(-V_{jm}^\alpha + U_{jm}^\alpha \right) \left(-\delta V_{jm}^{\beta*} + \delta U_{jm}^{\beta*} \right) \\
 & + J \left(I_{\alpha\beta}^{(1)} - I_{\alpha\beta}^{(3)} - I_{\beta\alpha}^{(3)} + I_{\alpha\beta}^{(6)} \right) W_{jm}^\alpha \delta W_{jm}^{\beta*} + (J-2) I_{\alpha\beta}^{(6)} W_{jm}^\alpha \delta W_{jm}^{\beta*} \\
 & + I_{\alpha\beta}^{(6)} \left(2U_{jm}^\alpha - J V_{jm}^\alpha \right) \left(2\delta U_{jm}^{\beta*} - J \delta V_{jm}^{\beta*} \right) + J(J-2) I_{\alpha\beta}^{(6)} V_{jm}^\alpha \delta V_{jm}^{\beta*} \}. \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Aus (2.64) läßt sich für $\delta\mathcal{E}_g$ der folgende Ausdruck für die Approximation mit finiten Elementen ableiten:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{E}_g & = \sum_{jm} \sum_{k=1}^P \rho_k \sum_{\alpha=k}^{k+1} \sum_{\beta=k}^{k+1} \left\{ \left[\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_k I_{\alpha\beta}^{(4)} + R_k I_{\alpha\beta}^{(7)} \right) \left(-4U_{jm}^\alpha + J V_{jm}^\alpha \right) + I_{\alpha\beta}^{(2)} \Phi_{jm}^\alpha \right. \right. \\
 & + \left. \left. 4\pi G \rho_k I_{\alpha\beta}^{(4)} U_{jm}^\alpha \right] \delta U_{jm}^{\beta*} + J \left[\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_k I_{\alpha\beta}^{(4)} + R_k I_{\alpha\beta}^{(7)} \right) U_{jm}^\alpha + I_{\alpha\beta}^{(5)} \Phi_{jm}^\alpha \right] \delta V_{jm}^{\beta*} \right. \\
 & + \left. \left[\frac{1}{4\pi G \rho_k} \left(I_{\alpha\beta}^{(1)} + J I_{\alpha\beta}^{(6)} \right) \Phi_{jm}^\alpha + I_{\alpha\beta}^{(2)} U_{jm}^\alpha + J I_{\alpha\beta}^{(5)} V_{jm}^\alpha \right] \delta \Phi_{jm}^{\beta*} \right\}. \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

Für das Energiefunktional $\delta\mathcal{E}_p$ werden die Integrale der Produkte der finiten Elemente ψ_k und ξ_k benötigt, wobei die stückweise konstanten Funktionen ξ_k die jeweilige Integration vereinfachen. Diese Integrale werden mit $K_k^{(\lambda)}$ bezeichnet und sind in Anhang A.3 gegeben. Mit diesen Definitionen ergibt sich für $\delta\mathcal{E}_p$ aus (2.59) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{E}_p & = \sum_{jm} \sum_{k=1}^P \left[\delta P_{jm}^{k*} \sum_{\alpha=k}^{k+1} \left(K_\alpha^{(1)} U_{jm}^\alpha + 2K_\alpha^{(2)} U_{jm}^\alpha - J K_\alpha^{(2)} V_{jm}^\alpha \right) \right. \\
 & + \left. P_{jm}^{k*} \sum_{\alpha=k}^{k+1} \left(K_\alpha^{(1)} \delta U_{jm}^{\alpha*} + 2K_\alpha^{(2)} \delta U_{jm}^{\alpha*} - J K_\alpha^{(2)} \delta V_{jm}^{\alpha*} \right) \right]. \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

Aus (2.65) folgt für $\delta\mathcal{E}_e$ mit den oben eingeführten Integralen $K_k^{(\lambda)}$ (Anhang A.3)

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{E}_e & = \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 \left[\sum_{k=1}^P \rho_k \sum_{\alpha=k}^{k+1} K_\alpha^{(3)} \left(U_{1m}^\alpha + 2V_{1m}^\alpha \right) \sum_{l=1}^P \rho_l \sum_{\beta=l}^{l+1} K_\beta^{(3)} \left(\delta U_{1m}^{\beta*} + 2\delta V_{1m}^{\beta*} \right) \right. \\
 & + \left. \sum_{k=1}^P \rho_k \sum_{\alpha=k}^{k+1} K_\alpha^{(3)} W_{1m}^\alpha \sum_{l=1}^P \rho_l \sum_{\beta=l}^{l+1} K_\beta^{(3)} W_{1m}^{\beta*} \right]. \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

Die Approximation des linearen Funktionals $\delta\mathcal{F}_o^{i+1}$ ist durch

$$\delta\mathcal{F}_o^{i+1} = -\frac{a}{4\pi G} \sum_{jm} (j+1) \Phi_{jm}^{j+1, P+1} \delta \Phi_{jm}^{P+1*} - a^2 \sum_{jm} \sigma_{jm}^{i+1} \left[g^{(0)}(a) \delta U_{jm}^{P+1*} + \delta \Phi_{jm}^{P+1*} \right] \quad (2.82)$$

gegeben, da $\psi_{P+1}(r)$ das einzige finite Element ist, das an der Oberfläche, $r = a$, nicht verschwindet.

2.2.7 Berechnung der dissipativen Energie

Im folgenden wird die dissipative Energie, $\delta\mathcal{F}_d^i$, berechnet, wobei diese durch (2.50) gegeben ist. Dazu wird zuerst ϵ gemäß (2.57) durch tensorielle Kugelflächenfunktionen und finite Elemente approximiert. Mit der Approximation von \mathbf{u} mit finiten Elementen entsprechend (2.72) folgt dann

$$\epsilon(r, \Omega) = \sum_{jm} \sum_{\lambda=1}^6 \epsilon_{jm}^\lambda(r) \mathbf{Z}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega), \quad (2.83)$$

wobei die radialabhängigen Amplituden ϵ_{jm}^λ durch folgenden Ausdruck gegeben sind:

$$\epsilon_{jm}^\lambda(r) = \frac{a_{jm}^\lambda}{h_k} + b_{jm}^\lambda \frac{\psi_k(r)}{r} + c_{jm}^\lambda \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \quad \text{für } r \in [r_k, r_{k+1}]. \quad (2.84)$$

Hier sind ψ_k die in Abschnitt 2.2.6 definierten finiten Elemente und die Konstanten a_{jm}^λ , b_{jm}^λ und c_{jm}^λ lassen sich mit den Koeffizienten U_{jm}^k , V_{jm}^k und W_{jm}^k der Approximation des Verschiebungsvektors \mathbf{u} durch finite Elemente wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} a_{jm}^1 & b_{jm}^1 & c_{jm}^1 \\ a_{jm}^2 & b_{jm}^2 & c_{jm}^2 \\ a_{jm}^3 & b_{jm}^3 & c_{jm}^3 \\ a_{jm}^4 & b_{jm}^4 & c_{jm}^4 \\ a_{jm}^5 & b_{jm}^5 & c_{jm}^5 \\ a_{jm}^6 & b_{jm}^6 & c_{jm}^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{jm}^k + U_{jm}^{k+1} & 0 & 0 \\ -V_{jm}^k + V_{jm}^{k+1} & -V_{jm}^k + U_{jm}^k & -V_{jm}^{k+1} + -U_{jm}^{k+1} \\ -W_{jm}^k + W_{jm}^{k+1} & -W_{jm}^k & -W_{jm}^{k+1} \\ 0 & W_{jm}^k & W_{jm}^{k+1} \\ 0 & -U_{jm}^k + JV_{jm}^k/2 & -U_{jm}^{k+1} + JV_{jm}^{k+1}/2 \\ 0 & V_{jm}^k/2 & V_{jm}^{k+1}/2 \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Wird (2.84) in (2.83) substituiert, ergibt sich

$$\epsilon(r, \Omega) = \mathbf{a}(\Omega) \frac{1}{h_k} + \mathbf{b}(\Omega) \frac{\psi_k(r)}{r} + \mathbf{c}(\Omega) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r}, \quad (2.86)$$

wobei \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} Tensoren zweiter Ordnung sind, die durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(\Omega) \\ \mathbf{b}(\Omega) \\ \mathbf{c}(\Omega) \end{bmatrix} := \sum_{jm} \sum_{\lambda=1}^6 \begin{bmatrix} a_{jm}^\lambda \\ b_{jm}^\lambda \\ c_{jm}^\lambda \end{bmatrix} \mathbf{Z}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega) \quad (2.87)$$

gegeben sind. Die Tensoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} können alternativ auch mit Hilfe der symmetrischen dyadischen Basisvektoren der sphärischen Koordinaten definiert werden, wie sie in Anhang A.2 durch (A.30) gegeben sind:

$$\mathbf{a}(\Omega) = a_{rr}(\Omega) \mathbf{e}_{rr} + a_{r\vartheta}(\Omega) \mathbf{e}_{r\vartheta} + a_{r\varphi}(\Omega) \mathbf{e}_{r\varphi} + a_{\vartheta\vartheta}(\Omega) \mathbf{e}_{\vartheta\vartheta} + a_{\vartheta\varphi}(\Omega) \mathbf{e}_{\vartheta\varphi} + a_{\varphi\varphi}(\Omega) \mathbf{e}_{\varphi\varphi} \quad (2.88)$$

und analog für die Tensoren \mathbf{b} und \mathbf{c} . Die dyadischen Komponenten dieser Repräsentation sind in Anhang A.4 zu finden.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, eine Methode zur Berechnung des dissipativen Funktionals, $\delta \mathcal{F}_d^i(\delta \mathbf{u})$, zu entwickeln. Diese Berechnung gestaltet sich aufgrund der Kopplung der Koeffizienten der tensoriellen Kugelflächenfunktionen von ϵ in (2.87) mit der lateral variierenden Viskosität, $\nu(r, \Omega)$, kompliziert, und es kann nur eine approximative numerische Methode angegeben werden. Das Integral in (2.50) wird in P Intervalle bezüglich r unterteilt, und mit (2.86) ergeben sich nur noch Integrale folgender Gestalt:

$$\int_{r^k}^{r^{k+1}} \psi_i(r) \psi_j(r) r^\kappa dr. \quad (2.89)$$

Hier kann die Potenz von r die Werte $\kappa = 0, 1, 2$ annehmen, und die Indizes i und j sind entweder k oder $k + 1$. Diese Integrale können numerisch berechnet werden, wozu die Gauß-Legendre-Quadratur

über zwei Punkte, $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3}$, mit den Gewichten 1 gewählt wird (z. B. Press et al., 1992, Abs. 4.5). Die Gauß-Legendre-Quadratur für (2.50) hat dann die Form

$$\int_B (\boldsymbol{\tau}^{\vee,i} : \delta \boldsymbol{\epsilon}) d^3 X = \sum_{k=1}^P \sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{D}(r_\alpha; \boldsymbol{\tau}^{\vee,i}(r_\alpha), \delta \boldsymbol{\epsilon}(r_\alpha)) \frac{r_\alpha h_k}{2}. \quad (2.90)$$

Hier ist

$$r_\alpha := \frac{1}{2}(h_k x_\alpha + r_k + r_{k+1}) \quad \text{mit } \alpha = 1, 2, \quad (2.91)$$

und für den winkelabhängigen Teil des dissipativen Funktionals gilt

$$\mathcal{D}(r; \boldsymbol{\tau}^{\vee,i}, \delta \boldsymbol{\epsilon}) := \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\tau}^{\vee,i} : \delta \boldsymbol{\epsilon}) d\Omega. \quad (2.92)$$

Auch die zweidimensionale Integration der Winkelabhängigkeit hinsichtlich des vollen Raumwinkels, Ω_0 , in (2.92) kann numerisch mit der Gauß-Legendre-Quadratur approximiert werden. Es ergibt sich

$$\mathcal{D}(r; \boldsymbol{\tau}^{\vee,i}, \delta \boldsymbol{\epsilon}) \approx \sum_{\ell=1}^L w_\ell (\boldsymbol{\tau}^{\vee,i}(r, \Omega_\ell) : \delta \boldsymbol{\epsilon}(r, \Omega_\ell)), \quad (2.93)$$

wobei mit w_ℓ die Gewichte und mit Ω_ℓ die Gitterpunkte eines zweidimensionalen Gitters bezeichnet werden. Diese Gitterpunkte werden durch $\Omega_\ell := (\vartheta_{\ell_1}, \varphi_{\ell_2})$ definiert. Für die Indizes gilt $\ell_1 = 1, \dots, L_1$ und $\ell_2 = 1, \dots, L_2$ mit dem Zusammenhang $\ell = (\ell_1 - 1)L_2 + \ell_2$, und es ergibt sich für die Gesamtanzahl, L , der Gitterpunkte $L = L_1 L_2$.

Um die hier angegebenen Integrale lösen zu können, wird vorausgesetzt, daß die Viskosität ν eine quadratintegrale Funktion in B ist, $\nu \in L_2(B)$. Im folgenden wird die Viskositätsverteilung durch eine stückweise konstante Funktion approximiert:

$$\nu(r, \Omega) = \nu_{k\ell}, \quad (2.94)$$

wobei $\nu_{k\ell}$ die Werte der Viskosität an den Gitterpunkten (r_k, Ω_ℓ) sind. Mit der Diskretisierung (2.94) der Viskositätsverteilung läßt sich aus dem Differenzenschema (2.28)

$$\boldsymbol{\tau}^{\vee,i}(r, \Omega_\ell) = (1 - M_{k\ell}^i) \boldsymbol{\tau}^{\vee,i-1}(r, \Omega_\ell) - 2\mu_k M_{k\ell}^i \boldsymbol{\epsilon}^i(r, \Omega_\ell) \quad \text{für } r \in [r_k, r_{k+1}] \quad (2.95)$$

ableiten, wobei $M_{k\ell}^i$ durch

$$M_{k\ell}^i := \frac{\mu_k}{\nu_{k\ell}} (t^{i+1} - t^i) \quad (2.96)$$

definiert ist. Mit der Approximation der Radialabhängigkeit von $\boldsymbol{\epsilon}$ durch finite Elemente gemäß (2.86) an einem Gitterpunkt Ω_ℓ zur Zeit t^i ergibt sich aus (2.95) für die Radialabhängigkeit des viskosen Anteils der Spannung, $\boldsymbol{\tau}^{\vee,i}$, die Form

$$\boldsymbol{\tau}^{\vee,i}(r, \Omega_\ell) = \mathbf{A}_k^i(\Omega_\ell) \frac{1}{h_k} + \mathbf{B}_k^i(\Omega_\ell) \frac{\psi_k(r)}{r} + \mathbf{C}_k^i(\Omega_\ell) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \quad \text{für } r \in [r_k, r_{k+1}]. \quad (2.97)$$

Die Werte der tensoriellen Funktionen \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i und \mathbf{C}_k^i werden hierbei an einem Gitterpunkt Ω_ℓ mit dem folgenden Differenzenschema berechnet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^i(\Omega_\ell) \\ \mathbf{B}_k^i(\Omega_\ell) \\ \mathbf{C}_k^i(\Omega_\ell) \end{bmatrix} = (1 - M_{k\ell}^i) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^{i-1}(\Omega_\ell) \\ \mathbf{B}_k^{i-1}(\Omega_\ell) \\ \mathbf{C}_k^{i-1}(\Omega_\ell) \end{bmatrix} - 2\mu_k M_{k\ell}^i \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\Omega_\ell; \mathbf{u}^i) \\ \mathbf{b}(\Omega_\ell; \mathbf{u}^i) \\ \mathbf{c}(\Omega_\ell; \mathbf{u}^i) \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Die SFER von $\tau^{v,i}$ in (2.97) ergibt sich mit Hilfe der Tensoren A_k^i , B_k^i und C_k^i , die im folgenden mit dyadischen Basisvektoren der sphärischen Koordinaten analog zu (2.88) beschrieben werden. Bei Verwendung der SFER von $\delta\epsilon$ gemäß (2.83) kann das Doppelpunkt-Produkt der Tensoren $\tau^{v,i}$ und $\delta\epsilon$ für $r \in [r_k, r_{k+1}]$ in folgender Form angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\tau^{v,i}(r, \Omega) : \delta\epsilon(r, \Omega) &= \frac{1}{h_k} A_{k,rr}^i(\Omega) \sum_{jm} [\delta\epsilon_{jm}^1(r) Y_{jm}(\Omega)]^* \\
&+ \frac{1}{2} \left[A_{k,r\vartheta}^i(\Omega) \frac{1}{h_k} + B_{k,r\vartheta}^i(\Omega) \frac{\psi_k(r)}{r} + C_{k,r\vartheta}^i(\Omega) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \right] \\
&\cdot \sum_{jm} [\delta\epsilon_{jm}^2(r) D_{jm}(\Omega) - \delta\epsilon_{jm}^3(r) \Phi_{jm}(\Omega)]^* \\
&+ \frac{1}{2} \left[A_{k,r\varphi}^i(\Omega) \frac{1}{h_k} + B_{k,r\varphi}^i(\Omega) \frac{\psi_k(r)}{r} + C_{k,r\varphi}^i(\Omega) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \right] \\
&\cdot \sum_{jm} [\delta\epsilon_{jm}^2(r) F_{jm}(\Omega) + \delta\epsilon_{jm}^3(r) D_{jm}(\Omega)]^* \\
&+ \left[B_{k,\vartheta\vartheta}^i(\Omega) \frac{\psi_k(r)}{r} + C_{k,\vartheta\vartheta}^i(\Omega) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \right] \\
&\cdot \sum_{jm} [-\delta\epsilon_{jm}^4(r) H_{jm}(\Omega) - J\delta\epsilon_{jm}^5(r) Y_{jm}(\Omega) + \delta\epsilon_{jm}^6(r) G_{jm}(\Omega)]^* \\
&+ \frac{1}{2} \left[B_{k,\vartheta\varphi}^i(\Omega) \frac{\psi_k(r)}{r} + C_{k,\vartheta\varphi}^i(\Omega) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \right] \\
&\cdot \sum_{jm} [\delta\epsilon_{jm}^4(r) G_{jm}(\Omega) + 4\delta\epsilon_{jm}^6(r) H_{jm}(\Omega)]^* \\
&+ \left[B_{k,\varphi\varphi}^i(\Omega) \frac{\psi_k(r)}{r} + C_{k,\varphi\varphi}^i(\Omega) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \right] \\
&\cdot \sum_{jm} [\delta\epsilon_{jm}^4(r) H_{jm}(\Omega) - J\delta\epsilon_{jm}^5(r) Y_{jm}(\Omega) - \delta\epsilon_{jm}^6(r) G_{jm}(\Omega)]^*.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Die Funktionen $D_{jm}(\Omega)$, $F_{jm}(\Omega)$, $G_{jm}(\Omega)$ und $H_{jm}(\Omega)$ sind durch (A.37)–(A.40) definiert. Die Approximation von $\delta\epsilon_{jm}^\lambda(r)$ mit finiten Elementen ergibt sich zu

$$\delta\epsilon_{jm}^\lambda(r) = a_{jm}^\lambda(\delta\mathbf{u}) \frac{1}{h_k} + b_{jm}^\lambda(\delta\mathbf{u}) \frac{\psi_k(r)}{r} + c_{jm}^\lambda(\delta\mathbf{u}) \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \quad \text{für } r \in [r_k, r_{k+1}]. \tag{2.100}$$

Mit (2.99) kann dann die Gauß-Legendre-Quadratur (2.93) für das Doppelpunkt-Produkt an jedem Gitterpunkt Ω_ℓ berechnet werden.

Nach der Berechnung des dissipativen Funktionals für eine radial und lateral variable Viskositätsverteilung wird im folgenden eine nur radialabhängige Viskositätsverteilung, $\nu = \nu(r)$, vorausgesetzt. Damit vereinfacht sich die Approximation (2.94) zu

$$\nu(r) = \nu_k \tag{2.101}$$

mit ν_k der Viskosität am Gitterpunkt r_k . Damit folgt, daß auch $M^i = M^i(r)$ nur radialabhängig ist, und der Index ℓ unterdrückt werden kann. Aus (2.96) ergibt sich dann

$$M_k^i = \frac{\mu_k}{\nu_k} (t^{i+1} - t^i). \tag{2.102}$$

Für die weitere Ableitung wird die Repräsentation der Tensoren \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i und \mathbf{C}_k^i mit tensoriellen Kugel­flächenfunktionen benötigt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^i(\Omega) \\ \mathbf{B}_k^i(\Omega) \\ \mathbf{C}_k^i(\Omega) \end{bmatrix} = \sum_{jm} \sum_{\lambda=1}^6 \begin{bmatrix} A_{k,jm}^{i,\lambda} \\ B_{k,jm}^{i,\lambda} \\ C_{k,jm}^{i,\lambda} \end{bmatrix} \mathbf{Z}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega). \quad (2.103)$$

Hiermit ist es möglich, das Differenzenschema (2.98) umzuformen in

$$\begin{bmatrix} A_{k,jm}^{i,\lambda} \\ B_{k,jm}^{i,\lambda} \\ C_{k,jm}^{i,\lambda} \end{bmatrix} = (1 - M_k^i) \begin{bmatrix} A_{k,jm}^{i-1,\lambda} \\ B_{k,jm}^{i-1,\lambda} \\ C_{k,jm}^{i-1,\lambda} \end{bmatrix} - 2\mu_k M_k^i \begin{bmatrix} a_{jm}^\lambda(\mathbf{u}^i) \\ b_{jm}^\lambda(\mathbf{u}^i) \\ c_{jm}^\lambda(\mathbf{u}^i) \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Unter der Voraussetzung einer nur radial variierenden Viskositätsverteilung, $\nu = \nu(r)$, ist es möglich, das Differenzenschema für die spektralen Repräsentationen der Tensoren \mathbf{A}_k^i , \mathbf{B}_k^i und \mathbf{C}_k^i auszuführen.² Mit der spektralen Repräsentation gemäß (2.103) folgt aus (2.97) die Beziehung

$$\boldsymbol{\tau}^{\nu,i}(r, \Omega) = \sum_{jm} \sum_{\lambda=1}^6 \tau_{jm}^{\nu,i,\lambda}(r) \mathbf{Z}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega). \quad (2.105)$$

Hier werden die Koeffizienten der SFER von $\boldsymbol{\tau}^{\nu,i}$ verwendet, die durch

$$\tau_{jm}^{\nu,i,\lambda} = A_{k,jm}^{i,\lambda} \frac{1}{h_k} + B_{k,jm}^{i,\lambda} \frac{\psi_k(r)}{r} + C_{k,jm}^{i,\lambda} \frac{\psi_{k+1}(r)}{r} \quad (2.106)$$

gegeben sind. Mit diesem Ausdruck ist es möglich, das Integral in (2.92) analytisch zu bestimmen. Mit den Orthogonalitätseigenschaften (B12) und (B13) in Martinec (2000, Anh. B) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\tau}^{\nu,i} : \delta\boldsymbol{\epsilon}) d\Omega &= \sum_{jm} \left[\tau_{jm}^{\nu,i,1}(r) \delta\epsilon_{jm}^{1*}(r) + \frac{1}{2} J \tau_{jm}^{\nu,i,2}(r) \delta\epsilon_{jm}^{2*}(r) + \frac{1}{2} J \tau_{jm}^{\nu,i,3}(r) \delta\epsilon_{jm}^{3*}(r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} J(J-2) \tau_{jm}^{\nu,i,4}(r) \delta\epsilon_{jm}^{4*}(r) + 2J \tau_{jm}^{\nu,i,5}(r) \delta\epsilon_{jm}^{5*}(r) + 2(J-2) \tau_{jm}^{\nu,i,6}(r) \delta\epsilon_{jm}^{6*}(r) \right]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

In (2.78)–(2.81) und (2.107) ist zu erkennen, daß die Terme mit dem Hochindizes $\lambda = 1, 2, 5, 6$, die mit den Koeffizienten U_{jm}^k und V_{jm}^k der SFER und den zugehörigen Koeffizienten der Testfunktionen δU_{jm}^k und δV_{jm}^k gebildet werden, entkoppelt sind von denen mit den Hochindizes $\lambda = 3, 4$, die von den Koeffizienten W_{jm}^k und δW_{jm}^k abhängen. Für eine nur radial variierende Viskositätsverteilung gibt es dementsprechend zwei ausgezeichnete Verschiebungen, die sphäriodale Verschiebung, $U_{jm}(r) \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + V_{jm}(r) \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega)$, und die toriodale Verschiebung, $W_{jm}(r) \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega)$. Außerdem zeigt sich in (2.78)–(2.81) und (2.107) die Unabhängigkeit der Funktionen vom Index m der spektralen Repräsentation, so daß für jedes gegebene j die Lösungen für den sphäriodalen und toriodalen Teil entkoppelt sind und für $m = -j, \dots, j$ somit $2j + 1$ identische Lösungen existieren.

²Im ersten Teil dieses Abschnitts ist dargestellt worden, daß dies nicht für eine radial und lateral variierende Viskositätsverteilung, $\nu = \nu(r, \Omega)$, möglich ist.

2.2.8 Spektrale Finite-Elemente-Repräsentation

Mit der Berechnung der dissipativen Energie im vorausgehenden Abschnitt 2.2.7 ist es möglich, die SFER der Lösung des Randwertproblems (2.1)–(2.18) anzugeben. Dazu wird der Funktionenraum \mathcal{V}_h wie folgt definiert:

$$\mathcal{V}_h := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \sum_{j=0}^{j_{\max}} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=1}^{P+1} \left[U_{jm}^k \psi_k(r) \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + V_{jm}^k \psi_k(r) \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) + W_{jm}^k \psi_k(r) \mathbf{S}_{jm}^{(0)} \right] \\ \phi = \sum_{j=0}^{j_{\max}} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=1}^{P+1} \Phi_{jm}^k \psi_k(r) Y_{jm}(\Omega) \\ p = \sum_{j=0}^{j_{\max}} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=1}^{P+1} P_{jm}^k \xi_k(r) Y_{jm}(\Omega) \end{array} \right\}. \quad (2.108)$$

Hier sind j_{\max} der maximale Grad der endlichen Approximation der unendlichen Reihen, P die Anzahl der finiten Elemente zur Repräsentation der Radialabhängigkeit und \mathcal{V}_h ein endlich-dimensionaler Teilraum von \mathcal{V} . Die Galerkin-Methode zur Approximation der Lösung des Randwertproblems (2.1)–(2.18) ist das Auffinden von $(\mathbf{u}_h, \phi_h, p_h) \in \mathcal{V}_h$ zu gegebener Zeit t^{i+1} , das die Variationsgleichung

$$\delta \mathcal{E}(\mathbf{u}_h^{i+1}, \phi_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \delta \mathbf{u}_h, \delta \phi_h, \delta p_h) = \delta \mathcal{F}^{i+1}(\delta \mathbf{u}_h, \delta \phi_h) \quad \forall (\delta \mathbf{u}_h, \delta \phi_h, \delta p_h) \in \mathcal{V}_h \quad (2.109)$$

erfüllt. Die diskrete Lösung $(\mathbf{u}_h, \phi_h, p_h)$ des Galerkin-Systems linearer Gleichungen wird auch Lösung der SFER genannt. Die sich aus diesem System von linearen Gleichungen ergebenden Folgen für die numerische Berechnung werden im Abschnitt 4.1 dargestellt.

2.3 Meeresspiegelgleichung

2.3.1 Einleitung

Im folgenden wird die MSG abgeleitet und ihre Kopplung mit der VR dargestellt. Eine der ersten Betrachtungen der MSG ist in Farrell & Clark (1976) gegeben, auf die schon in Abschnitt 1.2 verwiesen wird. Desweiteren sind hier als grundlegende Arbeiten Clark et al. (1978) und Peltier et al. (1978) zu erwähnen. Neben verbesserten numerischen Implementierungen wurden später weitere Phänomene, wie zeitveränderliche Küstenlinien, die Variation der Erdrotation oder das Aufschwimmen von Schelfeis berücksichtigt (z. B. Mitrovica & Peltier, 1991; Johnston, 1993; Lambeck, 1993; Peltier, 1994; Milne & Mitrovica, 1998; Milne et al., 1999; Johnston & Lambeck, 1999). Damit begann eine bis heute anhaltende Diskussion über die korrekte Berücksichtigung dieser Phänomene und die optimale Implementierung (z. B. Lambeck et al., 2003; Mitrovica, 2003).

2.3.2 Meeresspiegelgleichung im Raum- und Spektralbereich

Mit MSG wird allgemein die Gleichung bezeichnet, die die Umverteilung des Wassers in den Ozeanen aufgrund von Änderungen im Eis-Ozean-System beschreibt. Während des Ausbildens der pleistozänen Eisschilde und deren Abschmelzen sind neben dem Massentransport auch die Einflüsse des sich verändernden Geoids und der Deformation der Erde zu berücksichtigen. Auch rezente Änderungen

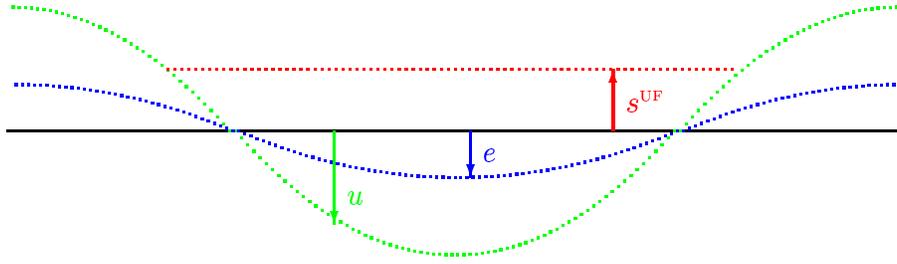


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Größen in der MSG. Die schwarze Gerade ist die Referenzfläche, die blaugepunktete Kurve das Geoid und die grünapunktete Kurve die Erdoberfläche im aktuellen Zustand, die um e bzw. u bezüglich des Referenzzustands verschoben sind. Die um s^{UF} verschobene rotgepunktete Gerade bezeichnet die uniforme Änderung des Meeresspiegels.

im Eis-Ozean-System sind grundsätzlich in Betracht zu ziehen, werden in dieser Arbeit jedoch nicht berücksichtigt, da lediglich der Einfluß der pleistozänen Eisschilde untersucht werden soll.

Analog zur Beschreibung der Auflast in Abschnitt 2.2.2 werden Eis- und Ozeanlast zu Flächenmassen kondensiert. Es ergibt sich

$$\sigma^{\text{E|O}}(\Omega, t) = \rho^{\text{E|O}} s^{\text{E|O}}(\Omega, t), \quad (2.110)$$

wobei $\sigma^{\text{E|O}}$ die Flächenmassendichte, $\rho^{\text{E|O}}$ die Volumenmassendichte und $s^{\text{E|O}}$ die Mächtigkeit der Eis- bzw. Ozeanlast sind.

Für die Berechnung der VR, verursacht durch die räumlich und zeitlich variierende Flächenmassendichte:

$$\sigma^{\text{P}}(\Omega, t) := \sigma^{\text{E}}(\Omega, t) + \sigma^{\text{O}}(\Omega, t), \quad (2.111)$$

wird die spektrale Repräsentation von σ^{P} benötigt. Diese ist gegeben durch

$$\sigma_{jm}(t) = \int_{\Omega_0} \sigma^{\text{P}}(\Omega, t) Y_{jm}^*(\Omega) d\Omega, \quad (2.112)$$

wobei Ω_0 den vollen Raumwinkel und $Y_{jm}(\Omega)$ die skalaren Kugelflächenfunktionen (Anhang A.2) bezeichnet. Die räumliche Repräsentation der Flächenmassendichte durch spektrale Amplituden wird durch den Zusammenhang

$$\sigma^{\text{P}}(\Omega, t) = \sum_{jm} \sigma_{jm}(t) Y_{jm}(\Omega) \quad (2.113)$$

gegeben. Die räumliche Repräsentation wird für die MSG benötigt, da diese im Raumbereich gelöst wird.

Dem Konzept der MSG liegen zwei Prinzipien zugrunde:

- die Masse im Eis-Ozean-System bleibt erhalten,
- die Ozeanoberfläche ist eine Äquipotentialfläche.

Diese beiden Prinzipien finden sich in der MSG wieder:

$$s^{\text{O}}(\Omega, t) = s^{\text{UF}}(\Omega, t) + s^{\text{NU}}(\Omega, t). \quad (2.114)$$

Hier bezeichnet s^{UF} den uniformen Anteil des Meeresspiegelanstiegs, s^{O} , und s^{NU} dessen nicht-uniformen Anteil. Im folgenden werden die positiven Größen als Anstieg definiert. Fällt der Meeresspiegel, so ist die entsprechende Größe daher negativ. In der Literatur wird die MSG zumeist als Integralgleichung formuliert. In (2.114) ist die integrale Formulierung unterdrückt, jedoch wird diese bei der Berechnung der Beiträge s^{UF} und s^{NU} in der spektralen bzw. räumlichen Repräsentation ersichtlich. Desweiteren wird in Abschnitt 2.5.2 dargestellt, wie mittels des Differenzschemas die Lösung der MSG in ein zweischrittiges Lösungsschema überführt wird.

In Abbildung 2.2 wird das uniforme Ansteigen des Meeresspiegels um s^{UF} skizziert. Zur Berechnung von s^{UF} wird das Prinzip der Massenerhaltung im Eis-Ozean-System herangezogen. Die Massenerhaltung wird in der spektralen Repräsentation dadurch gewährleistet, daß für die Amplitude des Grades und der Ordnung Null der Flächenmassendichte

$$\sigma_{00}(t) = 0 \quad \forall \quad t \in [0, T], \quad (2.115)$$

gilt. Mit der heuristischen Definition der Ozeanfunktion

$$\mathcal{O}(\Omega, t) := \begin{cases} 1 & \text{für ozeanische Region} \\ 0 & \text{für kontinentale Region} \end{cases} \quad (2.116)$$

läßt sich mit (2.115) der uniforme Meeresspiegelanstieg in der Form,

$$s^{\text{UF}}(\Omega, t) = h^{\text{UF}}(t)\mathcal{O}(\Omega, t) \quad (2.117)$$

darstellen, wobei dessen ortsunabhängiger Anteil, $h^{\text{UF}}(t)$, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$h^{\text{UF}}(t) = -\frac{\sigma_{00}^{\text{E}}(t) + \sigma_{00}^{\text{NU}}(t)}{\rho^{\text{O}}\mathcal{O}_{00}(t)}. \quad (2.118)$$

In (2.118) ist zu erkennen, daß zur Berechnung neben der spektralen Repräsentation der Eislast und der Ozeanfunktion auch die spektrale Repräsentation des nicht-uniformen Meeresspiegelanstiegs bekannt sein muß. Mit h^{UF} ist es möglich die spektrale Repräsentation der zugehörigen Flächenmassendichte anzugeben:

$$\sigma_{jm}^{\text{UF}}(t) = \rho^{\text{O}}h^{\text{UF}}(t)\mathcal{O}_{jm}(t). \quad (2.119)$$

Durch die Berücksichtigung der radialen Verschiebung, u , und der Geoidhöhe, e , wird durch den nicht-uniformen Meeresspiegelanstieg, s^{NU} , gewährleistet, daß die Meeresoberfläche eine Äquipotentialfläche ist. Die einzelnen Verschiebungen aus dem ungestörten Referenzzustand sind in Abbildung 2.2 skizziert. Um s^{NU} zu bestimmen, muß zuvor die spezielle Ozeanrepräsentation gewählt werden.

2.3.3 Ozeanrepräsentationen

Die einfachste Ozeanrepräsentation ist die Vorgabe einer zeitunabhängigen Ozeanfunktion, $\mathcal{O}^{(0)}(\Omega) := \mathcal{O}(\Omega, t = 0)$, wobei diese durch die vorgegebene Topographie, $\zeta^{(0)}(\Omega)$, gegeben ist, und die Vernachlässigung des Anteils s^{NU} . Somit wird die Ozeanlast in der spektralen Repräsentation durch

$$\sigma_{jm}^{\text{O}}(t) = \rho^{\text{O}}h^{\text{UF}}(t)\mathcal{O}_{jm} \quad (2.120)$$

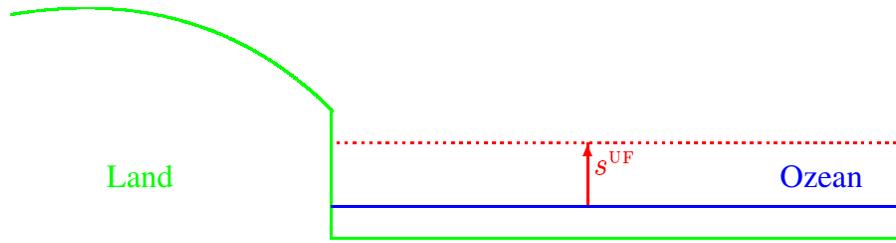


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der ORA. Die zeitunabhängige Ozeanfunktion, $\mathcal{O}^{(0)}$, entspricht einer senkrechten Begrenzung des Ozeans. Der uniforme Meeresspiegelanstieg (rot), s^{UF} , hat keinen Einfluß auf die Ozeanfunktion.

gegeben. In Abbildung 2.3 wird diese Situation skizziert. Diese Ozeanrepräsentation wird im folgenden mit ORA bezeichnet.

Wird die Annahme einer zeitunabhängigen Ozeanfunktion, $\mathcal{O}^{(0)}(\Omega)$, beibehalten, zusätzlich allerdings die Radialverschiebung, u , und die Geoidhöhe, e , in der MSG berücksichtigt, so kann der nicht-uniforme Meeresspiegelanstieg wie folgt beschrieben werden:

$$s^{NU}(\Omega, t) = [e(\Omega, t) - u(\Omega, t)] \mathcal{O}^{(0)}(\Omega). \quad (2.121)$$

Die Radialverschiebung, u , wird aus der räumlichen Repräsentation verwendet und die Geoidhöhe, e , mit Hilfe der Bruns-Formel (Heiskanen & Moritz, 1967) aus der räumlichen Repräsentation des lokalen Inkrements des Gravitationspotentials, $\phi^{(\Delta)}$, bestimmt:

$$e(\Omega, t) = -\frac{\phi^{(\Delta)}(\Omega, t)}{g^{(0)}(a)}, \quad (2.122)$$

wobei das Vorzeichen entsprechend der Definition der Gravitationsbeschleunigung, $g^{(0)}$, gewählt ist. In diesem Fall ist auch das zweite Prinzip der MSG verwirklicht, jedoch ist impliziert, daß innerhalb des Ozeans jede Radialverschiebung und Geoidhöhe möglich ist, ohne daß ein bestimmtes Gebiet trocken fallen oder überflutet werden kann. Dies ist in der Abbildung 2.4 skizziert. Die spektrale Repräsentation der Ozeanlast ist dann durch

$$\sigma_{jm}^O(t) = \sigma_{jm}^{UF}(t) + \sigma_{jm}^{NU}(t) \quad (2.123)$$

gegeben, wobei die spektrale Repräsentation der Flächenmassendichte des nicht-uniformen Meeresspie-

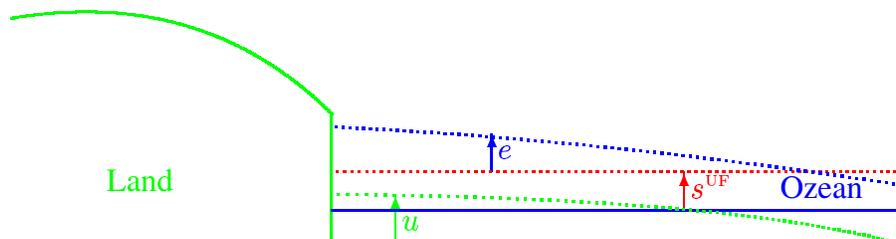


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung der ORB. Neben dem uniformen Meeresspiegelanstieg (rot), s^{UF} , sind hier noch die Radialverschiebung des Ozeanbodens (grün), u , und die Geoidhöhe (blau), e , berücksichtigt. Die durchgezogenen Linien zeigen den Referenzzustand, die gepunkteten Linien geben den aktuellen Zustand wieder.

gelanstiegs, s^{NU} , durch

$$\sigma_{jm}^{\text{NU}}(t) = \int_{\Omega_0} \rho^{\text{O}} s^{\text{NU}}(\Omega, t) Y_{jm}^*(\Omega) d\Omega \quad (2.124)$$

bestimmt ist. Diese Ozeanrepräsentation wird mit ORB gekennzeichnet.

Die Annahme einer zeitunabhängigen Ozeanfunktion soll nun fallen gelassen werden, um eine realistische Beschreibung der Variation der Küstenlinien durch den Massenaustausch im Eis-Ozean-System sowie der radialen Verschiebung und der Geoidhöhe zu ermöglichen (Abbildung 2.5). Hierzu bedarf es neben den Größen u , e und h^{UF} noch der Berücksichtigung der Topographie. Wenn diese zu Beginn des Berechnungszeitintervalls, $t = 0$, für den ungestörten Referenzzustand durch $\zeta^{(0)}(\Omega)$ gegeben ist, läßt sich eine Variation der Ozeanfunktion, und damit der Küstenlinien, berechnen. Mit dem Kriterium, daß dort, wo der aktuelle Meeresspiegel über der deformierten Topographie liegt, Ozean ist, folgt

$$\mathcal{O}(\Omega, t) := \begin{cases} 1 & \text{für } e(\Omega, t) + h^{\text{UF}}(t) \geq \zeta^{(0)}(\Omega) + u(\Omega, t) \\ 0 & \text{für } e(\Omega, t) + h^{\text{UF}}(t) < \zeta^{(0)}(\Omega) + u(\Omega, t) \end{cases} . \quad (2.125)$$

Ändert sich die Ozeanfunktion, so ergeben sich folgende, in Abbildung 2.6 dargestellte, Situationen: Entweder ein Teilgebiet “fällt trocken” oder Land “wird überflutet”. Im ersten Fall muß berücksichtigt werden, daß dieses Gebiet nur durch die tatsächlich vorhandenen Wassermassen entlastet werden kann. Das Volumen zwischen dem aktuellen Geoid und der deformierten Topographie kann wesentlich größer sein als das dieser Wassermasse. Hingegen erfolgt die Belastung des “neuen” Ozeangebiets durch die gesamte Wassermasse zwischen der deformierten Topographie und dem aktuellen Geoid. In beiden Fällen muß die deformierte Topographie, $\zeta^{(0)} + u$, herangezogen werden. Ist durch (2.125) ein Kriterium gegeben, zur aktuellen Zeit, t , die Ozeanfunktion, $\mathcal{O}(\Omega, t)$, zu bestimmen, läßt sich der nicht-uniforme Anteil des Meeresspiegelanstiegs durch folgende Gleichung angeben:

$$s^{\text{NU}}(\Omega, t) = [e(\Omega, t) - u(\Omega, t)] \mathcal{O}(\Omega, t) - \zeta^{(0)}(\Omega) [\mathcal{O}(\Omega, t) - \mathcal{O}^{(0)}(\Omega)] . \quad (2.126)$$

Die Betrachtung von (2.126) für die in Abbildung 2.6 dargestellten Situationen zeigt die unterschiedliche Bestimmung von s^{NU} an einem Ort, Ω , auf, je nachdem, ob sich zur Zeit t eine Veränderung der Ozeanfunktion im Vergleich zur Zeit $t = 0$ ergeben hat oder nicht. Auch in diesem Fall wird die spektrale Repräsentation der Ozeanlast durch (2.123), die Summe von σ_{jm}^{UF} und σ_{jm}^{NU} gegeben, wobei σ_{jm}^{NU} mit (2.124) und (2.126) bestimmt wird.

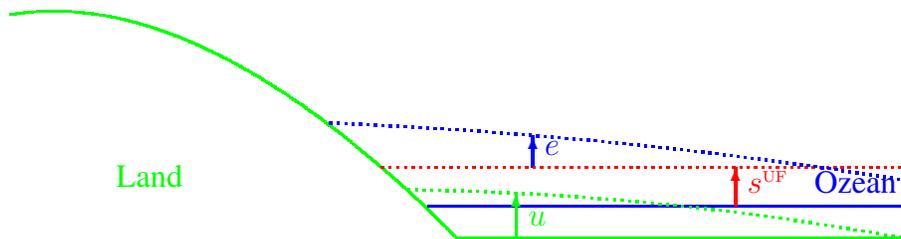


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung der ORC. Wie in Abbildung 2.4 werden hier s^{UF} (rot), u (grün) und e (blau) berücksichtigt, jedoch führen diese Variationen zu einer zeitlichen Änderung der Ozeanfunktion, \mathcal{O} .

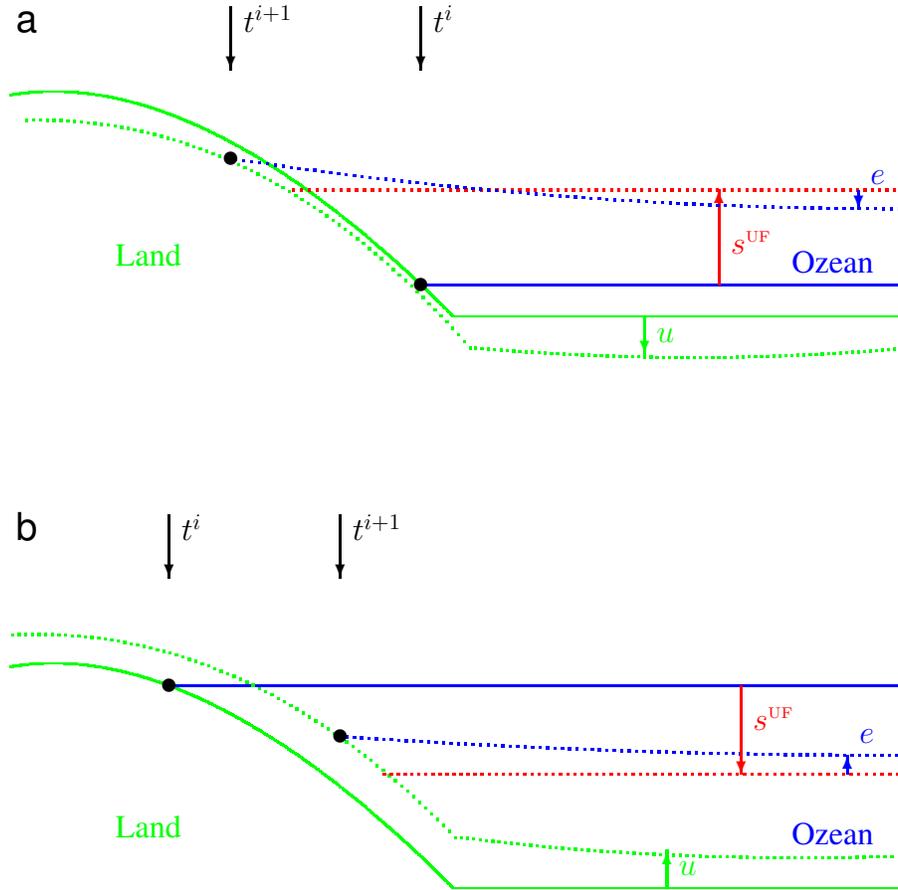


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung der Änderung der Ozeanfunktion, \mathcal{O} . In a wird skizziert, wie durch das Ansteigen des Meeresspiegels ein Teil des Landes überflutet wird. In b wird hingegen ein durch das Absinken des Meeresspiegels verursachtes Trockenfallen eines Teils des Ozeans gezeigt. In beiden Fällen ist die jeweilige Situation zur Zeit t^i mit durchgezogenen Linien und die sich ergebende Situation zur Zeit t^{i+1} mit gepunkteten Linien dargestellt. Die jeweiligen Küsten sind mit schwarzen Punkten gekennzeichnet.

Eine weitere Besonderheit, die mit der zeitabhängigen Ozeanfunktion, $\mathcal{O}(\Omega, t)$, zusammenhängt, ergibt sich, wenn Eis in Gebieten liegt, die nach obiger Bedingung (2.125) andernfalls Ozean wären, jedoch das Ozeanwasser dort verdrängen. Dies wird durch eine zusätzliche Bedingung in der Definition der zeitabhängigen Ozeanfunktion beschrieben:

$$\mathcal{O}(\Omega, t) := \begin{cases} 1 & \text{für } e(\Omega, t) + h^{\text{UF}}(t) \geq \zeta^{(0)}(\Omega) + u(\Omega, t) \wedge s^{\text{E}}(\Omega, t) = 0 \\ 0 & \text{für } e(\Omega, t) + h^{\text{UF}}(t) < \zeta^{(0)}(\Omega) + u(\Omega, t) \vee s^{\text{E}}(\Omega, t) \neq 0 \end{cases}. \quad (2.127)$$

Hierdurch ergibt sich eine neue Komplikation. Wenn das wasserverdrängende Eis eine so geringe Mächtigkeit, s^{E} , hat, daß es bei der an diesem Ort herrschenden Wassertiefe aufgrund der geringeren Dichte aufschwimmen würde, dann darf es nicht als Eislast betrachtet werden. Die Definition (2.127) berücksichtigt diese Möglichkeit nicht und würde somit zu einer zu geringen Last führen. Dieses Aufschwimmen von Eislasten wird dadurch beschrieben, daß dort $\mathcal{O}(\Omega, t) = 1$ gilt und die entsprechende Eislast zur Ozean-

gesamtmasse gezählt wird:

$$\mathcal{O}(\Omega, t) := \begin{cases} 1 & \text{für } e(\Omega, t) + h^{\text{UF}}(t) \geq \zeta^{(0)}(\Omega) + u(\Omega, t) \wedge s^{\text{E}}(\Omega, t) < \frac{\rho^{\text{O}}}{\rho^{\text{E}}} s^{\text{O}}(\Omega, t) \\ 0 & \text{für } e(\Omega, t) + h^{\text{UF}}(t) < \zeta^{(0)}(\Omega) + u(\Omega, t) \vee s^{\text{E}}(\Omega, t) \geq \frac{\rho^{\text{O}}}{\rho^{\text{E}}} s^{\text{O}}(\Omega, t) \end{cases}. \quad (2.128)$$

Diese Definition der zeitabhängigen Ozeanfunktion wird im weiteren herangezogen, wenn die Ozeanrepräsentation ORC verwendet wird. Die numerische Implementierung der verschiedenen Ozeanrepräsentationen einschließlich der Berücksichtigung der vorgegebenden Topographie, $\zeta^{(0)}(\Omega)$, wird in Abschnitt 4.2 betrachtet.

2.4 Postglaziale Variation der Erdrotation

2.4.1 Einleitung

Die Umverteilung von Eis- und Wassermassen bewirkt nicht nur die VR der Erde und die damit einhergehende Meeresspiegeländerungen, die in den Abschnitten 2.2 und 2.3 beschrieben sind, sondern auch eine Änderung der Erdrotation. Diese äußert sich in der Tageslängenänderung, d. h. der Variation des Betrags der Rotationsgeschwindigkeit, und in der Polwanderung, d. h. der Variation der Richtung der Rotationsgeschwindigkeit. Diese Variationen wirken sich auf das Zentrifugalpotential und die Deformation der Erde aus, durch die wiederum der Meeresspiegel verändert wird. Daran wird deutlich, daß hier eine Kopplung mit der VR und MSG besteht.

In der älteren Literatur finden sich Erdmodelle mit radialer Viskositätsverteilung zur Berechnung der Deformation der Erde und der Störungen des Gravitationspotentials aufgrund von Auflastvariationen, mit denen dann die Änderung der Erdrotation bestimmt wurde. Dabei wurde zur Berechnung der VR üblicherweise die Laplace-Transformations-Methode verwendet. Hierbei wurden die Differentialgleichungen, die die VR beschreiben, in den Laplace-Bereich transformiert, als entkoppeltes Gleichungssystem gelöst und anschließend dort die linearisierte Liouville-Gleichung bestimmt (z. B. Wu & Peltier, 1984; Ricard et al., 1993; Vermeersen & Sabadini, 1996; Mitrovica & Milne, 1998). In den neueren Arbeiten wurde auch die Kopplung mit der MSG berücksichtigt.

Im Gegensatz zu dieser Methode wird hier die Berechnung der Liouville-Gleichung im Zeitbereich aufgezeigt. Diese Methode kann mit dem Differenzenschema der SFER kombiniert werden. Die Bestimmung des Trägheitstensors aus den mit der VR verbundenen Größen und die Methode zur Lösung der linearisierten Liouville-Gleichung in sphärischer Approximation wird in den folgenden Abschnitten erläutert und folgt der Darstellung von Martinec & Hagedoorn (2005).

2.4.2 Trägheitstensor im Referenzzustand

Die Erde wird für die Betrachtung der Erdrotation als inkompressibles, viskoelastisches Kontinuum angenommen, das sich zur Zeit $t = 0$ im hydrostatischen Gleichgewicht befindet und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, $\omega^{(0)}$, um ihr Massenzentrum, O , rotiert (Abbildung 2.7). Dieser Referenzzustand wird als initialer Rotationszustand bezeichnet. Für die Beschreibung des Trägheitstensors wird ein

kartesisches, mitrotierendes Koordinatensystem gewählt, bei dem in der Lagrange-Formulierung (Anhang A.1) die Achsen, X_1 , X_2 und X_3 , mit den Basisvektoren, e_1 , e_2 und e_3 , zusammenfallen und das gewählte System das Tisserandsystem ist. Die Hauptträgheitsachsen der Erde stimmen demnach mit den Koordinatenachsen im Referenzzustand überein. Mit \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} sind die Hauptträgheitsmomente bezeichnet, wobei die uniforme Rotation im initialen Zustand um X_3 mit der Achse des größten Hauptträgheitsmoments zusammenfällt. Dann läßt sich die Winkelgeschwindigkeit wie folgt ausdrücken:

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = \omega^{(0)} \mathbf{e}_3. \quad (2.129)$$

Das Volumen der Erde im initialen Rotationszustand wird mit \mathcal{X} und die entsprechende Volumenmassendichte mit $\rho^{(0)}$ bezeichnet. Der Trägheitstensor im initialen Rotationszustand hat die Form

$$\mathbf{C}^{(0)} = \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d^3 X, \quad (2.130)$$

wobei das Integral in der Lagrange-Formulierung gegeben ist. Hier bezeichnen der Punkt und das Kreuz das skalare bzw. dyadische Produkt zweier Vektoren.

Für die weitere Beschreibung wird angenommen, daß durch eine Auflast die Erde einer räumlich und zeitlich variierenden Deformation unterliegt, die eine instantane Rotationsänderung nach sich zieht.

In Abbildung 2.7 bezeichnet \mathbf{r} die Position eines Partikels des deformierten Kontinuums im aktuellen Rotationszustand im Koordinatensystem $O(r_1, r_2, r_3)$, das sich im initialen Rotationszustand an der Position \mathbf{X} befunden hat. Das Volumen des deformierten Kontinuums im aktuellen Rotationszustand ist \mathcal{R} und die Volumenmassendichte ist gegeben durch ϱ . Im folgenden ist angenommen, daß die Systeme $O(X_1, X_2, X_3)$ und $O(r_1, r_2, r_3)$ identisch sind. Es läßt sich der instantane Trägheitstensor des aktuellen Rotationszustands durch

$$\mathbf{C}^{\text{in}}(t) = \int_{\mathcal{R}(t)} \varrho(\mathbf{r}, t) [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}] d^3 r \quad (2.131)$$

beschreiben, wobei \mathbf{C}^{in} den Trägheitstensor aufgrund der (internen) Reaktion des Kontinuums bezeichnet. Um im Integral in (2.131) von der Euler-Formulierung auf die Lagrange-Formulierung überzugehen, ist die Beziehung zwischen den Volumenelementen $d^3 r$ und $d^3 X$ (Wolf, 2003, (2.49)):

$$d^3 r = j^X d^3 X \quad (2.132)$$

und das Prinzip der Massenerhaltung in der Lagrange-Formulierung (Wolf, 2003, (4.28)):

$$\rho^{(0)}(\mathbf{X}) = j^X \varrho(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.133)$$

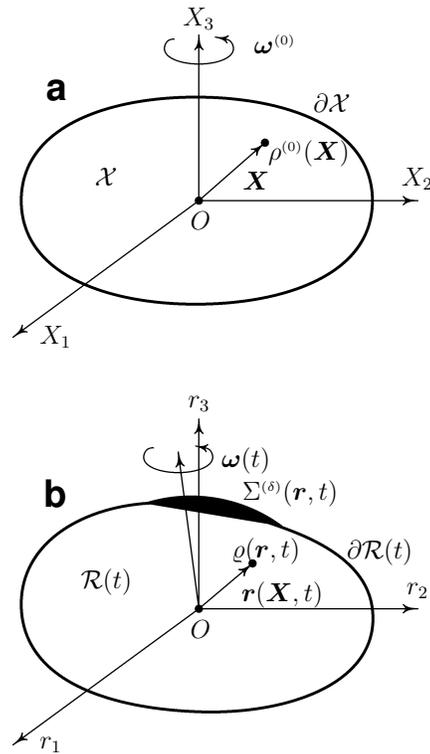


Abbildung 2.7: Skizze des initialen (a) und aktuellen (b) Rotationszustands der Erde. Das Inkrement der Flächenmassendichte ist mit $\Sigma^{(\delta)}(\mathbf{r}, t)$ bezeichnet.

anzuwenden. Hier ist j^X die Jakobi-Determinante (Wolf, 2003, (2.4)) der Transformation zwischen dem aktuellen Rotationszustand des deformierten Kontinuums und dem initialen Rotationszustand. Die Variablen in (2.131) können damit in die Lagrange-Formulierung überführt werden:

$$\mathbf{C}^{\text{in}}(t) = \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) [(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{I} - \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \otimes \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)] d^3 X. \quad (2.134)$$

Weiterhin ist zu beachten, daß die oben zugrunde gelegte Deformation durch eine Umverteilung von Masse auf der Oberfläche $\partial\mathcal{R}$ hervorgerufen worden ist. Diese (externe) Auflast führt zu einem zusätzlichen inkrementiellen Trägheitstensor, $\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}$, der folgende Form hat:

$$\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}(t) = \int_{\partial\mathcal{R}(t)} \Sigma^{(\delta)}(\mathbf{r}, t) [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}] d^2 r. \quad (2.135)$$

Hier ist $\Sigma^{(\delta)}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{R}$, das materielle Inkrement der Flächenmassendichte und $d^2 r$ das Oberflächenelement in der Euler-Formulierung.

Im Gegensatz zu (2.133) wird für $\Sigma^{(\delta)}$ nicht das Prinzip der Massenerhaltung in der Lagrange-Formulierung abgeleitet, da hier etliche Beiträge zu beachten sind, wie die Variationen der Topographie und Bathymetrie sowie die Deformation des Ozeanbodens und das zeitabhängige Gravitationsfeld. Der Übergang von der Euler-Formulierung in die Lagrange-Formulierung erfolgt mit Hilfe der Definition der inkrementiellen Piola-Flächenmassendichte, σ^P , die im Gegensatz zu $\Sigma^{(\delta)}$ nicht die Masse per deformiertem Flächenelement, $d^2 r$, angibt, sondern sich auf das undeformierte Flächenelement, $d^2 X$, bezieht (zur Ableitung eines Piola-Feldes siehe Wolf, 2003, (4.3)). Aufgrund der Massenerhaltung folgt der Zusammenhang

$$\Sigma^{(\delta)}(\mathbf{r}, t) d^2 r = \sigma^P(\mathbf{X}) d^2 X. \quad (2.136)$$

Mit (2.136) kann $\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}$ in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}(t) = \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^P(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{I} - \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \otimes \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)] d^2 X, \quad (2.137)$$

in der im Integral die Lagrange-Formulierung verwendet ist. Der Trägheitstensor des aktuellen Rotationszustands, \mathbf{C} , ergibt sich durch Addition der Beiträge zu:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}^{\text{in}}(t) + \mathbf{C}^{(1)\text{ex}}(t). \quad (2.138)$$

2.4.3 Inkrementieller Trägheitstensor

Für die weitere Beschreibung wird angenommen, daß die beschriebene Deformation, \mathbf{u} , die zum aktuellen Rotationszustand führt, klein im Verhältnis zu a ist. Dann kann die Näherung der geometrischen Linearisierung auf den Trägheitstensor \mathbf{C}^{in} angewendet werden, so daß dieser dann als Summe des Trägheitstensors, $\mathbf{C}^{(0)}$, im initialen Rotationszustand und dem zeitabhängigen inkrementiellen Trägheitstensors $\mathbf{C}^{(1)\text{in}}$ beschrieben wird:

$$\mathbf{C}^{\text{in}}(t) = \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{C}^{(1)\text{in}}(t). \quad (2.139)$$

Um $C^{(1)\text{in}}$ aus (2.134) und (2.139) zu bestimmen, wird die Linearisierung des Integranden in (2.134) benötigt:

$$(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{I} - \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \otimes \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} + 2\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{X}. \quad (2.140)$$

Diese Näherung ist bis zur ersten Ordnung in $\|\mathbf{u}\|$ exakt. Hiermit läßt sich der inkrementielle Trägheitstensor wie folgt beschreiben:

$$C^{(1)\text{in}}(t) = \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) [2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \otimes \mathbf{X}] d^3 X. \quad (2.141)$$

Zur Linearisierung des Trägheitstensors $C^{(1)\text{ex}}$ wird die Größenordnung, \mathbf{O} , der Flächenmassendichte betrachtet, die aufgrund des isostatischen Prinzips die gleiche ist, wie für die interne Massenumverteilung, $\rho^{(0)}\|\mathbf{u}\|$:

$$\mathbf{O}(\sigma^P) = \mathbf{O}(\rho^{(0)}\|\mathbf{u}\|). \quad (2.142)$$

Somit kann bei $C^{(1)\text{ex}}$ die gleiche Genauigkeit bei der Linearisierung verwendet werden wie bei $C^{(1)\text{in}}$. Mit (2.137) folgt aus (2.140) die bis zur ersten Ordnung in $\|\mathbf{u}\|$ exakte Linearisierung

$$C^{(1)\text{ex}}(t) = \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^P(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d^2 X. \quad (2.143)$$

Es wird demnach eine Störung des Trägheitstensors, $C^{(0)}$, des initialen Rotationszustands durch eine externe Last auf der Oberfläche $\partial\mathcal{X}$ und der damit verbundenen internen Massenumverteilung in \mathcal{X} betrachtet. Das Inkrement, $C^{(1)}$, das diese Störung von $C^{(0)}$ beschreibt, ist durch

$$C^{(1)}(t) = C^{(1)\text{ex}}(t) + C^{(1)\text{in}}(t) \quad (2.144)$$

gegeben. Es sei angemerkt, daß die Erde zusätzlich durch das variierende Zentrifugalpotential deformiert wird, was allerdings hier unberücksichtigt bleibt.

2.4.4 Linearisierte Liouville-Gleichung

Die Liouville-Gleichung beschreibt die Drehimpulserhaltung beim Übergang der Erde vom initialen in den aktuellen Rotationszustand. Für die folgende Herleitung der linearisierten Liouville-Gleichung wird die Beschreibung des Drehimpulses, \mathbf{H} , benötigt. Mit der Winkelgeschwindigkeit, $\boldsymbol{\omega}$, im aktuellen Rotationszustand ist der Drehimpuls durch

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{h}(t) \quad (2.145)$$

gegeben. Der relative Drehimpuls, \mathbf{h} , wird durch die Gleichung

$$\mathbf{h}(t) = \int_{\mathcal{R}} \varrho(\mathbf{r}, t) [\mathbf{r} \times \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)] d^3 r \quad (2.146)$$

bestimmt, die nach dem Übergang von der Euler- zur Lagrange-Formulierung folgende Form annimmt:

$$\mathbf{h}(t) = \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) [\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{V}(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t)] d^3 X. \quad (2.147)$$

Hier ist $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ der Geschwindigkeit in der Euler-Formulierung. Aufgrund des hydrostatischen Gleichgewichts im initialen Rotationszustand folgt mit (A.3)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt}. \quad (2.148)$$

Die geometrische Linearisierung von (2.147), exakt bis zur ersten Ordnung in $\|\mathbf{u}\|$ ist gegeben durch

$$\mathbf{h}(t) = \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) \left[\mathbf{X} \times \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt} \right] d^3X. \quad (2.149)$$

Solange kein äußeres Drehmoment angreift, wird die Variation der Erdrotation durch das Prinzip der Drehimpulserhaltung, d. h. die Liouville-Gleichung

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{C}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{h}(t)] + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{C}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{h}(t)] = \mathbf{0}, \quad (2.150)$$

beschrieben. Die aktuelle Winkelgeschwindigkeit, $\boldsymbol{\omega}$, kann als Summe der Winkelgeschwindigkeit im initialen Rotationszustand, $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$, und einer Störung, $\boldsymbol{\omega}^{(0)}\mathbf{m}$, wie folgt dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}^{(0)} + \boldsymbol{\omega}^{(0)}\mathbf{m}(t). \quad (2.151)$$

Die in (2.151) eingeführte dimensionslose vektorielle Größe \mathbf{m} beschreibt somit die normalisierte Variation der Erdrotation, wobei die Komponenten m_1 und m_2 die Auslenkung der Rotationsachse aus dem initialen Rotationszustand zur Zeit $t = 0$ in den aktuellen Rotationszustand zur Zeit $t > 0$ beschreiben, und m_3 die Änderung des Betrags der Rotationsgeschwindigkeit angibt.

Unter der Annahme, daß \mathbf{C} , \mathbf{m} und \mathbf{h} kleine Größen sind, ist es möglich, Quadrate, Produkte und höhere Ordnungen dieser Größen zu vernachlässigen. Mit der Substitution von $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{C}^{(1)}(t)$ und (2.151) in (2.150), der beschriebenen Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung und mit Hilfe der Definitionen der komplexen Größen

$$m(t) := m_1(t) + im_2(t), \quad (2.152)$$

$$C^{(1)}(t) := C_{13}^{(1)}(t) + iC_{23}^{(1)}(t), \quad (2.153)$$

$$h(t) := h_1(t) + ih_2(t) \quad (2.154)$$

kann die linearisierte Liouville-Gleichung gewonnen werden:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\omega}^{(0)}\dot{m}(t) - i(\mathcal{C} - \mathcal{A})\boldsymbol{\omega}^{(0)2}m(t) + \boldsymbol{\omega}^{(0)}\dot{C}^{(1)}(t) + i\boldsymbol{\omega}^{(0)2}C^{(1)}(t) + \dot{h}(t) + i\boldsymbol{\omega}^{(0)}h(t) = 0, \quad (2.155)$$

$$\mathcal{C}\boldsymbol{\omega}^{(0)}\dot{m}_3(t) + \dot{C}_{33}^{(1)}(t)\boldsymbol{\omega}^{(0)} + \dot{h}_3(t) = 0. \quad (2.156)$$

\mathcal{A} und \mathcal{C} sind die beiden Hauptträgheitsmomente von $\mathbf{C}^{(0)}$ im initialen Rotationszustand. Unter Verwendung der Anregungsfunktionen

$$\chi(t) := \frac{1}{(\mathcal{C} - \mathcal{A})\boldsymbol{\omega}^{(0)}} [\boldsymbol{\omega}^{(0)}C^{(1)}(t) + h(t)], \quad (2.157)$$

$$\chi_3(t) := \frac{1}{\mathcal{C}\boldsymbol{\omega}^{(0)}} [\boldsymbol{\omega}^{(0)}C_{33}^{(1)}(t) + h_3(t)], \quad (2.158)$$

wobei

$$\chi(t) = \chi_1(t) + i\chi_2(t) \quad (2.159)$$

eine komplexe Kombination der Komponenten χ_1 und χ_2 analog zu (2.152)–(2.154) ist, läßt sich die linearisierte Liouville-Gleichung in der folgenden Form ableiten:

$$m(t) + \frac{i}{\lambda^E} \dot{m}(t) = \chi(t) - \frac{i}{\omega^{(0)}} \dot{\chi}(t), \quad (2.160)$$

$$\dot{m}_3(t) = -\dot{\chi}_3(t). \quad (2.161)$$

In (2.160) ist

$$\lambda^E := \frac{(\mathcal{C} - \mathcal{A})\omega^{(0)}}{\mathcal{A}} \quad (2.162)$$

die Euler-Frequenz der starren Erde. Unter der Annahme, daß im initialen Rotationszustand $\mathbf{m}(t=0) = \mathbf{0}$, $\chi(t=0) = 0$ und $\chi_3(t=0) = 0$ ist, lassen sich für die linearisierte Liouville-Gleichung (2.160) bzw. (2.161) die Lösung (Moritz & Mueller, 1987, Abs. 5.4.1)

$$m(t) = -i\lambda^E \left(1 + \frac{\lambda^E}{\omega^{(0)}}\right) \int_0^t \chi(\tilde{t}) e^{i\lambda^E(t-\tilde{t})} d\tilde{t} - \frac{\lambda^E}{\omega^{(0)}} \chi(t), \quad (2.163)$$

$$m_3(t) = -\chi_3(t) \quad (2.164)$$

für jede Zeit $t \in [0, T]$; $T > 0$ angeben.

An den Gleichungen (2.157)–(2.164) ist die Abhängigkeit der Lösungen m und m_3 von den kartesischen Komponenten $C_{13}^{(1)}$, $C_{23}^{(1)}$ und $C_{33}^{(1)}$ des inkrementiellen Trägheitstensors, $\mathbf{C}^{(1)}$, und vom relativen Drehimpuls, \mathbf{h} , zu erkennen. Durch diese Größen werden die Lösungen vollständig beschrieben.

2.4.5 Lokales Inkrement der Dichte

Beim Übergang vom initialen in den aktuellen Rotationszustand wird auch die Volumenmassendichte geändert. Diese Änderung kann mit dem lokalen Inkrement, $\varrho^{(\Delta)}$, der Dichte im initialen Rotationszustand, $\varrho^{(0)}$, in der Euler-Formulierung beschrieben werden (z. B. Wolf, 1991), das wie folgt definiert ist (Anhang A.1):

$$\varrho^{(\Delta)} := \varrho(\mathbf{r}, t) - \varrho^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (2.165)$$

Das lokale Inkrement der Dichte ist mit der linearisierten Massenerhaltungsgleichung (2.133) in der Lagrange-Formulierung auch durch

$$\rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) = -\text{div} [\rho^{(0)}(\mathbf{X})\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] \quad (2.166)$$

gegeben, wobei dieser Ausdruck exakt bis zur ersten Ordnung in $\|\mathbf{u}\|$ ist. Aufgrund der Linearisierung in (2.166) kann das lokale Inkrement, $\varrho^{(\Delta)}$, der Euler-Formulierung mit dem lokalen Inkrement, $\rho^{(\Delta)}$, der Lagrange-Formulierung gleichgesetzt werden, welches im folgenden verwendet wird. Der inkrementielle Trägheitstensor, der durch das lokale Inkrement der Dichte im Referenzvolumen \mathcal{X} hervorgerufen wird, ist dann wie folgt definiert:

$$\mathbf{C}^\rho(t) := \int_V \rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d^3X. \quad (2.167)$$

Um aus der alternativen Beschreibung (2.166) den inkrementiellen Trägheitstensor, C^ρ , zu bestimmen, wird das Green-Theorem für eine differenzierbare Vektorfunktion, ϖ , und einen Tensor, T , benötigt:

$$\int_{\mathcal{X}} (\operatorname{div} \varpi) T d^3 X = \int_{\partial \mathcal{X}} (\mathbf{n} \cdot \varpi^-) T d^2 X - \int_{\Sigma} [(\mathbf{n} \cdot \varpi) T]_+^- d\Sigma - \int_{\mathcal{X}} (\varpi \cdot \operatorname{grad} T) d^3 X. \quad (2.168)$$

Hier bezeichnet ϖ^- die Größe auf der Innenseite der Oberfläche $\partial \mathcal{X}$ und \mathbf{n} die nach außen weisende Einheitsnormale auf $\partial \mathcal{X}$ oder Σ . Wird $\rho^{(\Delta)}$ gemäß (2.166) zur Bestimmung des Trägheitstensors C^ρ herangezogen und in (2.168) $\varpi = -\rho^{(0)} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ gesetzt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} C^\rho(t) &= \int_{\Sigma} \sigma^\Sigma(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d\Sigma \\ &\quad - \int_{\partial \mathcal{X}} \sigma^{\partial \mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d^2 X \\ &\quad + \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \operatorname{grad} [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d^3 X. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Die in (2.169) verwendeten Flächenmassendichten σ^Σ und $\sigma^{\partial \mathcal{X}}$ sind wie folgt definiert:

$$\sigma^\Sigma(\mathbf{X}, t) := [\rho^{(0)}(\mathbf{X}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))]_+^- \quad \text{auf } \Sigma, \quad (2.170)$$

$$\sigma^{\partial \mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) := \rho^{(0)-}(\mathbf{X}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^-(\mathbf{X}, t)) \quad \text{auf } \partial \mathcal{X}. \quad (2.171)$$

Mit $-$ wird gekennzeichnet, daß die entsprechenden Größen auf der Innenseite der Oberfläche betrachtet werden. Zur weiteren Vereinfachung von (2.169) werden Differentialidentitäten für Tensoren:

$$\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{I}] = 2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}, \quad (2.172)$$

$$\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} (\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}) = \mathbf{X} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{X} \quad (2.173)$$

herangezogen. Werden diese in den letzten Summanden von (2.169) eingesetzt, ist dieser gemäß (2.141) identisch mit $C^{(1)\text{in}}$, und es folgt

$$C^{(1)\text{in}}(t) = C^\rho(t) - C^\Sigma(t) + C^{\partial \mathcal{X}}(t). \quad (2.174)$$

Durch (2.174) werden die inkrementiellen Trägheitstensoren definiert, die sich auf die Deformation einer internen Grenzfläche, C^Σ , und der Oberfläche, $C^{\partial \mathcal{X}}$, beziehen:

$$C^\Sigma(t) := \int_{\Sigma} \sigma^\Sigma(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d\Sigma, \quad (2.175)$$

$$C^{\partial \mathcal{X}}(t) := \int_{\partial \mathcal{X}} \sigma^{\partial \mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d^2 X. \quad (2.176)$$

Die Zerlegung von $C^{(1)\text{in}}$ in (2.174) in drei Anteile wird in Abschnitt 2.4.8 verwendet, um die MacCullagh-Formel abzuleiten.

2.4.6 Alternative Beschreibung

Neben der in Abschnitt 2.4.8 abgeleiteten MacCullagh-Formel, die dann im weiteren zur Bestimmung der benötigten Komponenten des inkrementiellen Trägheitstensors, $C^{(1)}$, verwendet wird, soll hier eine Alternative aufgezeigt werden. Diese beschreibt zum einen die direkte Berechnung von $C^{(1)\text{ex}}$ und den Beiträgen C^ρ , C^Σ und $C^{\partial\mathcal{X}}$ zu $C^{(1)\text{in}}$ und zum anderen wird eine Möglichkeit der numerischen Überprüfung der Ergebnisse der MacCullagh-Formel gegeben.

In den Gleichungen (2.143), (2.167), (2.175) und (2.176) treten Integranden der Form

$$[(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}]$$

auf. Für die kartesischen Komponenten $i3$, mit $i = 1, 2, 3$, dieses Tensors ergibt sich

$$[(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}]_{i3} = \begin{cases} -X_1 X_3 & \text{für } i = 1 \\ -X_2 X_3 & \text{für } i = 2 \\ X_1^2 + X_2^2 & \text{für } i = 3 \end{cases} . \quad (2.177)$$

Auch hier sollen in der weiteren Beschreibung die sphärischen Koordinaten (r, Ω) verwendet werden. Werden die Ausdrücke der rechten Seite von (2.177) mit den skalaren Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{20}(\Omega) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \\ Y_{21}(\Omega) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} \end{aligned}$$

verglichen, so lassen sich diese in folgender Form angeben:

$$\begin{aligned} X_1 X_3 - i X_2 X_3 &= r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} = -2\sqrt{\frac{2\pi}{15}} r^2 Y_{21}^*(\Omega), \\ X_1^2 + X_2^2 &= r^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = \frac{2}{3} r^2 \left[1 - 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20}(\Omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Werden diese Ausdrücke für den Integranden in (2.143) eingesetzt, ergibt sich

$$[C^{(1)\text{ex}}(t)]^* = 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^P(\mathbf{X}, t) Y_{21}^*(\Omega) r^2 d^2 X, \quad (2.179)$$

$$C_{33}^{(1)\text{ex}}(t) = \frac{2}{3} \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^P(\mathbf{X}, t) \left[1 - 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20}(\Omega) \right] r^2 d^2 X, \quad (2.180)$$

wobei die Definition

$$C^{(1)\text{ex}} := C_{13}^{(1)\text{ex}}(t) + i C_{23}^{(1)\text{ex}}(t) \quad (2.181)$$

verwendet ist. Für die inkrementiellen Trägheitstensoren C^Σ , $C^{\partial\mathcal{X}}$ und C^ρ können analoge Ausdrücke zu (2.179) und (2.180) gefunden werden, indem für die Flächenmassendichte, σ^P , nun die Größen σ^Σ , $\sigma^{\partial\mathcal{X}}$ und $\rho^{(\Delta)}$ eingesetzt werden und die Integration entsprechend über die Oberfläche, $\partial\mathcal{X}$, die Grenzfläche, Σ , oder das Volumen, \mathcal{X} , ausgeführt wird und komplexe Kombinationen analog zu (2.181) gebildet werden:

$$[C^\rho(t) - C^\Sigma(t) + C^{\partial\mathcal{X}}(t)]^* = 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left[\int_{\mathcal{X}} \rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) Y_{21}^*(\Omega) r^2 d^3 X \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Sigma} \sigma^{\Sigma}(\mathbf{X}, t) Y_{21}^*(\Omega) r^2 d\Sigma \\
& + \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) Y_{21}^*(\Omega) r^2 d^2 X \Big], \tag{2.182}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{33}^{\rho}(t) - C_{33}^{\Sigma}(t) + C_{33}^{\partial\mathcal{X}}(t) &= \frac{2}{3} \left\{ \int_{\mathcal{X}} \rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) \left[1 - 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20}(\Omega) \right] r^2 d^3 X \right. \\
& - \int_{\Sigma} \sigma^{\Sigma}(\mathbf{X}, t) \left[1 - 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20}(\Omega) \right] r^2 d\Sigma \\
& \left. + \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) \left[1 - 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20}(\Omega) \right] r^2 d^2 X \right\}. \tag{2.183}
\end{aligned}$$

Die hier gezeigte Umformung ist nicht für den inkrementiellen Trägheitstensor $C^{(1)\text{in}}$ möglich, da der Integrand in (2.141) nicht von der Form $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}$ ist, was die Grundlage dieser Ableitung darstellt.

2.4.7 Lokales Inkrement des Gravitationspotentials

Für die Berechnung des inkrementiellen Trägheitstensors mittels der MacCullagh-Formel, die in Abschnitt 2.4.8 abgeleitet wird, ist es notwendig das lokale Inkrement des Gravitationspotentials, $\phi^{(\Delta)}$, mit Hilfe der lokalen Inkremente der Volumenmassendichte, $\rho^{(\Delta)}$, und der Flächenmassendichten der Last, $\sigma^{(\Delta)}$, der deformierten Grenzfläche, σ^{Σ} , und der deformierten Oberfläche, $\sigma^{\partial\mathcal{X}}$, darzustellen. Analog zur Betrachtung der Beiträge zum inkrementiellen Trägheitstensor kann das lokale Inkrement des Gravitationspotentials, $\phi^{(\Delta)}$, in den Beitrag der Last, $\phi^{(\Delta)\text{ex}}$, und den der internen Massenumverteilung, $\phi^{(\Delta)\text{in}}$, aufgespalten werden:

$$\phi^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) = \phi^{(\Delta)\text{ex}}(\mathbf{X}, t) + \phi^{(\Delta)\text{in}}(\mathbf{X}, t). \tag{2.184}$$

Diese Beiträge können durch die entsprechenden Newton-Integrale bestimmt werden:

$$\phi^{(\Delta)\text{ex}}(\mathbf{X}, t) = - G \int_{\partial\mathcal{X}} \frac{\sigma^{\text{P}}(\mathbf{X}', t)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} d^2 X', \tag{2.185}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{(\Delta)\text{in}}(\mathbf{X}, t) &= - G \int_{\mathcal{X}} \frac{\rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}', t)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} d^3 X' + G \int_{\Sigma} \frac{\sigma^{\Sigma}(\mathbf{X}', t)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} d\Sigma' \\
& - G \int_{\partial\mathcal{X}} \frac{\sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}', t)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} d^2 X', \tag{2.186}
\end{aligned}$$

wobei hier \mathbf{X} der Aufpunkt und \mathbf{X}' der Quellpunkt ist. Mit der Darstellung des lokalen Inkrements des Gravitationspotentials durch die Newton-Integrale (2.185) und (2.186) sind die Voraussetzungen für die Ableitung der MacCullagh-Formel gegeben.

2.4.8 MacCullagh-Formel für das lokale Inkrement des Gravitationspotentials

Der Vergleich der Darstellungen der Beiträge zum inkrementiellen Trägheitstensor und der Beiträge zum lokalen Inkrement des Gravitationspotentials zeigt, daß jeweils das lokale Inkrement der Volumendichte, $\rho^{(\Delta)}$, der Flächenmassendichte der Last, σ^P , der deformierten Grenzfläche, σ^Σ , und der deformierten Oberfläche, $\sigma^{\partial\mathcal{X}}$, eingehen. Dies weist darauf hin, daß auch im Gravitationspotential alle Informationen vorhanden sind, die benötigt werden, um den inkrementiellen Trägheitstensor zu bestimmen.

Diese Idee liegt der MacCullagh-Formel zu Grunde. Für deren Ableitung wird das lokale Inkrement des Gravitationspotentials, $\phi^{(\Delta)}$, außerhalb des Volumens \mathcal{X} mit Hilfe der skalaren Kugelflächenfunktionen (Anhang A.2) dargestellt. Hierzu wird das Inverse des Abstands $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|$ für $r > r'$ durch

$$\frac{1}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^j \sum_{m=-j}^j Y_{jm}(\Omega) Y_{jm}^*(\Omega') \quad (2.187)$$

entwickelt (Kellogg, 1929, Abs. 5.2), wobei $\mathbf{X} = (r, \Omega)$ die sphärischen Koordinaten bezeichnet. Wird (2.187) in die Newton-Integrale (2.185) und (2.186) eingesetzt und die Reihenfolge der Summation über den Grad j und die Ordnung m der Entwicklung mit der Integration über r' und Ω' vertauscht, ist das Potential, $\phi^{(\Delta)}$, für \mathbf{X} außerhalb von \mathcal{X} durch

$$\phi^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left(\frac{a}{r}\right)^{j+1} \Phi_{jm}(t) Y_{jm}(\Omega) \quad (2.188)$$

gegeben, wobei für die Koeffizienten

$$\Phi_{jm}(t) = \Phi_{jm}^{\text{ex}}(t) + \Phi_{jm}^{\text{in}}(t) \quad (2.189)$$

gilt. Hierbei sind Φ_{jm}^{ex} bzw. Φ_{jm}^{in} die Koeffizienten der Potentialänderung bezüglich der Last bzw. bezüglich der Reaktion der Erde. Die jeweiligen Koeffizienten werden beschrieben durch

$$\Phi_{jm}^{\text{ex}}(t) = -\frac{4\pi G}{(2j+1)a^{j+1}} \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^P(\mathbf{X}, t) Y_{jm}^*(\Omega) r^j d^2 X, \quad (2.190)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{jm}^{\text{in}}(t) = & -\frac{4\pi G}{(2j+1)a^{j+1}} \left[\int_{\mathcal{X}} \rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) Y_{jm}^*(\Omega) r^j d^3 X - \int_{\Sigma} \sigma^\Sigma(\mathbf{X}, t) Y_{jm}^*(\Omega) r^j d\Sigma \right. \\ & \left. + \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) Y_{jm}^*(\Omega) r^j d^2 X \right]. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Für die weitere Ableitung sind die Koeffizienten der Potentialentwicklung vom Grad $j = 2$ von besonderer Bedeutung, weshalb sie hier gesondert angegeben werden:

$$\Phi_{2m}^{\text{ex}}(t) = -\frac{4\pi G}{5a^3} \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^P(\mathbf{X}, t) Y_{2m}^*(\Omega) r^2 d^2 X, \quad (2.192)$$

$$\Phi_{2m}^{\text{in}}(t) = -\frac{4\pi G}{5a^3} \left[\int_{\mathcal{X}} \rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) Y_{2m}^*(\Omega) r^2 d^3 X - \int_{\Sigma} \sigma^\Sigma(\mathbf{X}, t) Y_{2m}^*(\Omega) r^2 d\Sigma \right]$$

$$+ \left. \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) Y_{2m}^*(\Omega) r^2 d^2 X \right]. \quad (2.193)$$

Mit (2.192) und (2.193) lassen sich für die Ordnung $m = 1$ (2.179) und (2.182) zu

$$C^{(1)\text{ex}}(t) = -\sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{a^3}{G} [\Phi_{21}^{\text{ex}}(t)]^*, \quad (2.194)$$

$$C^\rho(t) - C^\Sigma(t) + C^{\partial\mathcal{X}}(t) = -\sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{a^3}{G} [\Phi_{21}^{\text{in}}(t)]^* \quad (2.195)$$

umformen. Mit (2.174) folgt, daß die linke Seite von (2.195) gleich $C^{(1)\text{in}}$ ist, und es lassen sich die inkrementiellen Trägheitstensoren bezüglich der Last und der Reaktion in der gleichen Form angeben:

$$C^{(1)\text{ex|in}}(t) = -\sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{a^3}{G} [\Phi_{21}^{\text{ex|in}}(t)]^*. \quad (2.196)$$

Werden diese Beiträge zu $C^{(1)}$ summiert ergibt sich die erste MacCullagh-Formel:

$$C^{(1)}(t) = -\sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{a^3}{G} [\Phi_{21}(t)]^*. \quad (2.197)$$

Die erste MacCullagh-Formel stellt somit einen Zusammenhang zwischen den kartesischen Komponenten, $C_{13}^{(1)}$ und $C_{23}^{(1)}$, des inkrementiellen Trägheitstensors, $C^{(1)}$, und dem Koeffizienten Φ_{21} des lokalen Inkrements des Gravitationspotentials her.

Für die Ordnung $m = 0$ ergibt sich bei ähnlichem Vorgehen aus (2.192) und (2.193) für die beiden Beiträge des inkrementiellen Trägheitstensors

$$C_{33}^{(1)\text{ex}}(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{a^3}{G} \Phi_{20}^{\text{ex}}(t) + \frac{2}{3} \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\text{P}}(\mathbf{X}, t) r^2 d^2 X, \quad (2.198)$$

$$C_{33}^{(1)\text{in}}(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{a^3}{G} \Phi_{20}^{\text{in}}(t) + \frac{2}{3} \left[\int_{\mathcal{X}} \rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) r^2 d^3 X - \int_{\Sigma} \sigma^\Sigma(\mathbf{X}, t) r^2 d\Sigma + \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) r^2 d^2 X \right]. \quad (2.199)$$

Die Integrale in (2.199) können umgeformt werden, wenn das Green-Theorem

$$\int_{\mathcal{X}} (\text{div} \varpi) r^2 d^3 X = \int_{\partial\mathcal{X}} (\mathbf{n} \cdot \varpi^-) r^2 d^2 X - \int_{\Sigma} [(\mathbf{n} \cdot \varpi)]_+^- d\Sigma - 2 \int_{\mathcal{X}} (\mathbf{X} \cdot \varpi) d^3 X \quad (2.200)$$

angewandt wird. Wird $\varpi = -\rho^{(0)}(\mathbf{X}) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ gewählt und werden die Definitionen (2.166), (2.170) und (2.171) der Volumen- und Flächenmassendichten berücksichtigt, gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \rho^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) r^2 d^3 X &= \int_{\Sigma} \sigma^\Sigma(\mathbf{X}, t) r^2 d\Sigma - \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) r^2 d^2 X \\ &+ 2 \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) (\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) d^3 X. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs ergibt sich aus (2.199) folgender Ausdruck:

$$C_{33}^{(1)\text{in}}(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{a^3}{G} \Phi_{20}^{\text{in}}(t) + \frac{4}{3} \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) (\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) d^3 X. \quad (2.202)$$

Um die zweite MacCullagh-Formel angeben zu können, sind noch die Integrale in (2.198) und (2.202) zu bestimmen. Mit den Identitäten

$$\text{Tr}[(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] = 2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}), \quad (2.203)$$

$$\text{Tr}[2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{X}] = 4(\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}), \quad (2.204)$$

wobei Tr der Spur-Operator ist, und durch Anwendung dieses Operators auf (2.141) und (2.143), ergibt sich

$$\text{Tr} \mathbf{C}^{(1)\text{ex}}(t) = 2 \int_{\partial \mathcal{X}} \sigma^{\text{P}}(\mathbf{X}, t) r^2 d^2 X, \quad (2.205)$$

$$\text{Tr} \mathbf{C}^{(1)\text{in}}(t) = 4 \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(\mathbf{X}) (\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) d^3 X. \quad (2.206)$$

Mit dieser Darstellung der Integrale lassen sich nun $C_{33}^{(1)\text{ex}}$ und $C_{33}^{(1)\text{in}}$ aus (2.198) und (2.202) in gleicher Form beschreiben:

$$C_{33}^{(1)\text{ex|in}}(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{a^3}{G} \Phi_{20}^{\text{ex|in}}(t) + \frac{1}{3} \text{Tr}[\mathbf{C}^{(1)\text{ex|in}}(t)]. \quad (2.207)$$

Durch Addition der beiden Beiträge läßt sich die zweite MacCullagh-Formel angeben:

$$C_{33}^{(1)}(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{a^3}{G} \Phi_{20}(t) + \frac{1}{3} \text{Tr}[\mathbf{C}^{(1)}(t)], \quad (2.208)$$

mit der ein Zusammenhang zwischen der kartesischen Komponente $C_{33}^{(1)}$ des inkrementiellen Trägheitstensors und dem Koeffizienten Φ_{20} des lokalen Inkrements des Gravitationspotentials und der Spur von $\mathbf{C}^{(1)}$ hergestellt ist.

Mit den MacCullagh-Formeln (2.197) und (2.208) lassen sich nun die benötigten Komponenten des inkrementiellen Trägheitstensors auf analytische Weise bestimmen. In Abschnitt 4.4 werden diese Ergebnisse mit denen der alternativen Beschreibung in Abschnitt 2.4.6 für eine vorgegebene Deformationsgeschichte verglichen.

2.4.9 Zentrifugalpotential

Der Übergang aus dem initialen in den aktuellen Rotationszustand kann durch die Zentrifugalkraft beschrieben werden, die sich im lokalen Inkrement des Zentrifugalpotentials, $\psi^{(\Delta)}$, ausdrückt. Mit dem initialen Zentrifugalpotential, $\psi^{(0)}$, folgt

$$\psi^{(\Delta)} := \psi(\mathbf{X}, t) - \psi^{(0)}(\mathbf{X}), \quad (2.209)$$

wobei $\psi(\mathbf{X}, t)$ das Zentrifugalpotential des aktuellen Rotationszustands ist. Mit

$$\psi^{(0)}(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\omega}^{(0)})^2 (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) - (\boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \mathbf{X})], \quad (2.210)$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})] \quad (2.211)$$

(z. B. Grafarend et al., 2000) läßt sich $\psi^{(\Delta)}$ als Funktion von \mathbf{m} , dem Vektor der Variation der Erdrotation, darstellen (z. B. Dahlen, 1976; Moritz & Mueller, 1987):

$$\psi^{(\Delta)} = \omega^{(0)2} [m_1 X_1 X_3 + m_2 X_2 X_3 - m_3 (X_1^2 + X_2^2)], \quad (2.212)$$

was exakt bis zur ersten Ordnung in $\|\mathbf{m}\|$ ist. Aufgrund der linearisierten Theorie sind die lokalen Inkremente in der Euler- und der Lagrange-Formulierung identisch, so daß $\psi^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t)$ gilt. In der spektralen Repräsentation mit Termen des Grades $j = 2$ folgt dann mit (2.212) aus (2.178) die Beziehung

$$\psi^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) = -\frac{2}{3}\omega^{(0)2}r^2m_3(t) + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left[\sum_{m=-1}^1 \Psi_{2m}(t)Y_{2m}(\Omega) \right], \quad (2.213)$$

wobei die Koeffizienten durch

$$\Psi_{20}(t) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\omega^{(0)2}a^2m_3(t), \quad (2.214)$$

$$\Psi_{21}(t) = -\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\omega^{(0)2}a^2 [m_1(t) - im_2(t)], \quad (2.215)$$

$$\Psi_{2-1}(t) = -[\Psi_{21}(t)]^* \quad (2.216)$$

gegeben sind. Demnach trägt $\psi^{(\Delta)}$ zur Veränderung des Gesamtpotentials bei, so daß es auch die Geoidhöhe beeinflusst. Diese Rückkopplung in die MSG wird in Abschnitt 2.5 betrachtet.

2.4.10 Sphärische Approximation

Für die Beschreibung der RT ist der initiale Rotationszustand ein Rotationsellipsoid (Abbildung 2.7), jedoch werden für die Beschreibung die Amplituden der spektralen Repräsentation von \mathbf{u} und von $\phi^{(\Delta)}$ verwendet, die für die VR in der sphärischen Approximation bestimmt werden. Um in der Beschreibung der RT konsistent zu sein, muß diese nun auch in der sphärischen Approximation ausgeführt werden, was gleichbedeutend mit der Vernachlässigung der Topographie und der Abplattung der Erde ist. Die Oberfläche, $\partial\mathcal{X}$, der Erde ist dann die einer Kugel mit mittlerem Erdradius. Da die Topographie die gleiche Größenordnung wie die Abplattung der Erde hat, läßt sich für beide in der sphärischen Approximation ein relativer Fehler von $3 \cdot 10^{-3}$ angeben (Groten, 2000, S. 5). Der sich damit ergebende absolute Fehler in den Beiträgen $C^{(1)\text{in}}$ und $C^{(1)\text{ex}}$ hat die Größenordnung 10^{29} kg m^2 (Martinec & Hagedoorn, 2005).

Weitere Näherungen ergeben sich aufgrund des verwendeten Erdmodells, wobei hier zuerst die Auswirkung der Radialsymmetrie der Volumenmassendichte betrachtet werden soll. Aus der Inversion des langwelligen Geoids (z. B. Čadek & Fleitout, 2003) und der seismischen Tomographie (z. B. Trampert & Woodhouse, 1995) läßt sich eine Abschätzung für die laterale Variation der Volumenmassendichte von 2% angeben. Die Größenordnung des absoluten Fehlers bei der Verwendung einer radialsymmetrischen Dichteverteilung, $\rho^{(0)}(\mathbf{X}) = \rho^{(0)}(r)$, beträgt dann 10^{30} kg m^2 .

Diese Vereinfachungen in der sphärischen Approximation führen mit (2.141), (2.143) und (2.149) zu

$$C^{(1)\text{in}}(t) = \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(r) [2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \otimes \mathbf{X}] d^3X, \quad (2.217)$$

$$\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}(t) = \int_{\partial\mathcal{X}} \sigma^{\text{P}}(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] d^2X, \quad (2.218)$$

$$\mathbf{h}(t) = \int_{\mathcal{X}} \rho^{(0)}(r) \left[\mathbf{X} \times \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt} \right] d^3X. \quad (2.219)$$

Hierbei ist noch der Übergang zu sphärischen Koordinaten, $\mathbf{X} = (r, \Omega)$, zu berücksichtigen, so daß mit dem mittleren Erdradius, a , und dem Radius der internen Grenzflächen, a_{Σ} , folgende Zusammenhänge bestehen:

$$d^3X = r^2 dr d\Omega, \quad (2.220)$$

$$d^2X = a^2 d\Omega, \quad (2.221)$$

$$d\Sigma = a_{\Sigma}^2 d\Omega, \quad (2.222)$$

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (2.223)$$

Die sphärische Approximation der inkrementiellen Trägheitstensoren \mathbf{C}^{Σ} und $\mathbf{C}^{\partial\mathcal{X}}$ lassen sich analog zu $\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}$ ableiten, wozu jedoch anstelle von σ^{P} dann σ^{Σ} bzw. $\sigma^{\partial\mathcal{X}}$ und die entsprechenden Flächenintegrale bezüglich Σ bzw. $\partial\mathcal{X}$ verwendet werden. Für σ^{Σ} und $\sigma^{\partial\mathcal{X}}$ in den entsprechenden Gleichungen gelten folgende sphärischen Approximationen:

$$\sigma^{\Sigma}(\mathbf{X}, t) = [\rho^{(0)}(r)(\mathbf{e}_r \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))]_{-}^{+}, \quad (2.224)$$

$$\sigma^{\partial\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t) = \rho^{(0)-}(r)(\mathbf{e}_r \mathbf{u}^{-}(\mathbf{X}, t)), \quad (2.225)$$

wobei mit $-$ wiederum die entsprechenden Werte an der Innenseite der Oberfläche $\partial\mathcal{X}$ gekennzeichnet sind.

Repräsentation des Trägheitstensors durch Kugelflächenfunktionen

Mit der oben eingeführten sphärischen Approximation lassen sich die inkrementiellen Trägheitstensoren $\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}$ und $\mathbf{C}^{(1)\text{in}}$ mit Kugelflächenfunktionen repräsentieren. Für \mathbf{u} ergibt sich mit den vektoriiellen Kugelflächenfunktionen $\mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}$ (Anhang A.2) wie in (2.53) die Entwicklung

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \sum_{jm} \left[U_{jm}(r, t) \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + V_{jm}(r, t) \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) + W_{jm}(r, t) \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) \right]. \quad (2.226)$$

Mit den skalaren Kugelflächenfunktionen, Y_{jm} , lassen sich die spektralen Repräsentationen der Flächenmassendichte der Last, σ_{jm} , der deformierten Grenzfläche, σ_{jm}^{Σ} , und der deformierten Oberfläche, $\sigma_{jm}^{\partial\mathcal{X}}$, analog zu (2.112) ableiten. Kombiniert mit der sphärischen Approximation (2.224) für σ^{Σ} und (2.225) für $\sigma^{\partial\mathcal{X}}$ folgt

$$\sigma_{jm}^{\Sigma}(t) = [\rho^{(0)}(r) U_{jm}(r, t)]_{a_{\Sigma}^{-}}^{a_{\Sigma}^{+}}, \quad (2.227)$$

$$\sigma_{jm}^{\partial\mathcal{X}}(t) = \rho^{(0)-}(a) U_{jm}^{-}(a, t). \quad (2.228)$$

In Anhang A.5 ist dargestellt, wie sich mit der sphärischen Approximation und den sich daraus ergebenden Vereinfachungen die inkrementiellen Trägheitstensoren $C^{(1)\text{ex}}$ und $C^{(1)\text{in}}$ mit Kugelflächenfunktionen repräsentieren lassen. Wird wie in (2.153) die komplexe Größe $C(t) = C_{13}(t) + iC_{23}(t)$ eingeführt und auf die beiden Trägheitstensoren angewandt, ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$C^{(1)\text{ex}}(t) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}a^4 [\sigma_{21}(t)], \quad (2.229)$$

$$C^{(1)\text{in}}(t) = 4\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r) [U_{21}^*(r, t) + 3V_{21}^*(r, t)] r^3 dr. \quad (2.230)$$

Für die Komponenten $C_{33}^{(1)}$ folgt

$$C_{33}^{(1)\text{ex}}(t) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}a^4 [\sqrt{5}\sigma_{00}^{\text{P}}(t) - \sigma_{20}^{\text{P}}(t)], \quad (2.231)$$

$$C_{33}^{(1)\text{in}}(t) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r) [\sqrt{5}U_{00}(r, t) - U_{20}(r, t) - 3V_{20}(r, t)] r^3 dr. \quad (2.232)$$

Desweiteren können aus (A.58) und (A.59) die Spur-Operatoren für die jeweiligen inkrementiellen Trägheitstensoren berechnet werden:

$$\text{Tr}C^{(1)\text{ex}}(t) = 4\sqrt{\pi}a^4\sigma_{00}^{\text{P}}(t), \quad (2.233)$$

$$\text{Tr}C^{(1)\text{in}}(t) = 8\sqrt{\pi} \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)U_{00}(r, t)r^3 dr. \quad (2.234)$$

Repräsentation des relativen Drehimpulses durch Kugelflächenfunktionen

Der durch (2.149) beschriebene relative Drehimpuls, \mathbf{h} , soll im weiteren durch vektorielle Kugelflächenfunktionen, $\mathcal{S}_{jm}^{(\lambda)}$ (Anhang A.2), repräsentiert werden. Mit der spektralen Repräsentation von \mathbf{u} in (2.226) lassen sich für die komplexe Größe $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$ und $h_3(t)$ mit den kartesischen Komponenten $h_i(t)$ des relativen Drehimpulses folgende Ausdrücke finden (Anhang A.6):

$$h(t) = 2\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r) \frac{dW_{11}(r, t)}{dt} r^3 dr, \quad (2.235)$$

$$h_3(t) = -2\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r) \frac{dW_{10}(r, t)}{dt} r^3 dr. \quad (2.236)$$

2.5 Kopplung der Komponenten

2.5.1 Einleitung

In den vorausgegangenen Abschnitten sind die Komponenten des Problems der glazial-isostatisch induzierten Meeresspiegeländerung weitgehend isoliert betrachtet worden. Nur Ergebnisse eines Teilaspektes des Problems sind als vorgegebene Größen in einen anderen Teilaspekt einbezogen worden, z. B. die radiale Verschiebung, u , und die Geoidhöhe, e , aus der VR in die Berechnung der MSG.

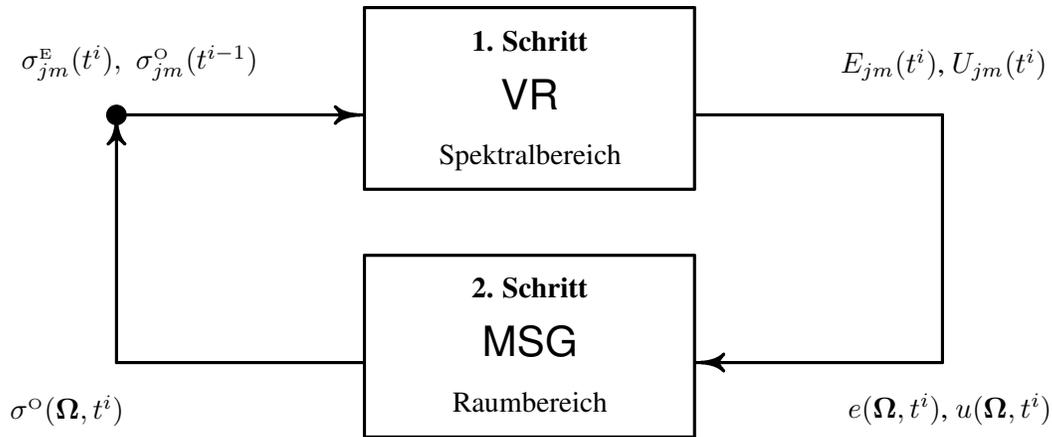


Abbildung 2.8: Lösungsschema der MSG in zwei Schritten. Die einzelnen Schritte werden im Text erläutert.

Generell unterliegen alle Kopplungen zwischen den Komponenten des Modells dem Prinzip, daß die integrale Beschreibung der gekoppelten Komponenten durch das Zeitdifferenzschema für diskrete Zeiten umformuliert wird. Dies findet seinen Ausdruck darin, daß zur aktuellen Zeit, t^i , neben den bekannten vorgegebenen Größen für t^i auch die zu bestimmenden Größen aus der vorhergehenden Zeit, t^{i-1} , verwendet werden. Wie dies im einzelnen für die Komponenten VR und MSG realisiert und auf die Komponente RT erweitert wird, ist in den folgenden Abschnitten dargestellt.

2.5.2 Differenzschema und Meeresspiegelgleichung

Die MSG (2.114) ist eine Integralgleichung, wobei die integrale Formulierung in den expliziten Ausdrücken für die Anteile s^{UF} und s^{NU} erscheint. Zur Berechnung von s^{UF} in (2.117) wird die spektrale Repräsentation benötigt, d. h. eine Integraltransformation angewandt, während für s^{NU} (2.126) zu lösen ist, in der e und u in der räumlichen Repräsentation benötigt werden. Hier ist auch die Kopplung mit der Berechnung der VR zu erkennen. Zur Berechnung von e und u wird die Auflast σ^P in der spektralen Repräsentation vorgegeben, die durch (2.124) gegeben ist und von e und u abhängig ist. Zur Vereinfachung der Berechnung wird ein Lösungsschema in zwei Schritten angewandt, das in Abbildung 2.8 skizziert ist.

Im ersten Schritt des Lösungsschemas wird die VR zur Zeit t^i berechnet. Die dazu benötigte spektrale Repräsentation der Auflast, σ^P , setzt sich aus den Anteilen $\sigma_{jm}^E(t^i)$ und $\sigma_{jm}^O(t^{i-1})$ zusammen. Es ist zu beachten, daß die Ozeanlast aus der Lösung zur vorausgehenden Zeit t^{i-1} bestimmt ist und somit die Kopplung der Berechnung der VR und der MSG in das zweiseitige Lösungsschema überführt wird. Aus der Lösung der VR wird für die MSG aus $E_{jm}(t^i)$ und $U_{jm}(t^i)$ die zugehörige räumliche Repräsentation bestimmt.

Im zweiten Schritt des Lösungsschemas wird die MSG gelöst. Die spektrale Repräsentation der errechneten Ozeanlast, $\sigma^O(\Omega, t^i)$, wird bestimmt und als ein Anteil der Auflast für die nächste diskrete Zeit t^{i+1} bereitgestellt. Die numerische Implementierung dieses Schemas wird in Abschnitt 4.2 beschrieben.

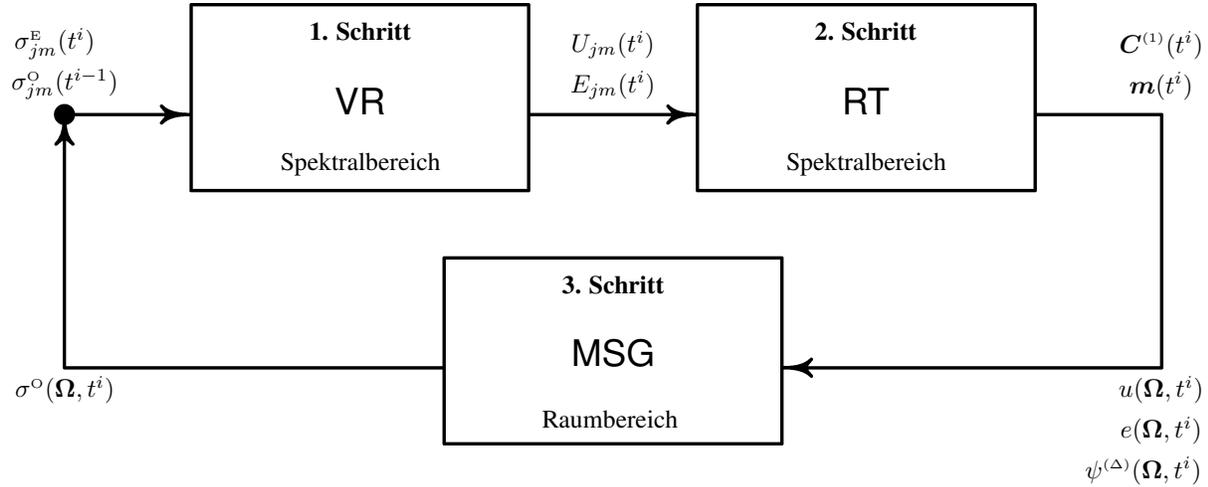


Abbildung 2.9: Lösungsschema der VR, RT und MSG in drei Schritten. Die einzelnen Schritte werden im Text erläutert.

2.5.3 Differenzenschema und Variation der Erdrotation

In Abschnitt 2.5.2 ist die Kopplung der Komponenten VR und MSG mit Hilfe des Differenzenschemas dargestellt. Hier soll dieses Schema um die Komponente RT erweitert werden, die durch die Liouville-Gleichung (2.155) beschrieben wird. Um diese Gleichung zu lösen, werden die Komponenten von $C^{(1)}$ benötigt, die mit Hilfe der MacCullagh-Formeln (2.197)–(2.208) bestimmt werden. Dazu wird die spektrale Repräsentation von $\phi^{(\Delta)}$, ein Ergebnis der VR in Abschnitt 2.2.8, verwendet. In Abbildung 2.9 wird das nun aus drei Schritten bestehende Lösungsschema skizziert.

Im ersten Schritt wird, wie beim Lösungsschema in Abschnitt 2.5.2, die VR in Abhängigkeit von der spektralen Repräsentation der Auflast, σ^P , die sich aus den Anteilen $\sigma_{jm}^E(t^i)$ und $\sigma_{jm}^O(t^{i-1})$ zusammensetzt, bestimmt.

Im zweiten Schritt wird die spektrale Repräsentation von $\phi^{(\Delta)}$ für die Zeit t^i verwendet, um mit Hilfe der MacCullagh-Formeln die Liouville-Gleichung für die RT zu lösen. Somit wird hier ein Ergebnis der VR in die RT übernommen. Ergebnisse der RT für die Zeit t^i sind die normalisierte Variation der Erdrotation, $m(t^i)$, und das Zentrifugalpotential, $\psi^{(\Delta)}(\Omega, t^i)$.

Im dritten Schritt wird die MSG gelöst, wobei zur Berechnung von $e(\Omega, t^i)$ in der räumlichen Repräsentation die Größen $\phi^{(\Delta)}(\Omega, t^i)$ und $\psi^{(\Delta)}(\Omega, t^i)$ herangezogen werden. Wie zuvor wird die spektrale Repräsentation der errechneten Ozeanlast, $\sigma^O(\Omega, t^i)$, als Anteil der Auflast für die Zeit t^{i+1} bereitgestellt.

Es ist zu beachten, dass $\sigma^O(\Omega, t^{i-1})$ zur vorausgehenden Zeit, t^{i-1} , bestimmt ist und $e(\Omega, t^i)$ aus $\phi(\Omega, t^i)$ sowie $\psi^{(\Delta)}(\Omega, t^i)$ berechnet wird, und somit die Kopplung der Berechnung der VR, RT und MSG in das dreistufige Lösungsschema überführt wird. Die numerische Implementierung dieses Schemas wird in Abschnitt 4.3 beschrieben.

3. Eingabemodelle

3.1 Erdmodelle

Die Spezifizierung der elastischen Parameter, d. h. Volumenmassendichte, $\rho^{(0)}$, des Schermoduls, μ , und der Viskosität, ν , als r -abhängige Funktionen für ein radialsymmetrisches, inkompressibles Kontinuum mit Maxwell-Rheologie wird im folgenden als Erdmodell bezeichnet.

Als Folge dieser Annahme ist insbesondere der Unterschied zwischen der ozeanischen und kontinentalen Lithosphärenmächtigkeit vernachlässigt. In verschiedenen Arbeiten (z. B. Gasperini et al., 1991; Kaufmann et al., 1997; Okuno & Nakada, 2001) wird auf die unterschiedliche Mächtigkeit der ozeanischen und kontinentalen Lithosphäre hingewiesen. Wolf (1993) stellt verschiedene Abschätzungen der kontinentalen Lithosphärenmächtigkeit für verschiedene Regionen der Erde zusammen (weitere Abschätzungen der Lithosphärenmächtigkeit sind zu finden in Fjeldskaar, 1997; Kaikkonen et al., 2000; Thoma & Wolf, 2001; Kendall et al., 2003; Martinec & Wolf, 2005). Die Beobachtungen der postglazialen Landhebung weisen darüber hinaus auf die Möglichkeit lateraler Variationen der Viskosität hin (z. B. Kaufmann & Wolf, 1996; Peltier & Jiang, 1996; Lambeck et al., 1998b; Kaufmann et al., 2000; Cianetti et al., 2002; Sabadini et al., 2002; Wu & van der Wal, 2003).

Die in den folgenden Abschnitten angegebenen elastischen und viskosen Parameter sind mit Hilfe unterschiedlicher Methoden gewonnen. Die elastischen Parameter sind aus seismologischen Daten, z. B. Laufzeitbeobachtungen und Perioden der Eigenschwingungen der Erde, bestimmt (z. B. Dziewonski & Anderson, 1981; Masters & Shearer, 1995), wobei gegenwärtig weitere Beobachtungen zur gemeinsamen Inversion der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten und deren lateralen Inhomogenitäten herangezogen werden (z. B. Antolik et al., 2003). Die verwendeten Viskositätsmodelle werden aus Indikatoren der pleistozänen und holozänen relativen Meeresspiegeländerungen (z. B. Peltier, 1986; Lambeck et al., 1998b; Wiczerkowski et al., 1999) abgeleitet. Zum Teil werden zusätzliche Beobachtungen, wie Schwereänderungen oder Änderungen der Erdrotation, berücksichtigt (z. B. Peltier & Jiang, 1996).

3.1.1 Elastische Parameter

Die elastischen Parameter des Erdmodells sind dem PREM ("Preliminary Reference Earth Model", Dziewonski & Anderson, 1981) entnommen. Für eine vorgegebenen Radialentfernung, r , lassen sich mit Hilfe von Polynomen die Volumenmassendichte und der Schermodul als Funktion von r bestimmen. Die von Dziewonski & Anderson (1981) vorgestellten Polynome, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind in Anhang B.1 angegeben. Dort finden sich auch für den Schermodul, μ , Polynome, die aus den Polynomen für die Scherwellengeschwindigkeit, v_s , mit Hilfe des Zusammenhangs $\mu(r) = \rho^{(0)}(r)v_s(r)^2$ abgeleitet sind.

Tabelle 3.1: Diskretisierung der Radialentfernung r für die elastischen Parameter des PREM durch die Intervalle $[r_k, r_{k+1}]$ mit der Länge h_k . Da der flüssige Erdkern durch die Randbedingungen (2.11)–(2.13) berücksichtigt wird, ist $r_1 = 3480$ km an der Kern-Mantel-Grenze gewählt. Somit ergibt sich für die Anzahl der Teilintervalle $P = 105$.

Radialentfernung r (km)	Intervalllänge h_k (km)
3480 – 5701	50
5701 – 5951	20
5951 – 6301	10
6301 – 6371	5

Die elastischen Parameter werden entsprechend der Diskretisierung der Radialentfernung, r , für r_k mit $k \in [1, P + 1]$ berechnet, wobei die Länge h_k der Intervalle $[r_k, r_{k+1}]$, in denen die finiten Elemente (2.71) und (2.73) definiert sind, mit r variiert. Die für diese Arbeit gewählte Diskretisierung ist in Tabelle 3.1 dargestellt. Für alle Viskositätsmodelle, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden, gilt diese Diskretisierung. Neben den elastischen Parametern $\rho^{(0)}(r_k)$ und $\mu(r_k)$, die durch die Polynome des PREM gegeben sind, wird für jedes r_k , mit $k \in [1, P + 1]$, entsprechend dem gewählten Viskositätsmodell auch $\nu(r_k)$ für r_k bestimmt.

3.1.2 Viskositätsmodell VM1

Viskositätsmodell VM1 (Tabelle 3.2) ist Peltier (1999) entnommen. Dieses Modell ist aus dem Spektrum der skandinavischen Relaxationszeit, relativen Meeresspiegeländerungen an 25 ausgewählten Orten und der Variation der Erdrotation abgeleitet. Für weitere Details der zugrunde liegenden Beobachtungen und der Inversion ist hier auf Peltier & Jiang (1996) und Peltier (1999) verwiesen.

3.1.3 Viskositätsmodell VMA

Viskositätsmodell VMA (Tabelle 3.3) berücksichtigt als einziges eine niederviskose Zone zwischen $r = 5701$ km und $r = 5951$ km. In diesem Bereich ist die Viskosität um eine Größenordnung reduziert. Mit Methoden der seismischen Tomographie ergeben sich Hinweise für eine derartige Viskositätsabnahme unterhalb des nordamerikanischen Kratons. Die Viskositäten von VMA orientieren sich an den Werten von Wu & van der Wal (2003).

Tabelle 3.2: Viskositätsmodell VM1.

Radialentfernung r (km)	Viskosität $\nu(r)$ (Pa s)
0 – 3480	flüssig
3480 – 5701	$1.995 \cdot 10^{21}$
5701 – 6271	$1.0 \cdot 10^{21}$
6271 – 6371	elastisch

Tabelle 3.3: Viskositätsmodell VMA.

Radialentfernung r (km)	Viskosität $\nu(r)$ (Pa s)
0 – 3480	flüssig
3480 – 5701	$1.995 \cdot 10^{21}$
5701 – 5951	$1.0 \cdot 10^{20}$
5951 – 6271	$1.0 \cdot 10^{21}$
6271 – 6371	elastisch

3.1.4 Viskositätsmodell VMF

Viskositätsmodell VMF (Tabelle 3.4) ist Fleming et al. (2003) entnommen, in dem auch der Einfluß einer viskoelastischen Lithosphäre untersucht wird. Es ist aus dem Spektrum von Relaxationszeiten für Skandinavien abgeleitet, das ursprünglich in Wiczerkowski et al. (1999) interpretiert wurde.

3.1.5 Viskositätsmodell VMI

Viskositätsmodell VMI (Tabelle 3.5) ist Martinec & Wolf (2005) entnommen, in dem neben der radial-symmetrischen auch eine axialsymmetrische Viskositätsverteilung mit größerer Lithosphärenmächtigkeit unter Skandinavien betrachtet wird. Für diese beiden Modelle werden neben der Viskosität des oberen und unteren Mantels auch die Lithosphärenmächtigkeiten aus dem verwendeten Spektrum der Relaxationszeit bestimmt. Viskositätsmodell VMI weicht nur geringfügig von VMF ab, jedoch bewirken diese Abweichungen in verschiedenen Regionen eine bessere Bewertung der Eingabemodelle (Abschnitt 5.3).

3.2 Eismodelle

Die verwendeten Eismodelle sind von besonderer Bedeutung, da sie nicht nur die VR mittels der Randbedingung (2.17) verursachen, sondern auch direkt durch die Massenumverteilung die RT beeinflussen und das Geoid variieren. Die nur indirekten Beobachtungen der Evolution der pleistozänen Eisschilde beschränken die Genauigkeit der Eismodelle. Das gesamte Eisvolumen kann z. B. nur aus relativen Meeresspiegeländerung an weit von den Eisschilden entfernt liegenden Orten (z. B. Australien, Bar-

Tabelle 3.4: Viskositätsmodell VMF.

Radialentfernung r (km)	Viskosität $\nu(r)$ (Pa s)
0 – 3480	flüssig
3480 – 5701	$5.9 \cdot 10^{21}$
5701 – 6271	$5.2 \cdot 10^{20}$
6271 – 6371	elastisch

Tabelle 3.5: Viskositätsmodell VMI.

Radialentfernung r (km)	Viskosität $\nu(r)$ (Pa s)
0 – 3480	flüssig
3480 – 5701	$5.0 \cdot 10^{21}$
5701 – 6271	$5.5 \cdot 10^{20}$
6271 – 6371	elastisch

bados, Sunda Schelf, Lambeck & Chappell, 2001; Yokoyama et al., 2001; Shennan & Milne, 2003), bestimmt werden. Die Ausdehnung der pleistozänen Eisschilde kann wiederum nur aus geomorphologischen und geologischen Beobachtungen abgeleitet werden, indem z. B. Moränen und andere glaziale Ablagerungen kartiert und datiert werden (z. B. Forman et al., 2004; Svendsen et al., 2004).

Aufgrund der genannten Probleme bei der Rekonstruktion der Evolution der pleistozänen Eisschilde wurden zuerst geometrisch einfache Eismodelle verwendet, die das gleiche Volumen hatten, wie für die Eisschilde der betrachteten Region abgeschätzt worden war (z. B. Drygalski, 1887; Farrell, 1972; Wolf, 1987). Aus der vorgegebenen Symmetrie der Eiskörper ergaben sich zum einen theoretische Vereinfachungen bei der Modellierung und zum anderen die Grenzen der geographischen Verteilung der Eislast. Dies ist zugleich eine bedeutende Einschränkung, da keine zusätzlichen Informationen über die Ausdehnung der Eislast berücksichtigt werden können.

Die sich mit geometrischen Eiskörpern ergebenden Probleme führten dazu, daß in einem nächsten Schritt die geomorphologischen und geologischen Informationen über die Verteilung berücksichtigt wurden. Die sich aus den Beobachtungen ergebende Verteilung wurde mit Kombinationen geometrischer Eiskörper approximiert, womit die Vorteile der vereinfachten Theorie aufgrund der Symmetrie beibehalten werden konnten und zugleich eine detaillierte Verteilung der Eismassen möglich wurde (z. B. Peltier & Andrews, 1976; Breuer & Wolf, 1995; Kaufmann & Wolf, 1996).

In Eismodellen, wie sie von Lambeck (1998) oder Thoma (2004) vorgestellt wurden, wird die Vereinfachung durch geometrische Eiskörper aufgegeben, so daß sich eine geographische Eismächtigkeitsverteilung ergibt. Diese wird aus der geographischen Verteilung der pleistozänen Eisschilde, abgeleitet aus den geomorphologischen Beobachtungen, mit Hilfe von Gleichgewichtsprofilen aus der Glaziologie und Informationen über das totale Eisvolumen aus relativen Meeresspiegeländerungen entwickelt.

Eine völlig anderer Ausgangspunkt wird bei glaziologischen Eismodellen gewählt. In diesen Modellen wird die Evolution der pleistozänen Eisschilde aus den Vorgaben von Temperatur- und Niederschlagsverteilungen mit einer thermomechanischen Beschreibung modelliert (z. B. Greve & Hutter, 1995; Huybrechts & T'siobbel, 1997). Problematisch sind bei diesen Modellen die Unsicherheiten bei den vorgegebenen Klimadaten, die sich auch in der großen Variabilität zwischen den Rekonstruktionen für verschiedene Klimaszenarien widerspiegeln. Die so abgeleiteten Eismodelle haben den Vorteil, glaziologisch konsistent zu sein. Jedoch sind in diesen Eismodellen häufig größere Gebiete von Eis bedeckt, als es die geomorphologischen Rekonstruktionen der pleistozänen Eisschilde aufzeigen. Deshalb wurden auch glaziologische Eismodelle entwickelt, die diese Zusatzinformationen nutzen und damit die

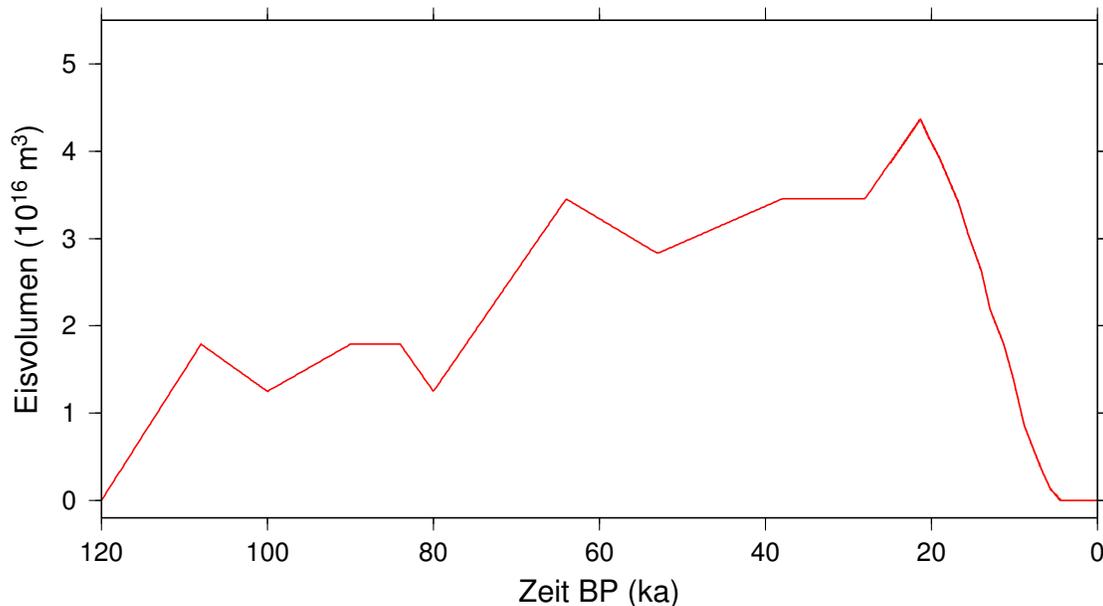


Abbildung 3.1: Evolution des Volumens von Eismodell ICE-3G-M für die letzten 120 ka. Das maximale Eisvolumen von $4.3687 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$ entspricht einer uniformen Meeresspiegelabsenkung von 107.21 m.

Ausbreitung der Eisschilde beschränken (z. B. Zweck & Huybrechts, 2004). Im folgenden werden drei, in dieser Arbeit als Eingabemodelle verwendete Eismodelle vorgestellt.

3.2.1 Eismodell ICE-3G-M

Eismodell ICE-3G-M basiert auf dem Modell ICE-3G von Tushingham & Peltier (1991). Dieses besteht aus einer durch 808 Kreisscheiben approximierten globalen Eismächtigkeitsverteilung der pleistozänen Eisschilde im Maximalzustand während des Letzten Glazialen Maximums (LGM) $\sim 21 \text{ ka BP}^1$ und 18 Eismächtigkeitsverteilungen während der Abschmelzphase. Dazu wurden mit einem vorgegebenen Erdmodell für 192 geographische Positionen relative Meeresspiegeländerungen berechnet und die Mächtigkeitsverteilung bestimmt, welche die Beobachtungen an diesen Orten am besten erklärt.

Das in dieser Arbeit verwendete Eismodell ICE-3G-M gibt eine globale Eismächtigkeitsverteilung an, wobei die Eismächtigkeiten der Mächtigkeit der Kreisscheiben entnommen sind. Bei sich überlappenden Kreisscheiben wird ein linear interpolierter Wert der beiden Mächtigkeiten berechnet. Desweiteren werden nur Differenzen in der Eismächtigkeit berücksichtigt, d. h. es werden alle Eismächtigkeitsverteilungen auf die zum gegenwärtigen Zeitpunkt bezogen. Die Evolution des Eisvolumens von ICE-3G-M ist in Abbildung 3.1 dargestellt. In dieser Abbildung ist auch die Vereisungsgeschichte von 120 ka BP bis zum LGM zu erkennen, die nicht im ursprünglichen Modell ICE-3G enthalten ist. Eine einfache Approximation dieses Teils der Lastgeschichte wird durch die Verwendung der Eismächtigkeitsverteilung zum LGM und zeitabhängigen Skalierungsfaktoren ermöglicht. Mit diesen Faktoren werden die Mächtigkeiten der Eisverteilung skaliert, so daß bei gleichbleibender Überdeckung das Eisvolumen variiert werden kann. Die Skalierungsfaktoren sind aus relativen Meeresspiegeländerungen abgeleitet (Lambeck &

¹Abgeleitet von "Before Present". Hierbei bezieht sich die Zeitangaben auf das Kalenderjahr 1950.

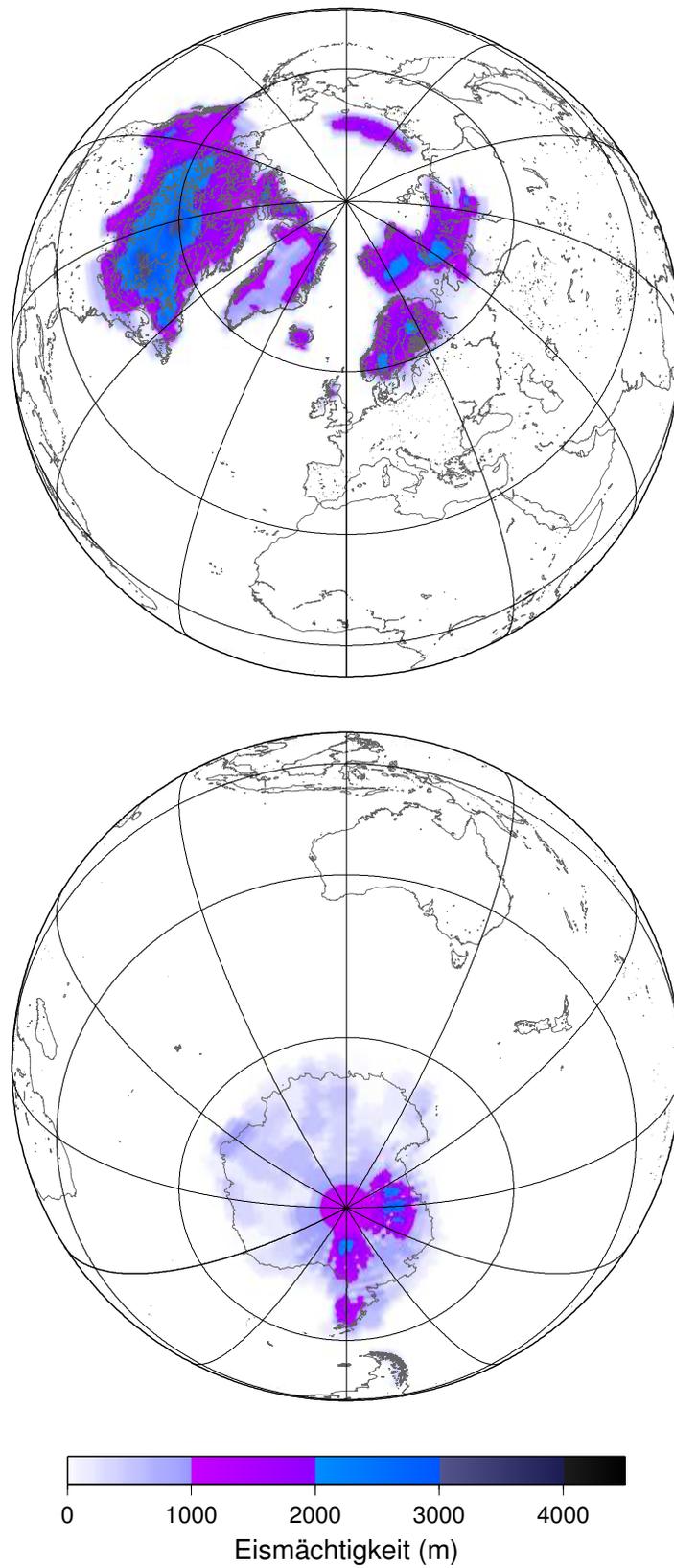


Abbildung 3.2: Mächtigkeit von Eismodell ICE-3G-M zum letzten glazialen Maximum (~ 21 ka BP).

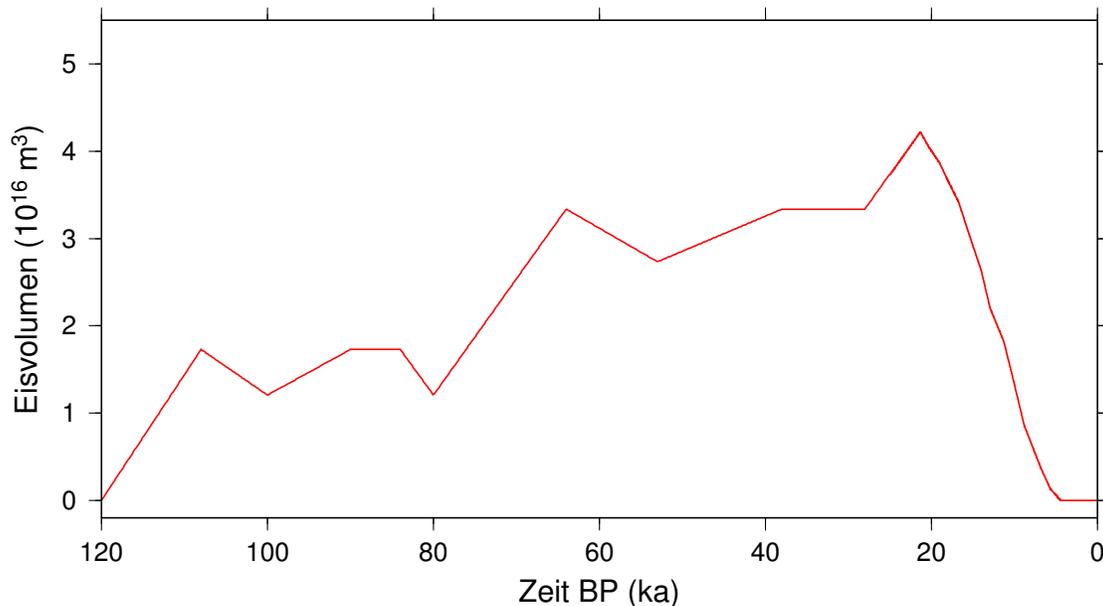


Abbildung 3.3: Evolution des Volumens von Eismodell SCAN für die letzten 120 ka. Das maximale Eisvolumen von $4.2213 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$ entspricht einer uniformen Meeresspiegelabsenkung von 103.59 m.

Chappell, 2001; Yokoyama et al., 2001; Bintanja et al., 2002), indem die kombinierten Beobachtungen für Huon Peninsula, Papua-Neuguinea, Bonaparte-Archipel und Westaustralien linear approximiert werden. Diese relativen Meeresspiegeländerungen entsprechen der Änderung im gesamten Eisvolumen. Das maximale Eisvolumen zum Zeitpunkt 21.4 ka BP beträgt $4.3687 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$, was einer uniformen Absenkung des Meeresspiegels von 107.21 m entspricht. Die Zeiten der insgesamt 29 Eismächtigkeitenverteilungen sowie die Skalierungsfaktoren der Vereisungsgeschichte des so abgeleiteten Modells sind in Tabelle B.2 angegeben. Die Eismächtigkeitenverteilung zum LGM ist in Abbildung 3.2 gezeigt.

3.2.2 Eismodell SCAN

Eismodell SCAN ist eine Kombination aus einem regionalen Eismodell für Nordeuropa, das Lambeck et al. (1998b) entnommen ist, und dem globalen Modell ICE-3G-M (Abschnitt 3.2.1), in welches das regionale Eismodell eingebettet ist. In Lambeck et al. (1998b) wird ausführlich auf die Methode eingegangen, die zur Ableitung des nordeuropäischen pleistozänen Eismodells angewandt wird. Aus einem geometrischen Eismodell wird dort mit Hilfe von relativen Meeresspiegeländerungen an den Küsten Skandinaviens, der Britischen Inseln, der Nordsee und des Atlantiks ein Eismodell abgeleitet, das unter Verwendung einer Reihe von Erdmodellen diese Beobachtungen am besten erklärt.

Abbildung 3.3 zeigt die Evolution des Eisvolumens von SCAN, welches sein Maximum von $4.2213 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$ zum Zeitpunkt 21.4 ka BP erreicht. Dies entspricht einer uniformen Absenkung des Meeresspiegels um 103.59 m. Die Vereisungsgeschichte von SCAN folgt der für ICE-3G-M und dessen Skalierungsfaktoren in Tabelle B.2. Die geographische Verteilung zum LGM ist in Abbildung 3.4 dargestellt, in der gegenüber ICE-3G-M Unterschiede in der Eisbedeckung in der Barents- und Karasee sowie das Fehlen eines Eisschildes in der Laptewsee auffallen.

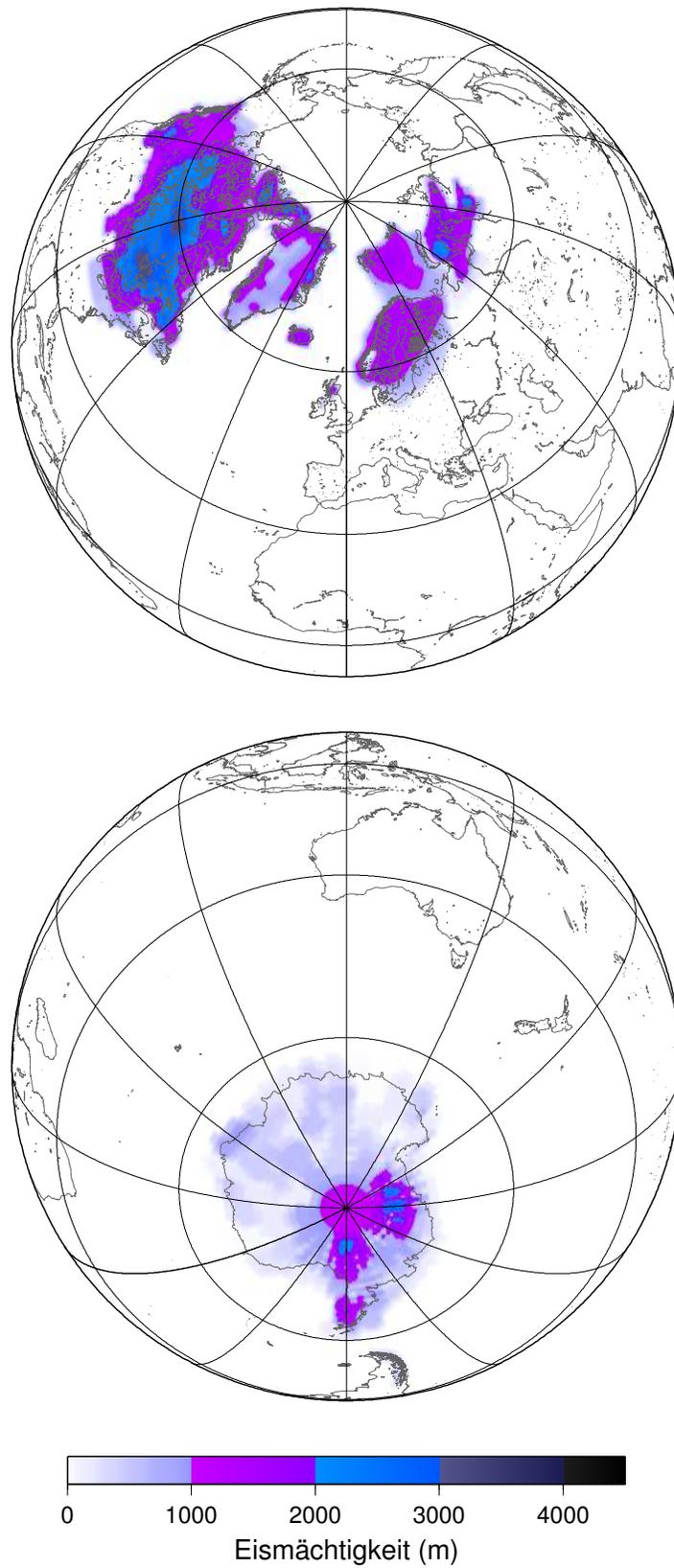


Abbildung 3.4: Mächtigkeit von Eismodell SCAN zum letzten glazialen Maximum (~ 21 ka BP).

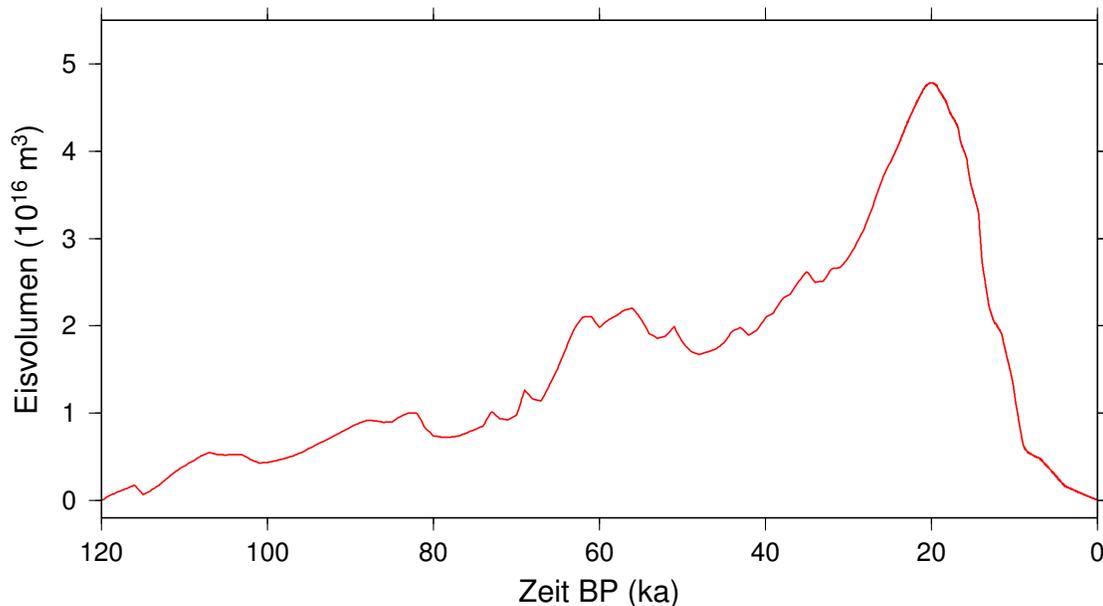


Abbildung 3.5: Evolution des Volumens von Eismodell NAWI für die letzten 120 ka. Das maximale Eisvolumen von $4.7841 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$ entspricht einer uniformen Meeresspiegelabsenkung von 117.41 m.

3.2.3 Eismodell NAWI

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Modellen ist NAWI ein glaziologisches Eismodell, in dem die Evolution der pleistozänen Eisschilde aufgrund von Klimaszenarien konsistent modelliert wird. Eismodell NAWI ist eine Kombination aus einem Modell für die nördliche Hemisphäre in Zweck & Huybrechts (2004) und einem Modell für die Antarktis, das Huybrechts (2002) entnommen ist. Für die nördliche Hemisphäre wird für die Vereisungsgeschichte in Zeitschritten von 1 ka vor dem LGM und von 200 a danach eine Eismächtigkeitsverteilung vorgegeben. Für alle Zeiten zwischen zwei vorgegebenen Verteilungen werden die benötigten Verteilungen linear interpoliert. Von dem antarktischen Eismodell werden nur die maximale Eismächtigkeitsverteilung zum Zeitpunkt 15 ka BP und zwei weitere während der Abschmelzphase (7 ka BP und 4 ka BP) verwendet. Die Mächtigkeitsverteilung für die Antarktis wird für alle anderen benötigten Zeiten linear interpoliert. Die Evolution des Volumens der so entwickelten pleistozänen Eisschilde ist in Abbildung 3.5 gezeigt. Das maximale Volumen von $4.7841 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$ wird vor ~ 20 ka erreicht, wobei dies einer uniformen Absenkung des Meeresspiegels um 117.41 m entspricht. Zum Vergleich wird in Abbildung 3.6 die Eismächtigkeitsverteilung zum gleichen Zeitpunkt (21.4 ka BP) gezeigt, der für die anderen Eismodelle gewählt ist.

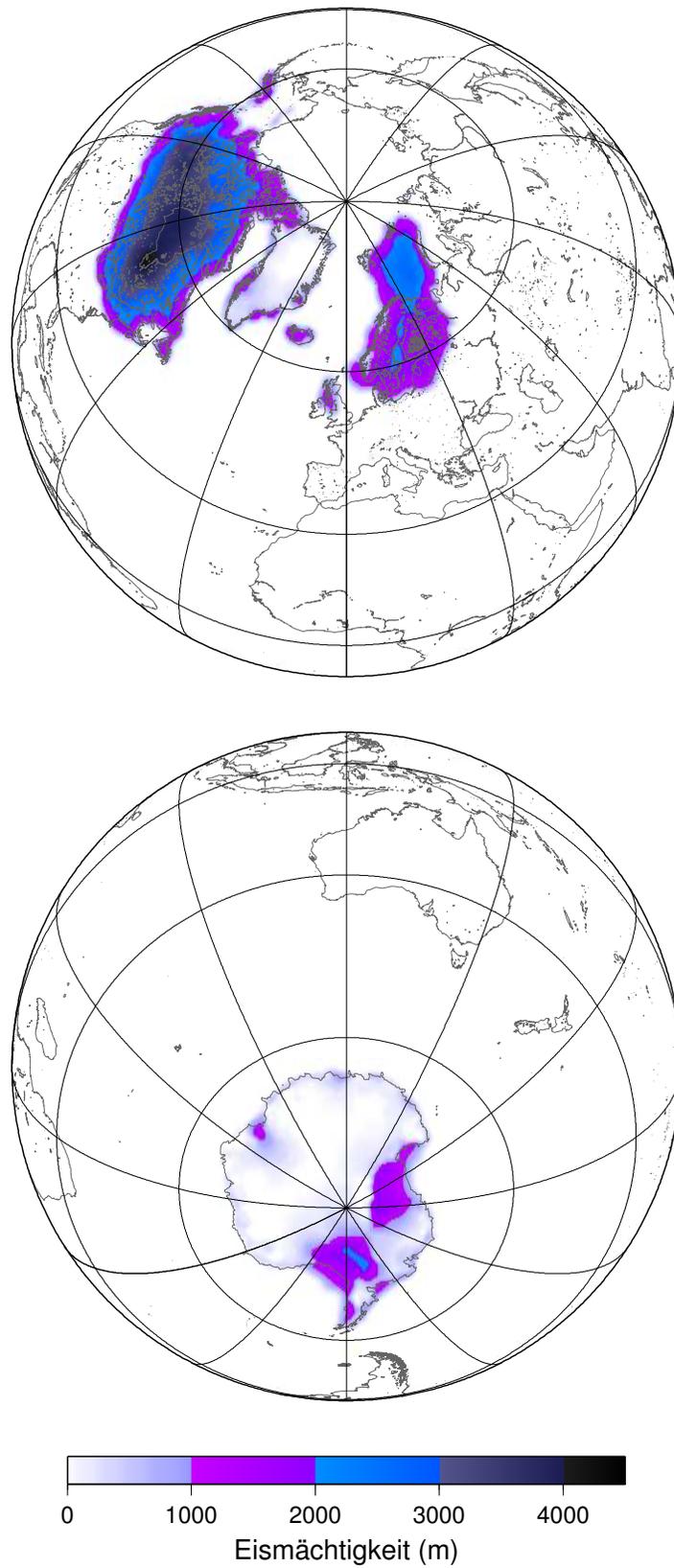


Abbildung 3.6: Mächtigkeit von Eismodell NAWI zum letzten glazialen Maximum (~ 21 ka BP).

4. Implementierung

4.1 Viskoelastische Relaxation

Bei der Darstellung der Theorie der VR sind bezüglich der Parameter des Erdmodells die einschränken- den Annahmen gemacht worden, daß die Volumenmassendichte, $\rho^{(0)}$, und der Schermodul, μ , nur von der Radialentfernung, r , abhängig sind (Abschnitt 2.2.2). Für die Viskosität ist zunächst keine solche Ein- schränkung gemacht worden. In Abschnitt 2.2.7 ist die Berechnung der dissipativen Energie dargestellt worden, wobei analytische Beziehungen bei Radialsymmetrie der Viskosität möglich sind. Gilt $\nu = \nu(r)$ und wird diese durch (2.101) approximiert, läßt sich neben der analytischen Berechnung (2.107) auch die Entkopplung der spektralen Amplituden W_{jm}^k und δW_{jm}^k von U_{jm}^k , δU_{jm}^k , V_{jm}^k und δV_{jm}^k zeigen. Da für die Theorie der VR diese einschränkende Annahme zunächst nicht gemacht worden ist, ist dort im weiteren auch nicht berücksichtigt worden, welche Vereinfachungen sich daraus ableiten lassen. Dies soll hier dargestellt werden, da für die Berechnungen in dieser Arbeit die vereinfachende Annahme der Radialsymmetrie des Erdmodells genutzt wird. Desweiteren werden die Diskretisierungen in Raum und Zeit vorgestellt, die für die spektrale Repräsentation und die SFER benötigt werden.

Lösung des Systems und des Differenzenschemas

Die numerische Lösung der Gleichungen, die die VR beschreiben, wird in zwei Schritten vollzogen. Zuerst wird aus (2.109) ein Gleichungssystem abgeleitet, die zugehörige Koeffizientenmatrix aufge- stellt und diese in eine linke sowie eine rechte Dreiecksmatrix zerlegt (LR-Zerlegung). Dann wird für jede Zeit, t^{i+1} , die rechte Seite des Gleichungssystems (Inhomogenität) mit Hilfe des Differenzensche- mas bestimmt und anschließend wird das Gleichungssystem mit dem zugehörigen Algorithmus der LR- Zerlegung gelöst. Zunächst soll das Aufstellen des mit der Annahme des radialsymmetrischen Erdmo- dells vereinfachten Gleichungssystems dargestellt und dann die Implementierung des Differenzensche- mas und die Bestimmung der rechten Seite des Systems beschrieben werden.

Aufstellen des Gleichungssystems und LR-Zerlegung

Die Gleichungen des Systems werden für jede Zeit, t^{i+1} , durch (2.109) gegeben, wobei aus $\delta \mathcal{E}(\mathbf{u}_h^{i+1}, \phi_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \delta \mathbf{u}_h, \delta \phi_h, \delta p_h)$ die Koeffizienten der Matrix des Systems der Variablen $U_{jm}^k, V_{jm}^k, \Phi_{jm}^k, P_{jm}^k$ bestimmt werden. Dies sind die Amplituden der SFER der Variablen von $\delta \mathcal{E}$, jedoch um W_{jm}^k reduziert, da unter der Annahme der Radialsymmetrie für das Erdmodell diese Amplitude entkoppelt ist und bei einer vorgegebenen Flächenmassendichte als Auflast keinen Beitrag liefert. Somit werden die Koeffizi- enten der Matrix des Systems durch (2.78)–(2.82) gegeben, wobei W_{jm}^k und δW_{jm}^k unterdrückt werden. Dieses Verfahren zum Aufstellen der Matrix des Systems folgt der Galerkin-Methode (z. B. Zienkiewicz & Taylor, 2000, Kap. 3). Hier wird die Lösung des Randwertproblems in der schwachen Formulierung

im endlich-dimensionalen Teilraum \mathcal{V}_h mit Hilfe einer Basis in diesem Teilraum bestimmt.

In der SFER wird diese Methode mit der spektralen Repräsentation kombiniert. Unter Annahme von Radialsymmetrie des Erdmodells kann gezeigt werden, daß die aus (2.78)–(2.82) abgeleitete Matrix des Systems für alle Ordnungen, m , der spektralen Repräsentation identisch ist. In symbolischer Schreibweise läßt sich daher für t^{i+1} und jeden Grad j und jede Ordnung m der spektralen Repräsentation mit Hilfe der Galerkin-Methode folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^j & K_{12}^j & \cdots & K_{1P^*-1}^j & K_{1P^*}^j \\ K_{21}^j & K_{22}^j & \cdots & K_{2P^*-1}^j & K_{2P^*}^j \\ K_{31}^j & K_{32}^j & \cdots & K_{3P^*-1}^j & K_{3P^*}^j \\ K_{41}^j & K_{42}^j & \cdots & K_{4P^*-1}^j & K_{4P^*}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{P^*-31}^j & K_{P^*-32}^j & \cdots & K_{P^*-3P^*-1}^j & K_{P^*-3P^*}^j \\ K_{P^*-21}^j & K_{P^*-22}^j & \cdots & K_{P^*-2P^*-1}^j & K_{P^*-2P^*}^j \\ K_{P^*-11}^j & K_{P^*-12}^j & \cdots & K_{P^*-1P^*-1}^j & K_{P^*-1P^*}^j \\ K_{P^*1}^j & K_{P^*2}^j & \cdots & K_{P^*P^*-1}^j & K_{P^*P^*}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{jm}^1 \\ V_{jm}^1 \\ \Phi_{jm}^1 \\ P_{jm}^1 \\ \vdots \\ U_{jm}^P \\ V_{jm}^P \\ \Phi_{jm}^P \\ P_{jm}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{jm}^1 \\ R_{jm}^2 \\ R_{jm}^3 \\ R_{jm}^4 \\ \vdots \\ R_{jm}^{P^*-3} \\ R_{jm}^{P^*-2} \\ R_{jm}^{P^*-1} \\ R_{jm}^{P^*} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Hier ist $P^* = 4P$ die Dimension des Vektors \mathbf{R}_{jm} der rechten Seite des Gleichungssystems und P^*P^* die Dimension der Matrix \mathbf{K}^j des Systems. Im Gegensatz zum Vektor \mathbf{R}_{jm} ist die Matrix \mathbf{K}^j zeitunabhängig, so daß zu Beginn der Berechnung für alle Ordnungen $j = 0, \dots, j_{\max}$ die Matrizen \mathbf{K}^j bestimmt werden können. Desweiteren ermöglicht die Zeitunabhängigkeit von \mathbf{K}^j die LR-Zerlegung nur einmal zu Beginn der Berechnung auszuführen und die Lösung für die verschiedenen zeitabhängigen Vektoren \mathbf{R}_{jm} durch Rücksubstitution der LR-Methode zu bestimmen. Hier ist anzumerken, daß die LR-Zerlegung von \mathbf{K}^j durch die Wahl der finiten Elemente (2.71) und (2.73) vereinfacht wird, da diese zu einer Bandstruktur der Matrix führt. Die LR-Zerlegung wird mit Hilfe der Routine BANDEC (Press et al., 1992, S. 45) implementiert und nur einmal ausgeführt. Für jeden Grad, j , und jede Ordnung, m , wird mit der Routine BANBKS (Press et al., 1992, S. 46) zu jeder Zeit, t^{i+1} , die Lösung des Systems bestimmt. Damit stehen die Amplituden der spektralen Repräsentation des Verschiebungsvektors, \mathbf{u} , und des Inkrements des Gravitationspotentials, $\phi^{(\Delta)}$, zur Verfügung, mit denen die VR beschrieben wird. Um das Gleichungssystem zu lösen, wird der Vektor \mathbf{R}_{jm} benötigt, wobei dieser aus den linearen Funktionalen \mathcal{F}_o gemäß (2.82) und \mathcal{F}_d gemäß (2.107) bestimmt werden kann. Dazu ist zum einen das Differenzenschema zu lösen, zum anderen die spektrale Repräsentation der Flächenmassendichte, σ^P , zu berechnen.

Implementierung des Differenzenschemas

Die Berechnung des linearen Funktionalen \mathcal{F}_d ist zur Zeit t^{i+1} nur aus den Größen der vorhergehenden Zeit t^i mit Hilfe von (2.107) möglich. Die Werte für $\delta\epsilon_{jm}^\lambda$ können mit (2.100) aus den Größen für t^i berechnet werden. Hingegen muß für die Bestimmung von $\tau_{jm}^{V,i,\lambda}$ in (2.106) das Differenzenschema (2.104) gelöst werden. Dies ist unter der Annahme der Radialsymmetrie des Erdmodells und der Diskretisierung der Viskosität durch (2.101) analytisch möglich. Hierbei wird die Anzahl, P , der finiten Elemente in ra-

dialer Richtung durch die verwendeten Erdmodelle vorgegeben, die in Abschnitt 3.1 vorgestellt werden. Dabei ist entscheidend, wie die Intervalle $[r_k, r_{k+1}]$ in radialer Richtung mit der entsprechenden Länge, $h_k = r_{k+1} - r_k$, gewählt werden, auf denen die finiten Elemente, ψ_k und ξ_k , durch (2.71) und (2.73) definiert werden. Im Differenzenschema (2.104) wird in den durch (2.102) gegebenen Koeffizienten M_k^i die Differenz zwischen zwei Zeiten benötigt. In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Zeitdifferenzen für die Akkumulation (von 120 ka BP bis 25 ka BP) und für das Abschmelzen (von 25 ka BP bis zur Gegenwart) der pleistozänen Eislast verwendet. In der Akkumulationsgeschichte wird die sogenannte minimale Maxwell-Zeit und in der Ablationsgeschichte eine feste Zeitdifferenz von 20 a gewählt. Die Maxwell-Zeit, t_M , ist von den Parametern des Erdmodells in folgender Weise abhängig:

$$t_M = \frac{\nu_k}{\mu_k}, \quad (4.2)$$

wobei dann die minimale Maxwell-Zeit für das jeweilige Erdmodell ausgewählt wird. Diese Überlegungen zur Wahl der Zeitdifferenz in (2.104) sind aufgrund des expliziten Euler-Zeitdifferenzschemas notwendig, da dieses, wie in Abschnitt 2.2.3 ausgeführt, nicht für jede gewählte Zeitdifferenz stabil ist.

Implementierung der spektralen Repräsentation der Flächenmassendichte

Zur Berechnung des durch (2.82) gegebenen linearen Funktionals \mathcal{F}_o , wird auch die spektrale Repräsentation der Flächenmassendichte, $\sigma^P(\Omega, t)$, benötigt. Diese ist zu jeder Zeit, t^{i+1} , als Summe der Anteile der Eis- und Ozeanlast durch (2.111) gegeben. Die entsprechende Ozeanlast ist allerdings, wie in Abschnitt 2.5.2 beschrieben ist, nur aus den Größen zur Zeit, t^i , bestimmt. Desweiteren wird die Flächenmasse nur an Gitterpunkten auf der Erdoberfläche berechnet, die wie folgt gewählt sind:

$$\Omega_\ell := (\vartheta_{\ell_1}, \varphi_{\ell_2}) \quad \text{für} \quad \ell_1 = 1, \dots, L_1; \quad \ell_2 = 1, \dots, L_2. \quad (4.3)$$

Hier bezeichnet ϑ_{ℓ_1} die Poldistanz und φ_{ℓ_2} die geographische Länge des Gitterpunktes. Der Kombinationsindex, ℓ , ergibt sich aus

$$\ell = (\ell_1 - 1)L_2 + \ell_2, \quad (4.4)$$

wobei die Gesamtanzahl der Gitterpunkte $L = L_1 L_2$ ist. Die spektrale Repräsentation der Flächenmassendichte, die in (2.112) beschrieben ist, wird durch numerische Integration mit Hilfe der Kombination von diskreter Fourier-Transformation und Gauß-Legendre-Quadratur berechnet. Die numerischen Methoden geben auch die Wahl der Gitterpunkte Ω_ℓ vor, so daß die $L_1 = 512$ Werte der Poldistanz, ϑ_{ℓ_1} , durch die Nullstellen der entsprechenden Legendre-Polynome gegeben werden und die $L_2 = 1024$ Werte der geographische Länge, φ_{ℓ_2} , äquidistant als Stützstellen der diskreten Fourier-Transformation gewählt werden. Damit eine "aliasing"-freie Transformation in und aus dem Spektralbereich mit diesen Methoden möglich ist, muß der maximale spektrale Grad, j_{\max} , der spektralen Repräsentation folgende Bedingung erfüllen:

$$j_{\max} \leq \frac{2}{3}(L_1 - 1). \quad (4.5)$$

Für die Wahl $L_1 = 512$ folgt somit, daß der größtmögliche Wert $j_{\max} = 340$ ist.

4.2 Meeresspiegelgleichung

Die Implementierung der MSG ist in Abbildung 2.8 skizziert. In der räumlichen Repräsentation werden aus den Ergebnissen der VR zur Zeit t^i die benötigten Größen $u(\Omega_\ell, t^i)$ und $e(\Omega_\ell, t^i)$ an diskreten Punkten, Ω_ℓ , berechnet. Damit können an den jeweiligen Ω_ℓ der uniforme bzw. nicht uniforme Meeresspiegelanstieg, $s^{\text{UF|NU}}(\Omega_\ell, t^i)$, die Ozeanfunktion, $\mathcal{O}(\Omega_\ell, t^i)$, und die Ozeanlast, $\sigma^{\text{O}}(\Omega_\ell, t^i)$, bestimmt werden. Mit der in Abschnitt 4.1 beschriebenen spektralen Repräsentation kann dann die spektrale Amplitude der Ozeanlast für die VR angegeben werden.

Für ORC wird in (2.126) und (2.128) auch die Topographie, $\zeta^{(0)}(\Omega)$, benötigt. Für die Implementierung wird das Topographiemodell ETOPO5 (2004) verwendet, das eine räumliche Auflösung von 5' hat und auf das in diesem Programm verwendete Gitter Ω_ℓ interpoliert worden ist. Das verwendete Topographiemodell gibt den heutigen Zustand wieder, jedoch wird vereinfacht dieser als Ausgangszustand für ORC zu Beginn des Pleistozän verwendet.

Die Berechnung der Ozeanlast, $\sigma^{\text{O}}(\Omega_\ell, t^i)$, für die verschiedenen Ozeanrepräsentationen ist durch (2.119)–(2.128) gegeben. Gemeinsam ist diesen Berechnungen, daß die Radialverschiebung, $u(\Omega_\ell, t^i)$, und die Geoidhöhe, $e(\Omega_\ell, t^i)$, auf der Oberfläche, ∂B , benötigt werden. Aus (2.113) folgt dann für jedem Punkt, Ω_ℓ , und jede Zeit, t^i , für die räumliche Repräsentation der Radialverschiebung

$$u(\Omega_\ell, t^i) = \sum_{jm} U_{jm}(t^i) Y_{jm}(\Omega_\ell). \quad (4.6)$$

Hier ist $U_{jm}(t^i)$ die Amplitude der spektralen Repräsentation und $Y_{jm}(\Omega_\ell)$ die skalare Kugelflächenfunktion (Anhang A.2). Die Geoidhöhe wird mit Hilfe der Bruns-Formel (Heiskanen & Moritz, 1967) aus dem lokalen Inkrementen des Gravitationspotentials, $\phi^{(\Delta)}$, und des Zentrifugalpotentials, $\psi^{(\Delta)}$, der RT bestimmt:

$$e(\Omega_\ell, t^i) = - \frac{[\phi^{(\Delta)}(\Omega_\ell, t^i) + \psi^{(\Delta)}(\Omega_\ell, t^i)]}{g^{(0)}(a)}. \quad (4.7)$$

Die Diskretisierung der Oberfläche und der Zeit sowie die Bestimmung des maximalen spektralen Grades, j_{max} , sind in Abschnitt 4.1 beschrieben. Für die numerische Implementierung werden zu Beginn die skalaren Kugelflächenfunktionen für alle Punkte Ω_ℓ berechnet und gespeichert, so daß die räumliche Repräsentation auf eine Summation der Amplituden der spektralen Repräsentation zu jeder Zeit t^i reduziert ist.

4.3 Variation der Erdrotation

Die Implementierung der RT, deren theoretische Beschreibung im Abschnitt 2.4 dargestellt ist, folgt dem Schema der Kopplung mit den anderen Komponenten des Modells, das in Abbildung 2.9 skizziert ist. Hier ist ersichtlich, daß die benötigten spektralen Amplituden von u und $\phi^{(\Delta)}$ direkt aus der Lösung der Gleichungen der VR übernommen werden können. Da diese für das sphärische Kontinuum B bestimmt werden, muß auch für die Betrachtung der RT die sphärische Approximation verwendet werden. In Abschnitt 2.4.10 werden neben der Abschätzung des Einflusses der sphärischen Approximation auf die

Ergebnisse der RT auch die Repräsentationen der inkrementiellen Trägheitstensoren und des relativen Drehimpulses durch Kugelflächenfunktionen angegeben.

In Abschnitt 2.4.4 wird die linearisierte Liouville-Gleichung abgeleitet und deren Lösung angegeben, die vom inkrementiellen Trägheitstensor, $C^{(1)}$, abhängig ist. Dieser kann, wie in Abschnitt 2.4.8 dargestellt, mit Hilfe der MacCullagh-Formel bestimmt werden.

Neben der Abschätzung der Auswirkung der sphärischen Approximation auf die Ergebnisse der RT, die in Abschnitt 2.4.10 betrachtet werden, sind noch die Vereinfachungen in der Beschreibung der RT durch die Annahme eines inkompressiblen, radialsymmetrischen Erdmodells zu beachten. Desweiteren wird die Berücksichtigung des Einflusses der rotationsbedingten elastischen Deformation der Erde in der Liouville-Gleichung betrachtet. Außerdem muß noch die Implementierung der Integration hinsichtlich der Zeit in der Lösung der linearisierten Liouville-Gleichung (2.163) dargestellt werden.

Berücksichtigung der Vereinfachungen

An den Lösungen (2.163) und (2.164) der Liouville-Gleichungen ist ersichtlich, daß die Anregungsfunktionen (2.157) und (2.158) benötigt werden und die Integration über die Zeit t auszuführen ist. Die Anregungsfunktionen hängen vom relativen Drehimpuls, \mathbf{h} , ab, dessen Komponenten durch (2.235) und (2.236) gegeben sind. Durch die Annahme eines radialsymmetrischen Erdmodells folgt in der spektralen Repräsentation der Lösungen der Gleichungen der VR (Abschnitt 4.1), daß die toriodalen Amplituden der Verschiebung, W_{jm} , verschwinden und $\mathbf{h} = 0$ ist. Die Anregungsfunktionen können daher allein aus dem inkrementiellen Trägheitstensor, $C^{(1)}$, berechnet werden. Dieser läßt sich entweder mit Hilfe der MacCullagh-Formeln (2.197) und (2.208) bestimmen oder mit Hilfe der alternativen Beschreibung in Abschnitt 2.4.6. Die erste MacCullagh-Formel (2.197) läßt sich direkt berechnen, hingegen muß in der zweiten Formel (2.208) zuerst noch der Spur-Operator auf $C^{(1)}$ angewendet werden. Durch (2.233) und (2.234) ist die Spur der Trägheitstensoren $C^{(1)\text{ex}}$ und $C^{(1)\text{in}}$ gegeben. Durch Annahme der Massenerhaltung im Eis-Ozean-System gemäß (2.115) gilt $\sigma_{00} = 0$, so daß $\text{Tr}C^{(1)\text{ex}} = 0$. Mit der Annahme eines inkompressiblen Erdmodells folgt $U_{00} = 0$ und auch $\text{Tr}C^{(1)\text{in}} = 0$. Da somit $\text{Tr}C^{(1)}(t) = 0$ gilt, wird die zweite MacCullagh-Formel auf den ersten Summanden in (2.208) reduziert.

In der in Abschnitt 2.4.6 dargestellten alternativen Beschreibung des inkrementiellen Trägheitstensors in der sphärischen Approximation wird dieser in die Beiträge $C^{(1)\text{ex}}$ und $C^{(1)\text{in}}$ aufgeteilt. Für $C^{(1)\text{ex}}$ lassen sich (2.229) und (2.231) direkt implementieren. In (2.230) und (2.232) für $C^{(1)\text{in}}$ muß hingegen noch die Integration über r ausgeführt werden. Diese ist mit Hilfe der in (2.71) definierten finiten Elemente in radialer Richtung auf eine Summation zurückzuführen (Anhang C.1).

Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation

In Abschnitt 2.4.3 wird darauf hingewiesen, daß ein variierendes Zentrifugalpotential die Erde deformiert, was in der theoretischen Beschreibung des Kapitels 2 nicht berücksichtigt wird. Auch in Abschnitt 2.5.3 ist die einseitige Kopplung der Ergebnisse der VR in die RT dargestellt. Hier soll eine Näherung für die Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation der Erde vorgestellt

werden, die allerdings in der Weise inkonsistent ist, daß diese rotationsbedingte Deformation nicht in die beschreibenden Gleichungen der VR koppelt, sondern nur für die Berechnung der RT herangezogen wird. Allerdings wird dadurch das sich ergebende Zentrifugalpotential, $\psi^{(\Delta)}$, beeinflusst, das in die MSG koppelt.

Die Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation folgt der Ableitung des Einflusses der Atmosphäre auf eine elastische Erde von Moritz & Mueller (1987, Abschnitt 5.4.3). Mit Hilfe der empirisch bestimmten Love-Zahl, $k_L = 0.3$, und der säkularen Love-Zahl,

$$k_s = \frac{3G(\mathcal{C} - \mathcal{A})}{\omega^{(0)2} a^5}, \quad (4.8)$$

läßt sich anstatt der linearisierten Liouville-Gleichung (2.160) unter Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation finden:

$$m(t) + \frac{i}{\lambda^E} \dot{m}(t) = \frac{k_L}{k_s} m(t) - \frac{i}{\omega^{(0)}} \dot{m}(t) + \chi(t) - \frac{i}{\omega^{(0)}} \dot{\chi}(t). \quad (4.9)$$

Die Gleichung (2.161) für die Komponente m_3 bleibt unverändert. Mit der Definition der Chandler-Frequenz,

$$\lambda^C = \lambda^E \frac{1 - \frac{k_L}{k_s}}{1 + \frac{k_L}{k_s} \frac{\lambda^E}{\omega^{(0)}}}, \quad (4.10)$$

kann (4.9) wie folgt umgeformt werden:

$$m(t) + \frac{i}{\lambda^C} \dot{m}(t) = \frac{k_s}{k_s - k_L} \left[\chi(t) - \frac{i}{\omega^{(0)}} \dot{\chi}(t) \right]. \quad (4.11)$$

Für diese Gleichung, die sich nur durch die Chandler-Frequenz und den Faktor $k_s/(k_s - k_L)$ von (2.160) unterscheidet, läßt sich analog zu (2.163) die Lösung

$$m(t) = \frac{k_s}{k_s - k_L} \left[-i\lambda^C \left(1 + \frac{\lambda^C}{\omega^{(0)}} \right) \int_0^t \chi(\tilde{t}) e^{i\lambda^C(t - \tilde{t})} d\tilde{t} - \frac{\lambda^C}{\omega^{(0)}} \right] \quad (4.12)$$

angeben. Hier ist zu erkennen, daß die Lösung der linearisierten Liouville-Gleichung bei der Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation die gleiche Form hat wie zuvor. Es wird nur die Euler- gegen die Chandler-Frequenz ausgetauscht und ein Faktor angebracht. Die Auswirkung der unterschiedlichen Beschreibungen der RT bei Berücksichtigung oder Vernachlässigung der rotationsbedingten elastischen Deformation auf den berechneten Meeresspiegelanstieg wird in Abschnitt 4.4.4 betrachtet.

Zeitintegration in den Lösungen der Liouville-Gleichungen

In der linearisierten Liouville-Gleichung (2.155) ist die Integration bezüglich der Zeit auszuführen. Mit dieser Integration werden Prozesse verbunden, die auf um Größenordnungen verschiedenen typischen Zeitskalen ablaufen. Die Anregungsfunktion, χ , ist eine Funktion des inkrementiellen Trägheitstensors, $C^{(1)}$, der durch die viskoelastische Relaxation bestimmt wird, die auf Zeitskalen von Jahrhunderten bis

Jahrtausenden stattfindet. Hingegen wird mit der Liouville-Gleichung auch der Rotationsprozeß der Erde auf der Zeitskala der Chandler-Frequenz, λ^C , beschrieben, die nach (4.10) die Größenordnung von 10^{-7}s^{-1} hat, da hier $\mathcal{A} = 8.0102 \cdot 10^{37}\text{kg m}^2$, $\mathcal{C} = 8.0365 \cdot 10^{37}\text{kg m}^2$ und $\omega^{(0)} = 7.292115 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$ gewählt werden (Groten, 2000). Somit variieren die auftretenden typischen Zeitskalen von etwas über einem Jahr (Chandler-Frequenz) bis zu Jahrtausenden (viskoelastische Relaxation). Der Vergleich mit den Zeitschritten des Differenzenschemas, die in der Größenordnung von 20 bis 100 Jahren liegen, verdeutlicht, daß zur Ausführung der Integration in (2.163) bzw. (4.12) eine Näherung notwendig ist. Hierzu wird die Annahme gemacht, daß sich die Anregungsfunktion, χ , für die entsprechende Zeitdifferenz nur linear ändert, so daß

$$\bar{\chi}(t) = \alpha t + \beta \quad (4.13)$$

gilt. Unter dieser Annahme ist es möglich, die Integration bezüglich der Zeit analytisch auszuführen und für die linearisierte Anregungsfunktion, $\bar{\chi}$, die Lösung der Liouville-Gleichung wie folgt anzugeben:

$$\bar{m}(t) = \frac{k_s}{k_s - k_L} \left[\bar{\chi}(t) - i \frac{\alpha}{\lambda^C} \left(1 + \frac{\lambda^C}{\omega^{(0)}} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Die Äquivalenz des gleitenden Mittels der Anregungsfunktion und der Annahme der Linearisierung in (4.13) sowie die Ableitung der Lösung der Liouville-Gleichung (4.14) wird in Anhang C.2 aufgezeigt. Mit (2.164) und (4.14) lassen sich dann die Liouville-Gleichungen lösen.

4.4 Sensitivitätsuntersuchungen

Im folgenden soll die Sensitivität der einzelnen numerischen Implementierungen untersucht werden. Hierzu werden die vorgegebenen räumlichen und zeitlichen Auflösungen variiert und die Ergebnisse verschiedener Beschreibungen verglichen. Zuerst wird die Implementierung der VR, dann der MSG und abschließend der RT betrachtet. Für alle Berechnungen werden die in Abschnitt 3.1.1 spezifizierten elastischen Parameter gewählt und Viskositätsmodell VMF (Abschnitt 3.1.4) sowie Eismodell ICE-3G-M (Abschnitt 3.2.1) verwendet.

4.4.1 Räumliche und zeitliche Auflösung bei der VR

Wie in Abschnitt 4.1 dargestellt, muß neben der Zeitdifferenz des Differenzenschemas (2.104) auch der maximale Grad j_{\max} der spektralen Repräsentation gewählt werden. Desweiteren ist die Unterteilung des Intervalls $[0, a]$ in P Teilintervalle $[r_k, r_{k+1}]$ vorzunehmen, auf denen die finiten Elemente ψ_k und ξ_k durch (2.71) und (2.73) definiert sind. Hier soll der Einfluß der gewählten räumlichen und zeitlichen Diskretisierung untersucht werden.

Abbildung 4.1 zeigt das Spektrum der gegenwärtigen Radialverschiebung berechnet für $j_{\max} = 90$ und $j_{\max} = 340$. Die Differenzen zwischen den Amplituden der Spektren für $j < 90$ sind um vier Größenordnungen kleiner als die maximalen Amplituden. Durch die Wahl von $j_{\max} = 90$ wird die Kopplung mit Termen höherer Grade ($j > 90$) unterdrückt, was sich in den Differenzen zwischen den Spektren widerspiegelt. Zum Vergleich sind in Abbildung 4.2 die Spektren der Radialverschiebung für

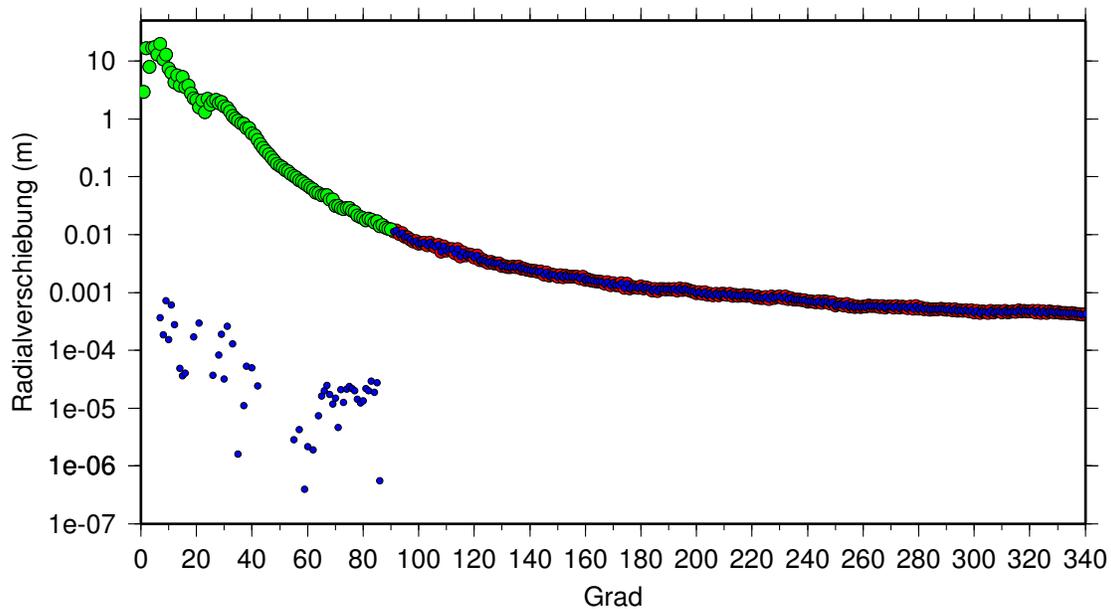


Abbildung 4.1: Vergleich der Spektren der Radialverschiebung für $j_{\max} = 90$ (grüne Punkte) und $j_{\max} = 340$ (rote Punkte) unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M. Die Differenzen zwischen den Spektren sind mit blauen Punkten eingezeichnet.

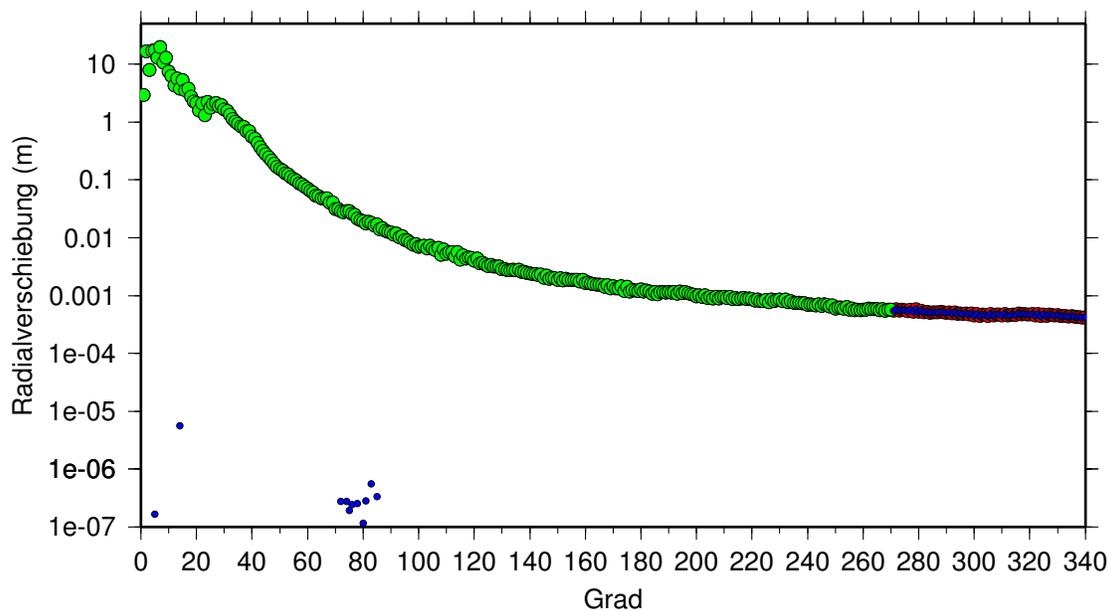


Abbildung 4.2: Vergleich der Spektren der Radialverschiebung für $j_{\max} = 270$ (grüne Punkte) und $j_{\max} = 340$ (rote Punkte) unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M. Die Differenzen zwischen den Spektren sind mit blauen Punkten eingezeichnet.

$j_{\max} = 270$ und $j_{\max} = 340$ gezeigt. Hier sind die Differenzen (blaue Punkte) um sechs Größenordnungen kleiner als die maximalen Amplituden der spektralen Repräsentation. Durch die Vergrößerung von j_{\max} wird somit die Kopplung mit den höheren Graden wesentlich besser berücksichtigt, da für $j_{\max} = 270$ die Differenzen in den Amplituden der spektralen Repräsentation nochmals um zwei Größenordnungen geringer ausfallen als für $j_{\max} = 90$ und auch um zwei Größenordnungen kleiner

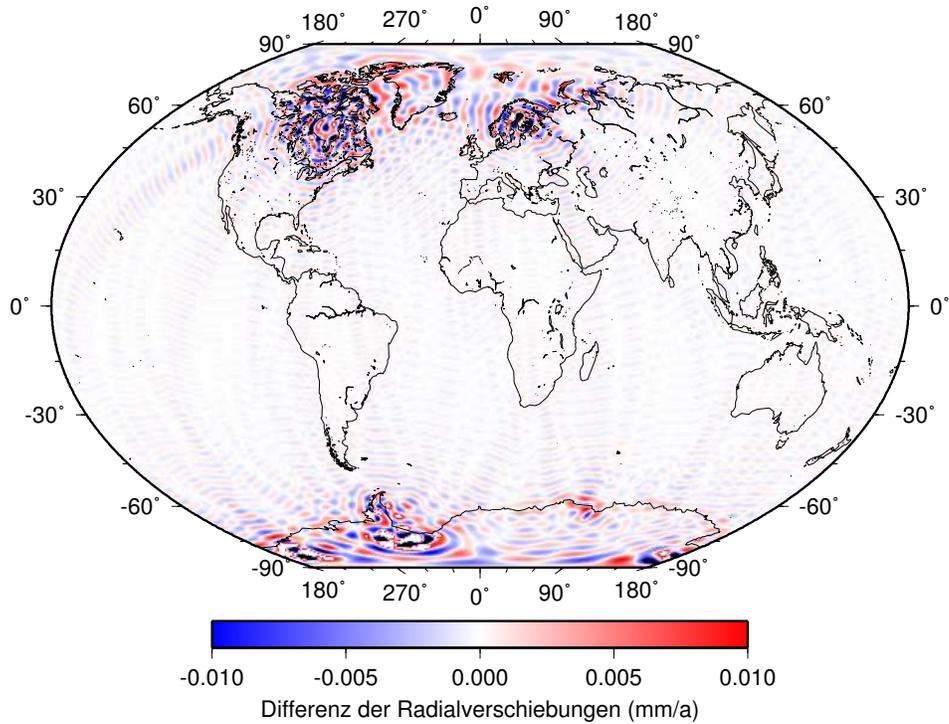


Abbildung 4.3: Differenz der Geschwindigkeit der Radialverschiebung für $j_{\max} = 90$ und $j_{\max} = 340$ unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M.

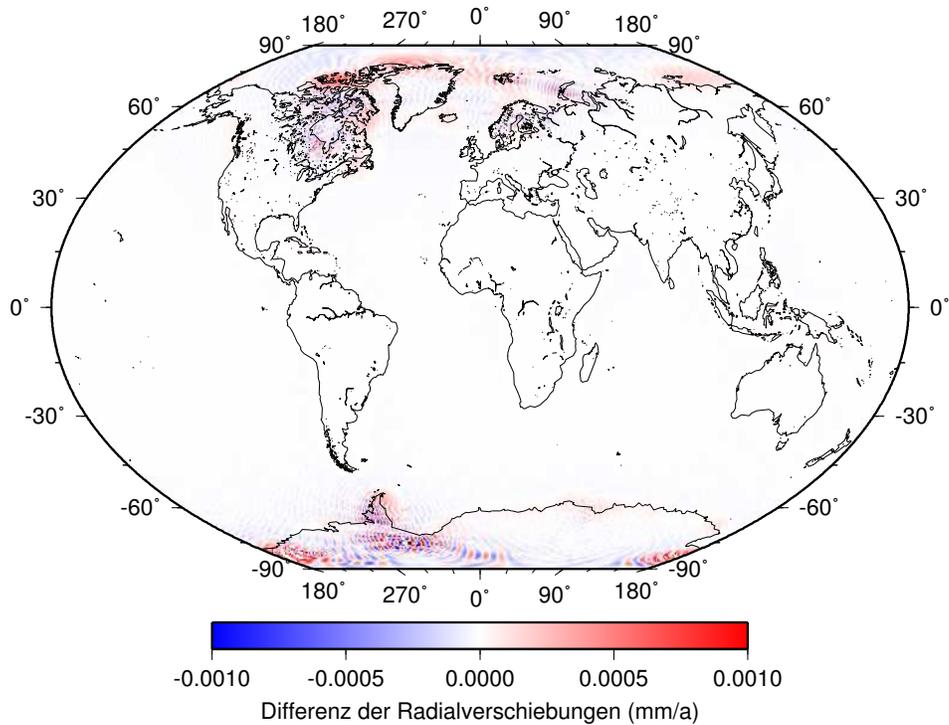


Abbildung 4.4: Differenz der Geschwindigkeiten der Radialverschiebung für $j_{\max} = 270$ und $j_{\max} = 340$ unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M.

Tabelle 4.1: Zeitdifferenzen, Δt , und Länge der finiten Elemente, h , der Berechnungen für die Tests $t^i h^j$.

	Δt (a)		h (km)
t1	5	h1	10
t2	10	h2	20
t3	20	h3	30
t4	30	h4	40
t5	40	h5	50

sind als die Amplituden für $j_{\max} > 300$. Diese Untersuchungen zeigen den Einfluß von j_{\max} auf die Kopplung und gleichzeitig die Größenordnung der unterdrückten Kopplung. Zur weiteren Begutachtung des Einflusses von j_{\max} ist in Abbildung 4.3 die Differenz der Geschwindigkeiten der Radialverschiebung für $j_{\max} = 90$ und $j_{\max} = 340$ gezeigt. Das räumlich kleinskalige Muster ist dadurch zu erklären, daß hier hauptsächlich Amplituden ab $j = 90$ beitragen. Die Differenzen der Geschwindigkeiten liegen bei $\pm 0.01 \text{ mm a}^{-1}$, was $\sim 1\%$ der Geschwindigkeit der Radialverschiebung für die gewählten Modelle entspricht. In Abbildung 4.4 werden die Geschwindigkeiten der Radialverschiebung für $j_{\max} = 270$ und $j_{\max} = 340$ verglichen. Hier sind die Differenzen um eine Größenordnung kleiner und im Bereich von $\pm 0.001 \text{ mm a}^{-1}$. Diese Berechnungen zeigen, in welchem Bereich die Ungenauigkeiten in den Geschwindigkeiten der Radialverschiebung liegen, die durch den Abbruch der Reihen verursacht werden. Für die weiteren Berechnungen wird, wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, $j_{\max} = 340$ gewählt.

Im folgenden soll der Einfluß der Wahl des Zeitschritts für das Differenzenschema und der Diskretisierung in Radialrichtung betrachtet werden. Dazu wird der Zeitschritt $\Delta t := t^{i+1} - t^i$ für die letzten 25 ka variiert, und es werden verschiedene Diskretisierungen der Radialrichtung $h := r_{k+1} - r_k$ für den oberen Mantel, $5701 \text{ km} \leq r \leq 6271 \text{ km}$, gewählt. Variiert werden der Zeitschritt Δt und die Länge h der finiten Elemente, d. h. die Diskretisierung in Radialrichtung, in jeweils fünf Schritten, was mit $t^i h^j$ bezeichnet wird. Die entsprechenden Zeitschritte und Längen der finiten Elemente sind in der Tabelle 4.1 angegeben. Für diese Diskretisierungen sind die gegenwärtigen Radialverschiebungen u berechnet. Die Radialverschiebung des Tests t1h1 wird als Referenz verwendet, und für die anderen Tests die Varianz, χ_{var} , berechnet:

$$\chi_{\text{var}}(u) := \frac{1}{L} \sqrt{\sum_{\ell=1}^L \left(u^{t^i h^j}(\Omega_{\ell}, t) - u^{t1h1}(\Omega_{\ell}, t) \right)^2}. \quad (4.15)$$

Hier bezeichnet Ω_{ℓ} die Gitterpunkte auf der Oberfläche gemäß (4.3). Die Varianz bezüglich der gegenwärtigen Radialverschiebung des Tests t1h1 ist für alle Tests in Tabelle 4.2 gelistet. Ebenso ist dort die Varianz der gegenwärtigen Meeresspiegeländerung angegeben, die analog zu (4.15) definiert wird.

Die Variation der Zeitdifferenzen im betrachteten Intervall $5 \text{ a} \leq \Delta t \leq 40 \text{ a}$ verändert χ_{var} nur in der Größenordnung von 0.01 mm. Der Einfluß der Wahl der Diskretisierung mit finiten Elementen im Intervall $10 \text{ km} \leq h \leq 50 \text{ km}$ ist in der Größenordnung von 1 mm, d. h. zwei Größenordnungen darüber. Für die gewählte Diskretisierung in Radialrichtung, die mit den Viskositätsverteilungen in Abschnitt 3.1

Tabelle 4.2: Varianz, χ_{var} , für die Diskretisierungstests t_{hj} .

Test	$\chi_{\text{var}}(u)$ (mm)	$\chi_{\text{var}}(s)$ (mm)
t2h1	0.002938037	0.002516312
t3h1	0.008827054	0.007557895
t4h1	0.014738579	0.012634775
t5h1	0.020642345	0.017691309
t1h2	1.184606400	0.804735436
t2h2	1.185634537	0.805436631
t3h2	1.187712071	0.806858342
t4h2	1.191191797	0.809307848
t5h2	1.191956946	0.809780248
t1h3	0.396897564	0.227919227
t2h3	0.397776245	0.229598911
t3h3	0.399599894	0.233008119
t4h3	0.401723583	0.236636637
t5h3	0.403553226	0.240046937
t1h4	1.414267854	0.932496464
t2h4	1.415355041	0.933358744
t3h4	1.417548118	0.935099170
t4h4	1.421274707	0.937989740
t5h4	1.422020499	0.938650161
t1h5	1.910994944	1.290911148
t2h5	1.912104834	1.291641051
t3h5	1.914338323	1.293111305
t4h5	1.918830918	1.296246889
t5h5	1.918866573	1.296097856

angegeben ist, ergibt sich $\chi_{\text{var}}(u) = 0.034788178$ mm und $\chi_{\text{var}}(s) = 0.022818493$ mm. Verglichen mit den Varianzen in Tabelle 4.2 sind diese nur geringfügig größer als die Minimalwerte für den Test t2h1. Somit bedingt die gewählte Diskretisierung nur sehr geringe Abweichungen von den Ergebnissen des zeitlich und räumlich hochauflösenden Tests t1h1.

4.4.2 Ozeanrepräsentationen in der MSG

In Abschnitt 2.3.2 werden bei der Ableitung der MSG verschiedene Ozeanrepräsentationen eingeführt. Hier sollen die Auswirkungen der Beschreibungen auf die berechnete gegenwärtige Meeresspiegeländerungen betrachtet werden.

Abbildung 4.5 zeigt die berechnete Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für die durch (2.120)

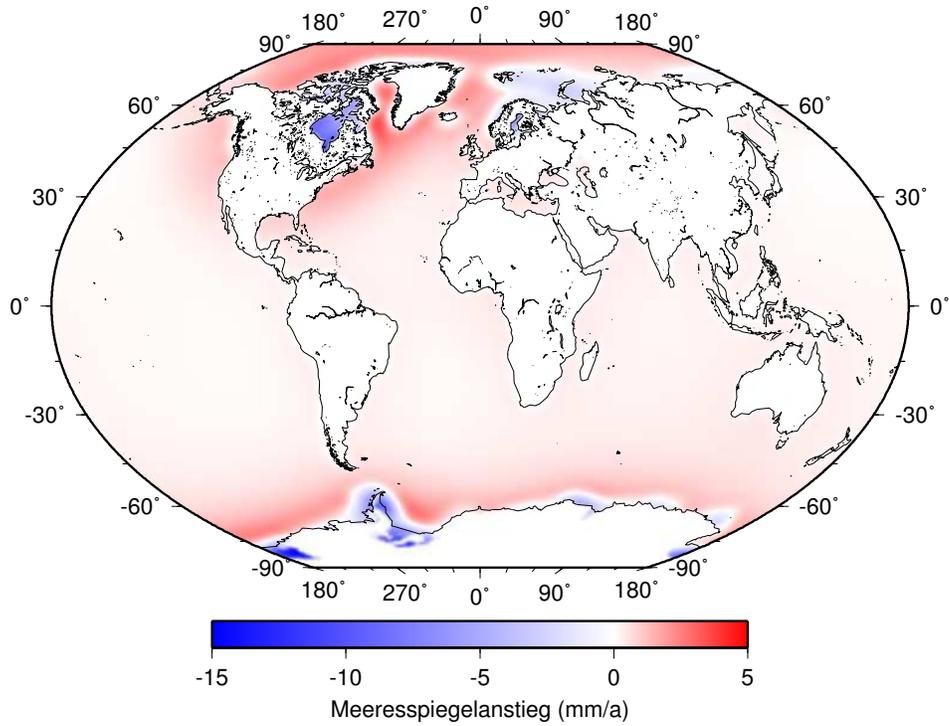


Abbildung 4.5: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für ORA unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M.

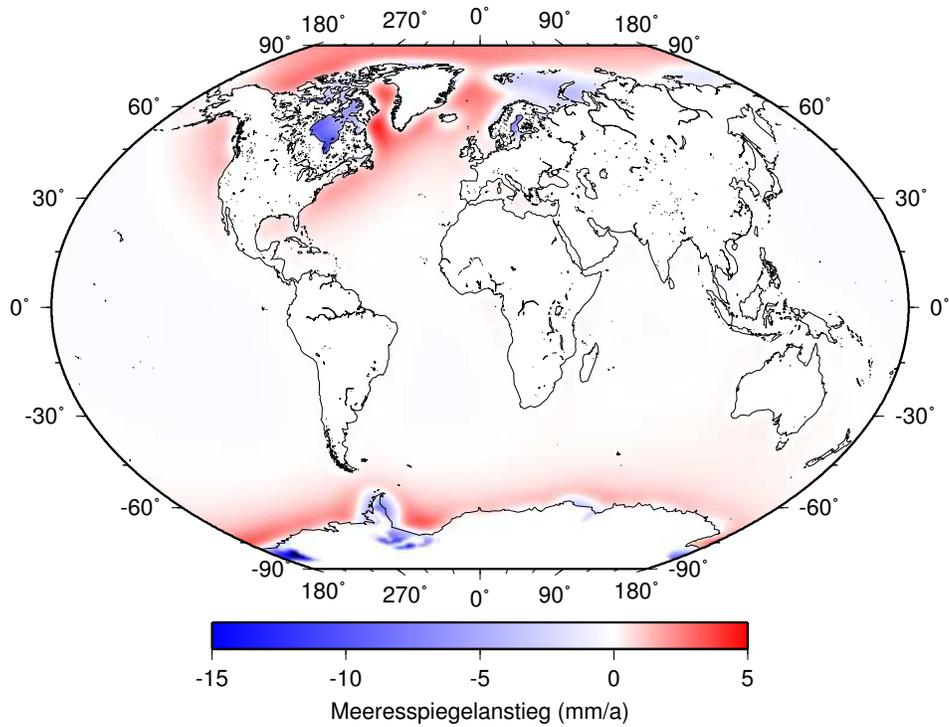


Abbildung 4.6: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für ORB unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M.

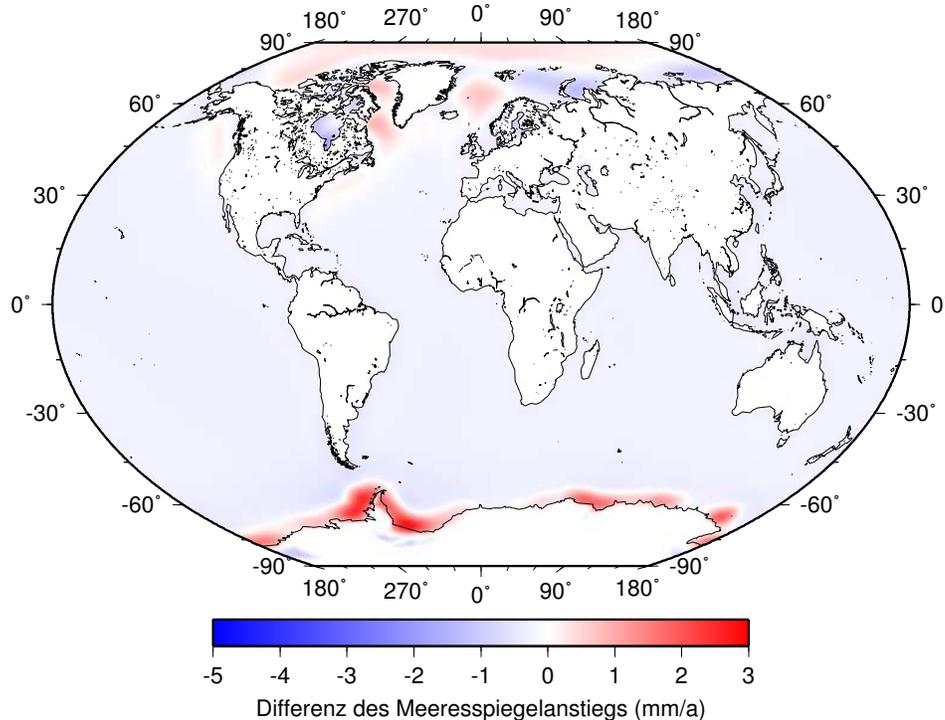


Abbildung 4.7: Differenz der Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs für ORB und ORA unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M. Positive Differenzen ergeben sich bei größeren Geschwindigkeiten für ORB als für ORA.

gegebene ORA. Auffällig ist die räumliche Verteilung der positiven Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs, die sich fast über die gesamten Weltmeere erstreckt und in den Ozeanen nahe der pleistozänen Eisschilde ihre Maximalwerte von fast 3 mm a^{-1} erreicht. Unter den Zentren der pleistozänen Eisschilde, in der Hudson Bay, der Barents- und Kara- sowie der Ostsee, sind hingegen negative Geschwindigkeiten zu beobachten, die von -2 mm a^{-1} in der Barents- und Karasee bis -7 mm a^{-1} in der Hudson Bay reichen. Desweiteren sind um die Antarktis, besonders um die Antarktische Halbinsel, Gebiete mit Geschwindigkeiten von -10 mm a^{-1} und weniger zu erkennen. Dies ist auf die sehr großen Eismächtigkeitsänderungen von ICE-3G-M in diesen Gebieten zurückzuführen. Die Änderungen im Meeresspiegel innerhalb der antarktischen Küstenlinien ist mit den unterschiedlichen Beschreibungen von Schelfeis und Topographie (Abschnitt 4.2) hinsichtlich der Küstenlinien¹ zu erklären (z. B. Ross, Ronne und Filchner Schelfeis).

In Abbildung 4.6 ist die berechnete Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für die durch (2.121)–(2.124) gegebene ORB gezeigt. Zur Verdeutlichung der Unterschiede in den berechneten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs ist in Abbildung 4.7 die Differenz der Geschwindigkeiten für ORB und ORA gezeigt. Hier fällt auf, daß fast über die gesamten Ozeane für ORB ein geringerer Meeresspiegelanstieg zu verzeichnen ist als für ORA (in Abbildung 4.7 eine Differenz von $\sim -0.5 \text{ mm a}^{-1}$). Außerdem

¹Die hier eingezeichneten Küstenlinien entsprechen denen im Programm GMT (Wessel & Smith, 1991) (siehe auch: <http://www.soest.hawaii.edu/gmt/>), wobei Schelfeisgebiete innerhalb der Küstenlinien liegen, was der Ozeanrepräsentation in Abschnitt 2.3.3 widerspricht.

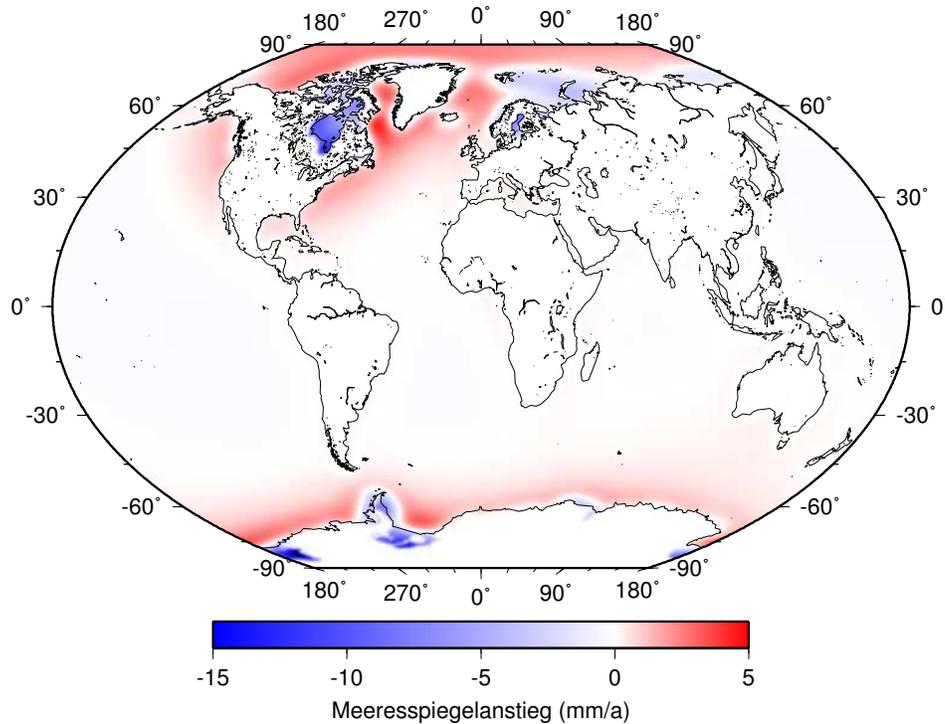


Abbildung 4.8: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für ORC unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M.

ist für ORB an den Küsten Nordamerikas ein Meeresspiegelanstieg von maximal 5 mm a^{-1} und um die Antarktis von maximal 3 mm a^{-1} zu beobachten (in Abbildung 4.7 eine Differenz von $\sim 1 \text{ mm a}^{-1}$ bzw. $\sim 2.5 \text{ mm a}^{-1}$ zwischen den unterschiedlichen Ozeanrepräsentationen). Diese Beobachtungen sind dadurch zu erklären, daß bei ORA nur eine uniforme Ozeanlast berücksichtigt ist, während bei ORB auch die Deformation des Ozeanbodens und des Geoids beachtet ist.

Abbildung 4.8 zeigt die Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs für ORC, die durch (2.125)–(2.128) beschrieben wird. Die berechneten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs für ORB (Abbildung 4.6) und ORC (Abbildung 4.8) sind sehr ähnlich, so daß zur Verdeutlichung der Unterschiede in Abbildung 4.9 die Differenz in den Geschwindigkeiten zwischen den Ozeanrepräsentationen dargestellt ist. Es zeigt sich, daß die wesentlichen Unterschiede in Gebieten auftreten, in denen bei ORC die Küstenlinien zeitlich variieren, wie in der Hudson Bay in Kanada, den Küsten Schwedens und Finnlands sowie in den Schelfeisgebieten der Antarktis. Der Unterschied an den Küsten des Bottnischen Meerbusens zwischen den Geschwindigkeiten für ORC und ORB beträgt bis zu -2 mm a^{-1} . In der Hudson Bay erreichen die Unterschiede bis zu -15 mm a^{-1} , da nur bei ORC das Trockenfallen von Küstengebieten bei zeitvariablen Küstenlinien möglich ist.

Abschließend wird nochmals auf die großen Unterschiede im Betrag und der räumlichen Verteilung der Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für ORA und ORB hingewiesen (Abbildung 4.7). Daran ist die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Deformation des Ozeanbodens und des Geoids ersichtlich. Die räumlich nur sehr begrenzten Unterschiede in der Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs zwischen ORB und ORC täuschen einen geringeren Einfluß der zeitvariablen Küstenlinien vor. Wird

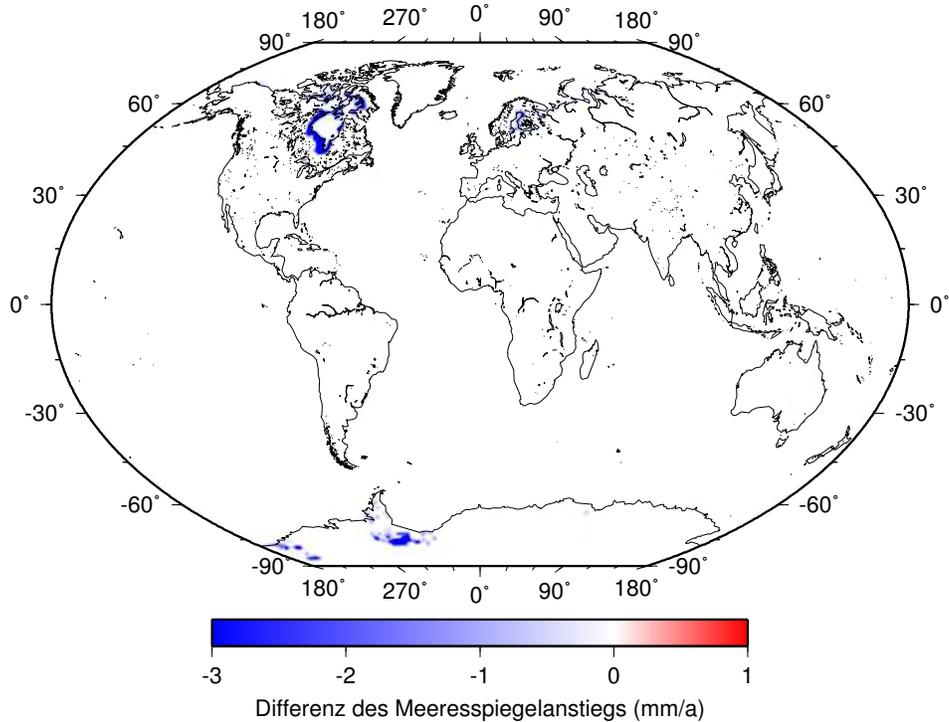


Abbildung 4.9: Differenz der Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für ORC und ORB unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M. Positive Differenzen ergeben sich bei größeren Geschwindigkeiten für ORC als für ORB.

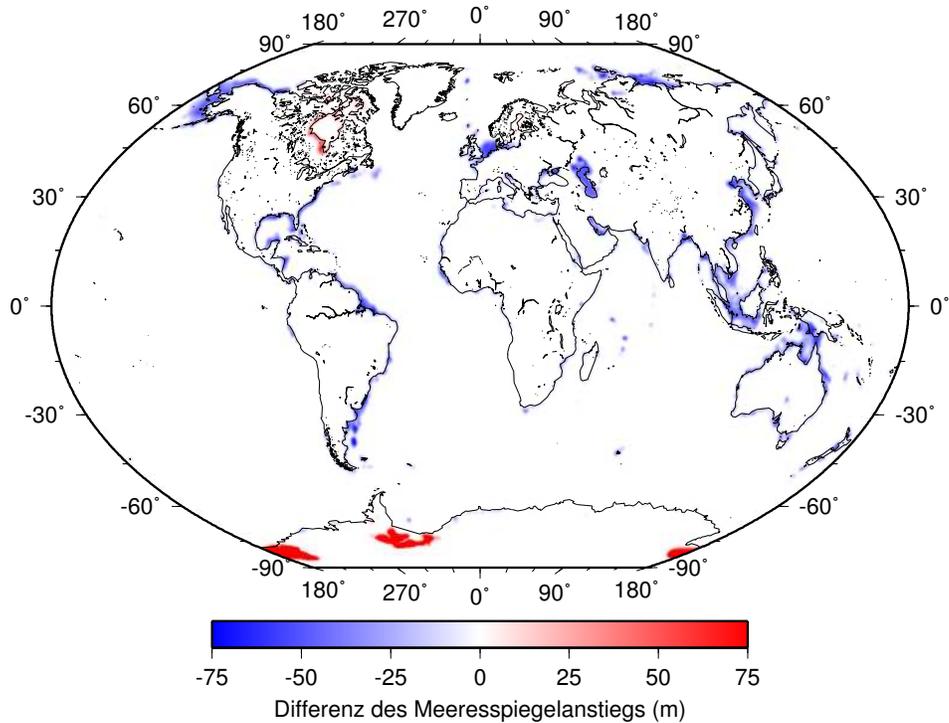


Abbildung 4.10: Differenz des Meeresspiegelanstiegs seit 18 ka BP zwischen ORC und ORB unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M. Positive Differenzen ergeben sich bei größeren Werten für ORC als für ORB.

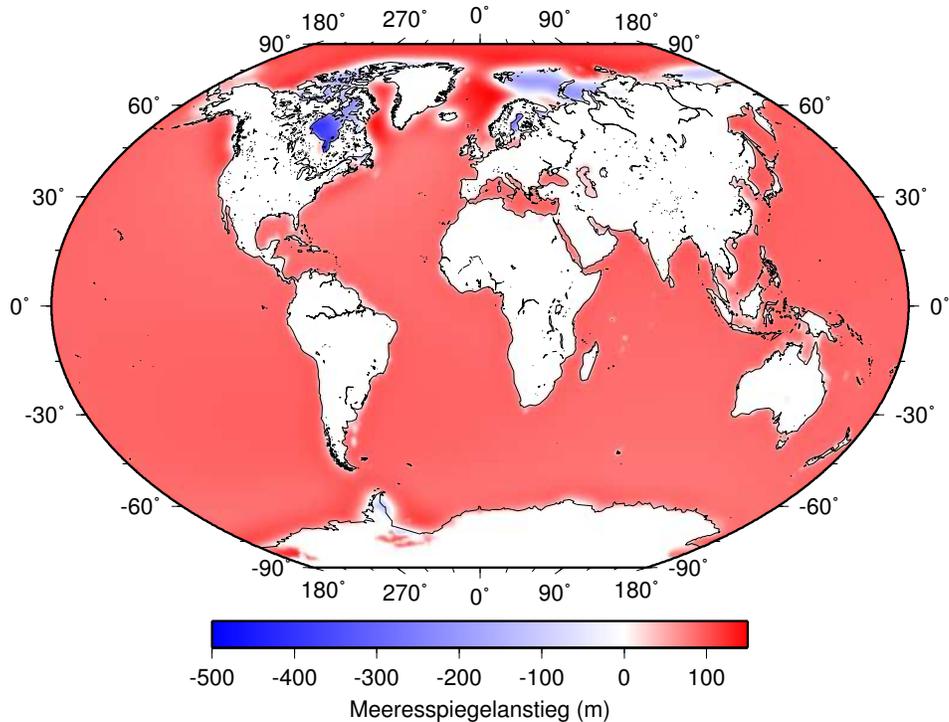


Abbildung 4.11: Meeresspiegelanstieg seit 18 ka BP für ORC unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M.

hingegen der Meeresspiegelanstieg seit 18 ka BP für ORC mit ORB verglichen, zeigen die Differenzen, daß fast die gesamte amerikanische Atlantikküste, die Küste Alaskas, weite Teile der Nordsee und der sibirischen Küste sowie das Gebiet von der chinesischen Küste über die Philippinen und Indonesien bis nach Neu-Guinea und Australien davon betroffen sind (Abbildung 4.10). Besonders auffällig sind die Differenzen in den Schelfeisgebieten der Antarktis. An diesen Küsten und für den genannten Zeitraum existieren allerdings eine Vielzahl von Beobachtungen, die zur Begutachtung der verwendeten Eis- und Erdmodelle herangezogen werden können (Kapitel 5). Bei Verwendung von ORB anstelle von ORC weichen die Berechnungen des Meeresspiegelanstiegs in den oben genannten Küstengebieten um maximal 75 m ab, in den Schelfeisgebieten der Antarktis sogar um maximal -400 m. Diese Differenzen sind auf die zeitabhängige Ozeanfunktion bei ORC zurückzuführen. In Abbildung 4.11 ist der Meeresspiegelanstieg seit 18 ka BP für ORC gezeigt, der in den Küstenregionen ~ 90 m aufweist, so daß die oben angegebenen Differenzen mehr als 80 % des Meeresspiegelanstiegs betragen. Hieran ist die Notwendigkeit ersichtlich, ORC anzuwenden, insbesondere bei Vergleichen von modellierten und beobachteten Meeresspiegeländerungen.

4.4.3 Alternative Beschreibung des inkrementiellen Trägheitstensors in der RT

Im folgenden werden die in Abschnitt 2.4.6 vorgestellten Gleichungen der alternativen Ableitung des inkrementiellen Trägheitstensors, $C^{(1)}$, verwendet, um die entsprechenden Ergebnisse mit denen der MacCullagh-Formeln (2.197) und (2.208) zu vergleichen. Für die Berechnungen wird ORC gewählt.

In Abbildung 4.12 werden die Ergebnisse mit Hilfe der MacCullagh-Formeln und der alternativen

Beschreibung für $C^{(1)}$ verglichen. Über die gesamte Zeitspanne von 120 ka betragen die Abweichungen für alle drei Komponenten weniger als 5 %. Es bleibt zu untersuchen, wie stark der berechnete gegenwärtige Meeresspiegelanstieg von der Variation der Erdrotation beeinflusst wird. Hierzu wird in Abbildung 4.13 die Differenz der Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs bei Berücksichtigung und Vernachlässigung der RT gezeigt. Auffällig ist das Muster der Differenzen, welches deutlich dem dominierenden Term vom Grad $j = 2$ und von der Ordnung $m = 1$ der spektralen Repräsentation folgt. Die Differenzen liegen im Bereich von $\pm 0.2 \text{ mm a}^{-1}$, wobei Maximalwerte an der amerikanischen Ostküste und nahe der westaustralischen Küste auftreten, wohingegen Minimalwerte an der südamerikanischen und japanischen Küsten erreicht werden. Der Vergleich mit aus Pegelmeßwerten abgeleiteten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs, die in der Größenordnung von $\sim 1.5 \text{ mm a}^{-1}$ liegen (Abschnitt 6.3 und 7.1), zeigt, welchen Beitrag die RT liefert und verdeutlicht damit deren Bedeutung bei der Untersuchung des gegenwärtigen Meeresspiegelanstiegs.

4.4.4 Einfluß der rotationsbedingten Deformation in der RT

In Abschnitt 4.3 wird in der Darstellung der Implementierung der RT auch darauf eingegangen, wie die rotationsbedingte elastische Deformation berücksichtigt werden kann. Hier soll nun untersucht werden, welchen Einfluß die Berücksichtigung oder Vernachlässigung dieses Effekts auf den berechneten Meeresspiegelanstieg hat.

Abbildung 4.14 zeigt die Differenz der Geschwindigkeiten des gegenwärtigen Meeresspiegelanstiegs bei der Berücksichtigung und Vernachlässigung der rotationsbedingten elastischen Deformation in der RT. Auch hier fällt das Muster der Differenzen auf, das wie in Abbildung 4.13 dem dominierenden Term vom Grad $j = 2$ und von der Ordnung $m = 1$ der spektralen Repräsentation des Zentrifugalpotentials folgt. Wie in Abschnitt 4.3 dargestellt unterscheidet sich die Lösung der Liouville-Gleichung bei Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation im Vergleich der Lösung bei Vernachlässigung in dem beschriebenen Faktor aus den Love-Zahlen und der Verwendung der Chandleranstatt der Euler-Frequenz. Das Zentrifugalpotential ist proportional zu den Lösungen der Liouville-Gleichung, was bedingt, daß die Differenzen diesem Muster folgen. Die Extremwerte in Abbildung 4.14 liegen bei $\sim \pm 0.05 \text{ mm a}^{-1}$. Der Vergleich mit der Größenordnung des Einflusses der Berücksichtigung der RT von $\pm 0.2 \text{ mm a}^{-1}$ zeigt auf, daß die Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation in der RT mit $\sim 25 \%$ zum Gesamteffekt beiträgt. Für alle weiteren Berechnungen in dieser Arbeit wird der Einfluß der rotationsbedingten elastischen Deformation auf die RT berücksichtigt.

Zur Bewertung in diesem Abschnitt ist anzumerken, daß der Einfluß der Berücksichtigung der rotationsbedingten elastischen Deformation in der Liouville-Gleichung erst quantitativ erfaßt werden kann, wenn die Berechnungen mit einer konsistenten Theorie dieses Effekts wiederholt werden. In einer konsistenten Theorie müßte die rotationsbedingte viskoelastische Deformation durch die Kopplung des Zentrifugalpotentials in die Gleichungen der VR berücksichtigt werden und nicht mit Hilfe der Love-Zahlen in der Liouville-Gleichung beschrieben werden.

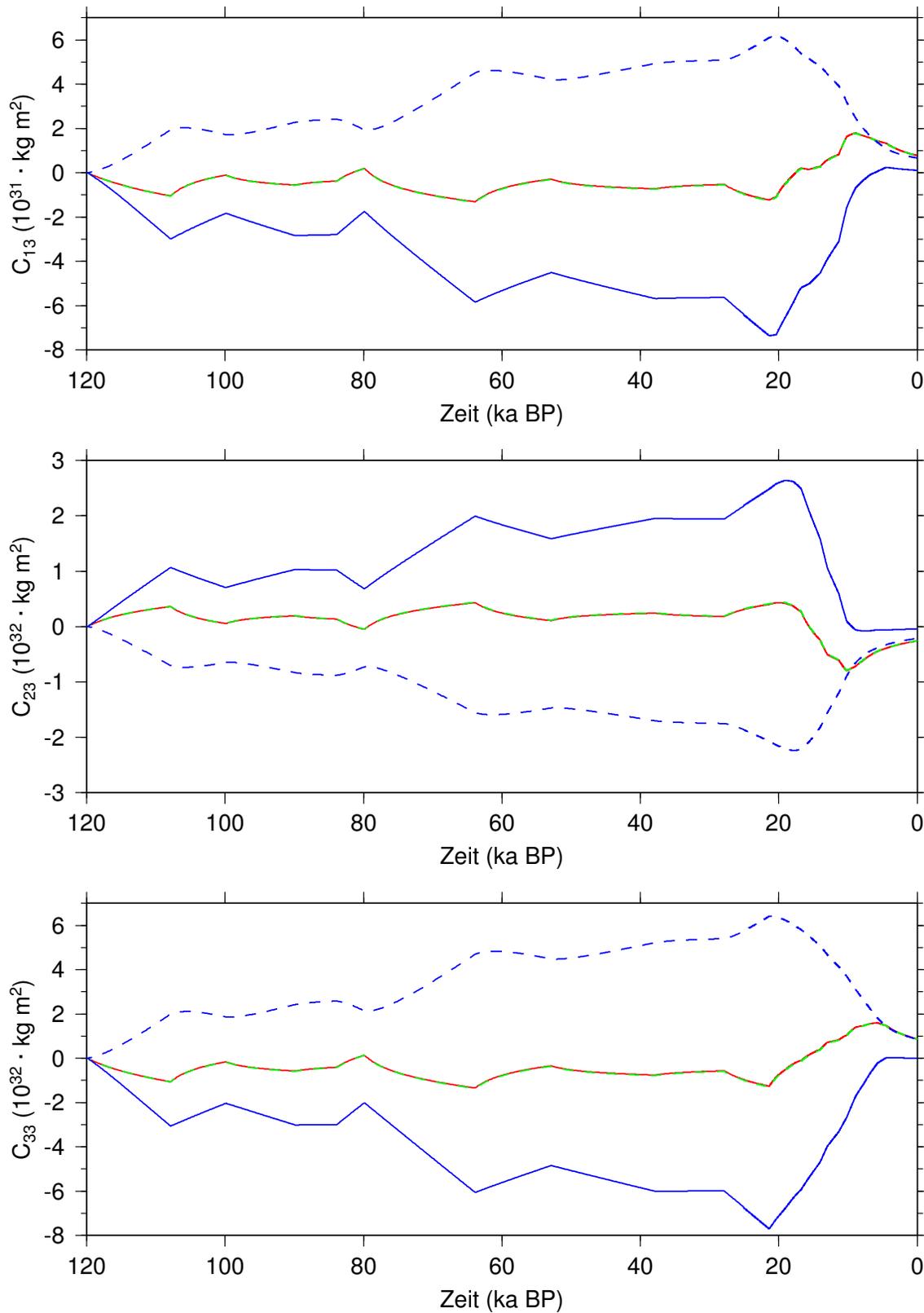


Abbildung 4.12: Komponenten des inkrementiellen Trägheitstensors berechnet für VMF, ICE-3G-M und ORC für die letzten 120 ka. Die rote Linie zeigt das Ergebnis für die MacCullagh-Formeln (2.197) und (2.208), die grüne Linie das für die alternative Beschreibung (2.179)–(2.183) für $C^{(1)}$. Die Beiträge $C^{(1)\text{ex}}$ (blaue durchgezogene Linie) und $C^{(1)\text{in}}$ (blaue unterbrochene Linie) der alternativen Beschreibung sind zusätzlich eingezeichnet.

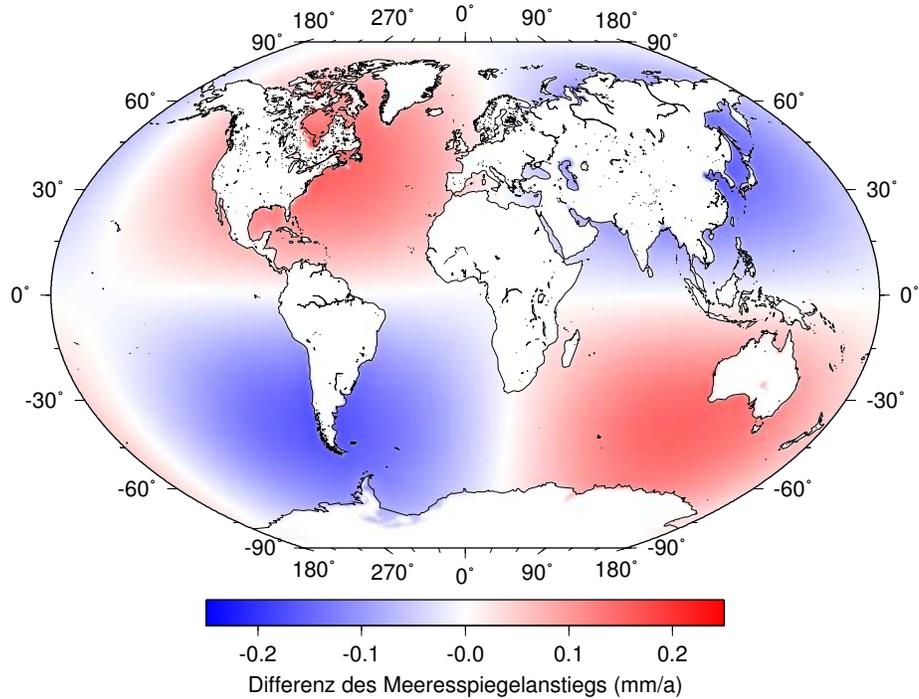


Abbildung 4.13: Differenz der Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs bei Berücksichtigung und Vernachlässigung der RT unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M. Positive Differenzen ergeben sich bei größeren Geschwindigkeiten bei Berücksichtigung als bei Vernachlässigung der RT.

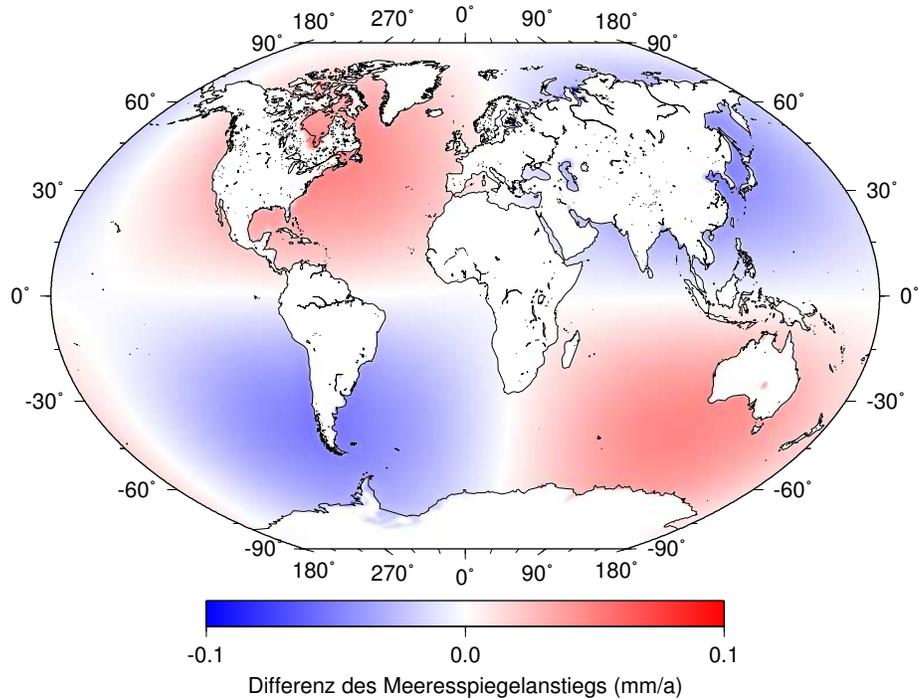


Abbildung 4.14: Differenz der Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs bei Berücksichtigung und Vernachlässigung der rotationsbedingten elastischen Deformation in der RT unter Verwendung von VMF und ICE-3G-M. Positive Differenzen ergeben sich für größere Geschwindigkeiten bei Berücksichtigung als Vernachlässigung des Effekts.

5. Bewertung der Eingabemodelle

In Kapitel 3 werden die Eingabemodelle vorgestellt, die bei der Untersuchung des Einflusses der pleistozänen Eisschilddevolution auf die gegenwärtigen Meeresspiegeländerungen verwendet werden. Hier soll eine Methode zur quantitativen Bewertung dieser Eingabemodelle aufgezeigt werden. Hierzu werden geologische Beobachtungen herangezogen, aus denen sich Informationen über die Meeresspiegeländerung für bestimmte Orte und Zeiten seit dem Pleistozän und Holozän ableiten lassen.

5.1 Konzept der Bewertung

In der Literatur werden eine Vielzahl von viskoelastischen Erdmodellen (z. B. Tushingham, 1992; Peltier & Jiang, 1996; Lambeck et al., 1998a; Peltier, 1999; Wieczerkowski et al., 1999; Fleming et al., 2003; Martinec & Wolf, 2005) und Eismodellen (z. B. Tushingham & Peltier, 1991; Greve & Hutter, 1995; Huybrechts & T'siobbel, 1997; Lambeck, 1998) vorgestellt. In Kapitel 3 werden einige derartige Modelle als Eingabemodelle für diese Untersuchung präsentiert. Um die optimalen Eingabemodelle zur Berechnung des Einflusses der pleistozänen Eisschilddevolution auf die rezente Meeresspiegeländerung auszuwählen, bedarf es eines Bewertungskriteriums.

In dieser Arbeit wird dazu die Meeresspiegeländerung der letzten ~ 20 ka herangezogen, die nur indirekt und fehlerbehaftet aus Beobachtungen abgeleitet werden kann. Geomorphologische Hinweise und Sedimente, die organisches Material enthalten, können als Indikatoren für den relativen Meeresspiegelanstieg verwendet werden. Dazu müssen die geographische Position und die Höhe über dem gegenwärtigen Meeresspiegel bestimmt und eine Altersbestimmung vorgenommen werden. Zumeist wird für die Meeresspiegelbestimmung organisches Material herangezogen und die Methode der ^{14}C -Altersbestimmung verwendet. Auf die Altersbestimmung und Kalibrierung der Proben und damit verbundene Probleme wird in Abschnitt 5.2 eingegangen. Ist es möglich, für eine Meeresspiegelbestimmung alle erforderlichen Größen zu bestimmen, werden diese für die weitere Betrachtung als Indikator des relativen Meeresspiegelanstiegs (SLI)¹ bezeichnet. Für jeden SLI sind somit die geographische Position, die Höhe über dem gegenwärtigen Meeresspiegel und das Alter bekannt. Detaillierte Informationen zu der Datenbasis für die SLI, auf die hier zurückgegriffen wird, sind in Abschnitt 5.2 zusammengestellt.

Zur Bewertung der Eingabemodelle werden verschiedene Kombinationen von Viskositäts- und Eismodellen verwendet, um an den entsprechenden geographischen Positionen der SLI den Meeresspiegelanstieg seit dem Pleistozän oder Holozän zu berechnen. Diese Ergebnisse werden dann mit den Beobachtungen verglichen und mit Hilfe von Qualitätsfunktionen, die in Abschnitt 5.3.1 vorgestellt werden, bewertet. Dieser Methode liegt die Idee zugrunde, daß die Viskositäts-Eismodellkombination, die die Beobachtungen des pleistozänen und holozänen Meeresspiegelanstiegs am besten reproduzieren kann,

¹Abgeleitet von "Sea-Level Indicator".

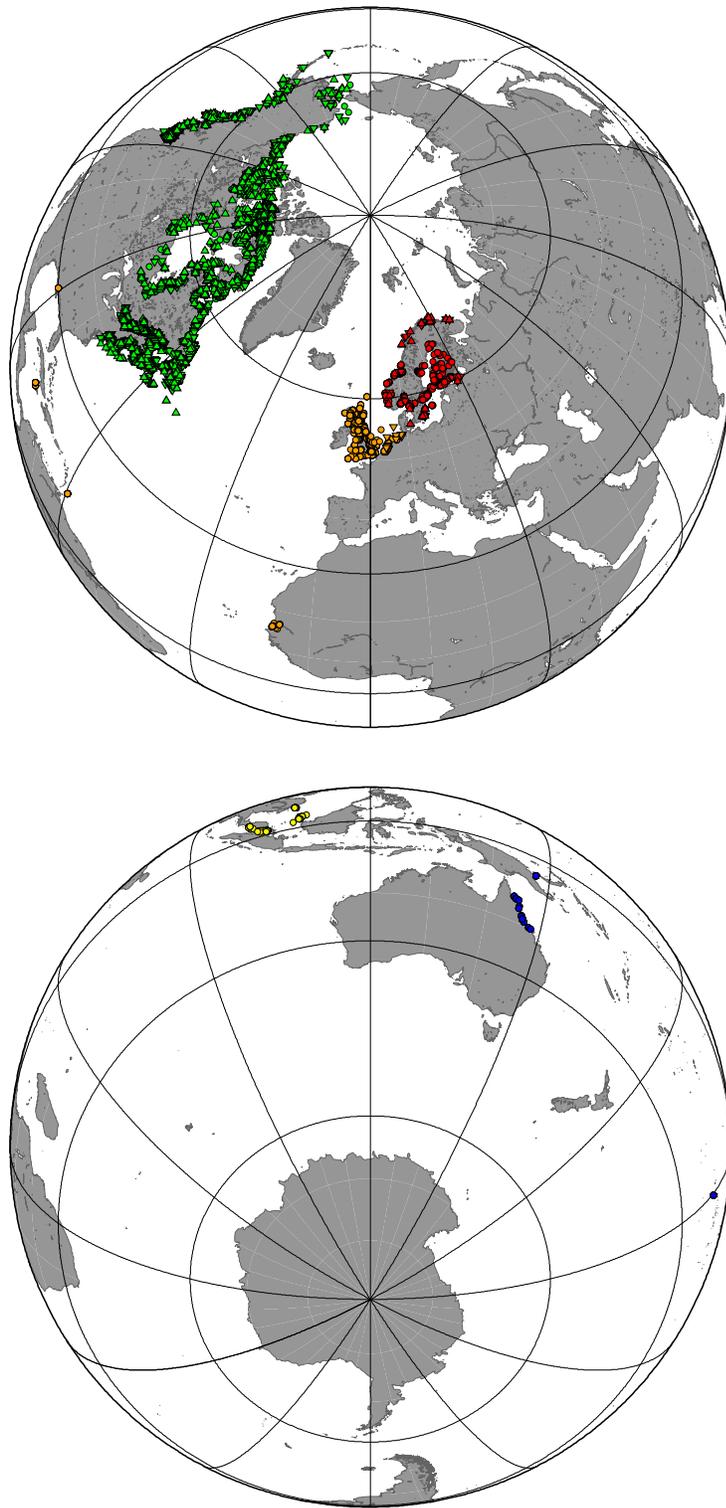


Abbildung 5.1: Einteilung der SLI in fünf Regionen, die in Abschnitt 5.1 vorgestellt werden. Die geographischen Positionen der SLI sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R2 (grün), R3 (orange), R4 (gelb), R5 (blau). Die hierzu verwendeten Symbole sind hinsichtlich der drei Typen von Beobachtungen, $s_{\text{int}}^{\text{SLI}}$ (Kreise), $s_{\text{min}}^{\text{SLI}}$ (stehendes Dreieck) und $s_{\text{max}}^{\text{SLI}}$ (hängendes Dreieck) gewählt.

auch die geeignetste ist, um den Einfluß der pleistozänen Eisschildentwicklung auf die rezente Meeresspiegeländerung zu berechnen. Offensichtlich ist es mit diesem Ansatz nicht möglich, Viskositäts- und Eismodelle getrennt zu bewerten, da die Reproduktion des pleistozänen und holozänen Meeresspiegelanstiegs bei gleichzeitigen freien Parametern in den Viskositäts- und Eismodellen für die beste Anpassung mehrdeutige Lösungen hervorbringt. Eine Variation der Viskositätsverteilung kann demnach weitestgehend durch eine Variation in der Lastgeschichte kompensiert werden und umgekehrt.

In Abschnitt 3.1 ist darauf hingewiesen, daß für die theoretische Beschreibung ein radialsymmetrisches Erdmodell angenommen ist. Dies stellt insofern eine Einschränkung dar, als unterschiedliche Mächtigkeiten nicht nur für die kontinentale und ozeanische Lithosphäre bestimmt werden, sondern auch in den Gebieten der pleistozänen Eisschilde unterschiedliche Lithosphärenmächtigkeit diskutiert werden (z. B. Fjeldskaar, 1997; Kaikkonen et al., 2000; Kendall et al., 2003; Martinec & Wolf, 2005). Deshalb werden hier für die Bewertung der Viskositäts- und Eismodelle die SLI in Regionen zusammengefaßt, die die pleistozäne Eisschildverteilung berücksichtigen. Die sich aus der Einteilung ergebenden Regionen werden auch im Abschnitt 6.4 zur Einteilung der Pegelstationen verwendet. Alle SLI werden einer der folgenden fünf Regionen zugeordnet (Abbildung 5.1):

- R1: Region des skandinavischen Eisschilts,
- R2: Region des nordamerikanischen Eisschilts,
- R3: Region des nördlichen Atlantiks, begrenzt durch R1 und R2,
- R4: Region des nördlichen Pazifiks,
- R5: Region der südlichen Hemisphäre.

Für jede Region werden in Abschnitt 5.3.2 die verschiedenen Viskositäts-Eismodellkombinationen bewertet.

5.2 Beobachtungsdaten

Die Datenbasis für die SLI, die zur Bewertung herangezogen werden, wurde von V. Klemann (pers. Komm.) zusammengestellt. Die zugehörige Datenbank enthält für jeden SLI mindestens folgende, für die Bewertung notwendigen Angaben:

- geographische Breite, λ , und Länge, φ ,
- relativer Meeresspiegelanstieg, $s_{\text{int}}^{\text{SLI}}$, bezüglich des gegenwärtigen Meeresspiegels,
- ^{14}C -Alter,
- kalibriertes Alter, t^{cal} .

Zusätzlich werden Angaben über die Fehlerintervalle der einzelnen Größen gemacht. Die kalibrierten Alter sind, wie in Wolf et al. (2004) beschrieben, mit dem Programm `calib 4.1` (Stuiver & Reimer,

Tabelle 5.1: Anzahl, N , der für die Bewertung in Abschnitt 5.3 berücksichtigten SLI in den Regionen R1, ..., R5 und in der Gesamtregion R1–R5.

Gruppe	R1	R2	R3	R4	R5	R1–R5
N	536	6084	1150	92	154	8016

1993) für eine Halbwertszeit von 5570 a aus den ^{14}C -Altern berechnet. Das Alter wird aus der Mittelung der Randwerte des 2σ -Intervalls entsprechend $t^{\text{cal}} = (t_{\text{min}}^{\text{cal}} + t_{\text{max}}^{\text{cal}})/2$ berechnet. Somit kann die Zeit der Ablagerung der Probe angegeben werden, die sich auf das Kalenderjahr 1950 bezieht und im folgenden mit BP gekennzeichnet wird.

Der beobachtete relative Meeresspiegelanstieg, $s_{\text{int}}^{\text{SLI}}$, ist nicht nur fehlerbehaftet, so daß Minimal- und Maximalwert angegeben werden müssen, sondern in Abhängigkeit von der Probe kann häufig nur eine untere, $s_{\text{min}}^{\text{SLI}}$, oder obere, $s_{\text{max}}^{\text{SLI}}$, Schranke angegeben werden. Dies ergibt sich aus der Art der Probe, da verschiedene Proben, wie z. B. Süßwasser-Torf (Shennan & Horten, 2002), auf eine obere Schranke und andere, wie z. B. bestimmte Muscheln und Korallen (z. B. Pirazolli, 1996), auf eine untere Schranke hinweisen. Süßwasser-Torf kann direkt über dem Niveau der Hochwassertide entstehen, jedoch auch weit über diesem Niveau gebildet werden. Ebenso geben bestimmte Muscheln und Korallen nur eine Mindesthöhe für den mittleren Meeresspiegel, da sie auch noch in einiger Tiefe unter dem Meeresspiegel leben können.

Die in dieser Arbeit herangezogene Datenbank von V. Klemann basiert teilweise auf anderen Datensammlungen. SLI aus Nordamerika wurden von A. S. Dyke (pers. Komm.) zur Verfügung gestellt. Weiterhin wurden SLI aus Finnland (Eronen et al., 1995), den Niederlanden (Jelgersma, 1961), Belgien (Kiden et al., 2002) und Großbritannien (Shennan & Horten, 2002) eingebunden. In Tabelle 5.1 ist zusammengefaßt, wie groß die Anzahl, N , der SLI in den verschiedenen Regionen ist, die in Abschnitt 5.1 eingeführt worden sind. Diese SLI bilden die Grundlage der Bewertung der verschiedenen Eingabemodelle in Abschnitt 5.3.

Als Beispiel für die geographische Verteilung ausgewählter SLI wird in Abbildung 5.2 das Gebiet der holländischen Nordsee gezeigt. Die sich aus den SLI ergebende Kurve des relativen Meeresspiegelanstiegs ist in Abbildung 5.3 wiedergegeben. Es ist hier anzumerken, daß für die Bewertung jeder SLI mit seiner zugehörigen geographischen Position berücksichtigt und nicht eine gemittelte Position für alle SLI eines begrenzten Gebiets verwendet wird. In Abbildung 5.3 sind die unteren Schranken, $s_{\text{min}}^{\text{SLI}}$, mit blauen und die oberen Schranken, $s_{\text{max}}^{\text{SLI}}$, mit roten Symbolen markiert. Das Beispiel zeigt deutlich den relativen Meeresspiegelanstieg seit 10 ka BP, der vor ~ 5 ka BP in ein Plateau übergeht. Solche Diagramme lassen sich für alle Gebiete, in denen SLI vorhanden sind, konstruieren.

5.3 Quantitative Bewertung

Eine Definition von Qualitätsfunktionen zur quantitativen Bewertung ist notwendig, da für einen großen Teil der SLI kein fehlerbehafteter relativer Meeresspiegelanstieg, $s_{\text{int}}^{\text{SLI}}$, zur Verfügung steht, sondern nur eine obere, $s_{\text{max}}^{\text{SLI}}$, bzw. untere, $s_{\text{min}}^{\text{SLI}}$, Schranke angegeben werden kann. Die Einteilung der Proben in diese

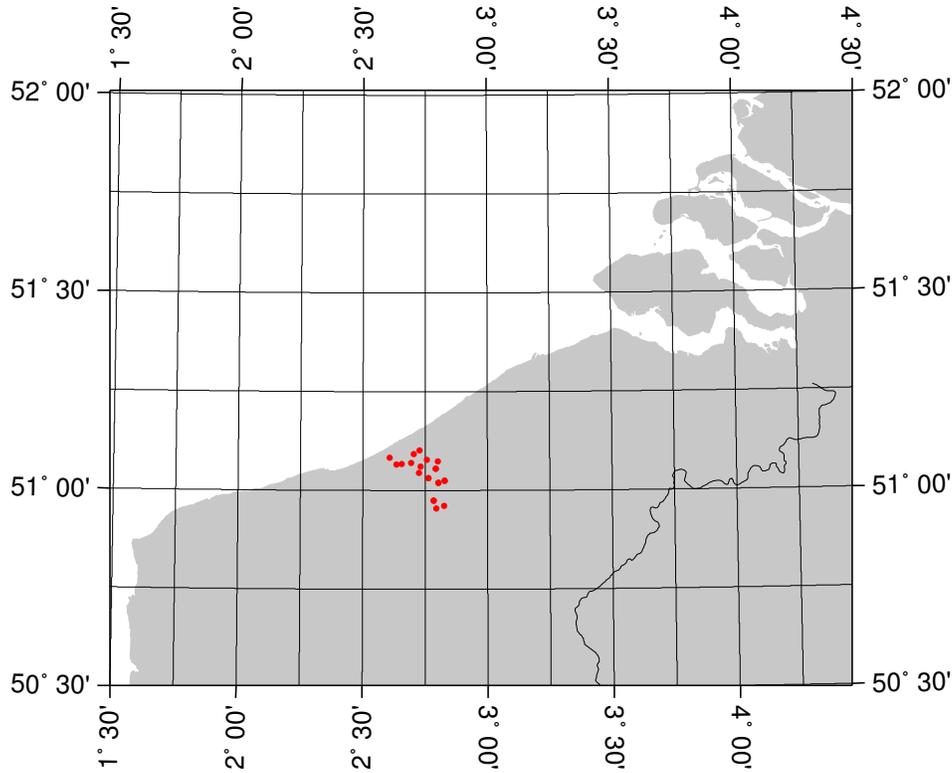


Abbildung 5.2: Geographische Position ausgewählter SLI an der holländischen Küste.

drei Typen von Beobachtungen ist, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, abhängig von der Art (z. B. Sediment, Muschel, Walknochen) der Probe.

5.3.1 Qualitätsfunktionen

Die Idee zur Entwicklung von Qualitätsfunktionen ist Wolf et al. (2004) entnommen. Hier wird der Vergleich des berechneten, $s^O(\lambda, \varphi, t)$, mit dem beobachteten, $s_{\text{int}}^{\text{SLI}}(\lambda, \varphi, t)$, Meeresspiegelanstieg mit Hilfe einer Qualitätsfunktion bewertet, die die Werte des Intervalls $[0; 1]$ annimmt und einem “fuzzy scheme” (Demiccio & Klir, 2004) folgt. Die in Wolf et al. (2004) vorgestellten trapezförmigen Qualitätsfunktionen sind jeweils für die drei Typen von SLI eingeführt. Für eine untere Schranke, $s_{\text{min}}^{\text{SLI}}$, ist die Qualitätsfunktion wie folgt definiert:

$$q^{[1]}(s^O, s_{\text{min}}^{\text{SLI}}) := \begin{cases} 1 & \text{für } s^O \geq s_{\text{min}}^{\text{SLI}} \\ \frac{s^O - s_{\text{min}}^{\text{SLI}} + \Delta s}{\Delta s} & \text{für } s_{\text{min}}^{\text{SLI}} - \Delta s < s^O < s_{\text{min}}^{\text{SLI}} \\ 0 & \text{für } s^O \leq s_{\text{min}}^{\text{SLI}} - \Delta s \end{cases} \quad (5.1)$$

Die Länge, Δs , des linearen Abfalls der Qualitätsfunktion, $q^{[1]}$, wird aus dem Fehler der Altersbestimmung, $\varepsilon^{\text{cal}} := (t_{\text{max}}^{\text{cal}} - t_{\text{min}}^{\text{cal}}) / 2$, und der Geschwindigkeit des berechneten Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}^O , bestimmt:

$$\Delta s := \dot{s}^O \varepsilon^{\text{cal}}. \quad (5.2)$$

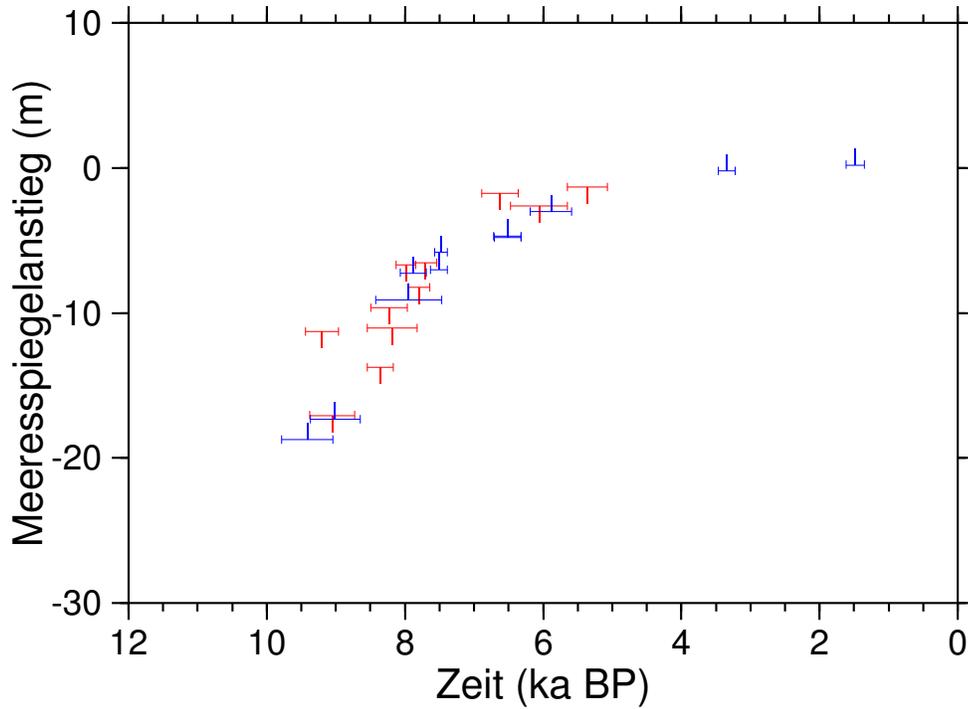


Abbildung 5.3: Relativer Meeresspiegelanstieg für die SLI in Abbildung 5.2.

Für eine obere Schranke, s_{\max}^{SLI} , gilt folgende Definition:

$$q^{[1]}(s^{\text{O}}, s_{\max}^{\text{SLI}}) := \begin{cases} 1 & \text{für } s^{\text{O}} \leq s_{\max}^{\text{SLI}} \\ \frac{s_{\max}^{\text{SLI}} + \Delta s - s^{\text{O}}}{\Delta s} & \text{für } s_{\max}^{\text{SLI}} < s^{\text{O}} < s_{\max}^{\text{SLI}} + \Delta s \\ 0 & \text{für } s^{\text{O}} \geq s_{\max}^{\text{SLI}} + \Delta s \end{cases} \quad (5.3)$$

Wird anhand eines SLI ein mit einem Fehler, ε^{SLI} , behafteter relativer Meeresspiegelanstieg, $s_{\text{int}}^{\text{SLI}}$, bestimmt, werden für die Berechnung der Qualitätsfunktion die untere und obere Schranke gemäß

$$s_{\min}^{\text{SLI}} := s_{\text{int}}^{\text{SLI}} - \varepsilon^{\text{SLI}}, \quad (5.4)$$

$$s_{\max}^{\text{SLI}} := s_{\text{int}}^{\text{SLI}} + \varepsilon^{\text{SLI}} \quad (5.5)$$

definiert. Damit folgt für die Qualitätsfunktion

$$q^{[1]}(s^{\text{O}}, s_{\min}^{\text{SLI}}, s_{\max}^{\text{SLI}}) := \begin{cases} 1 & \text{für } s_{\min}^{\text{SLI}} \leq s^{\text{O}} \leq s_{\max}^{\text{SLI}} \\ \frac{s^{\text{O}} - s_{\min}^{\text{SLI}} + \Delta s}{\Delta s} & \text{für } s_{\min}^{\text{SLI}} - \Delta s < s^{\text{O}} < s_{\min}^{\text{SLI}} \\ \frac{s_{\max}^{\text{SLI}} + \Delta s - s^{\text{O}}}{\Delta s} & \text{für } s_{\max}^{\text{SLI}} < s^{\text{O}} < s_{\max}^{\text{SLI}} + \Delta s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.6)$$

Die in (5.2), (5.4) und (5.5) auftretenden Fehler der Altersbestimmung, ε^{cal} , und des beobachteten relativen Meeresspiegelanstiegs, ε^{SLI} , werden für die Berechnung der Qualitätsfunktionen aus der verwendeten Datenbank übernommen, wobei zusätzlich beachtet wird, daß sie nicht unter festgelegte Minimalwerte fallen. Im folgenden wird

$$\varepsilon^{\text{cal}} \geq 250 \text{ a}, \quad (5.7)$$

$$\varepsilon^{\text{SLI}} \geq 2 \text{ m} \quad (5.8)$$

gewählt. Für die N SLI in einer der Regionen R1, ..., R5 können somit die jeweiligen Qualitätsfunktionen bestimmt und zum Abweichungswert

$$\chi^{\text{SLI}[1]} := 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N q^{[1]}(s_n^{\text{O}}, s_{\text{min}n}^{\text{SLI}}, s_{\text{max}n}^{\text{SLI}}) \quad (5.9)$$

zusammengefaßt werden. Die Größe $\chi^{\text{SLI}[1]}$ ist somit ein Maß für die Abweichung des berechneten vom beobachteten relativen Meeresspiegelanstieg für SLI dieser Region und bei optimaler Anpassung minimal.

Bei der hier präsentierten Methode der Bewertung mit einer Qualitätsfunktion, $q^{[1]}$, ist anzumerken, daß berechnete s^{O} , die außerhalb von $s_{\text{int}}^{\text{SLI}} \pm \Delta s$, unter $s_{\text{min}}^{\text{SLI}} - \Delta s$ oder über $s_{\text{max}}^{\text{SLI}} + \Delta s$ liegen, keinen Einfluß auf die Bewertung der Viskositäts-Eismodellkombination haben. Um auch diese in die Bewertung einfließen zu lassen, wird hier eine zweite Art von Qualitätsfunktion, $q^{[2]}$, eingeführt, die anstelle des linearen Abfalls im Δs -Intervall einen Abfall gemäß einer Exponentialfunktion (Gauß-Glockenkurve z. B. Bronstein et al., 1997, S. 702) verwendet. Die entsprechende Qualitätsfunktion für eine untere Schranke, $s_{\text{min}}^{\text{SLI}}$, ist definiert durch

$$q^{[2]}(s^{\text{O}}, s_{\text{min}}^{\text{SLI}}) := \begin{cases} 1 & \text{für } s^{\text{O}} \geq s_{\text{min}}^{\text{SLI}} \\ \exp \left[\frac{-(s^{\text{O}} - s_{\text{min}}^{\text{SLI}})^2}{2(\Delta s)^2} \right] & \text{für } s^{\text{O}} < s_{\text{min}}^{\text{SLI}} \end{cases} \quad (5.10)$$

Für die Qualitätsfunktion einer oberen Schranke, $s_{\text{max}}^{\text{SLI}}$, ist $q^{[2]}$ durch

$$q^{[2]}(s^{\text{O}}, s_{\text{max}}^{\text{SLI}}) := \begin{cases} 1 & \text{für } s^{\text{O}} \leq s_{\text{max}}^{\text{SLI}} \\ \exp \left[\frac{-(s^{\text{O}} - s_{\text{max}}^{\text{SLI}})^2}{2(\Delta s)^2} \right] & \text{für } s^{\text{O}} > s_{\text{max}}^{\text{SLI}} \end{cases} \quad (5.11)$$

definiert. Die Qualitätsfunktion für einen fehlerbehafteten relativen Meeresspiegelanstieg, $s_{\text{int}}^{\text{SLI}}$, ist definiert durch

$$q^{[2]}(s^{\text{O}}, s_{\text{min}}^{\text{SLI}}, s_{\text{max}}^{\text{SLI}}) := \begin{cases} 1 & \text{für } s_{\text{min}}^{\text{SLI}} \leq s^{\text{O}} \leq s_{\text{max}}^{\text{SLI}} \\ \exp \left[\frac{-(s^{\text{O}} - s_{\text{min}}^{\text{SLI}})^2}{2(\Delta s)^2} \right] & \text{für } s^{\text{O}} < s_{\text{min}}^{\text{SLI}} \\ \exp \left[\frac{-(s^{\text{O}} - s_{\text{max}}^{\text{SLI}})^2}{2(\Delta s)^2} \right] & \text{für } s^{\text{O}} > s_{\text{max}}^{\text{SLI}} \end{cases}, \quad (5.12)$$

wobei die Zuordnungen (5.4) und (5.5) verwendet sind. Auch bei der Berechnung von $q^{[2]}$ werden die Minimalwerte der Fehler gemäß (5.7) und (5.8) verwendet. Entsprechend (5.9) wird der Abweichungswert, $\chi^{\text{SLI}[2]}$, definiert:

$$\chi^{\text{SLI}[2]} := 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N q^{[2]}(s_n^{\text{O}}, s_{\text{min}n}^{\text{SLI}}, s_{\text{max}n}^{\text{SLI}}). \quad (5.13)$$

5.3.2 Ergebnisse der Bewertung

Mit den Qualitätsfunktionen $q^{[1]}$ und $q^{[2]}$ werden für die Eingabemodelle aus Kapitel 3 für jeweils eine der Regionen R1, ..., R5 die Abweichungswerte, $\chi^{\text{SLI}[1]}$ und $\chi^{\text{SLI}[2]}$, bestimmt. Hierzu wird der relative

Tabelle 5.2: Quantitative Bewertung der Eingabemodelle durch den Abweichungswert, $\chi^{\text{SLI}[1]}$, der bei optimaler Anpassung minimal ist. Die Minimalwerte der einzelnen Regionen sind rot markiert.

Viskositätsmodell	Eismodell	$\chi^{\text{SLI}[1]}$					Mittelwert	
		R1–R5	R1	R2	R3	R4		R5
VM1	ICE-3G-M	0.477264	0.835099	0.363263	0.846916	0.869565	0.740853	0.731139
	SCAN	0.467706	0.705404	0.369147	0.809565	0.869565	0.741195	0.698975
	NAWI	0.381014	0.763456	0.260684	0.718261	0.934783	0.954545	0.726346
VMA	ICE-3G-M	0.523244	0.893846	0.412655	0.875912	0.873152	0.759740	0.763061
	SCAN	0.514144	0.795520	0.411521	0.864320	0.873049	0.759740	0.740830
	NAWI	0.407729	0.843850	0.295262	0.682609	0.953066	0.954545	0.745867
VMF	ICE-3G-M	0.518734	0.796558	0.410389	0.838261	0.847826	0.760533	0.730713
	SCAN	0.502053	0.718521	0.411925	0.815652	0.847826	0.760890	0.710963
	NAWI	0.424571	0.828080	0.306461	0.748696	0.934783	0.961039	0.755812
VMI	ICE-3G-M	0.501192	0.792543	0.399841	0.840527	0.847826	0.750065	0.726160
	SCAN	0.492684	0.710620	0.400379	0.816522	0.847826	0.750392	0.705148
	NAWI	0.415767	0.824121	0.297818	0.736522	0.914524	0.961039	0.746805

Tabelle 5.3: Quantitative Bewertung der Eingabemodelle durch den Abweichungswert, $\chi^{\text{SLI}[2]}$, der bei optimaler Anpassung minimal ist. Die Minimalwerte der einzelnen Regionen sind rot markiert.

Viskositätsmodell	Eismodell	$\chi^{\text{SLI}[2]}$					Mittelwert	
		R1–R5	R1	R2	R3	R4		R5
VM1	ICE-3G-M	0.418865	0.768928	0.317628	0.733070	0.807856	0.621284	0.649753
	SCAN	0.405933	0.574811	0.324886	0.695309	0.807704	0.619108	0.604364
	NAWI	0.335431	0.679019	0.229469	0.609717	0.885369	0.948947	0.670504
VMA	ICE-3G-M	0.467311	0.849610	0.365562	0.775286	0.811994	0.650760	0.690642
	SCAN	0.454571	0.680784	0.367922	0.752847	0.811414	0.649868	0.652567
	NAWI	0.356859	0.780549	0.256193	0.569399	0.896615	0.949579	0.690467
VMF	ICE-3G-M	0.460144	0.729029	0.362940	0.734905	0.798823	0.637205	0.652580
	SCAN	0.438041	0.570090	0.362739	0.719538	0.798283	0.636034	0.617337
	NAWI	0.370843	0.745355	0.266010	0.635970	0.830063	0.954785	0.686436
VMI	ICE-3G-M	0.442287	0.728158	0.350894	0.738847	0.799194	0.630174	0.649453
	SCAN	0.428959	0.569874	0.350900	0.719877	0.798613	0.629078	0.613668
	NAWI	0.361840	0.742090	0.256817	0.623671	0.825173	0.955408	0.680632

Meeresspiegelanstieg mit ORC (Abschnitt 2.3) an den geographischen Positionen der SLI zu den entsprechenden Zeiten berechnet. Für alle SLI aus einer der fünf Regionen werden dann $\chi^{\text{SLI}[1]}$ und $\chi^{\text{SLI}[2]}$ gemäß (5.9) und (5.13) bestimmt.

In Tabelle 5.2 sind die entsprechenden Abweichungswerte, $\chi^{\text{SLI}[1]}$, zusammengefasst, wobei die Minimalwerte der einzelnen Regionen, R1, . . . , R5, rot markiert sind. Diese bestimmen die optimale Eingabemodellkombination der entsprechenden Region. Zum Vergleich wird für jede Kombination der Wert von $\chi^{\text{SLI}[1]}$ für die Gesamtregion und der Mittelwert der $\chi^{\text{SLI}[1]}$ für die einzelnen Regionen angegeben. Die auffällig kleinen Beträge von $\chi^{\text{SLI}[1]}$ für die Region R2 sind durch die große Anzahl ($N = 6084$) von SLI zu erklären.

Wie in Abschnitt 5.3.1 erläutert, werden durch die Qualitätsfunktion $q^{[1]}$ diejenigen SLI, bei denen der zugehörige berechnete Meeresspiegelanstieg, s^O , von den Schranken um mehr als Δs abweicht, mit $q^{[1]} = 0$ bewertet. Somit tragen diese SLI nicht zur Bewertung bei, und es wird auch nicht berücksichtigt, wie weit der zugehörige s^O tatsächlich abweicht. Dies trägt zu den großen Beträgen des Abweichungswerts, $\chi^{SLI[1]}$, für verschiedene Regionen bei. Aus diesem Grund wird die Bewertung mit der Qualitätsfunktion $q^{[2]}$ wiederholt. Die Abweichungswerte, $\chi^{SLI[2]}$, für diese Bewertung sind für die Regionen R1, ..., R5 und alle Kombinationen der verwendeten Eingabemodelle in Tabelle 5.3 zusammengefaßt. Die Minimalwerte der einzelnen Regionen sind wiederum rot markiert. Alle Abweichungswerte, $\chi^{SLI[2]}$, sind kleiner als die entsprechenden $\chi^{SLI[1]}$. Dies wird durch die beschriebene Modifikation der Qualitätsfunktion erreicht. Zu den Werten von $\chi^{SLI[2]}$ ist noch anzumerken, daß diese in den Regionen R1 und R5 für andere Kombinationen von Eingabemodellen minimal sind als für $\chi^{SLI[1]}$.

Die Ergebnisse der Bewertung der Eingabemodelle durch die Abweichungswerte, $\chi^{SLI[2]}$, wird in Tabelle 5.4 zusammengefaßt. Dabei sind für die Regionen R1, ..., R5 jeweils diejenigen Eingabemodellkombinationen ausgewählt, für die $\chi^{SLI[2]}$ minimal ist. Diese Kombinationen werden in Abschnitt 7.1 herangezogen, um den Einfluß der pleistozänen Eisschildevolution auf die Pegeldata für jede Region getrennt zu berechnen.

Die regionale Variabilität der optimalen Eingabemodelle erklärt sich zum Teil durch laterale Variationen der Viskosität (Abschnitt 3.1) und Lithosphärenmächtigkeit (Abschnitt 5.1). Weiterhin sind die betrachteten Eismodelle in unterschiedlichen Gebieten von unterschiedlicher Qualität, was die regionale Variation der optimalen Eingabemodelle verstärkt.

Tabelle 5.4: Optimale Eingabemodellkombinationen für die Regionen R1, ..., R5 mit Hilfe von $\chi^{SLI[2]}$.

Region	R1	R2	R3	R4	R5
Viskositätsmodell	VMI	VM1	VMA	VMF	VM1
Eismodell	SCAN	NAWI	NAWI	SCAN	SCAN

6. Pegeldaten

6.1 Pegelstationen und Datenreihen

Neben den in Abschnitt 1.2 angesprochenen Wassermarken wurde im 19. Jahrhundert in Skandinavien begonnen Pegelstationen aufzubauen. Auch in anderen wichtigen europäischen Häfen, wie z. B. Amsterdam, Brest und Marseille, wurden Pegelstationen eingerichtet. Die registrierten Zeitreihen sind für verschiedene Untersuchungen herangezogen worden. In Skandinavien sind Pegelzeitreihen unter anderem zur Beobachtung der postglazialen Landhebung verwendet worden. Desweiteren ist die Beobachtung der lokalen Gezeiten in vielen Häfen von primärem Interesse (Gezeitenpegel). Diese unterschiedliche Verwendung der Pegeldaten ist möglich, da Pegelzeitreihen mit der aktuellen Höhe des Meeresspiegels bezüglich eines Referenzpunktes eine Vielzahl verschiedener Beiträge messen. Zu einem geht die Vertikalverschiebung des Referenzpunktes in die Meßdaten ein, so daß in Bezug zum mittleren Meeresspiegel aus langen Pegelzeitreihen die Vertikalbewegung der Pegelstation bestimmt werden kann. Zum anderen wird bezüglich des Referenzpunktes der Pegelstation die Beobachtung der Gezeitenamplituden möglich. Desweiteren tragen Änderungen im globalen Wasservolumen zur Variation der Pegelmeßwerte bei. Diese werden durch die Expansion bei Temperaturvariationen (thermosterischer Effekt), durch Variationen im Salzgehalt (halioosterischer Effekt) und durch die Variation in der Kapazität der Wasserspeicherung auf den Kontinenten (Oberflächenwasser wie Stauseen, Flüsse und Sumpfgebiete sowie Eisschilde, Gletscher und Schneebedeckung) und im Grundwasser bedingt (Church et al., 2001). Die Pegelmeßwerte werden auch durch die Variation der Luftdruckverteilung um die Station beeinflusst. Zum einen wird der Meeresspiegel direkt durch die Auflast des Luftdrucks deformiert, was als IB-Effekt (Inverser-Barometer-Effekt) bezeichnet wird, und zum anderen kann durch Wind das Wasser in bzw. aus Ozeangebieten gedrängt werde, was als Windstau bezeichnet wird.

Ein großes Interesse besteht darin, aus den Datenreihen der verschiedenen Pegelstationen den globalen mittleren Meeresspiegelanstieg zu bestimmen, der ein Maß für die Variation des Wasservolumens in den Ozeanen darstellt. Aufgrund der unterschiedlichen Beiträge zu den Pegelmeßwerten, die nur teilweise die Variation des Wasservolumens widerspiegeln, muß beachtet werden, welche Pegelstationen berücksichtigt werden dürfen. In Douglas (1991, 1997) werden Kriterien zur Auswahl von Pegelstationen entwickelt und Hinweise zur Bestimmung des globalen Meeresspiegelanstiegs aus den entsprechenden Datenreihen gegeben. Die Anforderungen an die Pegelstationen und an deren Datenreihen sind in folgenden Kriterien zusammengefaßt (siehe Douglas, 1997, S. 282):

- Mindestlänge der Datenreihe von 60 a,
- Lage der Pegelstation entfernt von konvergenten Plattenrändern,
- Vollständigkeit der Datenreihe, von über 80 %,

- weitgehende Übereinstimmung der Datenreihen benachbarter Pegelstationen im niederfrequenten Bereich,
- Lage der Pegelstationen entfernt von pleistozänen Eisschilden.

Durch die vorgegebene Mindestlänge sowie weitgehende Vollständigkeit der Zeitreihen soll die Minimierung des Einflusses von dekadischen Variationen auf die Berechnung von Ausgleichsgeraden ermöglicht werden. Die Restriktion auf Pegelstationen, die entfernt von tektonisch aktiven und postglazial relaxierenden Gebieten liegen, soll den Einfluß von Vertikalbewegungen auf die abgeleiteten linearen Trends minimieren. Mit dem Vergleich von Datenreihen benachbarter Pegelstationen wird eine zusätzliche Qualitätskontrolle der Datenreihen eingeführt. Entsprechend anderer Fragestellungen ändern sich die Auswahlkriterien. Bei Holgate & Woodworth (2004) wird z. B. zur Untersuchung der Beschleunigung des Meeresspiegelanstiegs in der letzten Dekade nur noch das Kriterium angewandt, daß Zeitreihen der Pegelstationen in den letzten 55 a mindestens 38 a Daten enthalten müssen. Daneben werden allerdings Korrekturen für die postglaziale Landhebung, den Einfluß von Erdbeben und anderen lokalen Faktoren, wie z. B. die Vertikalbewegung durch Wassergewinnung, angebracht. Ein Rückblick auf die unterschiedlichen Methoden bei der Bestimmung des globalen Meeresspiegelanstiegs wird in Ekman (2000) gegeben. Aufgrund der beschriebenen Probleme bei der Bestimmung des globalen Meeresspiegelanstiegs mit Hilfe von Pegeldaten werden in den letzten Jahren zusätzlich Altimetriedaten von Satelliten herangezogen (z. B. Cabanes et al., 2001b).

6.2 Berücksichtigte Pegelstationen

In dieser Arbeit werden ausschließlich Datenreihen von Monatsmittelwerten der Pegelstationen verwendet, die der Datenbasis des “Permanent Service for Mean Sea Level” (PSMSL) am Proudman Oceanographic Laboratory¹ entnommen sind. Soweit vorhanden werden die Zeitreihen des sogenannten “Revised Local Reference (RLR) System” verwendet, da diese Zeitreihen vom PSMSL bezüglich eines gemeinsamen Bezugsniveaus für alle Pegel korrigiert werden². Für die extrem langen Zeitreihen der niederländischen Pegelstationen liegen die Daten nicht im RLR vor, sondern im sogenannten metrischen System, in dem die Monatsmittelwerte direkt von den Pegelbetreibern zu Verfügung gestellt werden. Diese Datenreihen weisen neben Längen von mehr als 80 a auch besondere Qualität auf und werden, ebenso wie die der deutschen Station Travemünde, zusätzlich herangezogen. Dies erfolgt im Hinblick auf das Interesse am linearen Trend des Meeresspiegelanstiegs, was gestattet, daß relative Änderungen an den Pegelstationen betrachtet werden können (Abschnitt 6.3). Aus der Datenbasis des PSMSL werden aus den im vorausgehenden Abschnitt genannten Gründen nur Pegeldatenreihen verwendet, deren Länge zumindest 45 a beträgt. Die Datenbasis des PSMSL umfaßt mehrere hundert Stationen mit Datenreihen der Monatsmittelwerte der Pegel, wobei die Zeitreihen in der Länge von einigen Jahren bis zu 183 a variieren. Die 168 Pegelstationen mit Zeitreihen länger als 45 a sind in Tabelle D.1 mit den

¹Für weitere Informationen über die Datenbasis des PSMSL wird auf <http://www.pol.ac.uk/psmsl/> verwiesen.

²Weitere Informationen zur Bearbeitung der Datenreihen der Monatsmittelwerte im RLR sind unter <http://www.pol.ac.uk/psmsl/datainfo/psmsl.hel> und bei Woodworth et al. (1990) zu finden.

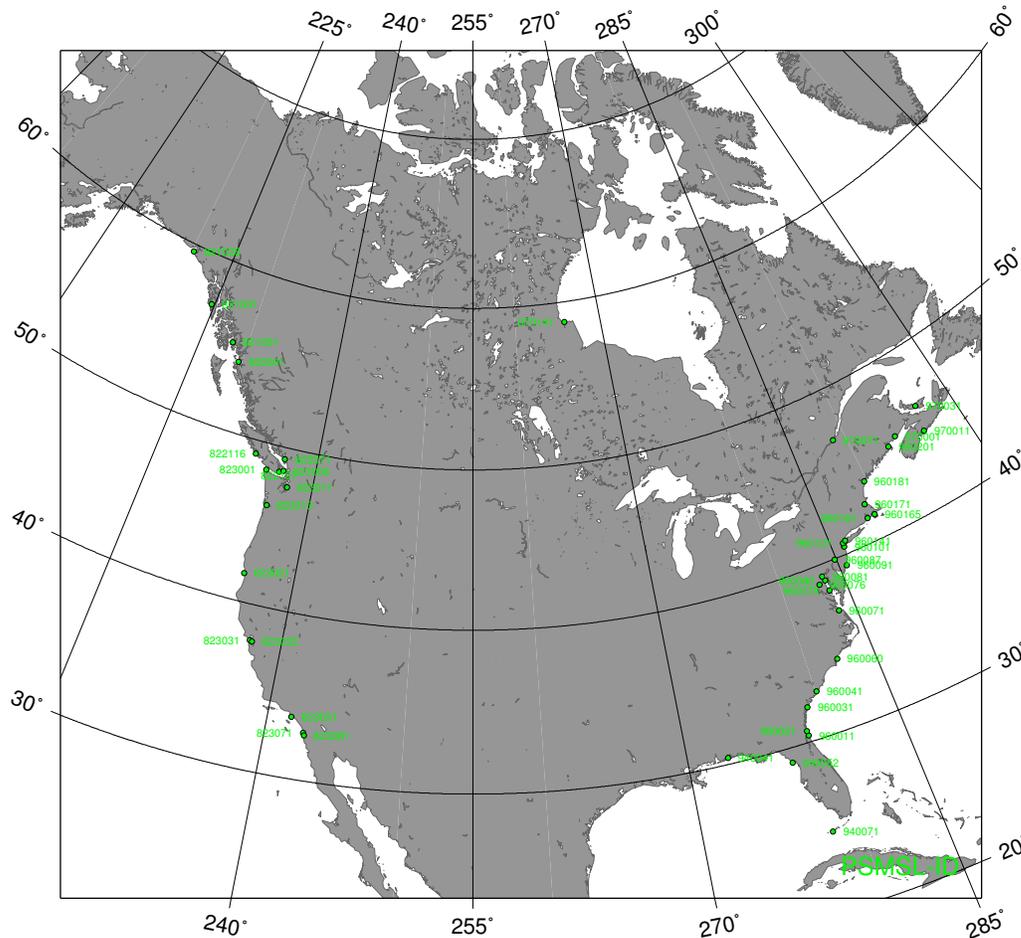


Abbildung 6.2: Verteilung der ausgewählten Pegelstationen Nordamerikas gekennzeichnet durch die zugehörige PSMSL-Identifikation (PSMSL-ID).

entsprechenden geographischen Koordinaten gelistet. Abbildung 6.1 zeigt die globale Verteilung der ausgewählten Pegelstationen, die an den Küsten Europas und Nordamerikas konzentriert sind. Für diese Gebiete sind in Abbildung 6.2 und 6.3 Kartenausschnitte gezeigt. Die Mindestlänge der Zeitreihen von 45 a stellt einen Kompromiß dar zwischen möglichst langem Zeitintervall und möglichst großer Anzahl von Pegelstationen. Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben besteht bei kürzeren Zeitreihen die Gefahr, bei der Berechnung einer Ausgleichsgeraden nicht alle langperiodischen Gezeiten zu eliminieren. Im folgenden wird beschrieben, nach welcher Methode die linearen Trends berechnet werden, und ihre Abhängigkeit vom gewählten Zeitintervall untersucht.

6.3 Bearbeitung der Pegeldaten

Für jede Pegelstation aus Tabelle D.1 wird ein sogenanntes LTA-Diagramm³ erstellt. Hierzu werden lineare Regressionen für fünfjährige Teilintervalle der Zeitreihe durchgeführt, wobei das Berechnungsintervall um jeweils einen Monat verschoben wird, bis die gesamte Zeitreihe überdeckt ist. Im nächsten

³Abgeleitet von "Linear-Trend-Analysis".

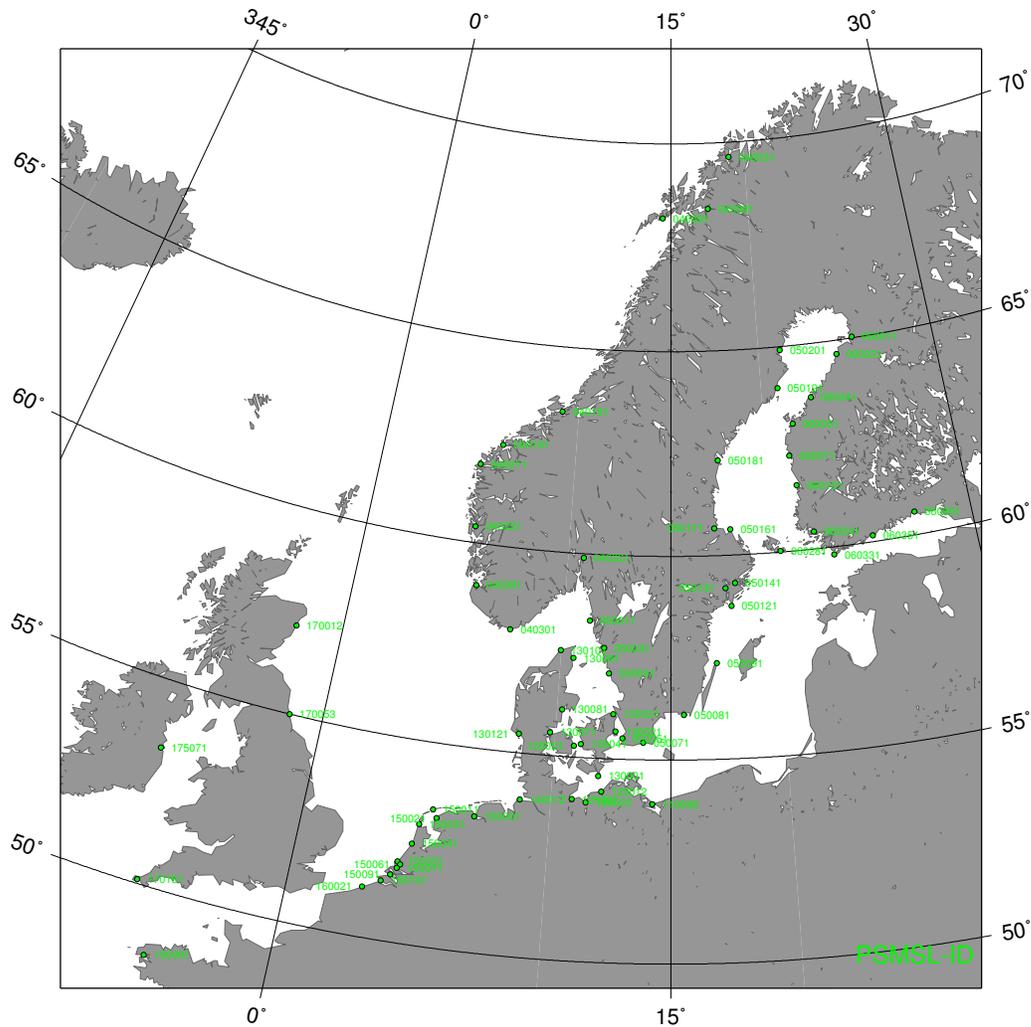


Abbildung 6.3: Verteilung der ausgewählten Pegelstationen Nordeuropas gekennzeichnet durch die zugehörige PSMSL-Identifikation (PSMSL-ID).

Schritt wird das Berechnungsintervall um zwei Monate erweitert und die obige Prozedur wiederholt. Die verwendeten Berechnungsintervalle mit der Länge Δt und dem Mittelpunkt t^{MP} sind wie folgt definiert:

$$\left[t^{\text{MP}} - \frac{\Delta t}{2}; t^{\text{MP}} + \frac{\Delta t}{2} \right]. \quad (6.1)$$

Für jedes Berechnungsintervall, Δt , lassen sich im Bereich von 5 a bis zur maximalen Länge der Zeitreihe, Δt_{max} , für jeden Mittelpunkt, t^{MP} , lineare Trends, s^{L} (Steigungen der Regressionsgeraden), und die zugehörige Standardabweichung, ε^{L} , berechnen. Der linearen Regression liegt der Ansatz

$$s^{\text{P}}(t) = s^{\text{L}} t + \alpha \quad (6.2)$$

GENOVA (PSMSL-ID 250011)

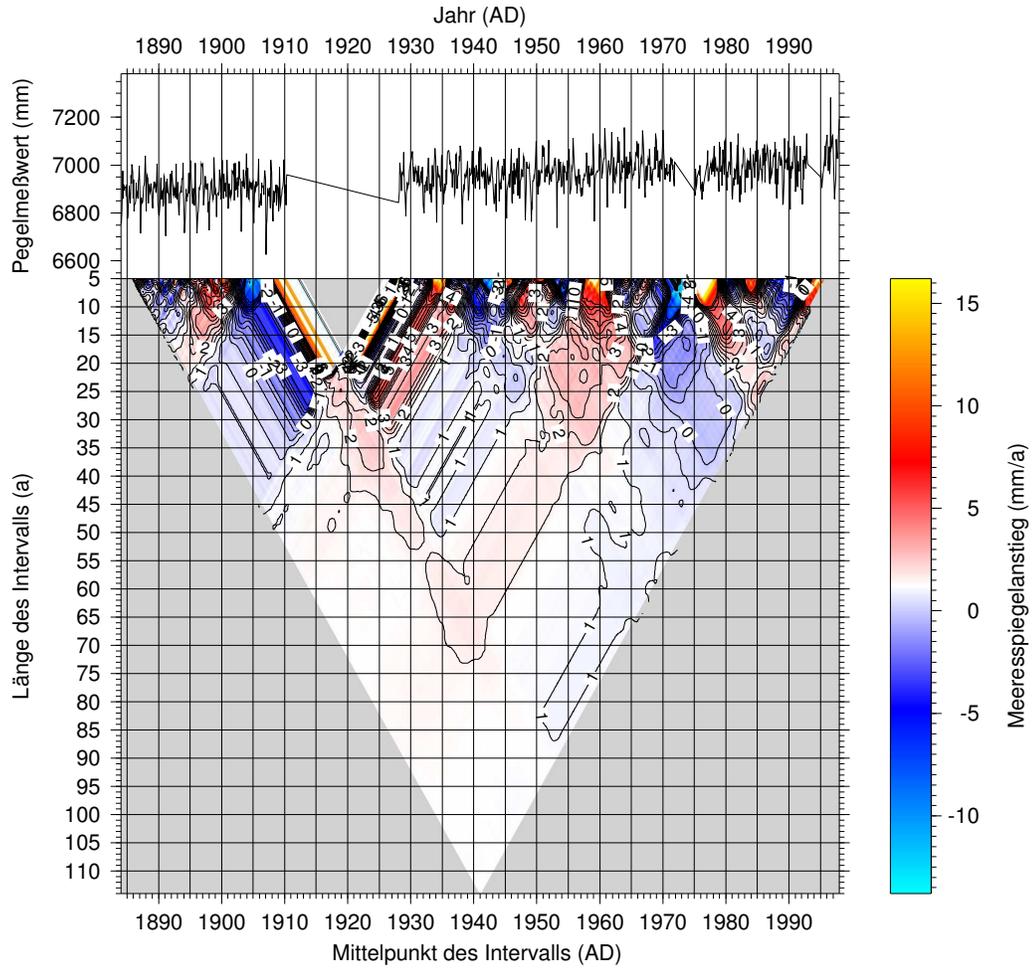
 $\dot{s}^L = 1.21 \pm 0.06 \text{ mm/a}$ 

Abbildung 6.4: LTA-Diagramm für die Pegelstation Genova (PSMSL-ID 250011) und das Zeitintervall 1884–1997. Im oberen Teil der Abbildung ist die Zeitreihe der Pegelmeßwerte, s^P , gezeigt. Im unteren Teil der Abbildung ist der lineare Trend, \dot{s}^L , als Funktion der Länge, Δt , und des Mittelpunktes, t^{MP} , des Zeitintervalls mit Hilfe der Farbskala dargestellt.

zugrunde, wobei s^P den Pegelmeßwert bezeichnet. Für den linearen Trend, \dot{s}^L , den Achsenabschnitt, α , und die Standardabweichung, ε^L , finden sich folgende Ausdrücke (z. B. Bronstein et al., 1997, S. 717):

$$\dot{s}^L(\Delta t, t^{\text{MP}}) = \frac{N \sum_{n=1}^N s_n^P t^n - \sum_{n=1}^N s_n^P \sum_{n=1}^N t^n}{N \sum_{n=1}^N (t^n)^2 - \left(\sum_{n=1}^N t^n \right)^2}, \quad (6.3)$$

$$\alpha = \frac{\sum_{n=1}^N s_n^P - \dot{s}^L \sum_{n=1}^N t^n}{N}, \quad (6.4)$$

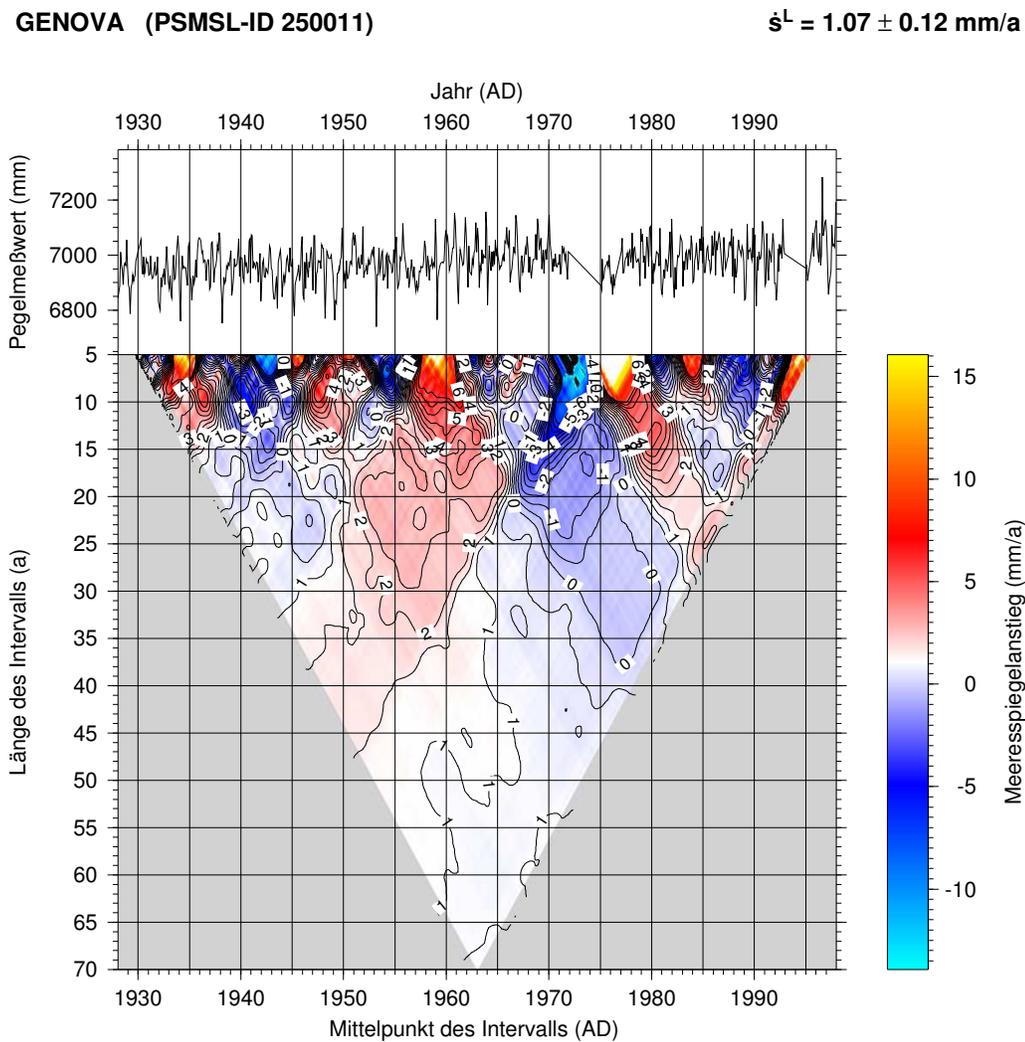


Abbildung 6.5: LTA-Diagramm für die Pegelstation Genova (PSMSL-ID 250011) und das Zeitintervall 1928–1997.

$$\varepsilon^L = \sqrt{\frac{N\sigma^2}{N \sum_{n=1}^N (t^n)^2 - \left(\sum_{n=1}^N t^n\right)^2}}, \quad (6.5)$$

wobei

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (s_n^P - \dot{s}^L t^n - \alpha)^2}{N - 2}}. \quad (6.6)$$

Hier bezeichnet s_n^P die Pegelmeßwerte zur Zeit t^n und N deren Anzahl im entsprechenden Berechnungsintervall gemäß (6.1).

Abbildung 6.4 zeigt das LTA-Diagramm für die Pegelstation Genova (PSMSL-ID 250011) für das Zeitintervall 1884–1997. Auffällig ist der Einfluß der Datenlücke der Jahre 1910–1927 auf die linearen Trends. Desweiteren ist auf die unterschiedlichen linearen Trends vor und nach der Datenlücke hinzuwei-

Tabelle 6.1: Pegelstationen und zugehörige PSMSL-Identifikation mit Angabe von vollständigem und verkürztem Zeitintervall.

PSMSL-ID	Stationsname	Vollständiges Zeitintervall	Verkürztes Zeitintervall
040081	Narvik	1928–2001	1948–2001
040191	Ålesund	1945–2001	1951–2001
040221	Bergen	1883–2001	1928–2001
040261	Stavanger	1881–2001	1928–2001
040321	Oslo	1885–2001	1928–2001
150041	IJmuiden	1871–2002	1920–2002
160021	Oostende	1937–2000	1945–2000
210031	Lagos	1908–1999	1908–1987
250011	Genova	1884–1997	1928–1997
500101	Vishakhapatnam	1937–1999	1937–1995
680181	Williamstown	1894–2000	1944–2000
680471	Fremantle	1897–2000	1915–2000
690022	Lyttelton II	1924–2000	1924–1988
940052	Cedar Key II	1938–2001	1938–1997
950011	St Georges	1932–1999	1944–1999
960021	Fernandina	1897–2001	1939–2001
960121	New York	1856–2001	1893–2001
970001	Saint John	1914–1999	1939–1999
970011	Halifax	1895–2002	1920–2002
970071	Quebec	1910–1997	1938–1994

sen. Für Berechnungsintervalle von mindestens 90 a ergibt sich ein linearer Trend von $\sim 1.20 \text{ mm a}^{-1}$. Wird das LTA-Diagramm für das verkürzte Intervall von 1928–1997 (Abbildung 6.5) betrachtet, so ergibt auch sich für Berechnungsintervalle von mehr als 50 a wiederum ein einheitlicher linearen Trend, der allerdings nur noch $\sim 1.00 \text{ mm a}^{-1}$ beträgt.

Neben der Zeitreihe der Pegelstation Genova sind auch in etlichen weiteren Zeitreihen Datenlücken zu verzeichnen. Die zugehörigen Pegelstationen mit den vollständigen und den verkürzten Zeitreihen sind in Tabelle 6.1 gelistet. Die Zeitreihen sind so gekürzt, daß die zum Beginn oder zum Ende auftretende Datenlücke nicht mehr berücksichtigt ist. Die jeweiligen LTA-Diagramme für die verkürzten Datenreihen der Pegelstationen in Tabelle 6.1 sowie für die aller anderen ausgewählten Pegelstationen (Abschnitt 6.2 und Tabelle D.1) sind in Anhang D.2 gezeigt.

Die Kriterien zur Auswahl von Pegelstationen für die weitere Bearbeitung sind abhängig von der zu beantwortenden Fragestellung. In dieser Arbeit werden die Zeitreihen der Pegelstationen zur Bestimmung des globalen Meeresspiegelanstiegs verwendet. Bisher wurde nur die Länge der Zeitreihe von mindestens 45 a als Kriterium zur Auswahl der Pegelstationen verwendet. Da an den Pegeln nur relative Meßwerte aufgezeichnet werden, nämlich die Differenzen zwischen dem aktuellen Meeresspiegel und dem Bezugspunkt des Pegels, sind in den Zeitreihen verschiedene Beiträge enthalten. Wie schon in Abschnitt 6.2 beschrieben, ist hier neben der Variation des Meeresspiegels, die sich aus verschiedenen Beiträgen zusammensetzt, auch die Vertikalverschiebung des Bezugspunktes des Pegels zu nennen. In Kapitel 2 und 4 ist eine Methode aufgezeigt, den Beitrag der Vertikalverschiebung durch die postglaziale Landhebung zu berechnen, so daß die Meßwerte hinsichtlich dieses Anteils reduziert werden können. Die Beiträge zur Vertikalverschiebung, die durch andere Prozesse bedingt werden, z. B. Tektonik oder

Tabelle 6.2: Ausgeschlossene Pegelstationen und zugehörige PSMSL-Identifikation.

PSMSL-ID	Stationsname	Grund des Ausschlusses
010001	Reykjavik	Tektonik (REYK: $\dot{u} = -4.00 \pm 0.22 \text{ mm a}^{-1}$) [†]
025001	Barentsburg	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim 1.14 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030018	Murmansk	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim 0.95 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030310	Amderma	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim 1.00 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030447	Tiski	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim -0.77 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030480	Sannikova	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim -0.31 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030535	Ambarchik	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim 0.51 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030560	Aion	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim 0.76 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030620	Vrangelia	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim 1.00 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
030630	Vankarem	Luftdruckvariation (Beitrag $\sim 1.13 \text{ mm a}^{-1}$) [‡]
270054	Venezia	Vertikalbewegung (VENE: $\dot{u} = -6.56 \pm 1.36 \text{ mm a}^{-1}$) [†]
280011	Bakar	Separates Meeresbecken
295021	Bourgas	Separates Meeresbecken
295051	Varna	Separates Meeresbecken
298041	Sevastopol	Separates Meeresbecken
300001	Tuapse	Separates Meeresbecken
305021	Poti	Separates Meeresbecken
305031	Batumi	Separates Meeresbecken
545001	Ko Taphao Noi	Tektonik
600021	Ko Lak	Tektonik
600051	Ko Sichang	Tektonik
630021	Petropavlovsk	Tektonik
642061	Mera	Tektonik
642091	Aburatsubo	Tektonik
645011	Hosojima	Tektonik
647071	Wajima	Tektonik
660011	Manila	Tektonik (PIMO: $\dot{u} = -5.52 \pm 0.37 \text{ mm a}^{-1}$) [†]
680391	Port Pirie	Ozeandynamik/Luftdruckvariation
760061	Hilo Hawaii Island	Tektonik (HILO: $\dot{u} = 2.32 \pm 2.03 \text{ mm a}^{-1}$) [†]
820011	Adak	Tektonik
821026	Yakutat	Tektonik
821031	Sitka	Tektonik
821044	Juneau	Tektonik
821051	Ketchikan	Tektonik
822001	Prince Rupert	Tektonik
822071	Vancouver	Tektonik
822101	Victoria	Tektonik (ALBH: $\dot{u} = 3.42 \pm 0.19 \text{ mm a}^{-1}$) [†]
822116	Tofino	Tektonik (UCLU: $\dot{u} = 36.28 \pm 1.44 \text{ mm a}^{-1}$) [†]
823001	Neah Bay	Tektonik
823006	Friday Harbor	Tektonik
823011	Seattle	Tektonik
823013	Astoria	Tektonik
823021	Crescent City	Tektonik
845012	La Libertad II	Tektonik
850012	Antofagasta 2	Tektonik
940001	Port Isabel	Ozeandynamik
970141	Churchill	Lokale sterische Effekte

[†]: Geschwindigkeit der Vertikalverschiebung abgeleitet aus den wöchentlichen IGS-Lösungen der GPS-Messungen. Die Geschwindigkeiten und Fehler sind mit den Abkürzungen des IGS für die Stationen gekennzeichnet.

[‡]: Summe der Beiträge zur Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs durch Windstau, IB-Effekt, Evaporation und Niederschläge. Die Werte sind Proshutinsky et al. (2004, Tabelle 3) entnommen.

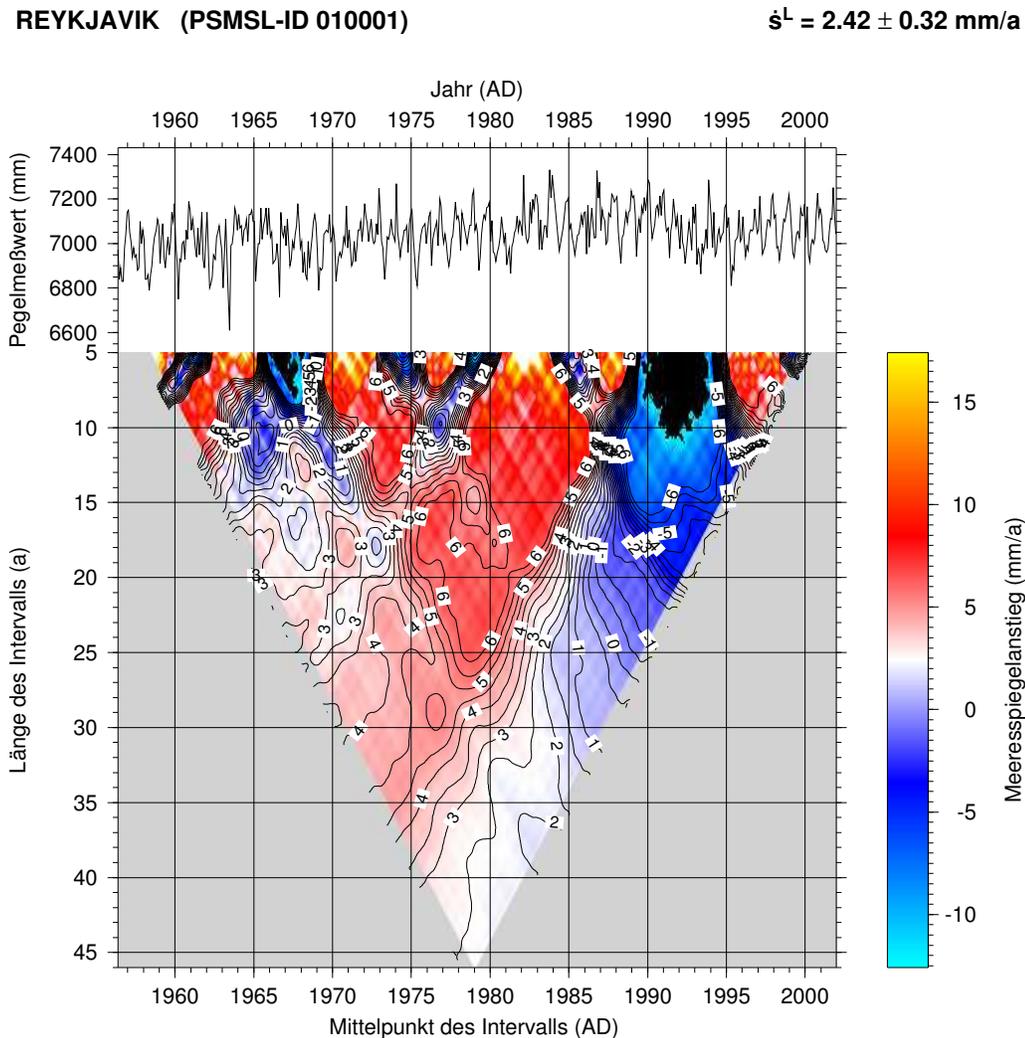


Abbildung 6.6: LTA-Diagramm für die Pegelstation Reykjavik (PSMSL-ID 010001) und das Zeitintervall 1956–2001.

Grundwasserextraktion, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht bestimmt. Daher muß bei der Auswahl der Pegelstation darauf geachtet werden, Pegelstationen, die durch solche Prozesse beeinflusst werden, von der weiteren Betrachtung auszuschließen. Desweiteren wird der Meeresspiegel durch Luftdruckvariationen und Winde deformiert, wobei diese Variation nicht auf eine Volumenänderung in den Ozeanen zurückzuführen ist. Auch Pegelstationen, deren Zeitreihen durch IB-Effekt oder Windstau beeinflusst werden, müssen daher von der Auswertung ausgeschlossen werden.

An dem jeweiligen LTA-Diagramm für die entsprechende Pegelstation ist zu erkennen, ob der lineare Trend, \dot{s}^L , mit dem gewählten Intervall, Δt , oder mit dem Mittelpunkt, t^{MP} , variiert. Sind die Variationen signifikant, stellt sich die Frage, durch welche der oben genannten Phänomene diese verursacht werden.

In Tabelle 6.2 sind die Pegelstationen von Tabelle D.1 gelistet, die eine signifikante Variation von \dot{s}^L aufweisen und für die Untersuchung des globalen Meeresspiegelanstiegs nicht mehr berücksichtigt werden. Die aus GPS-Messungen abgeleiteten Geschwindigkeit der Vertikalverschiebung, die in diesem Abschnitt angegeben werden, sind Ergebnisse der wöchentlichen IGS-Lösungen (International GPS

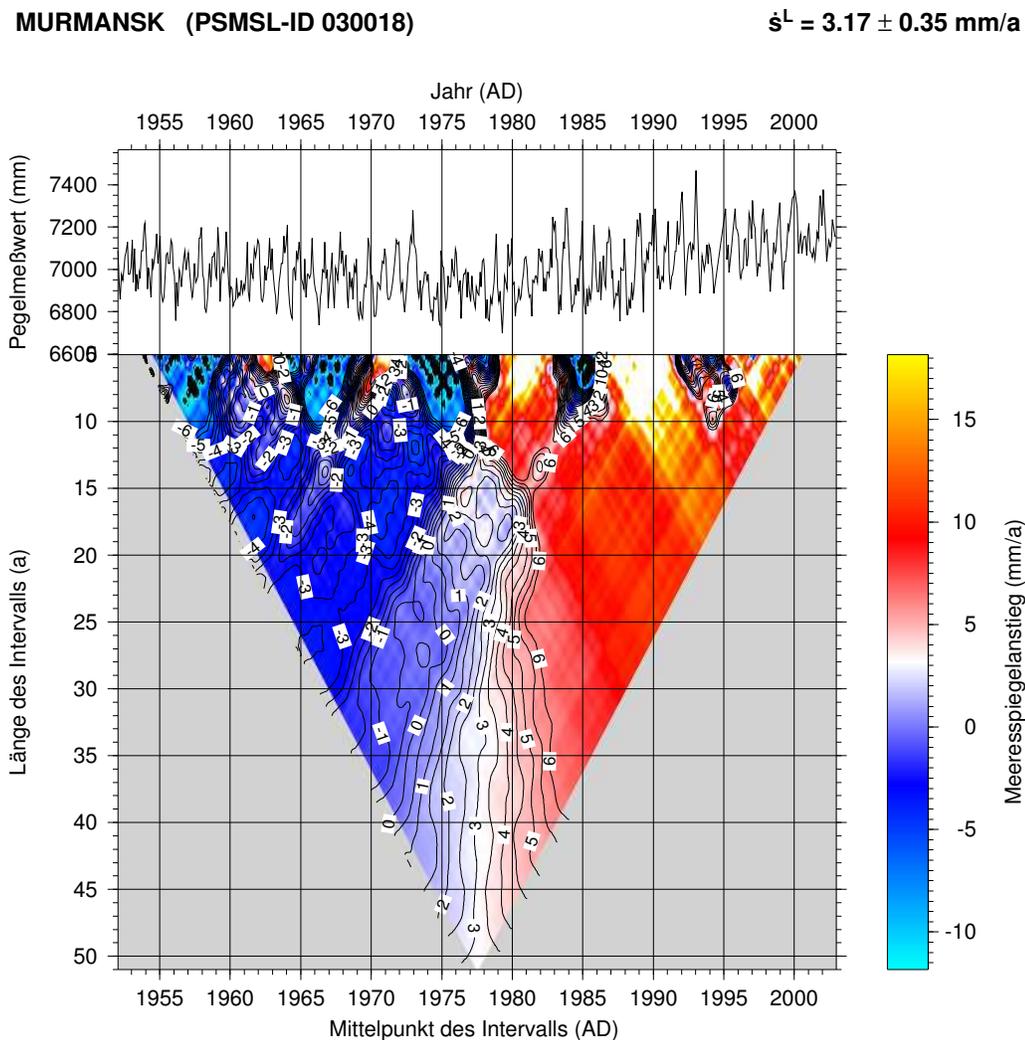


Abbildung 6.7: LTA-Diagramm für die Pegelstation Murmansk (PSMSL-ID 030018) und das Zeitintervall 1952–2002.

Service)⁴. Es soll hier kurz auf die Begründung des Ausschlusses dieser Pegelstationen eingegangen werden.

Abbildung 6.6 zeigt das LTA-Diagramm für die Pegelstation Reykjavik (PSMSL-ID 010001). Der veränderte Meeresspiegelanstieg für die letzten 10 a ist deutlich zu erkennen. Für nahezu alle Berechnungsintervalle verringert sich daher der lineare Trend des Meeresspiegelanstiegs signifikant, wenn die letzten 10 a in die Berechnung eingehen. Selbst bei einem Berechnungsintervall von 40 a verringert sich \dot{s}^L in diesem Fall von $\sim 3 \text{ mm a}^{-1}$ auf $\sim 2 \text{ mm a}^{-1}$. Die Pegelstation Reykjavik liegt im tektonisch aktiven Gebiet des mittelozeanischen Rückens. Die beobachteten Vertikalverschiebungen (GPS-Messungen) sind somit zum Teil auf tektonische Prozesse zurückzuführen, weswegen diese Pegelstation ausgeschlossen wird.

In Abbildung 6.7 ist das LTA-Diagramm für die Pegelstation Murmansk (PSMSL-ID 030018) ge-

⁴Die hier angegebenen Geschwindigkeiten der Vertikalverschiebung sind der “MIT Global Time Series Web Page” (http://www-gpsg.mit.edu/~tah/MIT_IGS_AAC/index2.html) entnommen.

VENEZIA (PSMSL-ID 270054)

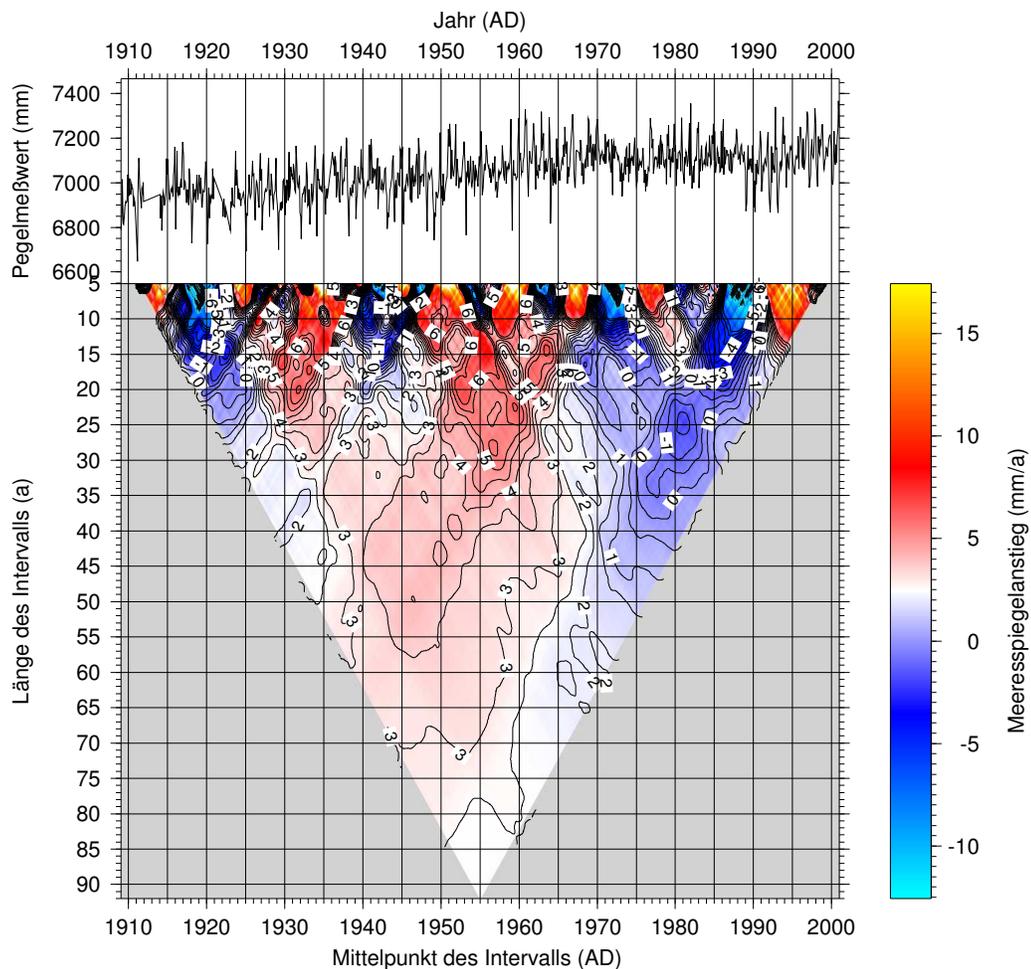
 $\dot{s}^L = 2.44 \pm 0.10 \text{ mm/a}$ 

Abbildung 6.8: LTA-Diagramm für die Pegelstation Venezia (PSMSL-ID 270054) und das Zeitintervall 1909–2000.

zeigt, in dem für alle Zeitintervalle, Δt , eine deutliche Abhängigkeit des linearen Trends vom Mittelpunkt des Intervalls, t^{MP} , zu erkennen ist. Bei einem Berechnungsintervall von $\Delta t = 40 \text{ a}$ variieren die linearen Trends zwischen 0 mm a^{-1} und 6 mm a^{-1} . Proshutinsky et al. (2004) untersuchten für alle Pegelstationen der russischen Arktis die säkulare Meeresspiegeländerung. Für die meisten Pegelstationen konnte ein signifikanter Beitrag zum linearen Trend des Meeresspiegelanstiegs durch meteorologische Einflüsse aufgezeigt werden. Dieser Beitrag besteht aus den Meeresspiegeländerungen, die durch den IB-Effekt, Windstau und die Differenz von Niederschlag und Evaporation verursacht werden. In Tabelle 6.2 werden die Pegelstationen der russischen Arktis⁵ gelistet, die wie Murmansk durch signifikante Variationen von \dot{s}^L auffallen. Zusätzlich sind die in Proshutinsky et al. (2004) berechneten Beiträge durch Luftdruckvariationen angegeben. Die LTA-Diagramme für die übrigen Pegelstationen sind in Anhang D.2 angefügt.

⁵Barentsburg (PSMSL-ID 025001), Murmansk (PSMSL-ID 030018), Amderma (PSMSL-ID 030310), Tiski (PSMSL-ID 030447), Sannikova (PSMSL-ID 030480), Ambarchik (PSMSL-ID 030535), Aion (PSMSL-ID 030560), Vrangelia (PSMSL-ID 030620) & Vankarem (PSMSL-ID 030630).

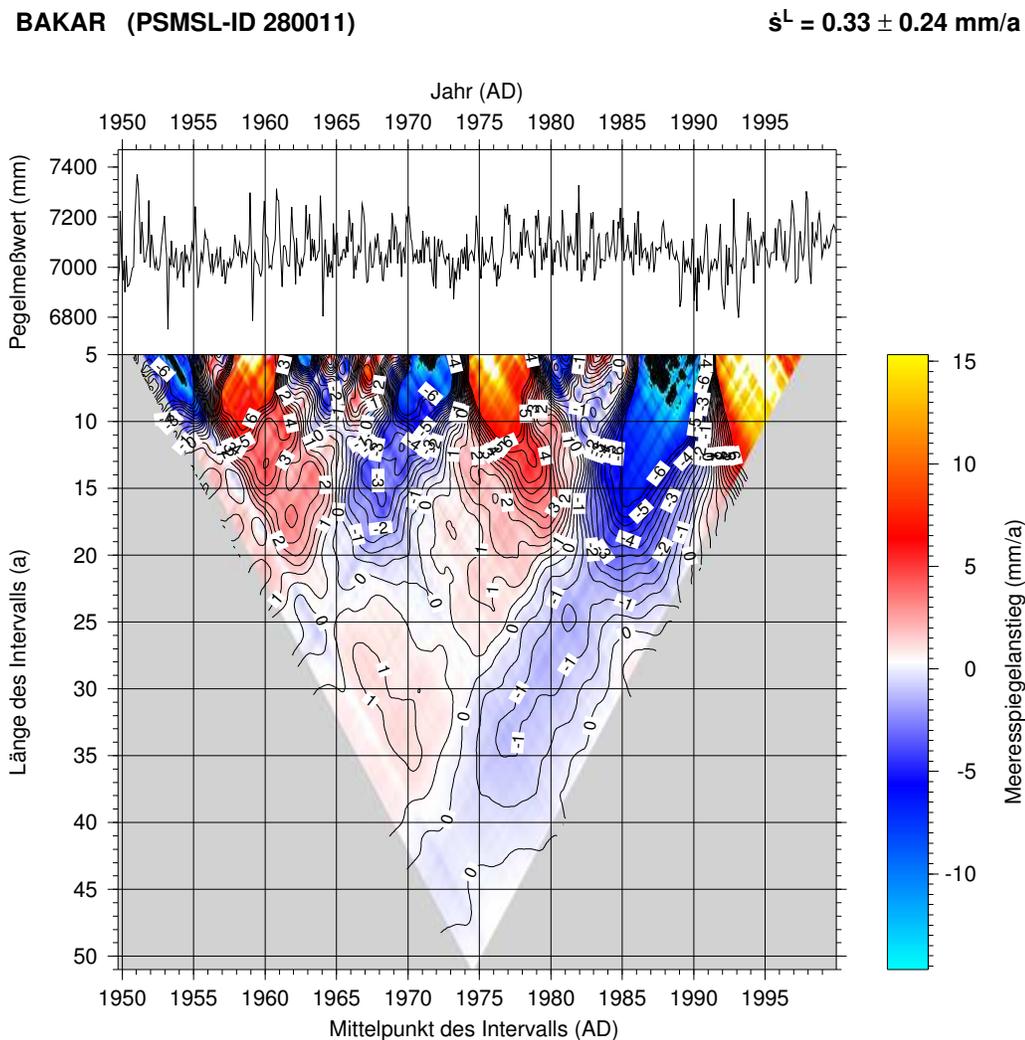


Abbildung 6.9: LTA-Diagramm für die Pegelstation Bakar (PSMSL-ID 280011) und das Zeitintervall 1909–2000.

Die Pegelstation Venezia (PSMSL-ID 270054), deren LTA-Diagramm in Abbildung 6.8 gezeigt ist, weist eine große Variabilität des linearen Trends auf. Zwischen den Jahren 1930 und 1970 ist für $\Delta t = 40 \text{ a}$ ein Anstieg von \dot{s}^L von 2 mm a^{-1} auf 4 mm a^{-1} zu verzeichnen. Anschließend fällt der lineare Trend auf $< 1 \text{ mm a}^{-1}$. Diese Variation ist größtenteils auf Vertikalverschiebungen verursacht durch Grundwasserextraktion zurückzuführen. Nachdem 1969 das Abpumpen gestoppt wurde, reduzierte sich das Absinken, d. h. der Anstieg von \dot{s}^L , signifikant (Tosi et al., 2002). Die Datenreihe der Pegelstation kann nicht hinreichend korrigiert werden, weshalb die Station ausgeschlossen werden muß.

Abbildung 6.9 zeigt das LTA-Diagramm der Pegelstation Bakar (PSMSL-ID 280011), in dem eine signifikante Änderung von \dot{s}^L für die letzten 10–15 a zu erkennen ist. Lambeck et al. (2004) untersuchten die tektonische Stabilität der italienischen Küsten und betrachteten dabei auch Teile die kroatischen Adria. Für die Küsten der nördlichen Adria ergeben sich tektonisch bedingte Absinkengeschwindigkeiten von $\sim 0.3 \text{ mm a}^{-1}$. Dies kann jedoch nicht die kurzperiodischen Variationen im Meeresspiegel hervorrufen, die in Abbildung 6.9 zu erkennen sind. Diese sind möglicherweise auf Luftdruckvariationen

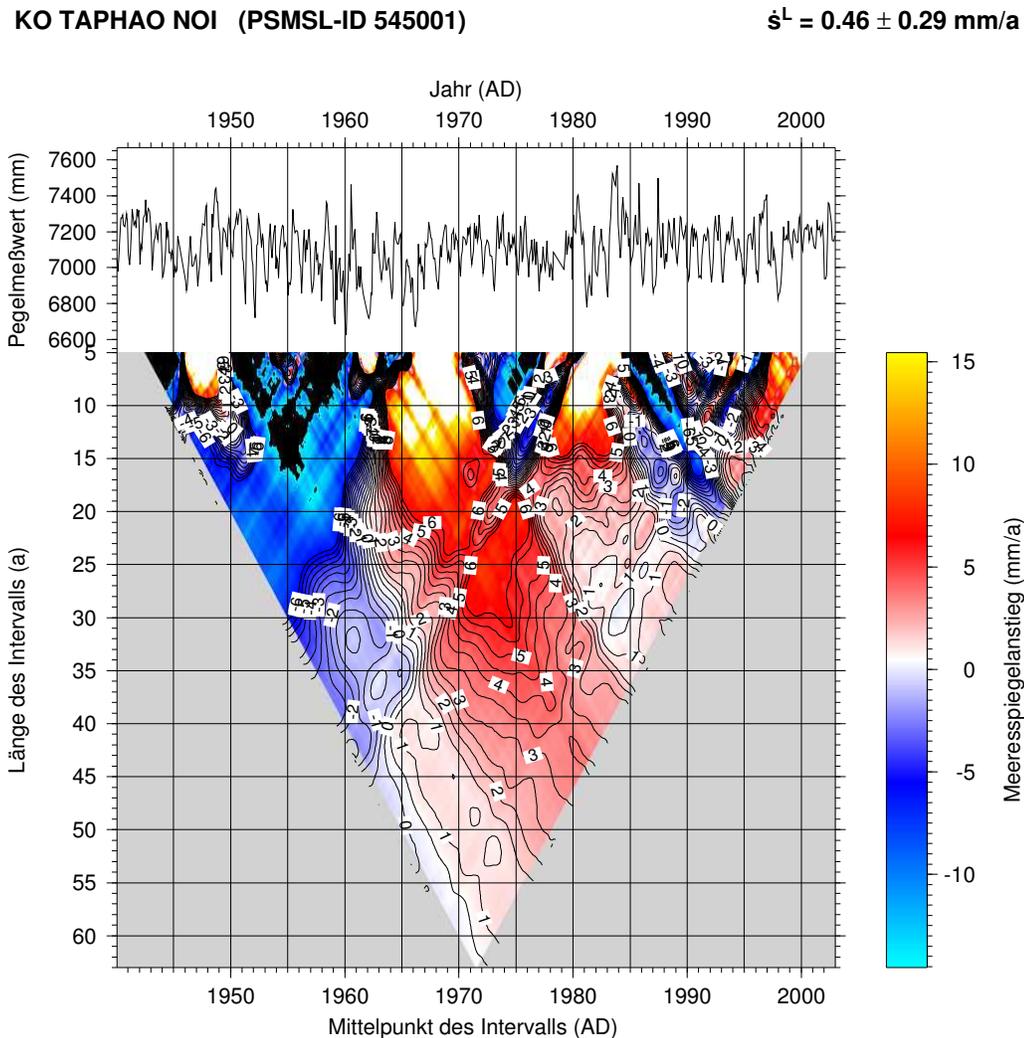


Abbildung 6.10: LTA-Diagramm für die Pegelstation Ko Taphao Noi (PSMSL-ID 545001) und das Zeitintervall 1940–2002.

zurückzuführen, wie sie von Trupin & Wahr (1990) untersucht wurden.

Ähnliche kurzzeitige Variationen finden sich in den LTA-Diagrammen der Pegelstationen an der Küste des Schwarzen Meeres⁶. Douglas (1991) gibt als eine mögliche Ursache die Separation des Schwarzen Meeres an, in dem lokale Effekte zur Variation des Meeresspiegels führen, die nicht mit denen im offenen Ozean korrelieren.

Beispielhaft für die Pegelstationen an den Küsten Thailands⁷ ist in Abbildung 6.10 das LTA-Diagramm für die Pegelstation Ko Taphao Noi (PSMSL-ID 545001) gezeigt. Eine mögliche Ursache für die Variation von \dot{s}^L ist nach Yanagi & Akaki (1994) die Subduktion im Java Graben. Aufgrund dieses tektonischen Einflusses werden alle thailändischen Pegelstationen ausgeschlossen.

In Abbildung 6.11 ist das LTA-Diagramm für die Pegelstation Petropavlovsk (PSMSL-ID 630021) gezeigt, die auf der Kamchatka-Halbinsel an der russischen Pazifikküste liegt. Für \dot{s}^L wechseln sich für

⁶Varna (PSMSL-ID 295051), Sevastopol (PSMSL-ID 298041), Poti (PSMSL-ID 305021) & Batumi (PSMSL-ID 305031).

⁷Ko Taphao Noi (PSMSL-ID 545001), Ko Lak (PSMSL-ID 600021) & Ko Sichang (PSMSL-ID 600051).

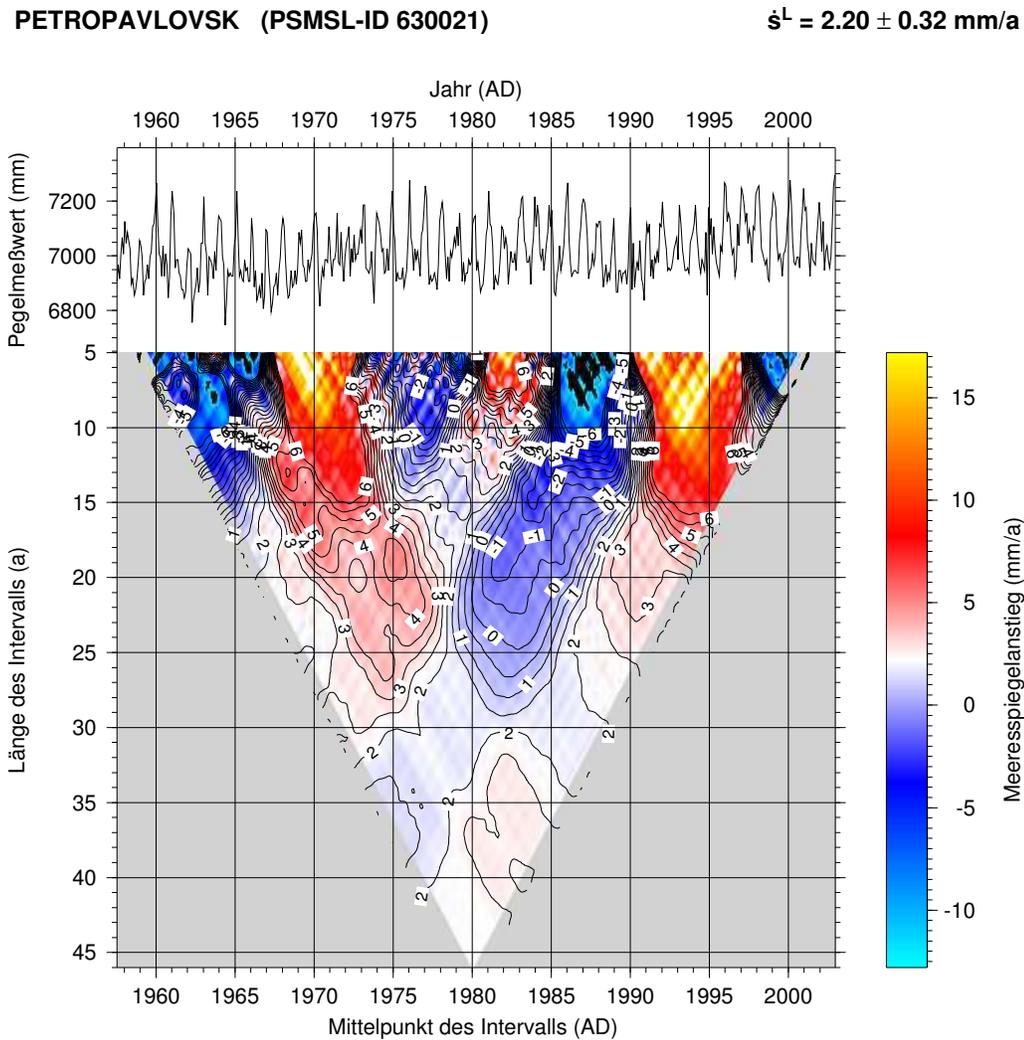


Abbildung 6.11: LTA-Diagramm für die Pegelstation Petropavlovsk (PSMSL-ID 630021) und das Zeitintervall 1957–2002.

diese Station Bereiche mit beschleunigtem und verringertem Meeresspiegelanstieg ab. Dieses Verhalten hat vermutlich seine Ursache nicht nur in den tektonischen Aktivitäten des benachbarten Kurilen-Grabens, sondern ist auch durch kurzperiodische Prozesse, z. B. Variationen des Luftdrucks oder der Ozeanströmung, hervorgerufen.

Auch die japanischen Pegelstationen⁸ liegen im Einflußbereich von Subduktionszonen. Die tektonisch bedingten Vertikalbewegungen werden daher bei Douglas (1991) als Grund für den Ausschluß der japanischen Stationen von der Untersuchung des globalen Meeresspiegelanstiegs angegeben.

An dem LTA-Diagramm der Pegelstation Manila (Abbildung 6.12) ist zu erkennen, daß für die gesamte Zeitreihe $\dot{s}^L = 12.70 \text{ mm a}^{-1}$ ist, jedoch in den Jahren 1965–1980 lineare Trends von $> 20 \text{ mm a}^{-1}$ zu verzeichnen sind. Yanagi & Akaki (1994) begründeten dies durch extensive Grundwassergewinnung bis zum Jahr 1982, die ein Absinken der Pegelstation verursacht hatte.

⁸Mera (PSMSL-ID 642061), Aburatsubo (PSMSL-ID 642091), Hosojima (PSMSL-ID 645011) & Wajima (PSMSL-ID 647071).

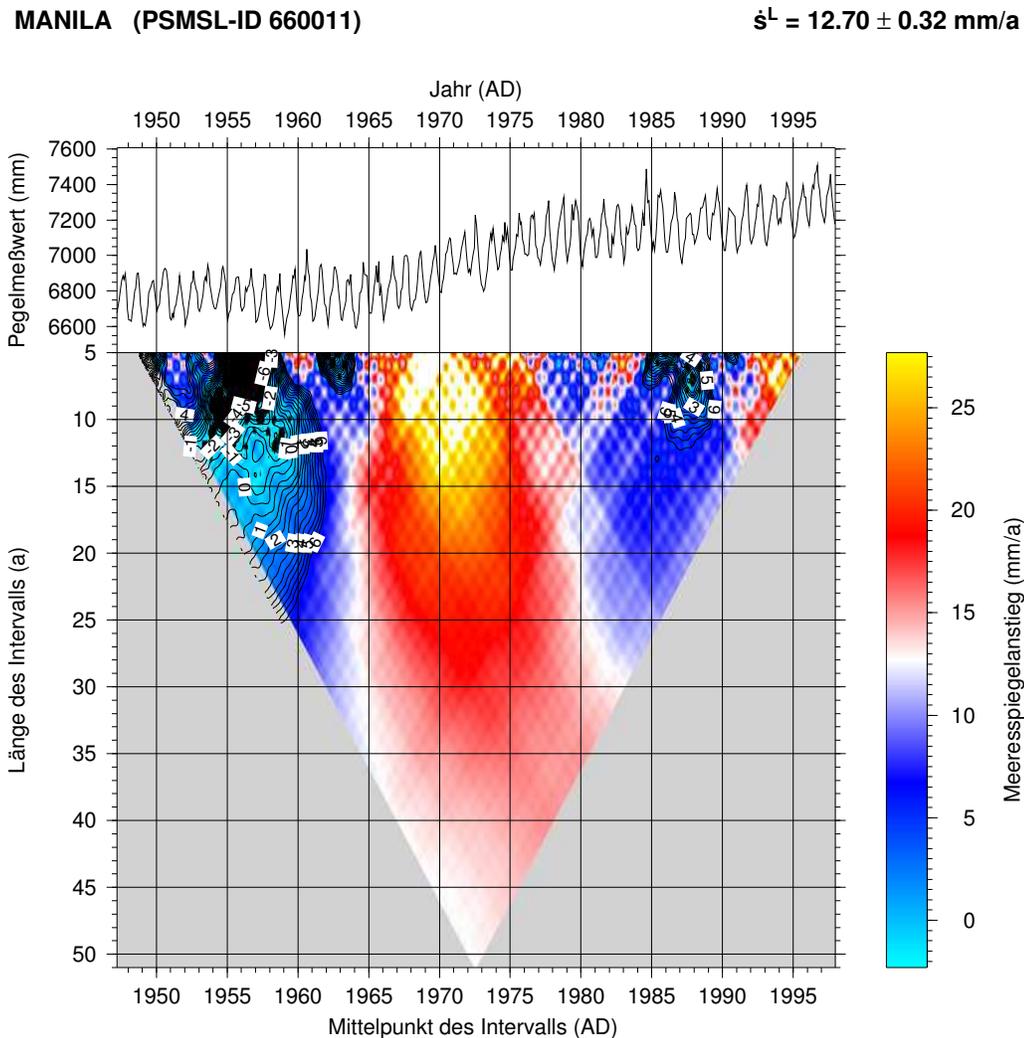


Abbildung 6.12: LTA-Diagramm für die Pegelstation Manila (PSMSL-ID 660011) und das Zeitintervall 1947–1997.

Abbildung 6.13 zeigt das LTA-Diagramm für die Pegelstation Port Pirie in Südaustralien. Auffällig ist hier das Absinken der Pegelmeßwerte in den Jahren 1932–1941 und das deutliche Ansteigen in den folgenden acht Jahren. Dieser abrupte Wechsel wirkt sich selbst bei einem Berechnungsintervall von $\Delta t = 40 \text{ a}$ auf den linearen Trend in der Weise aus, daß \dot{s}^L von anfänglich $\sim 1 \text{ mm a}^{-1}$ über -1 mm a^{-1} zu $\sim 0 \text{ mm a}^{-1}$ variiert. Harvey et al. (2002) untersucht die Pegelstationen Südaustraliens und stellt für Port Pirie keine tektonischen und anthropogenen Vertikalbewegungen fest. Eine mögliche Ursache ist dagegen die ENSO (El Nino Southern Oscillation).

Die Pegelstation Hilo (PSMSL-ID 760061) auf Hawaii liegt auf einer Insel vulkanischen Ursprungs. Die aus GPS-Messungen abgeleitete Geschwindigkeit der Vertikalverschiebung ($\dot{u} = 2.32 \pm 2.03 \text{ mm a}^{-1}$) läßt sich zum Teil auf den aktiven Vulkanismus zurückführen. Im zugehörigen LTA-Diagramm (Abbildung D.19), das in Anhang D.2 angefügt ist⁹, sind zusätzlich kurzperiodische Variationen des linearen

⁹Der Ausschluß aller in Tabelle 6.2 gelisteten Pegelstation wird hier kurz begründet, jedoch werden einige LTA-Diagramme aufgrund des benötigten Platzes nur in Anhang D.2 gezeigt.

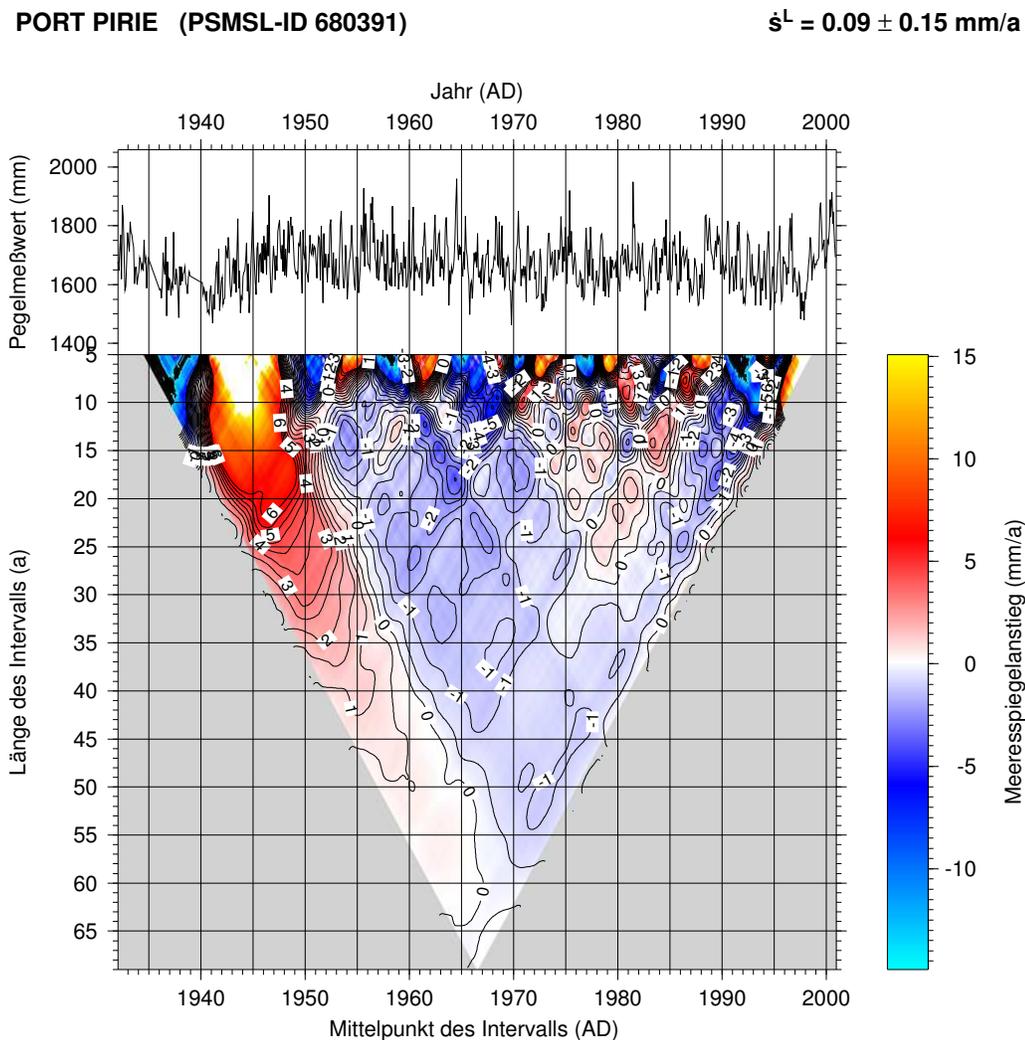


Abbildung 6.13: LTA-Diagramm für die Pegelstation Port Pirie (PSMSL-ID 680391) und das Zeitintervall 1932–2000.

Trends zu erkennen. Die Mehrfache Beeinflussung der Zeitreihe begründen das Ausschließen von der weiteren Auswertung.

Die Pegelstation Adak (PSMSL-ID 820011) liegt auf den Aleuten-Inseln im Nordpazifik. Das zugehörige LTA-Diagramm ist in Abbildung D.19 wiedergegeben und zeigt für $\Delta t = 40 \text{ a}$ eine Reduktion von \dot{s}^L von $> 0.5 \text{ mm a}^{-1}$ auf $< -2 \text{ mm a}^{-1}$. Außerdem liegt die Pegelstation in der Nähe einer tektonisch aktiven Grabenstruktur. Die mehrfach beeinflusste Zeitreihe muß somit ebenfalls ausgeschlossen werden.

In Abbildung 6.14 ist das LTA-Diagramm der Pegelstation Yakutat (PSMSL-ID 821026) gezeigt. Für $\Delta t = 50 \text{ a}$ variiert \dot{s}^L zwischen -4 mm a^{-1} und -6 mm a^{-1} . Das deutliche Absinken des Meeresspiegels weist auf eine Landhebung hin. Diese kann, da die Station in der Nähe eines konvergenten Plattenrand liegt, zum einen von tektonischen Prozessen verursacht werden. Zum anderen kann glaziale Isostasie zur Vertikalbewegung beitragen, da die Station in einem Gebiet mit pleistozänen und rezenten Gletschern liegt. Aufgrund der beschriebenen Vertikalbewegung muß diese Pegelstation ausgeschlossen werden.

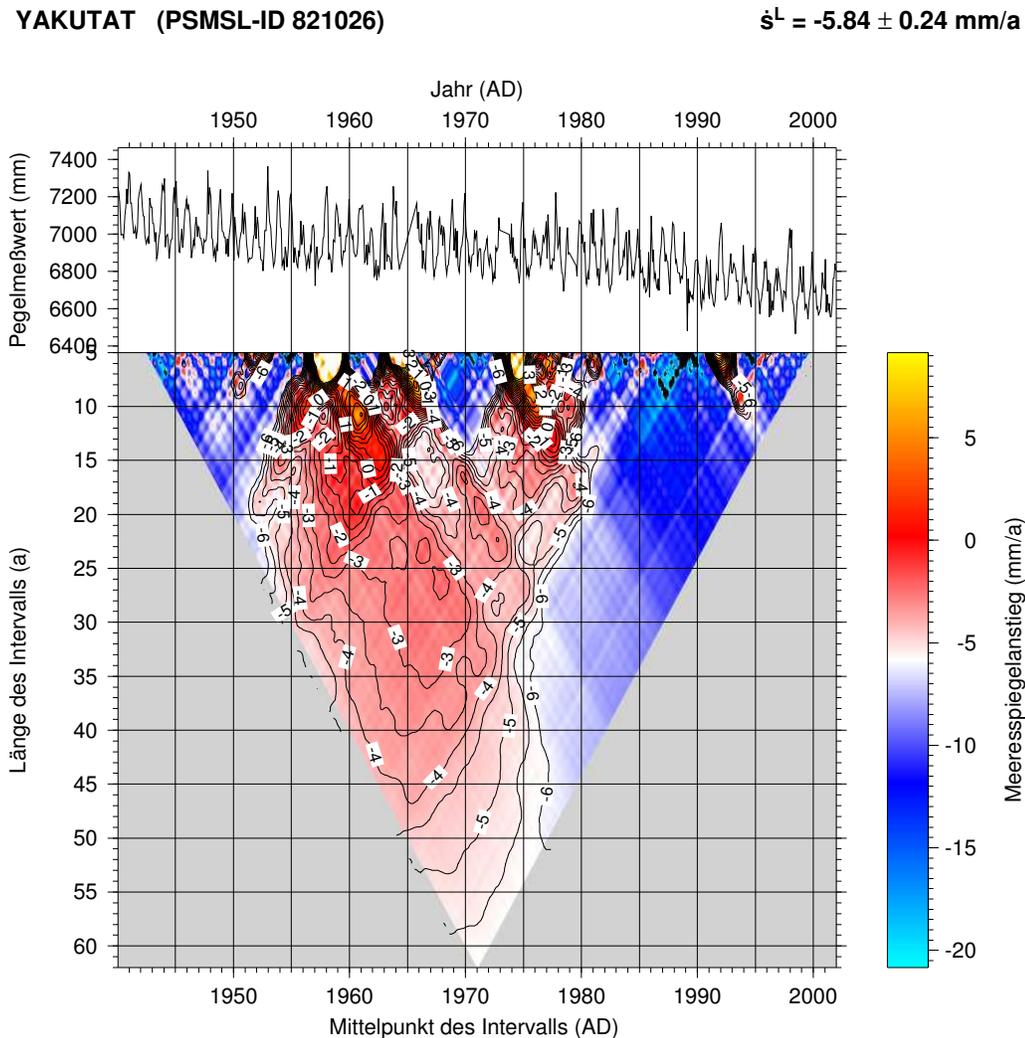


Abbildung 6.14: LTA-Diagramm für die Pegelstation Yakutat (PSMSL-ID 821026) und das Zeitintervall 1940–2001.

Die anderen Pegelstationen an der Westküste Nordamerikas¹⁰ weisen in den zugehörigen LTA-Diagrammen (Anhang D.2) ähnliche Merkmale für Vertikalbewegungen auf wie das LTA-Diagramm für die Station Yakutat (PSMSL-ID 821026), und werden deshalb ebenso ausgeschlossen.

In den LTA-Diagrammen der Pegelstationen an der Westküste Südamerikas¹¹ finden sich auch Anzeichen für Vertikalbewegungen (Anhang D.2). Da die Westküste Südamerikas dem Verlauf einer Subduktionszone folgt, sind die Pegel an dieser Küste durch tektonischen Prozesse beeinflusst und dürfen nicht berücksichtigt werden. Douglas (1991) schließt in seiner Untersuchung die Pegelstationen Nord- und Südamerikas aus den selben Gründen von der Bestimmung des globalen Meeresspiegelanstiegs aus.

Im LTA-Diagramm der Pegelstation Port Isabel (PSMSL-ID 940001) ist für alle Intervalle Δt ein

¹⁰Adak (PSMSL-ID 820011), Sitka (PSMSL-ID 821031), Juneau (PSMSL-ID 821044), Ketchikan (PSMSL-ID 821051), Prince Rupert (PSMSL-ID 822001), Vancouver (PSMSL-ID 822071), Victoria (PSMSL-ID 822101), Tofino (PSMSL-ID 822116), Neah Bay (PSMSL-ID 823001), Friday Harbor (PSMSL-ID 823006), Seattle (PSMSL-ID 823011), Astoria (PSMSL-ID 823013) & Crescent City (PSMSL-ID 823021).

¹¹La Libertad (PSMSL-ID 845012) & Antofagasta (PSMSL-ID 850012).

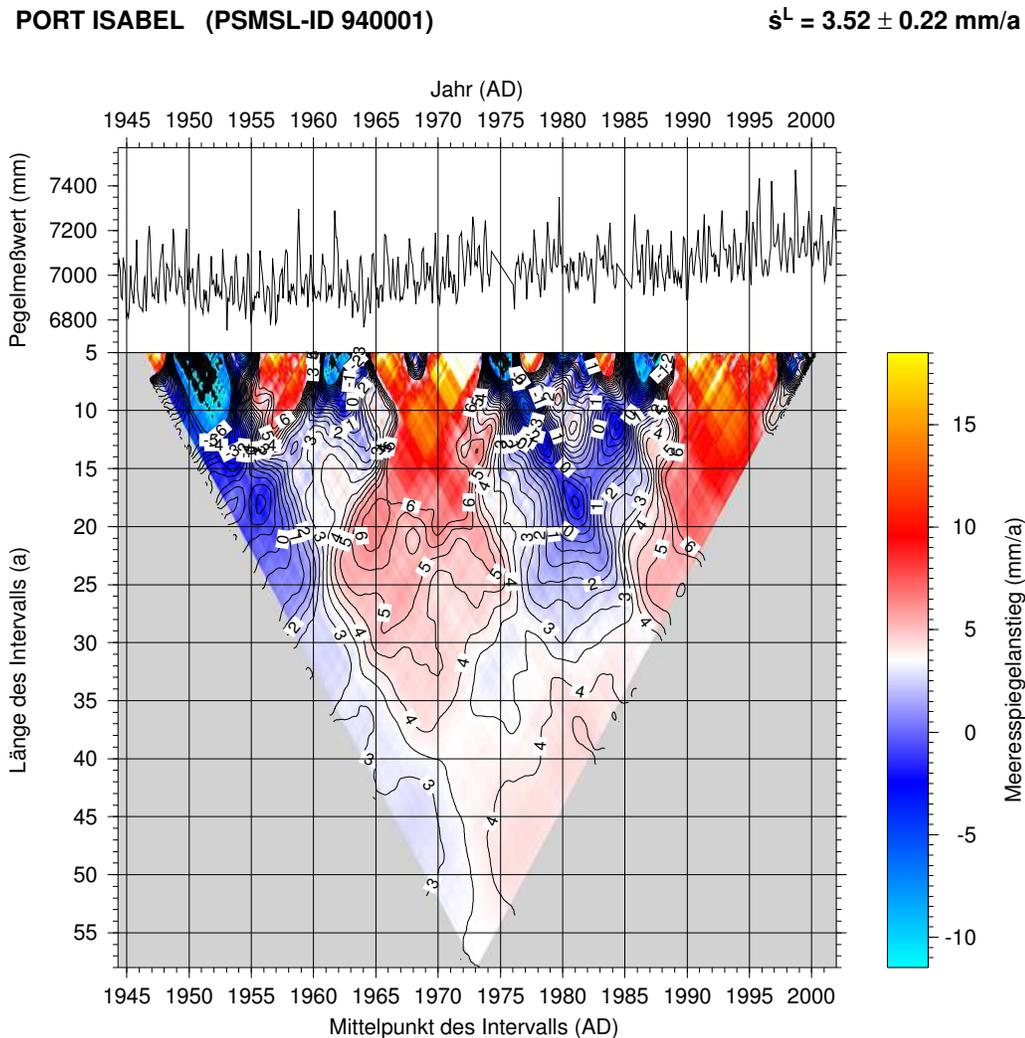


Abbildung 6.15: LTA-Diagramm für die Pegelstation Port Isabel (PSMSL-ID 940001) und das Zeitintervall 1944–2001.

Anstieg von \dot{s}^L mit zunehmenden t^{MP} zu erkennen (Abbildung 6.15). Zum Beispiel steigt für $\Delta t = 40 \text{ a}$ der lineare Trend von 3 mm a^{-1} auf 4.5 mm a^{-1} an. Die Pegelstation liegt an der Küste des Golfs von Mexiko, so daß ein Zusammenhang mit der Variation des Golfstroms möglich ist. Aufgrund dieser Komplikation wird auch diese Zeitreihe nicht berücksichtigt.

Zuletzt wird noch die Pegelstation Churchill (PSMSL-ID 970141) in der Hudson Bay betrachtet, dessen LTA-Diagramm in Abbildung D.28 dargestellt ist. Für nahezu alle Berechnungsintervalle, Δt , ist eine signifikante Verringerung von \dot{s}^L zu verzeichnen, wobei für das gesamte Beobachtungsintervall ein linearer Trend von $\dot{s}^L = -9.72 \text{ mm a}^{-1}$ bestimmt wird. Neben der postglazialen Landhebung beeinflussen hier auch Luftdruckvariationen und Effekte des separierten Beckens der Hudson Bay die Zeitreihe. In Wolf et al. (2004) wird eine detaillierte Untersuchung der verschiedenen Beiträge zur Meeresspiegeländerung für diese Station durchgeführt. Von der weiteren Untersuchung wird die Pegelstation Churchill hier ausgeschlossen.

Für die übrigen Pegelstationen sind in der Tabelle 6.3 die Ergebnisse für den linearen Trend, \dot{s}^L , und

die Standardabweichung, ε^L , jeweils für das gesamte Beobachtungsintervall sowie für das einheitliche Zeitintervall 1931–2000 angegeben.

Tabelle 6.3: Linearer Meeresspiegelanstieg, \dot{s}^L , und Standardabweichung, ε^L , für die 121 ausgewählten Pegelstationen. Werte in Klammer beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervall 1931–2000.

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	ε^L (mm a ⁻¹)
040031	Tromsø	-0.06	0.35
040081	Narvik	-2.97	0.35
040091	Kabelvåg	-1.01	0.36
040151	Heimsjø	-1.77	0.24
040191	Ålesund	1.32	0.37
040211	Maløy	0.83	0.31
040221	Bergen	-0.30 (-0.22)	0.17 (0.19)
040261	Stavanger	0.17 (0.40)	0.17 (0.22)
040301	Tregde	0.07	0.16
040321	Oslo	-4.92 (-4.85)	0.23 (0.24)
050011	Smögen	-2.10 (-1.81)	0.13 (0.20)
050031	Göteborg	-1.40	0.16
050041	Varberg	-0.85	0.12
050051	Klagshamn	0.27 (0.22)	0.19 (0.20)
050071	Ystad	0.60	0.12
050081	Kungholmsfort	-0.06 (0.41)	0.11 (0.23)
050091	Ölands n. Udde	-1.13 (-0.81)	0.12 (0.27)
050121	Landsort	-2.91 (-2.51)	0.13 (0.27)
050131	Nedre Södertälje	-3.43	0.14
050141	Stockholm	-3.91 (-3.51)	0.13 (0.28)
050161	Björn	-6.10	0.21
050171	Nedre Gävle	-6.03	0.19
050181	Draghallan	-7.99	0.27
050191	Ratan	-7.80 (-7.59)	0.16 (0.32)
050201	Furuoggrund	-8.41 (-7.96)	0.24 (0.33)
060011	Oulu	-6.39 (-6.36)	0.16 (0.34)
060021	Raahe	-6.83 (-6.49)	0.28 (0.34)
060041	Pietarsaari	-7.43 (-7.02)	0.23 (0.32)
060051	Vaasa	-7.37 (-6.98)	0.14 (0.31)
060071	Kaskinen	-6.67 (-6.49)	0.28 (0.31)
060101	Mantyluoto	-6.03 (-5.58)	0.20 (0.31)
060241	Turku	-3.74 (-3.46)	0.25 (0.31)
060281	Degerby	-3.74 (-3.50)	0.25 (0.29)
060331	Hanko	-2.78	0.15
060351	Helsinki	-2.41 (-1.35)	0.13 (0.32)
060361	Hamina	-1.03 (-0.86)	0.32 (0.34)
110092	Swinoujście	0.81	0.05
120012	Warnemünde 2	1.19 (1.35)	0.05 (0.15)
120022	Wismar 2	1.39 (1.57)	0.05 (0.15)
125001	Travemünde	1.62 (1.54)	0.05 (0.16)
130001	Gedser	0.94	0.10
130021	København	0.32	0.09
130031	Hornbæk	0.01	0.12
130041	Korsør	0.66	0.08
130051	Slipshavn	0.81	0.08
130071	Fredericia	0.95	0.06
130081	Århus	0.49	0.07
130091	Frederikshavn	0.15	0.10
130101	Hirtshals	-0.28	0.12
130121	Esbjerg	1.07	0.16

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	ε^L (mm a ⁻¹)
140012	Cuxhaven 2	2.44 (2.80)	0.08 (0.29)
150001	Delfzijl	1.66 (2.04)	0.08 (0.23)
150011	West Terschelling	0.86 (0.72)	0.17 (0.22)
150021	Harlingen	1.37 (1.40)	0.08 (0.23)
150031	Den Helder	1.46 (1.67)	0.07 (0.20)
150041	IJmuiden	2.23 (1.92)	0.15 (0.19)
150051	Hoek van Holland	2.39 (2.44)	0.06 (0.17)
150061	Maassluis	1.65 (2.10)	0.05 (0.17)
150071	Hellevoetsluis	1.59	0.09
150091	Zierikze	1.70	0.08
150101	Vlissingen	2.11 (1.63)	0.06 (0.15)
160021	Oostende	1.61	0.19
170012	Aberdeen II	0.59	0.09
170053	North Shields	1.90 (1.59)	0.07 (0.13)
170161	Newlyn	1.69 (1.56)	0.10 (0.14)
175071	Dublin	0.12	0.19
190091	Brest	1.00	0.03
200011	Santander I	2.00	0.19
200030	La Coruna I	1.44	0.19
200041	Vigo	2.63	0.20
210021	Cascais	1.28	0.05
210031	Lagos	1.50	0.10
230051	Marseille	1.22	0.06
250011	Genova	1.07	0.12
270061	Trieste	1.17 (0.94)	0.09 (0.14)
500081	Cochin	1.27	0.17
500101	Vishakhapatnam	0.68	0.35
680140	Sydney	0.86 (1.04)	0.07 (0.10)
680181	Williamstown	1.29	0.17
680471	Fremantle	1.43 (1.11)	0.13 (0.18)
690002	Auckland II	1.30 (1.28)	0.06 (0.10)
690022	Lyttelton II	2.72	0.11
720011	Kwajalein	1.22	0.16
760031	Honolulu	1.46 (1.28)	0.06 (0.10)
823031	San Francisco	1.41 (2.17)	0.04 (0.12)
823032	Alameda	0.83	0.14
823051	Los Angeles	0.85 (0.86)	0.09 (0.11)
823071	La Jolla	2.17 (2.34)	0.10 (0.12)
823081	San Diego	2.11 (2.25)	0.07 (0.12)
840011	Balboa	1.42	0.13
860081	Quequen	0.82	0.17
860151	Buenos Aires	1.55	0.14
904011	Cristobal	1.43	0.07
940041	Pensacola	2.08 (1.96)	0.13 (0.16)
940052	Cedar Key II	1.57	0.21
940071	Key West	2.26 (2.21)	0.09 (0.14)
950011	St Georges	1.61	0.25
960011	Mayport	2.47	0.13
960021	Fernandina	2.35	0.25
960031	Fort Pulaski	3.07	0.20
960041	Charleston I	3.28 (3.18)	0.14 (0.17)
960060	Wilmington	2.17	0.16
960071	Hampton Roads	4.36 (4.24)	0.14 (0.15)
960076	Washington DC	3.02 (3.06)	0.18 (0.18)
960078	Solomons Island	3.45	0.17
960080	Annapolis	3.52	0.16

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	ε^L (mm a ⁻¹)
960081	Baltimore	3.10 (2.98)	0.10 (0.17)
960087	Philadelphia	2.73 (2.64)	0.10 (0.17)
960091	Atlantic City	3.99 (3.90)	0.10 (0.14)
960101	Sandy Hook	3.90	0.14
960121	New York	2.93 (2.93)	0.07 (0.07)
960141	Willets Point	2.38	0.14
960161	Newport	2.56 (2.55)	0.10 (0.10)
960165	Woods Hole	2.56	0.10
960171	Boston	2.61	0.07
960181	Portland	1.84 (1.80)	0.06 (0.09)
960201	Eastport	2.09	0.08
970001	Saint John	2.44	0.15
970011	Halifax	3.31	0.07
970031	Charlottetown	2.99	0.11
970071	Quebec	-0.54	0.35

6.4 Einteilung der Pegelstationen in Regionen

Die in Tabelle 6.3 aufgeführten Pegelstationen sind an den Küsten der Ozeane ungleichmäßig verteilt (Abbildung 6.1). Die Mehrzahl der Pegelstationen ist auf der nördlichen Hemisphäre lokalisiert, und hier konzentrieren sich die Pegelstationen an den Küsten Europas und Nordamerikas. Dieser Sachverhalt legt es nahe, die Pegelstationen bestimmter Gebiete zusammenzufassen, um dann für diese Gruppierungen die Mittelwerte der linearen Trends zu betrachten. Im folgenden werden die ausgewählten Pegelstationen entsprechend den SLI in Abschnitt 5.1 den Regionen R1, . . . , R5 zugeteilt. In Untersuchungen des globalen Meeresspiegelanstiegs von Douglas (1991, 1997) und Holgate & Woodworth (2004) wurden die Pegelstation ebenfalls in bestimmten Regionen gruppiert, wobei jedoch eine größere Anzahl von Regionen verwendet wurde. In Tabelle D.1 sind die Kenngrößen aller Pegelstationen einschließlich der Regionen, denen sie zugeteilt sind, angegeben. Abbildung 6.16 zeigt ihre geographische Verteilung.

In Tabelle 6.4 sind die Mittelwerte, \bar{s}^L , der Pegelstationen der jeweiligen Region mit den zugehörigen mittleren Standardabweichungen, $\bar{\varepsilon}^L$, zusammengestellt. Diese werden als quadratische Mittelwerte aus den Standardabweichungen der Einzelstationen berechnet. Zusätzlich sind hier die entsprechenden Werte für das einheitliche Zeitintervall 1931–2000 gelistet. In der für die Regionen unterschiedlichen Geschwindigkeit des mittleren Meeresspiegelanstiegs ist deutlich der Einfluß der postglazialen viskoelastischen Relaxation zu erkennen. Die Pegelstationen der Region R1 liegen überwiegend im Hebungsbereich Skandinaviens, so daß hier eine mittlere Meeresspiegelabsenkung zu beobachten ist. Hingegen liegen die meisten Pegelstation der Region R2 in den durch die nordamerikanische pleistozäne Eislast angehobenen Randgebieten, die nun infolge der viskoelastischen Relaxation absinken, so daß hier ein mittlerer Meeresspiegelanstieg zu verzeichnen ist. Die Pegelstationen der Regionen R3, R4 und R5 liegen nicht im Nahbereich der pleistozänen Eisschilde, so daß sie nur durch die mit der postglazialen Relaxation verbundene Änderung der Geoidhöhe beeinflußt werden.

Der Vergleich der Ergebnisse für die vollständigen und das einheitliche Zeitintervall zeigt keine systematischen Unterschiede. Hingegen ist beim Vergleich des Mittelwerts aller ausgewählten Pegelstationen in den Regionen R1–R5 mit dem Mittelwert der Mittelwerte der einzelnen Regionen R1, . . . , R5 ein

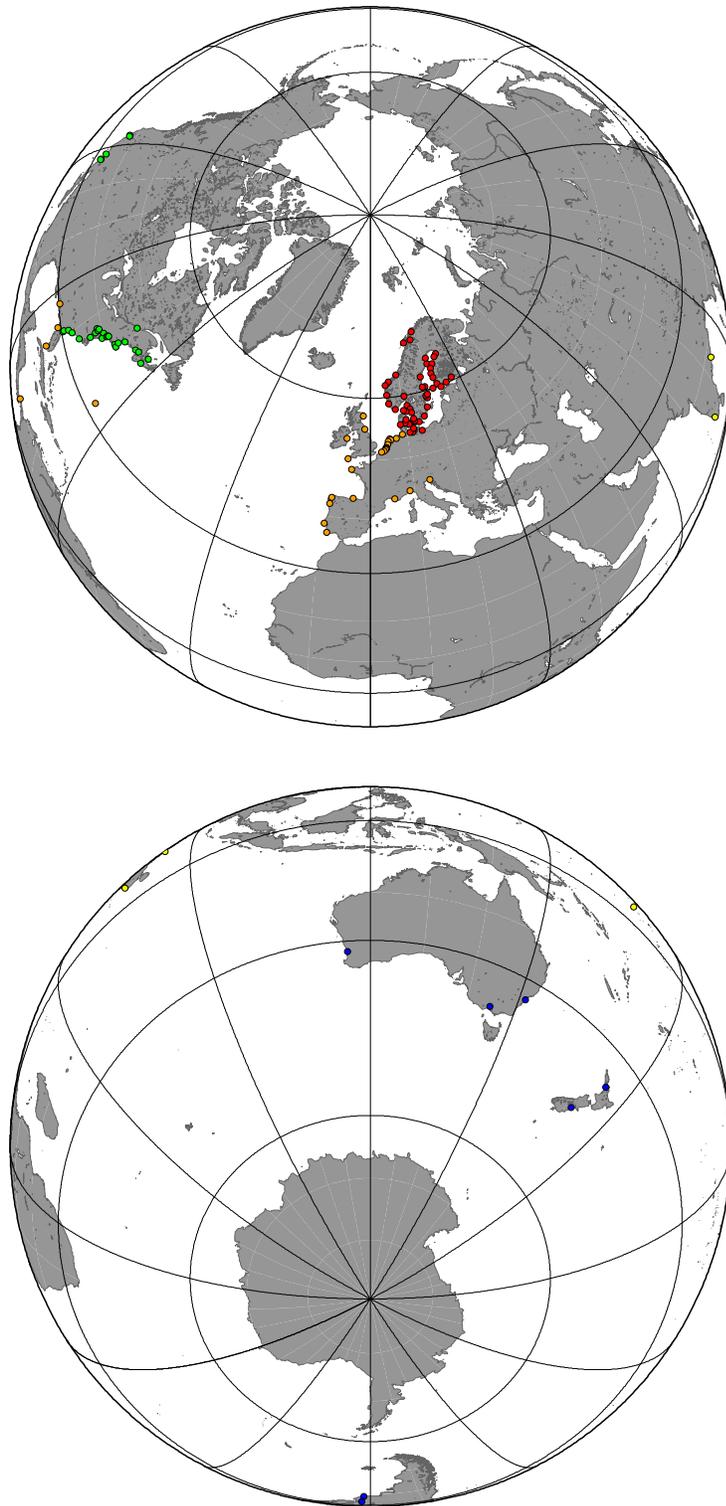


Abbildung 6.16: Einteilung der Pegelstationen in Tabelle 6.3 in fünf Regionen, wobei die geographischen Positionen entsprechend der Regionen farbig markiert sind: R1 (rot), R2 (grün), R3 (orange), R4 (gelb), R5 (blau).

deutlicher Unterschied zu erkennen. Der Region R1 sind 50 von 121 Pegelstationen zugeordnet, so daß diese bei der einfachen Mittelung einen größeren Einfluß haben, als bei der Mittelung der Mittelwerte der fünf Regionen.

Tabelle 6.4: Mittelwerte, \bar{s}^L , und mittlere Standardabweichungen, $\bar{\varepsilon}^L$, für die Pegelstationen der Regionen R1, ..., R5. Werte in Klammern beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervalls 1931–2000.

Gruppe	\bar{s}^L (mm a ⁻¹)	$\bar{\varepsilon}^L$ (mm a ⁻¹)
R1–R5	0.28 (–0.13)	0.17 (0.22)
R1	–2.08 (–2.99)	0.19 (0.28)
R2	2.55 (2.75)	0.14 (0.14)
R3	1.59 (1.78)	0.13 (0.20)
R4	1.16 (1.28)	0.25 (0.10)
R5	1.42 (1.14)	0.12 (0.16)
Mittelwert der R1, ..., R5	0.93 (0.79)	0.19 (0.14)

7. Reduzierte Pegeldata

Nach der Vorstellung der Eingabemodelle (Kapitel 3) und deren Bewertung (Kapitel 5) sollen nun die linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}^L , berechnet aus den Pegeldata (Kapitel 6), hinsichtlich des Einflusses der pleistozänen Eisschildevolution reduziert werden. In Abschnitt 7.1 werden die berechneten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs und die reduzierten linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs gezeigt. In Abschnitt 7.2 werden diese Ergebnisse im Zusammenhang mit dem globalen mittleren Meeresspiegelanstieg diskutiert. Eine abschließende Bewertung des vorgestellten Verfahrens der Reduktion der Pegeldata wird in Abschnitt 7.3 vorgenommen.

7.1 Reduzierte lineare Trends der Pegeldata

Für alle Pegelstationen wird zunächst mit der jeweils bestbewerteten Kombination von Eingabemodellen der durch die pleistozäne Eisschildevolution verursachte Meeresspiegelanstieg, s^O , gemäß (2.114)–(2.117) und (2.126) berechnet. Mit Hilfe des Differenzenquotienten wird dann die Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}^O , ermittelt. Für die Präsentation der Ergebnisse wird mit farbskalierten Isolinien die globale und regionale Verteilung von \dot{s}^O gezeigt. Die zugehörigen Werte sind in Anhang E tabelliert.

Die Reduktion von \dot{s}^L hinsichtlich des Einflusses der pleistozänen Eisschildevolution erfolgt gemäß

$$\dot{s}^R := \dot{s}^L - \dot{s}^O, \quad (7.1)$$

wobei mit \dot{s}^R der reduzierte lineare Trend des Meeresspiegelanstiegs bezeichnet wird. Zur Illustration dienen Säulendiagramme mit den beobachteten, berechneten und reduzierten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs. Die in diesen Diagrammen angegebenen Mittelwerte und zugehörigen Varianzen der beobachteten und reduzierten linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs werden mit folgenden Ausdrücken berechnet:

$$\bar{\dot{s}}^{L|R} := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \dot{s}_n^{L|R}, \quad (7.2)$$

$$\bar{\sigma}^{L|R} := \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left(\dot{s}_n^{L|R} - \bar{\dot{s}}^{L|R} \right)^2}. \quad (7.3)$$

Hier bezeichnet $\dot{s}_n^{L|R}$ die beobachteten bzw. die reduzierten linearen Trends, wobei in der betrachteten Region N lineare Trends vorhanden sind. Es werden hier die Varianzen, $\bar{\sigma}^{L|R}$, angegeben, da für \dot{s}^O keine Standardabweichung entsprechend ε^L bestimmt werden kann und eine Vergleichbarkeit der Fehler für die beobachteten und berechneten Größen gegeben sein soll.

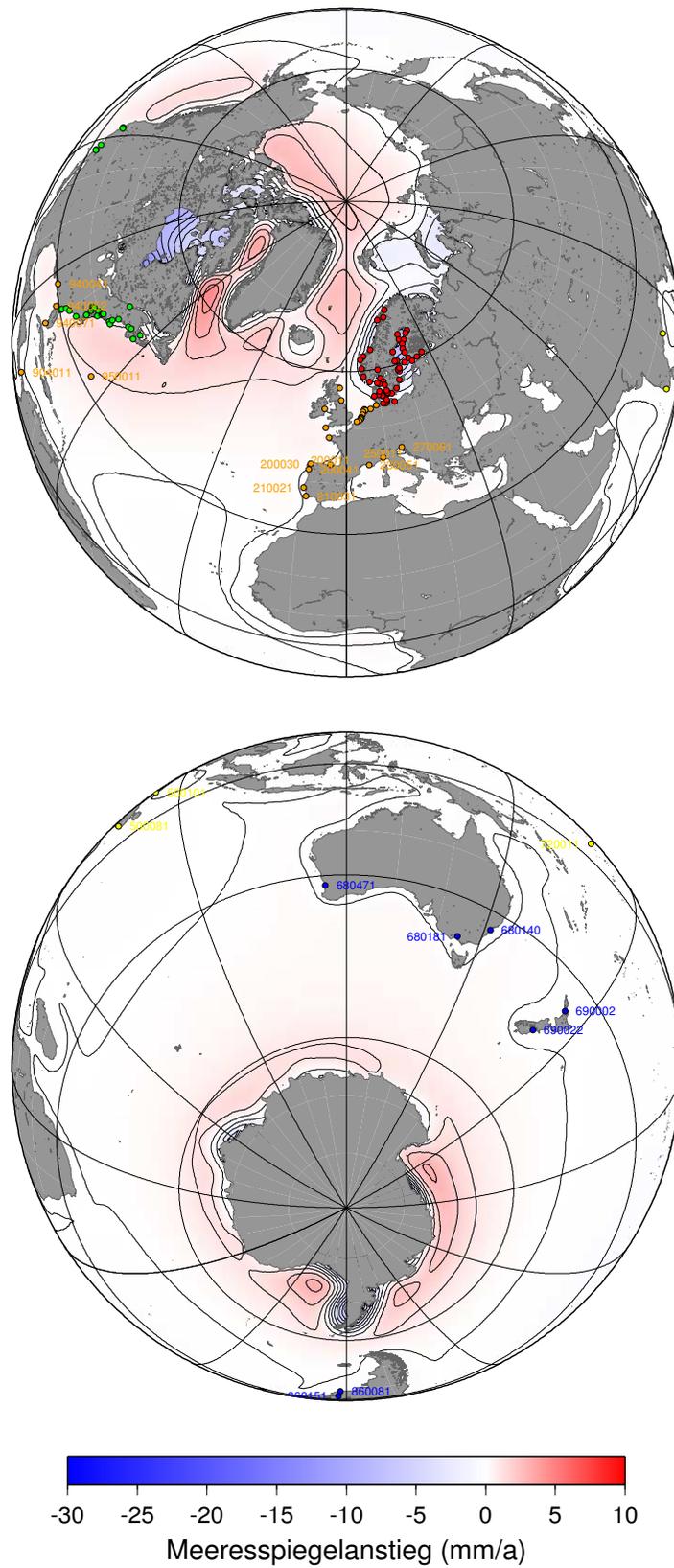


Abbildung 7.1: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMI/SCAN auf der Nord- bzw. Südhemisphäre. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R2 (grün), R3 (orange), R4 (gelb), R5 (blau). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .

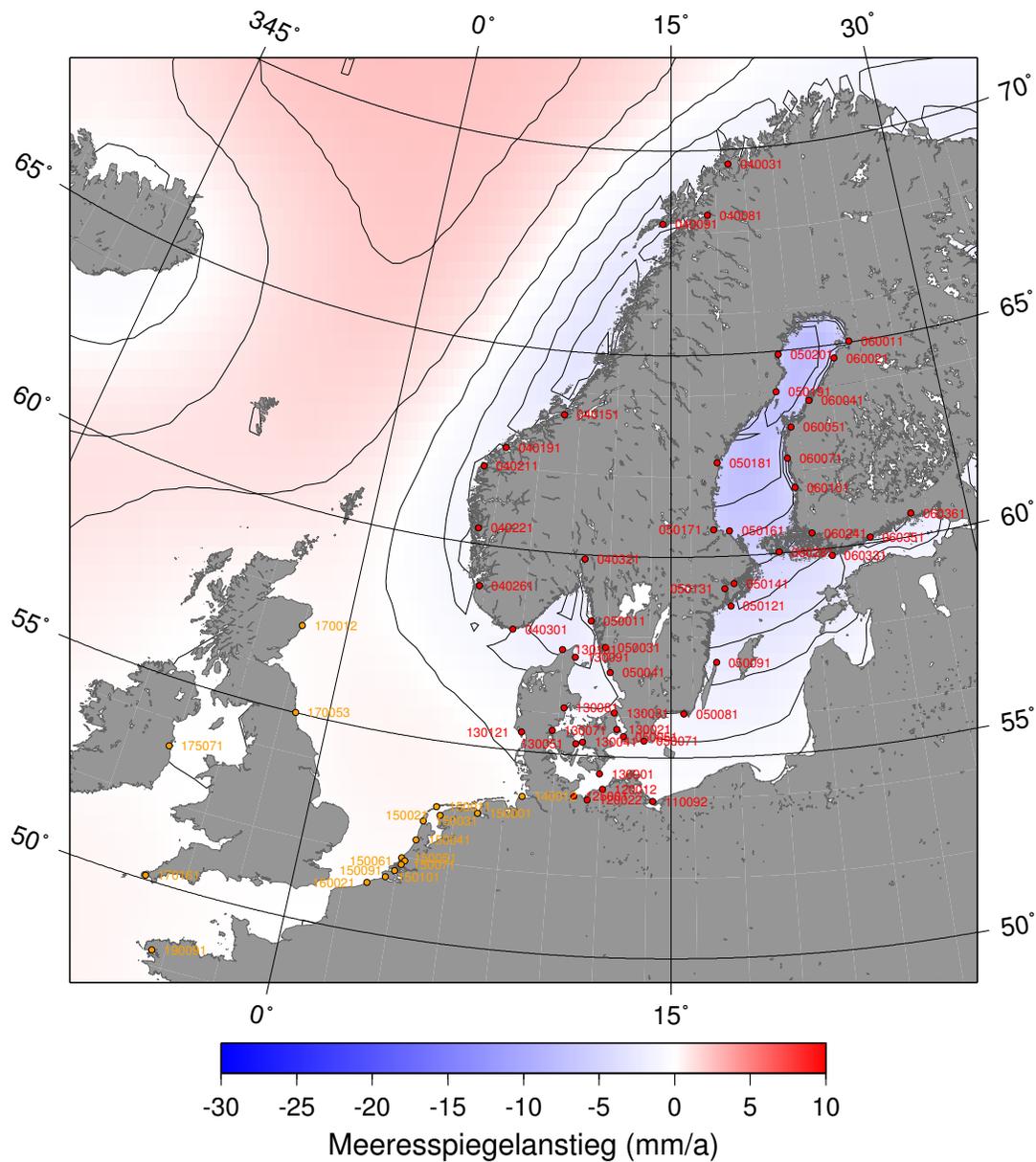


Abbildung 7.2: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMI/SCAN in Nordeuropa. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R3 (orange). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .

7.1.1 Reduzierte Pegeldaten der Region R1

Die bestbewertete Kombination der Eingabemodelle für R1 ist VMI/SCAN. Abbildung 7.1 zeigt die globale Verteilung der Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}° , für diese Eingabemodelle. An den Küsten Nordamerikas und Skandinaviens sind auf der Nordhemisphäre die größten Beiträge zu beobachten. Hier liegen auch die meisten Pegelstationen. Im Gegensatz zu den skandinavischen Küsten, an denen zumeist ein Absinken des Meeresspiegels zu beobachten ist, steigt der Meeresspiegel an der Ostküste Nordamerikas. Nur in der Hudson Bay ist ein deutliches Absinken des Meeresspiegels zu erkennen. Daneben fällt auf der Nordhemisphäre das Gebiet der Barents- und Karasee auf, in dem für

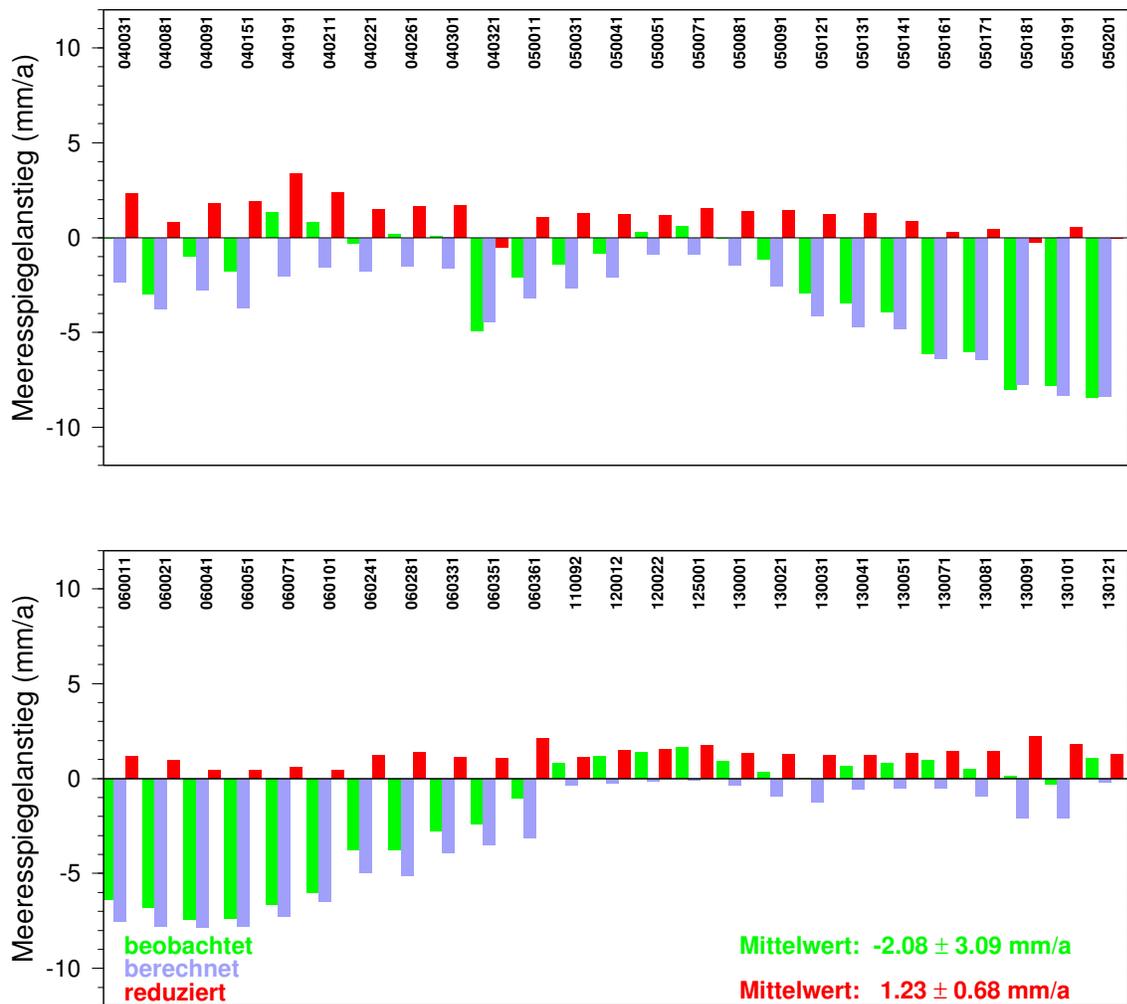


Abbildung 7.3: Reduzierte Pegeldaten der Region R1 mit berechnetem Meeresspiegelanstieg für VMI/SCAN. Die Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs sind jeweils mit der PSMSL-ID gekennzeichnet. Die Einzelwerte sind in Tabelle E.1 gelistet.

Novaja Zemlja und den Südosten des Svalbard-Archipels ein deutliches Absinken des Meeresspiegels zu beobachten ist. Auf der Südhemisphäre sind nur um die Antarktis signifikante Variationen des Meeresspiegelanstiegs zu erkennen, wobei besonders das Absinken desselben um die Antarktische Halbinsel auffällt. Abbildung 7.2 zeigt einen Ausschnitt Nordeuropas mit den Positionen der Pegelstationen der Regionen R1 und R3. Die geographische Verteilung von \dot{s}^0 spiegelt deutlich die der pleistozänen Eislast wider. Im Bottnischen Meerbusen werden Werte von $\sim -8 \text{ mm a}^{-1}$ erreicht, die nach Süden abnehmen und sich an der deutschen Ostseeküste der Nulllinie annähern. Diese verläuft in einer Entfernung von $\sim 200 \text{ km}$ vor der norwegischen Küste. Somit liegen alle Pegelstationen der Region R1 in einem Gebiet, für das negative Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs berechnet werden.

Abbildung 7.3 zeigt die beobachteten, berechneten und reduzierten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs der Pegelstationen in der Region R1 in Form eines Säulendiagramms. Auffällig sind die zum Zentrum des Bottnischen Meerbusens abfallenden Werte von \dot{s}^1 von der Pegelstation Ölands norra Udde (PSMSL-ID 050091) bis zur Station Hamina (PSMSL-ID 060362). Für diese sind allerdings auch

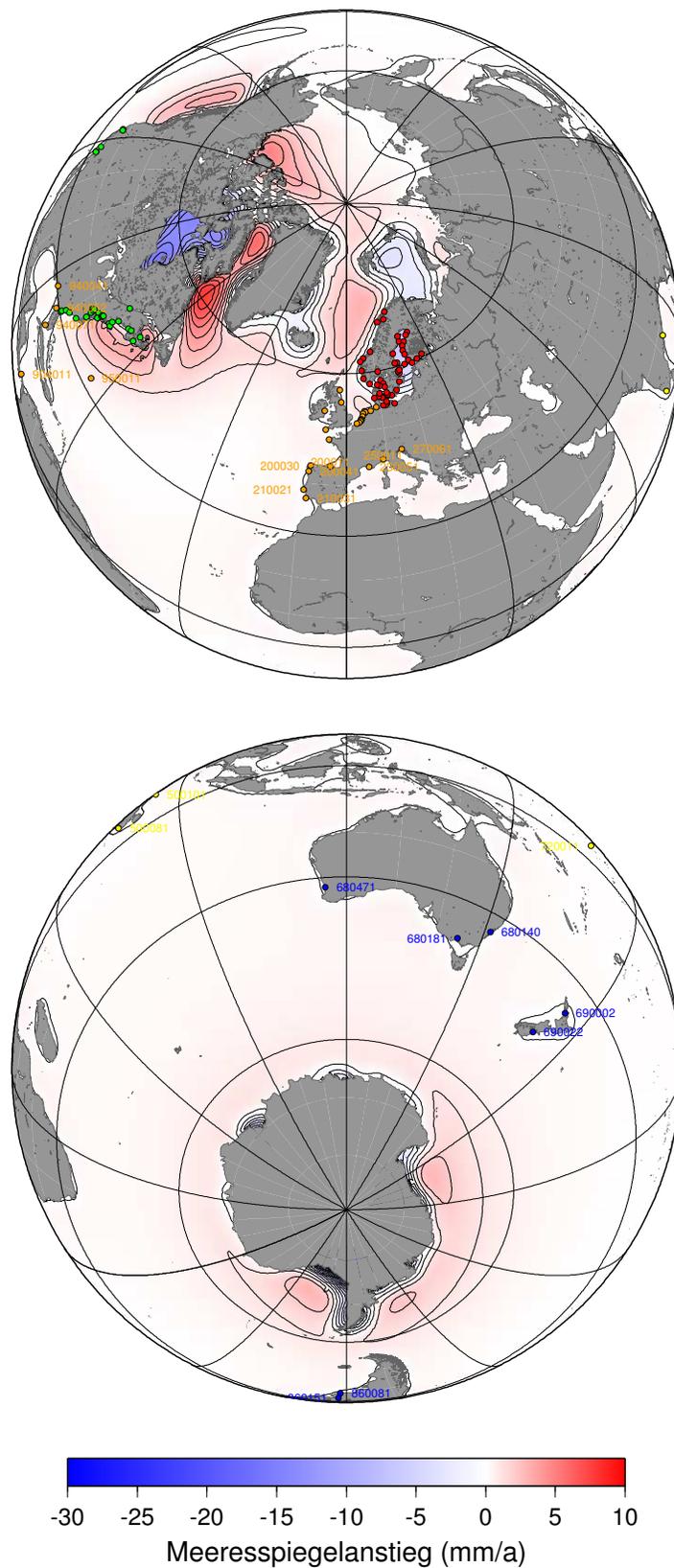


Abbildung 7.4: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VM1/NAWI auf der Nord- bzw. Südhemisphäre. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R2 (grün), R3 (orange), R4 (gelb), R5 (blau). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .

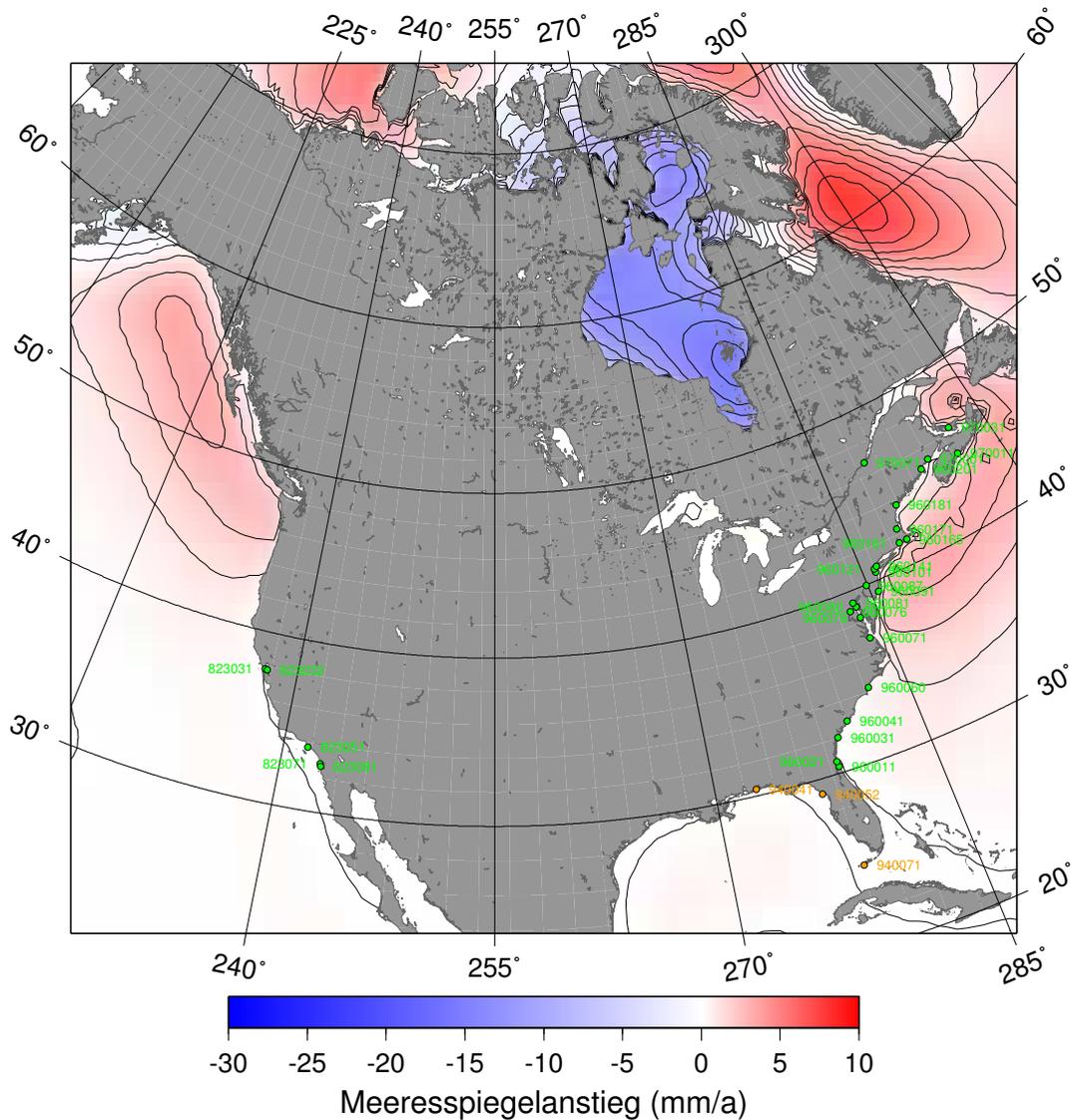


Abbildung 7.5: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VM1/NAWI in Nordamerika. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R2 (grün), R3 (orange). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .

die Werte von \dot{s}^O in der gleichen Größenordnung, so daß für \dot{s}^R ein derartiges Verhalten nicht mehr zu beobachten ist. Auch in den Mittelwerten $\bar{s}^L = -2.08 \text{ mm a}^{-1}$ und $\bar{s}^R = 1.23 \text{ mm a}^{-1}$ ist die Reduktion des Einflusses der pleistozänen Eisschilddevolution deutlich zu erkennen. Desweiteren spiegelt sich dies auch in der wesentlich kleineren Varianz von $\bar{\sigma}^R = 0.68 \text{ mm a}^{-1}$ im Vergleich zu $\bar{\sigma}^L = 3.09 \text{ mm a}^{-1}$ wider.

7.1.2 Reduzierte Pegeldaten der Region R2

Abbildung 7.4 zeigt die globale Verteilung der Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}^O , die mit Hilfe der Kombination der Eingabemodelle VM1/NAWI berechnet ist. Diese Kombination ist optimal für die Pegelstation in der Region R2. Auf der Nordhemisphäre erreicht der Meeresspiegelanstieg vor

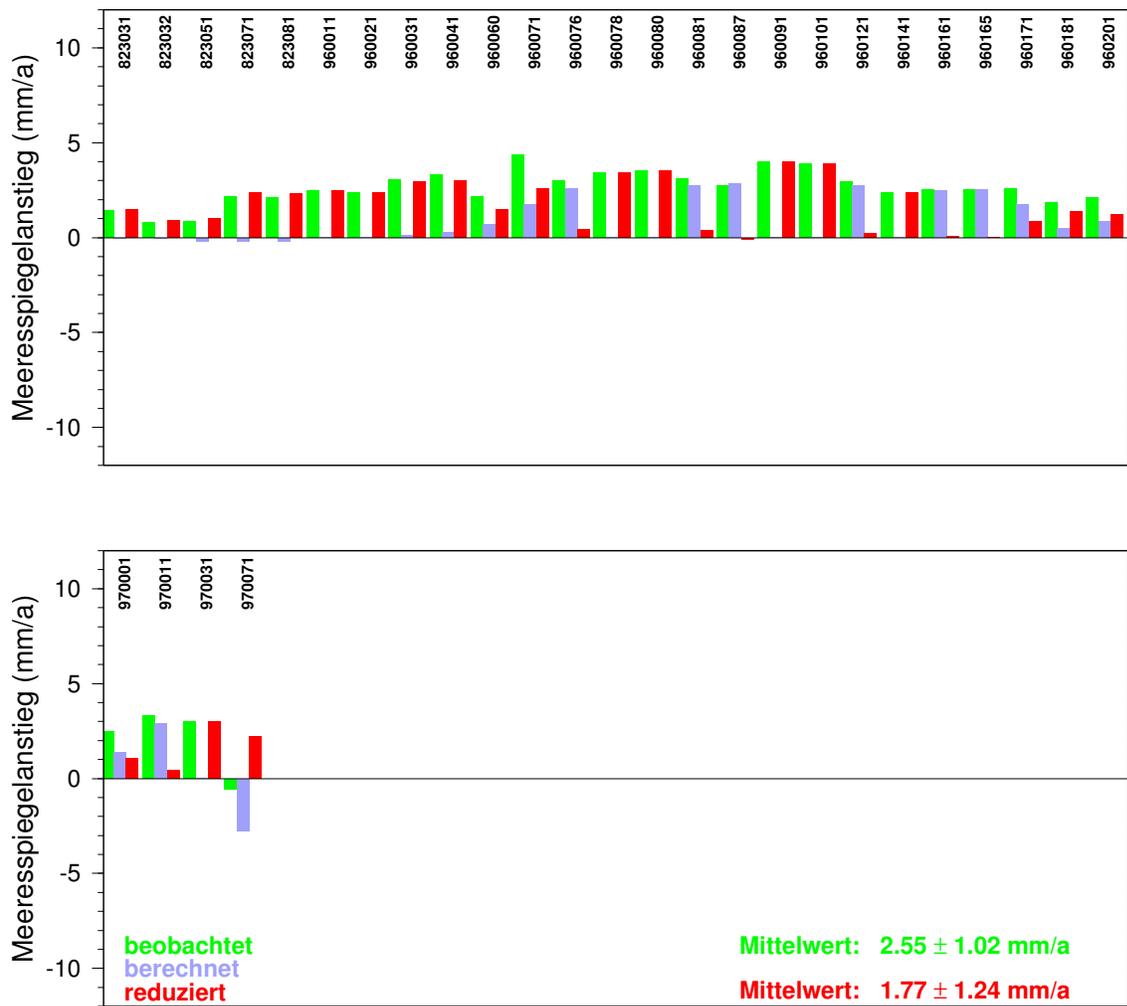


Abbildung 7.6: Reduzierte Pegeldaten der Region R2 mit berechnetem Meeresspiegelanstieg für VM1/NAWI. Die Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs sind jeweils mit der PSMSL-ID gekennzeichnet. Die Einzelwerte sind in Tabelle E.2 gelistet.

den arktischen Küsten Kanadas Werte von über 7 mm a^{-1} . Hingegen werden in der Hudson Bay Werte von -12 mm a^{-1} erreicht. Außerdem sind an den Küsten Grönlands und Islands zumeist leicht negative Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs zu verzeichnen. Deutlich hebt sich auch die Barentssee mit Geschwindigkeiten von $\sim -3 \text{ mm a}^{-1}$ vom Nordatlantik und der Karasee ab, für die ein geringer Meeresspiegelanstieg berechnet ist. Auf der Südhemisphäre ist südlich des 60. Breitengrads ein leichter Meeresspiegelanstieg von $> 1 \text{ mm a}^{-1}$ zu erkennen. Direkt an der Küste der Antarktis, insbesondere nahe der Antarktischen Halbinsel, werden dagegen deutlich negative Werte erreicht. In Abbildung 7.5 ist ein Ausschnitt mit Nordamerika und den Positionen der Pegelstationen der Regionen R2 und R3 gezeigt. Die Stationen an der Westküste liegen alle in der Nähe der Nulllinie. Hingegen ist für die Pegelstationen der Ostküste ein deutlicher Gradient des Meeresspiegelanstiegs von Süd nach Nord zu verzeichnen.

Abbildung 7.6 zeigt beobachtete, berechnete und reduzierte Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs der Pegelstationen in der Region R2. Neben der Zunahme des Meeresspiegelanstiegs von Süd nach Nord für die Pegelstationen der nordamerikanischen Ostküste (PSMSL-ID 960011 – 960201)

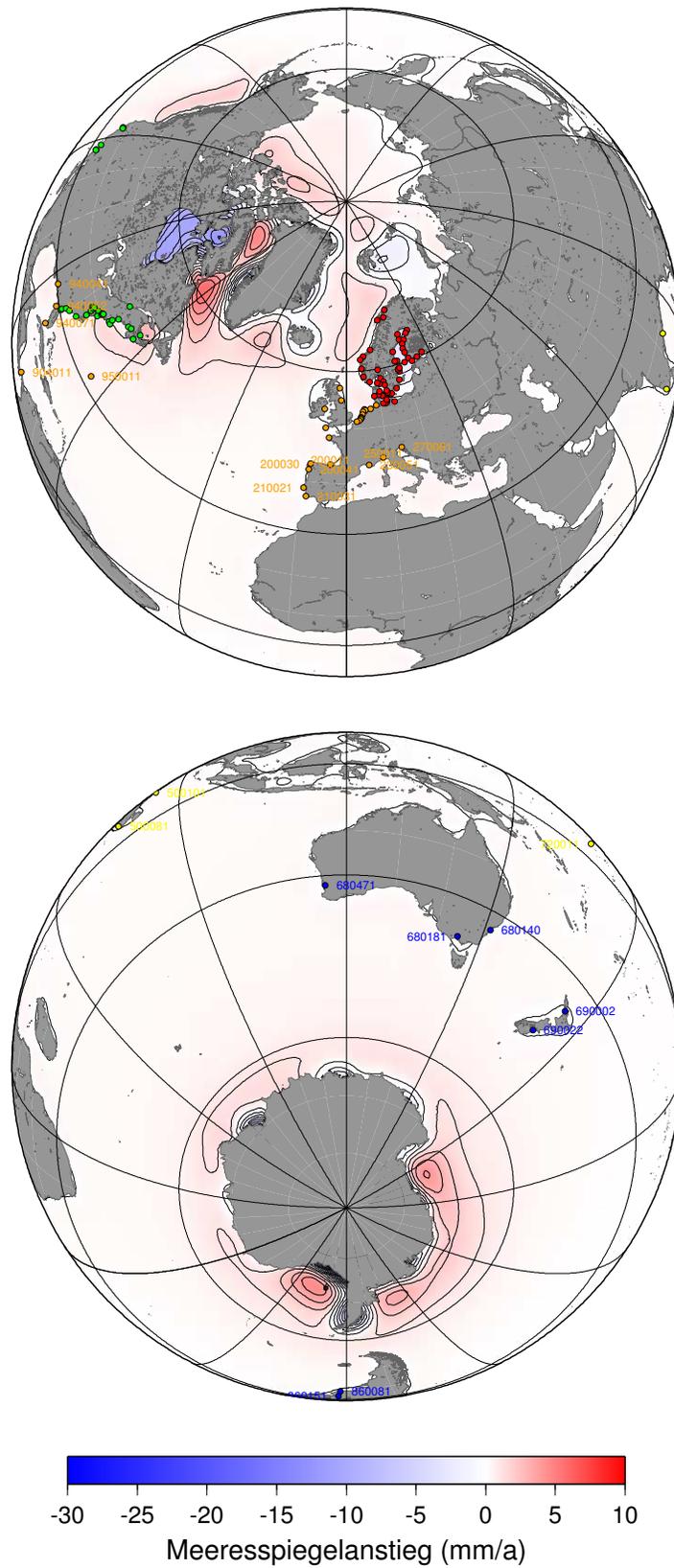


Abbildung 7.7: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMA/NAWI auf der Nord- bzw. Südhemisphäre. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R2 (grün), R3 (orange), R4 (gelb), R5 (blau). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .

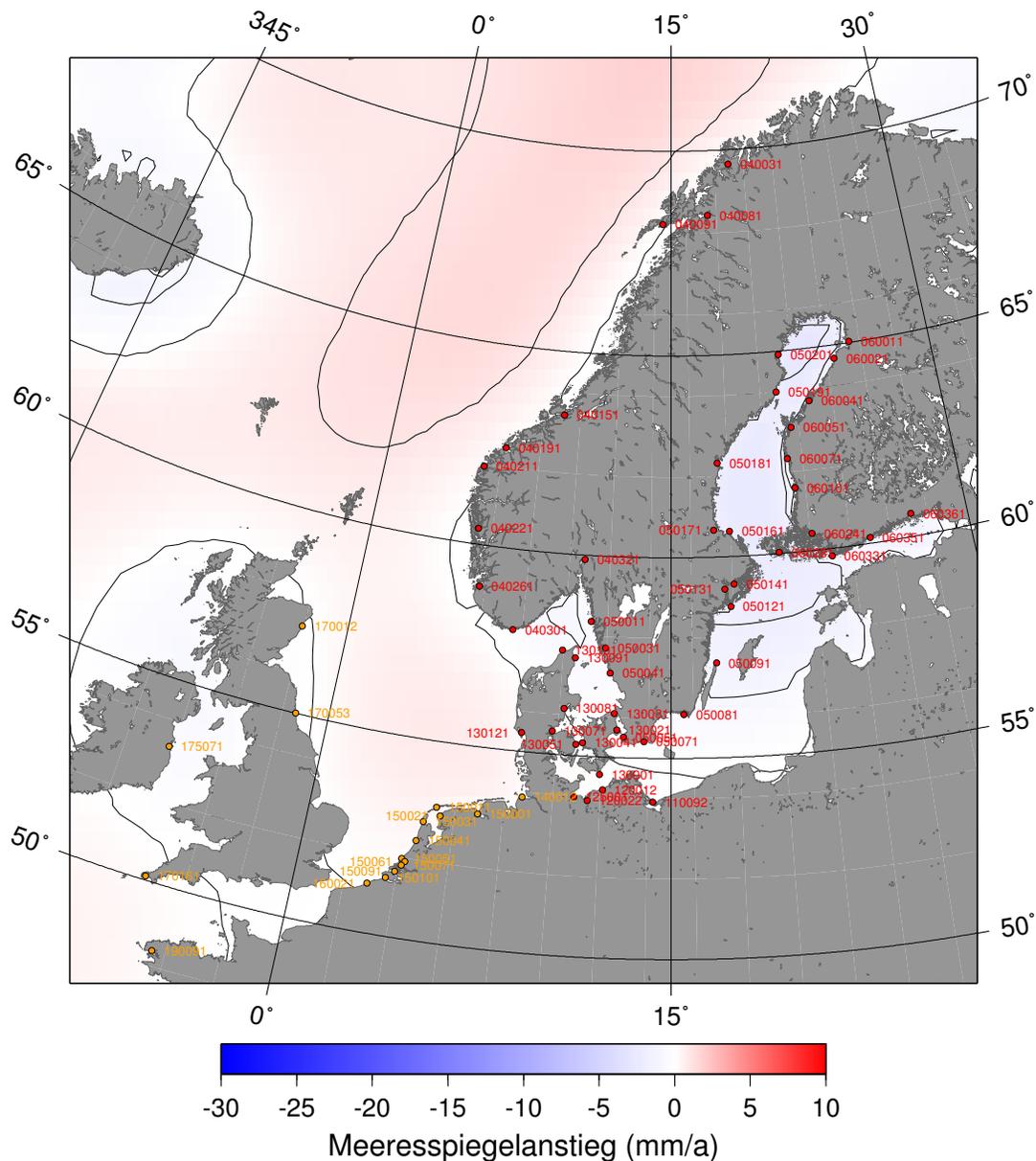


Abbildung 7.8: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMA/NAWI in Nordeuropa. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R3 (orange). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .

fällt bei \dot{s}° die starke Variation in Ost-West-Richtung auf. Die Pegelstationen Sandy Hook (PSMSL-ID 960101) und New York (PSMSL-ID 960121) sind nur $\sim 0.3^\circ$ von einander in Ost-West-Richtung entfernt, jedoch beträgt für Sandy Hook $\dot{s}^\circ = 0.00 \text{ mm a}^{-1}$, hingegen ist in New York $\dot{s}^\circ = 2.72 \text{ mm a}^{-1}$. Diese Variabilität fällt auch bei einige weiteren Stationen (PSMSL-ID 960076 – 960091) auf. Ein starker Gradient des Meeresspiegelanstiegs in dieser Richtung ist durch den dazu orthogonal verlaufenden Rand des Eisschildes zu erklären. Jedoch wird der komplizierte Verlauf der Küste, bedingt durch die räumliche Auflösung von $\sim 0.35^\circ$ in Ost-West-Richtung, für die Berechnung der \dot{s}° nicht exakt wiedergegeben, so daß die Variabilität zum Teil hierdurch verursacht werden kann. Für die reduzierten linearen Trends der Pegelstationen der Region R2 wird der mittlere lineare Trend von $\bar{s}^R = 1.77 \text{ mm a}^{-1}$ mit einer Varianz von $\bar{\sigma}^R = 1.24 \text{ mm a}^{-1}$ berechnet.

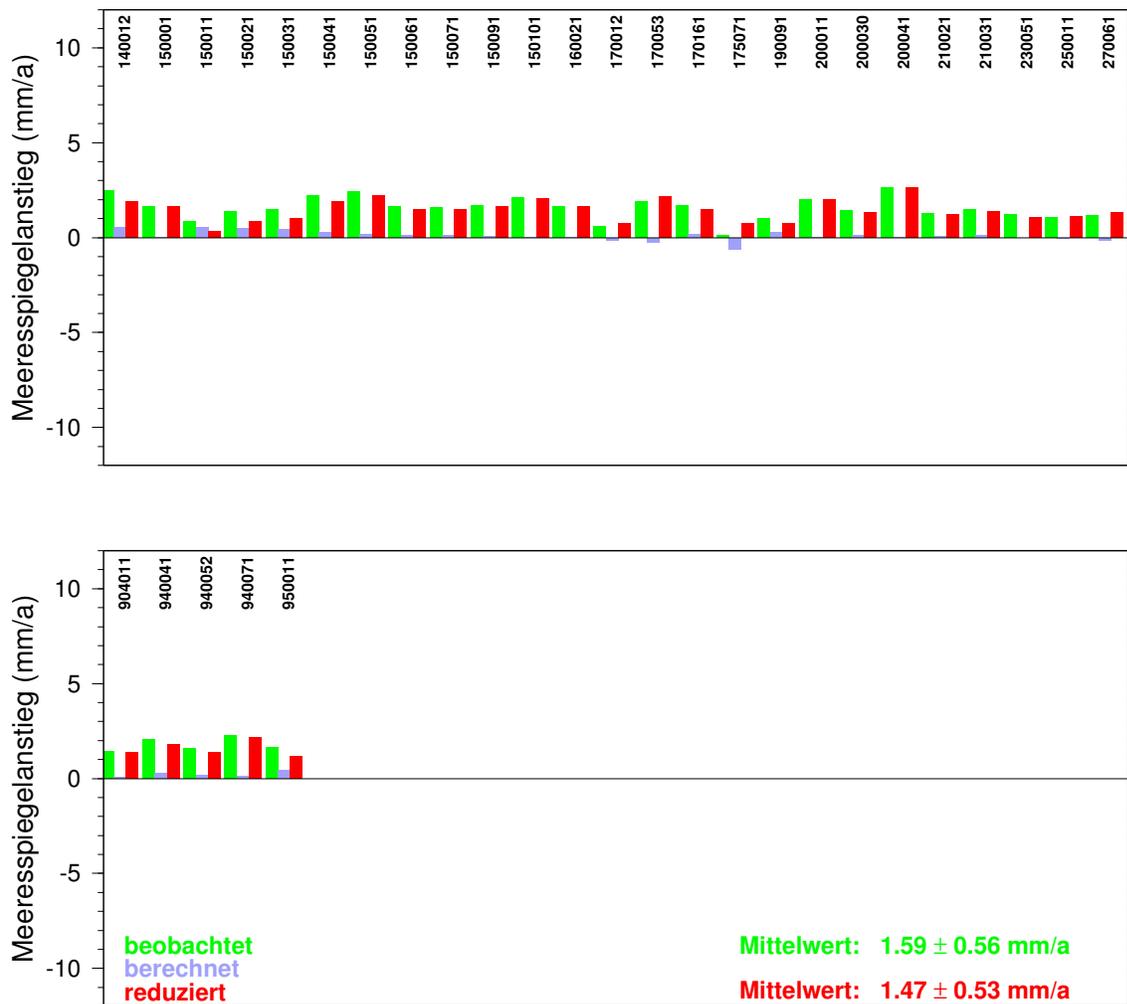


Abbildung 7.9: Reduzierte Pegeldaten der Region R3 mit berechnetem Meeresspiegelanstieg für VMA/NAWI. Die Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs sind jeweils mit der PSMSL-ID gekennzeichnet. Die Einzelwerte sind in Tabelle E.3 gelistet.

7.1.3 Reduzierte Pegeldaten der Region R3

Die beste Kombination der Eingabemodelle für die Region R3 ist VMA/NAWI. Abbildung 7.7 zeigt die globale Verteilung der Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs bei Verwendung dieser Eingabemodelle. Alle Pegelstationen der Region R3 liegen in Gebieten, in denen \dot{s}° nur geringfügig von Null abweicht. Auch die Beträge der Extremwerte für diese Kombination der Eingabemodelle für \dot{s}° von $\sim -9 \text{ mm a}^{-1}$ in der Hudson Bay und $\sim 5 \text{ mm a}^{-1}$ an den Küsten der kanadischen Arktis fallen geringer aus als bei den anderen Kombinationen (Abschnitte 7.1.1–7.1.2). Für die nordeuropäischen Pegelstationen ist in Abbildung 7.8 zu erkennen, daß die Pegelstationen auf den Britischen Inseln im Gebiet mit leicht negativen Werten von \dot{s}° liegen, während die Stationen an der Nordseeküste leicht positive Werte aufweisen. Der geringe Einfluß des berechneten Meeresspiegelanstiegs zeigt sich für die Pegelstationen der Region R3 auch in Abbildung 7.9. Für alle Pegelstationen liegt \dot{s}° im Bereich $\pm 1 \text{ mm a}^{-1}$ und ist zumeist deutlich kleiner. Dies fällt auch beim Vergleich der Mittelwerte $\bar{s}^{\text{L}} = 1.59 \text{ mm a}^{-1}$ und $\bar{s}^{\text{R}} = 1.47 \text{ mm a}^{-1}$ auf, die nur geringfügig voneinander abweichen. Ebenso variieren die zugehörigen Varianzen von $\bar{\sigma}^{\text{L}} = 0.56 \text{ mm a}^{-1}$ und $\bar{\sigma}^{\text{R}} = 0.53 \text{ mm a}^{-1}$ kaum.

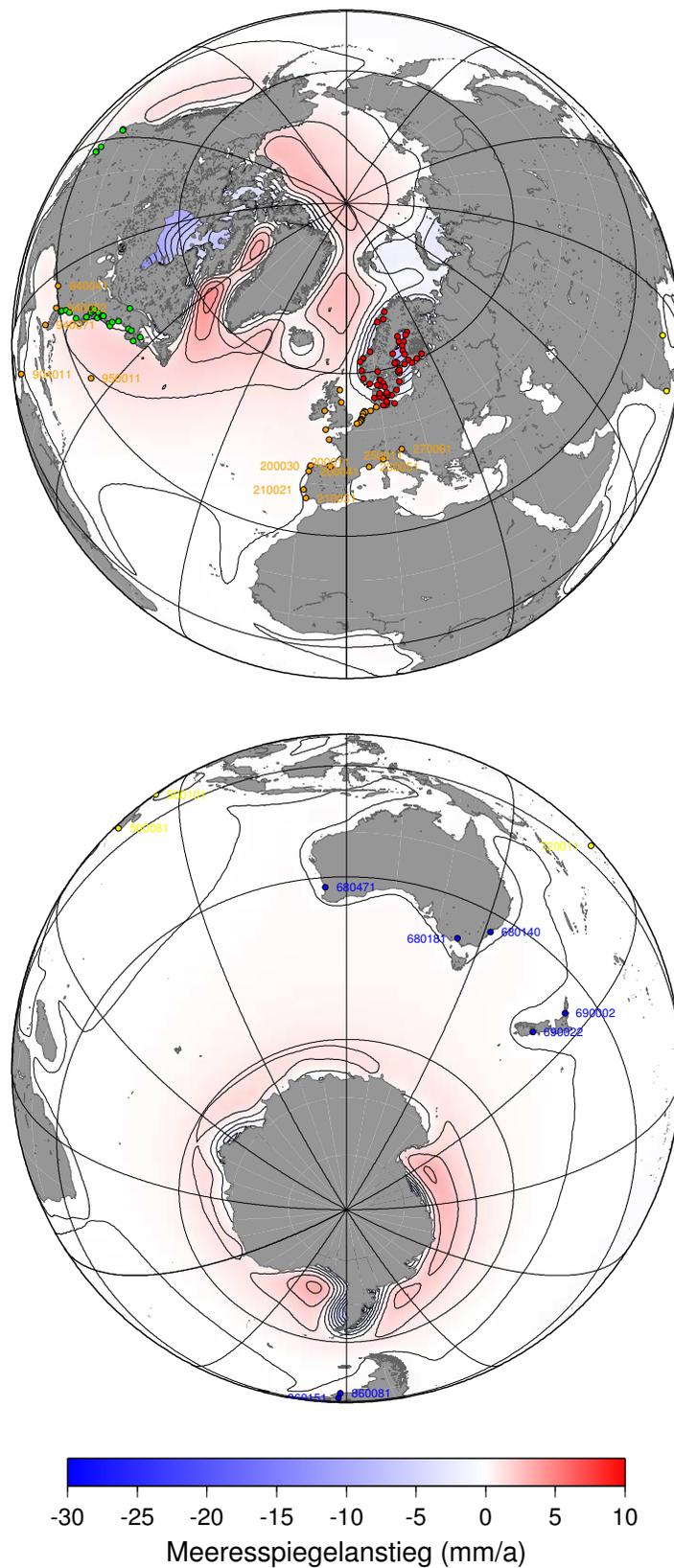


Abbildung 7.10: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VMF/SCAN auf der Nord- bzw. Südhemisphäre. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R2 (grün), R3 (orange), R4 (gelb), R5 (blau). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .



Abbildung 7.11: Reduzierte Pegeldaten der Region R4 mit berechnetem Meeresspiegelanstieg für VMF/SCAN. Die Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs sind jeweils mit der PSMSL-ID gekennzeichnet. Die Einzelwerte sind in Tabelle E.4 gelistet.

7.1.4 Reduzierte Pegeldaten der Region R4

Abbildung 7.10 zeigt die globale Verteilung der Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}° , berechnet mit den optimalen Eingabemodellen VMF/SCAN für die Region R4. Die Pegelstationen sowie die SLI der Region R4 liegen in einem Gebiet, für das nur geringe Geschwindigkeiten des Meeresspiegelabfalls berechnet werden. Sowohl der Einfluß der pleistozänen Eisschilde Nordamerikas und Skandinaviens als auch der Variation des Antarktischen Eisschildes sind demnach im Indischen Ozean und im Pazifik nur sehr gering.

Abbildung 7.11 zeigt für die vier Pegelstationen der Region R4 für \dot{s}° einen gleichmäßigen Meeresspiegelabfall. Somit ergibt sich für den reduzierten Mittelwert mit $\bar{s}^R = 1.40 \text{ mm a}^{-1}$ ein etwas größerer Wert als für die Beobachtungen mit $\bar{s}^L = 1.16 \text{ mm a}^{-1}$. Dementsprechend sind die Varianzen der Mittelwerte mit $\bar{\sigma}^L = \bar{\sigma}^R = 0.33 \text{ mm a}^{-1}$ gleich.

7.1.5 Reduzierte Pegeldaten der Region R5

Für die Region R5 wird die Kombination der Eingabemodelle VM1/SCAN am besten bewertet. Die mit diesen Eingabemodellen berechnete Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs ist in Abbildung 7.12 für die Nord- und Südhemisphäre gezeigt. Die Pegelstationen der Region R5 liegen zum einen an den Küsten Australiens und Neuseeland und zum anderen an den Küsten Südamerikas. Diesen Gebieten ist gemeinsam, daß kein Einfluß der pleistozänen Eisschildevolution auf \dot{s}° zu erkennen ist. Auf der Südhemisphäre sind solche Einflüsse nur an den Küsten der Antarktis mit Werten von $\sim 2 \text{ mm a}^{-1}$ zu beobachten, wobei um die Antarktische Halbinsel sowie in den Schelfeisgebieten Werte von $\sim -6 \text{ mm a}^{-1}$ zu verzeichnen sind.

Abbildung 7.13 zeigt die beobachteten, berechneten und reduzierten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs an den Pegelstationen der Region R5. Nur für die Pegelstationen Fremantle (PSMSL-ID 680471) und Quequen (PSMSL-ID 860081) werden Werte von \dot{s}° berechnet, die signifikant von Null

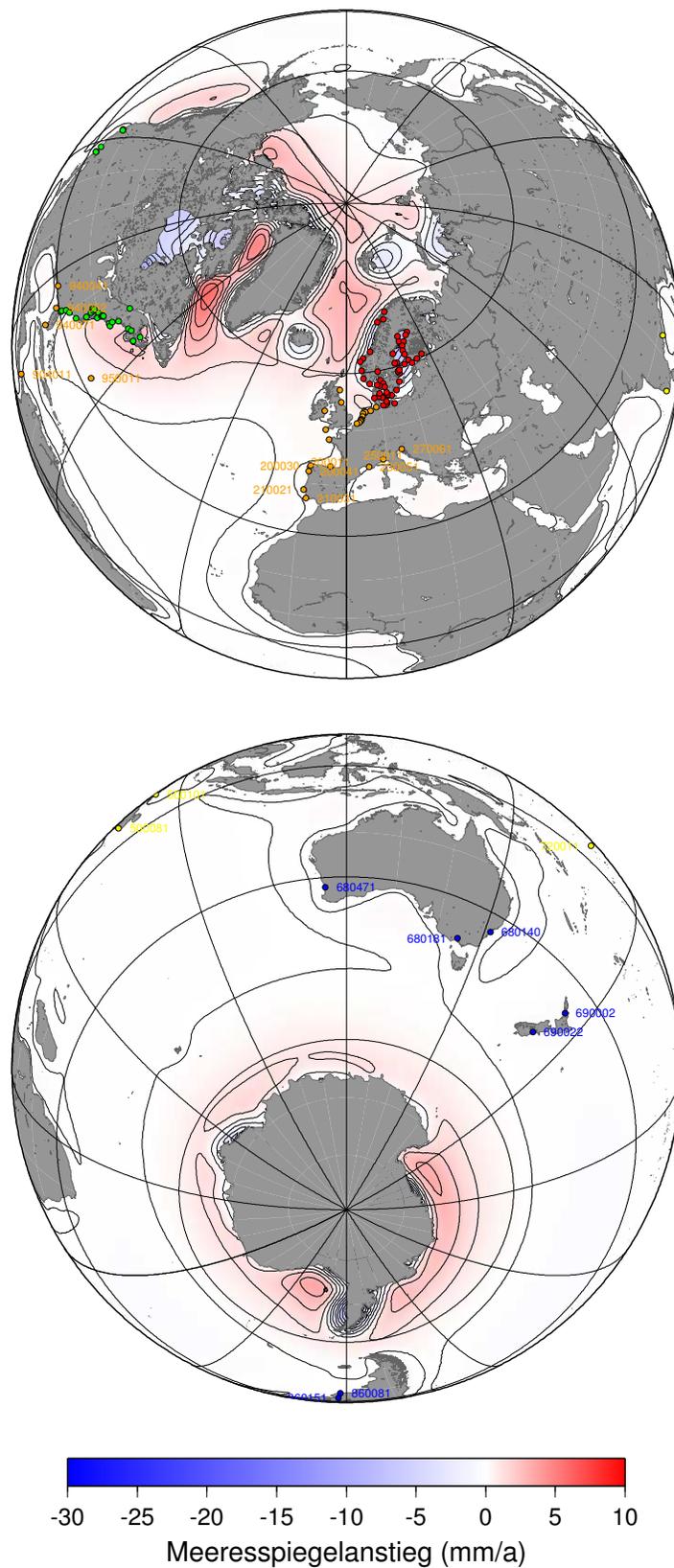


Abbildung 7.12: Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs für VM1/SCAN auf der Nord- bzw. Südhemisphäre. Die geographischen Positionen der Pegelstationen sind entsprechend der Regionen farbig markiert: R1 (rot), R2 (grün), R3 (orange), R4 (gelb), R5 (blau). Der Abstand der Isolinien beträgt 1 mm a^{-1} .

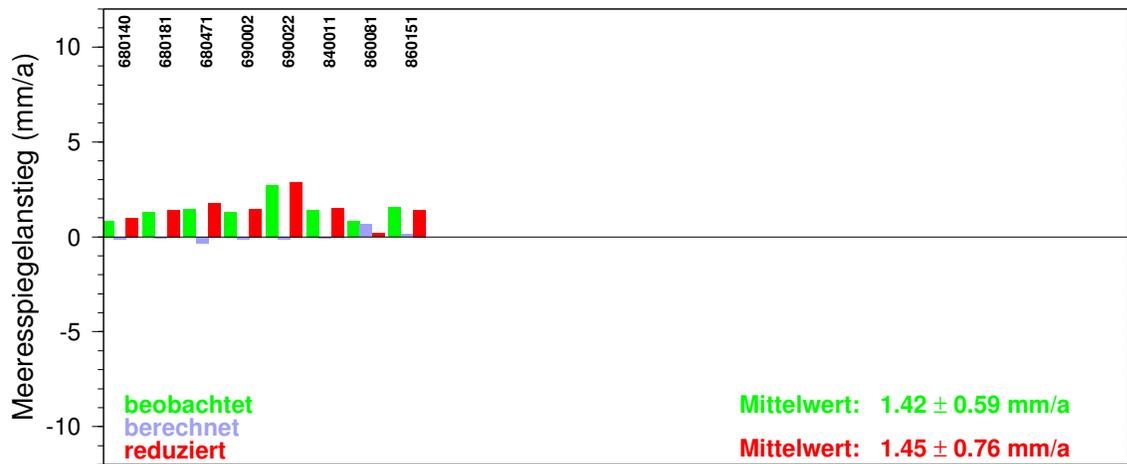


Abbildung 7.13: Reduzierte Pegeldaten der Region R5 mit berechnetem Meeresspiegelanstieg für VM1/SCAN. Die Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs sind jeweils mit der PSMSL-ID gekennzeichnet. Die Einzelwerte sind in Tabelle E.5 gelistet.

abweichen. Somit weichen die Mittelwerte mit $\bar{s}^R = 1.45 \text{ mm a}^{-1}$ und $\bar{s}^L = 1.42 \text{ mm a}^{-1}$ ebenfalls nur gering voneinander ab. Der Unterschied in den zugehörigen Varianzen ($\bar{\sigma}^R = 0.76 \text{ mm a}^{-1}$ und $\bar{\sigma}^L = 0.59 \text{ mm a}^{-1}$) ist auf den annähernd verschwindenden reduzierten Trend für die Pegelstation Queen (PSMSL-ID 860081) zurückzuführen.

7.1.6 Reduzierte Pegeldaten für das einheitliche Zeitintervall 1931–2000

Abbildung 7.14 zeigt \dot{s}^L , \dot{s}^O und \dot{s}^R für 55 Pegelstationen, die das einheitliche Zeitintervall 1931–2000 abdecken. Für die Region R4 bleibt nur die Station Honolulu (PSMSL-ID 760031) übrig. Die beiden australischen Pegelstationen Sydney (PSMSL-ID 680140) und Fremantle (PSMSL-ID 680471) sowie die neuseeländische Station Auckland (PSMSL-ID 690002) verbleiben in der Auswertung für die Region R5. Die für jede Region angegebenen Mittelwerte der beobachteten, \bar{s}^L , und reduzierten, \bar{s}^R , linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs werden mit (7.2) berechnet. Als Fehler sind hier jeweils die entsprechenden Varianzen angegeben, die in (7.3) definiert sind.

Auffällig sind wiederum die negativen Werte von \dot{s}^L für die Pegelstationen der Region R1, die an den Küsten des Bottnischen Meerbusens liegen und Werte von $\sim -7 \text{ mm a}^{-1}$ annehmen. Die reduzierten linearen Trends sind bis auf eine Ausnahme, Oslo (PSMSL-ID 040321), positiv. Dies spiegelt sich im Mittelwert, $\bar{s}^R = 1.26 \text{ mm a}^{-1}$, und der signifikant verkleinerten Varianz, $\bar{\sigma}^R = 0.60 \text{ mm a}^{-1}$, wider. Bei den nordamerikanischen Pegelstationen der Region R2 finden sich zum einen Stationen, für die \dot{s}^O nur gering von Null abweicht und somit der beobachtete und reduzierte lineare Trend fast übereinstimmen (PSMSL-ID 823031–960041 und 960091). Diese liegen hauptsächlich an der Westküste Nordamerikas. Zum anderen finden sich Pegelstationen, für die \dot{s}^O und \dot{s}^L fast identisch sind, so daß die reduzierten linearen Trends nur unwesentlich von Null abweichen (PSMSL-ID 960076–96007 und 960121–960161). Diese liegen alle an der Ostküste Nordamerikas. Somit ist die Verringerung des Mittelwertes von $\bar{s}^L = 2.75 \text{ mm a}^{-1}$ auf $\bar{s}^R = 1.51 \text{ mm a}^{-1}$ zum großen Teil auf letztere reduzierte lineare

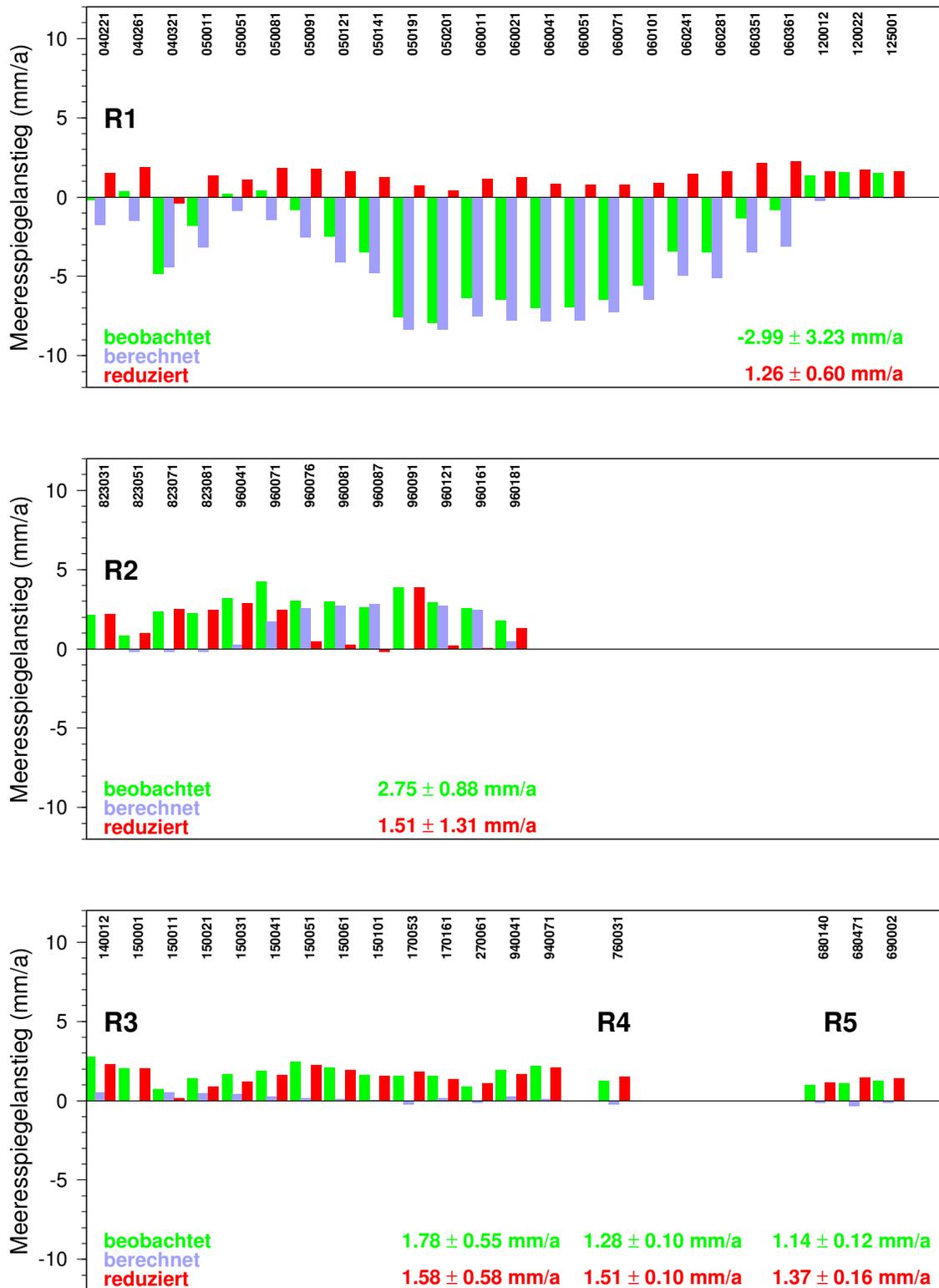


Abbildung 7.14: Reduzierte Pegeldaten für das einheitliche Zeitintervall 1931–2000 der Regionen R1, . . . ,R5 mit berechnetem Meeresspiegelanstieg für die jeweils bestbewertete Eingabemodellkombination. Die Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs sind jeweils mit der PSMSL-ID gekennzeichnet. Die Einzelwerte sind in Anhang E gelistet.

Trends zurückzuführen. Für die Pegelstationen der Region R3, deren größter Teil an der niederländischen und deutschen Nordseeküste liegt, werden \dot{s}^O berechnet, die im Bereich von -0.27 mm a^{-1} bis 0.55 mm a^{-1} liegen. Der Mittelwert, $\bar{\dot{s}}^R = 1.58 \text{ mm a}^{-1}$, ist nur 0.20 mm a^{-1} kleiner als der der beobachteten linearen Trends. In der Region R4 ergibt sich für die verbleibende Pegelstation Honolulu (PSMSL-ID 760031) der reduzierte lineare Trend zu $\dot{s}^R = 1.51 \text{ mm a}^{-1}$. Für die Region R5 mit den verbleibenden australischen und neuseeländischen Pegelstationen ist $\bar{\dot{s}}^R = 1.37 \text{ mm a}^{-1}$.

Im folgenden wird ein Vergleich der reduzierten linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs für die Regionen R1, . . . , R5 präsentiert. Dabei werden auch die Trends für das einheitliche Zeitintervall 1931–2000 betrachtet.

7.2 Globaler mittlerer Meeresspiegelanstieg

In Tabelle 7.1 werden die Mittelwerte der beobachteten und reduzierten linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs für die Regionen R1, . . . , R5 zusammengefaßt. Desweiteren werden hier die Mittelwerte, $\bar{\dot{s}}^L$ und $\bar{\dot{s}}^R$, für alle Pegelstationen angegeben. In der letzten Zeile ist der Mittelwert aus den Ergebnissen der fünf Regionen angefügt. Durch diese zweifache Mittelung, zuerst in den Regionen R1, . . . , R5 und dann der Mittelwerte der fünf Regionen, wird berücksichtigt, daß die Anzahl der Pegelstationen in den Regionen sehr unterschiedlich ist (R1: 50, R2: 29, R3: 30, R4: 4 und R5: 8 Pegelstationen). Für den Mittelwert der Ergebnisse für die Regionen R1, . . . , R5 ergibt sich $\bar{\dot{s}}^R = 1.46 \pm 0.20 \text{ mm a}^{-1}$. Werden mit der gleichen Methode die Ergebnisse für das einheitliche Zeitintervall 1931–2000 bearbeitet, ergibt sich $\bar{\dot{s}}^R = 1.45 \pm 0.13 \text{ mm a}^{-1}$. Wie zuvor werden die Varianzen als Fehler angegeben, da für die Werte von \dot{s}^O keine robuste Fehlerabschätzung möglich ist. Obwohl für das einheitliche Zeitintervall nur 55 anstelle von 121 Pegelstationen berücksichtigt werden, ist nur ein Unterschied von 0.01 mm a^{-1} zu verzeichnen, der weit unterhalb der Fehler liegt. Dies ist auch hinsichtlich der Länge der verwendeten Zeitreihen der Pegelstationen bemerkenswert, da die mittlere Intervalllänge der 121 ausgewählten Pegel 90.7 a beträgt, hingegen das einheitliche Zeitintervall 1931–2000, das 55 Pegel abdecken, eine Länge von 70 a hat. Ebenso liegen die Differenzen der Mittelung aller 121 Werte von \dot{s}^R und der Mittelung der 55 Werte von \dot{s}^R für das einheitliche Zeitintervall mit $\bar{\dot{s}}^R = 1.44 \pm 0.84 \text{ mm a}^{-1}$ bzw. $\bar{\dot{s}}^R = 1.43 \pm 0.80 \text{ mm a}^{-1}$

Tabelle 7.1: Zusammenfassung der Mittelwerte der beobachteten, $\bar{\dot{s}}^L$, und reduzierten, $\bar{\dot{s}}^R$, linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs für die Regionen R1, . . . , R5. Werte in Klammern beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervall 1931–2000. Als Fehler sind die entsprechenden Varianzen $\bar{\sigma}^L$ bzw. $\bar{\sigma}^R$ angegeben.

Region	Eingabemodelle	$\bar{\dot{s}}^L$ (mm a ⁻¹)		$\bar{\dot{s}}^R$ (mm a ⁻¹)	
R1	VMI/SCAN	-2.08 ± 3.09	(-2.99 ± 3.23)	1.23 ± 0.68	(1.26 ± 0.60)
R2	VM1/NAWI	2.55 ± 1.02	(2.75 ± 0.88)	1.77 ± 1.24	(1.51 ± 1.31)
R3	VMA/NAWI	1.59 ± 0.56	(1.78 ± 0.55)	1.47 ± 0.53	(1.58 ± 0.58)
R4	VMF/SCAN	1.16 ± 0.33	(1.28 ± 0.10)	1.40 ± 0.33	(1.51 ± 0.10)
R5	VM1/SCAN	1.42 ± 0.59	(1.14 ± 0.12)	1.45 ± 0.76	(1.37 ± 0.16)
R1–R5		0.28 ± 2.89	(-0.13 ± 3.36)	1.44 ± 0.84	(1.43 ± 0.80)
Mittelwert der R1, . . . , R5		0.93 ± 1.76	(0.79 ± 2.21)	1.46 ± 0.20	(1.45 ± 0.13)

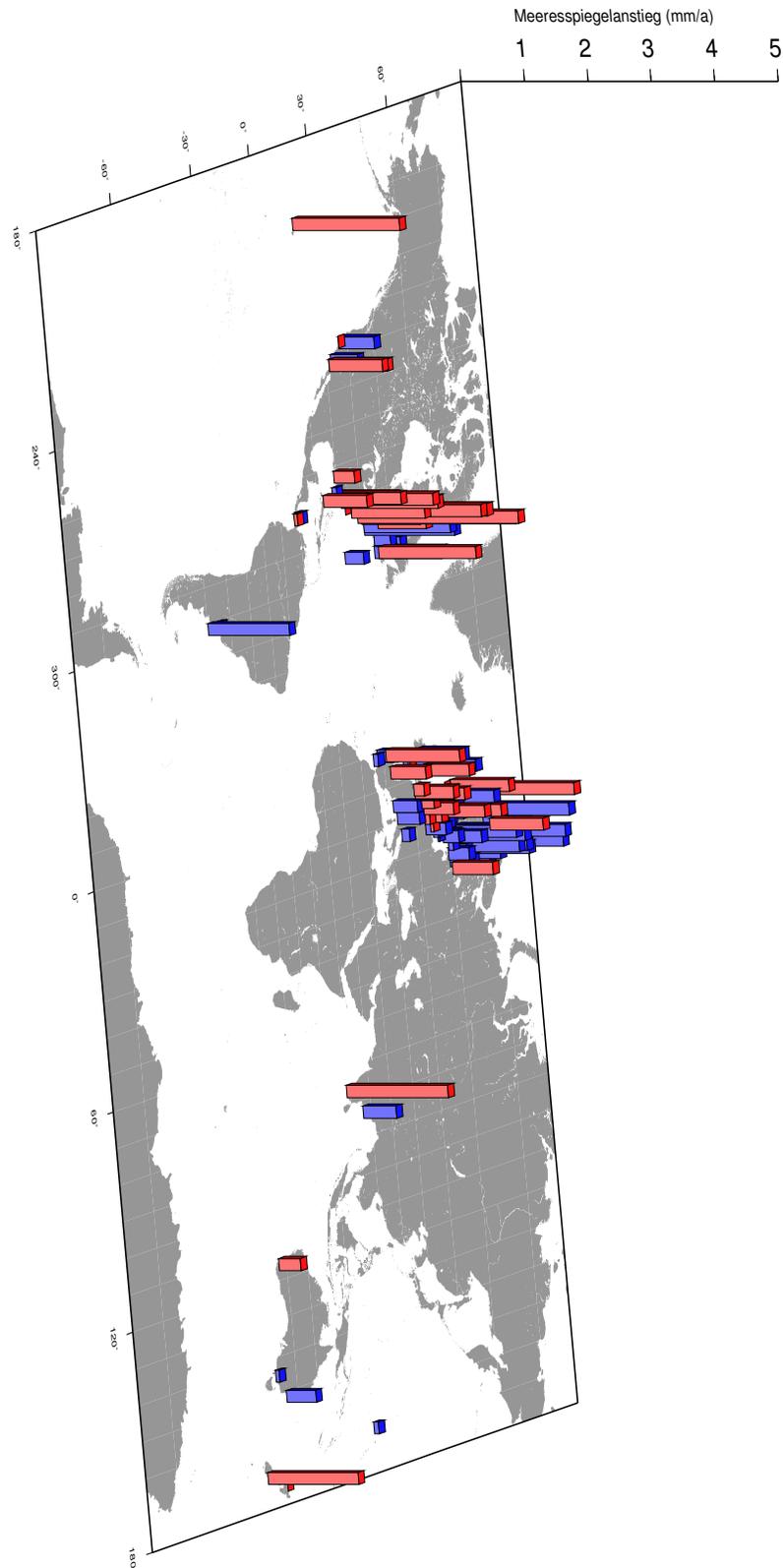


Abbildung 7.15: Globale Verteilung der positiven (rot) und negativen (blau) Differenzen $\bar{s}^R - \bar{s}^R$. Für die Berechnung wird der Mittelwert $\bar{s}^R = 1.46 \text{ mm a}^{-1}$ der Mittelwerte der Regionen R1, ..., R5 verwendet.

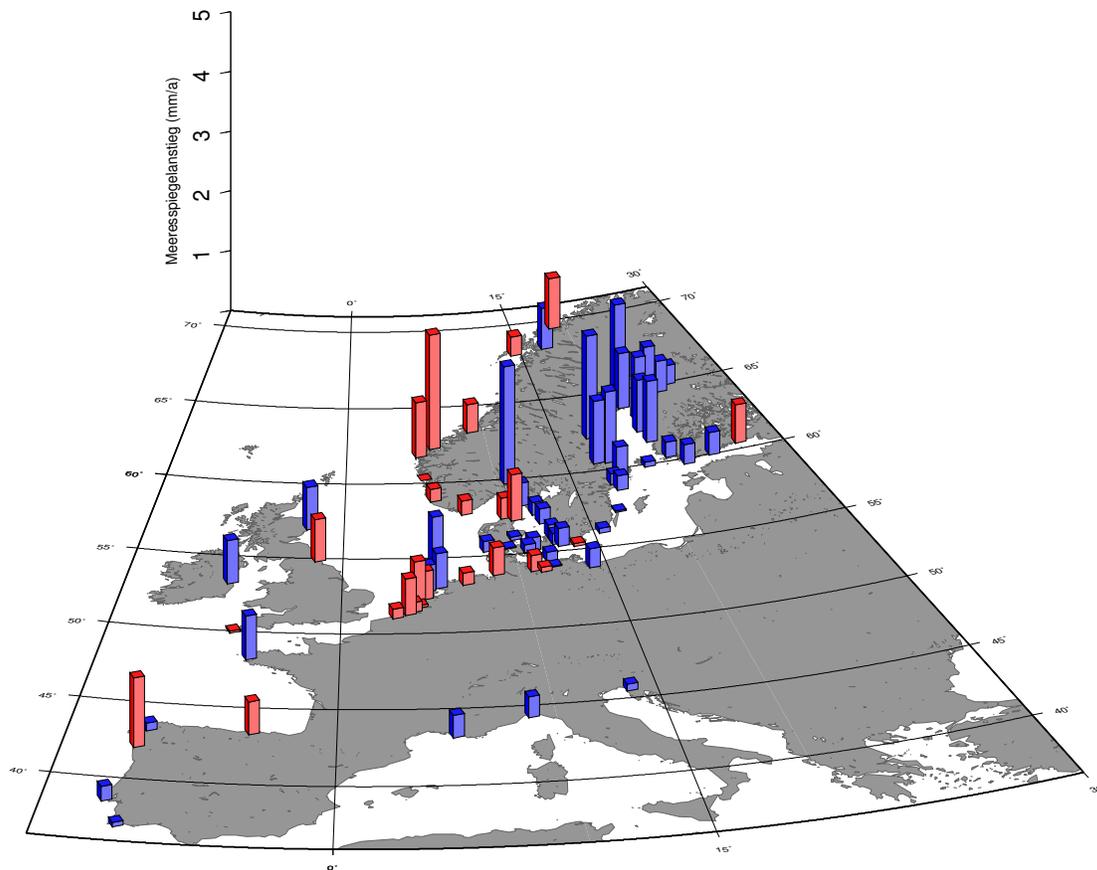


Abbildung 7.16: Verteilung der positiven (rot) und negativen (blau) Differenzen $\dot{s}^R - \bar{\dot{s}}^R$ in Europa. Für die Berechnung wird der Mittelwert $\bar{\dot{s}}^R = 1.46 \text{ mm a}^{-1}$ der Mittelwerte der Regionen R1, ..., R5 verwendet.

weit unterhalb der Fehler. Die wesentlich größeren Varianzen begründen sich in der nur einfachen Mittelung der Werte von \dot{s}^R gegenüber der zweifachen Mittelung zuvor. Im folgenden wird die Streuung der Einzelwerte um die Mittelwerte genauer diskutiert.

In Abbildung 7.15 ist die Variation der Einzelwerte von \dot{s}^R um den Mittelwert $\bar{\dot{s}}^R = 1.46 \text{ mm a}^{-1}$ gezeigt. Die globale Verteilung der Differenzen ist in der Weise dargestellt, daß an den Positionen der Pegelstationen die positive (rot) oder negative (blau) Differenz in einem Säulendiagramm aufgetragen ist. Für die Pegelstationen auf der Südhemisphäre fällt keine systematische Abweichung vom Mittelwert auf. Auch für die Pegelstationen in Mittelamerika, an der Westküste der Vereinigten Staaten, einigen Pazifikinseln und der Küste Indiens wechseln positive und negative Differenzen.

Um die Verteilung in Europa genauer betrachten zu können, ist in Abbildung 7.16 ein Ausschnitt mit den europäischen Pegelstationen gezeigt. In Nordeuropa fällt auf, daß an den Küsten Norwegens fast ausschließlich positive Differenzen und an den Küsten des Bottnischen Meerbusens nur negative Differenzen auftreten. Der Vergleich mit dem berechneten Meeresspiegelanstieg in dieser Region (Abbildung 7.2) zeigt die Übereinstimmung der Gebiete mit negativen Differenzen und größtem Meeresspiegelabfall im Bottnischen Meerbusen auf. Die Ähnlichkeit der beiden Verteilungen ist ein Hinweis darauf, daß die berechneten Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs, die den Einfluß der pleistozänen Eisschild-

evolution wiedergeben sollen, diesen nicht vollständig beschreiben. Allerdings können die negativen Differenzen im Bottnischen Meerbusen auch Beiträge des Effekts enthalten, daß das Becken nur über Skagerak und Kattegat mit den Ozean verbunden ist. Ekman (1996) wies auf die Meeresspiegelvariationen im Bottnischen Meerbusen durch Windstau hin, die eine saisonale Variation mit einer Amplitude von 170 mm hervorrufen kann. Ekman (1998) betonte, daß die saisonale Variation des Meeresspiegels insbesondere in den Monaten Dezember–Januar im letzten Jahrhundert einen signifikanten säkularen Trend aufweist, den er mit 4.7 ± 1.2 cm pro Jahrhundert angibt. Hingegen findet er für die Monate Februar–März einen säkularen Trend von -5.7 ± 1.5 cm pro Jahrhundert. Diese für verschiedene Monate uneinheitlichen Trends können grundsätzlich zu den beobachteten Differenzen zum Mittelwert beitragen. Eine weitere Ursache für die systematischen Differenzen im Bottnischen Meerbusen und an der norwegischen Küste könnte in der Vereinfachung des verwendeten radialsymmetrischen Erdmodells liegen. Fjeldskaar (1997) diskutierte unter anderem die Verdickung der skandinavischen elastischen Lithosphäre von ~ 50 km in Westnorwegen auf ~ 110 km im Zentrum. Klemann & Wolf (1999) betrachteten den Einfluß einer duktilen Zone innerhalb der skandinavischen Lithosphäre. Dieser spiegelt sich in einer zusätzlichen, auf geologischen Zeitskalen langsamen, Relaxation dieser Zone wider, die die berechneten Spannungen deutlich, jedoch die Geschwindigkeit der Vertikalbewegung nur gering beeinflusst. Desweiteren untersuchten Martinec & Wolf (2005), in wie weit es möglich ist, aus dem Spektrum skandinavischer Relaxationszeiten Informationen über eine Verdickung der skandinavischen Lithosphäre zu gewinnen. Sie fanden, daß aufgrund der verwendeten Daten eine Lithosphärenverdickung nicht bestätigt aber auch nicht widerlegt werden kann, jedoch verschiedene andere Beobachtungen auf diese laterale Heterogenität hinweisen.

Bei den drei Pegelstationen in Großbritannien und der irischen Pegelstation sind keine einheitlichen Differenzen zu beobachten. Während im Süden Englands eine nur geringe Abweichung vom Mittelwert zu verzeichnen ist, haben an der Ostküste die Differenzen unterschiedliche Vorzeichen. An der irischen Pegelstation ist hingegen eine negative Differenz zu verzeichnen. An der Ostküste Nordenglands wurde eine von der Mächtigkeit der Sedimente abhängige Kompaktion derselben diskutiert (Shennan et al., 2000a), die hier nicht berücksichtigt wird und zu Vertikalbewegungen der Pegelstationen führen kann. Eine weitere Ursache der unterschiedlichen Differenzen kann in der nur unzureichenden Beschreibung der Abschmelzgeschichte des pleistozänen Eisschilds liegen. Shennan et al. (2002) untersuchten die komplexe Abschmelzgeschichte in Schottland und Nordengland und deren Auswirkung auf den Meeresspiegel (siehe auch Shennan et al., 2000b).

An der belgischen und niederländischen Küste sind im Westen positive Differenzen und im Osten negative Differenzen zu verzeichnen. In Kiden et al. (2002) wird auf tektonisches Absinken dieser Küste hingewiesen, das von West nach Ost zunimmt und auch Beiträge durch Sedimentkompaktion beinhalten kann, und im Bereich von 0.06 – 0.16 mm a⁻¹ liegt. Auffällig sind die drei negativen Differenzen im Westen, an der Grenze zur deutschen Nordseeküste. Diese lassen vermuten, daß neben den tektonischen auch lokale Prozesse zur Vertikalbewegung beitragen können, z. B. intensive Grundwassergewinnung, Wasserbau oder Landgewinnung.

Die drei Pegelstation im Mittelmeer weisen alle negative Differenzen zum Mittelwert des globalen

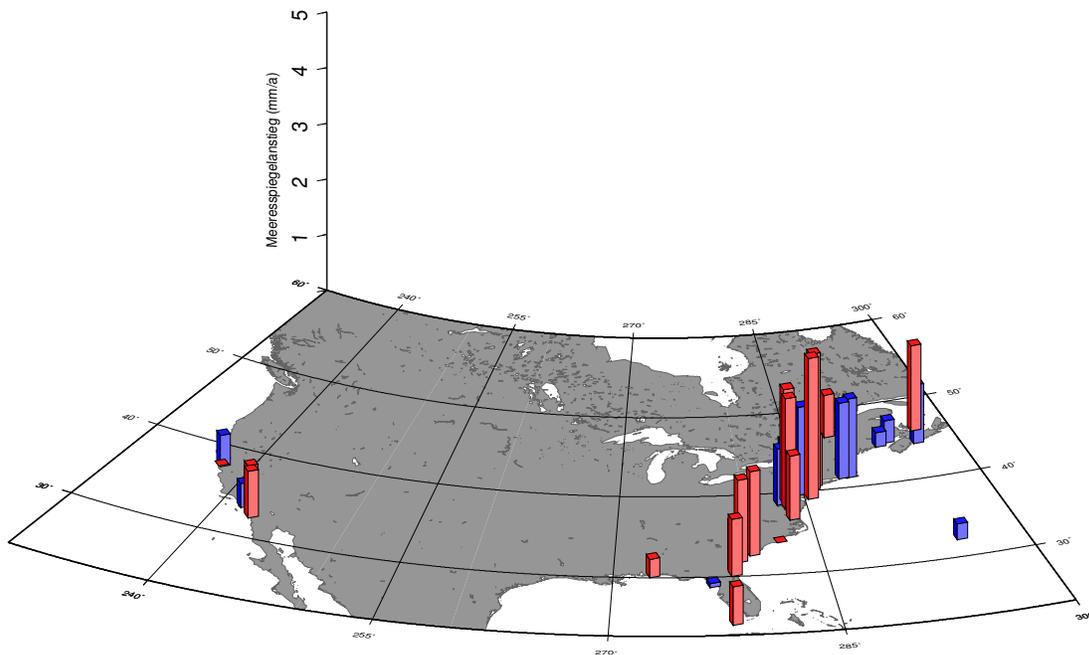


Abbildung 7.17: Verteilung der positiven (rot) und negativen (blau) Differenzen zwischen \dot{s}^R und $\bar{\dot{s}}^R$ in Nordamerika. Für die Berechnung wird der Mittelwert $\bar{\dot{s}}^R = 1.46 \text{ mm a}^{-1}$ der Mittelwerte der Regionen R1, ..., R5 verwendet.

Meeresspiegelanstiegs auf. Zwar wird die tektonische Stabilität der Küsten, an denen die französische (Lambeck & Bard, 2000) und die italienischen Pegelstationen (Lambeck et al., 2004) liegen, diskutiert, jedoch gibt es nur Anzeichen für ein geringes Absinken beider Küstengebiete. Dies sollte sich dann allerdings in positiven Differenzen widerspiegeln. Es bleibt demnach zu klären, ob andere, z. B. lokale Prozesse, die Pegelstationen beeinflussen. Trupin & Wahr (1990) untersuchten den Einfluß von Luftdruckvariationen auf Pegelmeßwerte in verschiedenen Gebieten. Sie betrachteten 33 Pegelstationen an den Küsten des Mittelmeers und beobachteten einen stärkeren Einfluß der Luftdruckvariationen als theoretisch durch den IB-Effekt erklärt werden kann. Dieses wurde auf die Verstärkung des Effekts durch lokale bathymetrische Anomalien des Meeresbeckens oder durch lokale Ozeanströmungen zurückgeführt.

Abbildung 7.17 zeigt die geographische Verteilung der Differenzen zwischen \dot{s}^R und $\bar{\dot{s}}^R$ für die nordamerikanischen Pegelstationen. An der Westküste zeigt sich ein sehr uneinheitliches Bild, so daß hier keine Ursachen für systematische Abweichungen gesucht werden. Anders ist die Situation an der Ostküste. Überwiegen dort im Süden die positiven Differenzen, zeigen sich weiter im Norden Abschnitte mit negativen Differenzen. Eine mögliche Ursache für dieses systematische Verhalten liegt in einer nicht-berücksichtigten duktilen Zone innerhalb der Lithosphäre. Di Donato et al. (2000) berechneten den Einfluß einer duktilen Zone auf modellierte Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs an der Ostküste Nordamerikas. Durch den Verlauf der Küstenlinie, die mehrfach die Isolinien der postglazialen Deformation kreuzt, sind die dort liegenden Pegelstation sensitiv für eine solche Zone in der Lithosphäre. Durch die Berücksichtigung einer duktilen Zone wurden Unterschiede in den Geschwindigkeiten des Meeresspiegelanstiegs von $\pm 0.5 \text{ mm a}^{-1}$ bestimmt. Der Vergleich der geographischen Verteilung dieser Unterschiede (Di Donato et al., 2000, Fig. 2) mit der der Differenzen in Abbildung 7.17 zeigt eine deutliche

Tabelle 7.2: Vergleich der Literaturwerte des globalen mittleren Meeresspiegelanstiegs, reduziert um den Einfluß der pleistozänen Eisschildevolution.

Veröffentlichung	globaler mittlerer Meeresspiegelanstieg \bar{s}^R (mm a ⁻¹)
Peltier & Tushingham (1989)	2.40 ± 0.90
Trupin & Wahr (1990)	1.75 ± 0.13
Douglas (1991)	1.80 ± 0.10
Mitrovica & Davis (1995); Davis & Mitrovica (1996)	1.40 ± 0.40
Douglas (1997)	1.80 ± 0.10
Peltier & Jiang (1997)	1.80 ± 0.60
Church et al. (2001)	1.50 ± 0.50
Cazenave & Nerem (2004)	3.10 ± 0.40
Holgate & Woodworth (2004)	1.70 ± 0.20
Tabelle 7.1	1.46 ± 0.20

che Übereinstimmung. Davis & Mitrovica (1996) zeigten hingegen, daß die Position des Hebungsgebiets an der Ostküste sensitiv für die Viskosität des unteren Mantels ist. Sie optimierten diese Viskosität für die minimierte Streuung der reduzierten Pegeldata zu $4.7 \cdot 10^{21}$ Pa s und erlangten eine weitgehende Reduktion der Nord-Süd-Abhängigkeit der Pegeldata. Der Vergleich des Viskositätswert von Davis & Mitrovica (1996) für den unteren Mantel mit dem für die Region R1 von $\sim 2.0 \cdot 10^{21}$ Pa s (Viskositätsmodell VM1) gibt einen Hinweis auf eine nichtberücksichtigte laterale Heterogenität als mögliche Ursache.

In Tabelle 7.2 ist der reduzierte globale mittlere Meeresspiegelanstieg, \bar{s}^R , der in dieser Arbeit bestimmt worden ist, verschiedenen anderen Abschätzungen gegenüber gestellt. Der hier berechnete Wert ist kleiner als die meisten in der Literatur angegebenen Werte, jedoch lassen sich bei vier Werten (Davis & Mitrovica, 1996; Peltier & Jiang, 1997; Church et al., 2001; Holgate & Woodworth, 2004) Übereinstimmungen innerhalb der Fehler finden. Für die übrigen Werte sind überwiegend kleine Abweichungen von ~ 0.3 mm a⁻¹ zu verzeichnen, wobei die Werte aus Peltier & Tushingham (1989) und Cazenave & Nerem (2004) herausfallen. Zu dem Ergebnis von Peltier & Tushingham (1989) ist anzumerken, daß eine ähnliche Methode mit neueren Modellvorgaben in Peltier & Jiang (1997) zu einem Ergebnis führt, welches innerhalb der Fehler mit der Mehrheit der Werte übereinstimmt. Hingegen ist das Ergebnis von Cazenave & Nerem (2004) im Gegensatz zu allen anderen Abschätzungen nicht mit Hilfe von Pegelmeßwerten bestimmt, sondern aus Altimetriedaten abgeleitet. Die verwendeten Daten beziehen sich auf den Zeitraum 1993–2003. Aus diesen wurden für den zehntägigen Zyklus der Satellitenbahnen Variationen des globalen mittleren Meeresspiegels berechnet, auf deren Grundlage der lineare Trend für die Dekade zu 2.8 ± 0.4 mm a⁻¹ bestimmt wurde. Die Korrektur für die Variation des Ozeanvolumens durch die Deformation des Ozeanbodens und des Geoids führte dann zu dem tabellierten Wert von 3.1 ± 0.4 mm a⁻¹. Cazenave & Nerem (2004) betonten, daß dieser Wert nicht nur signifikant von den Werten abweicht, die aus den Pegelmeßwerten abgeleitet wurden, sondern auch, daß alle Abschätzungen nicht mit den be-

rechneten Beiträgen zum Meeresspiegelanstieg aus Klimamodellen in Einklang gebracht werden können. Desweiteren verwiesen Cazenave & Nerem (2004) auf das Problem der geographischen Verteilung der Pegelstationen, die sich auf der Nordhemisphäre an den Küsten Europas und Nordamerikas konzentrieren. Die dadurch möglicherweise Überbewertung der Küstenzonen sowie die unterschiedlichen Ergebnisse der verschiedenen Betrachtungen werden in Abschnitt 7.3 diskutiert. Beim Vergleich mit regionalen Untersuchungen finden sich weitere Übereinstimmungen, z. B. für Skandinavien, wo der hier bestimmte Mittelwert, $\bar{s}^R = 1.23 \pm 0.68 \text{ mm a}^{-1}$ für die Region R1, mit dem von Lambeck et al. (1998a) berechneten, $\bar{s}^R = 1.10 \pm 0.20 \text{ mm a}^{-1}$, innerhalb der Fehler überlappt. Hingegen wird von Milne et al. (2001) für Skandinavien ein aus mit GPS-Messungen reduzierten Pegelraten bestimmter Meeresspiegelanstieg von $\bar{s}^R = 2.1 \pm 0.3 \text{ mm a}^{-1}$ angegeben. Es ist anzumerken, daß die hierzu verwendeten Zeitreihen von 20 Pegeln eine Länge von mindestens 35 a und von 34 GPS-Stationen eine Länge von höchstens 8 a aufweisen. Somit bezieht sich dieses Ergebnis auf kürzere Zeitintervalle als das Ergebnis von Lambeck et al. (1998a) und dieser Arbeit.

Die Bedeutung des globalen mittleren Meeresspiegelanstiegs, \bar{s}^R , berechnet aus den Mittelwerten der Regionen R1, . . . , R5, als Maß für die Variation des Ozeanvolumens und der Ozeanmasse, bleibt zu klären. Im folgenden Abschnitt wird der Stand der Diskussion wiedergegeben und es wird eine Bewertung der verschiedenen Erklärungsversuche gegeben.

7.3 Abschließende Bewertung

In Abschnitt 7.1.1–7.1.5 sind die beobachteten, berechneten und reduzierten linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs an den Pegelstationen gezeigt. Wie dort diskutiert, ist in den Beobachtungen und Ergebnissen der Berechnung der Einfluß der pleistozänen Eisschildentwicklung deutlich zu erkennen. Der Vergleich der beobachteten, \dot{s}^L , und reduzierten, \dot{s}^R , linearen Trends zeigt auf, daß die hier angewandte Methode in der Lage ist, diesen Einfluß deutlich zu reduzieren.

Für einige Pegelstationen ist die Reduktion allerdings nur unvollständig oder der Wert von \dot{s}^R ist durch Beiträge beeinflusst, die durch die Auswahl der Stationen ursprünglich ausgeschlossen werden sollten. Im vorausgehenden Abschnitt wird für die Pegelstationen der Region R1 auf die unvollständige Reduktion hingewiesen. Als Ursache ist neben dem nicht optimalen Eismodell auch die Beschränkung auf ein radialsymmetrisches Viskositätsmodell angeführt. Diese Beschränkung ergibt sich durch die verwendete Theorie der VR, für die zur Vereinfachung die Annahme einer Radialsymmetrie herangezogen ist. Ebenso sind ähnliche Schlußfolgerungen aus der Bewertung der reduzierten Pegelraten für die Ostküste Nordamerikas in der Region R2 gezogen (Abschnitt 7.2).

Für die Pegelstationen an der belgischen und niederländischen Nordseeküste aus der Region R3 ist im vorausgehenden Abschnitt die Beeinflussung durch Vertikalbewegungen diskutiert, die nicht durch postglaziale Relaxation verursacht sind. Diese Stationen zeigen, daß in den beschriebenen LTA-Diagrammen (Abschnitt 6.3), die neben den Werten von \dot{s}^L auch die Detektion solcher Einflüsse ermöglichen sollen, diese nicht ersichtlich sind. Hieran werden die Grenzen dieser Methode deutlich.

Bei den drei Stationen an den Küsten des Mittelmeers der Region R3 wird in Abschnitt 7.2 auf den

Einfluß des IB-Effekts auf die Pegeldata hingewiesen. Da in dieser Arbeit keine Reduktion hinsichtlich der Schwankungen des Luftdrucks vorgenommen ist, sondern nur Stationen ausgeschlossen sind, bei denen die LTA-Diagramme deutlich auf eine Beeinflussung durch den IB-Effekt hinweisen, kann bei den berücksichtigten Pegeldata ein atmosphärischer Beitrag grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden (Abschnitt 6.3).

Die hier genannten Einschränkungen bei der Reduktion des Einflusses der pleistozänen Eisschildentwicklung und des Ausschlusses von anderweitig beeinflussten Pegeldata erlauben eine Einschätzung der Grenzen der hier vorgestellten Reduktionsmethode und der ihr zugrundeliegenden theoretischen Beschreibung. Ein wichtiges Ergebnis der Berechnung des reduzierten globalen mittleren Meeresspiegelanstiegs in Abschnitt 7.2 bleibt jedoch, daß \bar{s}^R sowohl hinsichtlich der geographischen Verteilung der Pegelstationen als auch hinsichtlich des berücksichtigten Zeitintervalls robust ist (Tabelle 7.1).

Im zweiten Fall beträgt für die 121 verwendeten Pegelstationen die mittlere Intervalllänge 90.7 a, während an 55 Pegelstationen für das einheitliche Intervall 1931–2000 Zeitreihen existieren. Somit repräsentiert der in dieser Arbeit bestimmte Wert von $\bar{s}^R = 1.46 \pm 0.20 \text{ mm a}^{-1}$ den linearen Trend des globalen Meeresspiegelanstiegs für das letzte Jahrhundert.

Es ist zu beachten, daß der lineare Trend des globalen mittleren Meeresspiegelanstiegs einer Volumenänderung entspricht. Bei einer Diskussion der verschiedenen Beiträge zum beobachteten Meeresspiegelanstieg muß folglich der thermosterische Beitrag berücksichtigt werden. Cabanes et al. (2001b) schätzten diesen Beitrag zum Meeresspiegelanstieg zu $0.50 \pm 0.05 \text{ mm a}^{-1}$, wobei sie eine interpolierte globale Datenbasis von Ozeantemperaturen für das Zeitintervall 1955–1996 verwendeten. Bei einer Beschränkung auf das Zeitintervall 1993–1998 ergab sich hingegen ein thermosterischer Beitrag von $3.1 \pm 0.4 \text{ mm a}^{-1}$. Die Untersuchung von Antonov et al. (2002) für das Zeitintervall 1957–1994 anhand von Ozeantemperaturdaten lieferte einen thermo- und haliosterischen Beitrag von $\sim 0.55 \text{ mm a}^{-1}$ und bestätigte damit das erste Ergebnis. Weiterhin untersuchten sie für das gleiche Zeitintervall anhand von Salinitätsvariationen die Süßwasserzufuhr in die Ozeane und bestimmten einen Beitrag von $1.3 \pm 0.5 \text{ mm a}^{-1}$. Miller & Douglas (2004) diskutierten die Schwächen dieses Ansatzes und wiesen darauf hin, daß die Süßwasserzufuhr auch die Beiträge von Meer- und Schelfeis enthält.

Cazenave & Nerem (2004) verglichen das Ergebnis von $3.2 \pm 0.20 \text{ mm a}^{-1}$ der Altimetriemessungen des Satelliten TOPEX/Poseidon für das Zeitintervall 1993–1998 mit dem thermosterischen Beitrag von $3.1 \pm 0.4 \text{ mm a}^{-1}$ für denselben Zeitraum (Cabanes et al., 2001b) und folgerten einen weitgehend thermosterisch bedingten Meeresspiegelanstieg. Dies würde auf eine signifikante Beschleunigung des thermosterisch bedingten Meeresspiegelanstiegs in den vergangenen Jahren hinweisen. Der in Tabelle 7.2 angegebene lineare Trend des Meeresspiegelanstiegs, $\bar{s}^R = 3.1 \pm 0.4 \text{ mm a}^{-1}$, entsprechend den Altimetriemessungen der Satelliten TOPEX/Poseidon und Jason bezieht sich auf das Zeitintervall 1993–2003 und bestätigt damit das Ergebnis für die letzte Dekade.

Der in der vorliegenden Arbeit bestimmte Wert von $\bar{s}^R = 1.46 \pm 0.20 \text{ mm a}^{-1}$ ist hingegen für das letzte Jahrhundert repräsentativ. Desweiteren sind die Pegelstationen an den Küsten der Nordhemisphäre konzentriert (Abbildung 6.1), während die Altimetriemessungen die Ozeane abdecken. Zur Erklärung dieser teilweise inkonsistenten Ergebnisse dienen folgende Hypothesen:

- Die linearen Trends gemäß der Pegel- und Altimetriedaten sind mittlere Werte des Meeresspiegelanstiegs für die entsprechenden Zeitintervalle. Der Unterschied zwischen den Ergebnissen ist auf eine signifikante Beschleunigung des Meeresspiegelanstiegs während der letzten Dekade zurückzuführen, der weitgehend durch den Anstieg des thermosterischen Beitrags erklärt werden kann.
- Der lineare Trend gemäß der Altimetriedaten reflektiert nicht den mittleren Meeresspiegelanstieg während der letzten Dekade, da die Daten durch Beiträge beeinflusst werden, die nicht oder nicht vollständig berücksichtigt sind. Derartige Beiträge sind der Einfluß der pleistozänen Eisschild-evolution, langperiodische Gezeiten, der IB-Effekt und Ozeanströmungen. Dagegen repräsentiert der lineare Trend gemäß der Pegeldata den Meeresspiegelanstieg besser. Dann kann allerdings nur der langzeitliche thermosterische Beitrag von $\sim 0.5 \text{ mm a}^{-1}$ in Einklang mit den Pegeldata gebracht werden, d. h. der für die letzte Dekade abgeschätzte Beitrag muß zu hoch sein.
- Der lineare Trend gemäß der Altimetriedaten beschreibt den Meeresspiegelanstieg während der letzten Dekade. Dagegen ist der aus den Pegeldata bestimmte lineare Trend durch die Überbewertung der Küstenzone nicht repräsentativ für das letzte Jahrhundert. Dies würde bedeuten, daß die Pegelstationen den globalen Meeresspiegelanstieg abgeschwächt aufzeichnen, so daß keine oder nur eine geringe Beschleunigung des Meeresspiegelanstiegs erfolgt ist.

Eine Verifizierung oder Falsifizierung der genannten Hypothesen ist in dieser Arbeit nicht möglich. Es kann jedoch darauf hingewiesen werden, welche Weiterentwicklungen der hier vorgestellten Methode einen Beitrag dazu leisten könnten, die Reduktion der Pegeldata zu verbessern.

7.4 Weiterentwicklung

Mit der Präsentation der Ergebnisse und deren Bewertung in diesem Kapitel ist das Potential der in dieser Arbeit entwickelten Methode, den Einfluß der pleistozänen Eisschildentwicklung auf Pegelmeßwerte zu berechnen, aufgezeigt worden. Allerdings sind in der theoretischen Beschreibung dieses Problems (Kapitel 2) und dessen numerischer Implementierung (Kapitel 4) verschiedene einschränkende Annahmen gemacht. Für die Weiterentwicklung der Methode ist es von Vorteil, einige dieser Einschränkungen aufzuheben, was im folgenden betrachtet wird.

Bei der Theorie und Implementierung der VR wird auf die Annahme von Radialsymmetrie hingewiesen. Wie die Ergebnisse der Bewertung der Eingabemodelle in Abschnitt 5.3 zeigen, werden für die Regionen R1, . . . , R4 unterschiedliche Viskositätsmodelle gewählt. Auf die Möglichkeit lateraler Variationen der Viskosität weisen darüber hinaus Beobachtungen der postglazialen Landhebung hin (z. B. Breuer & Wolf, 1995; Kaufmann & Wolf, 1996; Peltier & Jiang, 1996; Lambeck et al., 1998b; Kaufmann et al., 2000; Cianetti et al., 2002; Sabadini et al., 2002; Wu & van der Wal, 2003; Martinec & Wolf, 2005). Eine wünschenswerte Weiterentwicklung wäre daher, die Theorie der VR für lateral variierende Viskositätsverteilungen (Martinec, 2000) zu berücksichtigen. Weiterhin wird in Abschnitt 4.3 die rotationsbedingte elastischen Deformation in der RT beschrieben, die jedoch bei der Berechnung der VR vernachlässigt ist. In der Weiterentwicklung der Theorie sollte daher diese rotationsbedingte Zusatzdeformation konsistent

berücksichtigt werden, indem das Zentrifugalpotential, $\psi^{(\Delta)}$, mit den Gleichungen der VR gekoppelt wird.

An der Variation der Abweichungswerte für die verschiedenen Eingabemodelle (Abschnitt 5.3.2) ist die Bedeutung der verwendeten Eismodelle zu erkennen. Insbesondere für die Regionen R1 und R2 ergibt sich bei Verwendung unterschiedlicher Eismodelle eine signifikante Veränderung der Anpassung (Tabelle 5.3). Da die Pegelstationen und SLI dieser Regionen in den pleistozän vereisten Gebieten liegen, ist diese Abhängigkeit zu erwarten. Eine weitere Optimierung des Eismodells sollte daher auch zu einer besseren Reduktion der Pegelmeßwerte führen. Sollten künftige Eismodelle so detailliert sein, daß die hier verwendete räumliche Auflösung eine Einschränkung darstellen würde, kann diese Auflösung weiter erhöht werden.

Auch für die Bearbeitung der Pegelmeßwerte ergeben sich Vorschläge zur Weiterentwicklung. In Abschnitt 6.2 werden Pegelstationen aus der Datenbasis des PSMSL ausgewählt, wobei alle Stationen der russischen Arktis aufgrund des Einflusses des IB-Effekts ausgeschlossen sind. Bei einer Reduktion hinsichtlich dieses Effekts könnte zum einen die Anzahl der Pegelstationen vergrößert werden und zum anderen für einige Pegelstationen, z. B. bei denen des Mittelmeers, die Abweichung vom mittleren globalen Meeresspiegelanstieg verringert werden. Desweiteren ist zu betrachten, ob Hinweise auf tektonisch oder anthropogen bedingte Vertikalbewegungen an Pegelstationen nicht nur als Ausschlußkriterium dienen, sondern für eine Reduktion hinsichtlich dieser Bewegungen herangezogen werden können. Hier ist zu beachten, daß aus geologischen Beobachtungen abgeleitete Vertikalbewegungen (z. B. Lambeck & Bard, 2000; Lambeck et al., 2004) meist mit ungenügend quantifizierbaren Fehlern behaftet sind. Die direkte Bestimmung der Vertikalbewegungen durch in der Nähe von Pegelstationen installierten GPS-Empfängern kann daher die Bearbeitung von Pegeldaten wesentlich verbessern. Derzeit wird im TIGA-Projekt¹ eine Datenbank für entsprechende GPS-Stationen aufgebaut. In diesem Zusammenhang ist das BIFROST-Projekt von Interesse, für das 34 gleichmäßig über Finnland und Schweden verteilte GPS-Empfänger herangezogen werden, die seit 1995 bzw. 1993 kontinuierlich messen. Die von Milne et al. (2001) vorgestellten Ergebnisse dieses Projekts demonstrieren die weitgehende Übereinstimmung der aus GPS-Messungen bestimmten mit den berechneten Vertikalbewegungen. Hieraus wird ersichtlich, welche Möglichkeiten sich für zukünftige Reduktionen von Pegeldaten durch GPS-Messungen eröffnen. Darüber hinaus können die aus GPS-Messungen bestimmten Vertikal- und Horizontalbewegungen dazu genutzt werden, die Viskositätsmodelle zur Berechnung der VR zu optimieren (Milne et al., 2004). Ein kleiner Nachteil von GPS-Messungen besteht darin, daß durch sie grundsätzlich nur Verschiebungen bestimmt werden. Demgegenüber muß bei der Reduktion der Pegeldaten hinsichtlich des Einflusses der pleistozänen Eisschilddevolution auch die Geoidhöhenänderung berücksichtigt werden, was durch die in der vorliegenden Untersuchung durchgeführten Berechnungen geleistet wird.

Wie in Abschnitt 7.3 dargestellt ist, wird in der gegenwärtigen Diskussion zum mittleren globalen Meeresspiegelanstieg die Bedeutung der Altimetriemessungen hervorgehoben. Insbesondere wiesen Cazenave & Nerem (2004) darauf hin, daß Altimetriemessungen über ein Zeitintervall von 30 a ausreichen

¹Zur weiteren Information über das "GPS Tide Gauge Benchmark Monitoring-Pilot Project" wird auf http://op.gfz-potsdam.de/tiga/index_TIGA.html verwiesen.

sollen, um etwaige Änderungen im Trend des globalen Meeresspiegelanstiegs bestimmen zu können. Allerdings erlaubt diese Methode keine Aussagen über den Meeresspiegel im 20. Jahrhundert. Somit bilden die Pegelmeßwerte die Grundlage für eine “Rückrechnung” des globalen mittleren Meeresspiegels und damit für eine Beurteilung der Ergebnisse der Satellitenaltimetrie.

Literaturverzeichnis

- Antolik, M., Gu, Y., Ekström, G., Dziewonski, A., 2003. J362d28: a new joint model of compressional and shear velocity in the earth's mantle. *Geophys. J. Int.* 153, 443–466.
- Antonov, J., Levitus, S., Boyer, T., 2002. Steric sea level variation during 1957-1994: importance of salinity. *J. Geophys. Res.* 107 (C12), doi:10.1029/2001JC000964.
- Bintanja, R., van de Wal, R., Oerlemans, J., 2002. Global ice volume variations through the last glacial cycle simulated by a 3-d ice-dynamical model. *Quat. Int.* 95-96, 11–23.
- Bogdanov, V., Medvedev, M., Solodov, V., Trapeznikov, Y., Troshkov, G., Trubitsina, A., 2000. Mean monthly series of sea level observations (1777-1993) at the Kronstadt gauge. 2000:1, Reports of the Finnish Geodetic Institute.
- Breuer, D., Wolf, D., 1995. Deglacial land emergence and lateral upper-mantle heterogeneity in the Svalbard Archipelago - I. First results for simple load models. *Geophys. J. Int.* 121, 775–788.
- Bronstein, I., Semendjajew, K., Musiol, G., Mülig, H., 1997. Taschenbuch der Mathematik, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main.
- Buber, M., Rosenzweig, F., 1976. Die Schrift. Die fünf Bücher der Weisung. Verlag Lambert Schneider, Gerlingen.
- Buch, L. v., 1810. Reise durch Norwegen und Lappland 2. Berlin.
- Cabanes, C., Cazenave, A., Le Provost, C., 2001a. Sea level change from Topex-Posidon altimetry for 1993 – 1999 and possible warming of the southern oceans. *Geophys. Res. Lett.* 28 (1), 9–12.
- Cabanes, C., Cazenave, A., Le Provost, C., 2001b. Sea level rise during past 40 years determined from satellite and in situ observations. *Science* 294, 840–842.
- Cathles, L., 1975. *The Viscosity of the Earth's Mantle*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Cazenave, A., Nerem, R., 2004. Present-day sea level change: observations and causes. *Rev. Geophys.* 42 (RG3001), doi:10.1029/2003RG000139.
- Celsius, A., 1743. Anmärkningur om vatnets förminskande så i östersjön som vesterhafvet. *Kungl. Vet. Akad. Handl.* , 33–50.
- Church, J., 2001. How fast are sea levels rising? *Science* 294, 802–803.
- Church, J., Gregory, J., Huybrechts, P., Kuhn, M., Lambeck, K., Nhuan, M., Qin, D., Woodworth, P., 2001. Changes in sea level. In: Houghton, J. e. a. (Ed.), *Climate Change 2001: The Scientific Basis, Contributions of the Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, New York, 641–684.
- Cianetti, S., Giunchi, C., Spada, G., 2002. Mantle viscosity beneath the Hudson Bay: an inversion based on the Metropolis algorithm. *J. Geophys. Res.* 107 (B12), doi:10.1029/2001JB000585.
- Clark, J., Farrell, W., Peltier, W., 1978. Global change in postglacial sea level: A numerical calculation. *Quat. Res.* 9, 265–287.

- Čadek, O., Fleitout, L., 2003. Effect of lateral viscosity variations in the top 300 km on the geoid and dynamic topography. *Geophys. J. Int.* 152, 566–580.
- Dahlen, F., 1976. The passive influence of the oceans upon the rotation of the earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 46, 363–406.
- Davis, J., Mitrovica, J., 1996. Glacial isostatic adjustment and the anomalous tide gauge record of eastern North America. *Nature* 379, 331–333.
- De Geer, G., 1892. On Pleistocene changes of level in eastern North America. *Proc. Boston Soc. Nat. Hist.* 25, 454–461, 470–477.
- Demico, R., Klir, G. (Eds.), 2004. *Fuzzy Logic in Geology*. Elsevier Academic Press, Amsterdam.
- Di Donato, G., Mitrovica, J., Sabadini, R., Vermeersen, L., 2000. The influence of a ductile crustal zone on glacial isostatic adjustment: geodetic observables along the U. S. east coast. *Geophys. Res. Lett.* 27, 3017–3020.
- Douglas, B., 1991. Global sea level rise. *J. Geophys. Res.* 96 (C4), 6981–6992.
- Douglas, B., 1997. Global sea rise: a redetermination. *Surv. Geophys.* 18, 279–292.
- Drygalski, v. E., 1887. Die Geoiddeformationen der Eiszeit. *Z. Gesell. Erdk.* 22, 169–280.
- Dziewonski, A., Anderson, D., 1981. Preliminary reference earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.* 25, 297–356.
- Ekman, M., 1988. The world's longest continued series of sea level observations. *Pure Appl. Geophys.* 127, 73–77.
- Ekman, M., 1996. A common pattern for interannual and periodical sea level variations in the Baltic Sea and adjacent waters. *Geophysica* 32, 261–272.
- Ekman, M., 1998. Secular change of the seasonal sea level variation in the Baltic Sea and secular change of the winter climate. *Geophysica* 34, 131–140.
- Ekman, M., 1999. Climate changes detected through the world's longest sea level series. *Glob. Planet. Change* 21, 215–224.
- Ekman, M., 2000. Determination of global sea level rise and its change with time. *Small Publications in Historical Geophysics* 7, 1–19.
- Eronen, M., Glückert, G., van de Plasche, O., van de Plicht, J., Rantala, P., 1995. Land uplift in the Olkiluoto–Pyhäjärvi area, southwestern Finland, during the last 8000 years. , Voimayhtiöiden Ydinjätetoimikunta, Nuclear Waste Commission of Finnish Power Companies.
- ETOPO5, 2004. NGDC 5-minute gridded elevation data selection. Online data base, National Geophysical Data Center, <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO5>.
- Farrell, W., 1972. Deformation of the earth by surface loads. *Rev. Geophys. Space Phys.* 10, 761–797.
- Farrell, W., Clark, J., 1976. On postglacial sea level. *Geophys. J. Astr. Soc.* 46, 647–667.
- Fjeldskaar, W., 1997. Flexural rigidity of Fennoscandia inferred from the postglacial uplift. *Tectonics* 16, 596–608.

- Fleming, K., Martinec, Z., Wolf, D., 2003. A reinterpretation of the Fennoscandian relaxation-time spectrum for a viscoelastic lithosphere. In: Tziavoz, I. (Ed.), *Gravity and Geoid 2002*. Ziti Publishing, 432–438.
- Forman, S., Lubinski, D., Ingólfsson, O., Zeeberg, J., Snyder, J., Siegert, M., Matishov, G., 2004. A review of postglacial emergence on Svalbard, Franz Josef Land and Novaya Zemlya, northern Eurasia. *Quat. Sci. Rev.* 23, 1391–1434.
- Gasperini, P., Sabadini, R., 1989. Lateral heterogeneities in mantle viscosity and post-glacial rebound. *Geophys. J.* 98, 413–428.
- Gasperini, P., Sabadini, R., Yuen, D., 1991. Deep continental roots: the effects of lateral variations of viscosity on post-glacial rebound. In: Sabadini, R., Lambeck, K., Boschi, E. (Eds.), *Glacial Isostasy, Sea-level and Mantle Rheology*. Kluwer, Dordrecht, pp. 21–32.
- Grafarend, E., Engels, J., Varga, P., 2000. The temporal variation of the spherical and cartesian multipoles of the gravity field: the generalized MacCullagh representation. *J. Geod.* 74, 519–530.
- Greve, R., Hutter, K., 1995. Polythermal three-dimensional modelling of the Greenland ice sheet with varied geothermal heat flux. *Ann. Glaciol.* 21, 8–12.
- Groten, E., 2000. Die Fundamentalkonstanten in der Geodäsie. *Z. Vermess.* 1, 1–8.
- Harvey, N., Belperio, A., Bourman, R., Mitchell, W., 2002. Geologic, isostatic and anthropogenic signals affecting sea level records at tide gauge sites in southern Australia. *Global Planet. Change* 32, 1–11.
- Heiskanen, W., Moritz, H., 1967. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- Hergesell, H., 1887. Über die Änderung der Gleichgewichtsflächen der Erde durch die Bildung polarer Eismassen und die dadurch verursachten Schwankungen des Meeresniveaus. *Gerlands Beitr. Geophys.* 1, 59–114.
- Hjärne, U., 1706. Den beswarde och förklarade anlendingens andra flock, om jorden och landskapet i gemen. Stockholm.
- Holgate, S., Woodworth, P., 2004. Evidence for enhanced coastal sea level rise during the 1990s. *Geophys. Res. Lett.* 31 (L07305), doi:10.1029/2004GL019626.
- Huybrechts, P., 2002. Sea-level changes at the LGM from ice-dynamic reconstructions of the Greenland and Antarctic ice sheets during the glacial cycles. *Quat. Sci. Rev.* 21, 203–231.
- Huybrechts, P., T'siobbel, S., 1997. A three-dimensional climate-ice-sheet model applied to the last glacial maximum. *Ann. Glaciol.* 25, 333–339.
- Jamieson, T., 1865. On the history of the last geological changes in Scotland. *Quart. J.* 21, 161–203.
- Jamieson, T., 1882. On the cause of the depression and re-elevation of the land during the glacial period. *Geol. Mag.* 2, 400–407.
- Jelgersma, S., 1961. Holocene sea level changes in The Netherlands (with Dutch summary). *Meded. Geol. Stichting, Ser. C.IV(7)*. Uitgevers-Maatschappij Ernest Van Aelst, Maastricht.
- Johnston, P., 1993. The effect of spatially non-uniform water loads on prediction of sea-level change. *Geophys. J. Int.* 114, 615–634.
- Johnston, P., Lambeck, K., 1999. Postglacial rebound and sea level contributions to changes in the geoid and the earth's rotation axis. *Geophys. J. Int.* 136, 537–558.

- Kaikkonen, P., Moisio, K., Heeremans, M., 2000. Thermomechanical lithospheric structure of the central Fennoscandian Shield. *Phys. Earth Planet. Inter.* 119, 209–235.
- Kalm, P., 1746. *Västgötha och Bohuslänska resor*. Stockholm.
- Kaufmann, G., Wolf, D., 1996. Deglacial land emergence and lateral upper-mantle heterogeneity in the Svalbard Archipelago–II. Extended results for high-resolution load models. *Geophys. J. Int.* 127, 125–140.
- Kaufmann, G., Wu, P., Wolf, D., 1997. Some effects of lateral heterogeneities in the upper-mantle on postglacial land uplift close to continental margins. *Geophys. J. Int.* 128, 175–187.
- Kaufmann, G., Wu, P., Li, G., 2000. Glacial isostatic adjustment in Fennoscandia for a laterally heterogeneous earth. *Geophys. J. Int.* 143, 262–273.
- Kellogg, O., 1929. *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- Kendall, R., Mitrovica, J., Sabadini, R., 2003. Lithospheric thickness inferred from Australian post-glacial sea-level change: the influence of a ductile crustal zone. *Geophys. Res. Lett.* 30, doi:10.1029/2003GL017022.
- Kiden, P., Denys, L., Johnston, P., 2002. Late Quaternary sea-level change and isostatic and tectonic land movements along the Belgian-Dutch North Sea coast: geological data and model results. *J. Quat. Sci.* 17, 535–546.
- Klemann, V., 2003. Ebene kompressible viskoelastische Erdmodelle: Anwendung auf glazial-isostatische Deformation der Lithosphäre. *Sci. Techn. Rep. GFZ-Potsdam*, STR 03/11 .
- Klemann, V., Wolf, D., 1999. Implications of a ductile crustal layer for the deformation caused by the Fennoscandian ice sheet. *Geophys. J. Int.* 139, 216–226.
- Kuenen, P., 1954. Eustatic changes of sea-level. *Geologie en Mijnbouw* 16, 148–155.
- Kuo, C., Shum, C., Braun, A., Mitrovica, J., 2004. Vertical crustal motion determined by satellite altimetry and tide gauge data in Fennoscandia. *Geophys. Res. Lett.* 31 (L01608), doi:10.1029/2003GL019106.
- Křížek, M., Neittaanmäki, P., 1990. *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*. Longman Scientific & Technical, J. Wiley, New York.
- Lambeck, K., 1993. Glacial rebound of the British Isles–II. A high-resolution, high-precision model. *Geophys. J. Int.* 115, 960–990.
- Lambeck, K., 1998. On the choice of timescale in glacial rebound modelling: mantle viscosity estimates and the radiocarbon timescale. *Geophys. J. Int.* 134, 647–651.
- Lambeck, K., Bard, E., 2000. Sea-level change along the French Mediterranean coast for the past 30000 years. *Earth Planet. Sci. Lett.* 175, 203–222.
- Lambeck, K., Chappell, J., 2001. Sea level change through the last glacial cycle. *Science* 292, 697–686.
- Lambeck, K., Johnston, P., Nakada, M., 1990. Holocene glacial rebound and sea-level change in NW Europe. *Geophys. J. Int.* 103, 451–468.
- Lambeck, K., Smither, C., Ekman, M., 1998a. Test of glacial rebound models for Fennoscandia based on instrumented sea- and lake-level records. *Geophys. J. Int.* 135, 375–387.

- Lambeck, K., Smither, C., Johnston, P., 1998b. Sea-level change, glacial rebound and mantle viscosity for northern Europe. *Geophys. J. Int.* 134, 102–144.
- Lambeck, K., Purcell, A., Johnston, P., Nakada, M., Yokoyama, Y., 2003. Water-load definition in the glacio-hydro-isostatic sea-level equation. *Quat. Sci. Rev.* 22, 309–318.
- Lambeck, K., Antonioli, F., Purcell, A., Silenzi, S., 2004. Sea-level change along the Italian coast for the past 10,000 yr. *Quat. Sci. Rev.* 23, 1567–1598.
- Linné, C. v., 1745. *Öländska och Gothländska resa på Rikens hägloflige Ständers befalling förrättad 1741*. Stockholm.
- Lyell, C., 1835. On the proof of gradual rising of the land in certain parts of Sweden. *Phil. Trans.* 125, 1–38.
- Maclaren, C., 1842. The glacial theory of Prof. Agassiz. *Am. J. Sci.* 42, 346–365.
- Martinec, Z., 1999. Spectral, initial value approach for viscoelastic relaxation of a spherical earth with a three-dimensional viscosity – I. Theory. *Geophys. J. Int.* 137, 469–488.
- Martinec, Z., 2000. Spectral-finite element approach to three-dimensional viscoelastic relaxation in a spherical earth. *Geophys. J. Int.* 142, 117–141.
- Martinec, Z., Hagedoorn, J., 2005. Time-domain approach to linearized rotational response of a three-dimensional viscoelastic earth model induced by glacial isostatic adjustment: I. Inertia-tensor perturbations. *Geophys. J. Int.* in press.
- Martinec, Z., Wolf, D., 2005. Inverting the Fennoscandian relaxation-time spectrum in terms of an axisymmetric viscosity distribution with a lithospheric root. *J. Geodyn.* 39, 143–163.
- Masters, T., Shearer, P., 1995. Seismic models of the earth: elastic and anelastic. *Global Earth Phys.* 1, 88–102.
- Miller, L., Douglas, C., 2004. Mass and volume contributions to twentieth-century global sea level rise. *Nature* 428, 406–409.
- Milne, G., Mitrovica, J., 1998. Postglacial sea-level change on a rotating earth. *Geophys. J. Int.* 133, 1–19.
- Milne, G., Mitrovica, J., Davis, J., 1999. Near-field hydro-isostasy: the implementation of a revised sea-level equation. *Geophys. J. Int.* 139, 464–482.
- Milne, G., Davis, J., Mitrovica, J., Scherneck, H.-G., Johansson, J., Vermeer, M., Koivula, H., 2001. Space-geodetic constraints on glacial isostatic adjustment in fennoscandia. *Science* 291, 2381–2385.
- Milne, G., Mitrovica, J., Scherneck, H.-G., Davis, J., Johansson, J., Koivula, H., Vermeer, M., 2004. Continuous GPS measurements of postglacial adjustment in Fennoscandia: 2. modeling results. *J. Geophys. Res.* 109 (B02412), doi:10.1029/2003JB002619.
- Mitrovica, J., 2003. Recent controversies in predicting post-glacial sea-level change. *Quat. Sci. Rev.* 22, 127–133.
- Mitrovica, J., Davis, J., 1995. Present-day post-glacial sea level change far from the Late Pleistocene ice sheets: implications for recent analysis of tide gauge records. *Geophys. Res. Lett.* 22, 2529–2532.
- Mitrovica, J., Milne, G., 1998. Glaciation-induced perturbations in the earth's rotation: a new appraisal. *J. Geophys. Res.* 103 (B1), 985–1005.

- Mitrovica, J., Peltier, W., 1991. On postglacial geoid subsidence over the equatorial oceans. *J. Geophys. Res.* 96 (B12), 20053–20071.
- Mitrovica, J., Davis, J., Shapiro, I., 1994. A spectral formalism for computing three-dimensional deformation due to surface loads, 1. Theory. *J. Geophys. Res.* 99 (B4), 7057–7073.
- Moritz, H., Mueller, I., 1987. *Earth Rotation*. Ungar Publishing Company, New York.
- Mörner, N.-A., 1979. The Fennoscandian uplift and Late Cenozoic geodynamics: geological evidence. *GeoJournal* 3, 287–318.
- Okuno, J., Nakada, M., 2001. Effects of water load on geophysical signals due to glacial rebound and implications for mantle viscosity. *Earth Planets Space* 53, 1121–1135.
- Peltier, W., 1974. The impulse response of a Maxwell earth. *Rev. Geophys. Space Phys.* 12, 649–669.
- Peltier, W., 1986. Deglaciation-induced vertical motion of the north American continent and transient lower mantle rheology. *J. Geophys. Res.* 91 (B9), 9099–9123.
- Peltier, W., 1994. Ice age paleotopography. *Science* 265, 195–201.
- Peltier, W., 1999. Global sea level rise and glacial isostatic adjustment. *Global Planet. Change* 20, 93–123.
- Peltier, W., Andrews, J., 1976. Glacial-isostatic adjustment—I. The forward problem. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 46, 605–646.
- Peltier, W., Jiang, X., 1996. Mantle viscosity from the simultaneous inversion of multiple data sets pertaining to postglacial rebound. *Geophys. Res. Lett.* 23, 503–506.
- Peltier, W., Jiang, X., 1997. Mantle viscosity, glacial isostatic adjustment and the eustatic level of the sea. *Surv. Geophys.* 18, 239–277.
- Peltier, W., Tushingham, A., 1989. Global sea level rise and the greenhouse effect: might they be connected? *Science* 244, 806–810.
- Peltier, W., Farrell, W., Clark, J., 1978. Glacial isostasy and relative sea level: A global finite element model. *Tectonophysics* 50, 81–110.
- Penck, A., 1882. Schwankungen des Meeresspiegels. *Jahresb. Geogr. Ges. München* 7, 1–70.
- Pirazzoli, P., 1996. *Sea-Level Change, The last 20000 years*. Coastal Morphology and Research. John Wiley & Sons, Chichester.
- Pratt, J., 1871. *A Treatise on Attraction, Laplace's Function and the Figure of the Earth*, 4. Edition. London and New York.
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery, B., 1992. *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Proshutinsky, A., Ashik, I., Dvorkin, E., Häkkinen, S., Krishfield, R., Peltier, W., 2004. Secular sea level change in the Russian sector of the arctic ocean. *J. Geophys. Res.* 109 (C03042), doi:10.1029/2003JC002007.
- Ramsay, W., 1924. On relations between crustal movements and variations of sea-level during the Late Quarternary time especially in Fennoscandia. *FENNIA* 44 (5), 5–39.
- Regge, T., Wheeler, J., 1957. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.* 108, 1063–1069.

- Ricard, Y., Spada, G., Sabadini, R., 1993. Polar wandering of a dynamic earth. *Geophys. J. Int.* 113, 284–298.
- Rudzki, M., 1899. Deformationen der Erde unter der Last des Inlandeises. *Bull. international de l'Acad. des Sc. de Cracovie* 14m, 169–215.
- Rümpker, G., Wolf, D., 1996. Viscoelastic relaxation of a Burgers half-space: Implications for the interpretation of the Fennoscandian uplift. *Geophys. J. Int.* 124, 541–555.
- Runeberg, E., 1765. Om någre förändringar på jordytan i allmänhet och under kalla klimat i synnerhet. *Kungl. Sv. Vet. Akad. Handl.*, 80–127.
- Sabadini, R., Di Donato, G., Vermeersen, L., Devoti, R., Luceri, V., Bianco, G., 2002. Ice mass loss in Antarctica and stiff lower mantle viscosity inferred from the long wavelength time dependent gravity field. *Geophys. Res. Lett.* 29 (10), doi:10.1029/2001GL014016.
- Shennan, I., Horten, B., 2002. Holocene land- and sea-level changes in Great Britain. *J. Quaternary Sci.* 17 (5-6), 511–526.
- Shennan, I., Milne, G., 2003. Sea-level observation around the Last Glacial Maximum from the Bonaparte Gulf, NW Australia. *Quat. Sci. Rev.* 22, 1543–1547.
- Shennan, I., Horton, B., Innes, J., Gehrles, R., Lloyd, J., McArthur, J., Rutherford, M., 2000a. Late Quaternary sea-level changes, crustal movements and coastal evolution in Northumberland, UK. *J. Quaternary Sci.* 15 (3), 215–237.
- Shennan, I., Lambeck, K., Horton, B., Innes, J., Lloyd, J., McArthur, J., Purcell, T., Rutherford, M., 2000b. Late Devensian and Holocene records of relative sea-level changes in northwest Scotland and their implications for glacio-hydro-isostatic modelling. *Quat. Sci. Rev.* 19, 1103–1135.
- Shennan, I., Peltier, W., Drummond, R., Horton, B., 2002. Global to local scale parameters determining relative sea-level changes and the post-glacial isostatic adjustment of Great Britain. *Quat. Sci. Rev.* 21, 397–408.
- Stuiver, M., Reimer, P., 1993. Extended 14C data base and revised CALIB3.0 14C age calibration program. *Radiocarbon* 35 (1), 215–230.
- Svendsen, J., Alexanderson, H., Astakhov, V., Demidov, I., Dowdeswell, J., Funder, S., Gataullin, V., Henriksen, M., Hjort, C., Homark-Nielsen, M., Huberten, H., Ingólfson, O., Jakobsson, M., Kjær, K., Larsen, E., Lokrantz, H., Lunkka, J., Lyså, A., Mangerud, J., Matiouchkov, A., Murray, A., Möller, P., Niessen, F., Nikolskaya, O., Polyak, L., Saarnisto, M., Siegert, C., Siegert, M., Spielhagen, R., Stein, R., 2004. Late Quaternary ice sheet history of northern Eurasia. *Quat. Sci. Rev.* 23, 1229–1271.
- Swedenborg, E., 1719. Om watnets hägn och förra verdens starka ebb och flod, bewijs utur Sverige. Stockholm.
- Thoma, M., 2004. Materiell und lokal inkompressible viskoelastische Erdmodelle: Theorie und Anwendung in der glazialen Isostasie. *Sci. Tech. Rep. GFZ Potsdam, STR04/13*.
- Thoma, M., Wolf, D., 2001. Inverting land uplift near Vatnajökull, Iceland, in terms of lithosphere thickness and viscosity stratification. In: Sideris, M. (Ed.), *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 97–102.
- Thomson, W., Tait, P.G., 1883. *Treatise on Natural Philosophy*. Vol. 1, Part 2. Cambridge University Press, Cambridge.

- Thunberg, D., 1764. Skriftligt meddelande till vetenskaps akademien om fyndet af submarin skog vid vid carlskrona. Kungl. Sv. Akad. Handl.
- Tosi, L., Carbognin, L., Teatini, P., Strozzi, T., Wegmüller, U., 2002. Evidence of the present relative land stability of Venice, Italy, from land, sea, and space observations. *Geophys. Res. Lett.* 29, doi:10.1029/2001GL013211.
- Trampert, J., Woodhouse, J., 1995. Global phase velocity maps of Love and Rayleigh waves between 40 and 150 seconds. *Geophys. J. Int.* 122, 675–690.
- Trupin, A., Wahr, J., 1990. Spectroscopic analysis of global tide gauge sea level data. *Geophys. J. Int.* 100, 441–453.
- Tushingham, A., 1992. Observations of postglacial uplift at Churchill, Manitoba. *Can. J. Earth Sci.* 29, 2418–2425.
- Tushingham, A., Peltier, W., 1991. Ice-3G: a new global model of late Pleistocene deglaciation based upon geophysical predictions of post-glacial relative sea level change. *J. Geophys. Res.* 96 (B3), 4497–4523.
- Varshalovich, D., Moskalev, A., Khersonskii, V., 1989. *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, Singapore.
- Vermeersen, L., Sabadini, R., 1996. Significance of the fundamental mantle rotational relaxation mode in polar wander simulations. *Geophys. J. Int.* 127, F5–F9.
- Vermeersen, L., Sabadini, R., 1997. A new class of stratified viscoelastic models by analytical techniques. *Geophys. J. Int.* 129, 531–570.
- Wessel, P., Smith, W., 1991. Free software helps map and display data. *EOS Trans. Am. Geophys. Union* 72 (41), 441, 445–446.
- Wieczerkowski, K., Mitrovica, J., Wolf, D., 1999. A revised relaxation-time spectrum for Fennoscandia. *Geophys. J. Int.* 139, 69–86.
- Wolf, D., 1984. The relaxation of spherical and flat Maxwell earth models and effects due to the presence of the lithosphere. *J. Geophys.* 56, 24–33.
- Wolf, D., 1985. The normal modes of a uniform, compressible Maxwell half-space. *J. Geophys.* 56, 100–105.
- Wolf, D., 1987. An upper bound on lithosphere thickness from glacio-isostatic adjustment in Fennoscandia. *J. Geophys.* 61, 141–149.
- Wolf, D., 1991. Viscoelastodynamics of a stratified, compressible planet: Incremental field equations and short- and long-time asymptotes. *Geophys. J. Int.* 104, 401–417.
- Wolf, D., 1993. The changing role of the lithosphere in models of glacial isostasy: A historical review. *Global Planet. Change* 8, 95–106.
- Wolf, D., 1997. Gravitational viscoelastodynamics for a hydrostatic planet. *Veröff. Dt. Geodät. Komm. Reihe C*, 452.
- Wolf, D., 2003. *Continuum mechanics in geophysics and geodesy: Fundamental principles*. Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik 2003.2.

- Wolf, D., Klemann, V., Wunsch, J., Zhang, F.-P., 2004. A reanalysis and reinterpretation of geodetic and geological evidence of glacial-isostatic adjustment in the Churchill region, Hudson Bay. *Sci. Techn. Rep. GFZ-Potsdam, STR 04/11* .
- Woodward, R., 1888. On the form and position of the sea level. *Bull. United States Geol. Surv.* 8 (48), 99–170.
- Woodworth, P., Player, R., 2003. The Permanent Service for Mean Sea Level: an update to the 21. century. *J. Coastal Res.* 19 (2), 287–295.
- Woodworth, P., Spencer, N., Alcock, G., 1990. On the availability of European mean sea level data. *Int. Hydrogr. Rev.* 67, 131–146.
- Wu, P., 2001. Postglacial induced surface motion and gravity in Laurentia for uniform mantle with power-law rheology and ambient tectonic stress. *Earth Planet. Sci. Lett.* 186, 427–435.
- Wu, P., Peltier, W., 1982. Viscous gravitational relaxation. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 70, 435–485.
- Wu, P., Peltier, W., 1984. Pleistocene deglaciation and the earth's rotation: A new analysis. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 76, 753–791.
- Wu, P., van der Wal, W., 2003. Postglacial sealevels on a spherical, self-gravitating viscoelastic earth: Effects of lateral viscosity variations in the upper mantle on the inference of viscosity contrasts in the lower mantle. *Earth Planet. Sci. Lett.* 211, 57–68.
- Yanagi, T., Akaki, T., 1994. Sea level variation in the eastern Asia. *J. Oceanogr.* 50, 643–651.
- Yokoyama, Y., De Dekker, P., Lambeck, K., Johnston, P., Fifield, L., 2001. Sea-level at the last glacial maximum: evidence from northwestern Australia to constrain ice volumes for oxygen isotope stage 2. *Palaeogr., Palaeoclim., Palaeoecol.* 165, 281–297.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., 2000. *The Finite Element Method. Vol. 1: The basis.* Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Zweck, C., Huybrechts, P., 2004. Modelling of the northern hemisphere ice sheet during the last glacial cycle and glaciological sensitivity. *J. Geophys. Res.* in Press.

A. Ergänzungen zu Kapitel 2

A.1 Euler- und Lagrange-Formulierung, lokale und materielle Inkremente

In diesem Abschnitt werden kurz die Euler- und Lagrange-Formulierung sowie die lokalen und materiellen Inkremente vorgestellt. Für eine ausführliche Darstellung wird hier auf Wolf (1997, 2003) verwiesen. In Kapitel 2 ist es notwendig, den Ort eines Partikels des Kontinuums zu spezifizieren, was durch die Angabe seines Ortsvektors in einem geeigneten Koordinatensystem möglich ist. Der Koordinatenursprung, O , wird dabei im Massenzentrum des betrachteten Kontinuums gewählt. Für die verschiedenen Probleme in Kapitel 2 existieren jeweils ausgezeichnete Referenzzustände zur Zeit $t = 0$ (hydrostatisches Gleichgewicht des nicht-rotierenden Kontinuums in 2.2 und 2.3, und des rotierenden Kontinuums in 2.4). Somit kann die Position eines Partikels im Referenzzustand durch den Ortsvektor

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.1})$$

angegeben werden. Hier sind $X_i, i = 1, 2, 3$, die Komponenten von \mathbf{X} und $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, die orthonormalen Basisvektoren des Koordinatensystems.

Zur Zeit $t > 0$ ist das Partikel aus dem Referenzzustand ausgelenkt und wird dann durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.2})$$

beschrieben, wobei $r_i, i = 1, 2, 3$, die Komponenten von \mathbf{r} bezeichnen. Die Auslenkung von \mathbf{X} in \mathbf{r} ist gegeben durch

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (\text{A.3})$$

In der hier verwendeten Lagrange-Formulierung wird der Verschiebungsvektor als Funktion der Position im Referenzzustand angegeben. Ähnlich ist eine beliebige tensorielle Feldgröße, \mathbf{f} , in der Lagrange-Formulierung als Funktion der Referenzposition, \mathbf{X} , gegeben:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t). \quad (\text{A.4})$$

In der Euler-Formulierung ist die Position, \mathbf{X} , im Referenzzustand eine Funktion der aktuellen Position, \mathbf{r} , und der Verschiebung, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.5})$$

Dieses Konzept läßt sich auch auf eine beliebige tensorielle Größe, \mathbf{F} , übertragen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.6})$$

Analog zur Verschiebung \mathbf{u} kann für die tensorielle Größe, \mathbf{f} , ein Inkrement definiert werden (z. B. Klemann, 2003). Ist $\mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{X}) := \mathbf{f}(\mathbf{X}, t = 0)$, dann gilt in der Lagrange-Formulierung

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{X}) + \mathbf{f}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.7})$$

und $\mathbf{f}^{(\delta)}$ bezeichnet das materielle Inkrement, welches die Änderung der Größe bezüglich eines Partikels beschreibt. Desweiteren wird das lokale Inkrement, $\mathbf{f}^{(\Delta)}$, in der Lagrange-Formulierung definiert, welches die Änderung von \mathbf{f} bezüglich der Position \mathbf{X} beschreibt. Auch in der Euler-Formulierung kann ein lokales Inkrement, $\mathbf{F}^{(\Delta)}$, angegeben werden, welches die Änderung von \mathbf{F} bezüglich der Position \mathbf{r} beschreibt. Die Äquivalenz der lokalen Inkremente in den beiden Formulierung bei infinitesimalen Störungen wird in Klemann (siehe Abs. 2.1.4 2003) gezeigt. Es läßt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem materiellen und dem lokalen Inkrement einer tensoriellen Größe finden:

$$\mathbf{f}^{(\delta)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t) + \nabla \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad (\text{A.8})$$

wobei der zweite Summand das advektive Inkrement bezeichnet. Auch dieser Zusammenhang gilt nur für infinitesimale Störungen. Eine Ableitung findet sich in Wolf (1997).

A.2 Definition der Kugelflächenfunktionen

Die in dieser Arbeit verwendeten Kugelflächenfunktionen (skalare, vektorielle und tensorielle) sind in gleicher Weise definiert wie bei Varshalovich et al. (1989, Kap. 5). Die skalaren Kugelflächenfunktionen, Y_{jm} , sind gegeben durch

$$Y_{jm}(\Omega) := P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (\text{A.9})$$

wobei $i = \sqrt{-1}$, $\Omega = (\vartheta, \varphi)$ und P_{jm} die assoziierten Legendre-Polynome sind:

$$P_{jm}(\cos \vartheta) := (-1)^m \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} (\sin \vartheta)^m \frac{d^m}{(d \cos \vartheta)^m} P_j(\cos \vartheta), \quad (\text{A.10})$$

$$P_j(\cos \vartheta) := \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j (\cos^2 \vartheta - 1)^j}{d(\cos \vartheta)^j}. \quad (\text{A.11})$$

Für die Grade, j , und die Ordnungen, m , der assoziierten Legendre-Polynome und skalaren Kugelflächenfunktionen gilt:

$$j = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (\text{A.12})$$

$$m = -j, \dots, 0, \dots, j. \quad (\text{A.13})$$

Die Normierung der skalaren Kugelflächenfunktionen, $Y_{jm}(\Omega)$, ist ebenso Varshalovich et al. (1989, Kap. 5) entnommen:

$$\int_{\Omega_0} Y_{jm}(\Omega) Y_{j'm'}^*(\Omega) d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.14})$$

Hier bezeichnet $*$ das komplex Konjugierte der Größe und δ_{ij} ist das Kronecker-Delta-Symbol. Die vektoriellen Kugelflächenfunktionen, $\mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$, $\lambda = -1, 0, 1$ sind mit Hilfe der Basisvektoren der sphärischen Koordinaten, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$, wie folgt definiert:

$$\mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) := \mathbf{e}_r Y_{jm}(\Omega), \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) := \nabla_\Omega Y_{jm}(\Omega), \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) := \mathbf{L}_\Omega Y_{jm}(\Omega), \quad (\text{A.17})$$

$$(\text{A.18})$$

wobei ∇_Ω den winkelabhängigen Teil des Gradientenoperators:

$$\nabla_\Omega := \mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{A.19})$$

und \mathbf{L}_Ω den winkelabhängigen Operator:

$$\mathbf{L}_\Omega := \mathbf{e}_r \times \nabla_\Omega \quad (\text{A.20})$$

bezeichnet.

Für die vektoriellen Kugelflächenfunktionen, $\mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$ und $\mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')}(\Omega)$, mit unterschiedlichen Grad, $j \neq j'$, unterschiedlicher Ordnung, $m \neq m'$, und unterschiedlichen Indizes, $\lambda \neq \lambda'$, folgt ihre Orthogonalität:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega) \cdot [\mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')}(\Omega)]^* d\Omega = 0, \quad (\text{A.21})$$

wobei hier \cdot das Vektorskalarprodukt bezeichnet. Desweiteren gelten folgende Orthogonalitätseigenschaften:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) \cdot [\mathbf{S}_{j'm'}^{(-1)}(\Omega)]^* d\Omega &= \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) \cdot [\mathbf{S}_{j'm'}^{(1)}(\Omega)]^* d\Omega &= j(j+1) \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) \cdot [\mathbf{S}_{j'm'}^{(0)}(\Omega)]^* d\Omega &= j(j+1) \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Daneben soll noch das Integral über eine vektorielle Kugelflächenfunktion betrachtet werden. Mit den bei Varshalovich et al. (1989, Abs. 1.1) definierten zyklischen kovarianten Basisvektoren, \mathbf{i}_m , $m = \pm 1, 0$ (A.66)–(A.68), ergibt sich

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega) d\Omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{j1} (\delta_{\lambda-1} + 2\delta_{\lambda 1}) \mathbf{i}_m. \quad (\text{A.23})$$

Die in dieser Arbeit verwendeten tensoriellen Kugelflächenfunktionen sind wie bei Regge & Wheeler (1957) definiert und aus Martinec (2000, Anh. B) übernommen:

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(1)}(\Omega) := [\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r Y_{jm}(\Omega)]_s, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(2)}(\Omega) := [\mathbf{e}_r \nabla_\Omega Y_{jm}(\Omega)]_s, \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(3)}(\Omega) := [\mathbf{e}_r \mathbf{L}_\Omega Y_{jm}(\Omega)]_s, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(4)}(\Omega) := [\mathbf{L}_\Omega \nabla_\Omega Y_{jm}(\Omega) + \mathbf{e}_r \mathbf{L}_\Omega Y_{jm}(\Omega)]_s, \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(5)}(\Omega) := [\mathbf{I} - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r] Y_{jm}(\Omega), \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(6)}(\Omega) := [\nabla_\Omega \nabla_\Omega Y_{jm}(\Omega) + 2\mathbf{e}_r \nabla_\Omega Y_{jm}(\Omega) - \mathbf{L}_\Omega \mathbf{L}_\Omega Y_{jm}(\Omega)]_s. \quad (\text{A.29})$$

Hier ist mit $[]_s$ gekennzeichnet, daß der Ausdruck auf den symmetrischen Teil des Tensors zweiter Stufe beschränkt wird, wobei für einen beliebigen Tensor zweiter Stufe, \mathbf{A} , die Definition $[\mathbf{A}]_s := \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ gilt.

Eine alternative Definition der tensoriellen Kugelflächenfunktionen ergibt sich durch die symmetrischen dyadischen Basisvektoren der sphärischen Koordinaten, die durch

$$\mathbf{e}_{ij} := [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j]_s \quad \text{für } i, j \in \{r, \vartheta, \varphi\} \quad (\text{A.30})$$

gegeben sind. Mit Hilfe der symmetrischen dyadischen Basisvektoren und den Operatoren ∇_Ω und \mathbf{L}_Ω folgen die alternativen Definitionen der tensoriellen Kugelflächenfunktionen:

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(1)}(\Omega) := Y_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_{rr}, \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(2)}(\Omega) := D_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_{r\vartheta} + F_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_{r\varphi}, \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(3)}(\Omega) := -F_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_{r\vartheta} + D_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_{r\varphi}, \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(4)}(\Omega) := G_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_{\vartheta\varphi} - H_{jm}(\Omega) (\mathbf{e}_{\vartheta\vartheta} - \mathbf{e}_{\varphi\varphi}), \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(5)}(\Omega) := -Y_{jm}(\Omega) (\mathbf{e}_{\vartheta\vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi\varphi}), \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{Z}_{jm}^{(6)}(\Omega) := G_{jm}(\Omega) (\mathbf{e}_{\vartheta\vartheta} - \mathbf{e}_{\varphi\varphi}) + 4H_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_{\vartheta\varphi}. \quad (\text{A.36})$$

Die hier verwendeten Abkürzungen bedeuten

$$D_{jm}(\Omega) := \frac{\partial Y_{jm}(\Omega)}{\partial \vartheta}, \quad (\text{A.37})$$

$$F_{jm}(\Omega) := \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{jm}(\Omega)}{\partial \varphi}, \quad (\text{A.38})$$

$$G_{jm}(\Omega) := \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_{jm}(\Omega), \quad (\text{A.39})$$

$$H_{jm}(\Omega) := \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{jm}(\Omega)}{\partial \varphi} \right). \quad (\text{A.40})$$

A.3 Integrale der finiten Elemente

In Abschnitt 2.2.6 werden zur Approximation der Variation der Energiefunktionale, $\delta \mathcal{E}$, mit finiten Elementen die Integrale der verwendeten finiten Elemente ψ_k (siehe (2.71)) benötigt. Für weitere Informationen zur Ableitung der Integrale über die finiten Elemente sei auf Martinec (2000, Kap. 6, Anh. C) verwiesen. Die Integrale $I_{kk}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, \dots, 7$, sind mit $h_k = r_{k+1} - r_k$ wie folgt definiert:

$$I_{k,k}^{(1)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{d\psi_k(r)}{dr} \frac{d\psi_k(r)}{dr} r^2 dr = \frac{1}{3h_k} (r_{k+1}^2 + r_{k+1}r_k + r_k^2), \quad (\text{A.41})$$

$$I_{k,k+1}^{(1)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{d\psi_k(r)}{dr} \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} r^2 dr = -I_{k,k}^{(1)},$$

$$I_{k+1,k+1}^{(1)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} r^2 dr = I_{k,k}^{(1)},$$

$$I_{k,k}^{(2)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \frac{d\psi_k(r)}{dr} r^2 dr = -\frac{1}{12} (r_{k+1}^2 + 2r_{k+1}r_k + 3r_k^2), \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned}
I_{k,k+1}^{(2)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} r^2 dr = -I_{k,k}^{(2)}, \\
I_{k+1,k}^{(2)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \frac{d\psi_k(r)}{dr} r^2 dr = -I_{k+1,k+1}^{(2)}, \\
I_{k+1,k+1}^{(2)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} r^2 dr = \frac{1}{12} (3r_{k+1}^2 + 2r_{k+1}r_k + r_k^2), \\
I_{k,k}^{(3)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \frac{d\psi_k(r)}{dr} r dr = -\frac{1}{6} (r_{k+1} + 2r_k), \tag{A.43} \\
I_{k,k+1}^{(3)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} r dr = -I_{k,k}^{(3)}, \\
I_{k+1,k}^{(3)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \frac{d\psi_k(r)}{dr} r dr = -I_{k+1,k+1}^{(3)}, \\
I_{k+1,k+1}^{(3)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} r dr = \frac{1}{6} (2r_{k+1} + r_k), \\
I_{k,k}^{(4)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_k(r) r^2 dr = \frac{h_k}{30} (r_{k+1}^2 + 3r_{k+1}r_k + 6r_k^2), \tag{A.44} \\
I_{k,k+1}^{(4)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_{k+1}(r) r^2 dr = \frac{h_k}{60} (3r_{k+1}^2 + 4r_{k+1}r_k + 3r_k^2), \\
I_{k+1,k+1}^{(4)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \psi_{k+1}(r) r^2 dr = \frac{h_k}{30} (6r_{k+1}^2 + 3r_{k+1}r_k + r_k^2), \\
I_{k,k}^{(5)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_k(r) r dr = \frac{h_k}{12} (r_{k+1} + 3r_k), \tag{A.45} \\
I_{k,k+1}^{(5)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_{k+1}(r) r dr = \frac{h_k}{12} (r_{k+1} + r_k), \\
I_{k+1,k+1}^{(5)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \psi_{k+1}(r) r dr = \frac{h_k}{12} (3r_{k+1} + r_k), \\
I_{k,k}^{(6)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_k(r) dr = \frac{h_k}{3}, \tag{A.46} \\
I_{k,k+1}^{(6)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_{k+1}(r) dr = \frac{h_k}{6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{k+1,k+1}^{(6)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r)\psi_{k+1}(r)dr = \frac{h_k}{3}, \\
I_{k,k}^{(7)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{1}{r}\psi_k(r)\psi_k(r)dr = \frac{1}{h_k} \left[\frac{r_{k+1}^2}{h_k} \ln \frac{r_{k+1}}{r_k} - 2r_{k+1} + \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k) \right], \quad (\text{A.47}) \\
I_{k,k+1}^{(7)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{1}{r}\psi_k(r)\psi_{k+1}(r)dr = \frac{1}{h_k} \left[-\frac{r_{k+1}r_k}{h_k} \ln \frac{r_{k+1}}{r_k} + \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k) \right], \\
I_{k+1,k+1}^{(7)} &:= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{1}{r}\psi_{k+1}(r)\psi_{k+1}(r)dr = \frac{1}{h_k} \left[\frac{r_k^2}{h_k} \ln \frac{r_{k+1}}{r_k} - 2r_k + \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k) \right].
\end{aligned}$$

Zusätzlich zu den obigen Integralen werden für die Ableitung der Approximation von $\delta\mathcal{E}_p$ folgende Integrale benötigt:

$$K_k^{(1)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{d\psi_k(r)}{dr} r^2 dr = -\frac{1}{3} (r_{k+1}^2 + r_{k+1}r_k + r_k^2), \quad (\text{A.48})$$

$$K_{k+1}^{(1)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{d\psi_{k+1}(r)}{dr} r^2 dr = -K_k^{(1)},$$

$$K_k^{(2)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r)r dr = \frac{h_k}{6} (r_{k+1} + 2r_k), \quad (\text{A.49})$$

$$K_{k+1}^{(2)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r)r dr = \frac{h_k}{6} (2r_{k+1} + r_k),$$

$$K_k^{(3)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r)r^2 dr = \frac{h_k}{12} (r_{k+1}^2 + 2r_{k+1}r_k + 3r_k^2), \quad (\text{A.50})$$

$$K_{k+1}^{(3)} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r)r^2 dr = \frac{h_k}{12} (3r_{k+1}^2 + 2r_{k+1}r_k + r_k^2).$$

A.4 Dyadische Komponenten der Tensoren a , b und c

Im folgenden sind die dyadische Komponenten der Tensoren a , b und c aus Abschnitt 2.2.7 aufgelistet.

Für $a(\Omega)$ folgt aus (2.88)

$$\begin{bmatrix} a_{rr}(\Omega) \\ a_{r\vartheta}(\Omega) \\ a_{r\varphi}(\Omega) \\ a_{\vartheta\vartheta}(\Omega) \\ a_{\vartheta\varphi}(\Omega) \\ a_{\varphi\varphi}(\Omega) \end{bmatrix} = \sum_{jm} \begin{bmatrix} (-U_{jm}^k + U_{jm}^{k+1})Y_{jm}(\Omega) \\ (-V_{jm}^k + V_{jm}^{k+1})D_{jm}(\Omega) + (-W_{jm}^k + W_{jm}^{k+1})F_{jm}(\Omega) \\ (-V_{jm}^k + V_{jm}^{k+1})F_{jm}(\Omega) - (-W_{jm}^k + W_{jm}^{k+1})D_{jm}(\Omega) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.51})$$

wobei die Definitionen (A.37) und (A.38) verwendet werden. Der zu \mathbf{a} analog definierte Tensor \mathbf{b} setzt sich mit den Definitionen (A.37)–(A.40) aus folgenden Komponenten zusammen:

$$\begin{bmatrix} b_{rr}(\Omega) \\ b_{r\vartheta}(\Omega) \\ b_{r\varphi}(\Omega) \\ b_{\vartheta\vartheta}(\Omega) \\ b_{\vartheta\varphi}(\Omega) \\ b_{\varphi\varphi}(\Omega) \end{bmatrix} = \sum_{jm} \begin{bmatrix} 0 \\ (-V_{jm}^k + U_{jm}^k)D_{jm}(\Omega) + W_{jm}^k F_{jm}(\Omega) \\ (-V_{jm}^k + U_{jm}^k)F_{jm}(\Omega) - W_{jm}^k D_{jm}(\Omega) \\ -W_{jm}^k H_{jm}(\Omega) + \left(U_{jm}^k - J/2V_{jm}^k\right) Y_{jm}(\Omega) + 1/2V_{jm}^k G_{jm}(\Omega) \\ W_{jm}^k G_{jm}(\Omega) + 2V_{jm}^k H_{jm}(\Omega) \\ W_{jm}^k H_{jm}(\Omega) + \left(U_{jm}^k - J/2V_{jm}^k\right) Y_{jm}(\Omega) - 1/2V_{jm}^k G_{jm}(\Omega) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

Die dyadischen Komponenten des Tensors \mathbf{c} sind aus den Komponenten des Tensors \mathbf{b} abzuleiten, indem anstelle der Koeffizienten $(U_{jm}^k, V_{jm}^k, W_{jm}^k)$ die Koeffizienten $(U_{jm}^{k+1}, V_{jm}^{k+1}, W_{jm}^{k+1})$ verwendet werden.

A.5 Repräsentation des Trägheitstensors durch Kugelflächenfunktionen

In Abschnitt 2.4.10 wird die sphärische Approximation in der RT eingeführt, um die inkrementiellen Trägheitstensoren $\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}$ und $\mathbf{C}^{(1)\text{in}}$ durch Kugelflächenfunktionen zu repräsentieren. Mit den Amplituden der spektralen Repräsentation der jeweiligen Flächenmassendichte lassen sich die Integranden in (2.217) und (2.218) umformen zu

$$\sigma^{\text{P}}(\mathbf{X}, t) [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}] = -a^2 \sum_{jm} \sigma_{jm}(t) \mathbf{Z}_{jm}^{(5)}(\Omega), \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))\mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \otimes \mathbf{X} &= -2r \sum_{jm} \left[U_{jm}(r, t) \mathbf{Z}_{jm}^{(5)}(\Omega) \right. \\ &\quad \left. + V_{jm}(r, t) \mathbf{Z}_{jm}^{(2)}(\Omega) + W_{jm}(r, t) \mathbf{Z}_{jm}^{(3)}(\Omega) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Hier werden außerdem (2.226), $\mathbf{X} = r\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{I} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$ verwendet. Mit $\mathbf{Z}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$, $\lambda = 2, 3, 5$, sind die tensoriellen Kugelflächenfunktionen bezeichnet, die durch (A.32), (A.33) und (A.35) in Abschnitt A.2 gegeben sind, wobei zur Vereinfachung der weiteren Ableitung die dyadischen Basisvektoren aus (A.30) genutzt werden. Desweiteren werden die Integrale über die oben genannten tensoriellen Kugelflächenfunktionen benötigt, für die sich folgende analytische Ausdrücke ableiten lassen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \mathbf{Z}_{jm}^{(2)}(\Omega) d\Omega &= 6\sqrt{\frac{2\pi}{16}} \delta_{j,2} \left[\frac{1}{2} \left(\delta_{m,-2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{m,0} + \delta_{m,2} \right) \mathbf{e}_{11} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\delta_{m,-2} + \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{m,0} + \delta_{m,2} \right) \mathbf{e}_{22} \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{m,0} \mathbf{e}_{33} - i(\delta_{m,-2} - \delta_{m,2}) \mathbf{e}_{12} + (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}) \mathbf{e}_{13} \\ &\quad \left. - i(\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \mathbf{e}_{23} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{Z}_{jm}^{(3)}(\Omega) d\Omega = 0, \quad (\text{A.56})$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{Z}_{jm}^{(5)}(\Omega) d\Omega = -\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\delta_{j,0}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22} + \mathbf{e}_{33}) + \frac{1}{3}\int_{\Omega_0} \mathbf{Z}_{jm}^{(2)}(\Omega) d\Omega. \quad (\text{A.57})$$

Hier werden mit \mathbf{e}_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3\}$, die symmetrischen dyadischen Basisvektoren in kartesischen Koordinaten bezeichnet. Mit den obigen Ausdrücken lassen sich die inkrementiellen Trägheitstensoren (2.217) und (2.218) durch

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(1)\text{in}}(t) &= \frac{8}{3}\sqrt{\pi}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22} + \mathbf{e}_{33}) \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)U_{00}(r,t)r^3 dr \\ &- 4\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \sum_{m=-2}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\delta_{m,-2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{m,0} + \delta_{m,2} \right) \mathbf{e}_{11} - \frac{1}{2} \left(\delta_{m,-2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{m,0} + \delta_{m,2} \right) \mathbf{e}_{22} \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{m,0}\mathbf{e}_{33} - i(\delta_{m,-2} - \delta_{m,2})\mathbf{e}_{12} + (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1})\mathbf{e}_{13} - i(\delta_{m,-1} + \delta_{m,1})\mathbf{e}_{23} \right] \\ &\cdot \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r) [U_{2m}(r,t) + 3V_{2m}(r,t)] r^3 dr, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(1)\text{ex}}(t) &= \frac{4}{3}\sqrt{\pi}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22} + \mathbf{e}_{33})a^4\sigma_{00}(t) \\ &- 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \sum_{m=-2}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\delta_{m,-2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{m,0} + \delta_{m,2} \right) \mathbf{e}_{11} - \frac{1}{2} \left(\delta_{m,-2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{m,0} + \delta_{m,2} \right) \mathbf{e}_{22} \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{m,0}\mathbf{e}_{33} - i(\delta_{m,-2} - \delta_{m,2})\mathbf{e}_{12} + (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1})\mathbf{e}_{13} - i(\delta_{m,-1} + \delta_{m,1})\mathbf{e}_{23} \right] \\ &\cdot a^4\sigma_{2m}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

darstellen. Für die inkrementiellen Trägheitstensoren \mathbf{C}^Σ und $\mathbf{C}^{\theta\mathcal{X}}$ lassen sich analog zu (A.59) Ausdrücke finden, indem anstelle der Flächenmassendichte σ_{jm} entsprechend σ_{jm}^Σ oder $\sigma_{jm}^{\theta\mathcal{X}}$ verwendet wird und für σ_{jm}^Σ der Erdradius a durch a_Σ ersetzt wird. Hiermit lassen sich dann die Komponenten im Abschnitt 2.4.10 ableiten.

A.6 Repräsentation des relativen Drehimpulses durch Kugelflächenfunktionen

Der relative Drehimpuls, \mathbf{h} , ist in (2.219) in der sphärischen Approximation gegeben. Mit der spektralen Repräsentation des Verschiebungsvektors in (2.226) und dem Vektorprodukt des Basisvektors \mathbf{e}_r mit den vektoriellen Kugelflächenfunktionen (siehe Anhang A.2):

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) = 0, \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) = \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega), \quad (\text{A.61})$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) = -\mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega), \quad (\text{A.62})$$

folgt für das Vektorprodukt in (2.219)

$$\mathbf{X} \times \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt} = r \sum_{jm} \left[\frac{dV_{jm}(r, t)}{dt} \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) - \frac{dW_{jm}(r, t)}{dt} \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) \right]. \quad (\text{A.63})$$

Für die Repräsentation von \mathbf{h} werden außerdem folgende Integrale über die vektoriellen Kugelflächenfunktionen benötigt:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{jm}^{(0)} d\Omega = 0, \quad (\text{A.64})$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{jm}^{(1)} d\Omega = 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{j,1} \mathbf{i}_m, \quad (\text{A.65})$$

wobei $\mathbf{i}_m, m \in \{-1, 0, +1\}$, zyklisch kovariante Basisvektoren bezeichnen (Varshalovich et al., 1989, Abs. 1.1), die mit Hilfe der kartesischen Basisvektoren durch

$$\mathbf{i}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2), \quad (\text{A.66})$$

$$\mathbf{i}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2), \quad (\text{A.67})$$

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.68})$$

definiert sind. Hiermit läßt sich die spektrale Repräsentation des relativen Drehimpulses:

$$\mathbf{h}(t) = -2\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{m=-1}^1 \mathbf{i}_m \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r) \frac{dW_{1m}(r, t)}{dt} r^3 dr \quad (\text{A.69})$$

angeben, aus dem die Ausdrücke (2.235) und (2.236) in Abschnitt 2.4.10 abgeleitet sind.

B. Ergänzungen zu Kapitel 3

B.1 Polynome der elastischen Parameter von PREM

In Abschnitt 3.1.1 wird darauf hingewiesen, daß die Volumenmassendichte, $\rho^{(0)}$, und der Schermodul, μ , durch die Polynome des PREM für die jeweilige Radialentfernung, r , bestimmt werden. Für die angeführten Größen sind die benötigten Polynome als Funktion der normierten Radialentfernung $y = r/a$ in Tabelle B.1 zusammengefaßt (Dziewonski & Anderson, 1981, Tab. 1).

Tabelle B.1: Polynome der Parameter von PREM als Funktionen der normierten Radialentfernung, $y = r/a$. Bei einem vollständig flüssigen Kern im Bereich $r < 3480$ km wird dort $\rho^{(0)} = 10982 \text{ kg m}^{-3}$ und $\mu = 0$ Pa gewählt.

Radialentfernung (km)	Volumenmassendichte $\rho^{(0)}(y)$ (kg m^{-3}), Schermodul $\mu(y)$ (Pa)
0 – 1221.5	$\rho^{(0)}(y) = 13088.5 - 8838.1 y^2$ $\mu(y) = 1.45 \cdot 10^7$
1221.5 – 3480.0	$\rho^{(0)}(y) = 12581.5 - 1263.8 y - 3642.6 y^2 - 5528.1 y^3$ $\mu(y) = 1.45 \cdot 10^7$
3480.0 – 3630.0	$\rho^{(0)}(y) = 7956.5 - 6476.1 y + 5528.3 y^2 - 3080.7 y^3$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (6925.4 + 1467.2 y - 2083.4 y^2 + 978.3 y^3)^2$
3630.0 – 5600.0	$\rho^{(0)}(y) = 7956.5 - 6476.1 y + 5528.3 y^2 - 3080.7 y^3$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (11167.1 - 13781.8 y + 17457.5 y^2 - 9277.7 y^3)^2$
5600.0 – 5701.0	$\rho^{(0)}(y) = 7956.5 - 6476.1 y + 5528.3 y^2 - 3080.7 y^3$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (22345.9 - 17247.3 y - 2083.4 y^2 + 978.3 y^3)^2$
5701.0 – 5771.0	$\rho^{(0)}(y) = 5319.7 - 1483.6 y$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (9983.9 - 4932.4 y)^2$
5771.0 – 5971.0	$\rho^{(0)}(y) = 11249.4 - 8029.0 y$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (22351.2 - 18585.6 y)^2$
5971.0 – 6151.0	$\rho^{(0)}(y) = 7108.9 - 3804.5 y$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (8949.6 - 4459.7 y)^2$
6151.0 – 6346.6	$\rho^{(0)}(y) = 2691.0 + 692.4 y$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (2151.9 + 2348.1 y)^2$
6346.6 – 6356.0	$\rho^{(0)}(y) = 2900.0$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (3900.0)^2$
6356.0 – 6371.0	$\rho^{(0)}(y) = 2600.0$ $\mu(y) = \rho^{(0)}(y) (3200.0)^2$

B.2 Ergänzende Angaben zu Eismodell ICE-3G-M

In Abschnitt 3.2 werden die verwendeten Eismodelle vorgestellt. In der folgenden Tabelle sind zu Eismodell ICE-3G-M ergänzende Angaben gemacht.

Tabelle B.2: Zeitschritte der Mächtigkeitsverteilungen von Eismodell ICE-3G-M in ka BP und zugehörige Skalierungsfaktoren. Diese sind nur bis zum LGM angegeben, da für die Abschmelzgeschichte die Verteilungen vorgegeben sind (Abschnitt 3.2.1). Die Mächtigkeitsverteilungen zwischen den angegebenen Zeitschritten werden linear interpoliert.

Zeitschritt	Zeit (ka BP)	Skalierungsfaktor
1	120.00	0.0000
2	108.00	0.4095
3	100.00	0.2857
4	90.00	0.4095
5	84.00	0.4095
6	80.00	0.2857
7	64.00	0.7905
8	53.00	0.6476
9	38.00	0.7905
10	28.00	0.7905
11	21.40	1.0000
12	20.40	1.0000
13	19.10	
14	17.95	
15	16.80	
16	15.65	
17	14.05	
18	13.00	
19	11.35	
20	10.20	
21	8.90	
22	7.80	
23	6.80	
24	5.75	
25	4.50	
26	3.20	
27	1.95	
28	0.95	
29	Gegenwart	

C. Ergänzungen zu Kapitel 4

C.1 Berechnung von $C^{(1)\text{in}}$ und $C_{33}^{(1)\text{in}}$

Im Abschnitt 4.3 wird die Berechnung der inkrementiellen Trägheitstensoren der alternativen Beschreibung aus Abschnitt 2.4.6 dargestellt. Dort wird darauf hingewiesen, daß für die Berechnung von $C^{(1)\text{in}}$ aus (2.230) und $C_{33}^{(1)\text{in}}$ aus (2.232) die Integration über r auszuführen bleibt. Zuerst können die Ausdrücke (2.230) und (2.232) als Summe von Integralen wie folgt dargestellt werden:

$$C^{(1)\text{in}}(t) = 4\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left[\int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)U_{21}^*(r,t)r^3 dr + 3 \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)V_{21}^*(r,t)r^3 dr \right], \quad (\text{C.1})$$

$$C_{33}^{(1)\text{in}}(t) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} \left[\sqrt{5} \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)U_{00}(r,t)r^3 dr - \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)U_{20}(r,t)r^3 dr - 3 \int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)V_{20}(r,t)r^3 dr \right]. \quad (\text{C.2})$$

Hier haben die Integrale die Gestalt

$$\int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)U_{jm}(r,t)r^3 dr, \quad (\text{C.3})$$

wobei U_{jm} für die entsprechende Amplitude der spektralen Repräsentation des Verschiebungsvektors steht. Mit dem in (2.71) definierten finiten Element ψ_k und der Approximation der Volumenmassendichte mit stückweise konstanten Funktionen ρ_k in (2.75) folgt

$$\int_{r=0}^a \rho^{(0)}(r)U_{jm}(r,t)r^3 dr = \sum_{k=1}^P \rho_k \sum_{\alpha=k}^{k+1} U_{jm}^\alpha(t) \int_{r=0}^a r^3 \psi_\alpha(r) dr, \quad (\text{C.4})$$

$$= \sum_{k=1}^P \rho_k \sum_{\alpha=k}^{k+1} U_{jm}^\alpha(t) K_\alpha^{(4)}, \quad (\text{C.5})$$

wobei U_{jm}^α die SFER des Verschiebungsvektors ist. Die Integrale über die finiten Elemente sind durch

$$K_k^{(4)} := \int_{r=0}^a \psi_k(r)r^3 dr = \frac{h_k}{20} (r_{k+1}^3 + 2r_{k+1}^2 r_k + 3r_{k+1} r_k^2 + 4r_k^3), \quad (\text{C.6})$$

$$K_{k+1}^{(4)} := \int_{r=0}^a \psi_{k+1}(r)r^3 dr = \frac{h_k}{20} (4r_{k+1}^3 + 3r_{k+1}^2 r_k + 2r_{k+1} r_k^2 + r_k^3) \quad (\text{C.7})$$

gegeben und es gilt $h_k := r_{k+1} - r_k$. Es ist nun möglich, mit den hier angegebenen Ausdrücken $C^{(1)\text{in}}$ und $C_{33}^{(1)\text{in}}$ zu berechnen.

C.2 Integration der Liouville-Gleichung

In Abschnitt 4.3 wird die Berechnung der Lösung der linearisierten Liouville-Gleichung dargestellt, jedoch wird nur die Näherungslösung für die Integration bezüglich der Zeit angegeben, die im folgenden ausgeführt werden soll.

Die grundlegende Annahme für die Lösung der linearisierten Liouville-Gleichung (4.12) ist die gleitende Mittelung von m ,

$$\bar{m}(t) = \frac{1}{T^C} \int_{t_m=t-\frac{T^C}{2}}^{t+\frac{T^C}{2}} m(t_m) dt_m, \quad (\text{C.8})$$

wobei im Zeitintervall $[t - T^C/2, t + T^C/2]$, mit $T^C = 2\pi/\lambda^C$, die Anregungsfunktion (2.157) einen linearen Trend aufweist, so daß folgende Näherung gilt:

$$\chi(t_m) = \alpha t_m + \beta \quad \text{für} \quad t_m \in [t - \frac{T^C}{2}, t + \frac{T^C}{2}]. \quad (\text{C.9})$$

Mit der Äquivalenz des gleitenden Mittels, $\bar{\chi}$, mit dem linearen Trend,

$$\bar{\chi}(t) = \frac{1}{T^C} \int_{t_m=t-\frac{T^C}{2}}^{t+\frac{T^C}{2}} \chi(t_m) dt_m = \alpha t + \beta = \chi(t), \quad (\text{C.10})$$

ist die Mittelung des letzten Terms in (4.12) gegeben. Es bleibt die Mittelung des ersten Terms in (4.12) zu bestimmen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T^C} \int_{t_m=t-\frac{T^C}{2}}^{t+\frac{T^C}{2}} e^{i\lambda^C t_m} \int_0^{t_m} \chi(\tilde{t}) e^{-i\lambda^C \tilde{t}} d\tilde{t} dt_m = \\ &= \frac{1}{T^C \lambda^C} \int_{t_m=t-\frac{T^C}{2}}^{t+\frac{T^C}{2}} \left[i\chi(t_m) + \frac{\alpha}{\lambda^C} - \left(\frac{\alpha}{\lambda^C} + i\beta \right) e^{i\lambda^C t_m} \right] dt_m \\ &= \frac{1}{\lambda^C} \left[i\bar{\chi}(t) + \frac{\alpha}{\lambda^C} + \frac{i}{T^C \lambda^C} \left(\frac{\alpha}{\lambda^C} + i\beta \right) e^{i\lambda^C t} \left(e^{i\lambda^C \frac{T^C}{2}} - e^{-i\lambda^C \frac{T^C}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^C} \left(i\bar{\chi}(t) + \frac{\alpha}{\lambda^C} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Im letzten Schritt der Ableitung ist berücksichtigt, daß $\lambda^C T^C = 2\pi$ ist, und damit folgt

$$e^{i\lambda^C \frac{T^C}{2}} - e^{-i\lambda^C \frac{T^C}{2}} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Mit obigen Ableitungen ergibt sich für das gleitende Mittel der Lösung der linearisierten Liouville-Gleichung (4.12) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= \frac{k_s}{k_s - k_L} \left[-\frac{\lambda^C}{\omega^{(0)}} \bar{\chi}(t) - i\lambda^C \left(1 + \frac{\lambda^C}{\omega^{(0)}} \right) \frac{1}{\lambda^C} \left(i\bar{\chi}(t) + \frac{\alpha}{\lambda^C} \right) \right] \\ &= \frac{k_s}{k_s - k_L} \left[\bar{\chi}(t) - i\frac{\alpha}{\lambda^C} \left(1 + \frac{\lambda^C}{\omega^{(0)}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

wobei für die Anregungsfunktion, χ , die Annahme (C.9) gilt. Sind mit (2.157) für jede Zeit, t^i , die Werte $\chi(t^i)$ berechnet, lassen sich daraus α und $\bar{\chi}$ bestimmen und mit (4.14) die genäherte Lösung der Liouville-Gleichung angeben.

D. Ergänzungen zu Kapitel 6

D.1 Angaben zu den Pegelstationen

Im Abschnitt 6.2 werden die Kriterien zur Auswahl der Pegelstationen aus der Datenbasis des PSMSL angegeben. Desweiteren wird in Abbildung 6.1 die globale Verteilung der ausgewählten Pegelstationen gezeigt. In Tabelle D.1 sind diese Pegelstationen mit ihrer jeweiligen PSMSL-ID, den geographischen Koordinaten, der Regionszugehörigkeit und der Länge der Zeitreihe zusammengestellt. Die Regionen sind in Abschnitt 6.4 eingeführt und werden nur für die Pegelstationen angegeben, die für die Berechnung des globalen Meeresspiegelanstiegs berücksichtigt werden (Tabelle 6.3).

Tabelle D.1: Untersuchte Pegelstationen, zugehörige PSMSL-ID, geographischen Koordinaten, Regionszugehörigkeit und Intervall der Zeitreihe.

PSMSL-ID	Stationsname	λ (° N)	φ (° E)	Region	Zeitintervall
010001	Reykjavik	64.150	338.067		1956–2001
025001	Barentsburg	78.667	14.250		1948–2002
030018	Murmansk	68.967	33.050		1952–2002
030310	Amderma	69.750	61.700		1950–2000
030447	Tiksi	71.583	128.917		1949–2000
030480	Sannikova	74.667	138.900		1950–2000
030535	Ambarchik	69.617	162.300		1950–2000
030560	Aion	69.933	167.983		1954–2000
030620	Vrangelia	70.983	178.483		1950–2000
030630	Vankarem	67.833	184.167		1950–2000
040031	Tromsø	69.650	18.967	R1	1952–2001
040081	Narvik	68.433	17.417	R1	1948–2001
040091	Kabelvåg	68.217	14.483	R1	1948–2001
040151	Heimsjø	63.433	9.117	R1	1935–2001
040191	Ålesund	62.467	6.150	R1	1951–2001
040211	Maløy	61.933	5.117	R1	1945–2001
040221	Bergen	60.400	5.300	R1	1928–2001
040261	Stavanger	58.967	5.733	R1	1928–2001
040301	Tregde	58.000	7.567	R1	1935–2001
040321	Oslo	59.900	10.750	R1	1928–2001
050011	Smögen	58.367	11.217	R1	1911–2001
050031	Göteborg	57.717	11.950	R1	1887–1968
050041	Varberg	57.100	12.217	R1	1887–1981
050051	Klagshamn	55.517	12.900	R1	1929–2001
050071	Ystad	55.417	13.817	R1	1887–1981
050081	Kungholmsfort	56.100	15.583	R1	1887–2001
050091	Ölands n. Udde	57.367	17.100	R1	1887–2001
050121	Landsort	58.750	17.867	R1	1887–2001
050131	Nedre Södertälje	59.200	17.617	R1	1869–1970
050141	Stockholm	59.317	18.083	R1	1889–2001
050161	Björn	60.633	17.967	R1	1892–1976
050171	Nedre Gävle	60.667	17.167	R1	1896–1986
050181	Draghallan	62.333	17.467	R1	1898–1967
050191	Ratan	64.000	20.917	R1	1892–2001
050201	Furuogrund	64.917	21.233	R1	1916–2001

PSMSL-ID	Stationsname	λ (° N)	φ (° E)	Region	Zeitintervall
060011	Oulu	65.033	25.417	R1	1889–2001
060021	Raahe	64.667	24.417	R1	1921–2001
060041	Pietarsaari	63.700	22.700	R1	1914–2001
060051	Vaasa	63.100	21.567	R1	1883–2001
060071	Kaskinen	62.333	21.217	R1	1926–2001
060101	Mantyluoto	61.600	21.467	R1	1910–2001
060241	Turku	60.433	22.100	R1	1922–2001
060281	Degerby	60.033	20.383	R1	1923–2001
060331	Hanko	59.817	22.983	R1	1887–1997
060351	Helsinki	60.150	24.967	R1	1879–2001
060361	Hamina	60.567	27.183	R1	1928–2001
110092	Swinoujscie	53.917	14.233	R1	1811–1999
120012	Warnemunde 2	54.183	12.083	R1	1855–2002
120022	Wismar 2	53.900	11.467	R1	1848–2002
125001	Travemunde	53.967	10.883	R1	1856–2002
130001	Gedser	54.567	11.933	R1	1898–1997
130021	Kobenhavn	55.683	12.600	R1	1889–1997
130031	Hornbæk	56.100	12.467	R1	1898–1997
130041	Korsør	55.333	11.133	R1	1897–1997
130051	Slipshavn	55.283	10.833	R1	1896–1996
130071	Fredericia	55.567	9.767	R1	1889–1997
130081	Århus	56.150	10.217	R1	1888–1997
130091	Frederikshavn	57.433	10.567	R1	1894–1997
130101	Hirtshals	57.600	9.967	R1	1892–1997
130121	Esbjerg	55.467	8.433	R1	1889–1997
140012	Cuxhaven 2	53.867	8.717	R3	1843–2002
150001	Delfzijl	53.333	6.933	R3	1865–2002
150011	West Terschelling	53.367	5.217	R3	1921–2002
150021	Harlingen	53.167	5.417	R3	1865–2002
150031	Den Helder	52.967	4.750	R3	1865–2002
150041	IJmuiden	52.467	4.583	R3	1920–2002
150051	Hoek van Holland	51.983	4.117	R3	1864–2002
150061	Maassluis	51.917	4.250	R3	1848–2002
150071	Hellevoetsluis	51.817	4.133	R3	1861–1968
150091	Zierikzee	51.633	3.917	R3	1872–1986
150101	Vlissingen	51.450	3.600	R3	1890–2002
160021	Oostende	51.233	2.917	R3	1945–2000
170012	Aberdeen II	57.150	357.917	R3	1862–1965
170053	North Shields	55.000	358.567	R3	1895–2002
170161	Newlyn	50.100	354.450	R3	1915–2002
175071	Dublin	53.350	353.783	R3	1938–2001
190091	Brest	48.383	355.500	R3	1807–2000
200011	Santander I	43.467	356.200	R3	1944–2001
200030	La Coruna I	43.367	351.600	R3	1943–2001
200041	Vigo	42.250	351.267	R3	1943–2001
210021	Cascais	38.683	350.583	R3	1882–1993
210031	Lagos	37.100	351.333	R3	1908–1987
230051	Marseille	43.300	5.350	R3	1885–2000
250011	Genova	44.400	8.900	R3	1928–1997
270054	Venezia	45.433	12.333		1909–2000
270061	Trieste	45.650	13.750	R3	1905–2001
280011	Bakar	45.300	14.533		1949–1999
295021	Bourgas	42.483	27.483		1929–1996
295051	Varna	43.183	27.917		1929–1996
298041	Sevastopol	44.617	33.533		1910–1994
300001	Tuapse	44.100	39.067		1917–2001

PSMSL-ID	Stationsname	λ (° N)	φ (° E)	Region	Zeitintervall
305021	Poti	42.167	41.683		1922–2001
305031	Batumi	41.633	41.700		1925–1996
500081	Cochin	9.967	76.267	R4	1939–1999
500101	Vishakhapatnam	17.683	83.283	R4	1937–1995
545001	Ko Taphao Noi	7.833	98.433		1940–2002
600021	Ko Lak	11.800	99.817		1940–2002
600051	Ko Sichang	13.150	100.817		1940–2002
630021	Petropavlovsk	52.983	158.650		1957–2002
642061	Mera	34.917	139.833		1931–2000
642091	Aburatsubo	35.150	139.617		1930–1999
645011	Hosojima	32.433	131.667		1930–1999
647071	Wajima	37.400	136.900		1930–1999
660011	Manila	14.583	120.967		1947–1997
680140	Sydney	-33.850	151.233	R5	1914–2000
680181	Williamstown	-37.867	144.917	R5	1944–2000
680391	Port Pirie	-33.167	138.017		1932–2000
680471	Fremantle	-32.050	115.733	R5	1915–2000
690002	Auckland II	-36.850	174.767	R5	1903–2000
690022	Lyttelton II	-44.400	171.267	R5	1924–1988
720011	Kwajalein	8.733	167.733	R4	1946–2001
760031	Honolulu	21.317	202.133	R4	1905–2001
760061	Hilo Hawaii Island	19.733	204.933		1946–2001
820011	Adak	51.867	183.367		1943–2001
821026	Yakutat	59.550	220.267		1940–2001
821031	Sitka	57.050	224.667		1938–2001
821044	Juneau	58.300	225.583		1944–2001
821051	Ketchikan	55.333	228.367		1919–2001
822001	Prince Rupert	54.317	229.667		1939–1999
822071	Vancouver	49.283	236.883		1940–1999
822101	Victoria	48.417	236.633		1909–1999
822116	Tofino	49.150	234.083		1940–1999
823001	Neah Bay	48.367	235.383		1934–2001
823006	Friday Harbor	48.550	237.000		1934–2001
823011	Seattle	47.600	237.667		1899–2001
823013	Astoria	46.217	236.233		1925–2001
823021	Crescent City	41.750	235.800		1933–2001
823031	San Francisco	37.800	237.533	R2	1854–2001
823032	Alameda	37.767	237.700	R2	1939–2001
823051	Los Angeles	33.717	241.733	R2	1923–2001
823071	La Jolla	32.867	242.750	R2	1924–2001
823081	San Diego	32.717	242.833	R2	1906–2001
840011	Balboa	8.967	280.433	R5	1908–1996
845012	La Libertad II	-2.200	279.083		1948–2001
850012	Antofagasta 2	-23.650	289.600		1945–1999
860081	Quequen	-38.583	301.300	R5	1918–1982
860151	Buenos Aires	-34.600	301.633	R5	1905–1987
904011	Cristobal	9.350	280.083	R3	1909–1980
940001	Port Isabel	26.067	262.783		1944–2001
940041	Pensacola	30.400	272.783	R3	1923–2001
940052	Cedar Key II	29.133	276.967	R3	1938–1997
940071	Key West	24.550	278.200	R3	1913–2001
950011	St Georges	32.367	295.300	R3	1944–1999
960011	Mayport	30.400	278.567	R2	1928–2000
960021	Fernandina	30.683	278.533	R2	1939–2001
960031	Fort Pulaski	32.033	279.100	R2	1935–2001
960041	Charleston I	32.783	280.067	R2	1921–2001

PSMSL-ID	Stationsname	λ (° N)	φ (° E)	Region	Zeitintervall
960060	Wilmington	34.233	282.267	R2	1935–2001
960071	Hampton Roads	36.950	283.667	R2	1927–2001
960076	Washington DC	38.867	282.983	R2	1931–2001
960078	Solomons Island	38.317	283.550	R2	1937–2001
960080	Annapolis	38.983	283.517	R2	1928–2000
960081	Baltimore	39.267	283.417	R2	1902–2001
960087	Philadelphia	39.950	284.867	R2	1900–2001
960091	Atlantic City	39.350	285.583	R2	1911–2001
960101	Sandy Hook	40.467	285.983	R2	1932–2001
960121	New York	40.700	285.983	R2	1893–2001
960141	Willets Point	40.800	286.217	R2	1931–2000
960161	Newport	41.500	288.667	R2	1930–2001
960165	Woods Hole	41.533	289.333	R2	1932–2001
960171	Boston	42.350	288.950	R2	1921–2001
960181	Portland	43.667	289.750	R2	1912–2001
960201	Eastport	44.900	293.017	R2	1929–2001
970001	Saint John	45.267	293.933	R2	1939–1999
970011	Halifax	44.667	296.417	R2	1920–2002
970031	Charlottetown	46.267	296.883	R2	1938–2002
970071	Quebec	46.833	288.833	R2	1938–1994
970141	Churchill	58.767	265.817		1940–2000

D.2 LTA-Diagramme der ausgewählten Pegelstationen

In Abschnitt 6.2 wird beschrieben, wie für die jeweilige Pegelstation das LTA-Diagramm mit Hilfe von (6.3)–(6.6) erstellt wird. Im oberen Teil eines jeden LTA-Diagramms ist die Zeitreihe der Pegelmeßwerte der entsprechenden Station gezeigt. Auf derselben Zeitachse sind für die Mittelpunkte der Berechnungsintervalle, t_{MP} , mittels der Farbskala die linearen Trends, s^L , für die jeweilige Länge des Berechnungsintervalls, Δt , angegeben. Weitere Informationen zur Berechnung der linearen Trends und der Interpretation der LTA-Diagramme werden in Abschnitten 6.3 gegeben. Für weiter Informationen zu den Pegelstationen und den zugehörigen Zeitreihen wird auf Tabelle D.1 verwiesen.

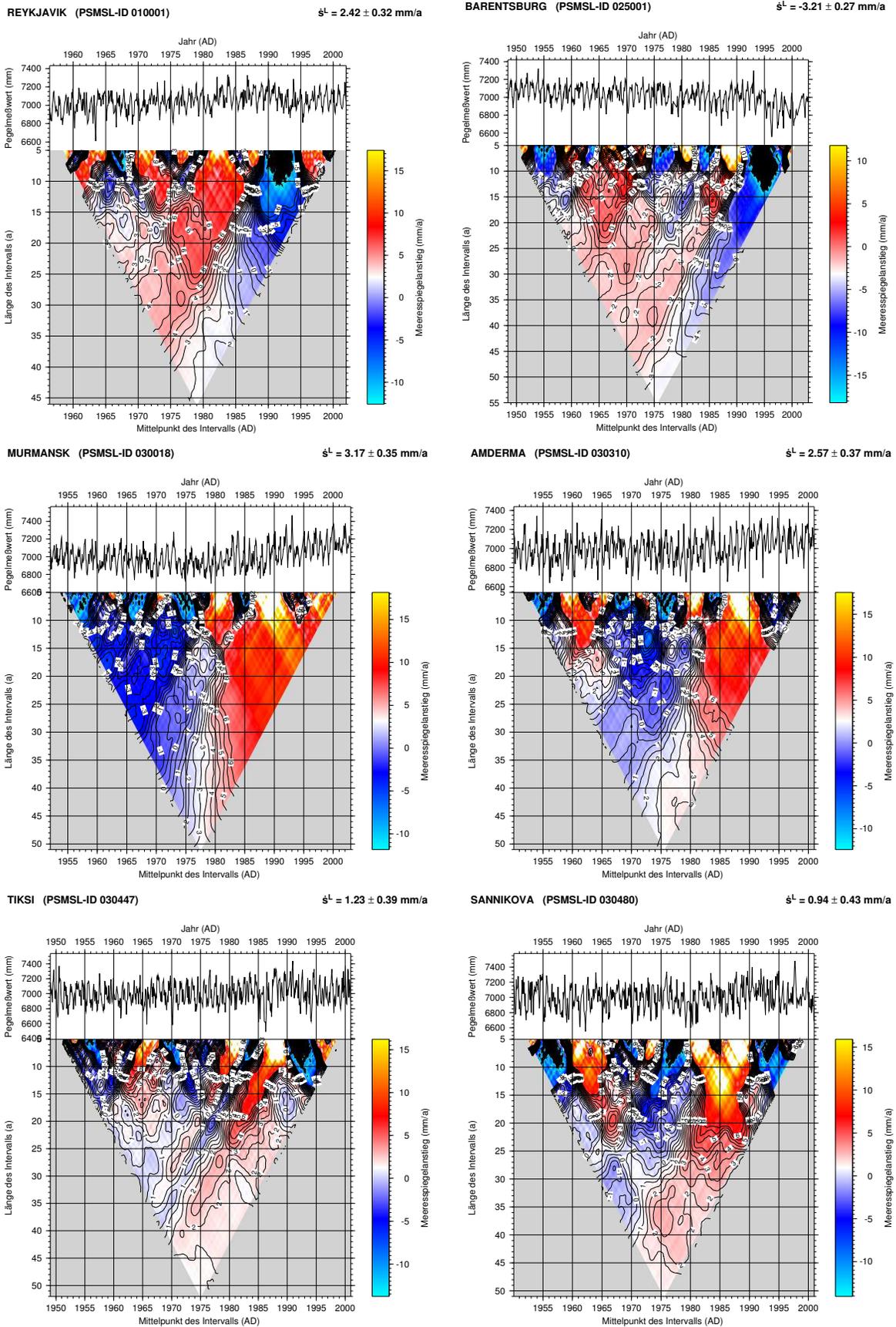


Abbildung D.1: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 010001–030480.

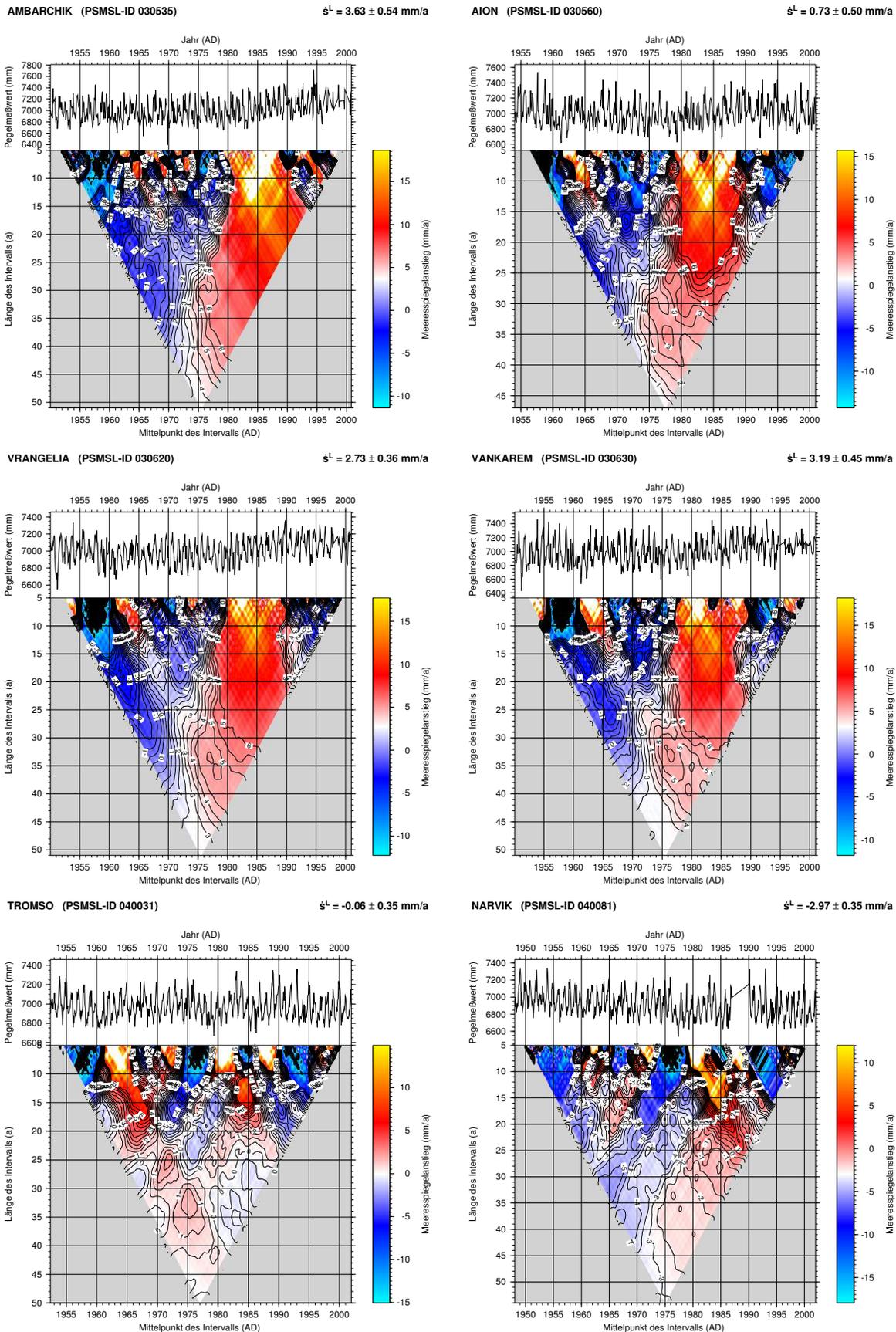


Abbildung D.2: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 030535–040081.

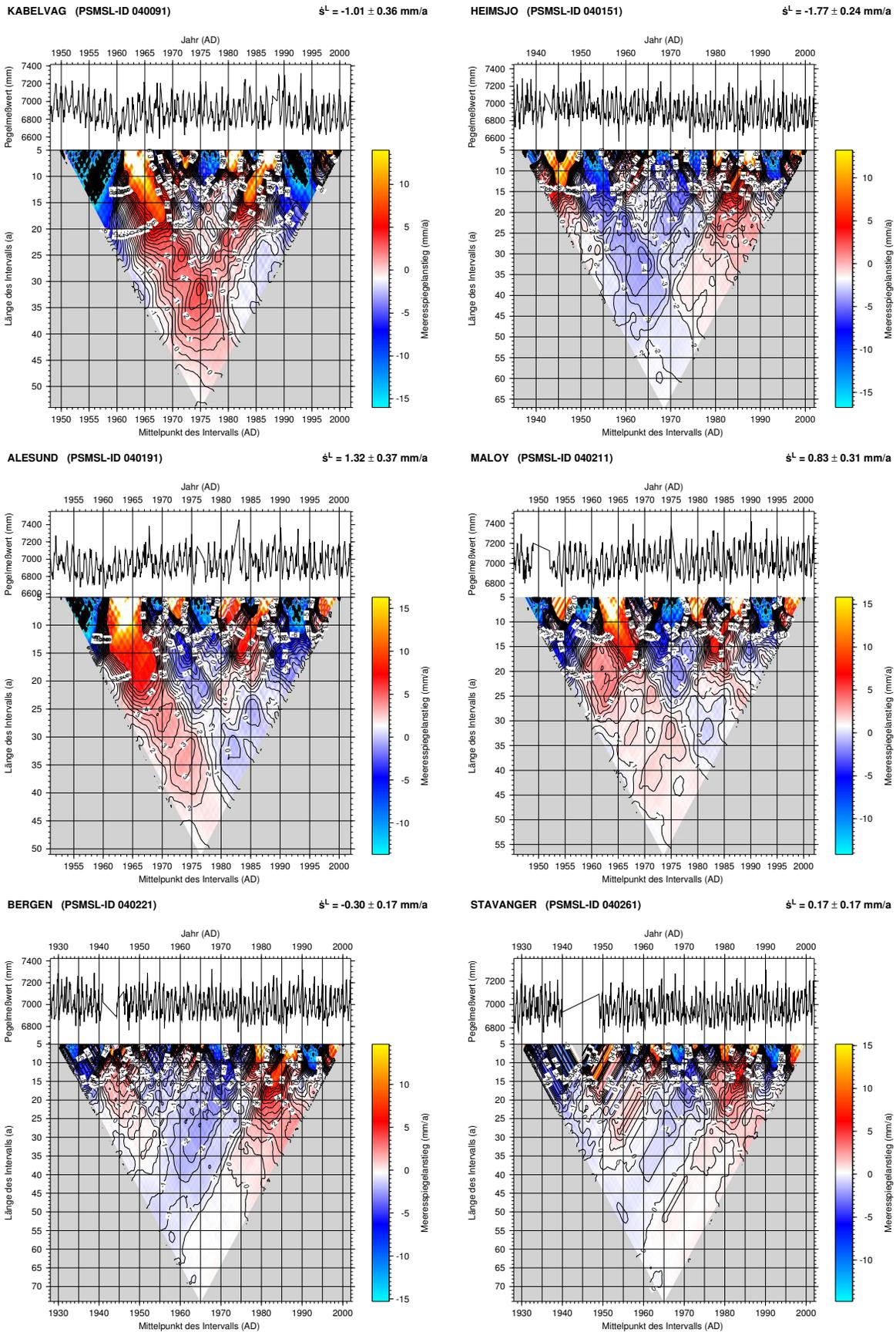


Abbildung D.3: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 040091–040261.

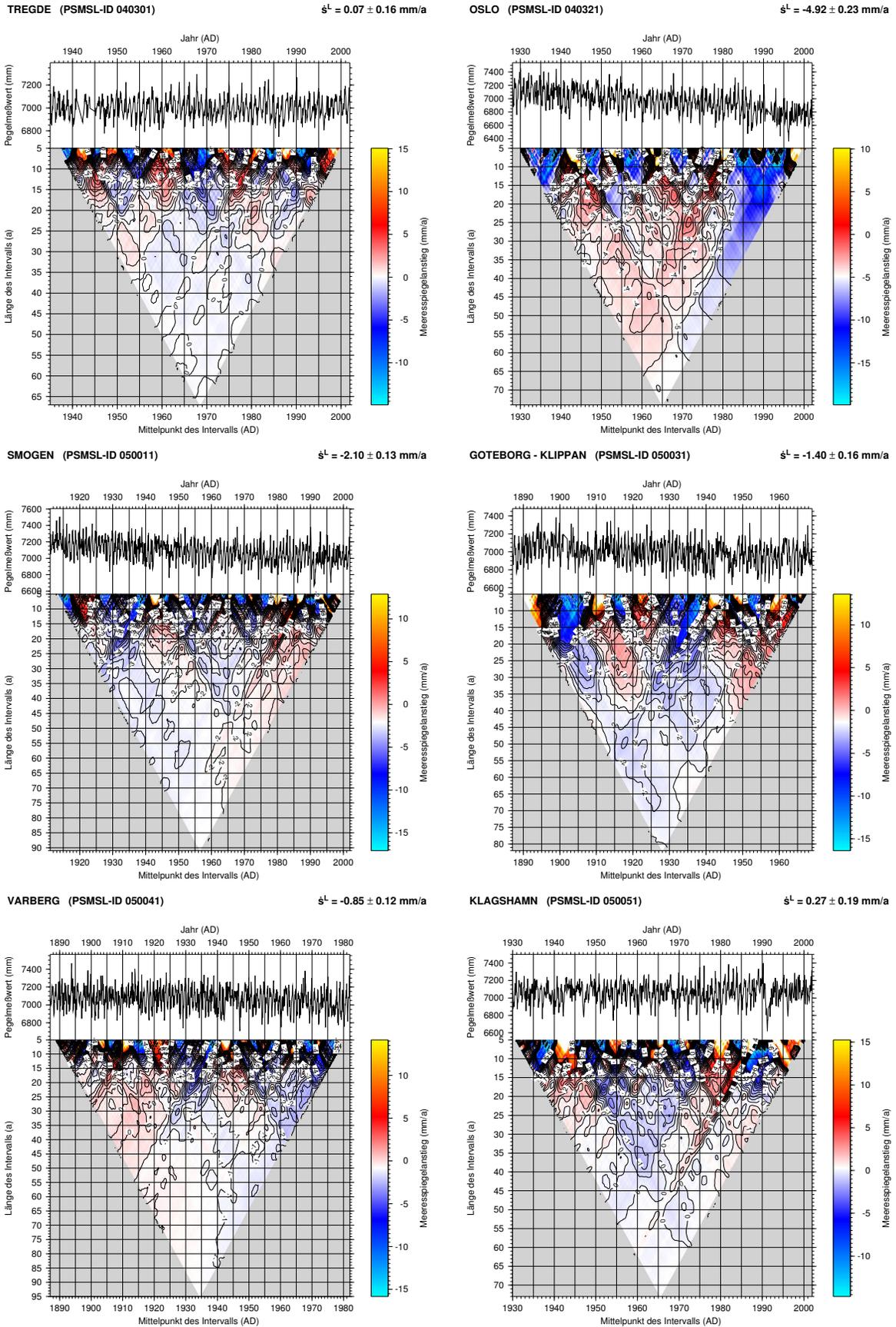


Abbildung D.4: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 040301–050051.

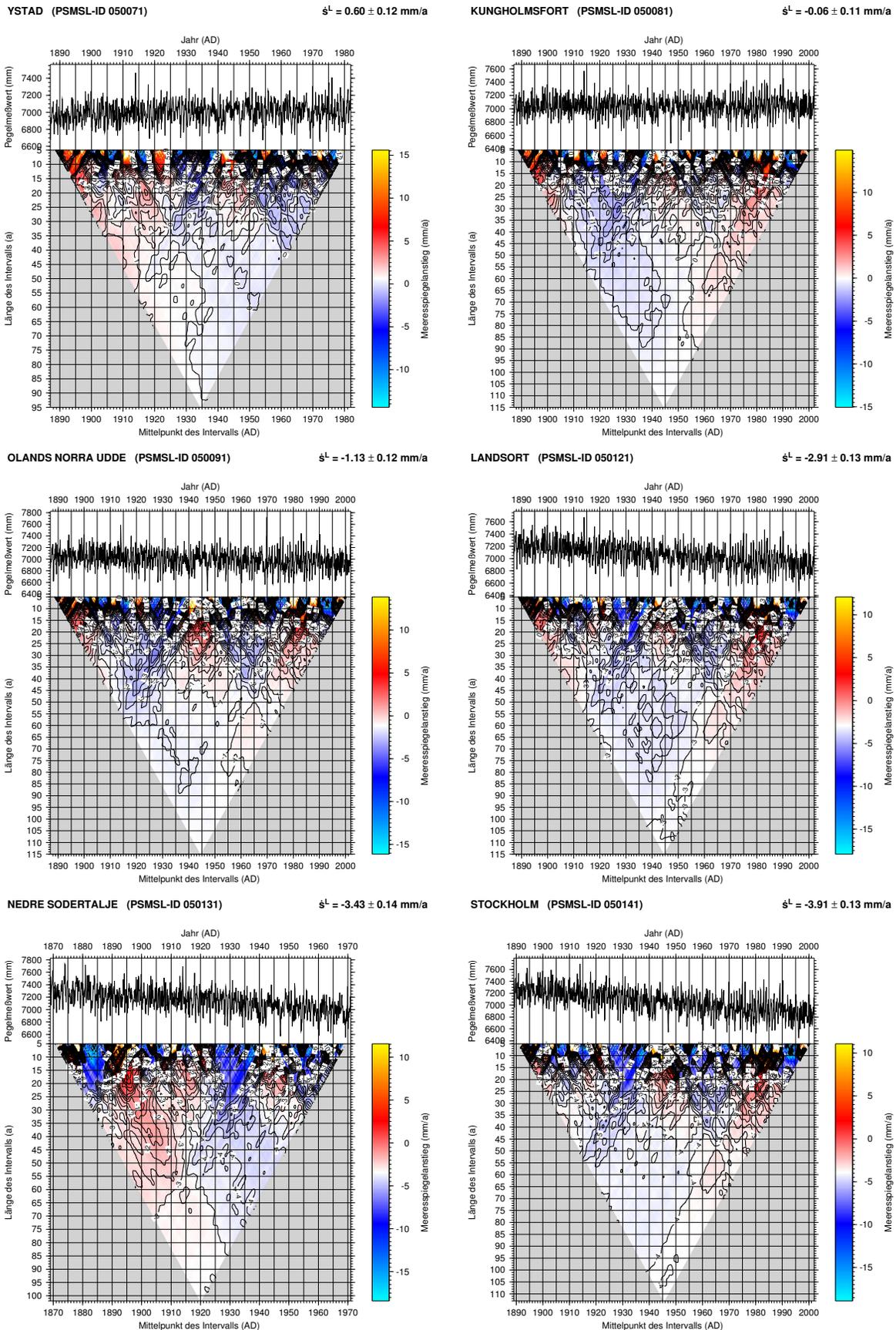


Abbildung D.5: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 050071–050141.

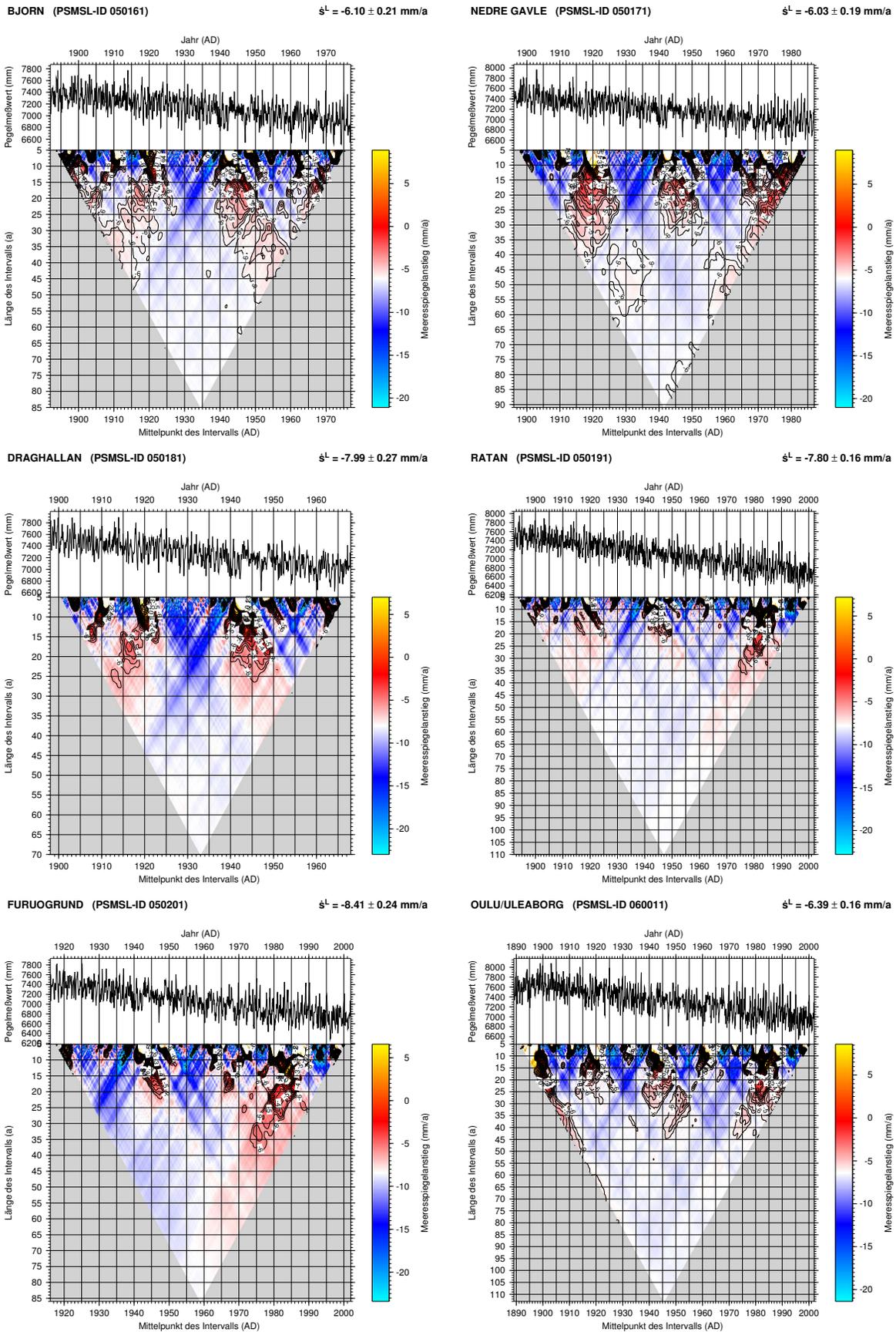


Abbildung D.6: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 050161–060011.

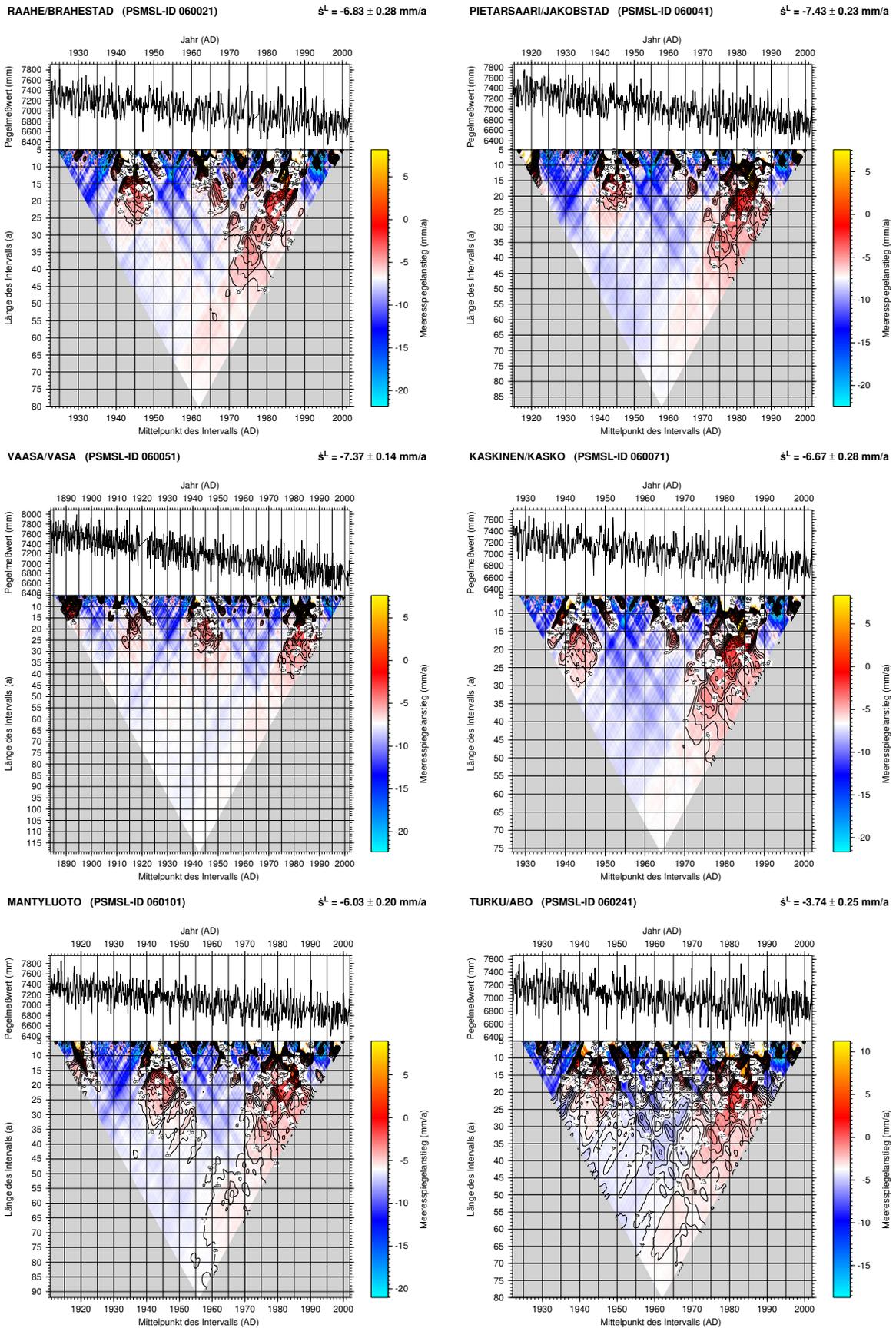


Abbildung D.7: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 060021–060241.

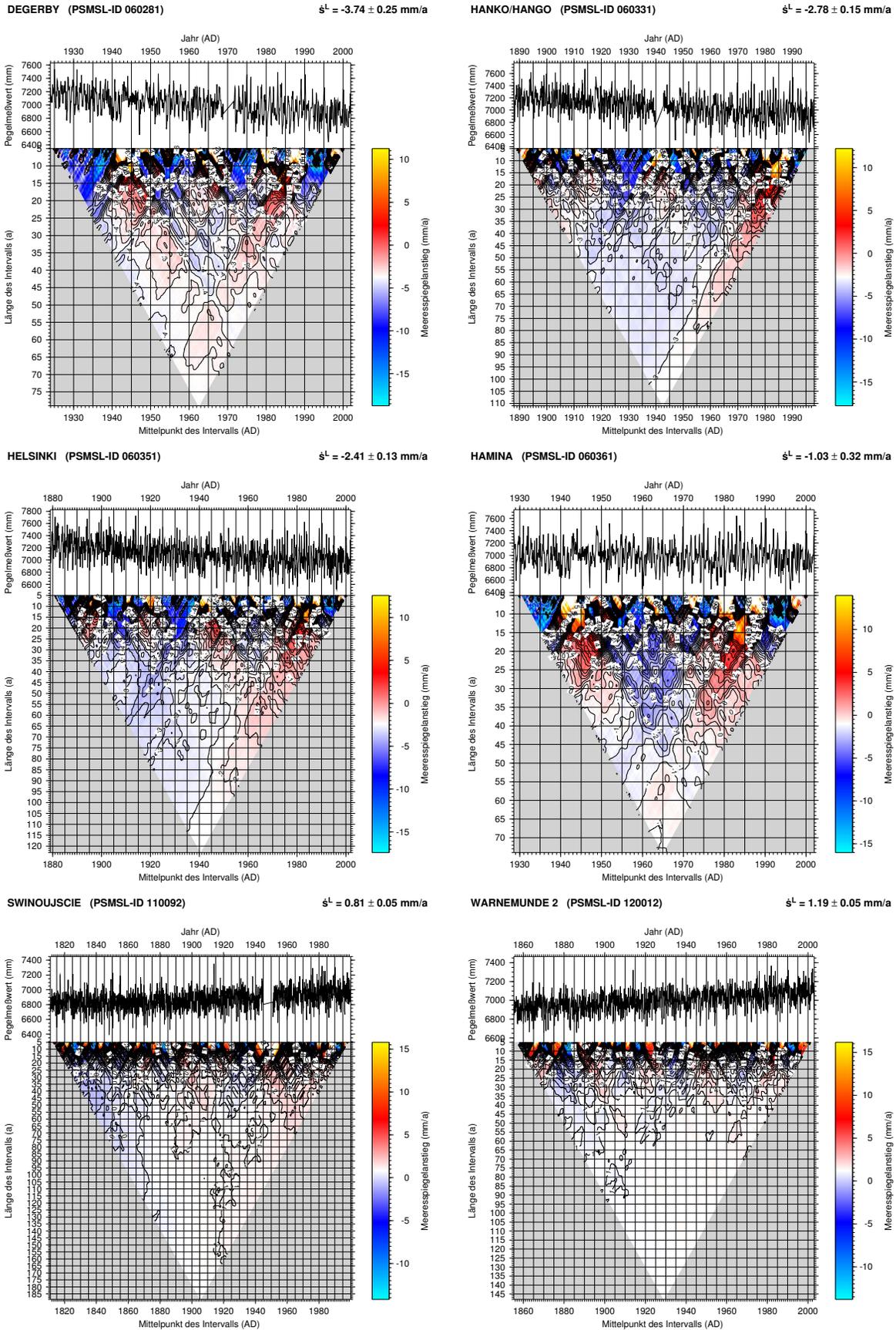


Abbildung D.8: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 060281–120012.

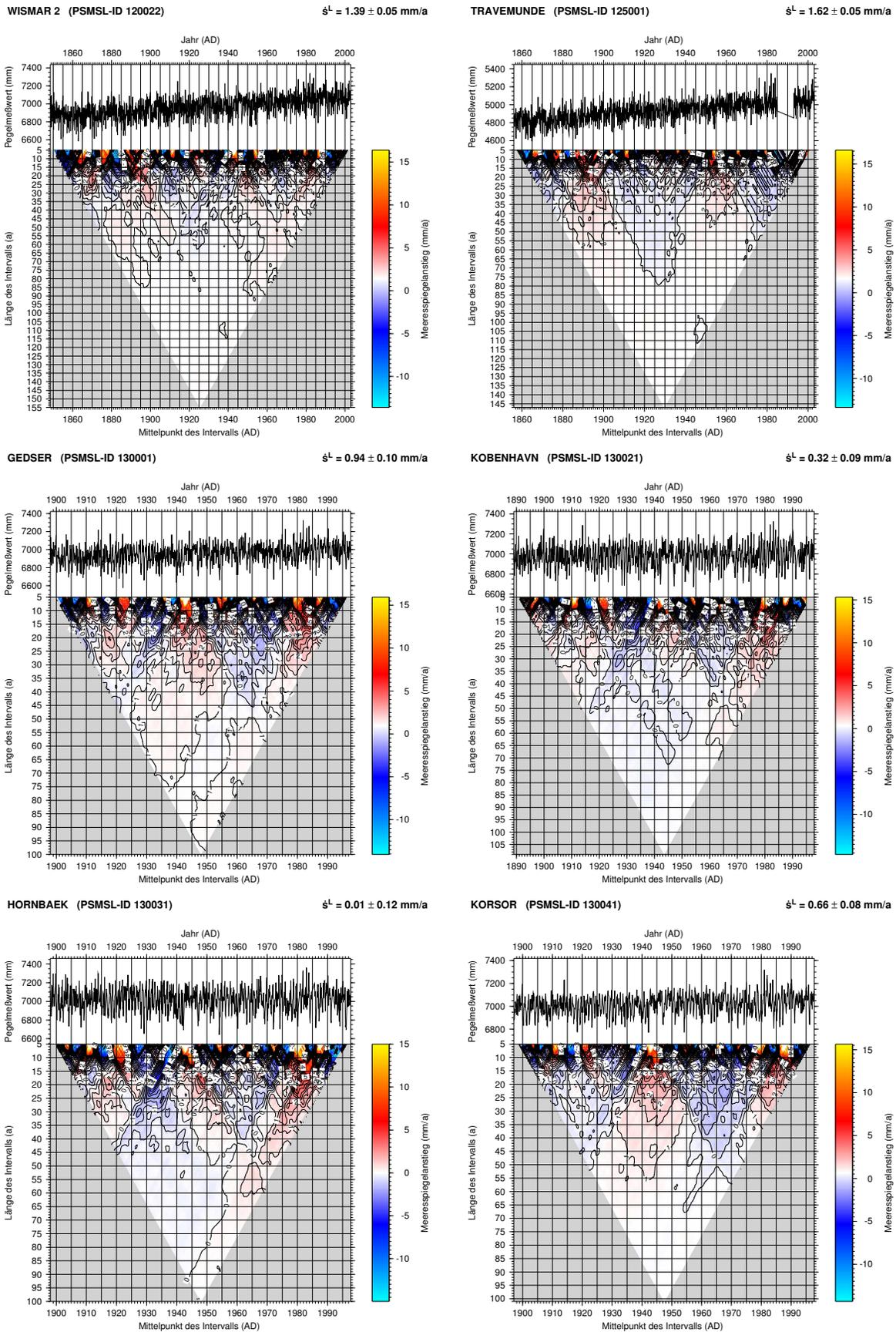


Abbildung D.9: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 120022–130041.

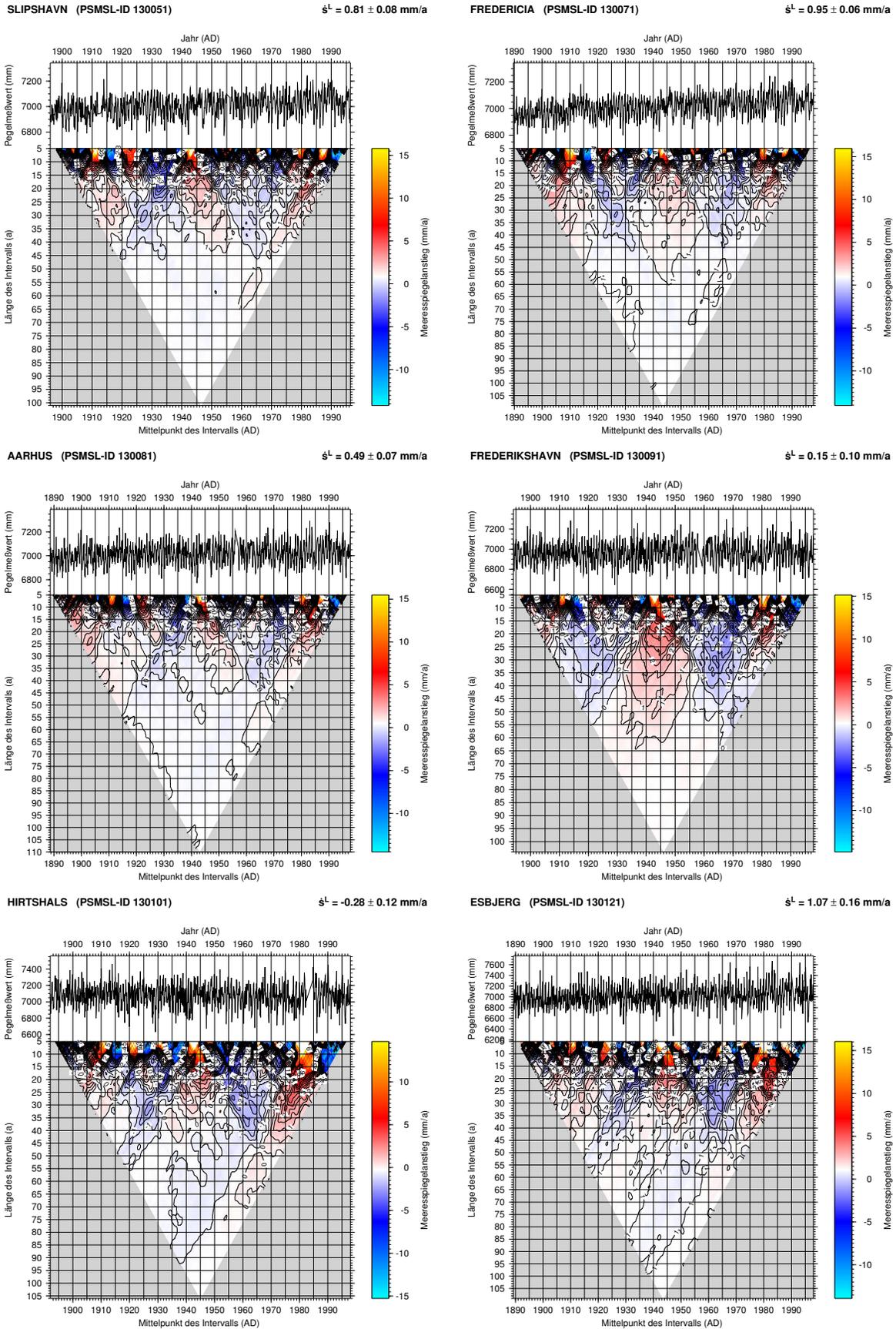


Abbildung D.10: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 130051–130121.

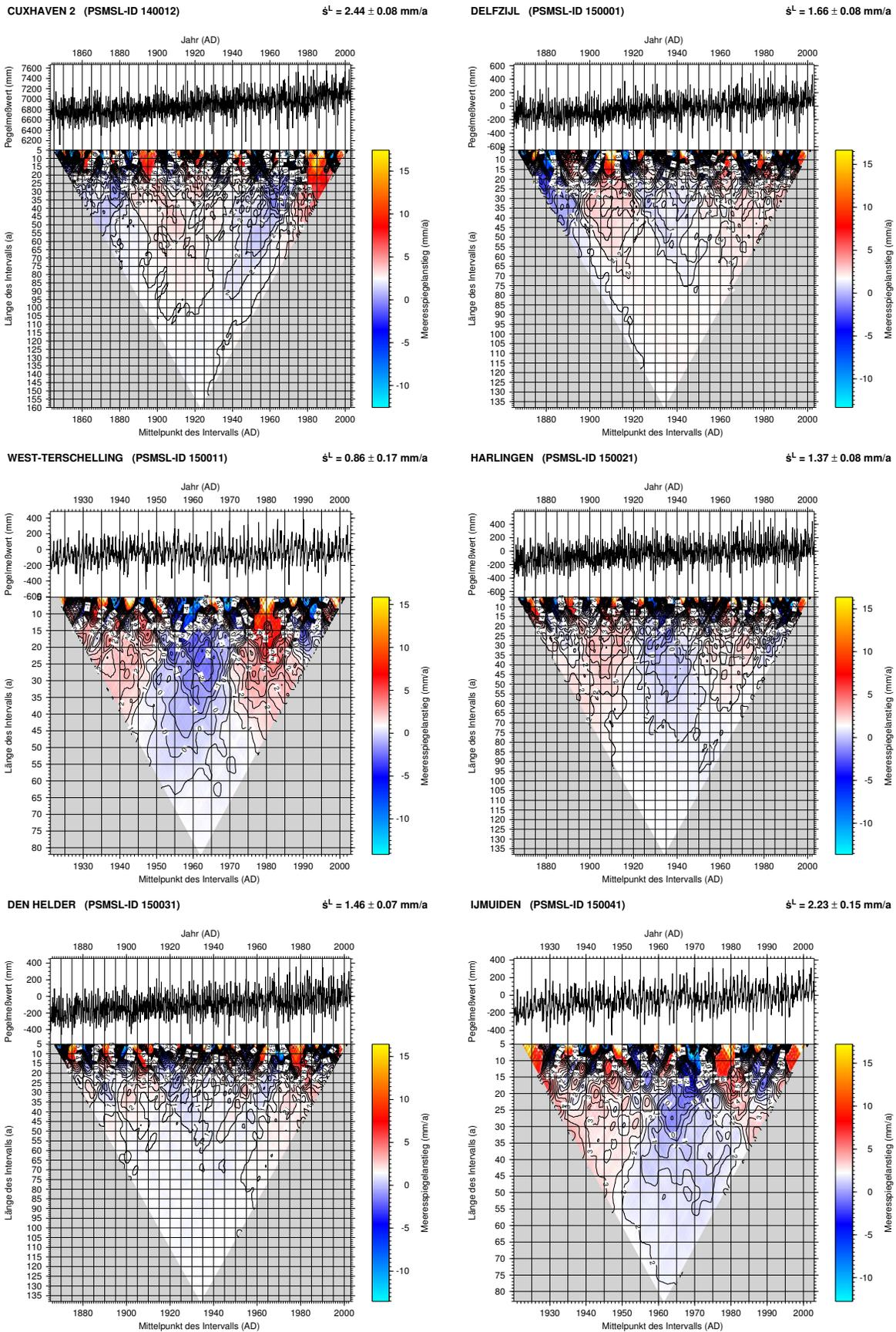


Abbildung D.11: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 140012–150041.

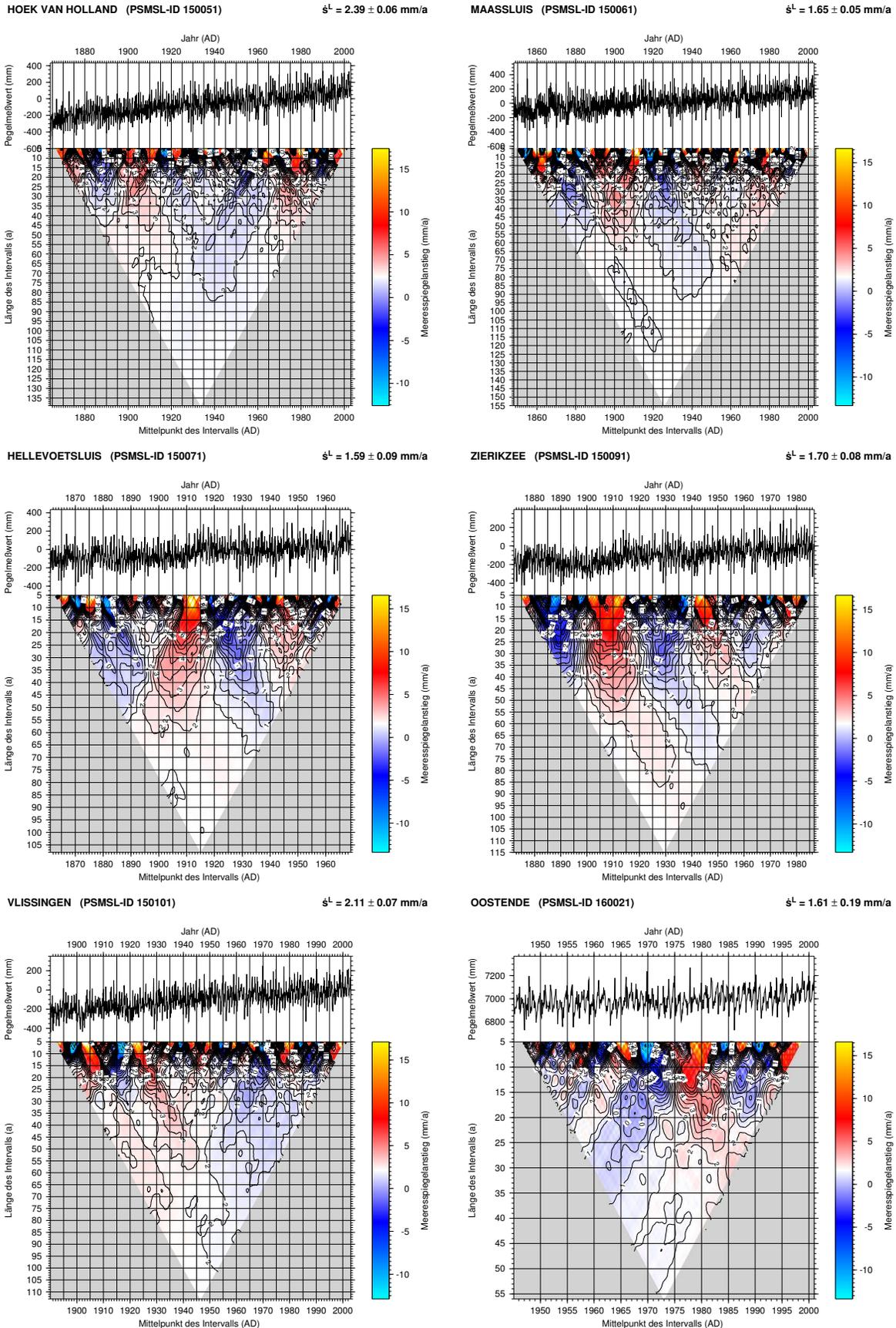


Abbildung D.12: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 150051–160021.

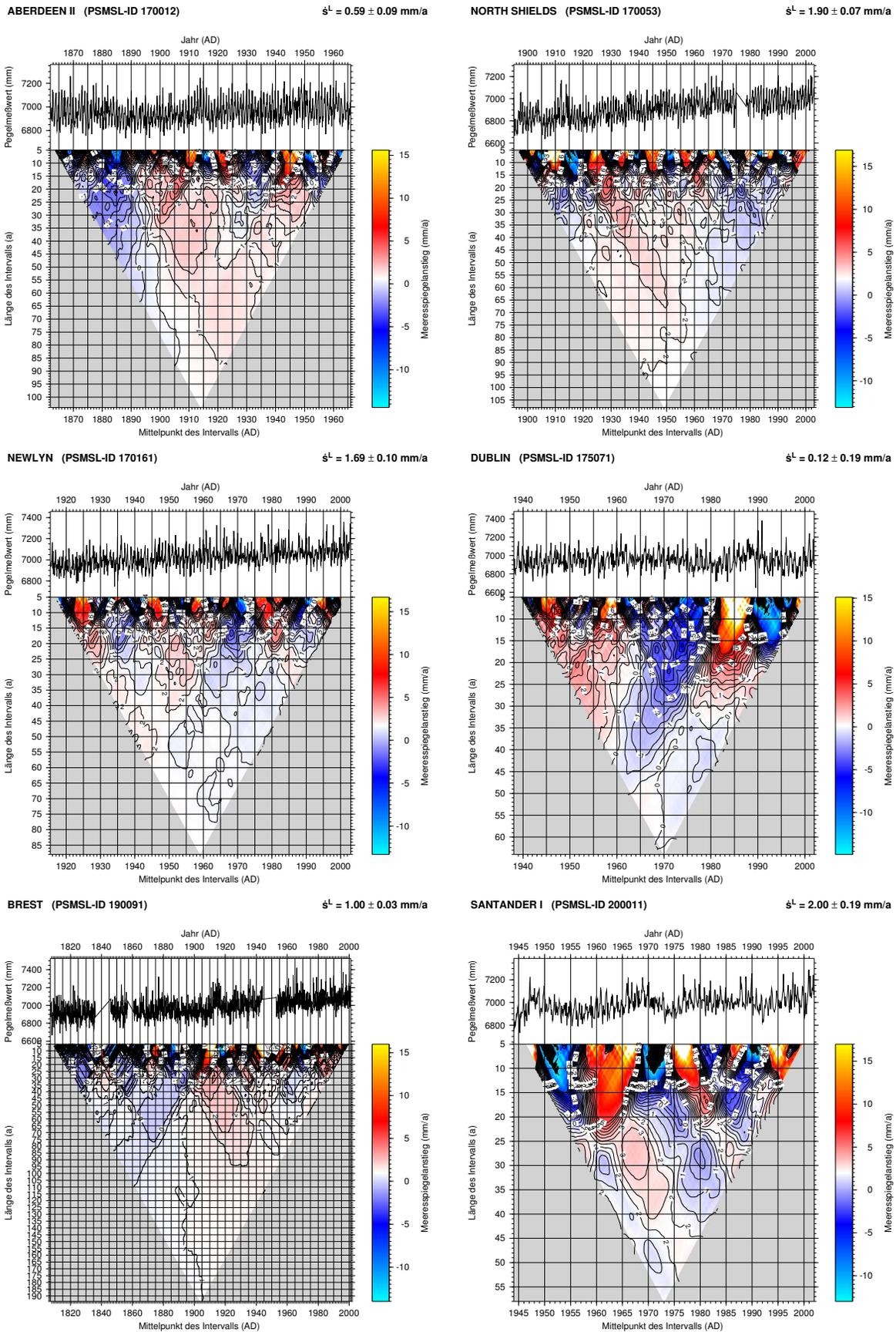


Abbildung D.13: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 170012–200011.

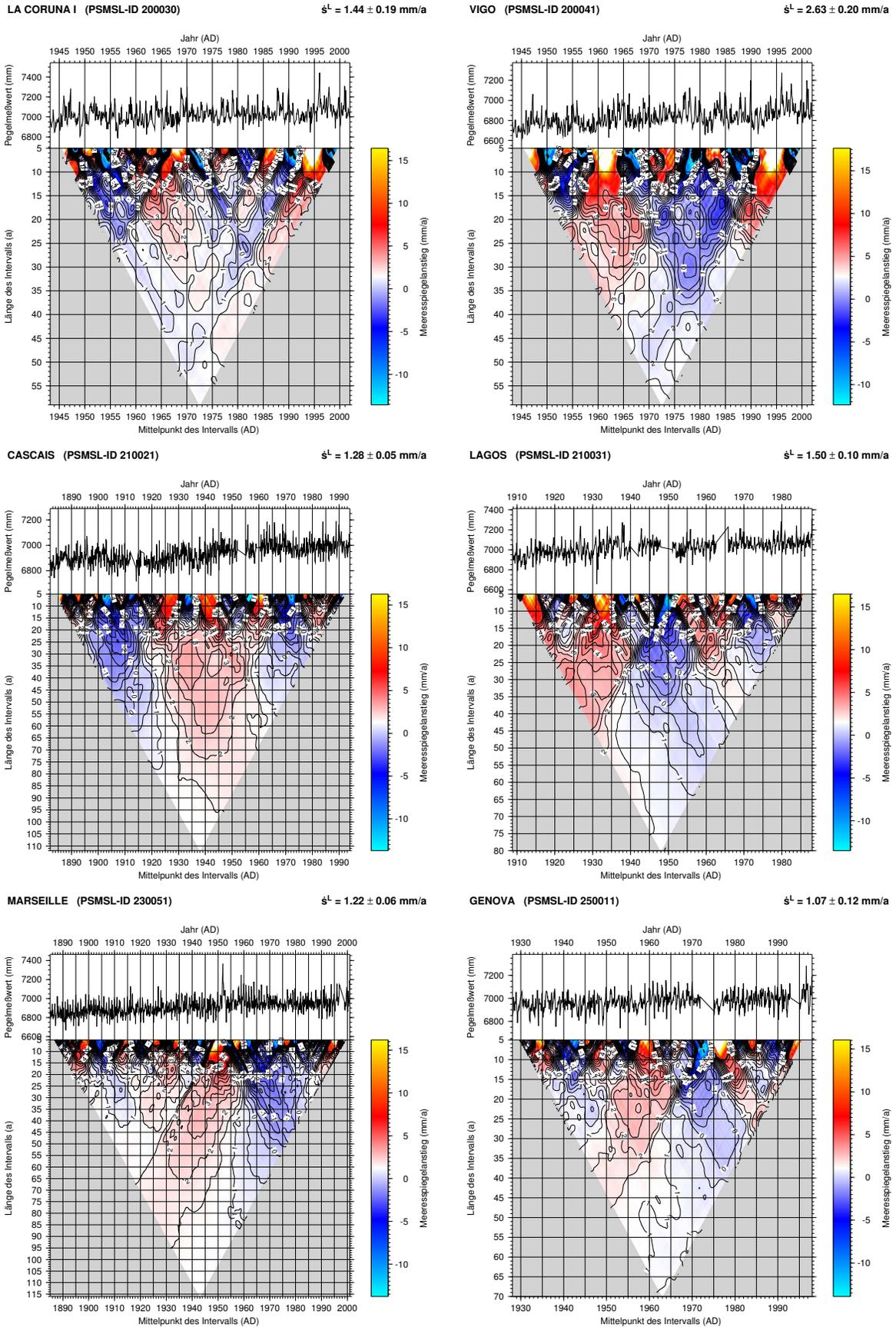


Abbildung D.14: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 200030–250011.

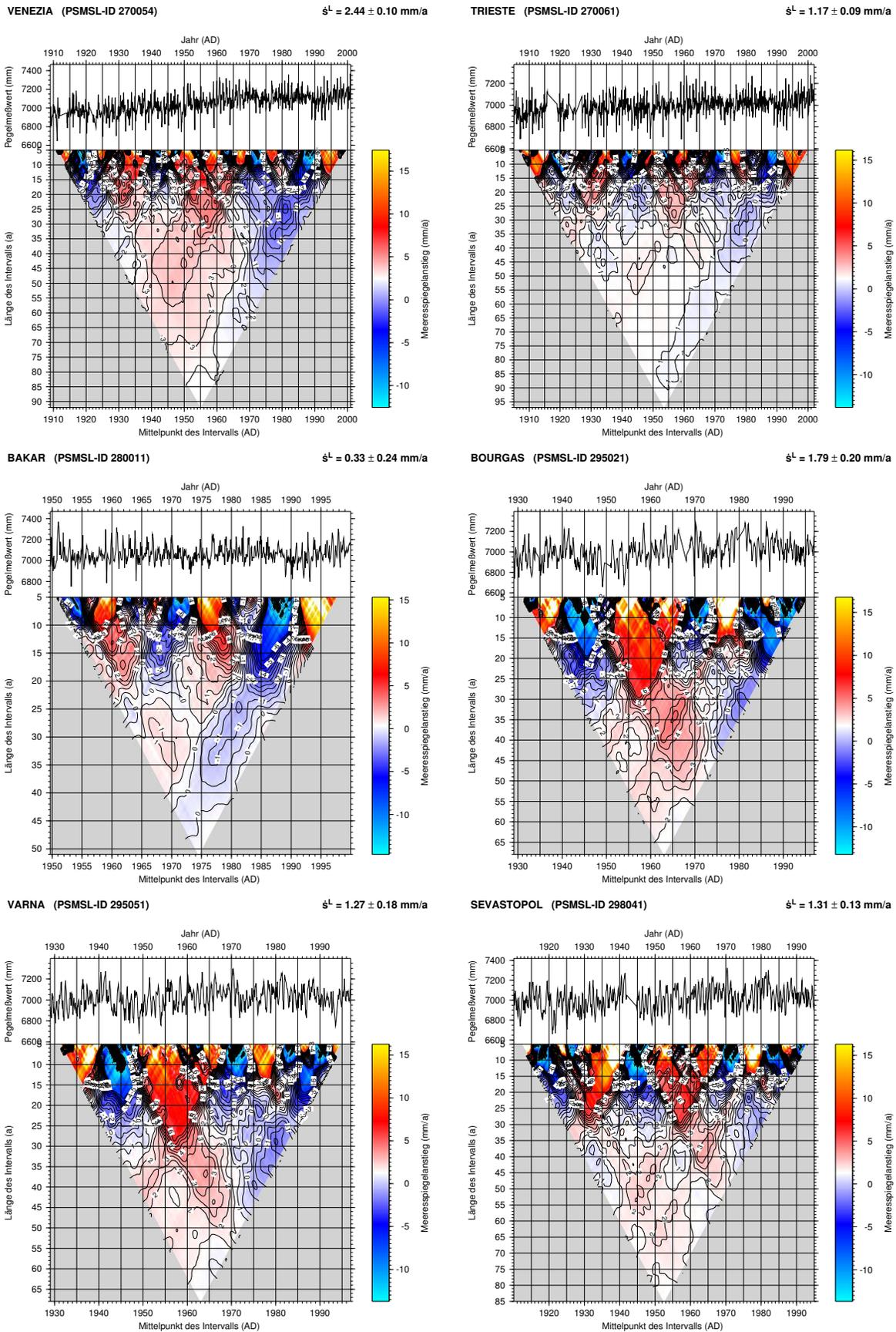


Abbildung D.15: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 270054–298041.

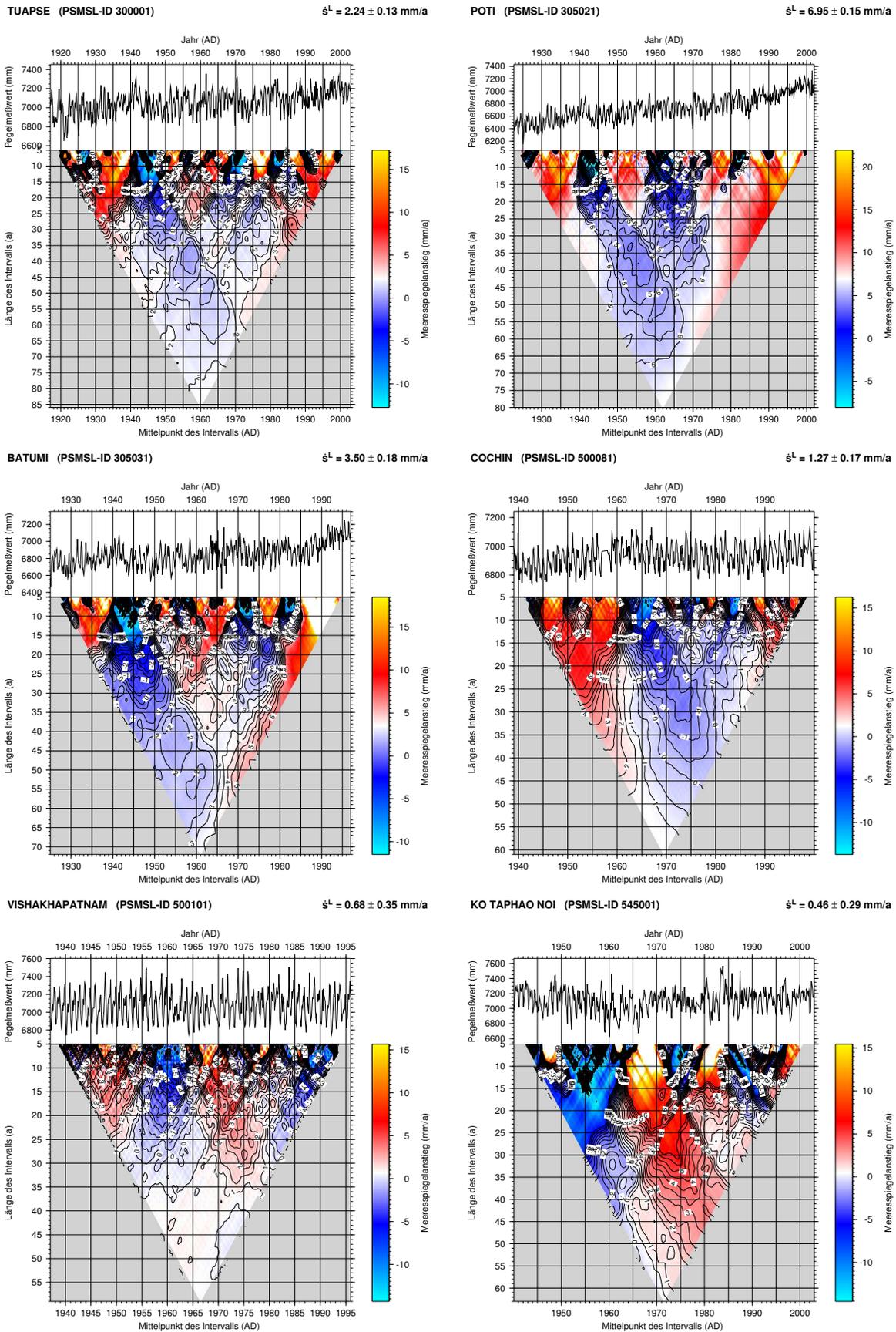


Abbildung D.16: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 300001–545001.

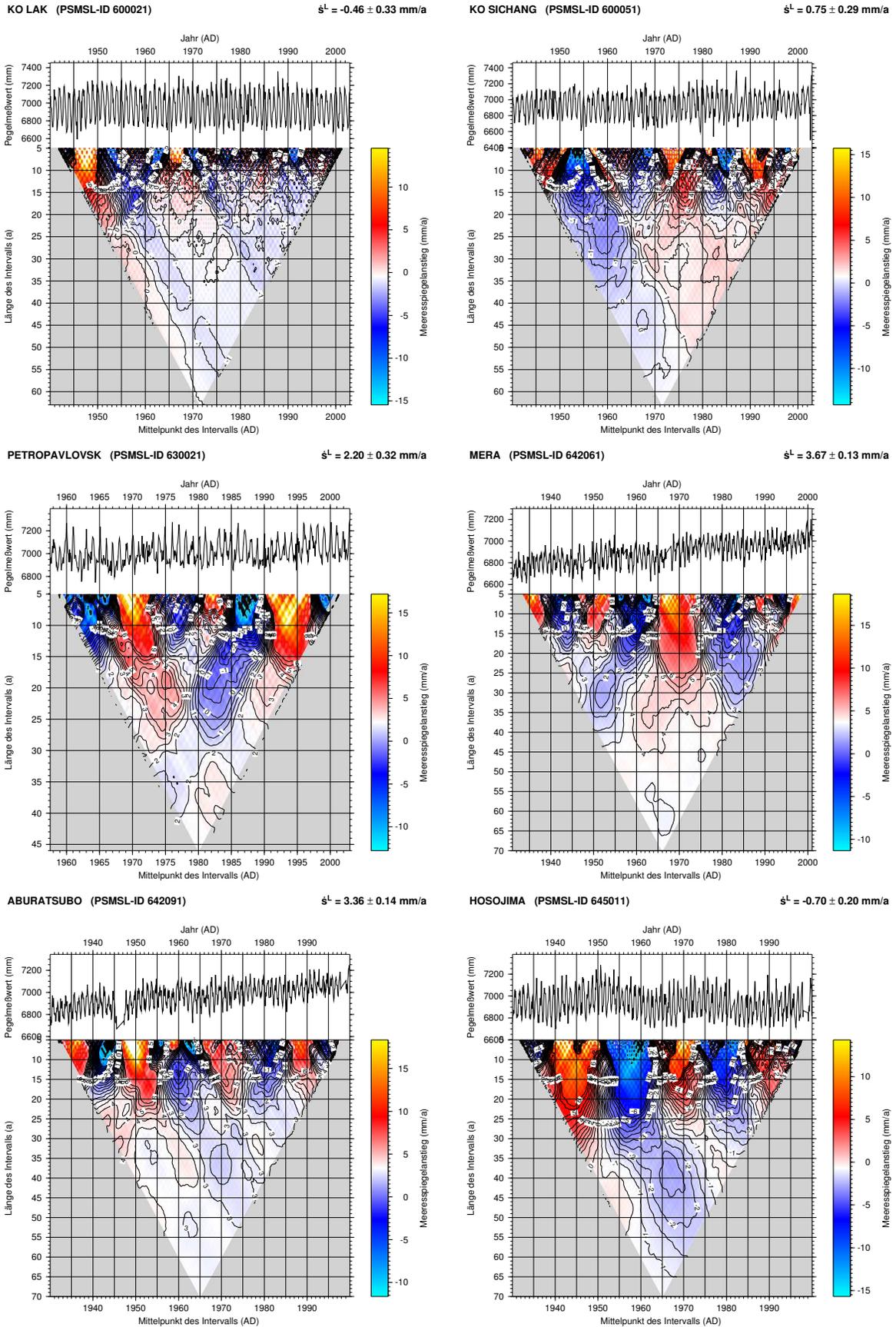


Abbildung D.17: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 600021–645011.

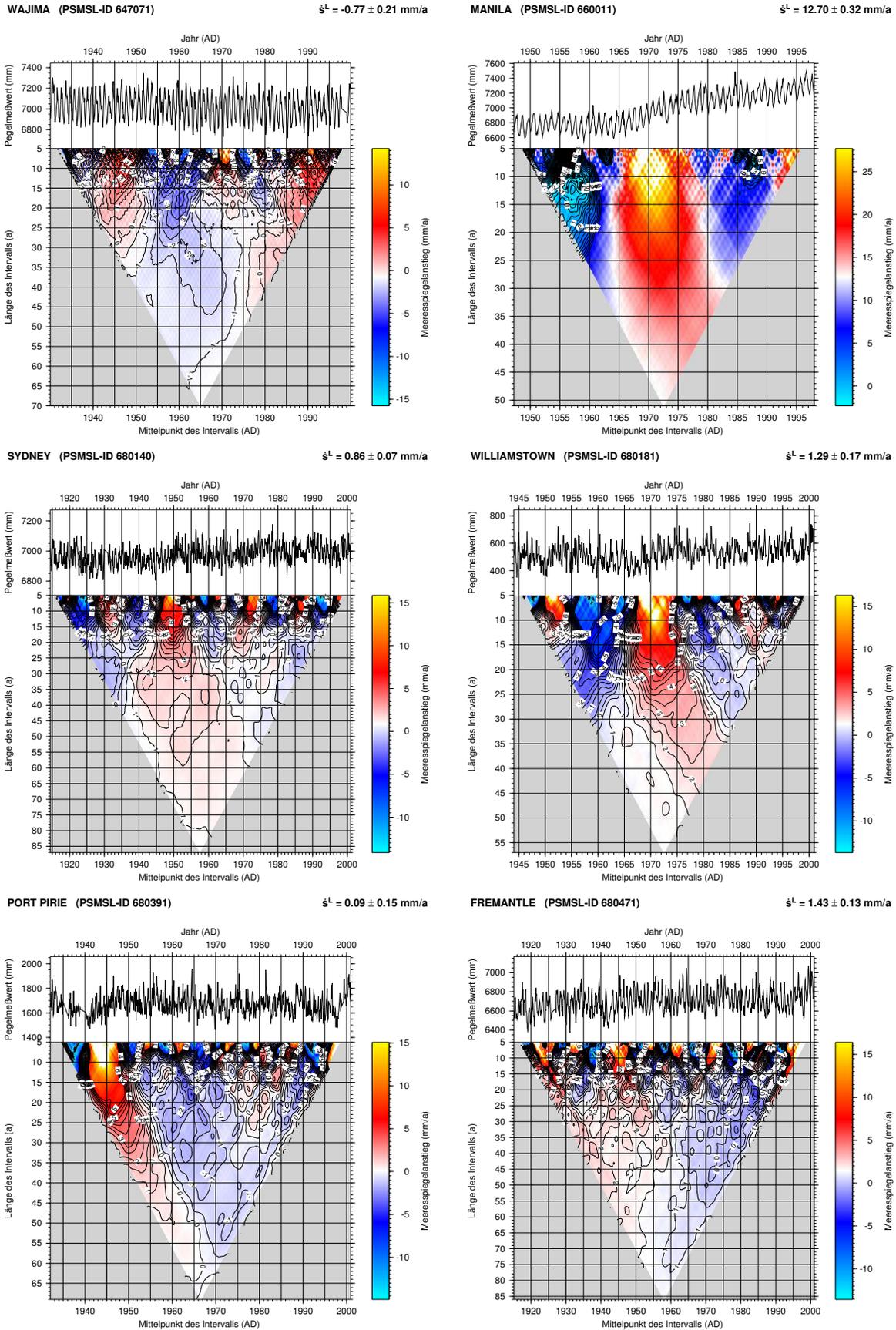


Abbildung D.18: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 647071–680471.

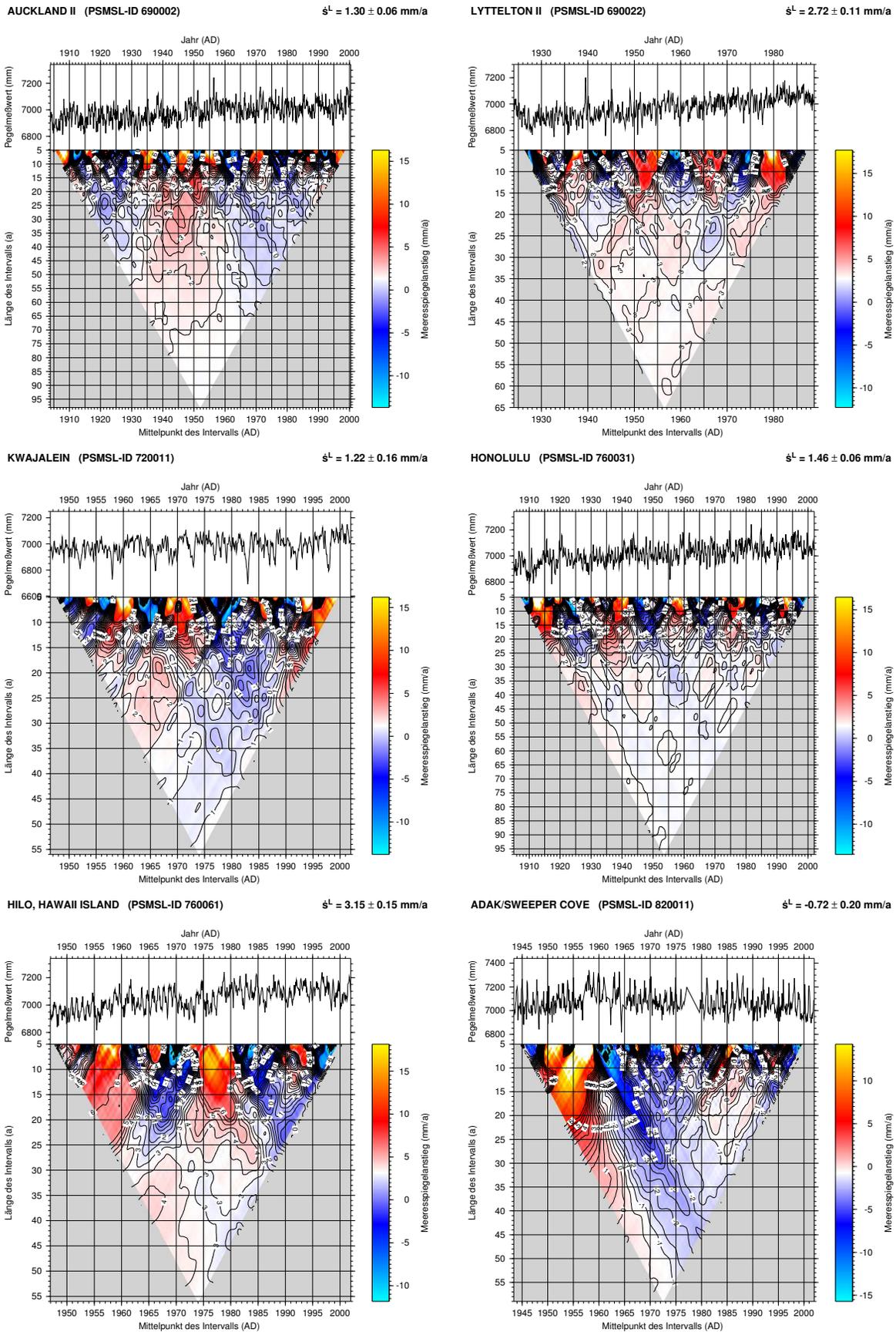


Abbildung D.19: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 690002–820011.

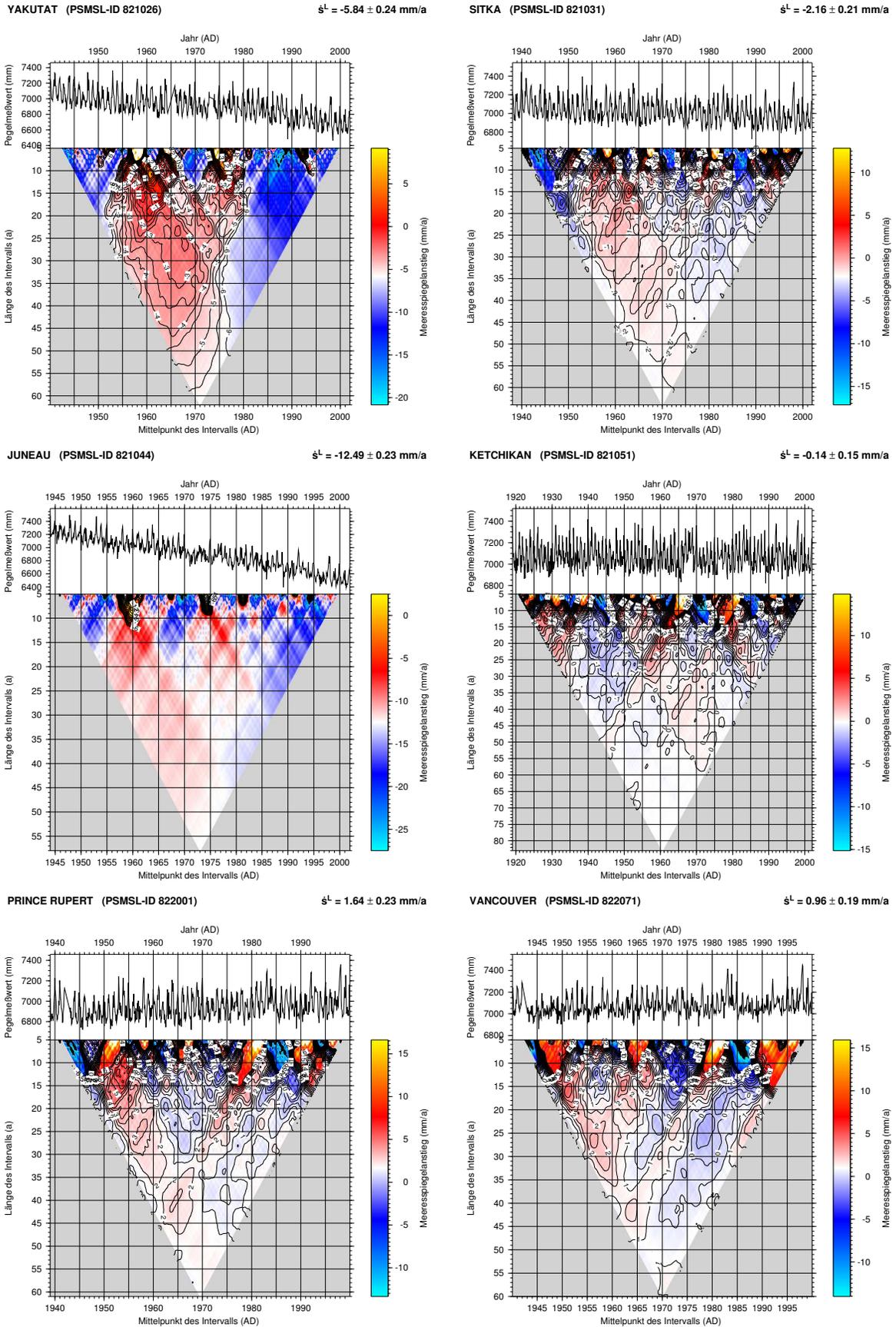


Abbildung D.20: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 821026–822071.

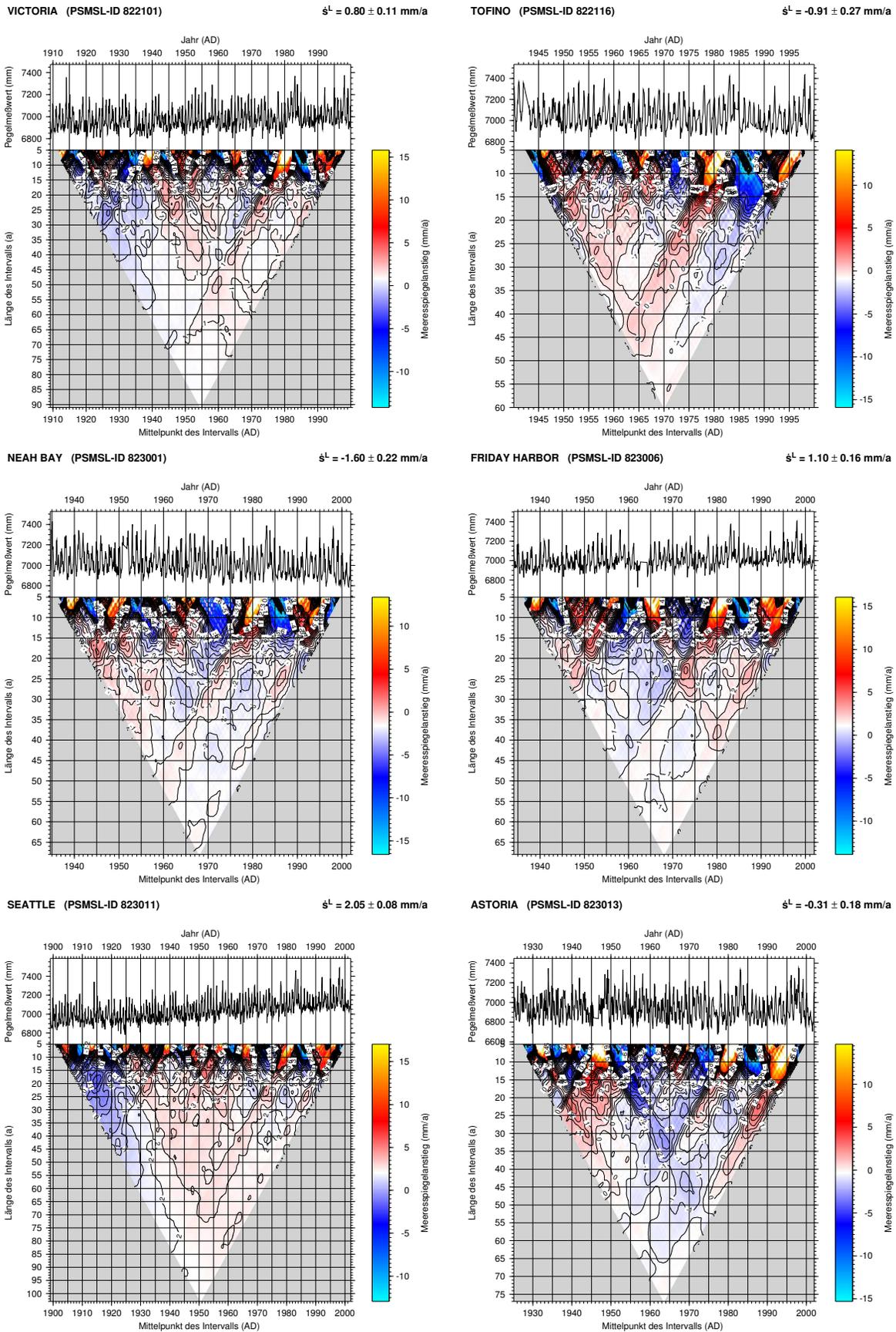


Abbildung D.21: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 822101–823013.

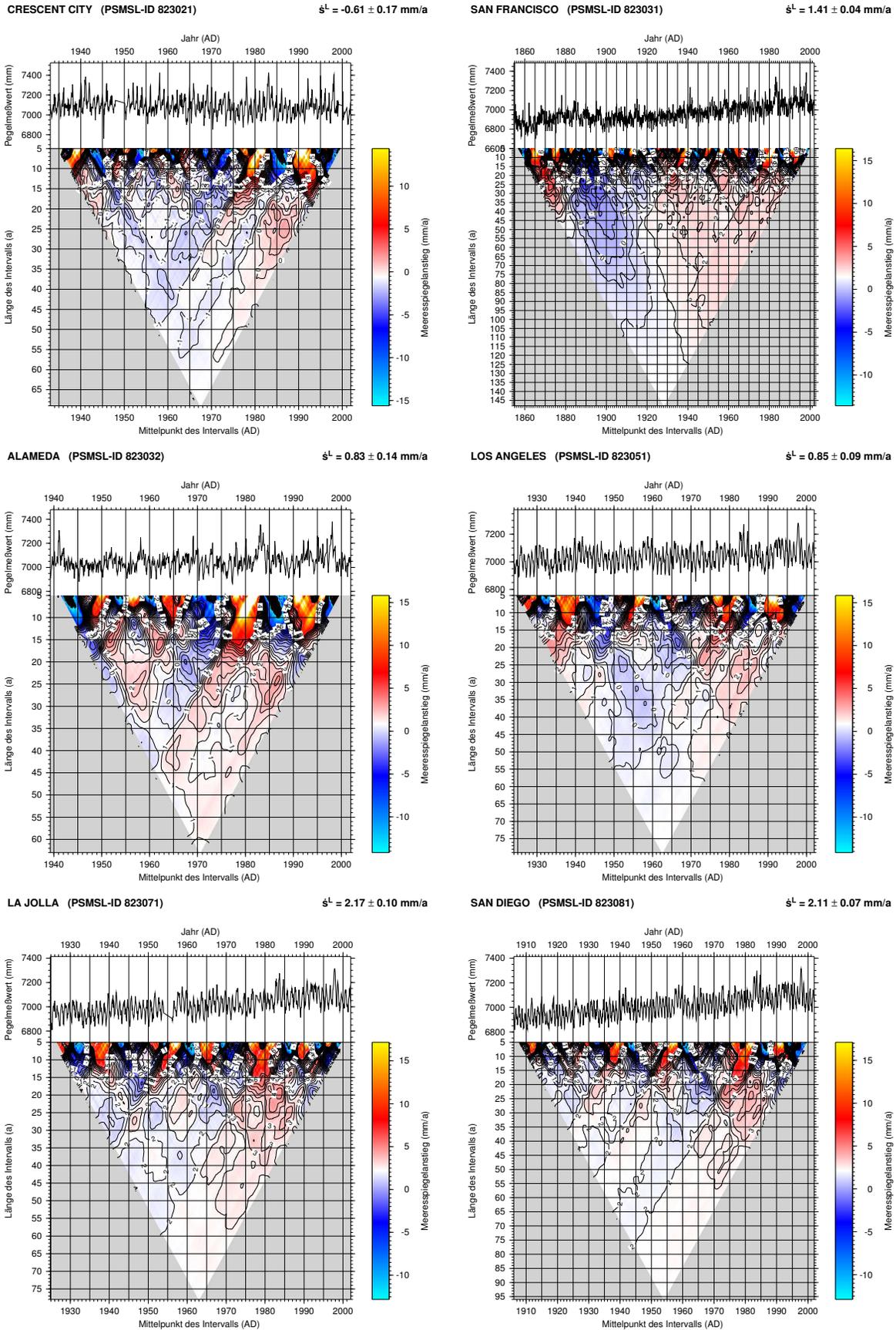


Abbildung D.22: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 823021–823081.

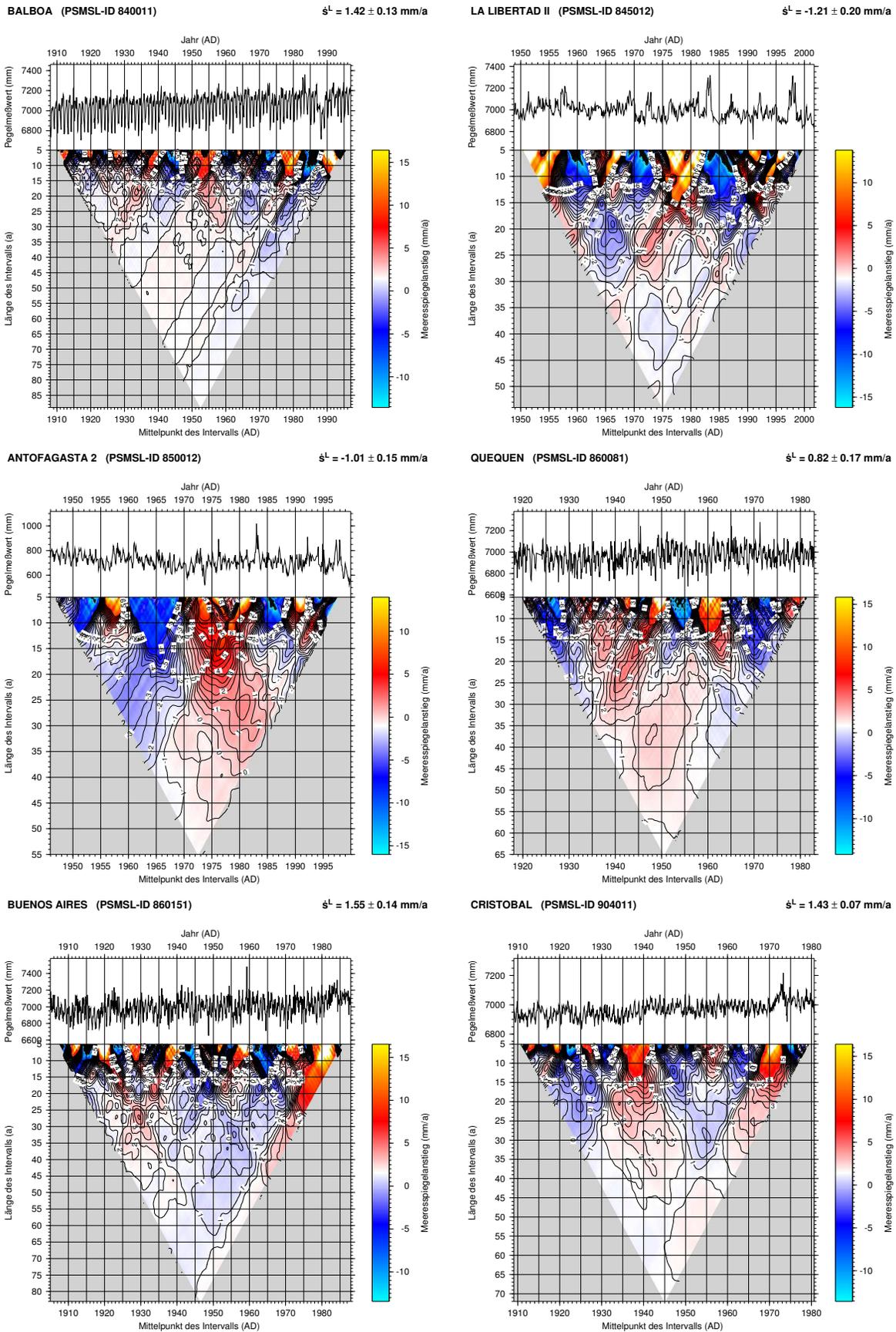


Abbildung D.23: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 840011–904011.

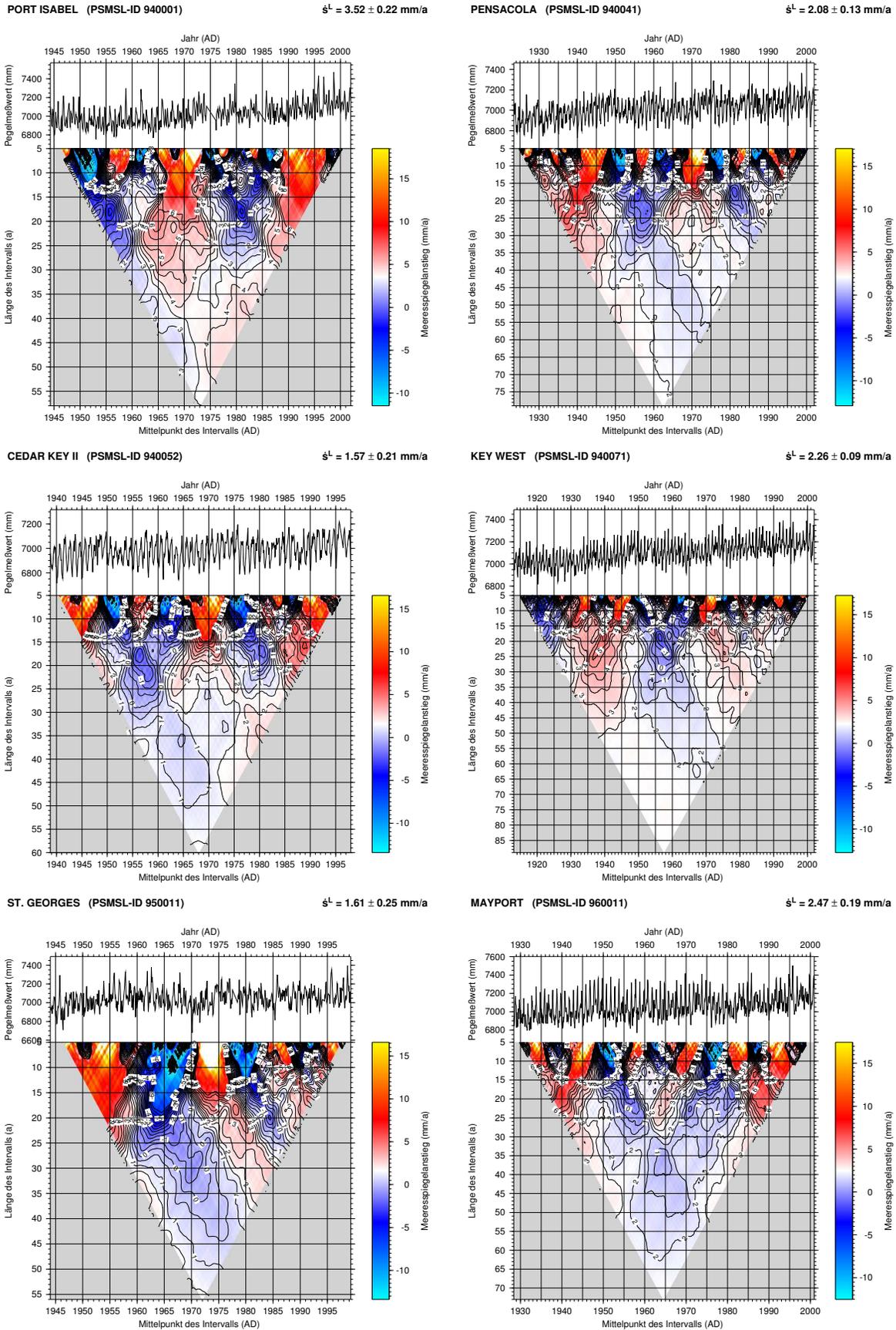


Abbildung D.24: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 940001–960011.

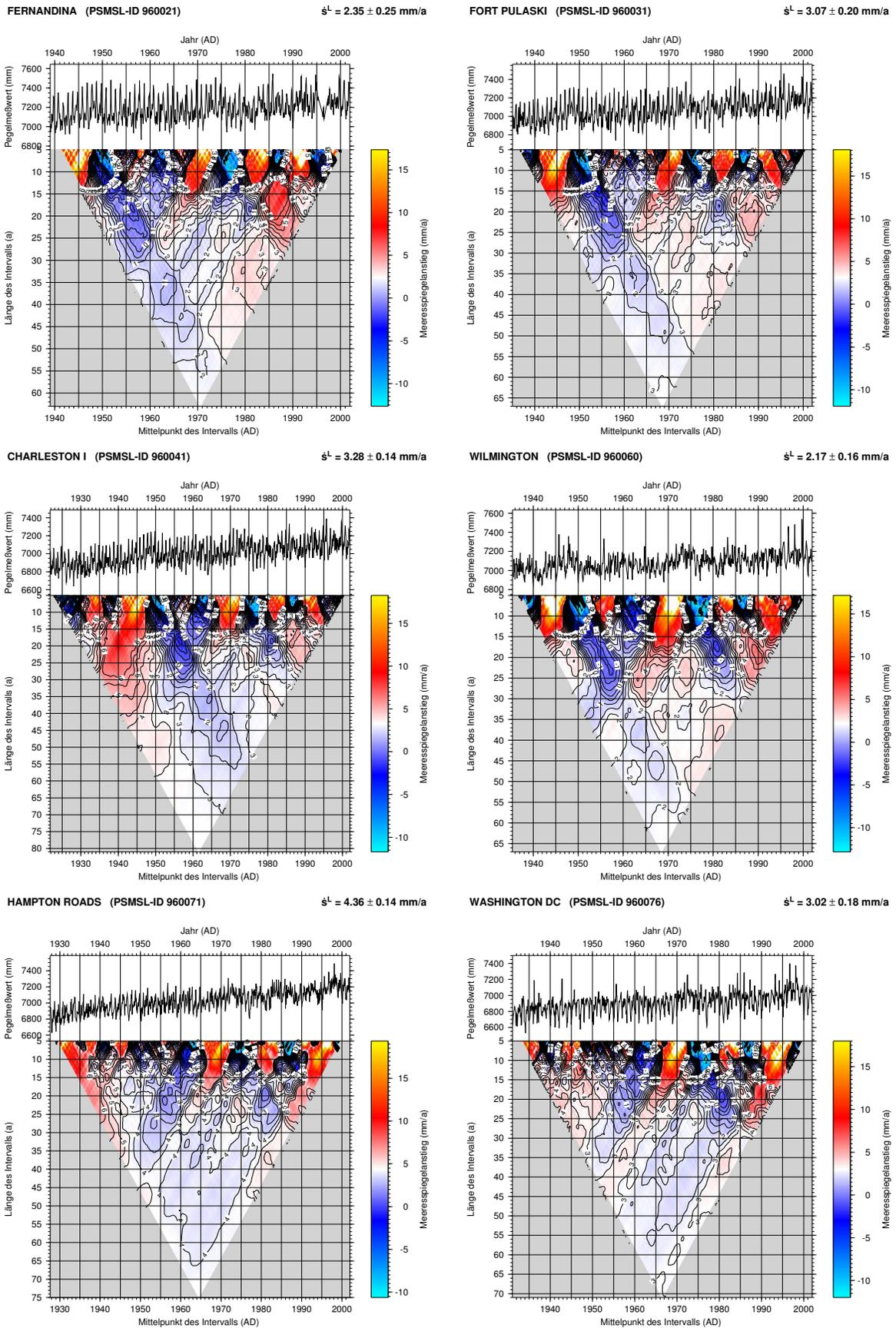
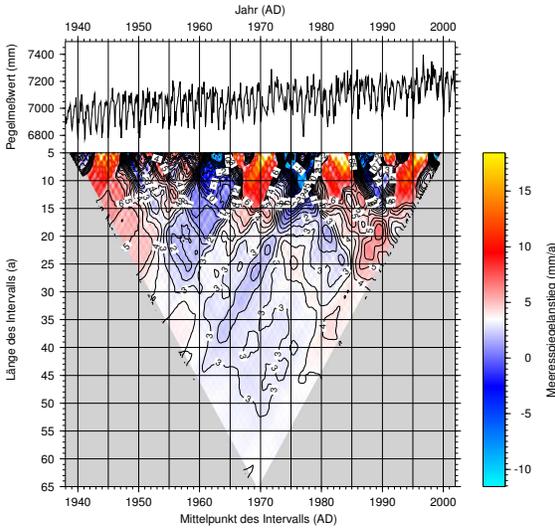
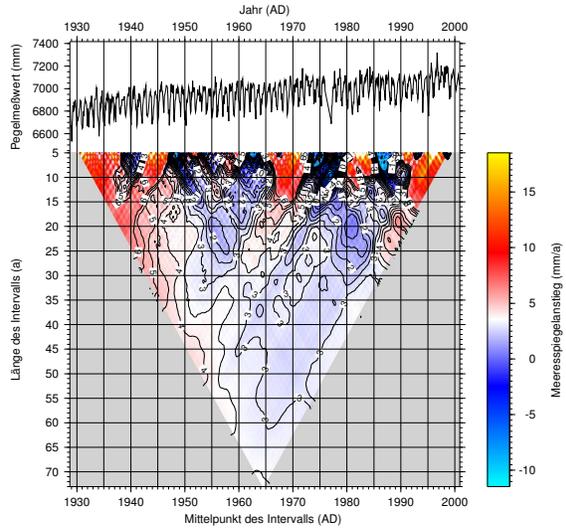


Abbildung D.25: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960021–960076.

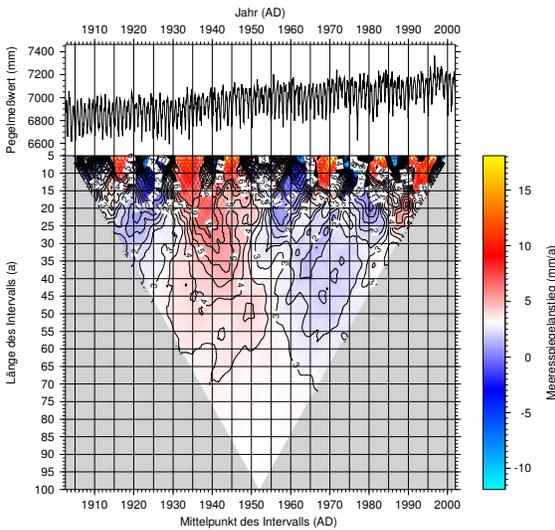
SOLOMON'S ISLAND (PSMSL-ID 960078) $\dot{s}^L = 3.45 \pm 0.17 \text{ mm/a}$



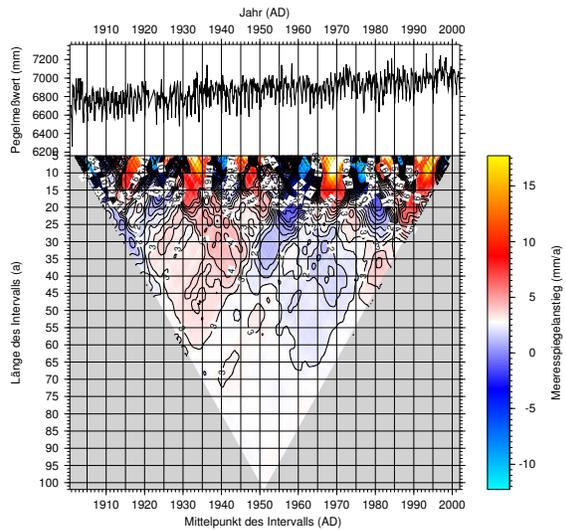
ANNAPOLIS (PSMSL-ID 960080) $\dot{s}^L = 3.52 \pm 0.16 \text{ mm/a}$



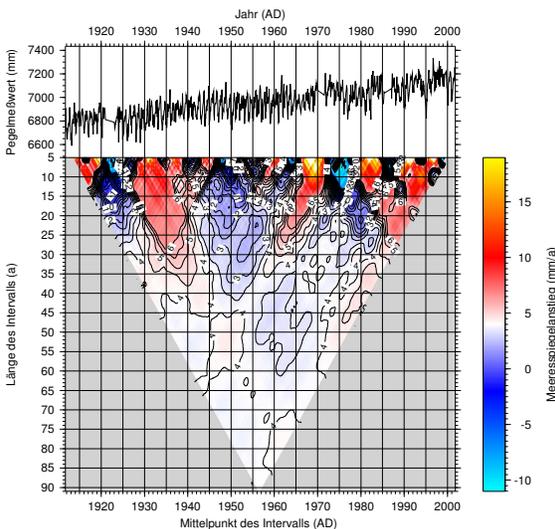
BALTIMORE (PSMSL-ID 960081) $\dot{s}^L = 3.10 \pm 0.10 \text{ mm/a}$



PHILADELPHIA (PSMSL-ID 960087) $\dot{s}^L = 2.73 \pm 0.10 \text{ mm/a}$



ATLANTIC CITY (PSMSL-ID 960091) $\dot{s}^L = 3.99 \pm 0.10 \text{ mm/a}$



SANDY HOOK (PSMSL-ID 960101) $\dot{s}^L = 3.90 \pm 0.14 \text{ mm/a}$

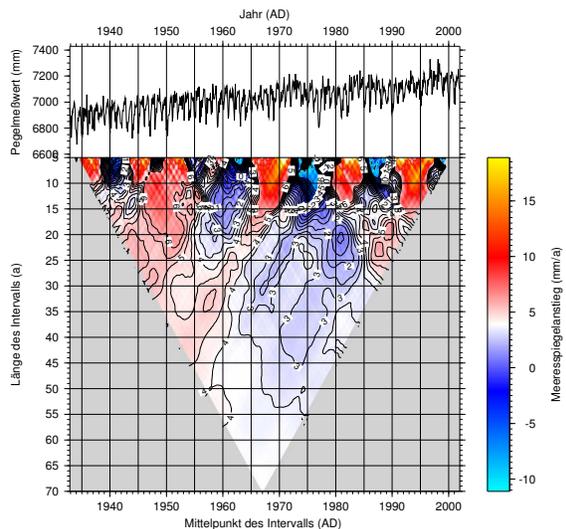


Abbildung D.26: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960078–960101.

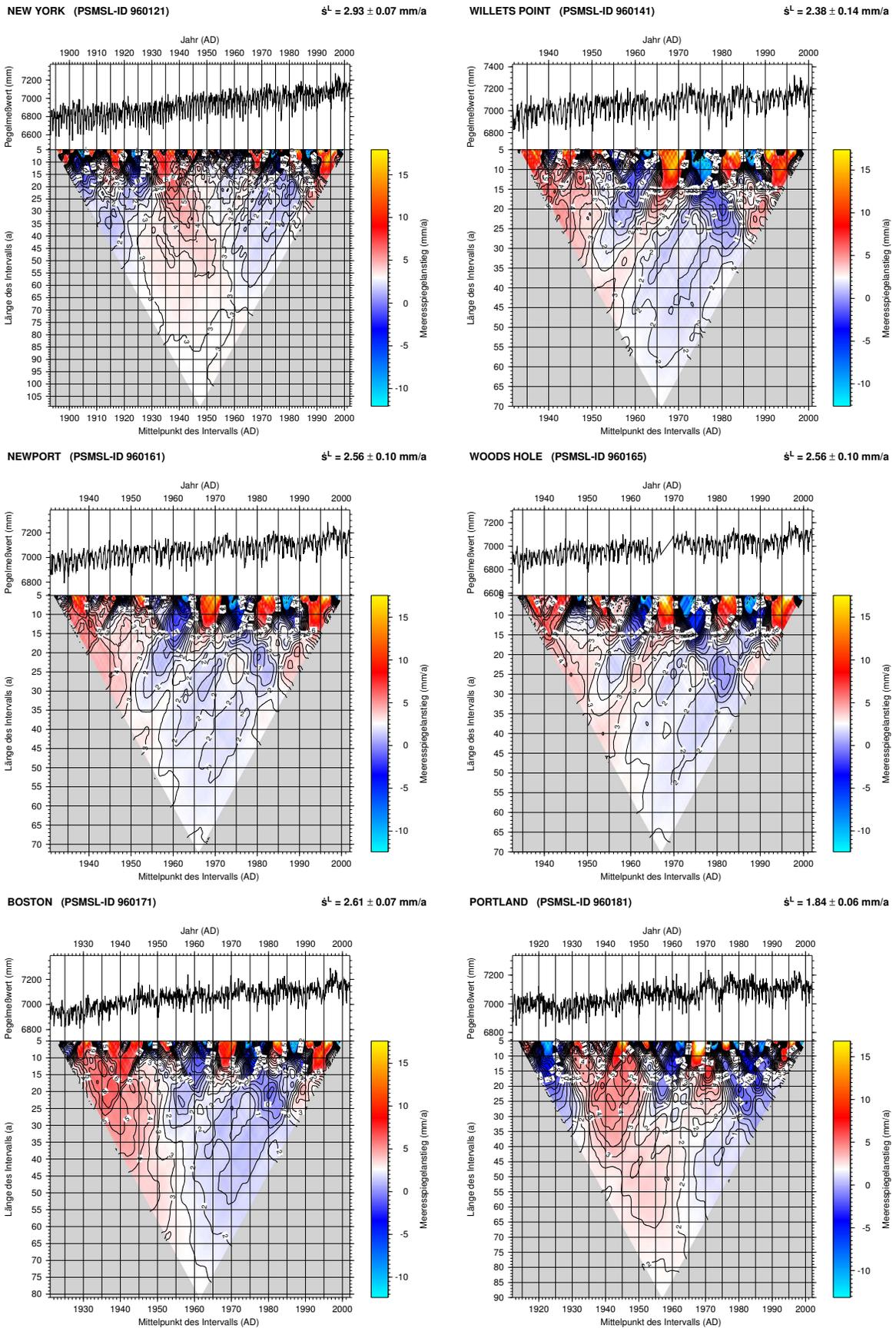


Abbildung D.27: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960121–960181.

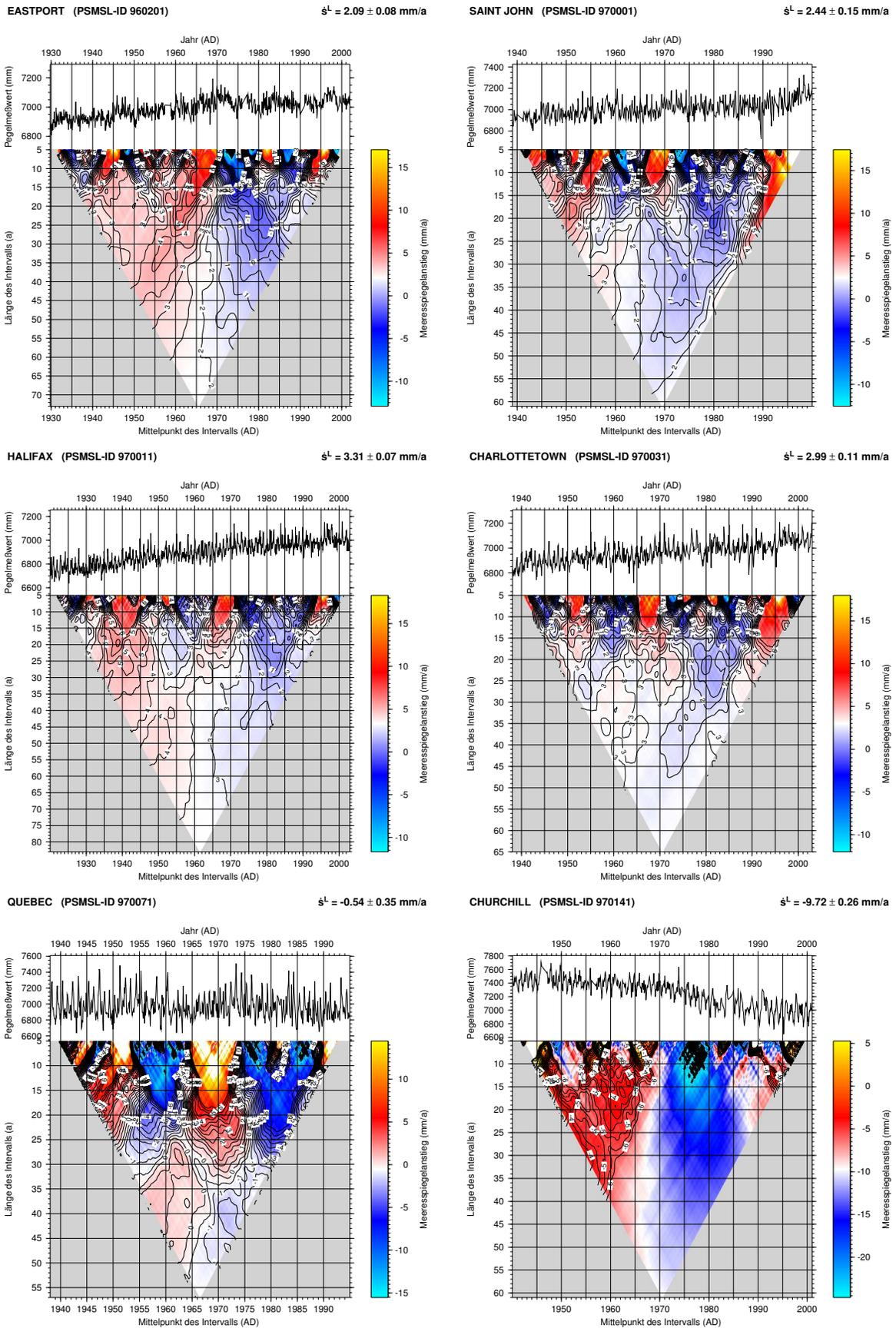


Abbildung D.28: LTA-Diagramme für die Pegelstationen PSMSL-ID 960201–970141.

E. Ergänzungen zu Kapitel 7

In Kapitel 7 wird beschrieben, wie die linearen Trends des Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}^L , der Pegelstationen hinsichtlich der berechneten Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs, \dot{s}^O , reduziert werden. Den Säulendiagrammen in Abschnitt 7.1.1–7.1.5 liegen die nach Regionen geordneten Werte von Tabelle E.1–E.5 zugrunde.

Tabelle E.1: Pegelstationen der Region R1 mit Angabe des Stationsnamens, der zugehörigen PSMSL-ID sowie des beobachteten, \dot{s}^L , berechneten, \dot{s}^O , und reduzierten, \dot{s}^R , Meeresspiegelanstiegs. Für die Berechnung ist Eingabemodell VMI/SCAN verwendet. Werte in Klammern beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervall 1931–2000.

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	\dot{s}^O (mm a ⁻¹)	\dot{s}^R (mm a ⁻¹)
040031	Tromsø	-0.06	-2.36	2.30
040081	Narvik	-2.97	-3.75	0.78
040091	Kabelvåg	-1.01	-2.79	1.78
040151	Heimsjø	-1.77	-3.70	1.93
040191	Ålesund	1.32	-2.05	3.37
040211	Maløy	0.83	-1.55	2.38
040221	Bergen	-0.30 (-0.22)	-1.76	1.46 (1.54)
040261	Stavanger	0.17 (0.40)	-1.50	1.67 (1.90)
040301	Tregde	0.07	-1.63	1.70
040321	Oslo	-4.92 (-4.85)	-4.42	-0.50 (-0.43)
050011	Smögen	-2.10 (-1.81)	-3.18	1.08 (1.37)
050031	Göteborg	-1.40	-2.65	1.25
050041	Varberg	-0.85	-2.06	1.21
050051	Klagshamn	0.27 (0.22)	-0.89	1.16 (1.11)
050071	Ystad	0.60	-0.91	1.51
050081	Kungholmsfort	-0.06 (0.41)	-1.44	1.38 (1.85)
050091	Ölands n. Udde	-1.13 (-0.81)	-2.57	1.44 (1.76)
050121	Landsort	-2.91 (-2.51)	-4.12	1.21 (1.61)
050131	Nedre Södertälje	-3.43	-4.71	1.28
050141	Stockholm	-3.91 (-3.51)	-4.79	0.88 (1.28)
050161	Björn	-6.10	-6.37	0.27
050171	Nedre Gävle	-6.03	-6.44	0.41
050181	Draghällan	-7.99	-7.73	-0.26
050191	Ratan	-7.80 (-7.59)	-8.34	0.54 (0.75)
050201	Furuogrund	-8.41 (-7.96)	-8.37	-0.04 (0.41)
060011	Oulu	-6.39 (-6.36)	-7.54	1.15 (1.18)
060021	Raahe	-6.83 (-6.49)	-7.78	0.95 (1.29)
060041	Pietarsaari	-7.43 (-7.02)	-7.85	0.42 (0.83)
060051	Vaasa	-7.37 (-6.98)	-7.78	0.41 (0.80)
060071	Kaskinen	-6.67 (-6.49)	-7.26	0.59 (0.77)
060101	Mantyluoto	-6.03 (-5.58)	-6.47	0.44 (0.89)
060241	Turkur	-3.74 (-3.46)	-4.94	1.20 (1.48)
060281	Degerby	-3.74 (-3.50)	-5.12	1.38 (1.62)
060331	Hanko	-2.78	-3.91	1.13
060351	Helsinki	-2.41 (-1.35)	-3.50	1.09 (2.15)
060361	Hamina	-1.03 (-0.86)	-3.13	2.10 (2.27)
110092	Swinoujście	0.81	-0.33	1.14
120012	Warnemünde 2	1.19 (1.35)	-0.26	1.45 (1.61)
120022	Wismar 2	1.39 (1.57)	-0.15	1.54 (1.72)

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	\dot{s}^O (mm a ⁻¹)	\dot{s}^R (mm a ⁻¹)
125001	Travemünde	1.62 (1.54)	-0.11	1.73 (1.65)
130001	Gedser	0.94	-0.36	1.30
130021	Kobenhavn	0.32	-0.96	1.28
130031	Hornbæk	0.01	-1.23	1.24
130041	Korsør	0.66	-0.58	1.24
130051	Slipshavn	0.81	-0.52	1.33
130071	Fredericia	0.95	-0.49	1.44
130081	Århus	0.49	-0.92	1.41
130091	Frederikshavn	0.15	-2.08	2.23
130101	Hirtshals	-0.28	-2.09	1.81
130121	Esbjerg	1.07	-0.21	1.28

Tabelle E.2: Pegelstationen der Region R2 mit Angabe des Stationsnamens, der zugehörigen PSMSL-ID sowie des beobachteten, \dot{s}^L , berechneten, \dot{s}^O , und reduzierten, \dot{s}^R , Meeresspiegelanstiegs. Für die Berechnung ist Eingabemodell VM1/NAWI verwendet. Werte in Klammern beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervall 1931–2000.

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	\dot{s}^O (mm a ⁻¹)	\dot{s}^R (mm a ⁻¹)
823031	San Francisco	1.41 (2.17)	-0.05	1.46 (2.22)
823032	Alameda	0.83	-0.07	0.90
823051	Los Angeles	0.85 (0.86)	-0.18	1.03 (1.04)
823071	La Jolla	2.17 (2.34)	-0.20	2.37 (2.54)
823081	San Diego	2.11 (2.25)	-0.19	2.30 (2.44)
960011	Mayport	2.47	-0.02	2.49
960021	Fernandina	2.35	-0.01	2.36
960031	Fort Pulaski	3.07	0.13	2.94
960041	Charleston I	3.28 (3.18)	0.30	2.98 (2.88)
960060	Wilmington	2.17	0.71	1.46
960071	Hampton Roads	4.36 (4.24)	1.75	2.61 (2.49)
960076	Washington DC	3.02 (3.06)	2.57	0.45 (0.49)
960078	Solomons Island	3.45	0.00	3.45
960080	Annapolis	3.52	0.00	3.52
960081	Baltimore	3.10 (2.98)	2.72	0.38 (0.26)
960087	Philadelphia	2.73 (2.64)	2.85	-0.12 (-0.21)
960091	Atlantic City	3.99 (3.90)	0.00	3.99 (3.90)
960101	Sandy Hook	3.90	0.00	3.90
960121	New York	2.93 (2.93)	2.72	0.21 (0.21)
960141	Willetts Point	2.38	0.00	2.38
960161	Newport	2.56 (2.55)	2.46	0.10 (0.09)
960165	Woods Hole	2.56	2.52	0.04
960171	Boston	2.61	1.73	0.88
960181	Portland	1.84 (1.80)	0.46	1.38 (1.34)
960201	Eastport	2.09	0.89	1.20
970001	Saint John	2.44	1.38	1.06
970011	Halifax	3.31	2.90	0.41
970031	Charlottetown	2.99	0.00	2.99
970071	Quebec	-0.54	-2.76	2.22

Tabelle E.3: Pegelstationen der Region R3 mit Angabe des Stationsnamens, der zugehörigen PSMSL-ID sowie des beobachteten, \dot{s}^L , berechneten, \dot{s}^O , und reduzierten, \dot{s}^R , Meeresspiegelanstiegs. Für die Berechnung ist Eingabemodell VMA/NAWI verwendet. Werte in Klammern beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervall 1931–2000.

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	\dot{s}^O (mm a ⁻¹)	\dot{s}^R (mm a ⁻¹)
140012	Cuxhaven 2	2.44 (2.80)	0.51	1.93 (2.29)
150001	Delfzijl	1.66 (2.05)	0.00	1.66 (2.05)
150011	West Terschelling	0.86 (0.72)	0.55	0.31 (0.17)

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	\dot{s}^O (mm a ⁻¹)	\dot{s}^R (mm a ⁻¹)
150021	Harlingen	1.37 (1.40)	0.50	0.87 (0.90)
150031	Den Helder	1.46 (1.67)	0.44	1.02 (1.23)
150041	IJmuiden	2.23 (1.92)	0.30	1.93 (1.62)
150051	Hoek van Holland	2.39 (2.44)	0.17	2.22 (2.27)
150061	Maassluis	1.65 (2.10)	0.15	1.50 (1.95)
150071	Hellevoetsluis	1.59	0.13	1.46
150091	Zierikze	1.70	0.08	1.62
150101	Vlissingen	2.11 (1.63)	0.04	2.07 (1.59)
160021	Oostende	1.61	-0.01	1.62
170012	Aberdeen II	0.59	-0.16	0.75
170053	North Shields	1.90 (1.59)	-0.27	2.17 (1.86)
170161	Newlyn	1.69 (1.56)	0.20	1.49 (1.36)
175071	Dublin	0.12	-0.62	0.74
190091	Brest	1.00	0.27	0.73
200011	Santander I	2.00	-0.01	2.01
200030	La Coruna I	1.44	0.11	1.33
200041	Vigo	2.63	0.01	2.62
210021	Cascais	1.28	0.06	1.22
210031	Lagos	1.50	0.11	1.39
230051	Marseille	1.22	0.14	1.08
250011	Genova	1.07	-0.04	1.11
270061	Trieste	1.17 (0.94)	-0.17	1.34 (1.11)
904011	Cristobal	1.43	0.07	1.36
940041	Pensacola	2.08 (1.96)	0.29	1.79 (1.67)
940052	Cedar Key II	1.57	0.18	1.39
940071	Key West	2.26 (2.21)	0.11	2.15 (2.10)
950011	St Georges	1.61	0.44	1.17

Tabelle E.4: Pegelstationen der Region R4 mit Angabe des Stationsnamens, der zugehörigen PSMSL-ID sowie des beobachteten, \dot{s}^L , berechneten, \dot{s}^O , und reduzierten, \dot{s}^R , Meeresspiegelanstiegs. Für die Berechnung ist Eingabemodell VMF/SCAN verwendet. Werte in Klammern beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervall 1931–2000.

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	\dot{s}^O (mm a ⁻¹)	\dot{s}^R (mm a ⁻¹)
500081	Cochin	1.27	-0.33	1.60
500101	Vishakhapatnam	0.68	-0.26	0.94
720011	Kwajalein	1.22	-0.16	1.38
760031	Honolulu	1.46 (1.28)	-0.23	1.69 (1.51)

Tabelle E.5: Pegelstationen der Region R5 mit Angabe des Stationsnamens, der zugehörigen PSMSL-ID sowie des beobachteten, \dot{s}^L , berechneten, \dot{s}^O , und reduzierten, \dot{s}^R , Meeresspiegelanstiegs. Für die Berechnung ist Eingabemodell VM1/SCAN verwendet. Werte in Klammern beziehen sich auf das einheitliche Zeitintervall 1931–2000.

PSMSL-ID	Stationsname	\dot{s}^L (mm a ⁻¹)	\dot{s}^O (mm a ⁻¹)	\dot{s}^R (mm a ⁻¹)
680140	Sydney	0.86 (1.04)	-0.14	1.00 (1.18)
680181	Williamstown	1.29	-0.11	1.40
680471	Fremantle	1.43 (1.11)	-0.37	1.80 (1.48)
690002	Auckland II	1.30 (1.28)	-0.16	1.46 (1.44)
690022	Lyttelton II	2.72	-0.16	2.88
840011	Balboa	1.42	-0.09	1.51
860081	Quequen	0.82	0.64	0.18
860151	Buenos Aires	1.55	0.15	1.40

F. Liste der Symbole und Abkürzungen

F.1 Lateinische Symbole

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
a	Mittlerer Erdradius ($a = 6371$ km)	2.2.2
\mathbf{a}	Tensor zweiter Ordnung der Konstanten der SFER von ϵ	2.2.7
a_{jm}^λ	Amplitude der spek. Repräsentation von \mathbf{a}	2.2.7
a_{ij}	Dyadische Komponenten von \mathbf{a} mit $i j = r, \vartheta, \varphi$	2.2.7, A.4
\mathcal{A}	Hauptträgheitsmoment der Erdrotation	2.4.2
\mathbf{A}_k^i	Tensorielle Funktion in der SFER von $\tau^{v,i}$ in (2.97)	2.2.7
\mathbf{b}_0	Vektor der Inhomogenität der Oberflächenbedingungen	2.2.4
b_1	Inhomogenität der Oberflächenbedingungen	2.2.4
\mathbf{b}	Tensor zweiter Ordnung der Konstanten der SFER von ϵ	2.2.7
b_{jm}^λ	Amplitude der spek. Repräsentation von \mathbf{b}	2.2.7
b_{ij}	Dyadische Komponenten von \mathbf{b} mit $i j = r, \vartheta, \varphi$	A.4
B	Viskoelastisches sphärisches Kontinuum	2.2.2
∂B	Oberfläche von B	2.2.2
\mathbf{B}_k^i	Tensorielle Funktion in der SFER von $\tau^{v,i}$ in (2.97)	2.2.7
\mathcal{B}	Hauptträgheitsmoment der Erdrotation	2.4.2
\mathbf{c}	Tensor zweiter Ordnung der Konstanten der SFER von ϵ	2.2.7
c_{jm}^λ	Amplitude der spek. Repräsentation von \mathbf{c}	2.2.7
\mathbf{C}_k^i	Tensorielle Funktion in der SFER von $\tau^{v,i}$ in (2.97)	2.2.7
$\mathbf{C}^{(0)}$	Trägheitstensor im initialen Rotationszustand	2.4.2
\mathbf{C}	Trägheitstensor im aktuellen Rotationszustand	2.4.2
\mathbf{C}^{in}	Trägheitstensor bzgl. der internen Reaktion des Kontinuums	2.4.2
$\mathbf{C}^{(1)}$	Ink. Trägheitstensor im aktuellen Rotationszustand	2.4.3
$\mathbf{C}^{(1)\text{in}}$	Ink. Trägheitstensor bzgl. der internen Reaktion des Kontinuums	2.4.3
$\mathbf{C}^{(1)\text{ex}}$	Ink. Trägheitstensor bzgl. der externen Last	2.4.2
$\mathbf{C}^{\partial\mathcal{X}}$	Ink. Trägheitstensor bzgl. der Deformation von $\partial\mathcal{X}$	2.4.5
\mathbf{C}^ρ	Ink. Trägheitstensor bzgl. $\rho^{(\Delta)}$	2.4.5
\mathbf{C}^Σ	Ink. Trägheitstensor bzgl. der Deformation von Σ	2.4.5
$\mathbf{C}^{(1)}$	Komplexe Kombination $\mathbf{C}^{(1)}(t) := C_{13}^{(1)}(t) + iC_{23}^{(1)}(t)$	2.4.4
\mathcal{C}	Hauptträgheitsmoment der Erdrotation	2.4.2
div	Divergenz (Differentialoperator)	2.2.2
D_{jm}	Funktion der tensoriellen Kugelflächenfunktion	2.2.7, A.2
\mathcal{D}	Integral über winkelabhängigen Teil des dissipativen Funktionals	2.2.7
e	Geoidhöhe	2.3.2
$\mathbf{e}_{1 2 3}$	Basisvektoren im kartesischen Koordinatensystem	2.4.2
\mathbf{e}_r	Radialer Basisvektor im sphärischen Koordinatensystem	2.2.2
\mathbf{e}_ϑ	Basisvektor der Poldistanz im sphärischen Koordinatensystem	A.2
\mathbf{e}_φ	Basisvektor der geograph. Länge im sphärischen Koordinatensystem	A.2
E_{jm}	Amplitude der spek. Repräsentation von $e(\Omega, t)$	2.5.2
\mathcal{E}	Energiefunktional der Variationsgleichung	2.2.4
\mathcal{E}_e	Energiefunktional der Eindeutigkeitsbedingung	2.2.4
\mathcal{E}_g	Energiefunktional der Gravitation	2.2.4

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
\mathcal{E}_p	Energiefunktional des Drucks	2.2.4
\mathcal{E}_s	Energiefunktional der Scherung	2.2.4
\mathbf{f}	Volumenkraftdichte	2.2.5
F_{jm}	Funktion der tensoriellen Kugelflächenfunktion	2.2.7, A.2
\mathcal{F}	Lineares Funktional der Variationsgleichung	2.2.4
\mathcal{F}_d	Lineares Funktional des dissipativen Terms	2.2.4
\mathcal{F}_o	Lineares Funktional der Oberflächenbedingungen	2.2.4
$g^{(0)}$	Gravitationsbeschleunigung	2.2.2
G	Newtons Gravitationskonstante	2.2.2
G_{jm}	Funktion der tensoriellen Kugelflächenfunktion	2.2.7, A.2
grad	Gradient (Differentialoperator)	2.2.2
\mathbf{h}	Relativer Drehimpuls	2.4.4
h	Komplexe Kombination $h(t) := h_1(t) + ih_2(t)$	2.4.4
h^{UF}	Ortsunabhängiger Anteil von s^{UF}	2.3.2
h_k	$:= r_{k+1} - r_k$	2.2.6
\mathbf{H}	Drehimpuls	2.4.4
H_{jm}	Funktion der tensoriellen Kugelflächenfunktion	2.2.7, A.2
\mathbf{i}_m	Zyklisch kovariante Basisvektoren	A.6
\mathbf{I}	Identitätstensor	2.2.2
$I_{kk}^{(\lambda)}$	Analytische Lösung der Integrale über finite Elemente	2.2.6, A.3
j	Grad der Kugelflächenfunktion in der spek. Repräsentation	2.2.5
j_{\max}	Maximalwert von j	2.2.8
j^X	Jakobi-Determinante	2.4.2
J	$:= j(j+1)$	2.2.5
k	Index der finiten Elemente	2.2.6
k_L	Love-Zahl	4.3
k_s	Säkulare Love-Zahl	4.3
$K_k^{(\lambda)}$	Analytische Lösung der Integrale über finite Elemente	2.2.6, A.3
ℓ	$:= (\ell_1 - 1)L_2 + \ell_2$	2.2.7
$\ell_{1 2}$	Index der Poldistanz / geograph. Länge der Gitterpunkte	2.2.7
L	$:= L_1 L_2$	2.2.7
$L_{1 2}$	Maximalwert von $\ell_{1 2}$ hinsichtlich der Gitterpunkte	2.2.7
$L_2(B)$	Raum der quadratintegrablen skalaren Funktionen in B	2.2.4
$L_2(B)^3$	Raum der quadratintegrablen vektoriellen Funktionen in B	2.2.4
m	Ordnung der Kugelflächenfunktion in der spek. Repräsentation	2.2.5
\mathbf{m}	Vektor der Variation der Erdrotation	2.4.4
m	Komplexe Kombination $m(t) := m_1(t) + im_2(t)$	2.4.4
$m_{0 1}^i$	Faktoren im Differenzenschema (2.25)	2.2.3
M^i	Faktor im Differenzenschema (2.25)	2.2.3
$M_{k\ell}^i$	Faktor in der SFER (2.95) des Differenzenschemas	2.2.7
\mathbf{n}	Nach außen gerichtete Einheitsnormale auf $\partial\Sigma$ oder ∂B	2.2.2
N	Anzahl der Meßwerte für eine Pegelstation	6.3
$O(X_1, X_2, X_3)$	Mitrotierendes Referenzkoordinatensystem der Erdrotation	2.4.2
\mathcal{O}	Ozeanfunktion	2.3.2
$\mathcal{O}^{(0)}$	Zeitunabhängige Ozeanfunktion	2.3.2
\mathcal{O}_{jm}	Amplitude der spek. Repräsentation von $\mathcal{O}(\Omega, t)$	2.3.2
$p^{(\delta)}$	Materielles Inkrement des Auflastdrucks	2.2.2
P	Anzahl der radialen Teilintervalle bzw. finiten Elementen in $[0, a]$	2.2.6

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
P_{jm}	Amplitude der spek. Repräsentation von p	2.2.5
P_{jm}^k	Amplitude der SFER von p	2.2.6
$q^{[1]}$	Qualitätsfunktion gemäß (5.1)–(5.6)	5.3
$q^{[2]}$	Qualitätsfunktion gemäß (5.10)–(5.12)	5.3
r	Radialentfernung im sphärischen Koordinatensystem	2.2.2
\mathbf{r}	Aktueller Ortsvektor in der Lagrange-Formulierung	2.4.2
\mathcal{R}	Volumen der Erde im aktuellen Rotationszustand	2.4.2
$\partial\mathcal{R}$	Oberfläche von $\mathcal{R}(t)$	2.4.2
d^2r	Infinitesimales Flächenelement in Euler-Formulierung	2.4.2
d^3r	Infinitesimales Volumenelement in Euler-Formulierung	2.4.2
s^E	Mächtigkeit der Eislast	2.3.2
s^O	Meeresspiegelanstieg	2.3.2
$s^{UF NU}$	Uniformer bzw. nicht-uniformer Anteil des Meeresspiegelanstiegs	2.3.2
$s_{\text{int}}^{\text{SLI}}$	Beobachteter relativer Meeresspiegelanstieg	5.2
$s_{\text{max}}^{\text{SLI}}$	Obere Schranke des beobachteten relativen Meeresspiegelanstiegs	5.2
$s_{\text{min}}^{\text{SLI}}$	Untere Schranke des beobachteten relativen Meeresspiegelanstiegs	5.2
s_n^P	Pegelmeßwert zur Zeit t^n	6.3
\dot{s}^O	Geschwindigkeit des berechneten Meeresspiegelanstiegs s^O	7.1
\dot{s}^L	Linearer Trend der Pegelmeßwerte	6.3
\dot{s}^R	Reduzierter linearer Trend der Pegelmeßwerte	7.1
$\bar{\dot{s}}^L$	Mittelwert der \dot{s}^L gemäß (7.2)	7.1
$\bar{\dot{s}}^R$	Mittelwert der \dot{s}^R gemäß (7.2)	7.1
$\mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}$	Vektorielle Kugelflächenfunktion ($\lambda = -1, 0, 1$)	2.2.5
t	Zeit	2.2.2
t^i	Diskrete Zeit	2.2.3
t^{MP}	Mittelpunkt des Berechnungszeitintervalls Δt von \dot{s}^L	6.3
t_M	Maxwell-Zeit gemäß (4.2)	4.1
Δt	Berechnungszeitintervall von \dot{s}^L	6.3
T	Obere Grenze des Berechnungszeitintervalls $[0, T]$	2.2.3
\mathbf{T}	Beliebiger Tensor 2. Stufe	2.4.5
Tr	Spur-Operator	2.4.8
u	Radial-(Vertikal-)verschiebung (radiale Komponente von \mathbf{u})	2.3.2
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor in Lagrange-Formulierung	2.2.2, A.1
U_{jm}	Radiale Amplitude der spek. Repräsentation von \mathbf{u}	2.2.5
U_{jm}^k	Radiale Amplitude der SFER von \mathbf{u}	2.2.6
\mathcal{V}	Raum der Testfunktionen für die Variationsgleichung	2.2.4
\mathcal{V}_h	Endlichdimensionaler Teilraum von \mathcal{V} in der Galerkin-Methode	2.2.8
V_{jm}	Sphäriodale Amplitude der spek. Repräsentation von \mathbf{u}	2.2.5
V_{jm}^k	Sphäriodale Amplitude der SFER von \mathbf{u}	2.2.6
\mathbf{V}	Geschwindigkeitsvektor in Euler-Formulierung	2.4.4
w_ℓ	Gewicht der Gauß-Legendre-Quadratur	2.2.7
$W_2^1(B)$	Sobolev-Raum skalarer Funktionen in B	2.2.4
$W_2^1(B)^3$	Sobolev-Raum vektorieller Funktionen in B	2.2.4
W_{jm}	Torioidale Amplitude der spek. Repräsentation von \mathbf{u}	2.2.5
W_{jm}^k	Torioidale Amplitude der SFER von \mathbf{u}	2.2.6
$X_{1 2 3}$	Achsen des kartesischen Koordinatensystems	2.4.2
\mathbf{X}	Ortsvektor in Lagrange-Formulierung	2.2.2
\mathcal{X}	Volumen der Erde im initialen Rotationszustand	2.4.2

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
$\partial\mathcal{X}$	Oberfläche von \mathcal{X}	2.4.2
d^2X	Infinitesimales Flächenelement in Lagrange-Formulierung	2.2.2
d^3X	Infinitesimales Volumenelement in Lagrange-Formulierung	2.2.2
y	$:= r/a$	B.1
Y_{jm}	Skalare Kugelflächenfunktion	2.2.5
$Z_{jm}^{(\lambda)}$	Tensorielle Kugelflächenfunktion ($\lambda = 1, \dots, 6$)	2.2.5

F.2 Griechische Symbole

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
$\delta \dots$	Variation einer beliebigen Größe	
δ_{ki}	Kronecker-Delta	2.2.6
ϵ	Symmetrischer Teil des Dehnungstensors	2.2.2
ϵ_{jm}^λ	Amplitude der SFER von ϵ	2.2.7
ϵ^L	Standardabweichung von \dot{s}^L	6.3
$\bar{\epsilon}^L$	Mittlere Standardabweichung	6.4
ϵ^{cal}	Fehler der Altersbestimmung der SLI	5.3
ϵ^{SLI}	Fehler des beobachteten relativen Meeresspiegelanstiegs der SLI	5.3
ϑ	Poldistanz im sphärischen Koordinatensystem	2.2.2
ϑ_{ℓ_1}	Poldistanz des Gitterpunkts Ω_ℓ	2.2.7
λ	Geographische Breite	5.2
λ^C	Chandler-Frequenz	4.3
λ^E	Euler-Frequenz der starren Erde	2.4.4
μ	Schermodul	2.2.2
μ_k	Approximation von $\mu(r)$	2.2.6
ν	Viskosität	2.2.2
ν_k	Approximation der radialsymmetrischen Viskosität $\nu(r)$	2.2.7
$\nu_{k\ell}$	Approximation der Viskosität $\nu(r, \Omega)$	2.2.7
ξ_k	Stückweise konstante Basisfunktion des Raums $L_2(0, a)$	2.2.6
π	$:= 3.14159265359 \dots$	2.2.2
ϖ	Beliebige skalare quadratintegrale Funktion	2.2.4
ϖ	Beliebige vektorielle quadratintegrale Funktion	2.2.4
ρ	Volumenmassendichte	2.2.2
$\rho^{(0)}$	Volumenmassendichte im Referenzzustand	2.2.2
ρ_k	Approximation von $\rho^{(0)}(r)$	2.2.6
ρ^E	Volumenmassendichte der Eislast $\rho^E = 910\text{kg m}^{-3}$	2.3.2
ρ^O	Volumenmassendichte der Ozeanlast $\rho^O = 1020\text{kg m}^{-3}$	2.3.2
$\rho^{(\Delta)}$	Lokales Inkrement der Volumenmassendichte in Lagrange-Formulierung	2.4.4
ϱ	Volumenmassendichte in Euler-Formulierung	2.4.2
$\varrho^{(\Delta)}$	Lokales Inkrement der Volumenmassendichte in Euler-Formulierung	2.4.5
σ^P	Lokales Inkrement der Piola-Flächenmassendichte	2.2.2
σ_{jm}	Amplitude der spek. Repräsentation von σ^P	2.2.5
$\sigma^{\text{E O}}$	Flächenmassendichte der Eis- bzw. Ozeanlast	2.3.2
$\sigma^{\text{UF NU}}$	Uniformer bzw. nicht-uniformer Anteils von σ^O	2.3.2
$\sigma^{\partial\mathcal{X}}$	Flächenmassendichte auf $\partial\mathcal{X}$ definiert in (2.171)	2.4.5
σ^Σ	Flächenmassendichte auf Σ definiert in (2.170)	2.4.5
$\bar{\sigma}^{\text{L R}}$	Varianz von \dot{s}^L bzw. \dot{s}^R gemäß (7.3)	7.1

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
Σ	Grenzfläche	2.2.2
$d\Sigma$	Infinitesimales Flächenelement einer Grenzfläche Σ	2.4.5
Σ^{CMB}	Kern-Mantel-Grenzfläche	2.2.2
$\Sigma^{(\delta)}$	Materielles Inkrement der Flächenmassendichte in Euler-Formulierung	2.4.2
$\tau^{(\delta)}$	Materielles Inkrement des Cauchy-Spannungstensors	2.2.2
$\tau^{(\delta)\text{E}}$	Elastischer Anteil des Spannungstensors	2.2.2
$\tau^{(\delta)\text{V}}$	Viskoser Anteil des Spannungstensors	2.2.2
$\tau^{V,i,\lambda}_{jm}$	Amplitude der SFER von $\tau^{V,i}$	2.2.7
$\phi^{(0)}$	Gravitationspotential von B	2.2.2
$\phi^{(\Delta)}$	Lokales Inkrement des Gravitationspotentials	2.2.2
$\phi^{(\Delta)\text{in}}$	Lokales Inkrement des Gravitationspotentials bzgl. internen Massenverteilung	2.2.2
$\phi^{(\Delta)\text{ex}}$	Lokales Inkrement des externen Gravitationspotentials bzgl. der Last	2.2.2
Φ_{jm}	Amplitude der spek. Repräsentation von $\phi^{(\Delta)}$	2.2.5
Φ_{jm}^k	Amplitude der SFER von $\phi^{(\Delta)}$	2.2.6
Φ_{jm}^{in}	Amplitude der spek. Repräsentation von $\phi^{(\Delta)\text{in}}$	2.4.8
Φ_{jm}^{ex}	Amplitude der spek. Repräsentation von $\phi^{(\Delta)\text{ex}}$	2.4.8
φ	Geographische Länge im sphärischen Koordinatensystem	2.2.2
φ_{ℓ_2}	Geographische Länge des Gitterpunktes Ω_{ℓ}	2.2.7
$\chi_{1 2 3}$	Komponenten der Anregungsfunktion in (2.163)	2.4.4
χ	Komplexe Kombination $\chi(t) := \chi_1(t) + i\chi_2(t)$	2.4.4
$\chi_{\text{var}}(u)$	Varianz der Radialverschiebung u	4.4.1
$\chi_{\text{var}}(s)$	Varianz des Meeresspiegelanstiegs s°	4.4.1
$\chi^{\text{SLI}[1]}$	Abweichungswert gemäß (5.9)	5.3
$\chi^{\text{SLI}[2]}$	Abweichungswert gemäß (5.13)	5.3
ψ_k	Lineare Basisfunktion des Sobolev-Raums $W_2^1(0, a)$	2.2.6
ψ	Zentrifugalpotential im aktuellen Rotationszustand	2.4.9
$\psi^{(0)}$	Zentrifugalpotential im initialen Rotationszustand	2.4.9
$\psi^{(\Delta)}$	Lokales Inkrement des Zentrifugalpotentials	2.4.9
Ψ_{jm}	Amplitude der spek. Repräsentation von $\psi^{(\Delta)}(\mathbf{X}, t)$	2.4.9
ω	Parameter des Differenzschemas in (2.19)	2.2.3
$\omega^{(0)}$	e_3 -Komponente von $\omega^{(0)}$	2.4.2
$\boldsymbol{\omega}^{(0)}$	Winkelgeschwindigkeit im initialen Rotationszustand	2.4.2
Ω	Abkürzung für sphärische Koordinaten (ϑ, φ)	2.2.2
Ω_0	Voller Raumwinkel der Kugel	2.2.7
Ω_{ℓ}	$:= (\vartheta_{\ell_1}, \varphi_{\ell_2})$	2.2.7
$d\Omega$	Infinitesimales Flächenelement in sphärischen Koordinaten	2.2.7
∇	Nabla-Operator (Differentialoperator)	A.1
∇^2	Laplace-Operator (Differentialoperator)	2.2.2
$\zeta^{(0)}$	Vorgegebene Topographie zur Zeit $t = 0$	2.3.2

F.3 Abkürzungen

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
BP	Before Present, 0 BP entspricht dem Kalenderjahr 1950	3.2.1
GPS	Global Positioning System	6.3
ICE-3G-M	Eismodell gemäß Tushingham & Peltier (1991)	3.2.1
IGS	International GPS Service	6.3

Symbol	Bedeutung	Abschnitt
LGM	Last Glacial Maximum	3.2.1
LTA	Linear-Trend Analysis	6.3
MSG	Meeresspiegelgleichung	2.1
NAWI	Eismodell gemäß Zweck & Huybrechts (2004)	3.2.3
ORA	Ozeanrepräsentation	2.3.2
ORB	Ozeanrepräsentation	2.3.2
ORC	Ozeanrepräsentation	2.3.2
PREM	Preliminary Reference Earth Model gemäß Dziewonski & Anderson (1981)	3.1.1
PSMSL	Permanent Service for Mean Sea Level	6.2
PSMSL-ID	PSMSL-Identifikation	6.1
R1, . . . , R5	Regionen für SLI bzw. Pegelstationen	5.1
RLR	Revised Local Reference	6.2
RT	Variation der Erdrotation	2.1
SCAN	Eismodell gemäß Lambeck et al. (1998b)	3.2.2
SFER	Spektrale Finite-Elemente-Repräsentation	2.2.1
SLI	Indikator der relativen Meeresspiegeländerung	5.1
VM1	Viskositätsmodell gemäß Tabelle 3.2	3.1.2
VMA	Viskositätsmodell gemäß Tabelle 3.3	3.1.3
VMF	Viskositätsmodell gemäß Tabelle 3.4	3.1.4
VMI	Viskositätsmodell gemäß Tabelle 3.5	3.1.5
VR	Viskoelastische Relaxation	2.1

Danksagung

Meinen Dank für vieles mehr als die immerwährende Unterstützung dieser Arbeit möchte ich Dir, Julia, sagen. Danke dafür, daß die letzten zwei Jahre nicht nur als die intensivsten für diese Arbeit in meiner Erinnerung bleiben.

Doch mein Dank gilt auch im besonderen Maß meinen Eltern, die mir immer wieder und in vielfältiger Weise Rückhalt gaben und mich in der Entscheidung zum Studium und zu dieser Arbeit bestärkten. Meiner ganzen Familie (den Hagedöörnern) in Wanne-Eickel gilt mein Dank, die mir die Möglichkeit gaben und geben dort bei ihnen “anzukommen”.

Für die Motivation und die Betreuung dieser Arbeit möchte ich Detlef Wolf danken, der mit seinen vielen Anmerkungen zur Darstellung und Notation sicherlich einiges zur Verbesserung beigetragen hat. Vor allem danke ich Zdeněk Martinec für unzählige Diskussionen und seine Denkanstöße in den letzten Jahren. Außerdem bauen nicht nur theoretische Beschreibungen auf Arbeiten von Zdeněk Martinec auf, sondern auch viele Ideen und das nötige Vertrauen manch längere “theoretische Durststrecke” bei dieser Arbeit überstehen zu können.

Auch bei den Kollegen aus dem ehemaligen “PB 1.4” und Veronika Söllner bedanke ich mich für alle Hilfe, Gespräche und die nette Gesellschaft in den Kaffeepausen. Insbesondere möchte ich mich hier noch bei Ingo Sasgen bedanken, der als mein Zimmernachbar doch sehr häufig gestört wurde, bei Kevin Fleming, der immer wieder meinen Arbeitsalltag und vor allem meine englischen Texte bereichert hat, und bei Volker Klemann, der oft für Diskussionen bereit stand, immer wieder Fragen zur Postgres Datenbank beantwortete und für fast jedes \LaTeX Problem eine Lösung gefunden hat.

Für die Überlassung ihrer SLI-Daten, die Volker Klemann in die Datenbank aufgenommen hat, bedanke ich mich bei A. Dyke und I. Shennan. Für das Überlassen des in dieser Arbeit mit NAWI bezeichneten Eismodells bedanke ich mich bei C. Zweck. Die Visualisierung aller Ergebnisse dieser Arbeit wurde erheblich durch das Open-Source Programm GMT (Wessel & Smith, 1991) erleichtert.