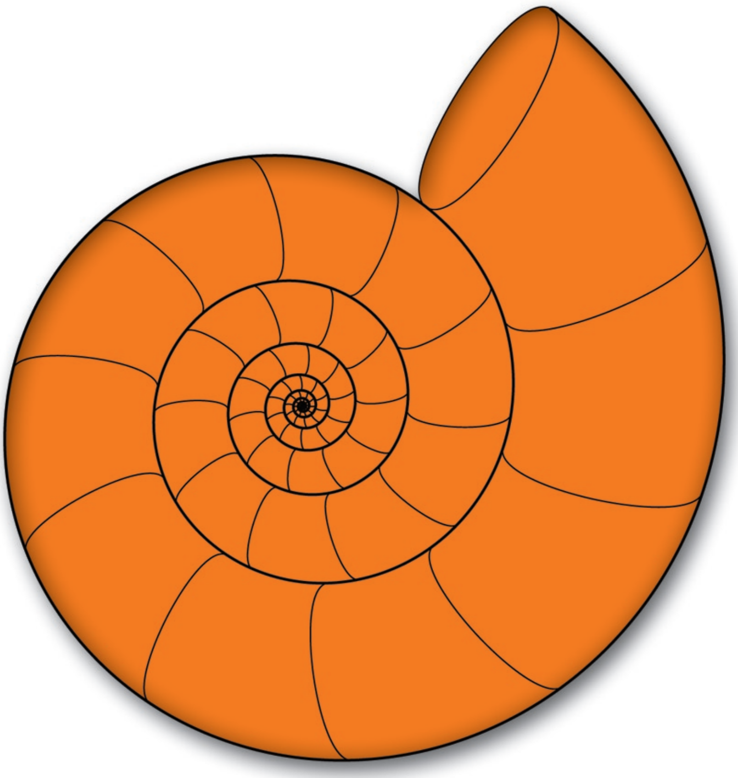
Ina Kersten

Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften. Kurs 2004/2005

TeX–Bearbeitung von Ben Müller und Christian Kierdorf



$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Universitätsdrucke Göttingen

Ina Kersten

Mathematische Grundlagen in
Biologie und Geowissenschaften
Kurs 2004/2005

erschienen in der Reihe der Universitätsdrucke
im Universitätsverlag Göttingen 2004

Ina Kersten

Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften Kurs 2004/2005

TEX-Bearbeitung von
Ben Müller und
Christian Kierdorf

Universitätsverlag Göttingen
2004

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Anschrift der Autorin

Ina Kersten

Mathematisches Institut

der Georg-August-Universität Göttingen

Bunsenstraße 3-5

37073 Göttingen

URL http://www.uni-math.gwdg.de/

Satz und Layout: Ben Müller und Christian Kierdorf

Umschlaggestaltung: Margo Bargheer

http://univerlag.uni-goettingen.de

ISBN 10: 3-930457-64-4

ISBN 13: 978-3-930457-64-9

Vorwort

Mathematische Methoden spielen in den Naturwissenschaften eine immer wichtigere Rolle. So können häufig aufwendige Experimente und Versuchsreihen durch *Mathematische Modellierung* und Simulation auf dem Computer unterstützt oder ersetzt werden. Das Fach Mathematik ist also ein wichtiger Bestandteil einer jeden naturwissenschaftlichen Ausbildung.

Dieser Universitätsdruck richtet sich an Studierende der Biologie und Geowissenschaften. Er fasst den Stoff zweier Kurse zusammen, deren Begleittexte im Oktober 2003 und im April 2004 als Universitätsdrucke Göttingen erschienen sind. Die Manuskripte dazu wurden von Ben Müller und Christian Kierdorf mit Hilfe des Computersatzsystems LaTeX druckfertig vorbereitet. Sie haben nicht nur geTeXt, sondern auch getextet und Ergänzungen wie die Resultate der Übungsaufgaben zur Selbstkontrolle für die Studierenden hinzugefügt.

In dieser zweiten Auflage wurde der Stoff von Ben Müller noch etwas überarbeitet und um ein paar neue Übungsaufgaben erweitert.

Dieser Universitätsdruck soll im Wintersemester 2004/05 und im Sommersemester 2005 als Begleittext zu mathematischen Einführungsvorlesungen dienen. Die Vorlesungen werden in der Form einer von Ben Müller und Christian Kierdorf vorbereiteten elektronischen Präsentation stattfinden.

September 2004 *Ina Kersten*

Inhaltsverzeichnis

Zahlen und Abbildungen

Unter einer Menge *verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*
Die wohlunterschiedenen Objekte heißen Elemente *der Menge.*
Georg Cantor: *Beiträge zur Begründung der Mengenlehre, 1895*

1 Aufbau des Zahlsystems

1.1 Natürliche Zahlen

Der Aufbau des Zahlsystems beginnt mit den *natürlichen Zahlen*. Das sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... mit denen man zählt. Die Menge dieser Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet. Man schreibt dafür

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

das bedeutet, das Symbol $\mathbb{N}$ wird definiert als die Menge der Zahlen, die zwischen den geschweiften Klammern aufgelistet sind.
Ist n eine natürliche Zahl, so schreibt man $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, n ist *Element* von $\mathbb{N}$. Zum Beispiel ist $10 \in \mathbb{N}$ und $37 \in \mathbb{N}$, aber nicht -10, also $-10 \notin \mathbb{N}$.
Sind $n, m \in \mathbb{N}$, so sind auch

$$n + m \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad n \cdot m \in \mathbb{N}.$$

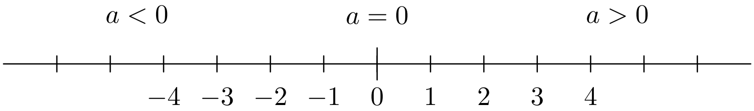
Man kann also in $\mathbb{N}$ addieren und multiplizieren. Die Subtraktion ist in $\mathbb{N}$ allerdings nicht immer möglich. Zum Beispiel ist $5 - 5 = 0 \notin \mathbb{N}$ oder $5 - 7 = -2 \notin \mathbb{N}$. Man vergrößert daher den Zahlbereich um Null und die negativen Zahlen.

1.2 Ganze Zahlen

Die Menge der *ganzen Zahlen* wird mit dem Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Es ist

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Man veranschaulicht sich die ganzen Zahlen als Punkte auf einer Geraden.



Die Zahlen links der 0 sind *kleiner* Null, geschrieben $a < 0$. Die rechts der 0 sind *größer* Null, geschrieben $a > 0$.
Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so gelten

$$a + b \in \mathbb{Z}, \qquad a - b \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{Z}.$$

Aber die Division ist in $\mathbb{Z}$ nicht immer möglich. Zum Beispiel ist $2 : 5 = \frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$ und $\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$.
Man vergrößert den Zahlbereich $\mathbb{Z}$ durch Hinzunahme der Brüche $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$. Es ist dann $\frac{a}{1} \in \mathbb{Z}$.

1.3 Rationale Zahlen

Die Brüche werden in der Mathematik *rationale Zahlen* genannt. Die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet man mit dem Symbol $\mathbb{Q}$. Es gilt

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\},$$

das bedeutet, die Menge $\mathbb{Q}$ besteht aus allen Zahlen $\frac{a}{b}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ gilt. Die Schreibweise einer rationalen Zahl als Bruch ist nicht eindeutig. Es gilt die *Kürzungsregel*

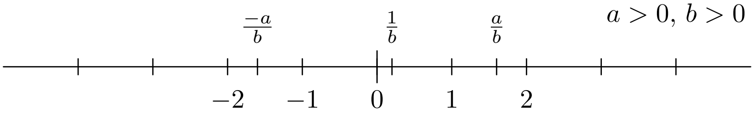
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff a \cdot b' = b \cdot a'.$$

Das Zeichen „$\iff$“ bedeutet hierbei, dass die linke Seite genau dann gilt, wenn die rechte Seite gilt. Zum Beispiel ist $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$.

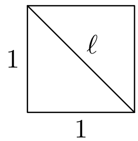
In $\mathbb{Q}$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{für } b\neq 0 \text{ und } d\neq 0,$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd} \qquad \text{für } b\neq 0 \text{ und } d\neq 0,$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \text{für } b\neq 0 \text{ und } d\neq 0,$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \qquad \text{für } b\neq 0, c\neq 0 \text{ und } d\neq 0.$$

Man veranschaulicht sich die Elemente aus $\mathbb{Q}$ auf der Zahlengeraden als Punkte zwischen den ganzen Zahlen. Ist $b>0$, so ist $\frac{1}{b}$ der b-te Teil der Einheitsstrecke zwischen 0 und 1. Ist auch $a>0$, so erhält man den Punkt $\frac{a}{b}$, indem man diesen b-ten Teil a-mal von 0 nach rechts abträgt.



Man kann sich nun fragen, ob der Zahlbereich $\mathbb{Q}$ vielleicht schon groß genug ist, oder ob es noch Zahlen gibt, die nicht Element von $\mathbb{Q}$ sind. Dazu betrachtet man ein Quadrat der Seitenlänge 1. Die Länge der Diagonale sei mit ℓ bezeichnet. Dann gilt nach dem Satz von Pythagoras $\ell^2=1^2+1^2=2$, also $\ell=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.



Solche Maßzahlen sind im Allgemeinen nicht rational, aber sie sind „reell“, wie zum Beispiel auch der Umfang 2π eines Kreises mit Radius 1. Es ist $2\pi\notin\mathbb{Q}$.
Wir müssen also den Zahlbereich $\mathbb{Q}$ noch wesentlich vergrößern. Das führt zu den reellen Zahlen.

1.4 Reelle Zahlen

Die Menge der *reellen Zahlen* wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Wir haben dann folgende Zahlbereiche

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

Das Zeichen „$\subset$“ bedeutet dabei, dass die linke Menge *Teilmenge* der rechten Menge ist.
Wie in $\mathbb{Q}$ kann man auch in $\mathbb{R}$ addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch jede Zahl $\neq 0$ dividieren. Ferner ist $\mathbb{R}$ *angeordnet*, das heißt für je zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ besteht stets genau eine der folgenden Beziehungen:

(1) $r = s$,

(2) $r > s$ (r ist „größer“ als s),

(3) $r < s$ (r ist „kleiner“ als s).

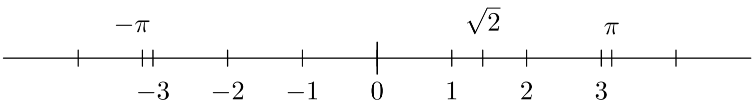
Für die Anordnung von $r, s, t \in \mathbb{R}$ gelten folgende *Monotoniegesetze*:

$$\begin{aligned} r < s \quad &\Longrightarrow \quad r + t < s + t, \\ r < s \text{ und } t > 0 \quad &\Longrightarrow \quad rt < st, \\ r < s \text{ und } t < 0 \quad &\Longrightarrow \quad rt > st. \end{aligned}$$

Dabei gilt zum Beispiel

$$3{,}141592653 < \pi < 3{,}141592654.$$

In der Veranschaulichung besteht $\mathbb{R}$ genau aus allen Punkten der Zahlengeraden.



Man kann aus jeder reellen Zahl $r \geqslant 0$ (r ist „größer oder gleich“ 0) die *Quadratwurzel* ziehen, das heißt die Gleichung $x^2 = r$ mit $r \geqslant 0$ ist in $\mathbb{R}$ lösbar. Aber für $r < 0$ ist die Gleichung $x^2 = r$ nicht in $\mathbb{R}$ lösbar.
Für welche $p, q \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

in $\mathbb{R}$ lösbar? Bilde

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Also gilt:

$$x^2 + px + q = 0 \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \iff x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

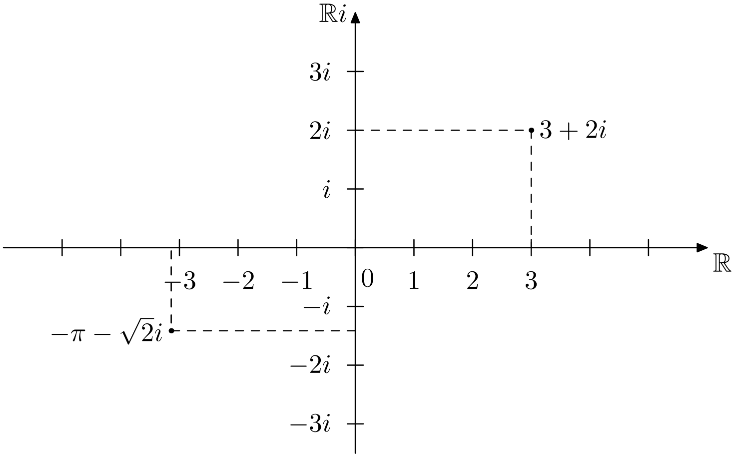
Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist also genau dann in $\mathbb{R}$ lösbar, wenn $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$ gilt. Sie hat dann die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Um auch aus negativen Zahlen die Quadratwurzel ziehen zu können, muss der Zahlbereich aber immer noch vergrößert werden. So kommt man zu den komplexen Zahlen.

1.5 Komplexe Zahlen

Da die Zahlengerade durch $\mathbb{R}$ besetzt ist, weicht man in die Ebene aus und stellt sich die *komplexen Zahlen* als die Punkte der „GAUSSschen Zahlenebene“ vor.



Die Zahl i auf der senkrechten Achse heißt *imaginäre Einheit*. Sie erfüllt die Gleichung $i^2 = -1$. Man definiert

$$\mathbb{C} := \{r + si \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

als die Menge der komplexen Zahlen.
In $\mathbb{C}$ gelten die *Rechenregeln*:

(I) $$(r + si) + (r' + s'i) = (r + r') + (s + s')i$$

(II) $$(r + si) - (r' + s'i) = (r - r') + (s - s')i$$

(III) $$(r + si) \cdot (r' + s'i) = (rr' - ss') + (rs' + sr')i$$

In der Multiplikationsregel (III) wurde hier die Bedingung $i \cdot i = i^2 = -1$ verwendet.

Man kann in $\mathbb{C}$ also addieren, subtrahieren und multiplizieren. Außerdem kann man durch jede Zahl $\neq 0$ dividieren. Um die Zahl

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und c und d nicht beide 0 in die Form $r + si$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ zu bringen, benutzt man die „dritte binomische Formel“

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Beispiele. 1) Was ist $3 : (1-i)$? Es ist

$$\begin{aligned}\frac{3}{1-i} &= \frac{3\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\ &= \frac{3+3i}{1+1}\\ &= \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i.\end{aligned}$$

2) Was ist $(5+7i) : (3+\sqrt{2}i)$? Es ist

$$\begin{aligned}\frac{5+7i}{3+\sqrt{2}i} &= \frac{(5+7i)(3-\sqrt{2}i)}{(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)}\\ &= \frac{(15+7\sqrt{2})+(21-5\sqrt{2})i}{9-2i^2}\\ &= \frac{15+7\sqrt{2}}{11}+\frac{21-5\sqrt{2}}{11}i.\end{aligned}$$

Zu der komplexen Zahl $z = c + di$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ gehört die *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{z} = c - di$.

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist in $\mathbb{C}$ stets lösbar.

Beispiel. Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ die Lösungen

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1}\\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}\\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften von $\mathbb{C}$

1) Nach dem sogenannten „Fundamentalsatz der Algebra“ ist jede Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

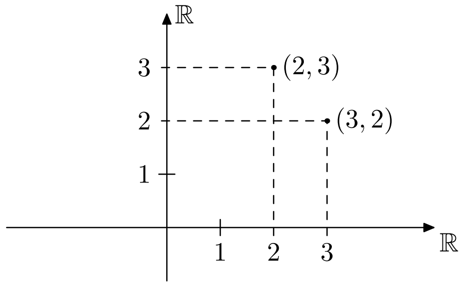
mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ lösbar.

2) Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{C}$ nicht angeordnet.

3) Man kann sich $\mathbb{C}$ auch vorstellen als die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$: Die Zahl i wird dann zum Punkt $(0, 1)$ und die Zahl 1 zum Punkt $(1, 0)$. Allgemein wird aus der komplexen Zahl $r + si$ der Punkt (r, s) in der Ebene. Addition und Multiplikation lauten dann

(I′) $$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
(II′) $$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Insbesondere ist $(0, 1)^2 = (-1, 0) = -(1, 0)$.



1.6 Der n-dimensionale Raum

Die Konstruktion 3) aus 1.5 kann man auf n Koordinaten mit $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern. Man definiert

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

als den *n-dimensionalen Raum* und versieht $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweiser Addition

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Die Elemente des n-dimensionalen Raums sind sogenannte *geordnete n-Tupel* $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Man nennt sie auch *Punkte* des $\mathbb{R}^n$.
Im Fall $n = 1$ besteht der 1-dimensionale Raum $\mathbb{R}^1$ genau aus den Punkten der Zahlengeraden. Das sind die reellen Zahlen, vergleiche 1.4.
Für $n = 2$: besteht der 2-dimensionale Raum $\mathbb{R}^2$ genau aus allen geordneten Paaren (x, y) mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Das ist die GAUSSsche Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, vergleiche 1.5.
Aber für $n \geqslant 3$ kann man in $\mathbb{R}^n$ keine Multiplikation mit vergleichbaren Eigenschaften definieren. Zum Beispiel gilt das Gesetz $x \cdot y = y \cdot x$ nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}^4$.
Das deutet darauf hin, dass die Konstruktion des Zahlsystems mit der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen befriedigenden Abschluss gefunden hat. Wir haben jetzt die Zahlbereiche

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.7 Aufgaben

Aufgabe 1.1. Seien $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ganze Zahlen. Stellen Sie die beiden rationalen Zahlen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{5}{3a^2b} + \frac{2}{ab^2}$$

jeweils als (gekürzten) Bruch mit nur einem Bruchstrich in $\mathbb{Q}$ dar.

Aufgabe 1.2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ungleichungen richtig und welche falsch sind. Korrigieren Sie dann die falschen.

a) $\frac{3}{4} < 0{,}75$

b) $-5 < 3$

c) $\sqrt{2} > 1{,}42$

d) $-5 > -1$

Aufgabe 1.3. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen der gefundenen Werte in die Gleichung.

Aufgabe 1.4. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $4x^2 - 5x = -1$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen der gefundenen Werte in die Gleichung.

Aufgabe 1.5. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 als Punkte der GAUSSschen Zahlenebene:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i\,, \quad z_2 = -2 - \frac{3}{4}\, i\,, \quad z_3 = \frac{3 + \sqrt{7} i}{4}\,, \quad z_4 = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5\,.$$

Aufgabe 1.6. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $r + si$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ dar:

$$\frac{2 + 3i}{4 - 5i}\,, \qquad \frac{i - 1}{i + 1}\,.$$

Aufgabe 1.7. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $r + si$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ dar:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^3, \qquad \frac{1}{i}\,.$$

Wie auch bei Aufgabe 1.6 sind nicht nur die Resultate sondern auch deren Herleitung hinzuschreiben.

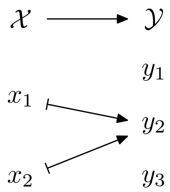
Aufgabe 1.8. Erläutern Sie, warum die Gleichung $x^2 = r$ für $r < 0$ nicht in $\mathbb{R}$ lösbar ist.

2 Abbildungen

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Mengen, die nicht leer sind.
Eine *Abbildung von* $\mathcal{X}$ *nach* $\mathcal{Y}$ ist eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in \mathcal{X}$ genau ein Element $f(x) \in \mathcal{Y}$ zuordnet. Man schreibt dafür

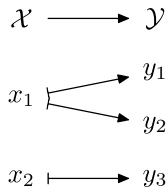
$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad x \mapsto f(x).$$

Beispiele. 1) Die Zuordnung



ist eine Abbildung.

2) Dagegen ist



keine Abbildung, da dem Element x_1 zwei Werte zugeordnet werden.

3) Sei $\mathcal{X}$ die Menge der Anwesenden in einem Hörsaal und $\mathcal{Y}$ die Menge, die aus den beiden Eigenschaften „männlich“ und „weiblich“ besteht. Dann erhält man eine Abbildung $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, indem man jeder Person x ihr Geschlecht $g(x)$ zuordnet.

2.1 Definitionsbereich und Wertemenge

Sei $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Abbildung. Die Menge $\mathcal{X}$ heißt *Definitionsbereich von* f, und die Menge

$$f(\mathcal{X}) := \{f(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

heißt *Bildmenge* oder *Wertemenge von* f.
Die Bildmenge von f ist eine Teilmenge von $\mathcal{Y}$, also $f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$. Die Mengen $f(\mathcal{X})$ und $\mathcal{Y}$ müssen aber nicht gleich sein.

2.2 Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt

(a) *injektiv,* falls es zu jedem $y \in \mathcal{Y}$ höchstens ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = y$ gibt.

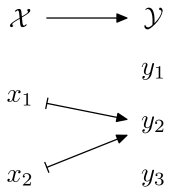
(b) *surjektiv,* wenn es zu jedem $y \in \mathcal{Y}$ mindestens ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = y$ gibt.

(c) *bijektiv,* wenn es zu jedem $y \in \mathcal{Y}$ genau ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = y$ gibt.

Insbesondere gilt:

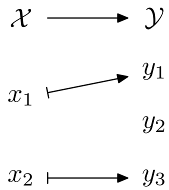
$$\begin{aligned} f \text{ surjektiv} &\iff f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y} \\ f \text{ bijektiv} &\iff f \text{ injektiv und surjektiv.} \end{aligned}$$

Beispiele. 1) Die Abbildung



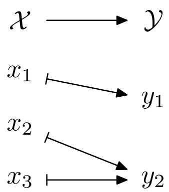
ist weder injektiv, noch surjektiv.

2) Die Abbildung



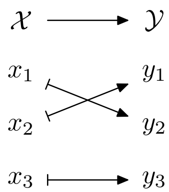
ist injektiv, aber nicht surjektiv.

3) Die Abbildung



ist surjektiv, aber nicht injektiv.

4) Die Abbildung



ist bijektiv.

5) Untersuche die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 9 - x^2$, auf Injektivität und Surjektivität.

Dafür versucht man die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned} 9 - x^2 = y &\iff x^2 = 9 - y \\ &\iff x = \pm\sqrt{9 - y}. \end{aligned}$$

Für $y = 10$ ist demnach $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i \notin \mathbb{R}$, vergleiche 1.5. Die Abbildung f ist also *nicht surjektiv,* da es zu $y = 10$ kein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = y$.

Für $y = 5$ ist $x = \pm 2$. Also ist f auch *nicht injektiv,* da $f(2) = 5 = f(-2)$ gilt, also 5 zwei „Urbilder“ hat.

6) Sei $\mathbb{R}_{\geqslant 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ die Menge der reellen Zahlen, die größer oder gleich 0 sind. Untersuche $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4-\sqrt{x}$, auf Injektivität und Surjektivität.

   Dafür kann man das folgende allgemeine *Kriterium für Injektivität* benutzen: Eine Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ist injektiv, wenn für $x, x' \in \mathcal{X}$ stets gilt
$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

   Für $x, x' \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt
$$f(x) = f(x') \implies 4 - \sqrt{x} = 4 - \sqrt{x'} \implies \sqrt{x} = \sqrt{x'} \implies x = x'.$$

   Also ist f *injektiv.*

   Sei $y = 5$. Wenn es jetzt ein $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $f(x) = 5$ gäbe, dann wäre $4 - \sqrt{x} = 5$ und folglich $\sqrt{x} = -1$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\sqrt{x} \geqslant 0$ nach Definition des Wurzelzeichens für alle $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt. Damit ist gezeigt, dass f *nicht surjektiv* ist.

2.3 Umkehrabbildung

Eine Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt *umkehrbar,* wenn es eine Abbildung $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ gibt, für die die Beziehungen
$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X} \qquad \text{und} \qquad f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in \mathcal{Y}$$
erfüllt sind. Man schreibt dann auch $g = f^{-1}$ und nennt g die *Umkehrabbildung von f*. Es gilt:
$$f \text{ umkehrbar} \iff f \text{ bijektiv}.$$

Beispiel. Bestimme die Umkehrabbildung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$. Man findet die Umkehrabbildung, indem man die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflöst:
$$f(x) = y \iff 2x + 1 = y \iff x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$
Die gesuchte Umkehrabbildung ist also $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.
Probe: $g(f(x)) = g(2x + 1) = \frac{1}{2}(2x + 1) - \frac{1}{2} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(g(y)) = f(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) + 1 = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

2.4 Kompositum von Abbildungen

Seien $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ und $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ Abbildungen. Dann ist das *Kompositum* $g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ definiert durch die Bedingung

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}.$$

Beispiel. Gegeben seien die beiden Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y + 1$. Dann gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y + 1) = (y + 1)^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir erhalten also die Komposita

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1,$$

und

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto (y + 1)^2.$$

Es kann also vorkommen, dass $g \circ f \neq f \circ g$ gilt.

2.5 Aufgaben

Aufgabe 2.1. Bei welchen der folgenden Zuordnungen f_1, f_2, f_3, f_4 handelt es sich um Abbildungen und bei welchen nicht?

a) $f_1 : \{2, -2, 3, -3\} \longrightarrow \{4, 9\}\,, \quad 2 \mapsto 4, \;\; -2 \mapsto 4, \;\; 3 \mapsto 9, \;\; -3 \mapsto 9,$

b) $f_2 : \{4, 9\} \longrightarrow \{2, -2, 3, -3\}\,, \quad 4 \mapsto 2, \;\; 4 \mapsto -2, \;\; 9 \mapsto 3, \;\; 9 \mapsto -3,$

c) $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \quad m \mapsto m^2 + 1,$

d) $f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \quad m \mapsto m^3.$

Aufgabe 2.2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 4x^2 + 2,$

b) $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2 - x.$

Aufgabe 2.3. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 3x - 2,$

b) $f : \mathbb{R}_{\neq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\neq 1}\,, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1}, \qquad$ wobei $\mathbb{R}_{\neq 1} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}.$

Aufgabe 2.4. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g : \mathbb{R}_{\neq -1} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x+1}$ zwei Abbildungen, wobei $\mathbb{R}_{\neq -1} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \,\}$. Bestimmen Sie die Komposita $f \circ g$ und $g \circ f$ und geben Sie jeweils Definitionsbereich und Wertemenge an.

Analysis

3 Folgen und Grenzwerte

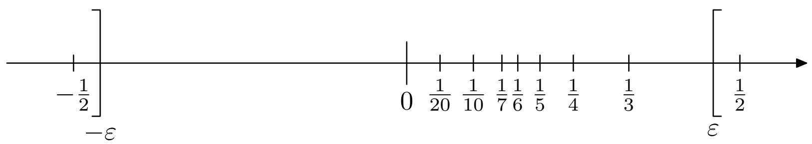
3.1 Beispiele

1) Betrachte die Zahlenfolge

$$\left(1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \dots\right).$$

Für diese *Folge* schreibt man auch $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mit Ausnahme von endlich vielen Folgengliedern $\frac{1}{n}$ liegen alle in einer sogenannten ε-Umgebung von 0, egal wie klein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt wird. Das heißt bis auf endlich viele Folgenglieder gilt: $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$.



„ε-Umgebung von 0“

In unserem Bild liegen außer dem Folgenglied $\frac{1}{2}$ alle Folgenglieder innerhalb der gewählten ε-Umgebung von 0.

Der *Grenzwert* (auch *Limes* genannt) der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist 0, und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Das Zeichen „∞“ steht dabei für „unendlich”.

2) Für die Folge

$$\left(1\,,\,\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{9}\,,\,\frac{1}{16}\,,\,\frac{1}{25}\,,\,\frac{1}{36}\,,\,\ldots\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist ebenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

3) Besitzt die Folge

$$\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{2}{3}\,,\,\frac{3}{4}\,,\,\frac{4}{5}\,,\,\frac{5}{6}\,,\,\frac{6}{7}\,,\,\ldots\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

einen Grenzwert?

Es ist

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} 1}_{1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}}_{0} = 1,$$

wobei mit $\lim\limits_{n\to\infty} 1$ der Grenzwert der konstanten Folge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ gemeint ist.

4) **Zinseszinsberechnung**
Sei $K_0 > 0$ das Anfangskapital, und sei p der Zinssatz in Prozent. Für das Kapital K_n nach n Jahren gilt

$$K_{n+1} = K_n + \frac{p}{100}K_n = K_n\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

und also

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Ist $K_0 = 1000$ und $p = 4\%$, so folgt

$$K_n = 1000 \cdot (1{,}04)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie für $n = 0$. Die Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Grenzwert, denn sie ist nach oben unbeschränkt, das heißt für jedes $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein Folgenglied $K_n > M$.

3.2 Konvergenz von Folgen

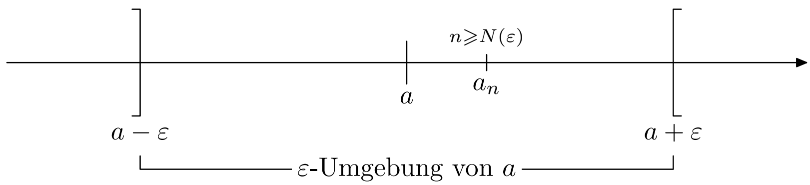
Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Statt $a(n)$ schreibt man in der Regel a_n und bezeichnet die Folge mit

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (a_1\,,\ a_2\,,\, a_3\,,\, a_4\,,\, a_5\,,\, a_6\,,\, a_7\,,\, a_8\,,\, \ldots).$$

Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Genauer definiert man:
Ein reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, in Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass gilt

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Oder anders formuliert:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.



Dabei ist für jedes $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung von a gegeben als *offenes Intervall*

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\; := \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\},$$

das sind alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand von a kleiner als ε ist.
Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$, so heißt a *Grenzwert der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der Grenzwert ist dadurch eindeutig bestimmt. Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, so sagt man „die Folge divergiert“.

Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a.$$

Sind b und alle b_n ungleich 0, so ist auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a}{b}\,.$$

Beispiele. 1) Seien $q, c \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$.

- Ist $-1 < q < 1$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(cq^n) = 0$.
- Ist $q > 1$ oder $q < -1$, so ist die Folge $(cq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

2) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1\,,\,1\,,\,-1\,,\,1\,,\dots)$ divergiert.

3) Die konstante Folge $(c\,,\,c\,,\,c\,,\dots)$ konvergiert mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

4) Die Folge $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

5) Untersuche die Folge $\left(\frac{3n^2+5n}{n^2-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Wegen

$$\frac{3n^2+5n}{n^2-2} = \frac{(3n^2+5n)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2-2)\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{3+\frac{5}{n}}{1-\frac{2}{n^2}},$$

folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{n^2-2} &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{5}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})}\\ &= \frac{3+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{3+5\cdot 0}{1-2\cdot 0} = 3.\end{aligned}$$

Konvergenzkriterien

Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *beschränkt* (das heißt, es gibt eine Schranke $M \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $-M \leqslant x_n \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Damit erhält man ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Folge. Hinreichende Kriterien sind:

- Ist eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend* (das heißt, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \geqslant x_n$), dann ist sie konvergent.
- Ist eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend* (das heißt, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \leqslant x_n$), dann ist sie konvergent.

3.3 Nullfolgen

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge*.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$0 \leqslant b_n \leqslant a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beispiel. Es ist

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

3.4 Summenschreibweise

Für eine Summe $a_1 + \cdots + a_n$ schreiben wir als Abkürzung auch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Beispiele. 1) $1+2+3+4+5 = \sum_{k=1}^{5} k$.

2) *Im Alter von neun Jahren verblüffte* Johann Carl Friedrich Gauss *seinen Lehrer, als er die Zahlen von* 1 *bis* 100 *aufsummierte, indem er* 50 *mal den Summand* 101 *zusammenfasste.*

Gauss, 1777–1855

Analog gilt für die Summe der ersten 10 Zahlen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ &= \underbrace{(1+10)}_{11} + \underbrace{(2+9)}_{11} + \underbrace{(3+8)}_{11} + \underbrace{(4+7)}_{11} + \underbrace{(5+6)}_{11} \\ &= 5\cdot 11 = 55\end{aligned}$$

3) $\sum_{k=2}^{5} k^2 = 4+9+16+25$.

4) $\sum_{k=1}^{30} 2k = 2+4+6+\cdots+60$.

5) $1+3+5+\cdots+2n-1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

3.5 Ratenzahlungen

Sei K_n das Kapital nach n Jahren, und sei p der Zinssatz in Prozent. Sei $R > 0$ die feste Rate, die am Anfang eines Jahres auf ein Konto eingezahlt wird. Setzt man $q := 1 + \frac{p}{100}$ (vgl. auch Beispiel 4) in 3.1), so erhält man

$$\begin{aligned}
K_1 &= Rq, \\
K_2 &= Rq + Rq^2, \\
K_3 &= Rq + Rq^2 + Rq^3, \\
&\vdots \\
K_n &= Rq + Rq^2 + \cdots + Rq^n = \sum_{k=1}^{n} Rq^k.
\end{aligned}$$

Der Kontostand am Anfang des $(n+1)$-ten Jahres lautet damit:

$$\begin{aligned}
R + K_n &= R + Rq + Rq^2 + \cdots + Rq^n \\
&= R(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \\
&\overset{3.6}{=} R\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.
\end{aligned}$$

3.6 Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Setze

$$s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Es ist

$$s_n - qs_n = (1-q)s_n$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
s_n - qs_n &= (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n) - (q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}) \\
&= 1 - q^{n+1}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$(1-q)s_n = 1 - q^{n+1},$$

und damit

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad \text{falls } q \neq 1.$$

Nach den Beispielen in 3.2 gilt:

(1) Ist $-1 < q < 1$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.

(2) Ist $q > 1$ oder $q < -1$, so divergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so nennt man sie *geometrische Reihe*. Man schreibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad \text{oder} \qquad 1 + q + q^2 + \dots .$$

Beispiele. 1) Für $q = \frac{1}{2}$ ist $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

2) Für $q = \frac{-1}{2}$ ist $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

3.7 Unendliche Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge (vergleiche 3.2). Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *„Partialsummen"*

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

eine *unendliche Reihe*. Man verwendet die Bezeichnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sowohl für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, als auch für den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, falls er existiert.

Beispiel. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$?
Berechne die Partialsummen:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2},\\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot(2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3},\\
s_3 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot(3+1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8+1}{12} = \frac{3}{4},\\
s_4 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot(4+1)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{15+1}{20} = \frac{4}{5},\\
&\vdots\\
s_n &= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Nach 3) aus 3.1 ist $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, und also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$.

Ein Konvergenzkriterium

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe, bei der $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte. Mit den Konvergenzkriterien aus 3.2 folgt: Diese Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ beschränkt ist.
Hiermit lässt sich zeigen, dass die *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent ist (siehe Aufgabe 3.3).

3.8 Majorantenkriterium für unendliche Reihen

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $-c_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3.9 Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $N(c) \in \mathbb{N}$ so gibt, dass gilt

$$a_n > c \quad (\text{bzw. } a_n < c) \quad \text{für alle } n \geqslant N(c).$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Beispiele. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = \infty$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2^n) = -\infty$.

3) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, sie ist jedoch nicht bestimmt divergent.

3.10 Aufgaben

Aufgabe 3.1. Norbert und Hans gewinnen bei einem Quiz jeweils 7.500 Euro.

a) Norbert legt seinen Gewinn bei einer Bank für zehn Jahre fest an mit einem Zinssatz von 5%. Die Bank ihrerseits legt dieses Geld mit einem Zinssatz von 8,5% an. Wie hoch ist Norberts Kapital nach 10 Jahren, und wieviel Euro hat die Bank nach 10 Jahren verdient?

b) Hans zahlt seinen Gewinn auf ein neues Sparbuch ein und bekommt jährlich 1% Zinsen gutgeschrieben. Wieviele Jahre lang kann Hans jeweils unmittelbar nach der Gutschrift 70 Euro abheben, ohne dass er sein Sparkonto überzieht? Wieviel Euro hat Hans nach 60 Jahren auf seinem Konto?

Aufgabe 3.2. Prüfen Sie, ob die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und geben Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz an, für:

a) $x_n = \frac{4n^2-7n}{n^2-5}$,

b) $x_n = \frac{n^3-1000}{4n^3+20n^2}$,

c) $x_n = \frac{n^2+1}{n}$,

d) $x_n = \sqrt{n}$.

e) $x_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$,

f) $x_n = \frac{2^n}{n!}$.

g) $x_n = 10^{-n}$,

h) $x_n = \left(\sqrt{n(n+1)} - n\right)^{-1}$.

Aufgabe 3.3. Sei $\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = s_m$. Erläutern Sie, dass

$$s_{2^m} > m \cdot \frac{1}{2} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

gilt, und folgern Sie mit dem Konvergenzkriterium aus 3.7, dass die harmonische Reihe divergiert.

Aufgabe 3.4. a) Erläutern Sie, dass $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und folgern Sie daraus mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

b) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Ermitteln Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert.

Zusatzaufgabe. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant N(\varepsilon).$$

(In dieser Form steht die Definition einer konvergenten Folge in den meisten Büchern über Analysis.)

4 Stetige Funktionen

4.1 Der Funktionsbegriff

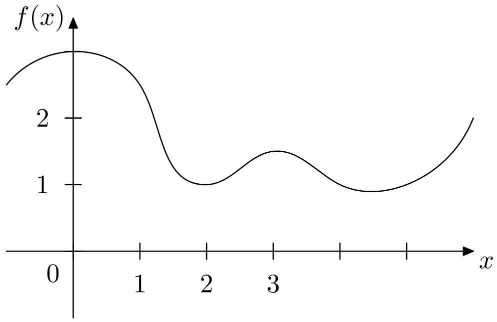
Sind die Mengen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$, so nennt man eine Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ auch eine *(reelle) Funktion.*
Oft sind Funktionen lediglich durch ihre Abbildungsvorschrift (zum Beispiel $x \mapsto x^2 + 1$ oder $f(x) = 2x - 3$) gegeben. Ihr Definitionsbereich ist dann die größtmögliche Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, für die die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist.

4.2 Der Graph einer Funktion

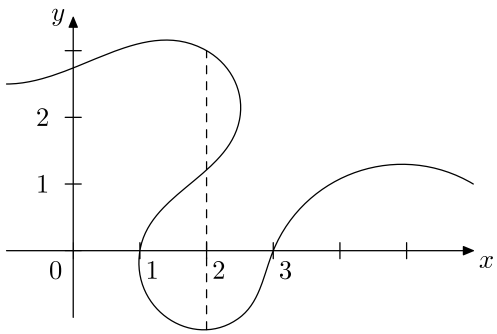
Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der *Graph von* f ist die Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$ mit $x \in \mathcal{D}$. Man schreibt dafür

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

Zum Beispiel:



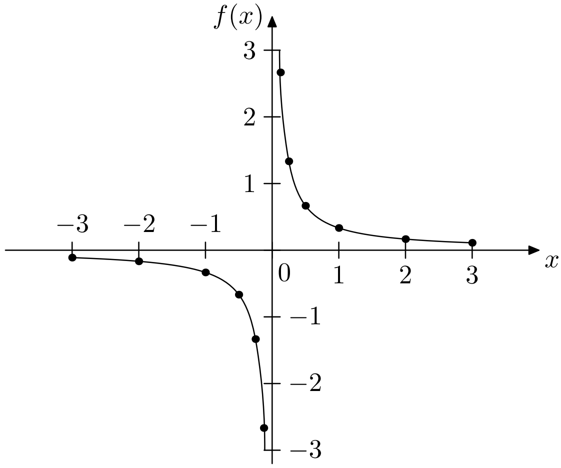
Es ist aber nicht jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ Graph einer Funktion. Zum Beispiel ist



kein Graph, da unter anderem der Zahl 2 mehrere verschiedene Werte zugeordnet sind (vergleiche die Definition in 2).

Beispiel. Betrachtet man die Abbildungsvorschrift $f(x) = \frac{1}{3x}$, dann ist der größtmögliche Definitionsbereich für f die Menge $\mathbb{R}_{\neq 0}$. Das sind die reellen Zahlen ohne die Null, denn der Nenner verschwindet für $x = 0$.
Um den Graph von f zu ermitteln, stellt man eine Wertetabelle auf.

x	$f(x) = \frac{1}{3x}$
0	nicht definiert
± 1	$\pm\frac{1}{3}$
± 2	$\pm\frac{1}{6}$
± 3	$\pm\frac{1}{9}$
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{2}{3}$
$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{4}{3}$
$\pm\frac{1}{8}$	$\pm\frac{8}{3}$



4.3 Grenzwerte von Funktionen

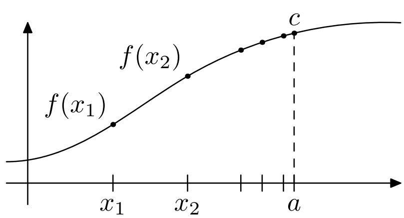
Seien $a \in \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$. Es gebe mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

$$(*) \qquad x_n \in D \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Dann heißt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ *Grenzwert einer Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften $(*)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Man schreibt dann $\lim_{x\to a} f(x) = c$.



Beispiele. 1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+1) = 19.$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, denn

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \text{ und } \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

3) Es ist $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-1} = \dfrac{3}{4}$. Denn offensichtlich ist $\frac{1}{2}$ eine Nullstelle des Zählers und des Nenners. Daher kann man $x-\frac{1}{2}$ kürzen. Es ist

$$(2x^2+x-1) : \left(x-\frac{1}{2}\right) = 2x+2 = 2(x+1)$$

und

$$(4x^2-1) : \left(x-\frac{1}{2}\right) = 4x+2 = 2(2x+1).$$

Daher folgt

$$\frac{2x^2+x-1}{4x^2-1} = \frac{(x+1)}{(2x+1)} \qquad \text{für } x \neq \frac{1}{2},$$

und also $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x+1)}{(2x+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$

4) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{3x}$ hat für $x \to 0$ keinen Grenzwert.

4.4 Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $a \in D$, falls gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

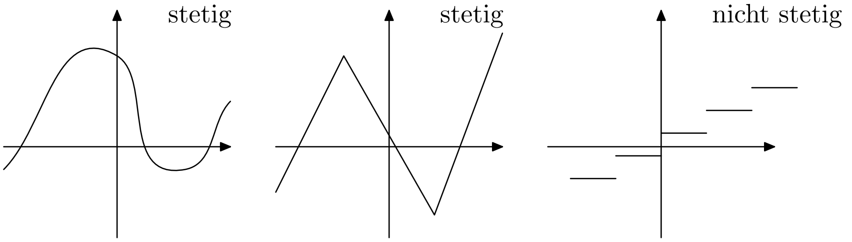
Ist f in jedem Punkt aus D stetig, so heißt f *stetig.*

Beispiel. Alle rationalen Funktionen

$$x \longmapsto \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Ist D ein Intervall, so bedeutet Stetigkeit anschaulich, dass man den Graph in einem Strich durchzeichnen kann.



Rechenregeln für stetige Funktionen

1) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}. \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

stetig in a. Gilt zusätzlich $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in a.

2) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$. Sei $a \in D$. Sind f in a und g in $f(a)$ stetig, so ist das Kompositum $g \circ f$ in a stetig.

Beispiel. Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2$. Da beide Funktionen stetig sind, ist $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (3x)^2$ stetig. (Dabei ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2$, vergleiche 2.4.)

4.5 Umkehrfunktion

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, heißt *streng monoton wachsend,* wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt; sie heißt *streng monoton fallend,* wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

das *abgeschlossene Intervall* von a bis b. Es gilt:

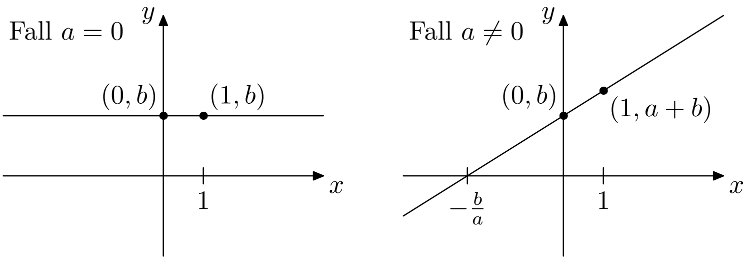
- Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, so bildet f das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[f(a), f(b)]$ ab. Nach 2.3 existiert also eine Umkehrfunktion
$$u : [f(a), f(b)] \to [a, b],$$
die ebenfalls stetig und streng monoton wachsend ist.
- Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton fallend, so bildet f das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[f(b), f(a)]$ ab. Also existiert eine Umkehrfunktion
$$u : [f(b), f(a)] \to [a, b],$$
die ebenfalls stetig und streng monoton fallend ist.

Die Standardbezeichnung für die Umkehrfunktion von f ist f^{-1}, vergleiche 2.3. Wegen der Verwechslungsgefahr mit der Funktion $\frac{1}{f}$ verwenden wir lieber die Bezeichnung u oder u_f für die Umkehrfunktion von f.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, heißt *monoton wachsend,* wenn $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt; sie heißt *monoton fallend,* wenn $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
Ist eine Funktion stetig und monoton wachsend oder monoton fallend, so braucht im Allgemeinen keine Umkehrfunktion zu existieren.

4.6 Lineare Funktionen

Eine Funktion der Form
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b,$$
mit vorgegebenen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ nennt man *lineare Funktion.* Sie ist stetig. Der Graph von f
$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
beschreibt eine Gerade. Diese Gerade geht durch die Punkte $(0, f(0)) = (0, b)$ und $(1, f(1)) = (1, a + b)$:



Ist $a = 0$, dann ist f die *konstante Funktion* mit $f(x) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $a > 0$ ist f streng monoton wachsend, für $a < 0$ streng monoton fallend. Ist $a \neq 0$, dann erhält man die *Nullstelle* $x = -\frac{b}{a}$ von f durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.
Wenn $a \neq 0$ ist, dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, bijektiv und hat also eine stetige Umkehrfunktion (vergleiche 4.5). Um sie zu bestimmen, löst man die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf:

$$ax + b = y \iff x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Vertauscht man jetzt noch die Bezeichnungen x und y, dann erhält man als Umkehrfunktion von f die Funktion

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

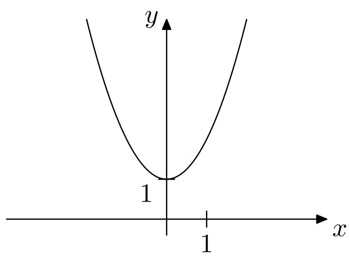
Die Funktion u ist ebenfalls linear, und ihr Graph beschreibt eine Gerade durch die Punkte $(0, u(0)) = (0, -\frac{b}{a})$ und $(b, u(b)) = (b, 0)$.

4.7 Quadratische Funktionen

Funktionen von der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

mit vorgegebenen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bezeichnet man als *quadratische Funktionen.* Quadratische Funktionen sind stetig.
Ein Beispiel ist die Funktion f, die durch $f(x) = x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist.



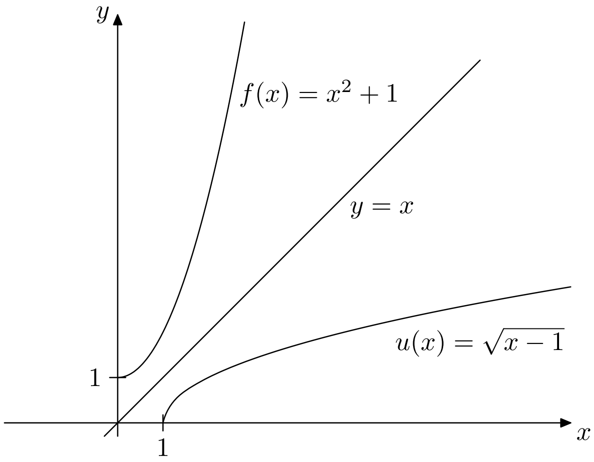
Diese Funktion hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Außerdem gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
In welchem Bereich ist f umkehrbar? Schränkt man f auf die $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqslant 0$ ein, dann ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 1}, \quad x \mapsto x^2 + 1,$$

streng monoton wachsend und bijektiv. Sie hat die Umkehrfunktion

$$u : \mathbb{R}_{\geqslant 1} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad x \mapsto \sqrt{x-1}.$$

Der Graph der Umkehrfunktion u von f geht durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ aus f hervor:



4.8 Gerade und ungerade Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und gelte für $x \in D$ auch $-x \in D$. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, heißt

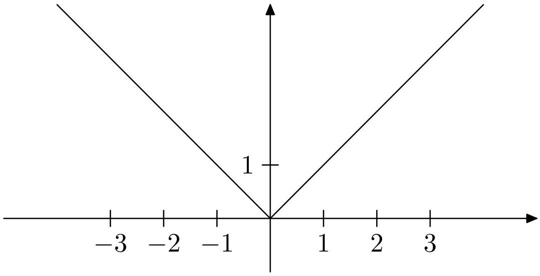
- *gerade,* wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt,
- *ungerade,* wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Zum Beispiel ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$, eine gerade Funktion. Dagegen ist $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3x}$ eine ungerade Funktion.

4.9 Die Betragsfunktion

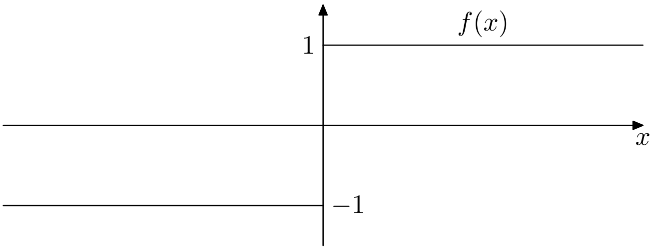
Die *Betragsfunktion* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto |x|$, ist eine stetige Funktion. Sie ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geqslant 0, \\ -x & \text{, falls } x < 0. \end{cases}$$



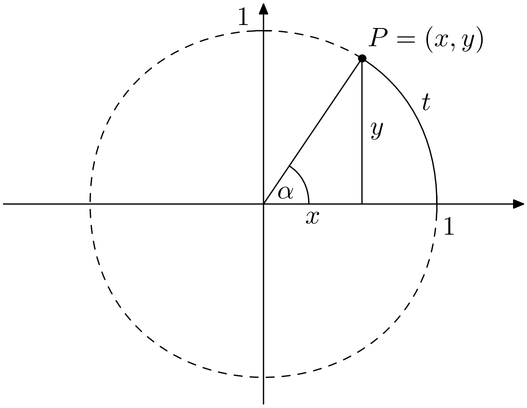
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = |-x|$. Also ist die Betragsfunktion eine gerade Funktion.

Beispiel. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{|x|}$.
Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1$. Also existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht.



4.10 Sinus und Cosinus

Wir betrachten einen Kreis mit Radius 1 und einen Punkt $P = (x, y)$ auf dem Kreis.



Dann hängen die Koordinaten x und y von P von der Größe des Winkels α ab. In der Mathematik ist es allerdings gebräuchlicher, diese Abhängigkeit als Abhängigkeit von der *Bogenlänge* t anzugeben. Wir schreiben deswegen $x = x(t)$ und $y = y(t)$.
Während der Winkel α in Grad gemessen wird (von $0°$ bis $360°$), ist die Bogenlänge eine reelle Zahl. Sie kann alle Werte von 0 bis 2π (der Länge des Kreisumfangs) annehmen. Wir definieren

$$\cos(t) := x(t) \qquad \text{und} \qquad \sin(t) := y(t)$$

und erhalten Funktionen

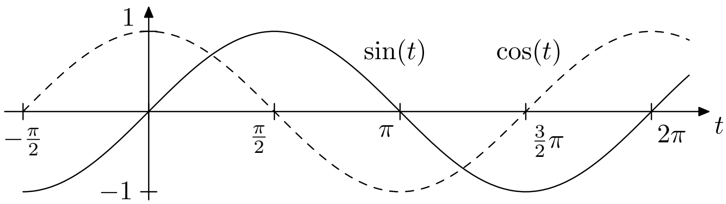
$$\sin : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sin(t),$$

$$\cos : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \cos(t).$$

Hierbei ist $[0, 2\pi[:= \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t < 2\pi\}$ das halboffene Intervall zwischen 0 (eingeschlossen) und 2π (ausgeschlossen).
Man dehnt den Definitionsbereich von sin und cos auf ganz $\mathbb{R}$ aus und erhält stetige Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dafür definiert man:

$$\begin{aligned} \cos(t + 2\pi n) &= \cos(t) \\ \sin(t + 2\pi n) &= \sin(t) \end{aligned} \qquad \text{für alle } t \in [0, 2\pi[\text{ und für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

In der Anschauung entspricht das der Bogenlänge bei mehrmaligem Durchlaufen des Kreisumfangs. Da sich die Werte von sin und cos regelmäßig wiederholen, nennt man diese Funktionen *periodisch* mit der *Periode* 2π.



Die periodischen Funktionen sin und cos eignen sich zum Beispiel dafür, Schwingungsvorgänge oder die Ausbreitung von Wellen zu beschreiben.

Eigenschaften

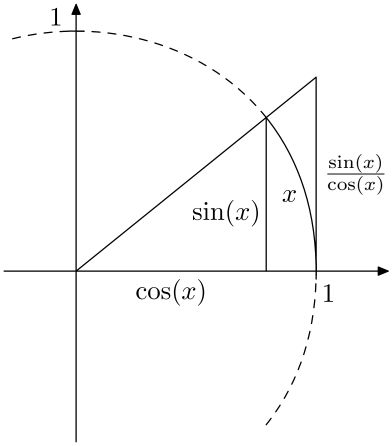
(1) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ und $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, denn nach dem Satz von PYTHAGORAS gilt $\sin^2(t)+\cos^2(t) = 1$ mit den Bezeichnungen $\sin^2(x) := \sin(x) \cdot \sin(x)$ und $\cos^2(x) := \cos(x) \cdot \cos(x)$.

(2) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(t) = -\sin(-t)$ und $\cos(t) = \cos(-t)$. Das heißt sin ist eine ungerade Funktion und cos ist eine gerade Funktion.

(3) Additionstheoreme:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Beispiel.
Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, für $x \to 0$ einen Grenzwert?



Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\underbrace{\cos(x)}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\leqslant x} \leqslant 1 \cdot x \leqslant \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$\Longrightarrow \quad \cos(x) \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\cos(x)} \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)$$

Da $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)}$ gilt, folgt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Da $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ eine gerade Funktion ist, also $f(x) = f(-x)$ für $x \neq 0$ gilt, folgt insgesamt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Damit ist die Funktion

$$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig.

Die Umkehrfunktionen arcsin **und** arccos

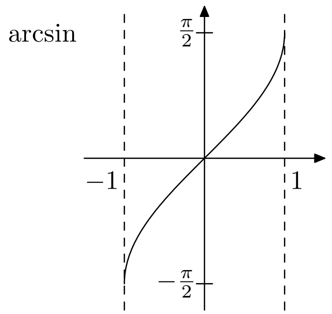
Im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ ist die Funktion sin streng monoton wachsend. Sie bildet dieses Intervall bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion

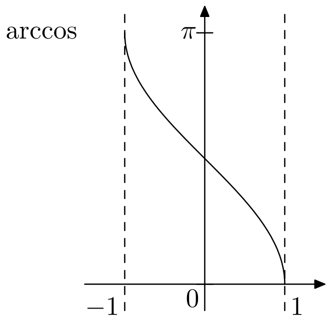
$$\arcsin : [-1, 1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

heißt *Arcus-Sinus.*
Die Funktion cos ist im Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend und bildet dieses Intervall bijektiv auf das Intervall $[-1,1]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

heißt *Arcus-Cosinus.*





4.11 Die Exponentialfunktion

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Man beweist das mit dem sogenannten „Quotientenkriterium". Es ist

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

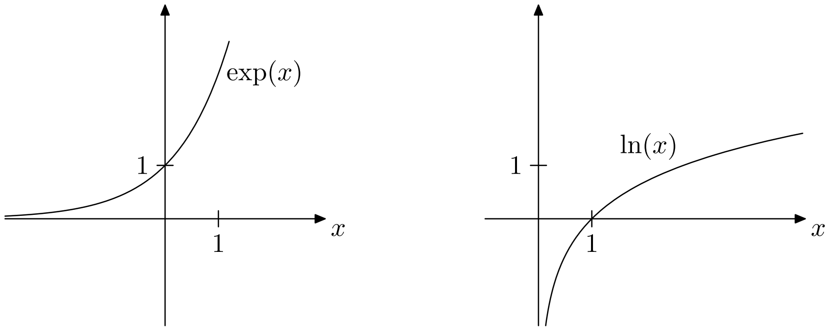
die berühmte EULER*sche Zahl* $e \approx 2{,}718281828$
Die *Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto \exp(x),$$

ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend. Ihre Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x),$$

heißt *natürlicher Logarithmus.*



Es ist $\exp(0) = 1 = e^0$, $\ln(1) = 0$, sowie $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Es gelten die „Funktionalgleichungen"

$$\begin{array}{llcll} (1) & \exp(x+y) & = & \exp(x)\cdot\exp(y) & \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \\ (2) & \ln(xy) & = & \ln(x) + \ln(y) & \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_{>0} \end{array}$$

Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} \exp(n) &= \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}}) = \underbrace{\exp(1)\cdots\exp(1)}_{n \text{ mal}} \\ &= (\exp(1))^n = e^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

sowie

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = e^{-n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Allgemeiner gilt:

$$e^{\frac{m}{n}} = (e^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Daher schreibt man gewöhnlich e^x statt $\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist dann

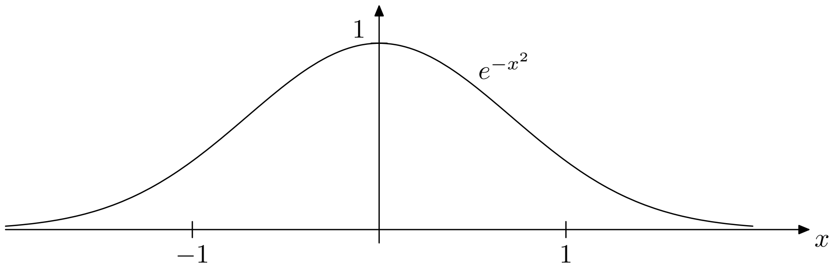
$$(1') \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, gelten

$$\begin{array}{lrl} (3) & e^{\ln(x)} = x & \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0} \\ (4) & \ln(e^x) = x & \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \end{array}$$

vergleiche 2.3.

4.12 Gaußsche Glockenkurve



Für die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$, gilt $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$, und da sie eine gerade Funktion ist auch $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$. Sie wird vor allem in der Stochastik als „Normalverteilung“

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

benutzt.

4.13 Allgemeine Potenz

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben. Setze

$$a^x := e^{x \ln(a)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für $x = n \in \mathbb{N}$ ist dies die übliche Potenz a^n, denn

$$\begin{aligned}
e^{n \ln(a)} &= e^{\ln(a)+\cdots+\ln(a)} && (n \text{ Summanden}) \\
&= e^{\ln(a)} \cdots e^{\ln(a)} && \text{nach (1) aus 4.11} \\
&= a \cdots a && \text{wegen } e^{\ln(a)} = a \\
&= a^n.
\end{aligned}$$

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

(5) $$(a^x)^y = a^{xy}$$

(6) $$a^x b^x = (ab)^x$$

(7) $$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

(8) $$\ln(a^x) = x \ln(a)$$

Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto a^x$, ist stetig. Sie ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend. Ihre Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_a(x),$$

heißt *Logarithmus zur Basis a*. Es gilt $\ln = \log_e$.
Die allgemeine Potenz tritt bei Wachstums- und Zerfallsphänomenen auf. Sei B_0 der Anfangsbestand, und sei B_x der Bestand nach x Zeiteinheiten. Nimmt der Bestand in jeder Zeiteinheit um $p\%$ zu, so ist

$$B_x = B_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x .$$

Im Gegensatz zur Zinseszinsberechnung aus 3.1 ist hier $x \in \mathbb{R}_{>0}$ zugelassen. Nimmt der Bestand in jeder Zeiteinheit um $p\%$ ab, so ist

$$B_x = B_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x = B_0\, e^{-\beta x} \quad \text{mit } \beta = -\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Hierbei ist $0 < p < 100$.
Die *Halbwertzeit* beim radioaktiven Zerfall ist die Zeit t, nach der die Anfangsmasse B_0 einer radioaktiven Substanz zur Hälfte zerfallen ist. Es gilt also $B_t = B_0 \cdot \frac{1}{2}$.
Um die Halbwertzeit t zu ermitteln, berechnet man die *Zerfallskonstante* β und löst die Gleichung $B_0\, e^{-\beta t} = B_0 \cdot \frac{1}{2}$ nach t auf. Letzteres geschieht durch Kürzen von B_0 und Anwenden des Logarithmus' auf beiden Seiten, wodurch sich $-\beta t = -\ln(2)$ und also $t = \frac{\ln(2)}{\beta}$ ergibt (siehe Aufgabe 4.12).

4.14 Aufgaben

Aufgabe 4.1. Zeichnen Sie den Graph für

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Aufgabe 4.2. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion $x \mapsto f(x)$, wenn

a) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$,

b) $f(x) = \frac{x-3}{x-x^3}$,

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$,

d) $f(x) = \frac{x^2}{4x^2-16}$.

Aufgabe 4.3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$,

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$,

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{x}$. Hierbei bedeutet $\sin^2(x) := \sin(x) \cdot \sin(x)$.

Aufgabe 4.4. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion

$$f : x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2(x)}.$$

Dabei ist wieder $\sin^2(x) := \sin(x) \cdot \sin(x)$.
Ermitteln Sie, in welchen Punkten f stetig ist.

Aufgabe 4.5. Untersuchen Sie, ob die Funktion f (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

a) $f(x) = x^4$,

b) $f(x) = x^3 + 2x$,

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ für $x \geqslant 1$,

d) $f(x) = |x^2 - 2x + 1|$ für $x \geqslant 1$.

Aufgabe 4.6. Untersuchen Sie, ob die Funktion f in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich gerade oder ungerade ist, in den Fällen:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$,

b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$,

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$,

d) $f(x) = 4 \cdot \sin^2(x)$, dabei gilt wieder $\sin^2(x) := (\sin(x))^2$.

Aufgabe 4.7. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto f(x)$, in den Fällen:

a) $f(x) = \frac{1}{2x}$,

b) $f(x) = \sqrt{3x}$.

Aufgabe 4.8. Für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[:= \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ sei

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

der *Tangens.* Zeichnen Sie den Graph der Umkehrfunktion *Arcus-Tangens* $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Aufgabe 4.9. Die *hyperbolischen* Funktionen sind definiert durch

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \textit{(Cosinus hyperbolicus)}$$

und

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \textit{(Sinus hyperbolicus).}$$

Verifizieren Sie die folgenden *Additionstheoreme* für die hyperbolischen Funktionen durch Einsetzen obiger Definitionen und Anwendung der Funktionalgleichung $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$:

a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,

b) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$,

Aufgabe 4.10. a) Zeichnen Sie den Graph von $\cosh$ und von $\sinh$.

b) Nach 4.11 ist $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Ermitteln Sie daraus die Reihendarstellung für $\cosh$ und für $\sinh$.

Aufgabe 4.11. Verifizieren Sie die Gleichung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Hierbei bedeutet $\sinh^2(x) := \sinh(x) \cdot \sinh(x)$ und $\cosh^2(x) := \cosh(x) \cdot \cosh(x)$.

Aufgabe 4.12. a) Eine Bakterienkultur vermehrt sich in jeder Stunde um 60%. Am Anfang sind 1000 Bakterien vorhanden. Wieviele sind es nach 8,4 Stunden?

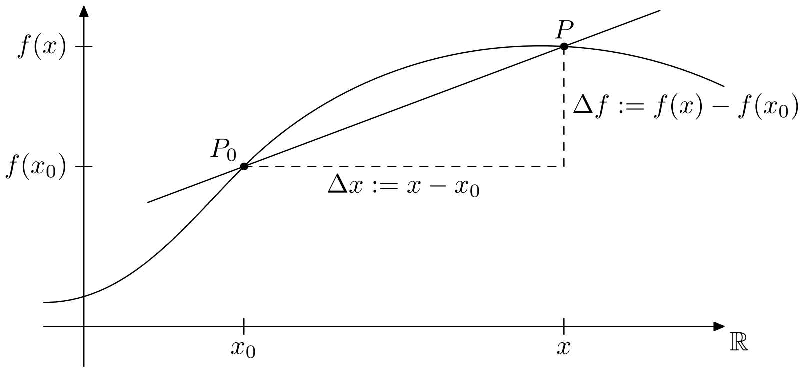
b) Eine radioaktive Substanz nimmt pro Minute um 3% ab. Nach wieviel Minuten ist sie zur Hälfte zerfallen?

c) Welche Halbwertzeit hat eine radioaktive Substanz, die nach 20 Tagen zu 70% zerfallen ist?

5 Differentialrechnung

5.1 Differenzenquotient

Sei f eine Funktion und seien $P_0 = (x_0, f(x_0))$ und $P = (x, f(x))$ zwei verschiedene Punkte in Graph(f). Dann wird durch P_0 und P eine Gerade festgelegt, die man *Sekante* von Graph(f) durch die Punkte P_0 und P nennt.



Der *Differenzenquotient*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

beschreibt die Steigung der Sekante durch die Punkte P_0 und P. Er gibt die *mittlere Änderungsrate* der Funktion im Intervall $[x_0, x]$ an.

Beispiel. Ein Teilchen bewege sich entlang einer Geraden. Sei $s(t)$ die Länge der zur Zeit t zurückgelegten Strecke, gemessen von einem festen Bezugspunkt $s(t_0)$ zum Zeitpunkt $t_0 < t$. Dann ist $\Delta s := s(t) - s(t_0)$ die Länge der im Zeitintervall $[t_0, t]$ zurückgelegten Strecke, und der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ ist die *mittlere Geschwindigkeit* des Teilchens im Intervall $[t_0, t]$.

5.2 Differentialquotient

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $x_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert.

Er heißt dann *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt $x_0 \in D$ (oder *mittlere Änderungsrate* von f an der Stelle x_0).
In 5.1 geht die Sekante für $x \to x_0$ in die Tangente im Punkt P_0 über, und der Differentialquotient beschreibt die Steigung der Tangente im Punkt P_0.
Im Beispiel in 5.1 erhalten wir mit

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} =: v(t_0) =: \dot{s}(t_0)$$

die *Geschwindigkeit* des Teilchens zum Zeitpunkt t_0.
Für die Ableitung von f im Punkt x_0 sind auch die Schreibweisen

$$\frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}$$

gebräuchlich.
Setzt man in dem Differenzenquotienten $h := x - x_0$, so folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

und also

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Hierin ersetzt man dann den Buchstaben x_0 durch x und spricht von Differenzierbarkeit in x.

5.3 Differenzierbare Funktionen

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem $x \in D$ differenzierbar ist. Man erhält dann die Ableitung als Funktion

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f'(x),$$

wobei $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ gilt.
Es gilt

$$f \text{ differenzierbar } \Longrightarrow f \text{ stetig.}$$

Die umgekehrte Implikation ist im Allgemeinen nicht richtig, wie beispielsweise die Betragsfunktion aus 4.9 $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

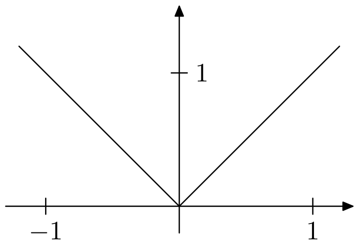
$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x\,, & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -x\,, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

zeigt. Sie ist stetig, jedoch nicht differenzierbar im Punkt $x_0 = 0$.

Man zeigt dies mit der Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, die abwechselnd positive und negative Werte annimmt. Es gilt

$$\frac{|0+h_n|-|0|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}-0}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n.$$

Da die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, existiert der Differentialquotient nicht.



5.4 Beispiele

1) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$, ist differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0,$$

und damit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.

2) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$, ist differenzierbar mit $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn mit der Reihendarstellung $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} &= \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h-1}{h} = e^x \frac{(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\dots)-1}{h} \\ &= e^x(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\frac{h^3}{4!}+\dots).\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} &= \lim_{h\to 0} e^x(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\frac{h^3}{4!}+\dots) \\ &= e^x(1+\frac{0}{2!}+\frac{0^2}{3!}+\frac{0^3}{4!}+\dots) = e^x\cdot 1 = e^x.\end{aligned}$$

3) Mit Hilfe der Additionstheoreme für $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zeigt man, dass beide differenzierbar sind mit

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax$, mit $a \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Denn für $h \neq 0$ ist

$$\frac{a \cdot (x+h) - ax}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

und $\lim\limits_{h \to 0} a = a$.

5) Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, ist differenzierbar mit $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn für $h \neq 0$ ist

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

und $\lim\limits_{h \to 0} 2x + h = 2x$.

6) Allgemeiner ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

5.5 Differentiationsregeln

Seien $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten:

1) Die Funktionen $u + v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto u(x) + v(x)$, und $a \cdot u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto a \cdot u(x)$, $a \in \mathbb{R}$, sind differenzierbar mit

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x) \quad \text{und} \quad (a \cdot u)'(x) = a \cdot u'(x)$$

für festes $a \in \mathbb{R}$.

2) **Produktregel:** Die Funktion $u \cdot v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto u(x)v(x)$, ist differenzierbar mit

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

3) **Quotientenregel:** Ist $v(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion $\frac{u}{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{u(x)}{v(x)}$, differenzierbar mit

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

4) **Kettenregel:** Sei $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine weitere differenzierbare Funktion mit $w(E) \subset D$. Dann ist auch das Kompositum $v \circ w : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto v(w(x))$, differenzierbar mit

$$(v \circ w)'(x) = v'(w(x)) \cdot w'(x).$$

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(2x)$, ist differenzierbar und hat als Ableitung

$$f'(x) \overset{4)}{=} \cos'(2x) \cdot (2x)' \overset{5.4\ 3)}{=} -\sin(2x) \cdot (2x)' \overset{1)}{=} -\sin(2x) \cdot 2.$$

5.6 Umkehrregel

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende oder streng monoton fallende, differenzierbare Funktion mit Umkehrfunktion $u : f(D) \to D$. Ist für $x \in D$ die Ableitung $f'(x) \neq 0$, so ist u in $f(x)$ differenzierbar mit

$$u'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Es ist nämlich $u(f(x)) = x$. Beidseitiges Differenzieren ergibt mit der Kettenregel $u'(f(x))f'(x) = 1$.

5.7 Berechnung einiger Ableitungen

1) Nach 4.10 ist $\arcsin$ die Umkehrfunktion von $\sin$. Nach 5.6 berechnet sich die Ableitung von $\arcsin$ als

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}},$$

da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Mit $y := \sin(x)$ gilt dann

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{für alle } y \in \left]-1, 1\right[.$$

2) Es ist $\arccos$ die Umkehrfunktion von $\cos$. Wie oben berechnet sich die Ableitung von $\arccos$ als

$$\arccos'(\cos(x)) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}},$$

und mit $y = \cos(x)$

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{für alle } y \in \left]-1, 1\right[.$$

3) Der *Tangens* ist definiert durch $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (vgl. Aufgabe 4.8). Nach der Quotientenregel gilt

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Die Funktion $\tan$ ist im Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Für die Umkehrfunktion *Arcus-Tangens*

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

gilt nach 5.6

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)},$$

und mit $y = \tan(x)$

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

4) Nach 4.11 ist $\ln$ die Umkehrfunktion von $\exp$. Nach 5.6 berechnet sich die Ableitung von ln als

$$\ln'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp'(x)} \overset{5.4\ 2)}{=} \frac{1}{\exp(x)}.$$

Setze $y = \exp(x)$, dann ist

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Eine Anwendung hierfür findet sich in

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Denn

$$1 = \ln'(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$\overset{4.13}{=} \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e = e^1 &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{n})^n} && \text{, da } \exp \text{ stetig} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n && \text{, da } e^{\ln(x)} = x. \end{aligned}$$

5) Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^r := e^{r\ln(x)}$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = rx^{r-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0},$$

denn mit der Kettenregel folgt

$$f'(x) = \frac{r}{x} e^{r\ln(x)} = \frac{r}{x} x^r = rx^{r-1}.$$

Insbesondere ist für $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

5.8 Mittelwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist f differenzierbar in allen $x \in \,]a, b[$, so gibt es ein $x_0 \in \,]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Die mittlere Änderungsrate wird mindestens einmal angenommen.

Anwendungen. Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

1. Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f eine konstante Funktion. (Denn für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ folgt aus dem Mittelwertsatz $f(a) = f(b)$.)

2. Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng monoton wachsend. Denn mit $a, b \in I$, $a < b$, folgt aus dem Mittelwertsatz

   $$f(b) = f(a) + \underbrace{f'(x_0)}_{>0}\underbrace{(b - a)}_{>0} > f(a) \quad \text{für alle } a, b \in I, a < b.$$

   Analog folgt aus $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, dass f streng monoton fällt.

3. Regel von DE L'HOSPITAL: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $a \in I$. Für differenzierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ gelte $f(a) = 0 = g(a)$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq a$. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Beispiel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6} .$$

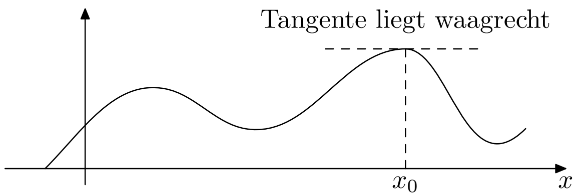
5.9 Lokale Extrema

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f in $x_0 \in I$ ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*), falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt so, dass gilt:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{bzw. } f(x) \geqslant f(x_0)) \qquad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

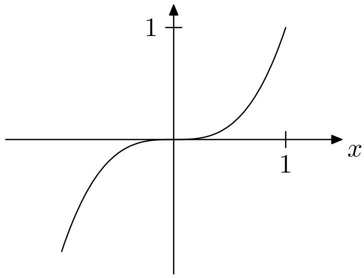
Man nennt x_0 eine *Extremalstelle* von f, wenn f in x_0 eine lokales Maximum oder lokales Minimum besitzt.
Es gelten

- Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in]a, b[$, und sei x_0 eine Extremalstelle von f, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

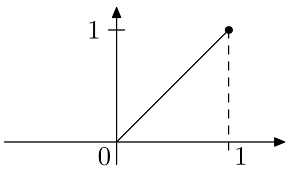


Die umgekehrte Richtung „$f'(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0$ ist Extremalstelle" ist im Allgemeinen nicht richtig, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt.

Hier ist $f'(0) = 0$, aber $x_0 = 0$ ist keine Extremalstelle.



- Liegt eine Extremalstelle x_0 von $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ am Rand des Intervalls ($x_0 = a$ oder $x_0 = b$), so braucht nicht $f'(x_0) = 0$ gelten. Zum Beispiel hat $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$, in $x_0 = 1$ ein Maximum, aber $f'(1) = 1 \neq 0$.



5.10 Kurvendiskussion

Mit dem Begriff *Kurvendiskussion* bezeichnet man das Zusammentragen von prägnanten Eigenschaften einer Funktion f. In der Regel bestimmt man dafür

- den Definitionsbereich von f.
- Falls f nicht überall definiert ist (wie etwa das Beispiel $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ aus 4.10), untersuche man die Definitionslücken auf stetige Ergänzbarkeit.
- Besitzt f Nullstellen?
- Gibt es Extremalstellen? Wenn $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, bestimmt man die Ableitung f' und ihre Nullstellen. Falls auch f' differenzierbar ist, bestimmt man noch die *zweite Ableitung* $f'' := (f')'$. Es gilt: Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in x_0. Ist hingegen $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

- Gibt es Wendepunkte? Wenn die zweite Ableitung f'' existiert und differenzierbar ist, bestimmt man die *dritte Ableitung* $f''' := (f'')'$. Es gilt: Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0 einen *Wendepunkt.*

- Wenn f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, untersuche man das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

- Weist f ein Symmetrieverhalten auf? Ist f zum Beispiel gerade oder ungerade (siehe 4.8).

- Zeichne den Graph von f.

5.11 Aufgaben

Aufgabe 5.1. a) Sei $f(x) = x^3 + \frac{\sin(2x)}{x}$ für $x \neq 0$ in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie $f'(x)$.

b) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Ableitung der *Kotangensfunktion*, definiert durch $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Aufgabe 5.2. Die *hyperbolischen* Funktionen

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}),$$

und

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}),$$

erfüllen die Gleichung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, vergleiche die Aufgaben 4.9 und 4.11. Die Funktion $\sinh$ ist bijektiv, und die Funktion $\cosh$ ist, eingeschränkt auf $\cosh : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 1}$, bijektiv. Als Umkehrfunktionen erhält man die *Area-Funktionen*

$$\operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geqslant 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung von $\cosh$ und von $\sinh$.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen $\operatorname{arcosh}'(y)$ für $y \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\operatorname{arsinh}'(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der *Umkehrregel.*

Aufgabe 5.3. Sei $u(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ und $v(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Bestimmen Sie die Ableitungen $u'(y)$ für $y \in \mathbb{R}_{>1}$ und $v'(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Bemerkung. Die Lösungen von Aufgabe 5.2 und Aufgabe 5.3 müssen übereinstimmen, denn es gelten:

$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{und} \quad \operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \; .$$

Aufgabe 5.4. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

mit Hilfe der Regel von DE L'HOSPITAL.

Aufgabe 5.5. Diskutieren Sie die Kurve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}} \; .$$

Aufgabe 5.6. Wie folgt die Regel von DE L'HOSPITAL aus dem Mittelwertsatz?

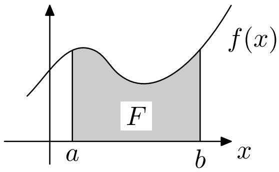
5.12 Ableitungstest

Bestimmen Sie nachfolgende Ableitungen.

$f(x) = \tan(\frac{\pi}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = x\,\tan(\frac{\pi}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\frac{\pi x}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\frac{\pi}{71}) + \ln(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan^2(\pi x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\pi x^2)$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\pi)\,x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\frac{\pi}{3})\,x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\pi x)\,x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = x\,\sin(\frac{11\pi}{71})$	$f'(x) =$
$f(x) = \arctan(x\frac{\pi}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{-x}$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{20x}$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{-2x}$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{-x^2}$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln^2(\tan(x))$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(\tan^2(x))$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(\tan(x^2))$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(x)\,\tan(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{\ln(2x)}{\tan(x)}$	$f'(x) =$
$f(x) = \sqrt[23]{x^{41}}$	$f'(x) =$
$f(x) = 5^x$	$f'(x) =$
$f(x) = 7^2 x$	$f'(x) =$
$f(x) = 7^{2x}$	$f'(x) =$
$f(x) = 7^{\sqrt{2x}}$	$f'(x) =$

6 Integralrechnung

Den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen s_1 und s_2 bestimmt man durch das Produkt $F = s_1 \cdot s_2$. Aber wie bestimmt man den Flächeninhalt F, der von irgendeiner stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{>0}$ begrenzt wird?



Das Ergebnis wird das *Integral von $f(x)\,dx$ von a bis b* sein. Man schreibt dafür

$$F = \int_a^b f(x)\,dx.$$

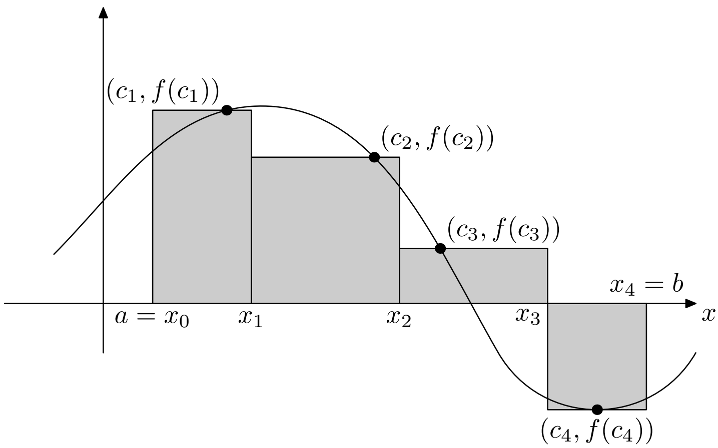
6.1 Integrierbarkeit

Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wähle $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

und erhalte so eine *Unterteilung* U_n von $[a, b]$, die aus den Intervallen $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ bis $[x_{n-1}, x_n]$ besteht. Wähle $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ und bilde die RIEMANN*sche Summe*

$$R(U_n) := f(c_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$



Die RIEMANNsche Summe ist also die Summe der Flächeninhalte von Rechtecken mit der Grundseite $x_i - x_{i-1}$ und der Höhe $f(c_i)$. Der Flächeninhalt von Rechtecken unterhalb der x-Achse wird dabei negativ gezählt. Je kürzer die Grundseiten $x_i - x_{i-1}$ werden, desto besser wird der Flächeninhalt unter dem Graph von f approximiert.
Sei

$$\ell(U_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$$

die Länge des größten Teilintervalls von U_n.
Man nennt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar,* wenn es eine Zahl $\mathcal{I}(f) \in \mathbb{R}$ so gibt, dass für jede Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(U_n) = 0$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} R(U_n)$ existiert und gleich $\mathcal{I}(f)$ ist. Man schreibt dazu

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

und nennt $\mathcal{I}(f)$ das *bestimmte Integral von f über* $[a,b]$. Häufig wird $\mathcal{I}(f)$ auch RIEMANNsches Integral genannt.

B. RIEMANN, 1826–1866

Anstelle von x kann in $\mathcal{I}(f)$ auch ein anderer Buchstabe verwendet werden. Jede stetige und jede monotone Funktion ist integrierbar.

Regeln

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

6.2 Mittelwertsatz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

6.3 Stammfunktion

Seien I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine *Stammfunktion von* f ist eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F' = f.$$

Es gelten

- Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist nach 1) aus 5.4 auch $F + c$ eine Stammfunktion von f, wobei c eine konstante Funktion ist.
- Sind F und G Stammfunktionen von f, dann ist $F - G$ eine konstante Funktion. Denn $F' = f = G' \Longrightarrow (F - G)' = 0 \Longrightarrow F - G$ ist konstant, nach 1. aus 5.8.

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ hat als Stammfunktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Denn $F'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^{(n+1)-1} = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

6.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Seien I ein Intervall, $a, b \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Wie man mit dem Mittelwertsatz 6.2 beweisen kann, ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

eine Stammfunktion von f (also $F' = f$).

2) Für jede Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ von f ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Man nennt eine Stammfunktion F von f auch ein *unbestimmtes Integral* und schreibt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

6.5 Konventionen

Man setzt

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

und

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

für $a < b$.

6.6 Berechnung einiger Integrale

Sei $a < b$ in $\mathbb{R}$. Aus 6.4 folgt:

1) Für festes $r \neq -1$ gilt

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\bigg|_a^b = \frac{1}{r+1}(b^{r+1} - a^{r+1}).$$

2) Es gilt

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\,\bigg|_1^4 = \ln(4) - \ln(1) = \ln(4),$$

denn $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$, vergleiche 4) aus 5.7, und $\ln(1) = 0$.

3) Es ist

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

denn $\exp' = \exp$, vergleiche 2) aus 5.4.

4) Es ist

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C,$$

denn $\sin' = \cos$, vergleiche 3) aus 5.4.

5) Es gilt

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C,$$

denn $(-\cos)' = \sin$, vergleiche 3) aus 5.4.

6) Es gilt
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C,$$
denn $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, siehe 3) aus 5.7.

7) Für $[a,b] \subset]-1,1[$ ist
$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)\Big|_a^b = \arcsin(b) - \arcsin(a),$$
denn $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nach 1) aus 5.7.

6.7 Partielle Integration

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und die Ableitungen f' und g' stetig. Dann gilt nach 5.5 2) und 6.4
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

6.8 Substitutionsmethode

Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung g'. Und sei $f : g([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann folgt aus 5.5 4) und 6.4
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Dazu verwendet man die *Substitution* $u := g(x)$ und die formale Beziehung $du := g'(x)\,dx$. Wenn auf der linken Seite x von a nach b läuft, so läuft auf der rechten Seite $u = g(x)$ von $g(a)$ nach $g(b)$.

Beispiel. Berechne
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)\,dx.$$
Setze $u = g(x) = \sin(x)$ und $f(u) = u^4$. Dann ist
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \\ &= \int_{\sin(0)=0}^{\sin(\frac{\pi}{2})=1} f(u)\,du = \int_0^1 u^4\,du = \frac{u^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Da $u = \sin(x)$ ist, folgt auch

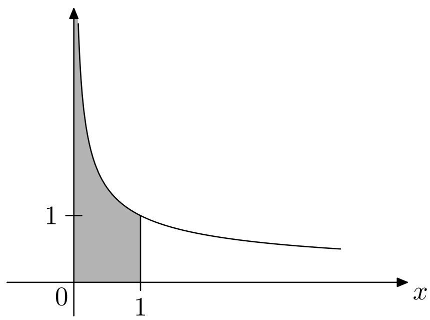
$$\int \sin^4(x)\cos(x)\,dx = \frac{\sin^5(x)}{5} + C.$$

6.9 Uneigentliche Integrale

Mit dem bestimmten Integral erhält man den Flächeninhalt, der von einer Funktion über einem Intervall begrenzt wird. Nun kann es aber passieren, dass eine Funktion in einem Intervall nicht überall definiert ist. In diesen Fällen spricht man von *uneigentlichen Integralen.*

Beispiele. 1) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist für $x = 0$ nicht definiert. Bestimme

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$



Für $0 < \varepsilon < 1$ ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ 0<\varepsilon<1}} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Für die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, findet man die Stammfunktion $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2\sqrt{x}$, die man an der Stelle 0 durch $F(0) = 0$ stetig fortsetzen kann.

2) Für $0 < \varepsilon < 2$ ist

$$\int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_\varepsilon^2 = \ln(2) - \ln(\varepsilon)$$

und $-\ln(\varepsilon) = \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ nach 4.11. Es folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln(\varepsilon)) = \infty.$$

Daher existiert

$$\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$$

nicht.

3) Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt nach 7) aus 6.6

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)\Big|_0^{1-\varepsilon}.$$

Es ist $\arcsin(0) = 0$ und $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

4) Für $0 < \varepsilon < 1$ und $n > 1$ ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-n}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right).$$

Da für $n > 1$ der Limes $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} = \infty$ ist, existiert

$$\int_0^1 \frac{1}{x^n}\,dx$$

nicht.

5) Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\frac{5}{4}(\varepsilon^{\frac{4}{5}} - 1)\right) + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\frac{5}{4}(1 - \varepsilon^{\frac{4}{5}})\right) = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 0.\end{aligned}$$

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ sei über jedem Teilintervall $[a+\varepsilon, b]$ integrierbar, wobei $0 < \varepsilon < b - a$. Dann heißt der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral, sofern er existiert.
Analog ist für $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

definiert.

6.10 Integrale mit unendlichen Grenzen

Manchmal möchte man auch uneigentliche Integrale betrachten, bei denen eine Integrationsgrenze unendlich ist. Zum Beispiel ist

$$\int_a^{\infty} F(s)\,ds$$

die Arbeit, die nötig ist, damit eine Rakete das Schwerefeld der Erde verlassen kann, wobei $F(s)$ die notwendige Kraft an der Stelle s bedeutet.
Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R}_{\geqslant a} \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, R]$ mit $R \in \mathbb{R}_{>a}$ integrierbar. Man setzt

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

Beispiele. 1) Betrachte

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}\,dx$$

für $n > 1$. Für $R \in \mathbb{R}_{>1}$ ist

$$\int_1^R \frac{dx}{x^n} = \left.\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right|_1^R = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{R^{n-1}}\right).$$

Da $\lim\limits_{R \to \infty} \frac{1}{R^{n-1}} = 0$ für $n > 1$ ist, folgt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \qquad \text{für } n > 1.$$

2) Für die Fläche unter der GAUSSschen Glockenkurve (vgl. 4.12) gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Dies zeigt man mit Hilfe der Γ-Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

und Substitution, vgl. [5].

3) Für $n \leqslant 1$ konvergiert

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}\,dx$$

nicht, das heißt

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^n}$$

existiert nicht.

6.11 Aufgaben

Aufgabe 6.1. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{\frac{1}{4}}^{1} 3 \cdot \sqrt{x}\,dx.$$

Aufgabe 6.2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx, \qquad \text{sowie} \qquad \int x\,\sin(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int x^2\,\cos(x)\,dx.$$

Aufgabe 6.3. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(x)\,\cos(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \ln(4x+2)\,dx.$$

Aufgabe 6.4. a) Zeichnen Sie die beiden Kurven

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sqrt{x}\,, \quad \text{und} \quad g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^2\,,$$

und bestimmen Sie den Flächeninhalt $\mathcal{F}$ der von diesen beiden Kurven eingeschlossenen Fläche.

b) Bei konstanter Flächendichte hat der *Schwerpunkt* S der Fläche die Koordinaten

$$x_S = \frac{1}{\mathcal{F}} \int_0^1 x(f(x) - g(x))\,dx \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{1}{2\mathcal{F}} \int_0^1 (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx.$$

Berechnen Sie die Koordinaten x_S und y_S und markieren Sie den Schwerpunkt S in Ihrer Zeichnung.

Aufgabe 6.5. Sei $-1 < x < 1$.

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$ mit der Substitutionsregel.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}\,dx$ mit der Substitutionsregel.

7 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Unter idealisierten Bedingungen ist die Wachstumsrate einer Zelle mit Masse m_0 zu einer Zeit $t = 0$ proportional zur Masse $m(t)$ in jedem Zeitpunkt t mit $t \geqslant 0$. Es gilt also

$$(*) \qquad \frac{dm}{dt}(t) = \alpha\, m(t)$$

mit einer Proportionalitätskonstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$m(t) = ce^{\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

erfüllt Gleichung $(*)$, denn

$$m'(t) = \alpha ce^{\alpha t} = \alpha m(t).$$

Man schreibt meist $m = ce^{\alpha t}$ und sagt, dass m eine *Lösung* der Differentialgleichung $m' = \alpha m$ ist.
Aus der *Anfangsbedingung* $m(0) = m_0$ kann man die Konstante c bestimmen.

$$m_0 = m(0) = ce^{\alpha 0} = c$$

Daraus ergibt sich die Lösung $m = m_0 e^{\alpha t}$.

7.1 Was ist eine Differentialgleichung?

Eine *Differentialgleichung (Dgl.)* ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion y und deren Ableitungen vorkommen.
Die höchste vorkommende Ableitung heißt die *Ordnung* der Differentialgleichung.

Beispiele. 1) Es ist $y' - \alpha y = 0$ eine Differentialgleichung erster Ordnung. Man löst dann nach y' auf und schreibt $y' = \alpha y$.

2) $y' = 2xy^2 + 2x$ ist eine Differentialgleichung erster Ordnung.

3) $y'' = -y$ ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ein weiteres Beispiel für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist in Aufgabe 7.4 gegeben.

Eine *Lösung* einer Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion y, die die Differentialgleichung erfüllt. Sie hängt meist von einer oder mehreren Integrationskonstanten ab. Beispielsweise ist $y = ce^{\alpha x}$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung von 1).
Es ist hier stets y eine Funktion von x, also $y = y(x)$.

7.2 Trennung der Variablen

Sei

$$(*) \qquad y' = f(x)g(y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung. Ist $g(y) \neq 0$, so kann man formal umformen

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \Longrightarrow \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)dx \Longrightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx,$$

wenn $\frac{1}{g}$ und f integrierbar sind. In diesem Fall kann man die Differenial-gleichung $(*)$ lösen, indem man die Gleichung

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

nach y auflöst.

Beispiel. Allometrische Differentialgleichung Sei $y' = k\frac{y}{x}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $x, y > 0$. Man probiere den Ansatz

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{k}{x}\,dx &\overset{6.6\ 2)}{\Longrightarrow} \ln(y) = k\ln(x) + c \overset{4.13\ (8)}{=} \ln(x^k) + c \\ &\Longrightarrow e^{\ln(y)} = e^{\ln(x^k)}e^c \\ &\Longrightarrow y = x^k e^c\end{aligned}$$

Zur Probe differenziert man

$$y' = kx^{k-1}e^c = k\frac{x^k e^c}{x} = k\frac{y}{x}$$

und hat dadurch tatsächlich die Ausgangsdifferentialgleichung erhalten.

7.3 Übersicht von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Typ		Lösung oder Lösungsweg
I	$y' = f(x)$	$y = \int f(x)\,dx$
II	$y' = a(x)\,y$	$y = ce^{A(x)}$ mit $A'(x) = a(x)$ und c konstant
III	$y' = a(x)\,y + b(x)$ *Variation der Konstanten*	$y = e^{A(x)} \cdot \int b(x)e^{-A(x)}\,dx$ mit $A'(x) = a(x)$.
IV	$y' = f(x)\,y + g(x)\,y^r$ $r \neq 1$, Bernoulli-Dgl.	Substitution: $z = y^{1-r}$ ergibt Typ III: $z' = (1-r)f(x)\,z + (1-r)g(x)$
V	$y' = f(x)\,g(y)$ *Trennung der Variablen*	Löse folgende Gleichung nach y auf: $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$
VI	$y' = g(y)$ (Spezialfall von Typ V)	Löse folgende Gleichung nach y auf: $\int \frac{1}{g(y)}dy = x + C$
VII	$y' = f(\frac{y}{x})$	Substitution: $z = \frac{y}{x}$ ergibt Typ V: $z' = \frac{1}{x}\,(f(z) - z)$
VIII	$y' = f(ax + by + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$	Substitution: $z = ax + by + c$ ergibt Typ VI: $z' = a + b\,f(z)$
IX	$y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ spezielle Ricatti-Dgl.	Substitution: $z = \frac{1}{y}$ ergibt Typ VII: $z' = -a - b\,(\frac{z}{x})^2$

II: Setzt man $y = ce^{A(x)}$, so folgt mit der Kettenregel

$$y' = A'(x)\,ce^{A(x)} = a(x)\,y.$$

III: Setzt man $y = e^{A(x)}c(x)$ und variiert damit sozusagen die Konstante c, so folgt aus der Produktregel

$$y' = A'(x)e^{A(x)}c(x) + e^{A(x)}c'(x) = a(x)\,y + e^{A(x)}c'(x).$$

Ein Vergleich mit der Gleichung $y' = a(x)\,y + b(x)$ ergibt nun $e^{A(x)}c'(x) = b(x)$. Daraus folgt $c'(x) = b(x)e^{-A(x)}$ und also $c(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,dx$. Dies in $y = e^{A(x)} \cdot c(x)$ eingesetzt, ergibt die oben in III angegebene Lösung.

IV: Ist $z = y^{1-r}$ und $y' = f(x)\, y + g(x)\, y^r$, so folgt nach Kettenregel und durch Einsetzen

$$\begin{aligned} z' &= (1-r)y^{-r}y' = (1-r)(y^{-r}f(x)y + g(x)) \\ &= (1-r)(f(x)y^{1-r} + g(x)) = (1-r)(f(x)z + g(x)). \end{aligned}$$

VII: Ist $z = \frac{y}{x}$, so folgt

$$z' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

VIII: Ist $z = ax + by + c$, so folgt $z' = a + b\,y' = a + b\,f(z)$.
IX: Ist $z = \frac{1}{y}$, so folgt $z' = -\frac{1}{y^2}\,y' = -\frac{1}{y^2}\,(ay^2 + \frac{b}{x^2}) = -a - b\,(\frac{z}{x})^2$.

7.4 Die Differentialgleichung $y' = a(x)y$

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist

$$y = ce^{A(x)}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y.$$

Es ist nämlich $y' = A'(x)ce^{A(x)} = a(x)y$ nach der Kettenregel.
Ist eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, so wähle als Stammfunktion

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt. \tag{1}$$

Es ist dann $A(x_0) = 0$, und daher bestimmt sich die Konstante c zu $c = ce^{A(x_0)} = y(x_0) = y_0$.

Beispiel. Löse die Differentialgleichung $y' - \cos(x)y = 0$.

1. Bestimme den Typ gemäß Übersicht 7.3. Es ist $y' - \cos(x)y = 0$ vom Typ II.

2. Eine Stammfunktion von $\cos$ ist $\sin$. Erhalte damit die allgemeine Lösung $y = ce^{\sin(x)}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

   Ist die Anfangsbedingung $y(\pi) = 2$ vorgegeben, so gilt nach (1)

$$A(x) = \int_{\pi}^{x} \cos(x) = \sin(x) - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = \sin(x).$$

Die spezielle Lösung für die Anfangsbedingung $y(\pi) = 2$ ist damit

$$y = 2e^{\sin(x)}.$$

7.5 Übungsbeispiel

Löse die Differentialgleichung

$$y' = (x+y)^2.$$

Nach Übersicht 7.3 ist diese Differentialgleichung vom Typ VIII. Mit der Substitution $z = x + y$ ist dann $z' = 1 + y' = 1 + (x+y)^2 = 1 + z^2$.
Die Differentialgleichung

$$z' = 1 + z^2$$

ist vom Typ VI. Versuche daher die Gleichung

$$\int \frac{1}{1+z^2}\, dz = x + c$$

nach z aufzulösen. Es ist nach 6) aus 6.6 bis auf eine additive Konstante

$$\int \frac{1}{1+z^2}\, dz = \arctan(z),$$

und damit

$$\arctan(z) = x + c \Longrightarrow z = \tan(x+c)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Nach Rücksubstitution $y = z - x$ erhält man

$$y = \tan(x+c) - x.$$

Eine Probe $y' \overset{5.7\ 3)}{=} 1 + \tan^2(x+c) - 1 = (x+y)^2$ bestätigt das Ergebnis.

7.6 Anwendungsbeispiel

Für den Dampfdruck $p = p(T)$ einer Flüssigkeit bei absoluter Temperatur T gilt näherungsweise die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_0 + (C_p - C)T}{RT^2} p,$$

wobei C die Molekülwärme der Flüssigkeit, C_p die Molwärme des Dampfes, q_0 die Verdampfungswärme bei $T = T_0$ und R die Gaskonstante ist.

Die Differentialgleichung ist vom Typ II. Eine Lösung mit der Anfangsbedingung $p(T_0) = p_0$ ist
$$p = p_0 e^{P(t)}$$
mit
$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{T_0}^{T} \frac{q_0 + (C_p - C)t}{Rt^2}\, dt = \left(-\frac{q_0}{Rt} + \frac{C_p - C}{R} \ln(t) \right) \Big|_{T_0}^{T} \\ &= -\frac{q_0}{RT} + \frac{q_0}{RT_0} + \frac{C_p - C}{R} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right). \end{aligned}$$
Daher ist
$$p = p_0 \cdot e^{P(t)} = p_0 e^{\frac{-q_0}{RT}} \cdot e^{\frac{q_0}{RT_0}} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{C_p - C}{R}} = \mathrm{const} \cdot e^{\frac{-q_0}{RT}} \cdot T^{\frac{(C_P - C)}{R}}.$$

7.7 Aufgaben

Aufgabe 7.1. Ermitteln Sie eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Ableitung
$$F'(x) = 4\left(3 \sin^2(x) + 4 \sin(x) + 2\right) \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 7.2. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen und bestätigen Sie jeweils Ihr Ergebnis durch Differenzieren der ermittelten Lösung.

a) $y' = \cos(x)\, y + e^{\sin(x)}$,

b) $y' - y^2 \sin(x) = 0$.

Aufgabe 7.3. Sei $-1 < x < 1$. Lösen Sie die Differentialgleichung
$$y' + \frac{x}{1 - x^2}\, y = x \sqrt{y}\,.$$

Aufgabe 7.4. a) Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form
$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \text{ mit } a_1, a_0 \in \mathbb{R}\,.$$
Die dazu gehörige *charakteristische Gleichung* $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ besitze zwei verschiedene reelle Lösungen λ_1 und λ_2 . Bilden Sie die erste und zweite Ableitung von
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (\text{mit Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$
und zeigen Sie, dass y die Differentialgleichung $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$ erfüllt und somit eine Lösung ist. (Man nennt y die *allgemeine Lösung.*)

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'' - y' - 2y = 0\,.$$

8 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *Kurve im* $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

mit stetigen Funktionen $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_i(t)$, für $i = 1, \dots, n$.

Beispiele. 1. Die Bewegung eines Massenpunktes im $\mathbb{R}^3$ wird durch eine Kurve beschrieben. Man setzt $n = 3$ und fasst t als Zeit auf. Dann ist

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

der Ort im dreidimensionalen Raum, an dem sich der Massenpunkt zum Zeitpunkt t aufhält.

2. **Kreis im $\mathbb{R}^2$:** Sei $n = 2$ und $r > 0$. Ein Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r wird zum Beispiel durch die Kurve

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a + r\cos(t), b + r\sin(t))$$

umrandet. In Vektorschreibweise wird diese Kurve durch

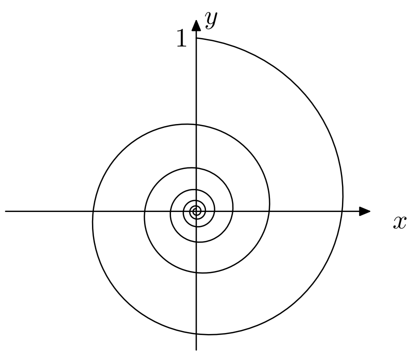
$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben (vergleiche 12.2 und 12.3).

3. **Logarithmische Spirale:** Sei $n = 2$. Die Kurve

$$f : [0, 12\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2\pi}} (\sin(t), \cos(t))$$

macht 6 Umdrehungen um den Punkt $(0, 0)$, wobei sie sich immer stärker an diesen Punkt annähert. Nach jeder Umdrehung hat sich der Abstand zu $(0, 0)$ halbiert.



In Vektorschreibweise wird die Kurve durch

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben (vergleiche Titelbild).

4. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Graph-Abbildung

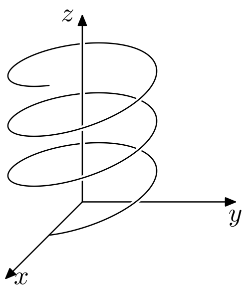
$$\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, f(t))$$

eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

5. **Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$:** Seien $r > 0$ und $c \neq 0$ reelle Zahlen. Die Kurve

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), ct)$$

wird auch als „Schraubenlinie“ bezeichnet.



9 Funktionen mehrerer Veränderlicher

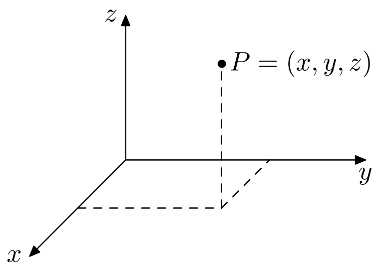
Die meisten Vorgänge in der Natur hängen von mehreren Ursachen ab. Bei ihrer Modellierung hat man daher mehrere Veränderliche zu berücksichtigen.

Beispiele. 1. OHMsches Gesetz:

$$I = \frac{U}{R},$$

wobei I die Stromstärke, U die Spannung und R der Widerstand ist. Man kann U und R unabhängig voneinander verändern und erhält I als Funktion der beiden Veränderlichen U und R. Man schreibt dann auch $I = f(U, R)$.

2. Ein Raum wird von einer Stelle aus erwärmt. Die Temperatur T ist in den verschiedenen Punkten P des Raumes unterschiedlich und hängt zusätzlich von der Zeit t ab. Stellt man die Punkte des dreidimensionalen Raums in einem *cartesischen Koordinatensystem* dar, also $P = (x, y, z)$,



dann erhält man die Temperatur als Funktion der vier Veränderlichen x, y, z und t. Man schreibt dann $T = f(x, y, z, t)$.

9.1 Reellwertige Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des n-dimensionalen Raums. Eine *reellwertige Funktion von n Veränderlichen* ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. Sie ordnet jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ genau eine reelle Zahl $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ zu. Ist $n = 2$ oder $n = 3$, so schreibt man auch $f(x, y)$ oder $f(x, y, z)$.

Beispiele. 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + y^4$.

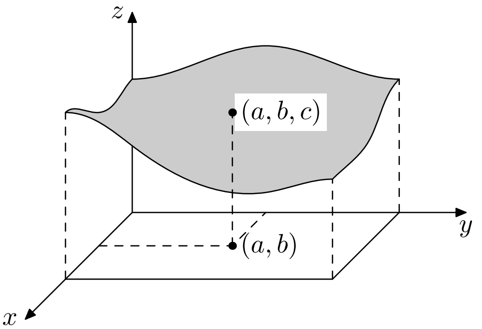
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x - y}$ für $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

9.2 Der Graph einer Funktion

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{Graph}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

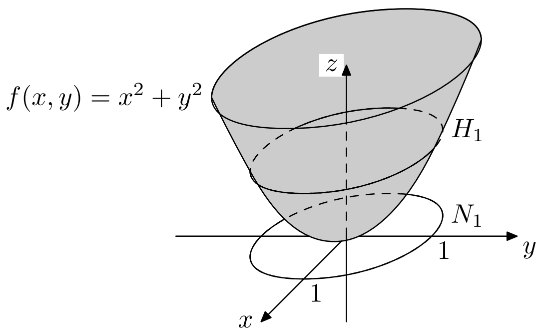
$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D \text{ und } x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Sei $n = 2$ und $D \subset \mathbb{R}^2$. Wir interessieren uns vor allem für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, deren Graph man sich als Fläche im $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen kann.



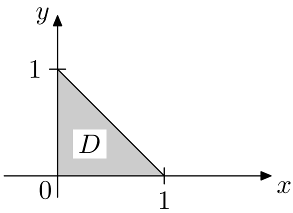
Es ist D eine Teilmenge der (x, y)-Ebene. Über dem Punkt $(a, b) \in D$ liegt der Punkt $(a, b, c) \in \mathrm{Graph}(f)$ mit $c = f(a, b)$.
Um zu einem Schaubild von $\mathrm{Graph}(f)$ zu gelangen, benutzt man als Hilfsmittel:

- Die *Niveaulinie* zu konstantem Niveau $c \in \mathbb{R}$. Dabei handelt es sich um die Menge $N_c := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$ in D.
- Die *Höhenlinie* H_c zu konstanter Höhe c. Das ist der Schnitt der Fläche $\mathrm{Graph}(f)$ mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c\}$. (Für $c = 0$ entspricht das der Niveaulinie N_0.)



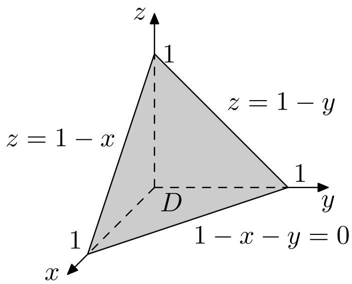
- Zu einem passenden Wert $a \in \mathbb{R}$ den Graph der „partiellen Funktion“ $y \mapsto f(a, y)$, dabei handelt es sich um den Schnitt von Graph(f) mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a\}$.
- Zu passendem $b \in \mathbb{R}$ den Graph der „partiellen Funktion“ $x \mapsto f(x, b)$, dabei handelt es sich um den Schnitt von Graph(f) mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = b\}$.

Sei zum Beispiel $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ und } x + y \leqslant 1\}$. Dann ist D die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$.



Man zeichne den Graph der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 1-x-y =: z$.

- Die Elemente der Niveaulinie zum Niveau 0 erfüllen die Geradengleichung $1 - x - y = 0$ in D.
- Der Graph der Funktion $y \mapsto f(0, y) = 1 - y$ ist eine Gerade in der (y, z)-Ebene, gegeben durch $z = 1 - y$.
- Der Graph der Funktion $x \mapsto f(x, 0) = 1 - x$ ist eine Gerade in der (x, z)-Ebene, gegeben durch $z = 1 - x$.



Der Graph von f ist dann die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$.

Bemerkung. Ist $D = \mathbb{R}^2$ als Definitionsbereich von $f(x, y) = 1 - x - y$ vorgegeben, so ist Graph(f) die Ebene im $\mathbb{R}^3$, die das obige Dreieck enthält.

9.3 Stetigkeit

Für $D \subset \mathbb{R}$ heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$, vergleiche 4.3 und 4.4.

Für Funktionen von n Veränderlichen verallgemeinert sich diese Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, wenn für je n Folgen $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{1,k}) = a_1, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty}(x_{n,k}) = a_n$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in allen Punkten aus D stetig, so heißt f *stetig.*

Beispiel. Man ermittle, ob die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$ stetig ist:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = \frac{1}{k} = y_k$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$. Andererseits ist

$$f(x_k, y_k) = \frac{3 \cdot \frac{1}{k^2}}{2 \cdot \frac{1}{k^2}} = \frac{3}{2}.$$

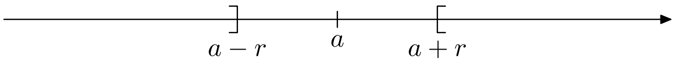
Also ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \frac{3}{2} \neq 0 = f(0,0)$. Die Funktion ist also im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

9.4 Offene Mengen im $\mathbb{R}^n$

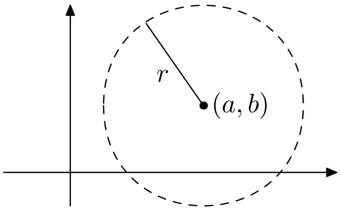
Sei $r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Ein Beispiel für eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$ ist das Innere eines „Balls“ mit Mittelpunkt $(a_1, \ldots, a_n)$ und Radius r, definiert durch

$$B_r((a_1, \ldots, a_n)) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < r\}.$$

Für $n = 1$ ist $B_1(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$ das offene Intervall $]a - r, a + r[$ in $\mathbb{R}$.



Für $n = 2$ ist $B_2((a, b)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$ das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r.



Definition. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn es zu jedem Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein $r > 0$ in $\mathbb{R}$ gibt, für das

$$B_r((a_1, \ldots, a_n)) \subset D$$

gilt.

9.5 Partielle Ableitungen

Betrachte zum Beispiel die Funktion mit drei Veränderlichen

$$f(x, y, z) = 3x^2y + \cos(y) + 4xz^2.$$

Die *partiellen Ableitungen* von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ erhält man, indem man jeweils zwei Veränderliche als konstant ansieht und nach der dritten differenziert:

1. Betrachte y und z als konstant und differenziere nach x. Erhalte die partielle Ableitung
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6xy + 4z^2 =: f_x.$$

2. Betrachte x und z als konstant und differenziere nach y. Erhalte die partielle Ableitung
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3x^2 - \sin(y) =: f_y.$$

3. Betrachte x und y als konstant und differenziere nach z. Erhalte die partielle Ableitung
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 8xz =: f_z.$$

Häufig ist auch nach den partiellen Ableitungen in einem bestimmten Punkt gefragt. Zum Beispiel besitzt die Funktion $f(x,y,z) = 3x^2y + \cos(y) + 4xz^2$ im Punkt $(1,0,1)$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1) = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1) = 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 8.$$

Wir haben hier ein Beispiel einer Funktion, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs nach allen Richtungen „partiell differenzierbar“ ist. Das braucht im Allgemeinen nicht so zu sein.

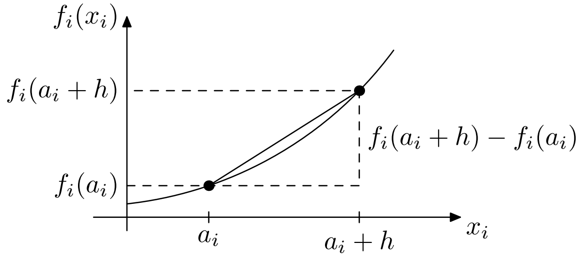
Definition. Sei $n \geqslant 2$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion in n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$. Dann heißt f im Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ *partiell differenzierbar nach* x_i, falls die i-te *partielle Funktion*

$$f_i : x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

in a_i differenzierbar ist. Hierbei ist $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Man nennt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) := f_i'(a_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(a_i + h) - f_i(a_i)}{h}$$

die *partielle Ableitung von* f *nach* x_i im Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$.



Wenn f in jedem Punkt aus D partiell nach x_i differenzierbar ist, so heißt f *partiell differenzierbar nach* x_i, und die Funktion

$$f_{x_i} : D \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_i'(x_i)$$

heißt die *partielle Ableitung* von f nach x_i. Man erhält diese, indem man alle Veränderlichen außer x_i als konstant ansieht und nach x_i differenziert.

9.6 Höhere partielle Ableitungen

Beispiel. Die Funktion $f(x,y) = x^4 \sin(2y)$ ist partiell nach x und y differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 \sin(2y) =: f_x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^4 \cos(2y) =: f_y.$$

Dies sind wiederum partiell differenzierbare Funktionen. Die *zweiten partiellen Ableitungen* von f sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y) = 12x^2 \sin(2y) =: f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = 8x^3 \cos(2y) =: f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f_y}{\partial y}(x,y) = -4x^4 \sin(2y) =: f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y) = 8x^3 \cos(2y) =: f_{yx}.$$

Man kann nun auch noch die dritten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)$ und so weiter bilden.

Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn alle partiellen Ableitungen f_{x_i} und alle zweiten partiellen Ableitungen

$$f_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) := \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

existieren und stetig sind, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
Im Allgemeinen muss das nicht gelten, vergleiche Aufgabe 9.8.

9.7 Extremalstellen

Beispiel. Die Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ hat im Punkt $(0,0)$ ein Minimum, denn $f(0,0) = 0 \leqslant x^2 + y^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Voraussetzung. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren erste und zweite partielle Ableitungen f_{x_i} und $f_{x_i x_j}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ existieren und stetig sind.
(Es gilt dann insbesondere $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.)

Definition. Die Funktion f hat im Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein *lokales Maximum,* wenn es einen Ball $B = B_r((a_1, \ldots, a_n)) \subset D$ gibt, für den

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{für alle } (x_1, \ldots, x_n) \in B$$

gilt. Sie hat in $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein *lokales Minimum,* wenn es einen Ball $B = B_r((a_1, \ldots, a_n)) \subset D$ gibt, für den

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{für alle } (x_1, \ldots, x_n) \in B$$

gilt. Punkte, an denen f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum annimmt, nennt man *lokale Extremalstellen.*

Im Beispiel $f(x,y) = x^2 + y^2$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, also $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
Dies gilt allgemein: Wenn $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ lokale Extremalstelle von f ist, dann folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Die umgekehrte Folgerung ist dagegen im Allgemeinen nicht richtig.

9.8 Extremalbedingungen bei zwei Veränderlichen

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Voraussetzung aus 9.7 für $i, j \in \{1, 2\}$ erfüllt. (Zur Vereinfachung schreiben wir hier x, y statt x_1, x_2.)
Für $(a,b) \in D$ sei folgende Bedingung erfüllt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Dann ist der Punkt (a,b) ein Kandidat für eine lokale Extremalstelle von f, braucht aber keine solche zu sein. Um zu weiteren Bedingungen zu gelangen, definieren wir folgende Größe $\Delta \in \mathbb{R}$ durch

$$\Delta := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2 .$$

Dann gelten:

- Ist $\Delta > 0$, so ist (a, b) eine lokale Extremalstelle von f.
- Ist $\Delta < 0$, so ist (a, b) keine lokale Extremalstelle von f.
- Ist $\Delta > 0$ und gilt
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0,$$
so hat f in (a, b) ein lokales Maximum.
- Ist $\Delta > 0$ und gilt
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0,$$
so hat f in (a, b) ein lokales Minimum.

Ist $\Delta = 0$, dann lässt sich keine so allgemein gültige Aussage treffen. Eine Herleitung der obigen Resultate und etliche Beispiele finden sich zum Beispiel in [8, §173].

Beispiel

Untersuche die Funktion $f(x,y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$ auf Extremalstellen.
1. Schritt: Bilde die ersten und zweiten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 4y =: f_x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 6y^2 =: f_y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y,$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = 4.$$

2. Schritt: Löse das Gleichungssystem $f_x = 0,\ f_y = 0$ in $\mathbb{R}^2$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
& 6x^2 + 4y = 0 \quad \text{und} \quad 4x - 6y^2 = 0 \\
\Longrightarrow\ & y = -\frac{3}{2}x^2 \quad \text{und} \quad x = \frac{3}{2}y^2 \\
\Longrightarrow\ & y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}y^4 = -\frac{27}{8}y^4 \\
\Longrightarrow\ & y = 0 \quad \text{oder} \quad 1 = -\frac{27}{8}y^3 \\
\Longrightarrow\ & y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{2}{3} \qquad (\text{in } \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Für $y = 0$ ergibt sich $x = 0$ und für $y = -\frac{2}{3}$ ergibt sich $x = \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$. Das Gleichungssystem hat demnach die Lösungen $(0,0)$ und $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.
3. Schritt: Prüfe, ob die Lösungen lokale Extremalstellen sind:
Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\right)^2 = 0 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0.$$

Also ist $(0,0)$ keine lokale Extremalstelle von f.
Es ist

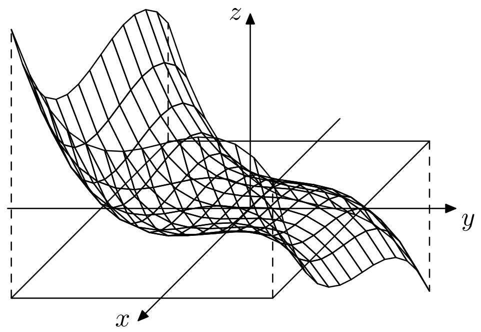
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right)^2 = 8 \cdot 8 - 4^2 = 48 > 0.$$

Also ist $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ eine lokale Extremalstelle von f.

4. Schritt: Entscheide über Maxima oder Minima:
Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 8 > 0.$$

Also hat f in $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ein lokales Minimum.



9.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, deren erste und zweite partielle Ableitungen alle vorhanden und stetig sind. Gefragt ist nach Extremalstellen von f in der Teilmenge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in D \mid g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Man bezeichnet die Eigenschaft $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dabei als *Nebenbedingung.*

Lagrangesche Multiplikatorregel

Bilde eine Hilfsfunktion $L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$ mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ und löse das Gleichungssystem

$$L_{x_1} = 0 \qquad \ldots \qquad L_{x_n} = 0 \qquad L_\lambda = 0,$$

das sich aus den partiellen Ableitungen von L nach $x_1, \ldots, x_n$ und λ zusammensetzt. Überlege dann, welche der Lösungen des Gleichungssystems die gestellte Aufgabe lösen.

Erstes Beispiel

Es sind die *Scheitelpunkte einer Ellipse* zu bestimmen, das sind die Punkte mit dem größten oder kleinsten Abstand zum Nullpunkt. Die Ellipse sei durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 - 5 = 0$ gegeben.
Der Abstand eines Punktes (x, y) zum Nullpunkt ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Um die Punkte mit dem größten oder kleinsten Abstand zu ermitteln, genügt es, das Quadrat $r^2 = x^2 + y^2$ zu betrachten. Es sind also Extremalstellen der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der *Nebenbedingung*

$$x^2 + xy + y^2 - 5 = 0$$

zu bestimmen.
Setze $L = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 5)$ und löse das Gleichungssystem

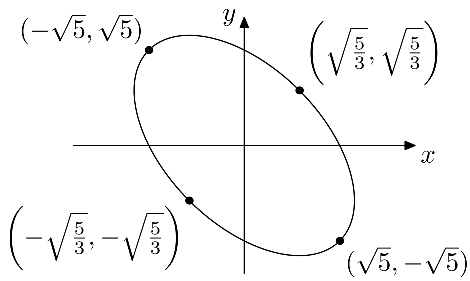
$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda(2x + y) = 0 \\ L_y &= 2y + \lambda(2y + x) = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + xy + y^2 - 5 = 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$0 = yL_x - xL_y = \lambda(y^2 - x^2).$$

Wenn $\lambda = 0$ wäre, müsste auch $x = 0$ und $y = 0$ gelten, wie ebenfalls aus den ersten beiden Gleichungen folgt. Damit wäre die Nebenbedingung nicht erfüllt. Also muss $\lambda \neq 0$ sein. Es folgt $y^2 - x^2 = 0$ und weiter $x = \pm y$.

Aus $x = y$ folgt mit der Nebenbedingung $3x^2 = 5$, also $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Und aus $x = -y$ folgt mit der Nebenbedingung $x^2 = 5$, also $x = \pm\sqrt{5}$. Die vier Scheitelpunkte der Ellipse sind demnach



Zweites Beispiel

Man bestimme drei reelle Zahlen a, b, c, deren Summe gleich 90 und deren Quadratsumme minimal ist. Es ist also eine Minimalstelle der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x + y + z - 90 = 0$ zu bestimmen.
Setze $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 90)$ und löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda = 0 \\ L_y &= 2y + \lambda = 0 \\ L_z &= 2z + \lambda = 0 \\ L_\lambda &= x + y + z - 90 = 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt $x = y = z$. Setze dies in $L_\lambda = 0$ ein. Dann folgt $3x - 90 = 0$ und $x = y = z = 30$.
Der Punkt $(30, 30, 30)$ ist Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + y + z - 90 = 0$. Denn jeder Punkt aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als $(30 + h_1, 30 + h_2, 30 + h_3)$ mit reellen Zahlen h_1, h_2, h_3. Ein Punkt erfüllt die Nebenbedingung genau dann, wenn $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned} &f(30 + h_1, 30 + h_2, 30 + h_3) \\ &\quad= (30 + h_1)^2 + (30 + h_2)^2 + (30 + h_3)^2 \\ &\quad= f(30, 30, 30) + 60(h_1 + h_2 + h_3) + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \\ &\quad= f(30, 30, 30) + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \\ &\quad\geqslant f(30, 30, 30) \end{aligned}$$

für alle Punkte, die die Nebenbedingung erfüllen.

9.10 Aufgaben

Aufgabe 9.1. Sei $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}x + 2y \leqslant 2 \}$ der Definitionsbereich der durch

$$f(x,y) = -\frac{1}{2}x - 2y + 2$$

definierten Funktion. Man zeichne D und den Graph von f.

Aufgabe 9.2. Sei $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$ der Definitionsbereich der durch

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

definierten Funktion. Man zeichne D und den Graph von f.

Aufgabe 9.3. Man ermittle, ob die folgenden auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen im Punkt $(0,0)$ stetig sind:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Aufgabe 9.4. Für ein ideales Gas mit Druck P, Volumen V und Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ mit einer Konstanten c. Man zeige für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial P}\,\frac{\partial P}{\partial V} = -1\,.$$

(Das Produkt hat also nicht den Wert 1, auf den man durch „Kürzen" kommen würde.)

Aufgabe 9.5. Man zeige die Gleichung $xf_x + yf_y = 0$ für die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \qquad \text{und} \qquad f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y^2}}.$$

Aufgabe 9.6. Man bestimme die 1. und 2. partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = x^5 + 2x^3y^2 + 2y^5.$$

Aufgabe 9.7. Man bestimme die 1. und 2. partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1+xy}{1-xy}.$$

Aufgabe 9.8. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Man zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1\,.$

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1\,.$

Die *gemischten partiellen Ableitungen* stimmen also nicht überein.

Aufgabe 9.9. Man untersuche die Funktion $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 9.10. Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5$$

auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 9.11. Man bestimme die Scheitelpunkte der Ellipse, die durch

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$$

beschrieben wird, und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 9.12. Sei $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \text{ und } y < \frac{\pi}{2}\,\}$. Man untersuche die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}\,,\ \ x \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)\,,$$

auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 9.13. Man bestimme drei positive reelle Zahlen, deren Summe gleich 60 und deren Produkt maximal ist.

Aufgabe 9.14. Man bestimme den Flächeninhalt des größten Rechtecks mit achsenparallelen Kanten innerhalb der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

(Es ist also der Maximalwert der Funktion $f(x,y) = 2x \cdot 2y$ unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ zu ermitteln.)

Aufgabe 9.15. Man untersuche die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$ auf lokale Maxima und lokale Minima.

Diskrete Mathematik

10 Kombinatorik

Die *Kombinatorik* beschäftigt sich mit Abzählproblemen in *endlichen Mengen,* also in Mengen mit endlich vielen Elementen wie zum Beispiel $\{1, 2, 3\}$. Gezählt werden „Ereignisse“, die sich aus den Elementen der Menge zusammensetzen, etwa

$$(*) \qquad 3, 1, 1, 1, 2 \qquad \text{oder} \qquad 1, 3, 1, 1, 2.$$

Legt man Wert auf die Reihenfolge der Elemente, so kann man die Ereignisse ähnlich wie in 1.6 durch *Tupel* beschreiben. Zu den Ereignissen aus $(*)$ gehören dann die 5-Tupel $(3, 1, 1, 1, 2) \neq (1, 3, 1, 1, 2)$. Kommt es hingegen nicht auf die Reihenfolge an, so stehen $3, 1, 1, 1, 2$ und $1, 3, 1, 1, 2$ für dasselbe Ereignis.

Weitere interessante Probleme erhält man, wenn man voraussetzt, dass jedes Element der Menge höchstens einmal in dem Ereignis auftreten darf. Man spricht dann von Ereignissen ohne Wiederholung.

Diese kombinatorischen Grundprobleme wollen wir in den folgenden Abschnitten untersuchen. Ein Ereignis, das sich aus k Einträgen zusammensetzt, nennen wir dabei geordnetes *Tupel* oder *k-Tupel,* wenn es auf die Reihenfolge der Einträge ankommt. Spielt die Reihenfolge keine Rolle, so sprechen wir von einer *Kombination* oder *k-Kombination.*

10.1 Anzahl geordneter k-Tupel ohne Wiederholung

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge mit n Elementen, zum Beispiel $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$, und sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten k-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mit $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{M}$ ohne Wiederholung. Also gilt

$$x_i \neq x_j \quad \text{für } i \neq j.$$

Es muss dann notwendig $k \leqslant n$ gelten. Wie viele solcher k-Tupel gibt es? Für x_1 gibt es n Möglichkeiten, ein Element aus $\mathcal{M}$ zu wählen. Hat man x_1 bereits gewählt, bleiben für x_2 noch $(n-1)$ Möglichkeiten. Sind x_1, x_2 festgelegt, so kann man x_3 auf $(n-2)$ Weisen wählen. Führt man dies fort, so hat man bei x_k angelangt, $(n-k+1)$ Möglichkeiten x_k festzulegen. Zählt man nun alle Möglichkeiten zusammen, so ergeben sich

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \tag{1}$$

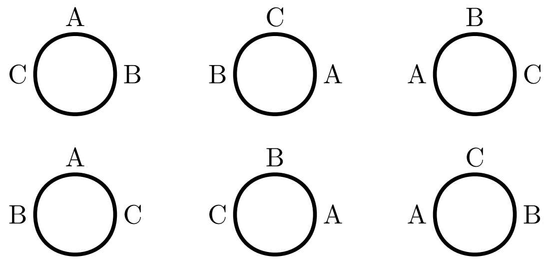
geordnete k-Tupel ohne Wiederholung.
Ist beispielsweise $k = n$, dann ist die Anzahl der geordneten k-Tupel ohne Wiederholung gleich

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 =: n!\,,$$

gesprochen *„n Fakultät“*.

Beispiele. 1) Ein runder Tisch sei für 10 Personen gedeckt. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Sitzordnung?
Es gibt $10! = 10 \cdot 9 \cdots 2 \cdot 1 = 3.628.800$ Möglichkeiten.

Die möglichen Sitzordnungen für drei Personen sind hier aufgezeichnet:



2) Wie viele Wörter mit k Buchstaben kann man aus einem Alphabet mit n Buchstaben bilden, wenn jedes Wort jeden Buchstaben höchstens einmal enthalten darf?
Genauso viele wie in (1) angegeben.

Nun kann es sein, dass in einem Wort Buchstaben mehrfach auftreten. Wie verändert sich die Anzahl der Möglichkeiten unter dieser Voraussetzung?

10.2 Anzahl geordneter k-Tupel mit Wiederholung

Auch hier wird nach Reihenfolge der Buchstaben in einem Wort unterschieden. Da nun Buchstaben in einem Wort wiederholt auftreten dürfen, muss nicht zwingend $k \leqslant n$ sein. Sei also $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Aus den n Elementen in $\mathcal{M}$ lassen sich nun genau n^k geordnete k-Tupel bilden.

Beispiele. 1) Sei $\mathcal{M} = \{a, b\}$, also $n = 2$. Für $k = 3$ gibt es $2^3 = 8$ mögliche 3-Tupel:

$$\begin{array}{cccc} (a,a,a) & (a,a,b) & (a,b,a) & (b,a,a) \\ (a,b,b) & (b,a,b) & (b,b,a) & (b,b,b) \end{array}$$

2) Sei $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, also $n = 3$. Für $k = 2$ gibt es $3^2 = 9$ Möglichkeiten:

$$\begin{array}{ccc} (a,a) & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) \end{array}$$

3) Unser Alphabet besteht aus 26 Buchstaben. Man kann damit 26^8 verschiedene Passwörter der Länge 8 bilden.

10.3 Anzahl von k-Kombinationen mit Wiederholung

Wir betrachten nun Kombinationen von k Elementen aus $\mathcal{M}$, wobei nicht nach der Reihenfolge unterschieden wird. Zusätzlich dürfen Elemente mehrfach vorkommen. Sei wieder n die Anzahl der Elemente von $\mathcal{M}$.
Schreibe für eine Kombination $abc\ldots$ oder $a, b, c \ldots$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Beispiele. 1) Sei $\mathcal{M} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Für $k = 1$ gibt es n Kombinationen der Länge 1, nämlich

$$a_1 \qquad a_2 \qquad \ldots \qquad a_{n-1} \qquad a_n.$$

2) Sei $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, also $n = 3$. Für $k = 2$ reduziert sich Beispiel 2) in 10.2 auf 6 Möglichkeiten

$$aa \qquad ab \qquad ac \qquad bb \qquad bc \qquad cc.$$

Es ist $6 = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{k!}$.

3) Sei $\mathcal{M} = \{a, b\}$, also $n = 2$. Für $k = 3$ reduziert sich Beispiel 1) in 10.2 auf 4 Möglichkeiten

$$aaa \qquad aab \qquad abb \qquad bbb.$$

Es ist $4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{k!}$.

4) Sei $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, also $n = 3$. Für $k = 4$ gibt es die 15 Möglichkeiten

$$\begin{array}{ccccc} aaaa & aaab & aaac & aabb & aabc \\ aacc & abbb & abbc & abcc & accc \\ bbbb & bbbc & bbcc & bccc & cccc. \end{array}$$

Es ist $15 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4!} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{k!}$.

Als Ergebnis halten wir fest: Es lassen sich aus den n Elementen von $\mathcal{M}$ genau

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)}{k!}$$

Kombinationen der Länge k bilden.

10.4 Anzahl von k-Kombinationen ohne Wiederholung

Es sollen wieder k Elemente aus $\mathcal{M}$ kombiniert werden, wobei nicht nach der Reihenfolge unterschieden wird. Diesmal ist aber die Wiederholung von Elementen nicht zugelassen. Es muss also $k \leqslant n$ gelten. Wir fragen uns nach der Anzahl der Teilmengen von $\mathcal{M}$ mit k Elementen, wobei $\mathcal{M}$ wie oben eine Menge mit n Elementen sei.
Sei $a(k)$ die gesuchte Anzahl. Da man jede Teilmenge mit k Elementen auf $k!$ verschiedene Weisen anordnen kann, vgl. 10.1, folgt

$$k! \cdot a(k) \overset{10.1}{=} n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1),$$

und also

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \\ &=: \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Man nennt $\binom{n}{k}$ *Binomialkoeffizient* und sagt „n über k".
Eine Menge mit n Elementen besitzt demnach genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

Beispiel. Beim Zahlenlotto „6 aus 49" gibt es

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ Möglichkeiten.}$$

10.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Folgende Tabelle fasst die vorangegangenen Abschnitte zusammen: Wie viele Ereignisse mit k Einträgen können aus einer Menge mit n Elementen gebildet werden?

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
ohne Wdh., $k \leqslant n$	$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
mit Wdh., $k \in \mathbb{N}$	n^k	$\frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)}{k!}$

10.6 Urnenmodell

Gegeben sei eine Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es k Kugeln zu ziehen?

Modell ohne Wiederholung

Lege bei der Ziehung von k Kugeln keine der Kugeln wieder zurück in die Urne. Betrachte dann die folgenden Fälle:

i.) Es kommt nicht auf die Reihenfolge des Ziehens an. Wie in 10.4 gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten Kugeln zu ziehen.

ii.) Es kommt auf die Reihenfolge des Ziehens an. Wie in 10.1 gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$ Möglichkeiten Kugeln zu ziehen.

Modell mit Wiederholung

Lege bei der Ziehung von k Kugeln jede gezogene Kugel wieder zurück in die Urne.

i.) Die Reihenfolge des Ziehens sei nicht relevant. Dann gibt es wie in 10.3 $\frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)}{k!}$ Möglichkeiten für die Ziehung.

ii.) Nach Reihenfolge des Ziehens wird unterschieden. Nach 10.1 gibt es n^k Möglichkeiten.

10.7 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leqslant n$ ist der *Binomialkoeffizient* wie in 10.4 definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!},$$

wobei $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ für „k Fakultät" steht.
Er hat folgende Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(2) Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$ folgt aus (1)

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Zum Beispiel: Für $n = 8$, $m = 5$ ist $\binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$ und $n - m = 3$, also $\binom{n}{n-m} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$.

(3) Man setzt $0! := 1$. Damit gilt $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie für $n = 0$. Das sogenannte Pascalsche Dreieck ist dann so definiert, dass der $(k+1)$-te Eintrag in der $(n+1)$-te Zeile gerade $\binom{n}{k}$ für $k = 0, \ldots, n$ ist:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Blaise Pascal,
1623-1662

Man sieht, dass jede Zahl Summe der beiden oberen Nachbarn ist, d.h. es gilt folgende Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

(4) Die Summe der Einträge der $n+1$-ten Zeile im PASCALschen Dreieck ist gleich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(5) Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leqslant n$ gilt

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Es ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Teilmengen mit k Elementen einer Menge mit n Elementen, vergleiche 10.4.

10.8 Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge

Eine Menge $\mathcal{M}$ mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen, wie folgende Tabelle zeigt.

k	Anzahl der Teilmengen von $\mathcal{M}$ mit k Elementen
0	$\binom{n}{0} = 1$ Teilmenge mit 0 Elementen, nämlich die leere Menge
n	$\binom{n}{n} = 1$ Teilmenge mit n Elementen, nämlich $\mathcal{M}$ selbst
$1 \leqslant k \leqslant n-1$	$\binom{n}{k}$ nach 10.4

Nach (4) in 10.7 ergibt ein Aufsummieren

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Teilmengen.

10.9 Binomialsatz

Für $a, b \in \mathbb{C}$ gelten

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\ &= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3\\ &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3.\end{aligned}$$

Allgemein gilt für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ der *Binomialsatz*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

10.10 Ein weiteres kombinatorisches Problem

Sei $\mathcal{M} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Menge mit n Elementen.
Wie viele geordnete k-Tupel kann man mit den Elementen von $\mathcal{M}$ bilden, wenn a_1 genau k_1 mal, a_2 genau k_2 mal,..., a_n genau k_n mal auftreten soll. Die Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ seien dabei so vorgegeben, dass $k_1 + \cdots + k_n = k$ gilt. Wird nach Reihenfolge unterschieden, so gibt es genau

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_{n-1}! \cdot k_n!}$$

Möglichkeiten.

Beispiel. Wie viele verschiedene Passwörter mit sechs Buchstaben kann man aus dem Wort **RIFIFI** bilden?
Wende die Formel mit folgenden Zahlen an:

- $n = 3$, da die Menge $\{\mathbf{R}, \mathbf{I}, \mathbf{F}\}$ 3 Elemente hat,
- $k = 6$, da nach Wörtern mit 6 Buchstaben gefragt ist,
- $k_1 = 1$, da R im Wort **RIFIFI** einmal vorkommt,
- $k_2 = 3$, da I im Wort **RIFIFI** dreimal vorkommt,
- $k_3 = 2$, da F im Wort **RIFIFI** zweimal vorkommt.

Es gibt also

$$\begin{aligned}\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} &= \frac{6!}{1! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 6\cdot 2} = 3\cdot 20\\ &= 60\end{aligned}$$

Möglichkeiten.

10.11 Polynomialsatz

Für $k, n \in \mathbb{N}$ und komplexe Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt der *Polynomialsatz*

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}.$$

Bei dieser Schreibweise durchlaufen die Variablen k_1 bis k_n unabhängig voneinander die Zahlen $0, 1, \dots, k$. Über die Werte, für die $k_1 + \cdots + k_n = k$ gilt, wird die Summe gebildet.

10.12 Aufgaben

Aufgabe 10.1. An einem Pferderennen nehmen 10 Pferde teil. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die ersten drei Plätze? Das Ergebnis ist zu begründen.

Aufgabe 10.2. Wie viele verschiedene Würfe sind beim Würfeln mit 4 gleichen sechsseitigen Würfeln möglich?

Aufgabe 10.3. Ein Gewichtssatz besteht aus den Gewichten

$$1\text{g},\ 2\text{g},\ 5\text{g},\ 10\text{g},\ 20\text{g},\ 50\text{g},\ 100\text{g},\ 250\text{g},\ 500\text{g}.$$

Wie viele verschiedene Zusammenstellungen mit jeweils 3 Gewichten sind möglich?

Aufgabe 10.4. Wie viele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man mit den beiden Zahlen 1 und 2 bilden?

Aufgabe 10.5. Für Zahlen $a_1, \dots, a_n$ gilt $\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \cdots + a_n$, vgl. 3.4. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} 2^k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{3} \binom{81}{78+k}.$$

Aufgabe 10.6. Wieviele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man mit den beiden Zahlen 1 und 2 bilden, wenn dabei stets 1 zweimal und 2 dreimal vorkommen soll?

Aufgabe 10.7. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 11 Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI anzuordnen?

Aufgabe 10.8. Wieviele Möglichkeiten gibt es, lauter verschiedene Bücher an die Personen Ahrens, Müller und Schmidt zu verteilen, wenn

a) 4 Bücher zur Verfügung stehen und davon Ahrens 2 Bücher, Müller 1 Buch und Schmidt 1 Buch erhalten soll,

b) 15 Bücher zur Verfügung stehen und davon Ahrens 4 Bücher, Müller 7 Bücher und Schmidt 4 Bücher erhalten soll?

11 Rekursionsprobleme

11.1 Fibonacci-Problem 1202

LEONARDO PISANO FIBONACCI

Hypothese. Kaninchen werden im Alter von einem Monat erwachsen und sind unsterblich. Jedes Kaninchenpaar hat zwei Monate nach der Geburt, sowie nach jedem weiteren Monat jeweils ein junges Kaninchenpaar als Nachwuchs.

Problem. Wieviele erwachsene Kaninchenpaare gibt es nach n Monaten, wenn es zur Zeit $t = 0$ kein Kaninchen in der Gegend gibt und nach einem Monat ein Paar einwandert, das genau 1 Monat alt ist?

Nach n Monaten	Anzahl a_n erwachsener Paare	Anzahl junger Paare
0	0	0
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	5	3
6	8	5
7	13	8
8	21	13
9	34	21

Die ersten beiden Zeilen ($n = 0$ und $n = 1$) beinhalten die Anfangsbedingung. Für die weiteren Zeilen gilt immer

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n .$$

Mit dieser Formel kann man rekursiv a_m für alle $m \in \mathbb{N}$ bestimmen, indem man $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ als Anfangswerte nimmt und dann sukzessive

$$a_2 = a_1 + a_0 \,, \quad a_3 = a_2 + a_1 \,, \quad a_4 = a_3 + a_2 \quad \text{und so weiter}$$

ausrechnet. Um zum Beispiel a_{100} auszurechnen, ist diese Methode aber etwas mühselig. Deshalb lernen wir unten in 11.2 noch eine andere Methode kennen.

11.2 Fibonacci-Rekursion

In 11.1 galt

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge, die aus der Null und allen natürlichen Zahlen besteht.
Man möchte nun eine Abbildungsvorschrift

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, \quad m \mapsto f(m),$$

ermitteln, die folgende zwei Eigenschaften hat:

(1) $f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 1$ „Anfangsbedingung"

(2) $f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$ „Rekursionsbedingung"

Wenn dies gelingt, kann man $f(m)$ sofort für jedes $m \in \mathbb{N}$ ausrechnen, ohne die Werte von $f(m-1)$ und $f(m-2)$ kennen zu müssen.
Als ersten Ansatz nimmt man dafür $f(m) = x^m$, wobei x eine Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ ist. Es gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Rekursionsbedingung (2)

$$\begin{aligned} f(n+2) - f(n+1) - f(n) &= x^{n+2} - x^{n+1} - x^n \\ &= x^n(x^2 - x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Aber die Anfangsbedingung (1) muss nicht erfüllt sein.
Für die *allgemeine Lösung* setzt man daher

$$f(m) = c_1 x_1^m + c_2 x_2^m.$$

Dabei sind $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sind Konstanten, deren genauer Wert noch bestimmt werden muss.
Dieser Ansatz erfüllt ebenfalls die Rekursionsbedingung (2):

$$\begin{aligned} f(n+2) - f(n+1) - f(n) &= c_1 x_1^{n+2} + c_2 x_2^{n+2} - c_1 x_1^{n+1} - c_2 x_2^{n+1} \\ &\quad - c_1 x_1^n - c_2 x_2^n \\ &= c_1 x_1^n \underbrace{(x_1^2 - x_1 - 1)}_{=0} + c_2 x_2^n \underbrace{(x_2^2 - x_2 - 1)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Die Werte der Konstanten c_1 und c_2 bestimmt man nun aus der Anfangsbedingung (1):

$$0 = f(0) = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 = c_1 + c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -c_1$$

und

$$\begin{aligned} 1 = f(1) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 x_1 - c_1 x_2 \\ &= c_1(x_1 - x_2) = c_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) \\ &= c_1 \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Also ist $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Die FIBONACCI-Rekursion wird demnach durch die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, \quad m \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m,$$

gelöst.

11.3 Weitere Rekursionen

Zunächst ein Beispiel, das im Wintersemester 2002/03 eine Klausuraufgabe war: Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die $f(0) = 3$, $f(1) = 7$ und

$$f(n+2) - f(n+1) - 30 f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Lösung. Die *charakteristische Gleichung*

$$x^2 - x - 30 = 0$$

hat die Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 30} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Also: $x_1 = 6$ und $x_2 = -5$. Die *allgemeine Lösung* lautet demnach

$$f(m) = c_1 6^m + c_2(-5)^m.$$

Aus der *Anfangsbedingung* ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(0) = 3 = c_1 + c_2 & \qquad\Longrightarrow\quad c_2 = 3 - c_1 \\
f(1) = 7 = 6c_1 - 5c_2 = 6c_1 - 15 + 5c_1 & \\
= 11c_1 - 15 & \qquad\Longrightarrow 11c_1 = 22 \\
& \qquad\Longrightarrow\quad c_1 = 2 \text{ und } c_2 = 3 - 2 = 1
\end{aligned}$$

Die Aufgabe wird also durch die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, \quad m \mapsto 2 \cdot 6^m + (-5)^m$$

gelöst.

Diese Methode lässt sich auf ähnliche Probleme verallgemeinern. Man erhält so die folgende Liste mit allgemeinen Lösungen zu Rekursionsaufgaben:

Rekursionsbedingung	Charakter. Gleichung	Allgemeine Lösung
$f(n+2) + pf(n+1)$ $+qf(n) = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ (in 11.2: $p = q = -1$)	$x^2 + px + q = 0$ Lösungen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$f(m) = c_1 x_1^m + c_2 x_2^m$, falls $x_1 \neq x_2$, und $f(m) = (c_1 + c_2 m)x_1^m$, falls $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$,
$f(n+2) + pf(n+1)$ $+ qf(n) = b$ mit $p, q, b \in \mathbb{C}$ und $p + q \neq -1$	$x^2 + px + q = 0$	$f(m) = c_1 x_1^m + c_2 x_2^m$ $+\frac{b}{1+p+q}$, falls $x_1 \neq x_2$, und $f(m) = (c_1 + c_2 m)x_1^m$ $+\frac{b}{1+p+q}$, falls $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
$f(n+3) + pf(n+2)$ $+qf(n+1)$ $+rf(n) = 0$ mit $p, q, r \in \mathbb{C}$	$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ Lösungen: vgl. 11.4	$f(m) = c_1 x_1^m + c_2 x_2^m$ $+c_3 x_3^m$, falls x_1, x_2, x_3 alle verschieden
$f(n+1) - qf(n) = b$ mit $q, b \in \mathbb{C}$ (in 3.1 4): $b = 0$)	$x - q = 0$ Lösung: $x = q$	$f(m) = \frac{b}{1-q} + cq^m$, falls $q \neq 1$, und $f(m) = bm + c$, falls $q = 1$

Die Konstanten $c, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ werden dabei analog wie in 11.2 aus einer entsprechenden Anfangsbedingung bestimmt.

11.4 Kubische Gleichungen

Wie aus der Tabelle in 11.3 hervorgeht, sind bei manchen Rekursionsaufgaben auch *kubische Gleichungen* der Form

$$(*) \qquad x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

mit $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ zu lösen (siehe zum Beispiel Aufgabe 11.2).
Sind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ Lösungen von $(*)$, so gilt

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

für alle $x \in \mathbb{C}$. Hat man eine Lösung x_1 von $(*)$ ermittelt, zum Beispiel durch Raten oder Probieren, dann erhält man durch Polynomdivision

$$(x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - x_1)$$

eine quadratische Gleichung, deren Lösungen x_2 und x_3 ebenfalls Lösungen von $(*)$ sind.

Beispiel. Betrachte $x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$. Man sieht, dass $x_1 = 1$ eine Lösung ist. Bilde

$$\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 + 4x - 6) : (x - 1) = x^2 + 2x + 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad 2x^2 + 4x \\
\qquad \underline{-(2x^2 - 2x)} \\
\qquad\qquad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{-(6x - 6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die Gleichung $x^2 + 2x + 6 = 0$ hat nun die Lösungen $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-5} = -1 \pm \sqrt{5}i \in \mathbb{C}$. Also sind x_1, x_2, x_3 die Lösungen von $x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$ und es gilt

$$x^3 + x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 1 - \sqrt{5}i)(x + 1 + \sqrt{5}i).$$

11.5 Aufgaben

Aufgabe 11.1. Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die $f(0) = 10$, $f(1) = -8$ und

$$f(n+2) + 4\,f(n+1) - 5\,f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

erfüllt.

Aufgabe 11.2. Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ und

$$f(n+3) + f(n+2) - \frac{1}{4}f(n+1) - \frac{1}{4}f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

erfüllt.

Aufgabe 11.3. Vorgegeben seien Zahlen $p, q, b \in \mathbb{C}$ und die Rekursionsbedingung

$$f(n+2) + p\,f(n+1) + q\,f(n) = b \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es gelte $p + q = -1$. Zeigen Sie durch Einsetzen:

a) Ist $q \neq 1$, so erfüllt $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto b\frac{m}{1-q}$, die Rekursionsbedingung.

b) Ist $q = 1$, so erfüllt $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto b\frac{m(m+1)}{2}$, die Rekursionsbedingung.

Aufgabe 11.4. In einem Wald befinden sich $117.000\,\mathrm{m}^3$ Nutzholz. Nun werden in jedem Winter $4.500\,\mathrm{m}^3$ Nutzholz geschlagen. Der verbleibende Bestand vermehrt sich bis zum nächsten Winter um $4\,\%$. Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die den Bestand an Nutzholz $f(n)$ unmittelbar vor dem $(n+1)$-ten Einschlag beschreibt.
Hinweis: Ermitteln Sie die passende Rekursionsbedingung und berücksichtigen Sie die Anfangsbedingung $f(0) = 117.000$.

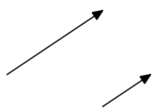
Lineare Algebra

12 Vektorrechnung

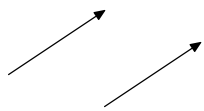
Man unterscheidet zwischen so genannten *skalaren* Größen und so genannten *vektoriellen* Größen. Skalare Größen sind bei fester Maßeinheit durch einen Zahlenwert λ eindeutig bestimmt, wie zum Beispiel:

Länge	Temperatur	Zeit	Masse
$3\,m$	5°	$1{,}4\,sec$	$13{,}7891\,g$
$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 1{,}4$	$\lambda = 13{,}7891$

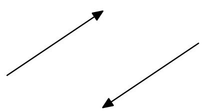
Die reelle Größe λ heißt *Skalar* (man kann sie auf einer Skala ablesen). Vektorielle Größen nennt man auch *Vektoren*. Sie sind durch einen Zahlenwert, genannt *Betrag*, und eine Richtung gegeben. Vektorielle Größen sind zum Beispiel Kraft, Geschwindigkeit, Drehmoment, elektrische und magnetische Feldstärke. Solche Größen lassen sich als Pfeile im Raum veranschaulichen. Ein Pfeil ist dann eindeutig durch seine Länge und seine Richtung festgelegt.



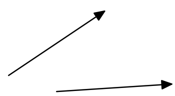
verschiedene Vektoren



gleiche Vektoren



verschiedene Vektoren



verschiedene Vektoren

Wir schreiben für Vektoren in der Regel kleine lateinische Buchstaben mit einem darüber gesetzten Pfeil:

$$\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}, \dots \quad \text{gelesen „Vektor a“, „Vektor b“, usw.}$$

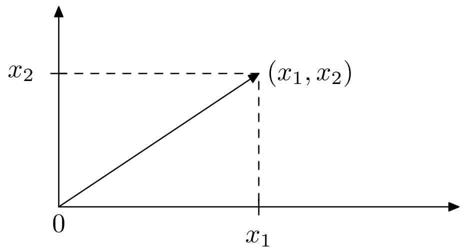
12.1 Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Wir können die Punkte in $\mathbb{R}^n$ als Vektoren auffassen. Dabei wird jedem Punkt $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der Pfeil von $(0, \ldots, 0)$ nach P zugeordnet. Man schreibt dafür auch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

und nennt $\vec{x}$ einen *Ortsvektor*. Sein *Betrag* ist der „Abstand“ von P zum Nullpunkt, also die „Länge“ des Vektors $\vec{x}$. Wir bezeichnen den Betrag eines Vektors $\vec{x}$ mit $\|\vec{x}\|$.

Für $n = 2$ sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Satz von PYTHAGORAS ist der Abstand von $P = (x_1, x_2)$ zum Nullpunkt gleich $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



Also ist

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ vereinbaren wir

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Es gilt dann $\|\vec{x}\| \geqslant 0$, und $\|\vec{x}\| = 0$ genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Außerdem gilt im Fall $n = 1$:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|,$$

wobei $|\ |$ der in 4.9 definierte reelle Betrag ist.

12.2 Addition von Vektoren

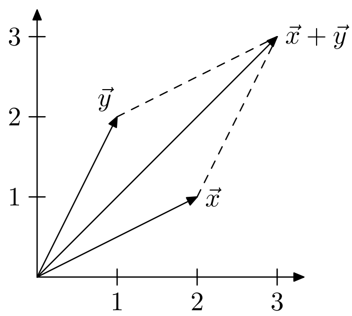
Wir addieren zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Für $n = 2$ erhält man das so genannte „Kräfteparallelogramm“.

Beispiel. Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Kräfte, die in einem Punkt ansetzen, addieren sich.

Den Vektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

nennt man *Nullvektor*. Es gilt dann $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

12.3 Multiplikation mit einem Skalar

Für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ erklären wir die *skalare Multiplikation* durch

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Der Betrag von $\lambda\vec{x}$ ist dann das $|\lambda|$-fache des Betrags von $\vec{x}$, denn

$$\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = |\lambda|\,\|\vec{x}\|.$$

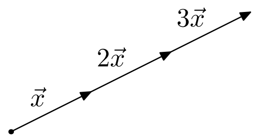
Beispiele. 1) Der physikalische Impuls $\vec{p}$ ist die skalare Multiplikation von Masse und Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Die Masse m ist der Skalar, mit dem multipliziert wird.

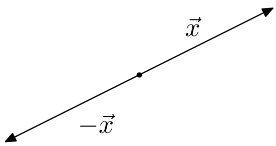
2) Sei $\lambda = 3$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gilt dann

$$3\vec{x} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{x}.$$



3) Sei $\lambda = -1$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{x} + \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$



Für beliebige Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\vec{x} + (-1)\,\vec{x} = \vec{0}$. Wir schreiben auch $-\vec{x}$ für $(-1)\,\vec{x}$ und $\vec{x} - \vec{y}$ für $\vec{x} + (-1)\,\vec{y}$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Geraden in Parameterform

Eine Gerade in der Ebene lässt sich durch eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \vec{a} + t\,\vec{b}$ beschreiben. Dabei heißt $\vec{a}$ der *Aufpunkt*, $\vec{b}$ der *Richtungsvektor* und t der *Parameter* der Geraden.
Die aus der Schule bekannte Geradengleichung $y = mx + k$ mit $m, k \in \mathbb{R}$ lässt sich zum Beispiel in eine solche *Parameterform* umrechnen zu

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix},$$

denn es ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

12.4 Skalarprodukt

Bisher haben wir für Vektoren zwei Operationen definiert: Addition und skalare Multiplikation. In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere Verknüpfung einführen, die bei Abstands- und Winkelbestimmung nützlich ist.

Für zwei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ definieren wir ihr *Skalarprodukt* durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R} \quad \text{(dies ist ein Skalar).}$$

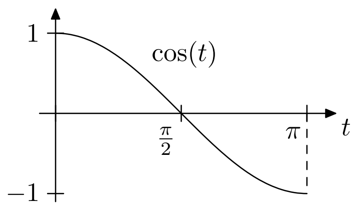
Es folgt:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|\vec{x}\|^2$$

ist das Quadrat des Betrags von $\vec{x}$.
Der *Winkel* $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ ist für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ definiert durch

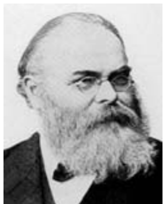
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Hierdurch ist α im Intervall $[0, \pi]$ eindeutig bestimmt, denn cos definiert eine bijektive Abbildung $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$



und es gilt die Cauchy-Schwarz*sche Ungleichung*

$$-1 \leqslant \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \leqslant 1$$



A. L. Cauchy
1789–1857

H. A. Schwarz
1843–1921

Folgerung. Seien zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \neq 0$ und ihr Winkel $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ vorgegeben. Dann berechnet sich ihr Skalarprodukt zu

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \cos(\alpha),$$

und es ist $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ genau dann, wenn $\cos(\alpha) = 0$, wenn also $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ist $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, so sagen wir $\vec{x}$ steht *senkrecht* zu $\vec{y}$ oder $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind *orthogonal*. Wir schreiben dann auch $\vec{x} \perp \vec{y}$.

12.5 Orthonormalbasis

Definition.

1) Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit Betrag $\|\vec{v}\| = 1$ heißt *Einheitsvektor*.

2) Man sagt, dass n Einheitsvektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ eine *Orthonormalbasis* von $\mathbb{R}^n$ bilden, wenn $\vec{v_i} \perp \vec{v_j}$ für $i \neq j$.

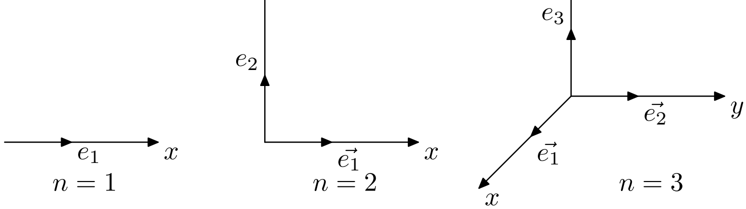
Für eine Orthonormalbasis $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ gilt dann

$$\vec{v_i} \cdot \vec{v_j} = \begin{cases} \|\vec{v_i}\|^2 = 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Beispiele. 1) Die *Koordinateneinheitsvektoren*

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.



Beobachtung. Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man sagt $\vec{x}$ ist eine *„Linearkombination von $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$"*.

2) Die Vektoren $\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Denn nach 12.3 ist

$$\|\vec{v_1}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2} = 1$$

und

$$\|\vec{v_2}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 1.$$

Sie stehen senkrecht zueinander, denn

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \frac{1}{2} (1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = 0.$$

12.6 Normierung auf Länge 1

Außer dem Nullvektor lässt sich jeder Vektor durch Multiplikation mit einem Skalar zu einem Einheitsvektor „normieren".
Sei $\vec{x} \neq \vec{0}$. Dann ist $\|\vec{x}\| > 0$, und $\vec{e} := \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x}$ hat nach 12.3 den Betrag

$$\|\vec{e}\,\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right| \|\vec{x}\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \|\vec{x}\| = 1.$$

Beispiele. 1) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann hat $\vec{x}$ den Betrag

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

und $\vec{e} := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ ist ein Einheitsvektor.

2) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Dann hat $\vec{x}$ den Betrag

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30},$$

und $\vec{e} := \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{-4}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$ ist ein Einheitsvektor.

12.7 Beispiel

Welche der folgenden Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$?

$$\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind also drei Vektoren, die jeweils Betrag 1 haben, und die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Damit kommt $\vec{v_2}$ schon einmal nicht in Frage, denn $\vec{v_2}$ hat Betrag 5:

$$\|\vec{v_2}\| = \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Die anderen Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_3}$, $\vec{v_4}$, $\vec{v_5}$ und $\vec{v_6}$ haben alle Betrag 1.
Es ist $\vec{v_6} = -\vec{v_5}$. Daher stehen $\vec{v_5}$ und $\vec{v_6}$ nicht senkrecht aufeinander. Die Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_3}$ und $\vec{v_5}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, denn sie sind paarweise orthogonal:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0,$$

daher gilt $\vec{v_1} \perp \vec{v_3}$.

Außerdem ist $\vec{v_1} \cdot \vec{v_5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{v_3} \cdot \vec{v_5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Unabhängig davon bilden auch die Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_3}$ und $\vec{v_6}$ eine Orthonormalbasis.

12.8 Lineare Unabhängigkeit und Basis

Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig*, wenn für jede Linearkombination des Nullvektors

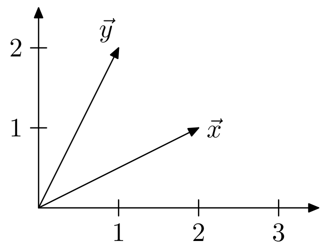
$$\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_m \vec{v_m} = \vec{0}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ folgt, dass alle λ_i gleich 0 sind. Andernfalls heißen $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ *linear abhängig.*

Beispiele. 1) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} = \lambda \vec{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig, denn

$$\vec{x} + (-\lambda)\,\vec{y} = \vec{0}.$$

2) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ungleich dem Nullvektor. Gilt $\vec{x} \perp \vec{y}$, so sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear unabhängig. Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch. Betrachte zum Beispiel die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ aus dem Beispiel in 12.2.



Sie stehen offensichtlich nicht senkrecht aufeinander. Aber $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind linear unabhängig. Denn sei

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

so folgt

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$2\alpha + \beta = 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha + 2\beta = 0.$$

Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten Gleichung ab

$$2\alpha - \alpha + \beta - 2\beta = 0 - 0 = 0,$$

so erhält man $\alpha = \beta$. Dies wiederum eingesetzt in die erste Gleichung führt uns zu $0 = 2\alpha + \beta = 3\alpha$, also $\beta = \alpha = 0$.

Man nennt eine Menge von Vektoren $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}\}$ eine *Basis* des $\mathbb{R}^n$, wenn $n = m$ gilt und die Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich dann als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}$$

mit eindeutig bestimmten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ schreiben.

12.9 Vektorprodukt

Das in 12.4 diskutierte Produkt von zwei Vektoren ordnet diesem einen Skalar zu. Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ gibt es noch eine weitere Möglichkeit der Produktbildung, die je zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ jeweils einen dritten Vektor zuordnet.

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ definieren wir das *Vektorprodukt*

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Beispiel. Für die ersten beiden Koordinateneinheitsvektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \vec{e_3}$$

und

$$\vec{e_2} \times \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\vec{e_3}.$$

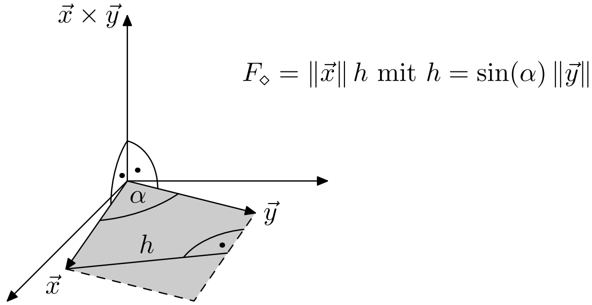
Eigenschaften des Vektorprodukts

1) Ist $\vec{x} \times \vec{y} \neq 0$, so steht $\vec{x} \times \vec{y}$ senkrecht auf $\vec{x}$ und senkrecht auf $\vec{y}$.

2) Der Betrag $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ ist der Flächeninhalt $F_\diamond$ des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms, also

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = F_\diamond = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \cdot \sin(\alpha),$$

wobei $0 \leqslant \alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant \pi$.



3) **distributiv:**

$$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$$
$$(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$$

4) **antikommutativ:**

$$\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$$

5) **bilinear:**

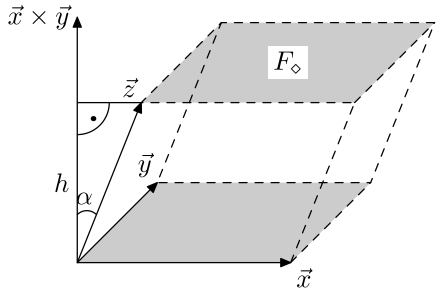
$$\lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \lambda\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \lambda\vec{y}$$

12.10 Spatprodukt

Mit drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich das gemischte Produkt

$$\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) \in \mathbb{R}$$

bilden. Dabei bezeichnet „$\cdot$“ das Skalarprodukt und „$\times$“ das Vektorprodukt. Wenn $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ linear unabhängig sind, dann heißt $\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$ *Spatprodukt.* Es stimmt bis auf Vorzeichen mit dem Volumen $V_{\mathrm{S}pat}$ des von den drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Spats überein.



Es ist $V_{\text{S}pat} = h \cdot F_\diamond$, wobei für die Höhe h gilt:

$$h = \begin{cases} \|\vec{z}\| \cos(\alpha), & \text{für } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\|\vec{z}\| \cos(\alpha), & \text{für } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases}$$

mit $\alpha = \sphericalangle(\vec{x} \times \vec{y}, \vec{z})$.
Also ist $h = \|\vec{z}\| \, |\cos(\alpha)|$, und es folgt

$$\begin{aligned} V_{\text{S}pat} &= (\|\vec{z}\| \, |\cos(\alpha)|) \cdot F_\diamond \overset{12.9}{=} (\|\vec{z}\| \, |\cos(\alpha)|) \cdot \|\vec{x} \times \vec{y}\| \\ &= |\, \|\vec{z}\| \, \|\vec{x} \times \vec{y}\| \, \cos(\alpha) \,| \overset{12.4}{=} |\, \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) \,| \end{aligned}$$

12.11 Aufgaben

Aufgabe 12.1. Man zeichne die Geraden $L_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{a}_i + t\,\vec{b}_i$, (mit $i = 1, 2, 3$), für $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, für $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sowie für $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Wie drückt sich Parallelität für Geraden in Parameterform aus?

Aufgabe 12.2. Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zeige man die *Parallelogrammgleichung*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$$

Aufgabe 12.3. Die Atome des CH_4-Moleküls befinden sich im $\mathbb{R}^3$ in den folgenden Punkten:
C-Atom: $C = (0, 0, 0)$
H-Atome:

$$H_1 = (1, 1, 1),\ H_2 = (-1, -1, 1),\ H_3 = (1, -1, -1),\ H_4 = (-1, 1, -1)$$

a) Man zeichne ein Bild des CH_4-Moleküls mit allen Atomen.

b) Man bestimme die Abstände $\|C - H_i\|$ für $i = 1, \dots, 4$ des C-Atoms zu jedem H-Atom, sowie die Abstände $\|H_i - H_j\|$ mit $i \neq j$ zwischen je zwei H-Atomen.

Aufgabe 12.4. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$P_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\, 0\,,\, \frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big),\ P_2 = \Big(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\, \frac{1}{2}\,,\, \frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big),\ P_3 = \Big(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\, -\frac{1}{2}\,,\, \frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big)$$

und $P_4 = \Big(0, 0, \frac{3}{2\sqrt{6}}\Big)$ gegeben.
Man berechne den *Abstand* $\|P_i - P_j\|$ für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i < j$, sowie die Winkel, die die zu P_1, P_2, P_3, P_4 gehörigen Ortsvektoren miteinander bilden.

Aufgabe 12.5. Man ermittle, welche der drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

senkrecht aufeinander stehen, und normiere $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ jeweils auf die Länge 1.

Aufgabe 12.6. Man zeige, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden und dass $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = 1$ gilt.

Aufgabe 12.7. Man berechne für die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die beiden Vektorprodukte $\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$ und $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2$.

Aufgabe 12.8. Man zeichne den von den Vektoren

$$\vec{v_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v_3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Spat und berechne sein Volumen.

13 Matrizenrechnung

Eine Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in einem rechteckigen Schema, wie zum Beispiel die Tafel

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix},$$

die rechts oben im Kupferstich „Melancholia“ von DÜRER zu sehen ist. Der Kupferstich stammt übrigens aus dem Jahr 1514, was auch in der Mitte der letzten Zeile zu erkennen ist.

Die Besonderheit in der Matrix von Dürer ist, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte, sowie in den Diagonalen immer 34 ergibt. Es gibt sogar noch weitere Konstellationen von Zahlen mit Summe 34.

13.1 Definition

Seien m und n natürliche Zahlen. Eine *$m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$* ist eine Anordnung von $m \cdot n$ Elementen aus $\mathbb{R}$ nach folgendem Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Oft schreiben wir auch einfach $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ oder nur (a_{ij}). Wir nennen die waagrecht geschriebenen n-Tupel $(a_{i1},\dots,a_{in})$ die *Zeilen* und die senkrecht geschriebenen m-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die *Spalten* der Matrix.
Es ist dann m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten. Mit $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller $m\times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

Beispiel.

$$M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij}\in\mathbb{R},\, i\in\{1,2\},\, j\in\{1,2,3\} \right\}$$

und

$$M_{3\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij}\in\mathbb{R},\, i\in\{1,2,3\},\, j\in\{1,2\} \right\}$$

13.2 Addition von Matrizen und Skalarmultiplikation

Ähnlich wie bei Vektoren kann man Matrizen gleicher Größe addieren und jede Matrix mit einem Skalar multiplizieren. Die Operationen sind komponentenweise definiert.
Seien $(a_{ij}),(b_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a_{ij}) + (b_{ij}) &:= (a_{ij}+b_{ij}) \\ \lambda\cdot(a_{ij}) &:= (\lambda a_{ij}). \end{aligned}$$

Man kann auch Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ als $n\times 1$-Matrizen auffassen. Addition und Skalarmultiplikation stimmen dann mit den entsprechenden Operationen für Vektoren überein.

Beispiele. Sei $m=2$ und $n=3$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

13.3 Produkt von Matrizen

Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen A und B ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist. Sei $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=1,\dots,\ell}}$ eine $n \times \ell$-Matrix. Dann heißt die Matrix $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,\ell}}$ mit den Einträgen

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

das *Produkt* von $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $B = M_{n\times\ell}(\mathbb{R})$. Es ist $C \in M_{m\times\ell}(\mathbb{R})$. Wir schreiben dafür $C = A \cdot B$ oder einfach $C = AB$.

Merkregel

Fassen wir die Zeilen von A und die Spalten von B als Vektoren im $\mathbb{R}^n$ auf, so ist c_{ij} das Skalarprodukt (vergleiche 12.4) der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B, also

$$c_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, \ell$. Ausserdem können wir c_{ij} als Produkt einer $1 \times n$-Matrix (i-te Zeile von A) mit einer $n \times 1$-Matrix (j-te Spalte von B) auffassen.

Beispiele

1.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{1. Zeile} \cdot \text{1. Spalte} & \text{1. Zeile} \cdot \text{2. Spalte} \\ \text{2. Zeile} \cdot \text{1. Spalte} & \text{2. Zeile} \cdot \text{2. Spalte} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3+5+7 & 4+6+8 \\ 6+10+14 & 8+12+16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 30 & 36 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{pmatrix}3&4\\5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{1. Z.}\cdot\text{1. Sp.}&\text{1. Z.}\cdot\text{2. Sp.}&\text{1. Z.}\cdot\text{3. Sp.}\\\text{2. Z.}\cdot\text{1. Sp.}&\text{2. Z.}\cdot\text{2. Sp.}&\text{2. Z.}\cdot\text{3. Sp.}\\\text{3. Z.}\cdot\text{1. Sp.}&\text{3. Z.}\cdot\text{2. Sp.}&\text{3. Z.}\cdot\text{3. Sp.}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3+8&3+8&3+8\\5+12&5+12&5+12\\7+16&7+16&7+16\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}11&11&11\\17&17&17\\23&23&23\end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix}3&5&7\\4&6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+5+7&6+10+14\\4+6+8&8+12+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&30\\18&36\end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0\\a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}\quad\text{(die 1. Spalte)}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1\\a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}\quad\text{(die 2. Spalte)}$$

13.4 Diagonalmatrizen

Eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix}a_1&0&0&\cdots&0\\0&a_2&0&\cdots&0\\0&0&a_3&&0\\\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

heißt *Diagonalmatrix.* Einträge, die $\neq 0$ sind, können hierbei höchstens in der Diagonalen vorkommen.
Das Produkt von $n\times n$-Diagonalmatrizen geschieht komponentenweise

$$\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&0&\cdots&0\\0&b_2&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&0&\cdots&0\\0&a_2b_2&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}.$$

13.5 Transponierte Matrix

Ist $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, so heißt

$$^{t}A := (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

die zu A *transponierte Matrix.* Wir erhalten ${}^{t}A$, indem wir die Zeilen von A als Spalten schreiben.
Ist speziell $m = n$, so entsteht ${}^{t}A$ aus A durch Spiegelung an der Diagonalen, zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Regeln

1. ${}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$ für alle $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. ${}^{t}(\lambda A) = \lambda({}^{t}A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
3. ${}^{t}({}^{t}A) = A$ für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. ${}^{t}(AB) = {}^{t}B \cdot {}^{t}A$ für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n\times \ell}(\mathbb{R})$ (vergleiche Beispiel 1. und 3. in 13.3).

13.6 Determinante

Quadratische Matrizen, so bezeichnet man Matrizen mit n Zeilen und n Spalten, besitzen eine *Determinante.* Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist die Determinante $\det(A) \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Man kann sie rekursiv einführen.
$n = 1$: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A = (a)$ eine 1×1-Matrix. Setze $\det(A) = a$.
$n > 1$: Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Berechne $\det(A)$ mit Hilfe der Determinanten von $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen A_{ij}, wobei A_{ij} aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Für festes $j \in \{1, \ldots, n\}$ erhält man dann $\det(A)$ durch „Entwicklung nach der j-ten Spalte“:

$$\begin{aligned}\det(A) &:= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj})\end{aligned}$$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ergibt sich derselbe Wert.

Beispiel. Sei $n = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A_{11} = (a_{22})$ und $A_{21} = (a_{12})$. Entwicklung nach der 1. Spalte ergibt

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

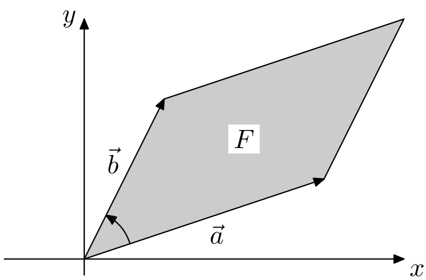
Man erhält folgende Formel:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der Determinante ergibt sich zum Beispiel der Flächeninhalt F des von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{aus } \mathbb{R}^2$$

aufgespannten Parallelogramms.



Nach 12.9 ist

$$\begin{aligned}
F &= \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2} = |a_1 b_2 - b_1 a_2| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

Es ist dabei

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

wenn die Drehung von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ über den kleineren Winkel positiv (das heißt gegen den Uhrzeigersinn) verläuft.
Man kann die Determinante der Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ auch durch „Entwicklung nach der i-ten Zeile“ berechnen. Die Formel dafür ist

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\
&= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}).
\end{aligned}$$

13.7 Determinante einer 3×3-Matrix

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

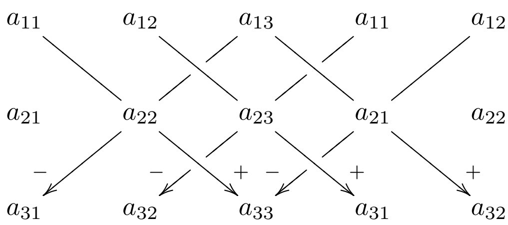
Entwicklung nach der 1. Spalte ergibt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + a_{31} \det(A_{31}) \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\
&\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).
\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.
\end{aligned}$$

Das ist die SARRUSsche Regel.



Beispiele

1.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} &= (-3)\cdot(-2)\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1\\ &\qquad - 3\cdot(-2)\cdot 3 - (-3)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 4\\ &= 24+6+6+18+3-16\\ &= 41\end{aligned}$$

2. Betrachte

$$A = \begin{pmatrix}-3 & 2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

Da $a_{14} = a_{34} = a_{44} = 0$ gilt, ist die Entwicklung nach der 4. Spalte besonders günstig:

$$\begin{aligned}\det(A) &= 0 + (-1)^{2+4}\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} + 0 + 0\\ &= 4\cdot 41 = 164.\end{aligned}$$

3. Betrachte

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Erste Möglichkeit: Entwicklung nach der 3. Spalte:

$$\begin{aligned}
\det(A) = (-1)^{1+3} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
+ (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
+ (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
+ (-1)^{4+3} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-2) \cdot (8 - 8 - 1) + 0 \\
&\quad + 1 \cdot (8 + 3 - 8) + (-1) \cdot (-2) \cdot (8 + 3 - 8 - 1) \\
&= 2 + 3 + 4 = 9.
\end{aligned}$$

Diese Rechnung ist etwas ungünstig, da drei Determinanten von 3×3-Matrizen berechnet werden müssen. Günstiger ist hier die Entwicklung nach der 2. Zeile, da dort zwei Einträge gleich 0 sind. Es sind daher nur noch zwei Determinanten von 3×3-Matrizen zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\det(A) = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
+ (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
+ (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
+ (-1)^{2+4} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \cdot (-2 - 6 - 3 + 2) + 0 \\
&\quad + 0 + 4 \cdot (-4 + 2 - 4 + 4 - 2 + 4) \\
&= 9 + 4 \cdot 0 = 9.
\end{aligned}$$

4. VANDERMONDEsche Determinante:

$$\det\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{pmatrix} = yz^2 + xy^2 + zx^2 - yx^2 - zy^2 - xz^2$$
$$= z(yz + x^2 - y^2 - xz) + xy^2 - yx^2$$
$$= z(z(y-x) - (y+x)(y-x)) + xy(y-x)$$
$$= (z^2 - zy - zx + xy)(y-x)$$
$$= (z-x)(z-y)(y-x)$$

13.8 Regeln für die Determinante

Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. $\det(A) = \det({}^tA)$. Das ergibt sich daraus, dass man auch nach der i-ten Zeile entwickeln kann (für $i \in \{1,\dots,n\}$).

2. $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$ („Multiplikationssatz")

3. Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Betrachte zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix}a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(B) = (a_{11}+\lambda a_{21})a_{22} - (a_{12}+\lambda a_{22})a_{21} = a_{11}a_{22} + \lambda a_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{21}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A)$.

4. Wird eine Zeile mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, so ändert sich die Determinante um diesen Faktor. Betrachte zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(B) = (\lambda a_{11})a_{22} - (\lambda a_{12})a_{21} = \lambda\cdot(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda\cdot\det(A)$.

5. Eine *(obere) Dreiecksmatrix* ist eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge auf der Diagonalen, also

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

6. Sei

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

die *Einheitsmatrix.* Dann gilt nach 5.

$$\det(E_n) = 1.$$

7. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *invertierbar,* falls es eine weitere Matrix $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gibt mit

$$A \cdot A^{-1} = E_n.$$

(Es gilt dann automatisch auch $A^{-1} \cdot A = E_n$, und A^{-1} ist eindeutig durch A bestimmt.) Es gilt

$$A \text{ ist invertierbar} \iff \det(A) \neq 0.$$

13.9 Formel für die inverse Matrix

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, also $\det(A) \neq 0$.
Ist $n = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Begründung:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot B,$$

wobei $B = (b_{ij})$ die $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

ist. Die Matrix A_{ji} entsteht wieder aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte (vergleiche 13.6).

Beispiel. 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(A) = 5 + 8 = 13 \neq 0$ und

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det(A) = -1$ und

$$\begin{aligned} A^{-1} &= - \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ \det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

13.10 Aufgaben

Aufgabe 13.1. Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

die beiden Summen $-4 \cdot A + 2 \cdot B$ und $-4 \cdot {}^tA + 2 \cdot {}^tB$.

Aufgabe 13.2. Man berechne das Produkt AB der Matrizen A und B in den beiden Fällen

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13.3. Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

die Produkte AB, AC, $A \cdot (B - C)$ und $(B - C) \cdot A$.

Aufgabe 13.4. Man prüfe, ob $AB = BA$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, und berechne ${}^tA \cdot {}^tB$, ${}^tB \cdot {}^tA$, ${}^t(AB)$, A^2, A^3, B^2 und B^3.

Aufgabe 13.5. Seien

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Produkte $A\vec{e_i}$, $B\vec{e_i}$ für $i = 1, 2, 3$, sowie die Produkte $A\vec{x}$ und $B\vec{x}$. Dann vergleiche man für die beiden Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, und $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto B\vec{x}$, die Komposition $\alpha \circ \beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \alpha(\beta(\vec{x}))$, mit der Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto C\vec{x}$, wobei $C = AB$ sei.

Aufgabe 13.6. Für Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt der *Multiplikationssatz*: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, siehe 2. in 13.8.
Man verifiziere dies für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

indem man $\det(AB)$, sowie $\det(A) \cdot \det(B)$ ausrechnet und die Ergebnisse vergleicht.

Aufgabe 13.7. Man berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

durch Entwicklung nach der dritten Spalte und durch Entwicklung nach zweiten Zeile.
(Wenn richtig gerechnet wird, kommt beide Male dasselbe Ergebnis heraus.)

Aufgabe 13.8. Man zeige, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + 1)^2 .$$

Aufgabe 13.9. Man berechne mit Hilfe der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ \det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix}$$

die zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix A^{-1} . Zur Probe berechne man dann $A \cdot A^{-1}$.

14 Lineare Gleichungssysteme

Eine „lineare Gleichung in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$" ist eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{mit } a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}.$$

Unter einem „linearen Gleichungssystem" verstehen wir m lineare Gleichungen mit n gemeinsamen Unbekannten $x_1, \dots, x_n$.

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x_2 \ + \dots + \ a_{1n}x_n \ = \ b_1 \\
a_{21}x_2 \ + \ a_{22}x_2 \ + \dots + \ a_{2n}x_n \ = \ b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

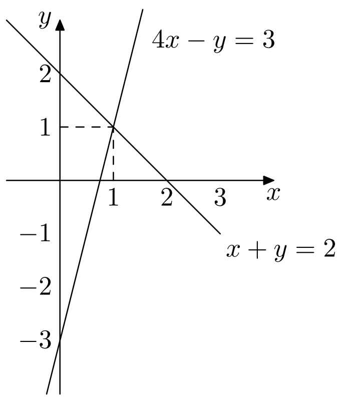
14.1 Geraden im $\mathbb{R}^2$

Betrachte die lineare Gleichung $ax + by = c$ in zwei Unbekannten x, y mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $(a, b) \neq (0, 0)$ (a und b sind nicht beide gleich 0). Die „Lösungsmenge"

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\},$$

ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.

Sind zum Beispiel zwei Geraden durch die linearen Gleichungen $4x - y = 3$ und $x + y = 2$ gegeben, so kann man sich fragen, ob sich die Geraden schneiden, und wenn ja, in welchem Punkt sie sich schneiden. Ein Schnittpunkt (x, y) erfüllt $4x - y = 3$ und $x + y = 2$. Geometrisch findet man den Schnittpunkt $(x, y) = (1, 1)$.



Daher besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $(1, 1)$, das heißt durch $x = 1$ und $y = 1$ ist eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen gegeben.

14.2 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

Untersuche das Schnittverhalten der durch die Gleichungen

(1) $ax + by = e$ mit $a, b, e \in \mathbb{R}$ und $(a, b) \neq (0, 0)$

(2) $cx + dy = f$ mit $c, d, f \in \mathbb{R}$ und $(c, d) \neq (0, 0)$

gegebenen Geraden L_1 und L_2. Dazu ist das Gleichungssystem (1), (2) zu lösen:
Multipliziere (1) mit d und (2) mit $-b$, sowie (1) mit $-c$ und (2) mit a. Es ist also

$$\begin{aligned} adx + bdy &= de \\ -bcx - bdy &= -bf, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} -acx - bcy &= -ce \\ acx + ady &= af. \end{aligned}$$

Nach Addition jeweils beider Gleichungen erhält man

(3) $$(ad - bc)x = de - bf,$$

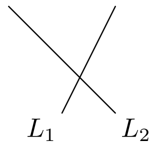
sowie

(4) $$(ad - bc)y = af - ce.$$

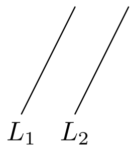
Wir unterscheiden nun drei Fälle:
1. Fall: Sei $ad - bc \neq 0$. Dann hat das System genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Die beiden Geraden L_1 und L_2 schneiden sich also im Punkt (x, y).



2. Fall: Sei $ad - bc = 0$, und es gelte $de - bf \neq 0$ oder $af - ce \neq 0$. Dann hat das System, wie aus (3) oder (4) folgt, keine Lösung. Die Geraden L_1 und L_2 sind somit parallel.

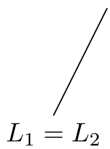


3. Fall: Sei $ad - bc = 0$, und es gelte $de - bf = 0 = af - ce$. Es gilt $ad = bc$, und nach Voraussetzung in (1) ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.

I) Ist $a \neq 0$, so multipliziere (1) mit $\frac{c}{a}$ und erhalte

$$cx + \frac{cb}{a}y = \frac{ce}{a} \overset{(af-ce=0)}{=} \frac{af}{a} = f$$

Da $ad = bc$ ist, folgt $cx + dy = f$. Die Gleichung (1) geht also durch Multiplikation mit $\frac{c}{a}$ in Gleichung (2) über. Für die zugehörigen Geraden gilt daher $L_1 = L_2$.



Insbesondere besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

II) Ist $b \neq 0$, so multipliziere (1) mit $\frac{d}{b}$. Es folgt

$$\frac{ad}{b}x + dy = \frac{de}{b} \overset{de-bf=0}{=} \frac{bf}{b} = f,$$

und also $cx + dy = f$ wegen $ad = bc$. Wie oben folgt $L_1 = L_2$, und das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.

14.3 Matrizenschreibweise

Ein lineares Gleichungssystem

$$(*)\qquad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

kann man auch in der Form von Matrizen (siehe 13.1) schreiben

$$(**)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

denn bezüglich der in 13.3 definierten Matrizenmultiplikation gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Einer Lösung $x_1, \ldots, x_n$ von $(*)$ entspricht dann ein Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Man schreibt für $(**)$ auch kurz $A\vec{x} = \vec{b}$. Ist speziell $n = m$ und A invertierbar, so ist $(*)$ eindeutig lösbar durch $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Beispiel. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

aus 14.1 erhält jetzt die Form

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da $4 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 5 \neq 0$ ist, berechnet man die Lösung

$$x = \frac{1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2}{5} = 1 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{5} = 1$$

wie im 1. Fall von 14.2.

14.4 Gaußscher Algorithmus

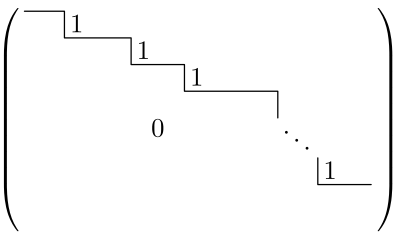
Der Gaussche Algorithmus ist ein allgemeines Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Alle Informationen über das Gleichungssystem sind in den Werten a_{ij} für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, sowie in den Werten $b_1, \ldots, b_m$ enthalten. Man fasst diese daher zur *erweiterten Koeffizientenmatrix*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

zusammen. Ziel ist es, diese erweiterte Koeffizientenmatrix durch „elementare Zeilenumformungen“, die die Lösungsmenge nicht verändern, in eine Matrix der Form



zu bringen.
Unterhalb der horizontalen Stufenlinie dürfen nur Nullen stehen. Beispiele für solche Matrizen in *Zeilenstufenform* sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hingegen sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht in Zeilenstufenform.
Jede beliebige Matrix lässt sich durch folgende *elementare Zeilenumformungen* auf Zeilenstufenform bringen.

I) Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

II) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar ungleich Null.

III) Vertauschen zweier Zeilen.

Diese Umformungen verändern die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht.

Beispiele. 1) Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Schreibe Z. für „Zeile“. Dann bedeutet zum Beispiel die Schreibweise „2.Z. $-$ 2 $\times$ 1.Z.“: Subtrahiere das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile. Wir können nun umformen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3.Z.}-\text{1.Z.}]{\text{2.Z.}-3\times\text{1.Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3.Z.}+\text{2.Z.}]{-\frac{1}{2}\times\text{2.Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6}\times\text{3.Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

und erhalten eine Matrix in Zeilenstufenform. Die dritte Zeile dieser Matrix entspricht der Gleichung $x_3 = -1$, die zweite Zeile der Gleichung $x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1$. Es folgt $x_2 + \frac{1}{2} = 1$, also $x_2 = \frac{1}{2}$. Aus der ersten Zeile erhalten wir nun

$$2 = x_1 - 2x_2 - x_3 = x_1 - 2\cdot\frac{1}{2} - (-1) = x_1 - 1 + 1,$$

also $x_1 = 2$. Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ -x_1 + 6x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Wir bringen die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 7 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3.Z.}-2\times\text{1.Z.}, \text{4.Z.}+\text{1.Z.}]{\text{2.Z.}+\text{1.Z.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1\times\text{2.Z.}]{\text{3.Z.}-2\times\text{2.Z.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times\text{3.Z.}]{\text{4.Z.}+\text{3.Z.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile entspricht der Gleichung $x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -2$. Wir haben Wahlmöglichkeiten für x_4. Wähle $x_4 =: \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig und erhalte damit $x_3 = -2 - \frac{1}{2}x_4 = -2 - \frac{1}{2}\lambda$. Setze dies in die zweite Zeile $x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 1$ ein und löse nach x_2 auf:

$$x_2 = 1 + 4x_3 + 3x_4 = 1 + 4(-2 - \frac{1}{2}\lambda) + 3\lambda = -7 + \lambda$$

Die erste Zeile entspricht der linearen Gleichung $x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2$, also $x_1 = -2 + x_2 + 2x_3 - x_4$. Setzt man die vorher gefundenen Werte für x_2, x_3 und x_4 ein, so erhält man

$$x_1 = -2 + (-7 + \lambda) + 2(-2 - \frac{1}{2}\lambda) - \lambda = -13 - \lambda.$$

Somit erhält man unendlich viele Lösungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alle Lösungen liegen auf einer Gerade im $\mathbb{R}^4$.

Allgemeine Beschreibung

Wir geben nun eine abstrakte Beschreibung für das Lösen eines linearen Gleichungssystems mittels Gaussschem Algorithmus. Diese ist ungleich aufwendiger als die Rechnungen in Beispiel 1) und 2). Für das Lösen der Übungsaufgaben und das Verstehen des übrigen Stoffes in diesem Buch ist ein solcher Tiefgang in die Materie nicht notwendig.
Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Für die Menge der Lösungen des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ schreiben wir im Folgenden

$$L(A, \vec{b}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\}.$$

1) Ist A die Nullmatrix, so muss für die Lösbarkeit des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ notwendig $\vec{b} = \vec{0}$ gelten. Für solch ein System ist dann jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung. Wir können daher annehmen, dass A nicht die Nullmatrix ist. Bilde die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$ und bringe diese mit den elementaren Zeilenumformungen I), II), III) auf Zeilenstufenform $(A'|\vec{b'})$. Es gilt dann $L(A, \vec{b}) = L(A', \vec{b'})$.

2) a) Gibt es in der Matrix $(A'|\vec{b'})$ eine Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & b'_j \end{array}$$

mit $b'_j \neq 0$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.

b) Im gegenteiligen Fall gibt es ein $r \in \{1, \dots, n\}$, so dass die r-te Zeile von A' die letzte Zeile ist, deren Einträge nicht alle gleich Null sind, also

$$\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a'_{r-1,j} & \dots & a'_{r-1,i} & a'_{r-1,i+1} & \dots & a'_{r-1,n} & & b'_{r-1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & & 0 & a'_{ri} & a'_{r,i+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & & \dots & & & 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{array}$$

mit $a'_{ri} = 1$ und $a'_{r-1,j} = 1$. Löse die zugehörige lineare Gleichung nach der Unbekannten x_i auf

$$x_i = b'_r - a'_{r,i+1}x_{i+1} - \dots - a'_{rn}x_n$$

Ist $i = n$, so ist $x_i = b'_r$. Ist $i < n$, so hat man Wahlmöglichkeiten für $x_{i+1}, \dots, x_n$. Wähle $\lambda_{i+1} := x_{i+1}, \dots, \lambda_n := x_n \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest.

Die $(r-1)$-te Zeile führt dann zu der Gleichung

$$x_j = b'_{r-1} - a'_{r-1,j+1}x_{j+1} - \cdots - a'_{r-1,i}x_i - \cdots - a'_{r-1,n}x_n,$$

wobei die $x_i, \ldots, x_n$ bereits festgelegt sind. Wenn $j+1 < i$ gilt, hat man Wahlmöglichkeiten für $x_{j+1}, \ldots, x_{i-1}$. Wähle dann $\lambda_{j+1} := x_{j+1}, \ldots, \lambda_{i-1} := x_{i-1} \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Ist $j+1 = i$, so ist x_j bereits eindeutig durch die $x_i, \ldots, x_n$ festgelegt.

Führt man dieses „Rückwärtseinsetzen" nacheinander mit der $(r-2)$-ten Zeile, $(r-3)$-ten Zeile, ..., 1-ten Zeile weiter fort, so erhält man $x_1, \ldots, x_n$, die eventuell von reellen Größen $\nu_1, \ldots, \nu_k$, $0 \leqslant k < n$, „parametrisiert" werden, mit $A'\vec{x} = \vec{b'}$. Da $L(A, \vec{b}) = L(A', \vec{b'})$ gilt, ist dann auch $\vec{x}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Der Fall $n = m = r$

Im Fall $n = m = r$, wobei r wie oben in 2) b) gegeben ist, hat $(A'|\vec{b'})$ die Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \ldots & * & b'_1 \\ 0 & 1 & * & \vdots & b'_2 \\ & & \ddots & * & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b'_n \end{array}\right),$$

das heißt, A' ist eine obere Dreiecksmatrix mit nur Einsen auf der Diagonalen. Nach 5. aus 13.8 gilt $\det(A') = 1 \neq 0$, also ist A' invertierbar. Wegen $L(A, \vec{b}) = L(A', \vec{b'})$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung, nämlich $\vec{x} = A'^{-1}\vec{b'}$.

14.5 Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ durch eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ gegeben.

Fall 1: Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so nennt man das System *homogen.*

- Ein homogenes System $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt stets eine Lösung, nämlich die *triviale* Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

- Wenn ein homogenes System auch noch eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ besitzt, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und Lösungen $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k}$ derart, so dass jede Lösung $\vec{x}$ sich eindeutig in der Form
$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \cdots + \lambda_k \vec{x_k} \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$
schreiben lässt. Die Zahl k ist eindeutig bestimmt und heißt *Dimension des Lösungsraums.*

- Ist $m = n$, so gilt für das System $A\vec{x} = \vec{0}$:
$$\vec{0} \text{ ist die einzige Lösung} \iff \det(A) \neq 0 \iff A \text{ ist invertierbar}$$

- Ist $m < n$ (es gibt also weniger Gleichungen als Unbekannte), so hat das System $A\vec{x} = \vec{0}$ stets eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Fall 2: Ist $\vec{b} \neq \vec{0}$, so nennt man das System *inhomogen.*

- Ein inhomogenes System braucht keine Lösung zu besitzen, vergleiche 2)a) in 14.4. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge.

- Gilt $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar und $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ ist die einzige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

- Wenn das System $A\vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung besitzt, so genügt es, irgendeine Lösung $\vec{x_0}$ (zum Beispiel durch Probieren) zu finden. Jede Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ hat dann folgende Form:
$$\vec{x} \quad = \quad \underbrace{\vec{x_0}}_{\substack{\text{spezielle Lsg.} \\ \text{von } A\vec{x} = \vec{b}}} \quad + \quad \underbrace{\lambda_1 \vec{x_1} + \cdots + \lambda_k \vec{x_k}}_{\substack{\text{allgemeine Lsg.} \\ \text{von } A\vec{x} = \vec{0}}} \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$
wobei k die Dimension des Lösungsraumes und $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k}$ Lösungen des homogenen Systems wie im Fall 1 sind. Besitzt $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung, so ist $\vec{x_0}$ die einzige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Fazit. Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen. Andere Varianten sind nicht möglich.

14.6 Cramersche Regel

Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, so ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Man findet die Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ dann auch nach der Cramer*schen Regel.*

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ berechnet man $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ durch:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \\
x_2 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

14.7 Aufgaben

Aufgabe 14.1. Man untersuche das Schnittverhalten der beiden Geraden L_1 und L_2 , falls

a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 6x + 3y = 10 \right\}$, $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x - 2y = -1 \right\}$

b) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x + 6y = 8 \right\}$, $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x + \frac{15}{2} y = 10 \right\}$

c) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{3}\, x - 3y = 0 \right\}$, $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - \sqrt{3}\, y = 1 \right\}$.

Aufgabe 14.2. Gegeben seien die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ benutze man

a) die CRAMERsche Regel.

b) den Gaussschen Algorithmus.

Aufgabe 14.3. Man bestimme für die Matrix A aus Aufgabe 14.2 die inverse Matrix A^{-1} und verifiziere die Gleichung $A^{-1}\vec{b} = \vec{x}$ für die in Aufgabe 14.2 gewonnene Lösung $\vec{x}$.

Aufgabe 14.4. Man bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 14.5. Man ermittle den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 2x + 3 \right\} \quad \text{und} \quad L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 14.6. Zur Lösung der folgenden Aufgabe, die Anwärtern auf einen höheren Beamtenposten im alten China gestellt wurde, ist ein passendes Gleichungssystem mit drei Gleichungen in drei Unbekannten aufzustellen und zu lösen:
Verkauft man auf dem Markt 2 Büffel, 5 Hammel und kauft dafür 13 Schweine, so bleiben 1000 Münzen übrig.
Verkauft man 3 Büffel und 3 Schweine, so kann man dafür genau 9 Hammel kaufen.
Um 5 Büffel zu kaufen, muss man 6 Hammel und 8 Schweine verkaufen und noch 600 Münzen darauflegen.
Wieviel kosten die Tiere jeweils?

Aufgabe 14.7. Man bestimme mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3\,. \end{array}$$

Aufgabe 14.8. Man bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix},\ \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} \perp \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

15 Lineare Abbildungen

15.1 Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *linear,* falls

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \qquad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

und

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \qquad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt. Das bedeutet, eine lineare Abbildung ist mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich.

15.2 Bemerkung

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so gilt

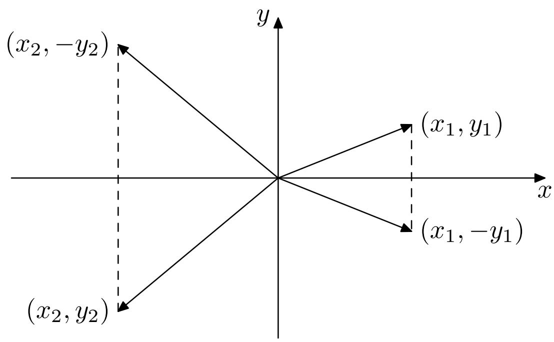
$$f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Begründung. Es ist $f(\vec{0}) = f(\vec{0}+\vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$, da f linear ist. Subtrahiere auf beiden Seiten $f(\vec{0})$, dann folgt $\vec{0} = f(\vec{0})$.

15.3 Beispiele für lineare Abbildungen

1. **Spiegelung an der x-Achse**

$$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



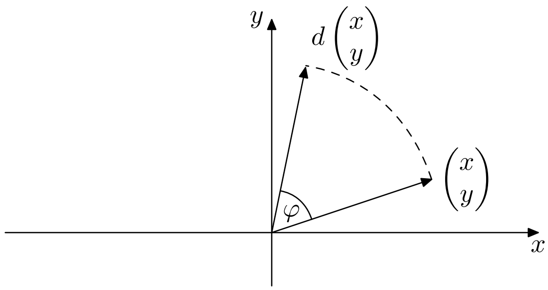
Benutzt man Matrizenmultiplikation, so ist

$$s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

2. **Drehung um $\vec{0}$ mit Drehwinkel φ**

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Speziell beschreibt d für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ eine positive Drehung (gegen den Uhrzeigersinn) um 60°.



Mit Matrizenmultiplikation gilt

$$d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. **Drehspiegelung.** Auch das Kompositum von Drehung und Spiegelung ist eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned}(d \circ s)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &:= d\left(s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = d\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) - y\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Man erhält die Drehspiegelungsmatrix durch Matrizenmultiplikation der Drehmatrix mit der Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

15.4 Darstellung durch Matrizen

Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x},$$

eine lineare Abbildung.
Umgekehrt gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, für die $f = f_A$ gilt. Man nimmt einfach die Bilder der Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{aus } \mathbb{R}^n$$

als Spalten von A:
Schreibe

$$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad f(\vec{e_n}) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und setze

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =: A(f).$$

Sind $f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ lineare Abbildungen, so gilt

$$A(f \circ g) = A(f) \cdot A(g).$$

Dem Kompositum von linearen Abbildungen entspricht das Produkt der zugehörigen Matrizen (vergleiche Aufgabe 13.5).

Beispiele

1. Betrachte

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y - 3z \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},$$

und man erhält als zugehörige Matrix

$$A(f)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-3\end{pmatrix}.$$

Mit dieser Matrix kann man für $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ bequem durch Matrizenmultiplikation den Funktionswert $f(\vec{x})$ berechnen. Zum Beispiel:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\quad\text{liefert}\quad f(\vec{x})=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}.$$

2. Zur Identität $\mathrm{id}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\vec{x}\mapsto\vec{x}$, gehört die Einheitsmatrix

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&&0\\\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

15.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ein Element $\lambda\in\mathbb{R}$ heißt *Eigenwert von f*, wenn es einen Vektor $\vec{x}\neq\vec{0}$ aus $\mathbb{R}^n$ gibt mit

$$f(\vec{x})=\lambda\vec{x}.$$

Jeder solche Vektor $\vec{x}\neq\vec{0}$ heißt *Eigenvektor zum Eigenwert λ.*

Wie ermittelt man Eigenwerte und Eigenvektoren?

Betrachte die gemäß 15.4 zu f gehörige Matrix $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Für $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\lambda \text{ ist Eigenwert von } f &\iff \text{es gibt } \vec{x}\neq\vec{0} \text{ mit } A\vec{x}=\lambda\vec{x}\\ &\iff \text{das System } (A-\lambda E_n)\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ &\qquad\ \text{hat eine Lösung } \vec{x}\neq\vec{0}\\ &\iff \det(A-\lambda E_n)=0\end{aligned}$$

vergleiche 15.4, sowie den homogenen Fall in 14.5.

Fazit

- Die Eigenwerte von f sind die Nullstellen des *„charakteristischen Polynoms“* von A:
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n).$$
- Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ sind die Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$ des Gleichungssystems
$$(A - \lambda E_n) \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Beispiel

Sei $n = 3$ und $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & -4 \\ -2 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 \cdot (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((3-\lambda)(-2-\lambda) + 4) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von p, also die Eigenwerte von f_A, sind

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2},$$

also

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -1.$$

1. Berechne die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_3 = -1$. Zu lösen ist dazu das Gleichungssystem
$$(A - \lambda_3 E_3) \cdot \vec{x} = (A + E_3) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Benutze den Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3.\text{Z.}+1.\text{Z.}]{\frac{1}{2}\times 1.\text{Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.\text{Z.}-3\times 1.\text{Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3.\text{Z.}-\frac{1}{4}\times 2.\text{Z.}]{\frac{1}{4}\times 2.\text{Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $x_2 - x_3 = x_2 - t = 0$ und $x_1 = 0$. Die gesuchten Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_3 = -1$ sind die Vektoren

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \neq 0.$$

2. Berechne die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Zu lösen ist jetzt das Gleichungssystem

$$(A - \lambda_2 E_3) \cdot \vec{x} = (A - 2E_3) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus bekommt man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2.\text{Z.}+3\times 1.\text{Z.}]{(-1)\times 1.\text{Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3.\text{Z.}+2\times 1.\text{Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3.\text{Z.}-2.\text{Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle wieder $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $x_2 - 4x_3 = x_2 - 4t = 0$, sowie $x_1 = 0$. Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ sind also

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \neq 0.$$

3. Analog berechne die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Das zu lösende Gleichungssystem ist

$$(A - \lambda_1 E_3) \cdot \vec{x} = (A - E_3) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

   Benutze elementare Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2.Z.+3.Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -7 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3.Z.+2×2.Z.}]{\text{vertausche 1.Z. u. 2.Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -17 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{vertausche 2.Z. u. 3.Z.}]{\frac{1}{7}\times\text{3.Z.}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{1.Z.}-3\times\text{2.Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Es ist wieder $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig – um mit ganzen Zahlen rechnen zu können, setze $x_3 = 7t$. Dann ist $x_2 - 17t = 0$ und $x_1 + 2t = 0$. Folglich sind die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ die Vektoren

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \neq 0.$$

Landkartenprojektion

Vernachlässigt man die Erdkrümmung, so kann man die Erstellung einer Landkarte durch eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ auf die xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreiben. Ein Punkt (x, y, z) in der Landschaft ist durch seinen Längengrad x, seinen Breitengrad y und seine Höhe z über dem Meeresspiegel eindeutig gegeben.

Der Punkt (x, y, z) wird durch die Landkartenprojektion f auf den Punkt $(\mu x, \mu y, 0)$ auf der Landkarte abgebildet, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ der Maßstab der Karte ist. Die darstellende Matrix entsteht aus den Bildern der Koordinateneinheitsvektoren:

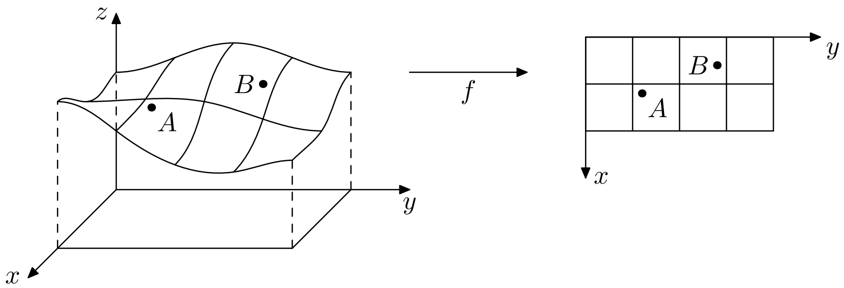
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet leicht, dass die Eigenwerte 0 und μ sind. Die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind von der Form

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \neq 0.$$

Und die Eigenvektoren zum Eigenwert μ haben die Form

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } (s,t) \neq (0,0).$$



15.6 Aufgaben

Aufgabe 15.1. Bei welchen der folgenden Abbildungen handelt es sich um lineare Abbildungen?

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x + y$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 15.2. Seien $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ die Koordinateneinheitsvektoren im $\mathbb{R}^4$ (siehe 12.5). Dann wird durch $f(\vec{e_1}) := 1$, $f(\vec{e_2}) := 0$, $f(\vec{e_3}) := \pi$ und $f(\vec{e_4}) := \sqrt{2}$ eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie die zugehörige Matrix $A(f)$.

Aufgabe 15.3. Sei $\vec{v}$ ein fester Vektor in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) die durch das Skalarprodukt gegebene Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{w} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$ ist linear,

b) die durch das Vektorprodukt gegebene Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w} \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$ ist linear.

Aufgabe 15.4. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda E_2)$ für die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Für welche Drehwinkel φ besitzt p Nullstellen in $\mathbb{R}$? Wie sehen dann die Eigenwerte der Drehung aus?

Aufgabe 15.5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resultate der Aufgaben

Zur vollständigen Bearbeitung einer Übungsaufgabe gehört ein korrekter Lösungsweg mit nachvollziehbarer Begründung. Hier werden zur Kontrolle nur Endergebnisse aufgelistet, die Lösungswege sind selbst zu entwickeln.

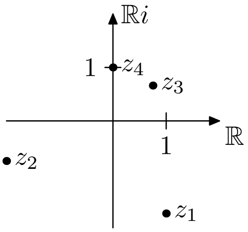
Aufgabe 1.1: $\frac{b+a}{ab}$ und $\frac{5b+6a}{3a^2b^2}$

Aufgabe 1.2: a) $\frac{3}{4} = 0{,}75$ b) $-5 < 3$ c) $\sqrt{2} < 1{,}42$ d) $-5 < -1$

Aufgabe 1.3: $x_{1,2} = 1 \pm 2i$

Aufgabe 1.4: $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{4}$

Aufgabe 1.5:



Aufgabe 1.6: $\frac{-7}{41} + \frac{22}{41}i$ und i

Aufgabe 1.7: -1 und $-i$

Aufgabe 1.8: liegt daran, dass $\mathbb{R}$ angeordnet ist: berechne x^2 für $x > 0$, $x = 0$ und $x < 0$ in $\mathbb{R}$

Aufgabe 2.1: a) Abbildung b) keine Abbildung c) Abbildung d) keine Abbildung

Aufgabe 2.2: a) injektiv, nicht surjektiv b) nicht injektiv, nicht surjektiv

Aufgabe 2.3: a) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ b) $u : \mathbb{R}_{\neq 1} \to \mathbb{R}_{\neq 1},\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Aufgabe 2.4: $f \circ g : \mathbb{R}_{\neq -1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{(y+1)^2}$ mit $(f \circ g)(\mathbb{R}_{\neq -1}) = \mathbb{R}_{>0}$ und $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ mit $(g \circ f)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\neq 0}$

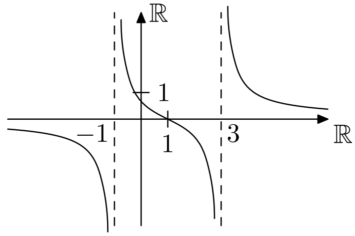
Aufgabe 3.1: a) Norbert: $\approx$ 12.216,71 Euro. Bank: $\approx$ 4.740,67 Euro.
b) Hans überzieht sein Konto nie. Nach 60 Jahren: $\approx$ 7.908,35 Euro.

Aufgabe 3.2: a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) ∞ d) ∞ e) 0 f) 0 g) 0 h) 2

Aufgabe 3.3: Verwende $\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3.4: a) $1 \leqslant \frac{n+n}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \overset{\cdot \frac{1}{n^2}}{\Longrightarrow} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Aufgabe 4.1:



Aufgabe 4.2: a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ b) $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ und } x \neq \pm 1\} \to \mathbb{R}$
c) $f : \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 2\} \to \mathbb{R}$ d) $f : \mathbb{R}_{\neq \pm 2} \to \mathbb{R}$

Aufgabe 4.3: a) -6 b) 1 c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0

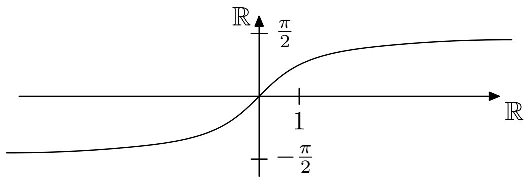
Aufgabe 4.4: f ist überall stetig

Aufgabe 4.5: a) nicht monoton b) streng monoton wachsend c) streng monoton wachsend d) streng monoton wachsend

Aufgabe 4.6: a) ungerade b) ungerade c) gerade d) gerade

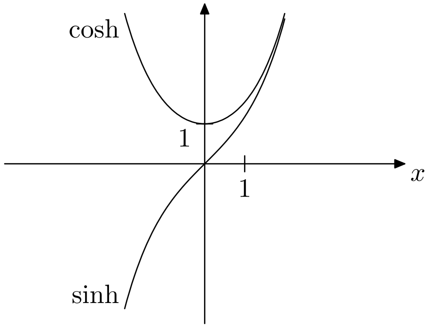
Aufgabe 4.7: a) $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto \frac{1}{2x}$ b) $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto \frac{1}{3}x^2$

Aufgabe 4.8:



Aufgabe 4.9: geht so wie angegeben

Aufgabe 4.10: a)



b) $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Aufgabe 4.11: Einsetzen

Aufgabe 4.12: (a) ≈ 51.833 (b) ≈ 23 Min. und 27 Sek. (c) ≈ 11 Tage, 12 Std. und 20 Min.

Aufgabe 5.1: a) $3x^2 + \frac{2x\cos(2x)-\sin(2x)}{x^2}$
b) Definitionsbereich: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi \text{ für } n \in \mathbb{Z}\}$. Ableitung: $-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Aufgabe 5.2: a) $\cosh'(x) = \sinh(x)$ und $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
b) $\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ und $\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

Aufgabe 5.3: $u(y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ und $v(y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$

Aufgabe 5.4: $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$

Aufgabe 5.5: Definitionsbereich: $\mathbb{R}$. Keine Nullstellen. Maximum in $x_0 = 0$. Wendestellen in $x = \pm 1$. Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. f ist gerade Funktion.

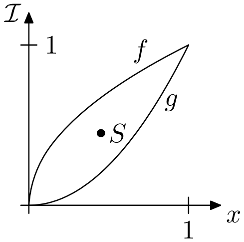
Aufgabe 5.6: Für $b \in I$ mit $a < b$ wende man den Mittelwertsatz an auf die Funktion $h_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \frac{f(b)}{g(b)}g(x)$. Für $c \in I$ mit $c < a$ wende man den Mittelwertsatz an auf die Funktion $h_2 : [c,a] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \frac{f(c)}{g(c)}g(x)$.

Aufgabe 6.1: 4,5 und 1,75

Aufgabe 6.2: 1, $-x\cos(x) + \sin(x) + C$ und
$x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$

Aufgabe 6.3: $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}\ln(108) - 1$

Aufgabe 6.4: a)



und $\mathcal{F} = \frac{1}{3}$

b) $x_s = 0{,}45$ und $y_s = 0{,}45$

Aufgabe 6.5: a) $\ln(1 - x^2) + C$ b) $-\frac{2}{3}\sqrt[4]{(1-x^2)^3} + C$

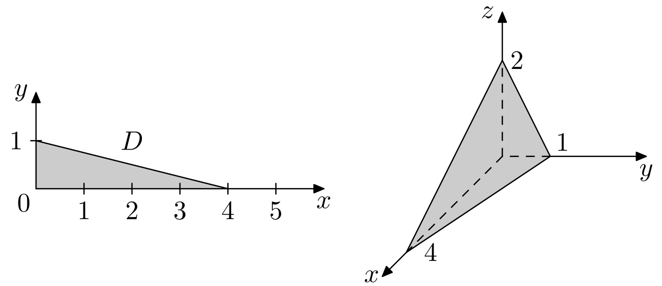
Aufgabe 7.1: $F(x) = 4\sin^3(x) + 8\sin^2(x) + 8\sin(x) + c$

Aufgabe 7.2: a) $y = e^{\sin(x)}(x + c)$ b) $y = \frac{1}{\cos(x)+c}$

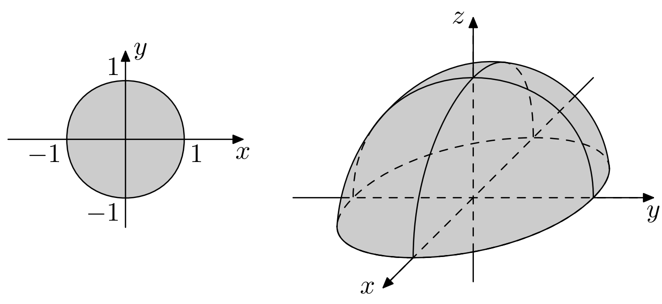
Aufgabe 7.3: $y = (-\frac{1}{3}(1 - x^2) + c\sqrt[4]{1 - x^2})^2$

Aufgabe 7.4: a) $y' = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$ $y'' = c_1{\lambda_1}^2 e^{\lambda_1 x} + c_2{\lambda_2}^2 e^{\lambda_2 x}$.
b) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

Aufgabe 9.1:



Aufgabe 9.2:



Aufgabe 9.3: (a) nicht stetig (b) nicht stetig

Aufgabe 9.4: $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{c}{P}$, $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{c}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{cT}{V^2}$

Aufgabe 9.5: $f_x = \frac{1}{y}$, $f_y = -\frac{x}{y^2}$ und $f_x = \frac{2x}{y^2} e^{x^2 y^{-2}}$, $f_y = -\frac{2x^2}{y^3} e^{x^2 y^{-2}}$

Aufgabe 9.6: $f_x = 5x^4+6x^2y^2$, $f_y = 4x^3y+10y^4$, $f_{xx} = 20x^3+12xy^2$, $f_{yy} = 4x^3 + 40y^3$, $f_{xy} = f_{yx} = 12x^2y$

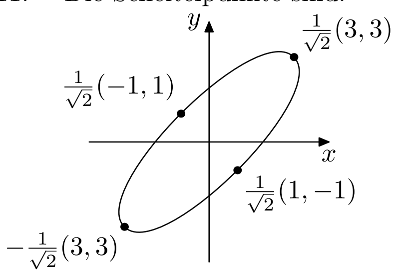
Aufgabe 9.7: $f_x = \frac{2y}{(1-xy)^2}$, $f_y = \frac{2x}{(1-xy)^2}$, $f_{xx} = \frac{4y^2}{(1-xy)^3}$, $f_{yy} = \frac{4x^2}{(1-xy)^3}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2(1+xy)}{(1-xy)^3}$

Aufgabe 9.8: Für $(x,y) \neq (0,0)$ berechne $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ mit der Produkt- und Quotientenregel. Die Werte der gemischten partiellen Ableitungen in $(0,0)$ ergeben sich dann als Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}$ und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}$.

Aufgabe 9.9: f hat lokales Minimum in $(1,1)$

Aufgabe 9.10: f hat lokales Minimum in $(2,-1)$

Aufgabe 9.11: Die Scheitelpunkte sind:



Aufgabe 9.12: f hat lokales Maximum in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

Aufgabe 9.13: $20 \cdot 20 \cdot 20$ ist maximal

Aufgabe 9.14: $2 \cdot |ab|$

Aufgabe 9.15: f hat in (x,x) für alle $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Minimum

Aufgabe 10.1: 720

Aufgabe 10.2: 126

Aufgabe 10.3: 84

Aufgabe 10.4: 32

Aufgabe 10.5: 80 und 3322

Aufgabe 10.6: 10

Aufgabe 10.7: 34.650

Aufgabe 10.8: a) 12 b) 450.450

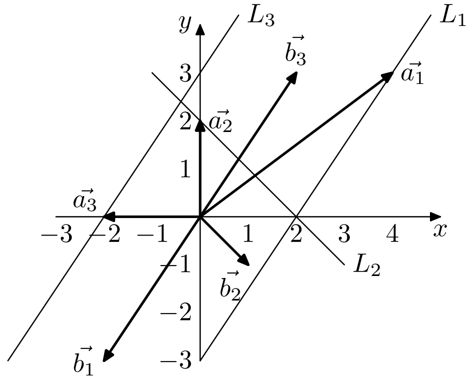
Aufgabe 11.1: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ m \mapsto 7 + 3 \cdot (-5)^m$

Aufgabe 11.2: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ m \mapsto (-1)^m + \left(\frac{1}{2}\right)^m - \left(-\frac{1}{2}\right)^m$

Aufgabe 11.3: geht tatsächlich durch Einsetzen

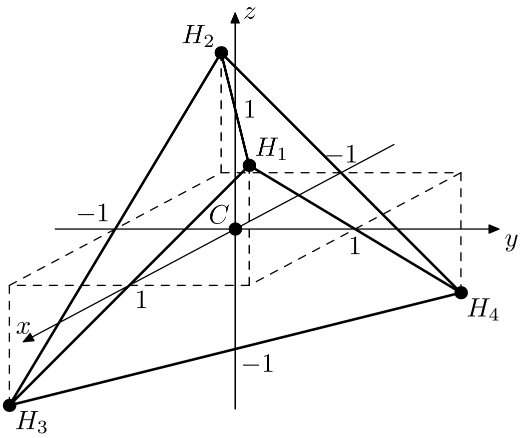
Aufgabe 11.4: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ m \mapsto 117.000$

Aufgabe 12.1: Parallele Geraden können mit dem gleichen Richtungsvektor geschrieben werden.



Aufgabe 12.2: Einfach ausrechen.

Aufgabe 12.3: a) Tetraeder



b) Jedes H-Atom hat den Abstand $\sqrt{3}$ zu C. Der Abstand zwischen je zwei H-Atomen ist $2\sqrt{2}$.

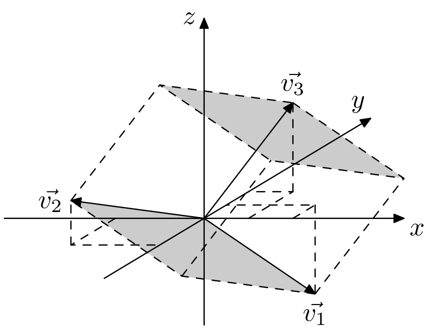
Aufgabe 12.4: Es gilt $\|P_i - P_j\| = 1$ für $i \neq j$. Die zu P_1, P_2, P_3, P_4 gehörenden Ortsvektoren bilden alle den gleichen Winkel φ miteinander, der durch $\cos(\varphi) = -\frac{1}{3}$ gegeben ist, also $\varphi \approx 1,9106$ (Bogenmaß).

Aufgabe 12.5: Die Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander und $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sind mit $\|\vec{v_1}\| = \sqrt{5}, \|\vec{v_2}\| = \sqrt{6}, \|\vec{v_3}\| = \sqrt{30}$ zu normieren.

Aufgabe 12.6: Einfach die orthonormale Eigenschaft aus 12.5 überprüfen. Für $\vec{v_1} \cdot (\vec{v_2} \times \vec{v_3})$ berechne $\vec{v_2} \times \vec{v_3} = \vec{v_1}$

Aufgabe 12.7: $\vec{e_1} \times (\vec{e_1} \times \vec{e_2}) = -\vec{e_2}, \quad (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{0}$

Aufgabe 12.8: Das Volumen des Spats ist $\frac{1}{9}$.



Aufgabe 13.1: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 & -2 \\ -8 & -4 & 2 & 22 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & -4 \\ 12 & 2 \\ -2 & 22 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13.2: a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13.3: $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13.4: $AB \neq BA \quad {}^tA \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -16 & 26 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

$${}^tB \cdot {}^tA = {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -54 & -96 \\ 0 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -540 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 & 50 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -21 & 84 \\ 0 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13.5: $A\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\vec{e_3} = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 9x_2 - 15x_3 \\ -6x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\vec{e_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\alpha \circ \beta)(\vec{x}) = \gamma(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Aufgabe 13.6: $\det(AB) = 200$, $\det(A) = 10$ und $\det(B) = 20$

Aufgabe 13.7: $\det(A) = -20$

Aufgabe 13.8: Geht zum Beispiel durch Entwickeln nach der ersten Spalte.

Aufgabe 13.9: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14.1: a) Mit der CRAMERschen Regel findet man: L_1 und L_2 schneiden sich im Punkt $(\frac{17}{33}, \frac{76}{33})$.
b) Da $\det(A) = 0$ ist, kann man hier nicht die CRAMERschen Regel anwenden. Durch eine geschickte Zeilenumformung findet man: $L_1 = L_2$
c) Das System hat keine Lösung (warum?), die Geraden L_1 und L_2 sind also parallel.

Aufgabe 14.2: In a) und b) ist $\vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Lösung.

Aufgabe 14.3: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14.4: Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also gleich der leeren Menge.

Aufgabe 14.5 Der Schnittpunkt ist $(x, y) = (6, 15)$.

Aufgabe 14.6 Ein Büffel kostet 1200 Münzen, ein Hammel kostet 500 Münzen und ein Schwein kostet 300 Münzen.

Aufgabe 14.7 Jede Lösung hat die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 14.8 Für $t \neq 1, -2$ liegt nur $\vec{v} = \vec{0}$ in der Menge. Im Fall $t = 1$ besteht die Menge aus Elementen der Form

$$\vec{v} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $t = -2$ besteht die Menge aus Elementen der Form

$$\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 15.1 a) linear b) nicht linear c) linear d) nicht linear

Aufgabe 15.2 $(1, 0, \pi, \sqrt{2})$

Aufgabe 15.3 Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w'} = \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \\ w_3' \end{pmatrix}$

a) Berechne $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{w'}) = v_1(w_1 + w_1') + v_2(w_2 + w_2') + v_3(w_3 + w_3') = \cdots$ und $\vec{v} \cdot (\lambda \vec{w}) = v_1(\lambda w_1) + v_2(\lambda w_2) + v_3(\lambda w_3) = \cdots$

b) Berechne $\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{w'}) = \begin{pmatrix} v_2(w_3 + w_3') - v_3(w_2 + w_2') \\ v_3(w_1 + w_1') - v_1(w_3 + w_3') \\ v_1(w_2 + w_2') - v_2(w_1 + w_1') \end{pmatrix} = \cdots$ und

$$\vec{v} \times (\lambda \vec{w}) = \begin{pmatrix} v_2(\lambda w_3) - v_3(\lambda w_2) \\ v_3(\lambda w_1) - v_1(\lambda w_3) \\ v_1(\lambda w_2) - v_2(\lambda w_1) \end{pmatrix} = \cdots$$

Aufgabe 15.4 $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos(\varphi)\lambda + 1$ für $\varphi \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist $\lambda = 1$ Nullstelle/Eigenwert und für $\varphi \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist $\lambda = -1$ Nullstelle/Eigenwert

Aufgabe 15.5 Eigenwerte 0 und 2 Eigenvektoren $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 0 und $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 (für alle $t \neq 0$)

Symbolverzeichnis

$:=$	definiert
$\in$	Element von
$\Longleftrightarrow$	genau dann, wenn
$\Longrightarrow$	daraus folgt
$>$	größer
$\geqslant$	größer oder gleich
$<$	kleiner
$\leqslant$	kleiner oder gleich
$\subset$	Teilmenge
$\approx$	ungefähr
$\mathbb{N}_0$	die natürlichen Zahlen und 0
$\mathbb{R}_{>a}$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ für festes $a \in \mathbb{R}$, (analog $\mathbb{R}_{<a}$, $\mathbb{R}_{\geqslant a}$, $\mathbb{R}_{\leqslant a}$ und $\mathbb{R}_{\neq a}$)
$[a, b[$	halboffenes Intervall
$]a, b[$	offenes Intervall
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall
$\rightarrow$	Abbildungszeichen
$\mapsto$	wird abgebildet auf
$\circ$	Kompositum
i	imaginäre Einheit $i^2 = -1$
π	pi $\approx 3{,}141592653$
e	EULERsche Zahl $\approx 2{,}718281828$
$!$	Fakultät
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient „n über k“
$\sum$	Summe
$\times$	Vektorprodukt
${}^t(\ )$	transponiert
$\lvert\ \rvert$	Betrag in $\mathbb{R}$
$\lVert\ \rVert$	Betrag eines Vektors
$\vec{a}$	Vektor a
α	alpha (griech. Buchstabe)
β	beta (griech. Buchstabe)
Δ	Delta (griech. Buchstabe)
ε	epsilon (griech. Buchstabe)

λ	lambda (griech. Buchstabe)	$\frac{df}{dx}$, f'	Ableitung
μ	my (griech. Buchstabe)	f_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$	partielle Ableitung
ν	ny (griech. Buchstabe)	$\int$	Integral
φ	phi (griech. Buchstabe)	$\Big\vert_a^b$	Integrationsgrenzen
∞	unendlich	$\perp$	senkrecht
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	Differenzenquotient	$\sphericalangle$	Winkel

Literaturverzeichnis

[1] Benno Artmann *Lineare Algebra.* Birkhäuser Skripten, 1991

[2] E. Batschelet *Einführung in die Mathematik für Biologen.* Springer-Verlag, 1980

[3] Ingrid Bauer *Mathematik für Biologen und Geologen.* Handschriftl. Manuskript, 2001

[4] H. Dallmann, K.-H. Elster *Einführung in die höhere Mathematik.* Uni-Texte, Vieweg-Verlag, 1968

[5] Otto Forster *Analysis I.* Vieweg, 1976

[6] Otto Forster *Analysis 2.* Vieweg, 1984

[7] Josef Hainzl *Mathematik für Naturwissenschaftler.* Teubner, 1981

[8] Harro Heuser *Lehrbuch der Analysis, Teil 2.* Teubner, 1988

[9] Ina Kersten *Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften.* TEX-Bearbeitung von Ben Müller und Christian Kierdorf. Universitätsdrucke Göttingen, 2003

[10] Ina Kersten *Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften – Aufbaukurs.* TEX-Bearbeitung von Ben Müller und Christian Kierdorf. Universitätsdrucke Göttingen, 2004

[11] K. Meyberg, P. Vachenauer *Höhere Mathematik I.* Springer, 2001

[12] A. Riede *Mathematik für Biologen.* Vieweg, 1993

[13] Winfried Scharlau *Mathematik für Biologie und Geowissenschaften.* Münsteraner Einführungen, Bd.2, 2000

[14] Herbert Vogt *Grundkurs Mathematik für Biologen.* Teubner, 1994

[15] Sebastian Vollmer und Ole Riedlin *Einführung in die Hochschulmathematik.* Cuvillier Verlag Göttingen, 2002

[16] H. Winter *Mathematisches Grundwissen für Biologen.* Bibliogr. Institut, 1993

[17] H. Behncke *Mathematik für Biologen I.* Vorlesungsskript, 2000/01, `ftp://ftp.mathematik.uni-osnabrueck.de/pub/osm/bio1.ps.gz`

[18] N. Knarr *Mathematik für Biologen.* Vorlesungsskript, 1999/2000, `http://www-public.tu-bs.de/~hkubiak/iaa/knarr/bio.ps.gz`

Abbildungsnachweis

Die Portraits der Mathematiker Cantor, Gauss, Pascal, Fibonacci, Cauchy, Schwarz und Riemann sind alle der mathematikgeschichtlichen Webseite `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/` entnommen. Dort ist auch der Kupferstich „Melancholia“ mitsamt des Ausschnitts zu finden.

Index

Die Mathematik hat als eine der ältesten Wissenschaften in Theorie und Anwendung eine mehrtausendjährige Geschichte. Sie hat großen Einfluss auf die Naturwissenschaften. Dieser Universitätsdruck enthält einige Grundlagen aus Analysis, Kombinatorik und linearer Algebra. Der Umfang ist darauf zugeschnitten, dass der Stoff ohne größeren Zeitdruck in zweistündigen Vorlesungen vor Studierenden der Biologie und der Geowissenschaften im ersten Studienjahr präsentiert werden kann. Die vorliegende TEX-Bearbeitung der Vorlesung und der Übungsaufgaben soll die Studierenden anregen, über mathematische Probleme nachzudenken, und sie in die Lage versetzen, bei Bedarf weitergehende Fachbuchliteratur studieren zu können.

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

ISBN 3-930457-64-4

Universitätsdrucke Göttingen