

ZEITSCHRIFT
FÜR
G E O P H Y S I K

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

B. Brockamp, Münster i. W.

unter Mitwirkung von **A. Defant**, Innsbruck — **W. Dieminger**, Lindau b.
Northelm — **W. Hiller**, Stuttgart — **K. Jung**, Clausthal — **O. Meyer**,
Hamburg — **F. Möller**, Mainz — **H. Reich**, München.

Jahrgang 22

1956

Heft 3/4

PHYSICA - VERLAG · WÜRZBURG

INHALTSVERZEICHNIS

Fanslau, G. und Lucke, O.: Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien 121

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 4—5 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang DM 18,50, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik, sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorennkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die *Zeitschrift für Geophysik* bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Bernhard Brockamp, Münster (Westf.) Pferdegasse 3

Anschrift der *Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80

Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der photomechanischen Wiedergabe u. der Übersetzung, vorbehalten. Druck: fotokop, Darmstadt.

Bekanntmachung lt. Bayr. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Rotlöwengasse 2. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing u. Hildgund Holler, sämtl. Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler u. Charl. Kuhnert, beide Würzburg. Verantwortl. f. d. Anzeigenteil: Arnulf Liebing.



PHYSICA-VERLAG Würzburg 1956.

Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien

Mitteilung aus dem Geomagnetischen Institut und Observatorium Potsdam-Niemégk Nr. 46

Von G. Fanselau und O. Lucke ¹⁾

Zusammenfassung: *Abschnitt A.* Die Veränderlichkeit des geomagnetischen Feldes und seiner Energiedichte wird auf Grund seiner Potentialentwicklungen in neuer Weise dargestellt. Die beiden Pole des Quadrupols führen neben einer Westwärtsdrift von $24^\circ/100$ Jahren noch eine ebenso kräftige nord- bzw. südwärtsige Bewegung aus.

Abschnitt B. Es wird gezeigt, wie die Multipole durch einfache zonale Stromsysteme erzeugt gedacht werden können. Ihr Skineneffekt wird betrachtet.

Abschnitt C. Die großräumigen Konvektionsströme, die die säkulare Änderung der Tageslänge bewirken, sind auf Ebenen senkrecht zur Drehachse beschränkt. Sie stehen in keinem direkten Zusammenhang mit der säkularen Veränderlichkeit des geomagnetischen Feldes, dessen Entstehung auf eine Grenzschicht an der oberen Grenze des Erdkerns beschränkt sein muß. Sie kann nicht durch hydromagnetische Theorien beschrieben werden.

Abschnitt D. Wenn man im Anschluß an *H. Miki* die Materie des äußeren Erdkerns als hochionisiertes Plasma betrachtet, kann das geomagnetische Feld als Grenzschichteffekt gedeutet werden. Seine Westwärtsdrift ist dann die Westwärtswanderung langer hydrodynamischer Wellen. Die Wanderung der Pole des Quadrupols wird durch das Vorzeichen ihres Drehsinnes beeinflusst.

Abstract: *Part A.* The variability of the geomagnetic field and its density of energy is described by means of its potential developments in a new manner. The two poles of the quadrupole still show besides a westward drift of $24^\circ/100$ years a movement northward resp. southward of the same strength.

Part B. It is shown, how multipoles can be produced by simple zonal current systems. Their skin-effect is considered.

Part C. The extended convection streams, which effect the secular variation of the length of the day are confined to planes perpendicular to the axis of rotation. They are not connected directly with the secular variability of the geomagnetic field, the origin of which must be confined on a boundary layer of the upper border of the core. It may not be described by means of hydromagnetic theories.

Part D. If one regards in agreement with *H. Miki* the matter of the outer core as highly ionised plasma, the geomagnetic field may be interpreted as an effect of

¹⁾ Prof. Dr. G. Fanselau und Dr. O. Lucke, Geomagnetisches Observatorium, Potsdam-Niemégk, Kreis Belgig

boundary layer. Its westward drift now is the westward migration of long hydrodynamic waves.

The migration of the poles of the quadrupole is influenced by the sign of its turning direction.

A. Über die Potentialentwicklungen und die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Feldes

Die Ausmessungen des magnetischen Feldes auf der Erde zu verschiedenen Epochen ergeben auch nach Reduktion der kurzfristigen Variationen (von der Dauer von Minuten bis Tagen) Veränderungen des ganzen Feldes, die im Vergleich zu den geologischen Prozessen sehr schnell verlaufen. In einem Zeitraum von 100 Jahren kommen schon bedeutende Veränderungen vor. Da ein externer Anteil am Potentialfeld des ganzen Feldes und sein Nichtpotentialfeld schwach sind und der weitaus größte Teil des Erdfeldes aus dem Erdinnern stammt, muß man annehmen, daß sein Ursprung im Erdkern zu suchen ist. [1] Darunter versteht man den Teil des Innern der Erde mit einem Radius von $a_1 \approx 3500$ km, in den die elastischen Transversalwellen der Erdbeben nicht eindringen. Der physikalische Zustand seiner Materie ist vielleicht flüssig oder gasförmig zu nennen und läßt wahrscheinlich Prozesse zu, die das, geologisch gesehen, stark veränderliche erdmagnetische Feld erzeugen.

Verschiedene Autoren haben es unternommen, die Veränderungen im Potential oder den Komponenten des Feldes zahlenmäßig zu erfassen, z. B. *E. C. Bullard* und Mitarbeiter [2] und *E. H. Vestine* [6]. *E. C. Bullard* und seine Mitarbeiter haben die erdmagnetischen Karten der Epochen 1907,5 und 1945 sehr genau bearbeitet und ihre Unterschiede gegenüber einem Dipolfeld mit den Parametern

$$g_1^0 a^3 = -0,3057 a^3, g_1^1 a^3 = -0,0211 a^3, h_1^1 a^3 = +0,0581 a^3 \text{ [} \Gamma \text{ cm}^3 \text{] ,}$$

die *Vestine* für 1945 fand, festgestellt. In den Veränderungen der Isoliniengebilde der beiden Karten tritt am klarsten ihre Westwärtswanderung hervor. *E. C. Bullard* und seine Mitarbeiter haben sie im Durchschnitt aller Breitenkreise zu $0,18 + 0,02^\circ$ / Jahr bestimmt. Es muß aber gesagt werden, daß nicht nur das Nichtdipolfeld, sondern auch das Dipolfeld selbst Veränderungen zeigen, und daß auch andere Bewegungen als eine westwärtige Drift vorhanden sind. Schließlich erweisen sich alle Veränderungen als Funktionen der Zeit, so daß eine genauere Bestimmung der Veränderlichkeit des erdmagnetischen Feldes wünschenswert erscheint. Sie ist als Grundlage für theoretische Erörterungen notwendig.

E. H. Vestine hat die Veränderungen des ganzen erdmagnetischen Feldes durch den exzentrischen Dipol dargestellt. Seine Parameter können aus $g_1^0, g_1^1, h_1^1, g_2^1, h_2^1, g_2^2, h_2^2$ berechnet werden. [3]. Sie werden von *Vestine* mit den Veränderungen der Rotation der Erde in Beziehung gesetzt. Leider ist der exzentrische Dipol ein ziemlich komplexes Gebilde. Deshalb wird ein neuer Weg vorgeschlagen, der ebenfalls auf der Auswertung der bisherigen Potentialentwicklungen beruht.

Bekanntlich kann man jede auf einer Kugel definierte stückweis glatte Funktion, in unserem Falle das Potential des erdmagnetischen Feldes, nach Kugelfunktionen entwickeln. Dabei wird die Potentialfunktion in einzelne Abschnitte zerlegt.

$$V(\theta, \phi) = a \sum_{n=1}^{\infty} V_n, \quad V_n = \sum_{m=0}^n \left[g_n^m C_n^m + h_n^m S_n^m \right]$$

(1) , wobei

$$C_n^m = \cos m\phi P_n^m(\cos \theta), \quad S_n^m = \sin m\phi P_n^m(\cos \theta)$$

darstellen sollen.

Für sie gelten nach *Adolf Schmidt* [4] die folgenden Orthogonalitätsbedingungen

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\text{E.K.}} C_n^m C_\nu^\mu d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{E.K.}} S_n^m S_\nu^\mu d\omega = \begin{cases} 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } m \neq \mu \\ \text{oder } n \neq \nu \end{array} \right. \\ \frac{1}{2n+1} & \text{, wenn } m = n \\ & \mu = \nu \end{cases}$$

(2)

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\text{E.K.}} C_n^m S_\nu^\mu d\omega = 0 \quad \text{für alle Kombinationen von } m, \mu, n, \nu.$$

Die Buchstaben (E.K.) sollen andeuten, daß über den vollen Raumwinkel (die Einheitskugel) integriert werden soll. $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$. θ ist die Poldistanz des Aufpunkts, ϕ seine geographische Länge. Wir benutzen die bisher vorliegenden Potentialentwicklungen, wie sie vor allen Dingen *P. Mauersberger* [4] und für die Zeit seit 1890 *Vestine* [6] zusammengestellt haben. Ihre Parameter sind dort als Funktionen der Zeit gegeben. Für das

Dipolfeld erhält man die Tabellen 1, 2 und für das Quadrupolfeld die Tabellen 5, 6. Die Tabellen sind aus Kurven entstanden, die eine einfache Ausgleichung der Ergebnisse der Potentialentwicklungen darstellen. Dadurch wird nur eine ausgeglichene Bewegung des Feldes erfaßt. Es ist indessen möglich, daß auch relativ plötzliche Änderungen bei ihnen vorkommen [20]. – Bei diesen Potentialentwicklungen ist im allgemeinen angenommen worden, daß sich das erdmagnetische Feld ganz durch ein skalares Potential darstellen läßt, und daß dessen äußerer Anteil als verschwindend klein angesehen werden kann. Wir werden auf diese Voraussetzungen noch eingehen.

Man bildet den quadratischen Mittelwert mit Hilfe von (1) und (2)

$$\overline{V_n^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{E.K.}} V_n^2 d\omega = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left((g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right) \quad \text{mit } h_n^0 = 0 \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{a^2} \overline{V^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{V_n^2}$$

$\frac{1}{a^2} \cdot \overline{V^2}$ und $\overline{V_n^2}$ haben eine einfache physikalische Bedeutung.

Im Luftraum kann mit hinreichender Genauigkeit die dimensionslose relative Permeabilität gleich eins gesetzt werden. Die Energiedichte des erdmagnetischen Feldes ist dann nach der Formel (4) zu berechnen.

$$e = \frac{\mu_0}{2} (\nabla V \cdot \nabla V) \quad (4)$$

Im Gaußschen Maßsystem und im em E-System ist statt $\mu_0 = 1/4\pi$ zu setzen.

$$\frac{\mu_0}{a^2} \overline{V^2} \quad \text{und} \quad \mu_0 \overline{V_n^2}$$

haben die Dimension einer Energiedichte. Man kann diese Beziehung quantitativ fassen. X, Y, Z seien die üblichen Komponenten des erdmagnetischen Feldes. Dann gilt nach (4)

$$e = \frac{1}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Man bildet den Mittelwert über die ganze Erdkugel

$$(5) \quad \bar{e} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{E.K.}} e \, d\omega = \frac{1}{8\pi \cdot 4\pi} \int (X^2 + Y^2 + Z^2) \, d\omega = \frac{1}{8\pi} (\overline{X^2} + \overline{Y^2} + \overline{Z^2}) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n$$

In [5] (s. a. [5a]) wird gezeigt werden, daß folgende Gleichungen gelten:

$$\overline{Z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \overline{V_n^2}$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n 2m \left((g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\nu-1} \sum_{m=0}^n m \left[g_{\nu}^m g_n^m + \right. \\ \left. + h_{\nu}^m h_n^m \right] \cdot \left[\frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(+1 - (-1)^{\nu+n+1} \right)$$

$$\overline{X^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right] \frac{n(n+1)}{2n+1} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n 2m \left((g_n^m)^2 + \right. \\ \left. + (h_n^m)^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\nu-1} \sum_{m=0}^n \left[g_{\nu}^m g_n^m + h_{\nu}^m h_n^m \right] m \left[\frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left((1 - (-1)^{\nu+n+1}) \right)$$

Man erhält also

$$\overline{X^2} + \overline{Y^2} + \overline{Z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(2n+1) \cdot \\ \cdot \overline{V_n^2} = 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n$$

$$(6) \quad \bar{e}_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{8\pi} \overline{V_n^2}$$

Wir werden sehen, daß $\bar{e}_1 = \frac{6}{8\pi} \overline{V_1^2}$ alle anderen \bar{e}_n an Größe bei weitem überragt und betrachten deshalb zuerst das Dipolfeld.

I. Die Lage und die Intensität des Dipols als Funktion der Zeit

$$(7) \quad V_1 = g_1^0 P_1^0(\cos \theta) + g_1^1 P_1^1(\cos \theta) \cos \phi + h_1^1 P_1^1(\cos \theta) \sin \phi = g_1^1 \cos \theta \\ + g_1^1 \sin \theta \cos \phi + h_1^1 \sin \theta \sin \phi$$

Die Komponenten des Einheitsvektors $\vec{\xi} = \{ \xi, \eta, \zeta \}$, wobei ξ, η, ζ die Richtungskosinus sind, schreiben sich in Kugelkoordinaten, wenn die x-Achse die Pole der Kugeln durchstößt:

$$(7a) \quad \xi = \cos \theta, \quad \eta = \sin \theta \cos \phi, \quad \zeta = \sin \theta \sin \phi$$

Man kann also das Potential des Dipols (7) als inneres Produkt zweier Vektoren schreiben:

$$(8) \quad V_1 = (\mathbf{d} \cdot \vec{\xi}) = g_1^0 \xi + g_1^1 \eta + h_1^1 \zeta$$

\mathbf{d} ist dabei der Vektor $\mathbf{d} = \left\{ g_1^0, g_1^1, h_1^1 \right\}$. Er hängt mit dem Dipolmoment durch die Gleichung zusammen

$$\vec{m} = a^3 \mathbf{d},$$

wie auf Seite 1 erwähnt wurde. Wenn man die Stelle $P^{(1)}$, an der der Vektor \mathbf{d} die Erdoberfläche trifft, als Nordpol eines Kugelkoordinatensystems betrachtet, kann man das innere Produkt (8) auch schreiben

$$(9) \quad V_1 = d \cdot l \cdot \cos \Theta^{(1)} = d \cdot \cos \Theta^{(1)}$$

d ist der absolute Betrag von \mathfrak{d} und $\Theta^{(1)}$ ist der Winkel zwischen $P^{(1)}$ und der Richtung zum Aufpunkt auf der Kugeloberfläche. Es gilt

$$\cos \Theta^{(1)} = \cos \theta \cos \theta^{(1)} + \sin \theta \sin \theta^{(1)} \cos (\phi - \phi^{(1)}).$$

$\theta^{(1)}$ und $\phi^{(1)}$ sind die Koordinaten des Punktes $P^{(1)}$ im geographischen Koordinatensystem. Die Beziehungen zwischen d , $\theta^{(1)}$ und $\phi^{(1)}$ sind bekanntlich die folgenden

$$(10) \quad d^2 = (g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2, \quad \cos \theta^{(1)} = \frac{g_1^0}{d}, \quad \operatorname{tg} \phi^{(1)} = \frac{h_1^1}{g_1^1}$$

Um die Methode zu erläutern, die bei den höheren Abschnitten der Potentialentwicklungen angewandt wird, seien auch diese Beziehungen noch einmal abgeleitet. Wir suchen die Extreme der linearen Form mit 3 Variablen (8) unter der Nebenbedingung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

also ihre Extreme auf der Einheitskugel.

In diesen Extrempunkten gelten bekanntlich die notwendigen, aber nicht immer hinreichenden Bedingungen, daß die folgenden Differentialquotienten verschwinden

$$(11) \quad \frac{\partial (V_1 - \lambda (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2))}{\partial \xi^\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3,$$

wobei

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta, \quad \xi_3 = \zeta$$

bedeuten sollen.

λ sind die *Lagrangeschen* Multiplikatoren. Die Gleichungen (11) heißen, explizite geschrieben,

$$g_1^0 - 2\lambda \xi = 0, \quad g_1^1 - 2\lambda \eta = 0, \quad h_1^1 - 2\lambda \zeta = 0.$$

Daraus folgt

$$\eta^* = \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \theta^{(1)} \cos \phi^{(1)} = \frac{g_1^1}{g_1^0}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{\xi} = \operatorname{tg} \theta^{(1)} \sin \phi^{(1)} = \frac{h_1^1}{g_1^0}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \left[(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2 \right] = \frac{1}{4} d^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} d$$

$$\operatorname{tg} \phi^{(1)} = \frac{h_1^1}{g_1^1}, \quad \operatorname{tg} \theta^{(1)} = \frac{1}{g_1^0} \sqrt{(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2},$$

was mit

$$\cos \theta^{(1)} = \frac{g_1^0}{d}$$

übereinstimmt. (Siehe Formel (10)).

Außer den Funktionen $d(t)$, $\phi^{(1)}(t)$ und $\theta^{(1)}(t)$ wurden noch

$$\frac{d}{dt} d(t), \quad \frac{d}{dt} \theta^{(1)}, \quad \frac{d}{dt} \phi^{(1)} \quad \text{und} \quad \bar{e}, (t), \quad \dot{\bar{e}}, (t)$$

als Funktionen der Zeit berechnet. Ihre Formeln sollen hier nicht aufgeschrieben werden. Die Ergebnisse der Rechnungen sind in den Tabellen 3, 4 und den Abbildungen 1, 2, 3, 4, 5 zu finden.

Man muß bei der Betrachtung der Zeichnungen beachten, daß die Parameter der Potentialentwicklungen, die ja durch Ausgleichungen gewonnen wurden, eine relativ große Unsicherheit enthalten.

Man stelle sich daher die Kurven mit einem breiten Saum umgeben vor, in dem sie auch ebenso gut verlaufen könnten. Seine Breite wird durch den Vergleich der beiden Kurven illustriert, die auf den Parametern nach *Mauersberger* bzw. *Vestine* beruhen. Bemerkenswert sind zwei Ergebnisse:

a) Die Poldistanz des Dipols ist praktisch eine Konstante.

b) Man kann seine zeitliche Variabilität dahin deuten, daß er Schwankungen mit einer Quasiperiode von etwa 500 Jahren Dauer ausführt. Dieselbe Dauer wird auch durch die Beobachtungen der Richtungen des erdmagnetischen Feldvektors in London nahegelegt [3].

II. Lage und Intensität des Quadrupols als Funktion der Zeit

Die in I angegebene Methode führt für V_2 zur Hauptachsentransformation der quadratischen Formen.

$$(12) \quad V_2 = g_2^0 P_2^0(\cos \theta) + g_2^1 P_2^1(\cos \theta) \cos \phi + h_2^1 P_2^1(\cos \theta) \sin \phi + \\ + g_2^2 P_2^2(\cos \theta) \cos 2\phi + h_2^2 P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi$$

Man überzeugt sich leicht, daß V_2 eine homogene Funktion 2. Grades, eine Form der Richtungskosinus ist. Man hat nur die Richtungskosinus (7 a) in (12) einzusetzen, um (12 a) zu erhalten.

$$(12 a) \quad V_2 = \sum_{\mu, \nu=1}^3 x_{\mu\nu} \xi_\nu \xi_\mu \quad \text{mit} \quad \xi_1 = \xi = \cos \theta, \quad \xi_2 = \eta = \sin \theta \cos \phi,$$

$$\xi_3 = \zeta = \sin \theta \sin \phi \quad \text{und}$$

$x_{\mu\nu} = x_{\nu\mu}$. Die Matrix der quadratischen Form ist symmetrisch. Ihre Elemente $x_{\mu\nu}$ haben die folgende Bedeutung

$$(13) \quad (x_{\mu\nu}) = X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\sqrt{3}g_2^2 + g_2^0) & \frac{1}{2}\sqrt{3}h_2^1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}h_2^2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}h_2^1 & g_2^0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}g_2^1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}h_2^2 & \frac{1}{2}\sqrt{3}h_2^1 & \frac{1}{2}(\sqrt{3}g_2^2 - g_2^0) \end{pmatrix}$$

$-a \nabla V_2$ ist der Beitrag von V_2 zur Feldstärke.

Im Luftraum müssen sowohl ihre Rotation als auch ihre Divergenz verschwinden.

$$0 = (\nabla \times \nabla) V_2 = (x_{23} - x_{32}) \mathbf{i} + (x_{31} - x_{13}) \mathbf{j} + (x_{12} - x_{21}) \mathbf{k} = \mathbf{X}_x.$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt, weil die Matrix symmetrisch ist. Das Verschwinden des Vektors \mathbf{X}_x bedeutet, daß der Tensor nur 3 unabhängige skalare Invarianten hat.

$$\nabla \cdot \nabla V_2 = x_{11} + x_{22} + x_{33} = X_I \equiv 0 \text{ ist offenbar}$$

identisch erfüllt, d. h. die erste skalare Invariante des Tensors X verschwindet ebenfalls identisch. Die beiden restlichen haben die folgenden Werte

$$\begin{aligned} X_{II} &= \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{13} & x_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{3}{4} \left[(g_2^0)^2 + (g_2^1)^2 + (h_2^1)^2 + (g_2^2)^2 + (h_2^2)^2 \right] = -\frac{15}{4} \overline{V_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (14) \quad X_{III} &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{12} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{3}}{8} g_2^2 \left((g_2^1)^2 - (h_2^1)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{8} g_2^0 \cdot \left(6 \left[(g_2^2)^2 + (h_2^2)^2 \right] - 3 \left[(g_2^1)^2 + (h_2^1)^2 \right] - 2 (g_2^0)^2 \right) \\ &\quad + \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot h_2^1 h_2^2 g_2^1 \end{aligned}$$

Um die Hauptachsen des Tensorellipsoides zu bestimmen, hat man, wie gesagt, die Extreme von V_2 unter der Nebenbedingung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \text{ zu berechnen.}$$

Ihre Koordinaten sind aus den 3 folgenden linearen Gleichungen zu bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (V_2 - \lambda (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (V_2 - \lambda (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} (V_2 - \lambda (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)) = 0$$

$$\cdot (V_2 - \lambda (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)) = 0$$

Man kann sie einfacher schreiben:

$$(15) \quad (X - \lambda I) \vec{\xi} = 0, \quad I \text{ ist dabei die Einheitsmatrix } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem für die extremalen ξ , η , ζ ist homogen. Dafür, daß überhaupt Lösungen existieren, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante

$$\|X - \lambda I\| = 0$$

verschwindet.

Das ist die bekannte charakteristische Gleichung der Matrix X , die folgende Gestalt hat:

$$\lambda^3 - \lambda^2 \underbrace{X_I}_0 + \lambda X_{II} - X_{III} = 0$$

Zu jeder Lösung λ_ν , $\nu = 1, 2, 3$ dieser reduzierten kubischen Gleichung gehört ein Lösungssystem $\vec{\xi}_\nu$. Weil die Matrix X symmetrisch ist, sind alle 3 Eigenwerte λ_ν , $\nu = 1, 2, 3$, reell und die Eigenvektoren $\vec{\xi}_\nu$ stehen paarweise aufeinander senkrecht. Man erhält die λ_ν aus:

$$(16) \quad \lambda_1 = \sqrt{5 V_2^2} \cos \Phi, \quad \lambda_2 = -\sqrt{5 V_2^2} \cos \left(\Phi + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{5 V_2^2} \cos \left(\Phi - \frac{\pi}{3} \right)$$

Dabei ist

$$\cos 3\Phi = \frac{4 X_{III}}{(5 V_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Summe der Eigenwerte ist naturgemäß null. Die 3 Gleichungen (15) sind nicht mehr unabhängig von einander. Mit $\eta^* = \frac{\eta}{\xi}$ und $\zeta^* = \frac{\zeta}{\xi}$ erhält man für die letzten beiden

$$(x_{22} - \lambda_\nu) \eta_\nu^* + x_{23} \zeta_\nu^* = -x_{12}$$

$$x_{23} \eta_\nu^* + (x_{33} - \lambda_\nu) \zeta_\nu^* = -x_{13}$$

Wegen $\operatorname{tg} \phi_\nu = \frac{\zeta_\nu^*}{\eta_\nu^*}$ und $\operatorname{tg} \theta_\nu = \pm \sqrt{(\eta_\nu^*)^2 + (\zeta_\nu^*)^2}$

erhält man schließlich

$$\operatorname{tg} \phi_\nu = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{3} h_2^1 \lambda_\nu + \left(3/4 h_2^2 g_2^1 - \frac{1}{4} \sqrt{3} h_2^1 (\sqrt{3} g_2^2 - g_2^0) \right)}{\frac{1}{2} 3 g_2^1 \lambda_\nu + \left(3/4 h_2^2 h_2^1 + \frac{1}{4} \sqrt{3} g_2^1 (\sqrt{3} g_2^2 + g_2^0) \right)}$$

$$(17) \quad \operatorname{tg} \theta_\nu = \frac{\sqrt{3/4 \left[(g_2^1)^2 + (h_2^1)^2 \right] \lambda_\nu^2 - 2 \lambda_\nu \left[-3/8 (g_2^1)^2 (\sqrt{3} g_2^2 + g_2^0) + \lambda_\nu^2 + g_2^0 \lambda_\nu + 1/4 (g_2^0)^2 - 3/4 (g_2^2)^2 - 3/4 (h_2^2)^2 \right] + 3/8 (h_2^1)_2 (\sqrt{3} g_2^2 - g_2^0) - 3/4 \sqrt{3} g_2^1 h_2^1 h_2^2}}{\lambda_\nu^2 + g_2^0 \lambda_\nu + 1/4 (g_2^0)^2 - 3/4 (g_2^2)^2 - 3/4 (h_2^2)^2}$$

$$+ 3/8 (h_2^1)_2 (\sqrt{3} g_2^2 - g_2^0) - 3/4 \sqrt{3} g_2^1 h_2^1 h_2^2 \Big] +$$

$$\left[-1/4 \sqrt{3} g_2^1 (\sqrt{3} g_2^2 + g_2^0) - 3/4 h_2^1 h_2^2 \right]^2 +$$

$$\left[1/4 \sqrt{3} h_2^1 (\sqrt{3} g_2^2 - g_2^0) - 3/4 h_2^2 \cdot g_2^1 \right]^2 .$$

Zu λ_1 gehört das Maximum der quadratischen Form auf der Einheitskugel, zu λ_3 das Minimum und zu λ_2 gehört die mittlere Achse des dreiaxigen Ellipsoids. Man kann durch Drehungen um den Mittelpunkt der Kugel erreichen, daß die 3 Achsen in der Reihenfolge, wie sie zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gehören, die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems sind. Die zum Aufpunkt gehörenden Richtungskosinus seien

$$\xi' = \cos \Theta_1^{(2)} \quad \eta' = \cos \Theta_2^{(2)}, \quad \zeta' = \cos \Theta_3^{(2)}.$$

In diesem System schreibt sich die quadratische Form bekanntlich

$$(18) \quad \lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2 + \lambda_3 \zeta'^2 = V_2 \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung $\nabla \cdot \nabla V_2$ ist erfüllt, weil $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ist. Es wird dann behauptet, daß gilt:

$$(19) \quad V_2 = C_1^{(2)} P_2^0(\cos \Theta_1^{(2)}) + C_2^{(2)} P_2^0(\cos \Theta_2^{(2)}) + \\ C_3^{(2)} P_2^0(\cos \Theta_3^{(2)}) \\ = C_1^{(2)} (\xi'^2 - \frac{1}{2} \eta'^2 - \frac{1}{2} \zeta'^2) + C_2^{(2)} (-\frac{1}{2} \xi'^2 + \eta'^2 - \frac{1}{2} \zeta'^2) + \\ + C_3^{(2)} (-\frac{1}{2} \xi'^2 - \frac{1}{2} \eta'^2 + \zeta'^2)$$

Der Koeffizientenvergleich zwischen (18) und (19) ergibt:

$$\lambda_1 = (C_1^{(2)} - \frac{1}{2} C_2^{(2)} - \frac{1}{2} C_3^{(2)})$$

$$\lambda_2 = (-\frac{1}{2} C_1^{(2)} + C_2^{(2)} - \frac{1}{2} C_3^{(2)})$$

$$\lambda_3 = (-\frac{1}{2} C_1^{(2)} - \frac{1}{2} C_2^{(2)} + C_3^{(2)})$$

Die Determinante der Koeffizienten des Gleichungssystems verschwindet, die $C_\nu^{(2)}$ sind also nicht voneinander unabhängig. Es wird gelöst durch

$$C_1^{(2)} = 2/3 \lambda_1, \quad C_2^{(2)} = 2/3 \lambda_2, \quad C_3^{(2)} = 2/3 \lambda_3,$$

und es gilt

$$C_1^{(2)} + C_2^{(2)} + C_3^{(2)} = 0.$$

Für die numerische Durchrechnung seien noch einmal die Formeln zusammengestellt:

$$\bar{e}_2 = \frac{15}{8\pi} \overline{V_2^2} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right], \quad \dot{e}_2 = \frac{15}{8\pi} \overline{V_2^2} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{sec}} \right]$$

Das ist die Energiedichte von V_2 und ihre zeitliche Änderung. Die Koeffizienten $C_\nu^{(2)}$ findet man aus

$$3/2 C_1^{(2)} = \lambda_1 = \sqrt{5 \overline{V_2^2}} \cos \Phi, \quad 3/2 C_2^{(2)} = \lambda_2 = -\sqrt{5 \overline{V_2^2}} \cos(\Phi + \frac{\pi}{3}),$$

$$3/2 C_3^{(2)} = \lambda_3 = -\sqrt{5 \overline{V_2^2}} \cos(\Phi - \frac{\pi}{3})$$

Dabei ist $\cos 3\Phi = \frac{4 X_{III}}{(5 \overline{V_2^2})^{3/2}}$

Wegen X_{III} siehe (14).

$\text{tg } \phi_\nu$ und $\text{tg } \theta_\nu$ sind gemäß den Formeln (17) zu berechnen.

Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen sind in den Tabellen 7a, b, c, d und 8a und in den Abbildungen 6 bis 12 dargestellt.

Bemerkenswert ist, daß die Energiedichte des gesamten Quadrupols auf der Erdoberfläche zunimmt. Wenn man allerdings die Energiedichte, die zu allen Abschnitten der Potentialentwicklungen gehört, als Funktion der Zeit darstellt, findet man, daß sie trotzdem abnimmt. Siehe [5a], wo diese Rechnungen durchgeführt sind. Von den Koeffizienten der 3 einfachen Quadru-

pole sind besonders $C_1^{(2)}$ und $C_3^{(2)}$ interessant. Ihre absoluten Beträge nehmen ständig zu. $C_1^{(2)}$ wird ständig größer, $C_3^{(2)}$, das negativ ist, kleiner. Die Rechnungen ergeben auch die geographischen Koordinaten der 3 einfachen Quadrupole. Auch hier beanspruchen $P_1^{(2)}$ und $P_3^{(2)}$ besonderes Interesse. Ihre Westwärtsdrift beträgt in 100 Jahren $24,95^\circ$ bzw. $23,20^\circ$, während $P_2^{(2)}$ nur $14,77^\circ$ nach Westen wanderte. $P_1^{(2)}$ wanderte in 100 Jahren um $10,24^\circ$ nach Süden, $P_3^{(2)}$ um $11,96^\circ$ nach Norden; $P_3^{(2)}$ beschreibt dagegen eine gekrümmte Kurve. Diese Winkel liegen weit oberhalb von den Werten, die *E. C. Bullard* und seine Mitarbeiter als Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes erhalten haben ($18^\circ/100$ Jahr). Das gilt auch noch, wenn man nur die Veränderungen seit 1900 berücksichtigt. Man muß also annehmen, daß die übrigen Multipole (1., 3., 4. ... Ordnung) mit weit geringerer Geschwindigkeit nach Westen wandern. *Vestine* [6] fand mit Hilfe des exzentrischen Dipols eine Westwärtswanderung des Nichtdipolfeldes von $30^\circ/100$ Jahre. Die Bearbeitung seiner Daten nach unserer Methode ist noch nicht abgeschlossen. Unsere Diskussion seiner Ergebnisse soll daher später veröffentlicht werden.

Besonderes Interesse verdient noch die Lage der Punkte $P_1^{(2)}$ und $P_3^{(2)}$ relativ zum Dipol. Wir beschränken uns dabei auf die Nordhalbkugel. Wir bezeichnen mit α und β die Poldistanz in veränderlichen geomagnetischen Koordinaten (die also mit dem Dipol wandern), mit γ und δ die "Westwärtsdrift" in 100 Jahren, und zwar sollen α_1, α_2 und γ_1, γ_2 die Lage zur Epoche 1850 bzw. 1950 für $P_1^{(2)}$ angeben; β_1, β_2 und δ_1, δ_2 sind die entsprechenden Angaben für $P_3^{(2)}$. (Siehe Tabelle 7 d).

Die Werte zeigen, daß $P_1^{(2)}$ in veränderlichen geomagnetischen Koordinaten langsam nach Süden wanderte, dafür aber kräftig nach Westen, während $P_3^{(2)}$ sich stark nach Norden bewegt, dafür aber schwach nach Westen. In $P_3^{(2)}$ hat der einfache Quadrupol als Pol dasselbe Vorzeichen wie der Dipol. Man könnte etwa sagen, daß diese beiden Pole sich anziehen, während $P^{(1)}$ und $P_1^{(2)}$ einander abstoßen.

In den Kurven kommen kleine Unregelmäßigkeiten vor. Da wir ausgeglichene Ausgangswerte benutzt haben, müssen sie auf Abrundungsfehler und ähnliche Quellen zurückgeführt werden. Bei einem ziemlich langen Rechnungsgang erscheint das immerhin als möglich. Größere Fehler können nicht vorkommen. Die aus den 3 Eigenwerten berechneten Punkte $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$, $P_3^{(2)}$ müssen Winkeldistanzen von 90° voneinander haben. Tabel-

le 7c gibt in Hundertstelgrad die Abweichungen davon an. Da ihr Maximum bei $0,03^\circ$ liegt, scheint gesichert zu sein, daß keine größeren Rechenfehler vorkommen.

III. Über den Oktupol

Die Behandlung von V_3 nach derselben Methode wie V_2 behandelt wurde, stößt auf einige Schwierigkeiten, weil das Gleichungssystem, das zu lösen ist, nicht mehr linear ist.

Gegeben ist

$$\begin{aligned}
 V_3 = & g_3^0 P_3^0(\cos \theta) + g_3^1 P_3^1(\cos \theta) \cos \phi + h_3^1 P_3^1(\cos \theta) \sin \phi + \\
 (20) \quad & + g_3^2 P_3^2(\cos \theta) \cdot \cos 2\phi + h_3^2 P_3^2(\cos \theta) \cdot \sin 2\phi + \\
 & g_3^3 P_3^3(\cos \theta) \cos 3\phi + h_3^3 P_3^3(\cos \theta) \cdot \sin 3\phi.
 \end{aligned}$$

Es ist auch hier leicht, V_3 auf die entsprechende kubische Form zu bringen.

$$\begin{aligned}
 (20 \text{ a}) \quad V_3 = & x_{111} \xi^3 + x_{222} \eta^3 + x_{333} \zeta^3 + 3 x_{112} \xi^2 \eta + 3 x_{113} \xi^2 \eta + \\
 & + 3 x_{122} \xi \eta^2 + 3 x_{133} \xi \zeta^2 + 3 x_{223} \eta^2 \zeta + 3 x_{233} \eta \zeta^2 + \\
 & + 6 x_{123} \xi \eta \zeta.
 \end{aligned}$$

Einfache Rechnungen geben die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 g_3^0 P_3^0(\cos \theta) &= \frac{1}{2} g_3^0 (2 \xi^3 - 3 \eta^2 \xi - 3 \zeta^2 \xi) \\
 g_3^1 P_3^1(\cos \theta) \cos \phi &= + \frac{1}{4} \sqrt{6} g_3^1 (-4 \xi^2 \eta + \eta^3 + \eta \zeta^2)
 \end{aligned}$$

$$h_3^1 P_3^1 (\cos \theta) \sin \phi = +\frac{1}{4} \sqrt{6} h_3^1 (-4 \xi^2 \zeta + \eta^2 \zeta + \zeta^3)$$

$$g_3^2 P_3^2 (\cos \theta) \cos 2\phi = \frac{1}{2} \sqrt{15} g_3^2 (\xi \eta^2 - \xi \zeta^2)$$

$$h_3^2 P_3^2 (\cos \theta) \sin 2\phi = \sqrt{15} h_3^2 \xi \eta \zeta$$

$$g_3^3 P_3^3 (\cos \theta) \cos 3\phi = \frac{1}{4} \sqrt{10} g_3^3 (-\eta^3 + 3\eta \zeta^2)$$

$$h_3^3 P_3^3 (\cos \theta) \sin 3\phi = \frac{1}{4} \sqrt{10} h_3^3 (\zeta^3 - 3\zeta \eta^2)$$

Wenn man die Terme nach $\xi^3, \eta^3, \zeta^3, \xi^2 \eta, \dots$ ordnet und mit den Koeffizienten von (20) vergleicht, erhält man:

$$x_{111} = g_3^0, \quad x_{222} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} g_3^1 - \sqrt{10} g_3^2), \quad x_{333} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} h_3^1 + \sqrt{10} h_3^3),$$

$$x_{112} = -\frac{1}{3} \sqrt{6} g_3^1,$$

(21)

$$x_{113} = -\frac{1}{3} \sqrt{6} h_3^1, \quad x_{122} = \frac{1}{6} (\sqrt{15} g_3^2 - 3 g_3^0), \quad x_{133} = -\frac{1}{6} (\sqrt{15} g_3^2 + 3 g_3^0),$$

$$x_{223} = \frac{1}{12} (\sqrt{6} h_3^1 - 3\sqrt{10} h_3^2), \quad x_{233} = \frac{1}{12} (\sqrt{6} h_3^1 + 3\sqrt{10} g_3^3), \quad x_{123} = \frac{1}{6} \sqrt{15} h_3^2.$$

Die dreidimensionale Matrix der kubischen Form ist symmetrisch. Alle Koeffizienten, die durch Permutation der Indizes auseinander hervorgehen können, sind einander gleich. Wenn allerdings alle Indizes einander gleich sind, sind keine Permutationen möglich; wenn 2, und zwar nur 2, einander gleich sind, sind 3 Permutationen vorhanden. Dagegen kann (123) 6 mal permutiert werden. Von den 27 Koeffizienten der kubischen Form sind also nur 10 voneinander verschieden. Zu demselben Schluß führt die Bedingung

$$\nabla \times \nabla \cdot V_3 = 0.$$

Setzt man nämlich die Form

$$V_3 = x_{111} \xi^3 + x_{222} \eta^3 + x_{333} \zeta^3 + 3x_{112} \xi^2 \eta + 3x_{113} \xi^2 \zeta + 3x_{122} \xi \eta^2 + \\ + 3x_{133} \xi \zeta^2 + 3x_{223} \eta^2 \zeta + 3x_{233} \eta \zeta^2 + 6x_{123} \xi \eta \zeta$$

voraus und bildet den Gradienten

$$\frac{\partial V_3}{\partial \xi} = V_{3\xi} = 3(x_{111} \xi^2 + 2x_{112} \xi \eta + 2x_{113} \xi \zeta + x_{122} \eta^2 + x_{133} \zeta^2 + \\ + 2x_{123} \eta \zeta)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial \eta} = V_{3\eta} = 3(x_{222} \eta^2 + x_{112} \xi^2 + 2x_{122} \xi \eta + 2x_{223} \eta \zeta + x_{233} \zeta^2 + \\ + 2x_{123} \xi \zeta)$$

(22)

$$\frac{\partial V_3}{\partial \zeta} = V_{3\zeta} = 3(x_{333} \zeta^2 + x_{113} \xi^2 + 2x_{133} \xi \zeta + x_{223} \eta^2 + 2x_{233} \zeta \eta + \\ + 2x_{123} \xi \zeta),$$

so kann man weiter schließen:

Die Komponenten der Rotation des Vektors $\text{rot} \left\{ V_{3\xi}, V_{3\eta}, V_{3\zeta} \right\}$

erhält man aus

$$\mathbf{i} \left(\frac{\partial V_{3\zeta}}{\partial \eta} - \frac{\partial V_{3\eta}}{\partial \zeta} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial V_{3\xi}}{\partial \zeta} - \frac{\partial V_{3\zeta}}{\partial \xi} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial V_{3\eta}}{\partial \xi} - \frac{\partial V_{3\xi}}{\partial \eta} \right) =$$

$$\mathbf{i} \cdot 2 \cdot [(x_{223} - x_{223}) \eta + (x_{233} - x_{233}) \zeta + (x_{123} - x_{123}) \xi] +$$

$$i \cdot 2 \cdot [(x_{133} - x_{133}) \xi + (x_{113} - x_{113}) \zeta + (x_{123} - x_{123}) \eta] +$$

$$f \cdot 2 \cdot [(x_{112} - x_{112}) \xi + (x_{122} - x_{122}) \eta + (x_{123} - x_{123}) \zeta] \equiv 0$$

Sie verschwinden identisch. Die Bedingung, daß die Matrix der kubischen Form in dem angegebenen Sinne symmetrisch ist, ist mit der identisch, daß die Rotation der magnetischen Feldstärke verschwindet.

Die 10 voneinander verschiedenen Koeffizienten sind aber nicht voneinander unabhängig. Ihnen sind noch 3 Bedingungen aufzuerlegen, weil $\nabla \cdot \nabla V_3 = 0$ gelten muß. Aus (22) folgt

$$\nabla \cdot \nabla \cdot V_3 = 6 \xi (x_{111} + x_{122} + x_{133}) + 6 \eta (x_{112} + x_{222} + x_{233}) + 6 \zeta \cdot$$

$$\cdot (x_{113} + x_{223} + x_{333}) = 0$$

Notwendig und hinreichend für das Verschwinden von $\nabla \cdot \nabla V_3$ ist, daß gelten:

$$(23) \quad x_{111} + x_{122} + x_{133} = 0, \quad x_{112} + x_{222} + x_{233} = 0,$$

$$x_{113} + x_{223} + x_{333} = 0$$

Auf Grund der Gleichungen (21) sind diese Bedingungen identisch erfüllt, wie man leicht nachrechnet. Wir bemerken, daß die Summen (23) die Spuren der zweidimensionalen symmetrischen Matrizen sind, die man erhält, wenn man nacheinander die 1 als ersten Index festhält und die beiden anderen laufen läßt, dann die 2 als ersten und schließlich die 3 als ersten Index festhält und die beiden anderen laufen läßt.

Das von uns vorgeschlagene Verfahren, die Extreme von V_3 unter der Nebenbedingung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ zu bestimmen, führt zu dem folgenden nichtlinearen Gleichungssystem von 3 Gleichungen für 3 Unbekannte ξ, η, ζ .

(24)

$$x_{111} \xi^2 + 2 x_{112} \xi \eta + 2 x_{113} \xi \zeta + x_{122} \eta^2 + x_{133} \zeta^2 + 2 x_{123} \eta \zeta = \frac{2}{3} \lambda \xi$$

$$x_{222} \eta^2 + 2 x_{122} \xi \eta + 2 x_{223} \eta \zeta + x_{233} \zeta^2 + x_{112} \xi^2 + 2 x_{123} \xi \zeta = \frac{2}{3} \lambda \eta$$

$$x_{333} \zeta^2 + 2 x_{133} \xi \zeta + 2 x_{233} \eta \zeta + x_{113} \xi^2 + x_{223} \eta^2 + 2 x_{123} \xi \eta = \frac{2}{3} \lambda \zeta$$

Dieses Gleichungssystem hat nur Lösungen für geeignete Werte des Parameters λ . Wir können die Berechnung des Parameters erleichtern, wenn wir einführen $\lambda^* = \frac{1}{3} \frac{\lambda}{\zeta}$ und die Gleichungen (24) durch ξ^2 dividieren.

Dabei bezeichnen wir $\eta^* = \frac{\eta}{\xi}$, $\zeta^* = \frac{\zeta}{\xi}$, so daß nur noch 3 voneinander unabhängige Unbekannte η^* , ζ^* , λ^* vorhanden sind. Schließlich führen wir, um allgemeine algebraische Sätze benutzen zu können, wieder homogene Koordinaten ein:

$$\eta^* = \frac{y}{x}, \quad \zeta^* = \frac{z}{x}$$

und erhalten mit

$$(x_{111} - 2\lambda^*) = x_{111}^*, \quad (x_{122} - \lambda^*) = x_{122}^*, \quad x_{233} - \lambda^* = x_{233}^*$$

$$u = x_{111}^* x^2 + 2 x_{112} x y + 2 x_{113} x z + x_{122} y^2 + 2 x_{123} y z + x_{133} z^2 = 0$$

(24 a)

$$v = x_{112} x^2 + 2 x_{122}^* x y + 2 x_{123} x z + x_{222} y^2 + 2 x_{223} y z + x_{233} z^2 = 0$$

$$w = x_{113} x^2 + 2 x_{123} x y + 2 x_{133}^* x z + x_{223} y^2 + 2 x_{233} y z + x_{333} z^2 = 0$$

Die Elimination läßt sich am besten durchführen, indem man den folgenden Satz benutzt: ([7]). Wenn das soeben abgeleitete System von homogenen Gleichungen Lösungssysteme hat, so verschwinden für sie die Differentialquotienten $\frac{\partial J}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial z} = 0$, falls $J = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ die Jacobi'sche Determinante ist.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x_{111} x + x_{122}^* y + x_{123} z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x_{122}^* x + x_{222} y + x_{223} z),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2(x_{112}x + x_{122}^*y + x_{123}z), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2(x_{122}^*x + x_{222}y + x_{223}z),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2(x_{112}x + x_{123}y + x_{133}^*z), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2(x_{123}x + x_{223}y + x_{233}z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2(x_{123}x + x_{223}y + x_{233}z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 2(x_{123}x + x_{223}y + x_{233}z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2(x_{133}^*x + x_{233}y + x_{333}z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \text{ hat die folgende Gestalt: } & 3x^2 \underbrace{\begin{vmatrix} x_{111}^* & x_{112} & x_{113} \\ x_{112} & x_{122} & x_{123} \\ x_{113} & x_{123} & x_{133}^* \end{vmatrix}}_{a_{11}x^2} + \\ & + 2xy \underbrace{\left\{ \begin{vmatrix} x_{111}^* & x_{112} & x_{123} \\ x_{123} & x_{122}^* & x_{223} \\ x_{113} & x_{123} & x_{233} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{111}^* & x_{122} & x_{113} \\ x_{112} & x_{222} & x_{123} \\ x_{113} & x_{223} & x_{133} \end{vmatrix} \right\}}_{2a_{12}xy} + \\ & + 2xz \underbrace{\left\{ \begin{vmatrix} x_{111}^* & x_{112} & x_{133} \\ x_{112} & x_{122} & x_{233} \\ x_{113} & x_{123} & x_{333} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{111}^* & x_{123} & x_{113} \\ x_{112} & x_{223} & x_{123} \\ x_{113} & x_{233} & x_{133}^* \end{vmatrix} \right\}}_{2xz a_{13}} + \\ & + y^2 \underbrace{\left\{ \begin{vmatrix} x_{111}^* & x_{122} & x_{123} \\ x_{112} & x_{222} & x_{223} \\ x_{113} & x_{223} & x_{233} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{112} & x_{122} & x_{113} \\ x_{122}^* & x_{222} & x_{123} \\ x_{123} & x_{223} & x_{133}^* \end{vmatrix} \right\}}_{a_{22}y^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2yz \left\{ \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc} x_{111}^* & x_{122} & x_{133} \\ x_{112} & x_{222} & x_{233} \\ x_{113} & x_{223} & x_{333} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} x_{113} & x_{112} & x_{123} \\ x_{123} & x_{122}^* & x_{223} \\ x_{133}^* & x_{123} & x_{233} \end{array} \right] \right\} + \\
& + Z^2 \left\{ \left[\begin{array}{ccc} x_{111}^* & x_{123} & x_{133} \\ x_{112} & x_{223} & x_{233} \\ x_{113} & x_{233} & x_{333} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} x_{113} & x_{112} & x_{133} \\ x_{123} & x_{122}^* & x_{233} \\ x_{133}^* & x_{123} & x_{333} \end{array} \right] \right\} \\
& \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{2a_{13}yz} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{a_{33}Z^2}
\end{aligned}$$

Man kann sie mit den angegebenen Bezeichnungen so schreiben:

$$(25 a) \quad \frac{\partial J}{\partial x} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

$\frac{\partial J}{\partial y} = 0$ läßt sich auf eine entsprechende Gestalt bringen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial y} &= x^2 \left\{ \left[\begin{array}{ccc} x_{111}^* & x_{122} & x_{133} \\ x_{112} & x_{222} & x_{123} \\ x_{113} & x_{223} & x_{133}^* \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} x_{111}^* & x_{112} & x_{123} \\ x_{112} & x_{122}^* & x_{223} \\ x_{113} & x_{123} & x_{233} \end{array} \right] \right\} + \\
& \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{b_{11}x^2} \\
& + 2xy \left\{ \left[\begin{array}{ccc} x_{112} & x_{122} & x_{113} \\ x_{122}^* & x_{222} & x_{123} \\ x_{123} & x_{223} & x_{133}^* \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} x_{111}^* & x_{122} & x_{123} \\ x_{112} & x_{222} & x_{223} \\ x_{113} & x_{223} & x_{233} \end{array} \right] \right\} + \\
& \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{2b_{12}xy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3y^2 \underbrace{\left\{ \begin{array}{ccc} x_{112} & x_{122} & x_{123} \\ x_{122}^* & x_{223} & x_{223} \\ x_{123} & x_{223} & x_{233} \end{array} \right\}}_{b_{22} y^2} + \\
& + 2xz \underbrace{\left\{ \begin{array}{ccc|c} x_{112} & x_{123} & x_{113} & x_{111}^* \\ x_{122}^* & x_{223} & x_{123} & x_{112} \\ x_{123} & x_{233} & x_{133}^* & x_{112} \\ \hline & & & x_{222} \\ & & & x_{233} \end{array} \right\}}_{2xz b_{13}} + \\
& + 2yz \underbrace{\left\{ \begin{array}{ccc|c} x_{112} & x_{122} & x_{133} & x_{113} \\ x_{123}^* & x_{222} & x_{233} & x_{123} \\ x_{123} & x_{223} & x_{333} & x_{123} \\ \hline & & & x_{222} \\ & & & x_{223} \\ & & & x_{233}^* \\ & & & x_{233} \end{array} \right\}}_{2 b_{23} yz} + \\
& + z^2 \underbrace{\left\{ \begin{array}{ccc|c} x_{112} & x_{123} & x_{133} & x_{113} \\ x_{122}^* & x_{223} & x_{233} & x_{123} \\ x_{123} & x_{233} & x_{333} & x_{123} \\ \hline & & & x_{123} \\ & & & x_{222} \\ & & & x_{233} \\ & & & x_{133}^* \\ & & & x_{223} \\ & & & x_{333} \end{array} \right\}}_{b_{33} z^2}
\end{aligned}$$

$$(25b) \quad \frac{\partial J}{\partial y} = b_{11} x^2 + b_{12} xy + y^2 b_{22} + 2b_{13} xz + 2b_{23} yz + b_{33} z^2.$$

Die entsprechende Gleichung $\frac{\partial J}{\partial z} = 0$ soll ebenfalls aufgestellt werden

$$\frac{\partial J}{\partial z} = x^2 \underbrace{\left\{ \begin{array}{ccc|c} x_{111}^* & x_{123} & x_{113} & x_{111}^* \\ x_{112} & x_{223} & x_{123} & x_{112} \\ x_{113} & x_{233} & x_{133}^* & x_{112} \\ \hline & & & x_{122} \\ & & & x_{123} \\ & & & x_{133} \\ & & & x_{222} \\ & & & x_{223} \\ & & & x_{233} \end{array} \right\}}_{c_{11} x^2} +$$

$$+ 2xy \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x_{113} & x_{112} & x_{123} \\ x_{123} & x_{122}^* & x_{223} \\ x_{133}^* & x_{123} & x_{233} \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} x_{111}^* & x_{122} & x_{133} \\ x_{112} & x_{222} & x_{233} \\ x_{113} & x_{223} & x_{333} \end{array} \right| \end{array} \right\} +$$

$2c_{12}xy$

$$+ 2xz \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x_{113} & x_{112} & x_{133} \\ x_{123} & x_{122}^* & x_{233} \\ x_{133}^* & x_{123} & x_{333} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} x_{111}^* & x_{123} & x_{133} \\ x_{112} & x_{223} & x_{233} \\ x_{113} & x_{233} & x_{333} \end{array} \right| \end{array} \right\} +$$

$2c_{13}xz$

$$+ y^2 \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x_{113} & x_{122} & x_{123} \\ x_{123} & x_{222} & x_{223} \\ x_{133}^* & x_{223} & x_{233} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} x_{112} & x_{122} & x_{133} \\ x_{122}^* & x_{222} & x_{233} \\ x_{123} & x_{223} & x_{333} \end{array} \right| \end{array} \right\} +$$

$c_{22}y^2$

$$+ 3z^2 \left\{ \left| \begin{array}{ccc} x_{113} & x_{123} & x_{133} \\ x_{123} & x_{223} & x_{233} \\ x_{133}^* & x_{233} & x_{333} \end{array} \right| \right\} +$$

$c_{33}z^2$

$$+ 2yz \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x_{113} & x_{122} & x_{133} \\ x_{123} & x_{222} & x_{233} \\ x_{133}^* & x_{223} & x_{333} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} x_{112} & x_{123} & x_{133} \\ x_{122}^* & x_{223} & x_{233} \\ x_{123} & x_{233} & x_{333} \end{array} \right| \end{array} \right\}$$

$2c_{23}yz$

$$(25c) \quad \frac{\partial J}{\partial z} = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + c_{22}y^2 + 2yzc_{23} + c_{33}z^2$$

Die Resultante des Gleichungssystems (24 a) erhält man dann in der folgenden Form

$$(26) \begin{vmatrix} x_{111}^* & x_{112} & x_{113} & x_{122} & x_{123} & x_{133} \\ x_{112} & x_{122}^* & x_{123} & x_{222} & x_{223} & x_{233} \\ x_{113} & x_{123} & x_{133}^* & x_{223} & x_{233} & x_{333} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{22} & a_{23} & a_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{22} & b_{23} & b_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{22} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Sie ist die Determinante des Gleichungssystems

$$u=0, v=0, w=0, \frac{\partial J}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = 0, \frac{\partial J}{\partial z} = 0$$

und stellt die Bedingung dafür dar, daß von 0, 0, 0, 0, 0, 0 verschiedene Lösungssysteme für x^2 , xy , xz , y^2 , yz , z^2 existieren.

Ihr Verschwinden ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Gleichungssystem (24 a) Lösungssysteme hat. Die Gleichung (26) ist eine algebraische Gleichung für die λ^* -Werte, die nun explizite angegeben werden soll. Zu diesem Zwecke müssen die λ^* -Werte isoliert werden.

$$x_{111}^* = x_{111} - 2\lambda^*$$

$$x_{122}^* = x_{122} - \lambda^*$$

$$a_{11} = a_{110}\lambda^{*3} + a_{111}\lambda^{*2} + a_{112}\lambda^* + a_{113}, \quad b_{11} = b_{111}\lambda^{*2} + b_{112}\lambda^* + b_{113}$$

$$a_{12} = a_{121}\lambda^{*2} + a_{122}\lambda^* + a_{123}, \quad b_{12} = b_{121}\lambda^{*2} + b_{122}\lambda^* + b_{123}$$

$$(27 a) \quad a_{13} = a_{131}\lambda^{*2} + a_{132}\lambda^* + a_{133}, \quad b_{13} = b_{131}\lambda^{*2} + b_{132}\lambda^* + b_{133},$$

$$a_{22} = a_{221}\lambda^{*2} + a_{222}\lambda^* + a_{223}, \quad b_{22} = b_{222}\lambda^* + b_{223},$$

$$a_{23} = a_{231}\lambda^{*2} + a_{232}\lambda^* + a_{233}, \quad b_{23} = b_{232}\lambda^* + b_{233},$$

$$a_{33} = a_{331}\lambda^{*2} + a_{332}\lambda^* + a_{333}, \quad b_{33} = b_{332}\lambda^* + b_{333},$$

$$x_{133}^* = x_{133} - \lambda^*$$

$$c_{11} = c_{111}\lambda^{*2} + c_{112}\lambda^* + c_{113}$$

$$c_{12} = c_{121} \lambda^{*2} + c_{122} \lambda^* + c_{123}$$

$$c_{13} = c_{131} \lambda^{*2} + c_{132} \lambda^* + c_{133}$$

$$c_{22} = c_{222} \lambda^* + c_{223}$$

$$c_{23} = c_{232} \lambda^* + c_{233}$$

$$c_{33} = c_{332} \lambda^* + c_{333}$$

Die Koeffizienten sind Funktionen von den $x_{\kappa\lambda\mu}$. Zum Beispiel gelten:

$$a_{110} = -6, \quad a_{111} = 3(x_{111} + 2x_{122} + 2x_{133}) = 3(x_{122} + x_{133}),$$

$$b_{111} = 2(x_{222} + x_{233}), \quad c_{111} = 2(x_{223} + x_{333})$$

$$a_{112} = -3 \left\{ \begin{vmatrix} x_{111} & x_{112} \\ x_{112} & x_{122} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{111} & x_{113} \\ x_{113} & x_{133} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} x_{122} & x_{123} \\ x_{123} & x_{133} \end{vmatrix} \right\},$$

$$b_{12} = - \left\{ 2 \begin{vmatrix} x_{222} & x_{123} \\ x_{223} & x_{133} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{111} & x_{122} \\ x_{112} & x_{222} \end{vmatrix} \right\},$$

$$c_{112} = \left\{ 2 \begin{vmatrix} x_{223} & x_{123} \\ x_{233} & x_{133} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{111} & x_{123} \\ x_{112} & x_{223} \end{vmatrix} \right\}$$

$$a_{113} = 3 \begin{vmatrix} x_{111} & x_{122} & x_{123} \\ x_{112} & x_{122} & x_{123} \\ x_{113} & x_{123} & x_{133} \end{vmatrix}, \quad b_{113} = \left\{ \begin{vmatrix} x_{111} & x_{122} & x_{113} \\ x_{112} & x_{222} & x_{123} \\ x_{113} & x_{223} & x_{133} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{111} & x_{112} & x_{123} \\ x_{112} & x_{122} & x_{223} \\ x_{113} & x_{123} & x_{233} \end{vmatrix} \right\},$$

$$(27b) \quad c_{113} = \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x_{111} & x_{123} & x_{113} \\ x_{112} & x_{223} & x_{123} \\ x_{113} & x_{233} & x_{133} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} x_{111} & x_{112} & x_{133} \\ x_{112} & x_{122} & x_{233} \\ x_{113} & x_{123} & x_{333} \end{array} \right| \end{array} \right\}$$

Die übrigen Koeffizienten sollen an anderer Stelle angegeben werden. Man kann mit den Größen (27 a) die Gleichung (26) folgendermaßen schreiben:

$$0 = \begin{array}{ccc} x_{111} - 2\lambda^* & x_{112} & x_{113} \\ x_{112} & x_{122} - \lambda^* & x_{123} \\ x_{113} & x_{123} & x_{133} - \lambda^* \\ a_{110}\lambda^{*3} + a_{111}\lambda^{*2} + a_{112}\lambda^* + a_{113} & a_{121}\lambda^{*2} + a_{122}\lambda^* + a_{123} & a_{131}\lambda^{*2} + a_{132}\lambda^* + a_{133} \\ b_{111}\lambda^{*2} + b_{112}\lambda^* + b_{113} & b_{121}\lambda^{*2} + b_{122}\lambda^* + b_{123} & b_{131}\lambda^{*2} + b_{132}\lambda^* + b_{133} \\ c_{111}\lambda^{*2} + c_{112}\lambda^* + c_{113} & c_{121}\lambda^{*2} + c_{122}\lambda^* + c_{123} & c_{131}\lambda^{*2} + c_{132}\lambda^* + c_{133} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_{122} & x_{123} & x_{133} \\ x_{222} & x_{223} & x_{233} \\ x_{223} & x_{233} & x_{333} \\ a_{221}\lambda^{*2} + a_{222}\lambda^* + a_{223} & a_{231}\lambda^{*2} + a_{232}\lambda^* + a_{233} & a_{331}\lambda^{*2} + a_{332}\lambda^* + a_{333} \\ b_{222}\lambda^* + b_{223} & b_{232}\lambda^* + b_{233} & b_{332}\lambda^* + b_{333} \\ c_{222}\lambda^* + c_{223} & c_{232}\lambda^* + c_{233} & c_{332}\lambda^* + c_{333} \end{array}$$

Diese Gleichung ist eine algebraische Gleichung 7ten Grades für λ^* von sehr unübersichtlicher Gestalt, die für die praktische Rechnung kaum zu gebrauchen ist. Alle ihre Wurzeln müssen reell sein. Wenn man nämlich die Gleichungen (24) in der folgenden Form schreibt:

$$\frac{\partial V_3}{\partial \xi_\nu} = 2\lambda_\nu \xi_\nu, \quad \frac{\partial V_3}{\partial \eta_\nu} = 2\lambda_\nu \eta_\nu, \quad \frac{\partial V_3}{\partial \zeta_\nu} = 2\lambda_\nu \zeta_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, 7.$$

sie multipliziert nacheinander mit ξ_ν , η_ν , ζ_ν und addiert, so erhält man

$$\xi_\nu \frac{\partial V_3}{\partial \xi_\nu} + \eta_\nu \frac{\partial V_3}{\partial \eta_\nu} + \zeta_\nu \frac{\partial V_3}{\partial \zeta_\nu} = 3 V_3(\nu) = 2 \lambda_\nu,$$

$$\lambda_\nu = \frac{3}{2} V_3(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$$

$V_3(\nu)$ soll dabei den Wert der Funktion V_3 an der Stelle $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ bedeuten. Er ist auf jeden Fall reell und beschränkt. Wenn zufällig $\xi_\nu = 0$ sein sollte, so wird λ_ν^* über alle Grenzen wachsen. Das ist nicht zu erwarten. Zu jedem λ_ν^* gehört vermöge der Gleichungen (24a) eine Richtung, die durch ϕ_ν, θ_ν angegeben werden kann. Wie man sich leicht klarmacht, sind die Richtungen nicht alle willkürlich. Eine erste kann durch ϕ_1, θ_1 festgelegt werden. Die übrigen müssen feste Winkel gegeneinander haben, ähnlich wie bei V_2 , wo drei Eigenvektoren ein regelmäßiges Oktaeder ausspannen. 7 Richtungen spannen, wenn sie möglichst regelmäßig auf den Halbraum verteilt werden, ein Rhombendodekaeder aus. Da die Numerierung der Eigenwerte willkürlich ist, kann man annehmen, daß die Richtungen regelmäßig verteilt sind. Die räumliche Lage des Rhombendodekaeders ist durch ϕ_1, θ_1 und durch einen weiteren Winkel bestimmt. Die Eigenwerte λ_ν sind ebenfalls nicht alle unabhängig voneinander. Es stehen uns 7 unabhängige Parameter zur Verfügung. Da schon 3 Winkel von ihnen unabhängig sind, können nur 4 λ_ν -Werte voneinander unabhängig sein. Eine genauere Untersuchung soll an anderer Stelle erfolgen.

B. Physikalische Veranschaulichungen der verschiedenen Glieder der Potentialentwicklungen

Bekanntlich stellt im Gegensatz zum Stabmagneten eine homogen magnetisierte Kugel ein Dipolfeld exakt dar. (S.z.B. [5]).

$$(29) \quad a V_1 = \text{Vol}(a_1) (\mathfrak{M}_m \cdot \nabla) \frac{1}{r_a}$$

$\text{Vol}(a_1)$ ist das Volumen der Kugel mit dem Radius a_1 , \mathfrak{M}_m ihre Magnetisierung, r_a der Radius des Aufpunktes, vom Kugelmittelpunkt aus gemessen. Wir identifizieren a_1 mit dem Radius des flüssigen oder gasförmigen Erdkerns. Man kann sich auch noch ein anderes Bild von der Entstehung

eines Dipols machen, indem man sich ihn durch ein elektrisches Stromsystem erzeugt denkt, das an der Oberfläche der Kugel mit dem Radius a_1 fließt.

Man denke sich den Erdkern senkrecht zur Achse des Dipols in Scheiben zerschnitten von der Dicke

$$dx = -a_1 \sin \theta d\theta = a_1 d(\cos \theta).$$

An der Umrandung jeder Scheibe soll tangential ein elektrischer Strom

$$\tilde{j}_{1\phi} dx = \tilde{j}_{1\phi} a_1 d(\cos \theta) = -\tilde{j}_{1\phi} a_1 \sin \theta d\theta = \tilde{j}_{1\phi} a_1 d\theta$$

fließen. Die Kreisfläche, die in diesem Stromfaden eingespannt ist, denkt man sich mit einer Belegung von magnetischen Dipolen. Wenn da ein Flächenelement der Scheibe ist, so gilt

$$\frac{d\vec{m}}{da} = \tilde{j}_{1\phi} dx \cdot \vec{n}$$

\vec{n} ist die Flächennormale, die in unserem Falle (geomagnetische Koordinaten) nach Norden weist. $\tilde{j}_{1\phi} \cdot \vec{n}$ ist also einer räumlichen Dichte von magnetischen Dipolen gleichzusetzen

$$\vec{n} \tilde{j}_{1\phi} = \mathfrak{M}_m = \text{const} \cdot \vec{n}$$

$\tilde{j}_{1\phi}$ ist die Stromdichte längs eines Meridians und es gilt

$$(29a) \quad \tilde{j}_{1\phi} = \tilde{j}_{1\phi} \sin \theta = |\mathfrak{M}_m| \sin \theta$$

Die Stromdichte ist nach Westen gerichtet. Sie ist am Äquator am größten und an den Polen null. Wenn der Strom durch eine Bewegung der Elektronen zustandekommt (also in einem Elektronenleiter), so ist deren Geschwindigkeit nach Osten gerichtet.

Das Quadrupolfeld ist aus 3 einfachen Quadrupolen zusammengesetzt.

Wir benutzen ein Koordinatensystem, in dem für einen von ihnen gilt:

$$C_1^{(2)} P_2^0(\Theta_1^{(2)})$$

Die x-Achse soll in die Richtung des Nordpols dieses Systems fallen. Wir nehmen nun an, daß die Magnetisierung der Kugel mit dem Radius a_1 eine lineare Funktion des Abstandes vom Äquator ist.

$$(32) \quad \mathfrak{M}_m = \frac{\mathfrak{M}_m^{(2)} \cdot \mathbf{x}}{a_1} = \mathfrak{M}_m^{(2)} \cdot \cos \theta$$

Im Innern und an der Oberfläche der Kugel gelten die Gleichungen

$$(32a) \quad \nabla \cdot \mathfrak{M}_m = \frac{1}{a_1} |\mathfrak{M}_m^{(2)}| \quad \text{bzw.} \quad \text{Div.} \mathfrak{M}_m = -\vec{n}_0 \cdot \mathfrak{M}_m = -|\mathfrak{M}_m^{(2)}| \cos^2 \theta$$

\vec{n}_0 ist der Normalvektor auf der Kugeloberfläche in dem betrachteten Punkte. Wir berechnen das magnetische Feld, das durch diese Magnetisierung erzeugt wird, nach der folgenden bekannten Formel:

$$(33) \quad a V_2 = -\frac{1}{a_1} \int_{V_1(\text{Kugel})} \frac{|\mathfrak{M}_m^{(2)}|}{r_{12}} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi + \int_{A_1(\text{Kugel})} \frac{|\mathfrak{M}_m^{(2)}| a_1^2 \cos^2 \theta}{r_{12}} \sin \theta d\theta d\phi.$$

V_1 (Kugel) und A_1 (Kugel) bezeichnen das Volumen bzw. die Oberfläche der Kugel mit dem Radius a_1 . Wir setzen wie üblich an:

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_a^2 - 2r \cdot r_a \cos \gamma_a}} = \frac{1}{r_a} \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(\cos \gamma_a) \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\nu}$$

Dabei gehört r_a wieder zum Aufpunkt; γ_a ist der Winkel zwischen der Richtung zu ihm und der zum laufenden Punkt mit den Koordinaten r, θ, ϕ .

Im ersten Integral führt man die Integration über r aus:

$$a V_2 = -\frac{a_1^2 |\mathfrak{M}_m^{(2)}|}{r_a} \int \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{r_a}\right)^{\nu} \frac{1}{\nu+3} P_{\nu}(\cos \gamma_a) \sin \theta d\theta d\phi$$

$$+ \frac{a_1^2 |\mathfrak{M}_m^{(2)}|}{r_a} \int \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{r_a}\right)^{\nu} P_{\nu}(\cos \gamma_a) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

A_1 (Kugel)

Im zweiten Integral hat man sogleich $r = a_1$ zu setzen.

Man erhält zusammengefaßt:

$$(34) \quad a V_2 = \frac{a_1^2 |\mathfrak{M}_m^{(2)}|}{r_a} \int \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{r_a}\right)^{\nu} P_{\nu}(\cos \gamma_a) \left[-\frac{1}{\nu+3} + \cos^2 \theta \right] \sin \theta d\theta d\phi$$

A_1 (Kugel)

Wir setzen $\cos^2 \theta = \frac{1}{3} [2 P_2^0(\cos \theta) + 1]$ und entwickeln $P_\nu(\cos \gamma_a)$ wegen $\cos \gamma_a = \cos \theta \cos \theta_a + \sin \theta \sin \theta_a \cos(\phi - \phi_a)$ mit Hilfe des Additionstheorems der Kugelfunktionen.

$$P_\nu(\cos \gamma_a) = \sum_{\mu=0}^{\nu} P_\nu^\mu(\cos \theta) P_\nu^\mu(\cos \theta_a) \cos \mu(\phi - \phi_a)$$

Wir erhalten dann für $r_a > a_1$

$$a V_2 = \frac{a_1^2 |\mathfrak{M}_m^{(2)}|}{r_a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_{A_1(\text{Kugel})} \left(\frac{a_1}{r_a}\right)^\nu \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\nu+3}\right) P_\nu^\mu(\cos \theta) P_\nu^\mu(\cos \theta_a) \right.$$

$$\left. (\cos \mu \phi \cos \mu \phi_a + \sin \mu \phi \sin \mu \phi_a) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right.$$

$$(35) \quad + \frac{2}{3} \left(\frac{a_1}{r_a}\right)^\nu \int_{A_1(\text{Kugel})} P_\nu^\mu(\cos \theta) P_\nu^\mu(\cos \theta_a) (\cos \mu \phi \cos \mu \phi_a + \sin \mu \phi$$

$$\sin \mu \phi_a) P_2^0(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Wenn man die Orthogonalitätsbeziehungen (2) beachtet, erhält man:

$$(36) \quad a V_2 = \frac{a_1^4}{r_a^3} |\mathfrak{M}_m^{(2)}| \frac{2}{3} \cdot \frac{4\pi}{5} P_2^0(\cos \theta_a) = V_1(\text{Kugel}) |\mathfrak{M}_m^{(2)}| \frac{a_1}{r_a^3} P_2^0(\cos \theta_a)$$

$$= a C_1^{(2)} P_2^0(\cos \Theta_1^{(2)})$$

wobei $\theta_a = \Theta_1^{(2)}$ und $r_a = a$ ist.

Wir hatten gefunden, daß man V_2 allgemein so schreiben kann:

$$a V_2 = a C_1^{(2)} P_2(\cos \Theta_1^{(2)}) + a C_2^{(2)} P_2(\cos \Theta_2^{(2)}) + a C_3^{(2)} P_2(\cos \Theta_3^{(2)}).$$

Auf Grund des soeben erhaltenen Ergebnisses gilt:

$$(36a) \quad aC_1^{(2)} = \frac{2}{5} \frac{V_1(\text{Kugel})}{r_a^3} |\mathfrak{M}_m^{(2,1)}| \cdot a_1, \quad aC_2^{(2)} = \frac{2}{5} \frac{V_1(\text{Kugel})}{r_a^3}$$

$$|\mathfrak{M}_m^{(2,2)}| a_1, \quad aC_3^{(2)} = \frac{2}{5} \frac{V_1(\text{Kugel})}{r_a} |\mathfrak{M}_m^{(2,3)}| a_1$$

$a V_2$ ist das Potential eines magnetischen Quadrupols. Es läßt sich aus dem Potential von 3 einfachen Quadrupolen aufbauen. Die dazu gehörigen Magnetisierungen einer Kugel mit dem Radius a_1 haben die Richtungen der Achse des jeweiligen einfachen Quadrupols, an seinem Äquator besitzen sie den Wert null und sind im übrigen lineare Funktionen des Abstandes von ihm:

$$\mathfrak{M}_m^{(2,\nu)} = |\mathfrak{M}_{m0}^{(2,\nu)}| \frac{x}{a} \hat{n}_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3$$

Auch hier ist es angebracht, sich die Magnetisierungen durch Stromsysteme an der Oberfläche des Erdkerns erzeugt vorzustellen. Wir benutzen wieder die Gleichung

$$\tilde{J}_{1\phi\nu} = \mathfrak{M}_{m0}^{(2,\nu)} |\cos \theta.$$

Für die Stromdichte längs eines Meridians erhält man

$$(37) \quad \tilde{J}_{\phi\nu} = |\mathfrak{M}_{m0}^{(2,\nu)}| \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} |\mathfrak{M}_{m0}^{(2,\nu)}| \sin 2\theta, \quad \nu = 1, 2, 3$$

Bei der Poldistanz 45° des jeweiligen Koordinatensystems fließt der Strom am stärksten. Er ist auf der anderen Halbkugel entgegengesetzt gerichtet.

Ein einfacher Oktupol hat das Potential

$$aC_1^{(3)} P_3(\cos \Theta_1^{(3)})$$

Wieder soll die x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems die Kugeloberfläche im Punkt $\Theta_1^{(3)} = 0$ treffen. Wir setzen als Magnetisierung, die dieses Feld erzeugen könnte, an

$$(38) \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}_m^{(3)} \left(\frac{x^2}{a_1^2} - c o_3 \right) = \mathfrak{M}_m^{(3)} (\cos^2 \theta - c o_3)$$

wobei θ die laufende Koordinate vom selben Pol aus wie $\Theta_1^{(3)}$ bedeutet. Wir bilden

$$(38b) \nabla \cdot \mathfrak{M}_m = \frac{2}{a_1^2} |\mathfrak{M}_m^{(3)}| x = \frac{2}{a_1} |\mathfrak{M}_m^{(3)}| \cos \theta, \text{ Div } \mathfrak{M}_m = -\vec{\mu}_0 \cdot \mathfrak{M}_m = \\ -|\mathfrak{M}_m^{(3)}| (\cos^3 \theta - c o_3 \cos \theta)$$

An Stelle von (33) benutzen wir:

$$a V_3 = -\frac{1}{a_1} \int_{V_1(\text{Kugel})} \frac{2}{a_1} |\mathfrak{M}_m^{(3)}| \frac{\cos \theta \sin \theta r^2}{r_{12}} dr d\phi d\theta + \\ + \int_{A_1(\text{Kugel})} \frac{|\mathfrak{M}_m^{(3)}| (\cos^3 \theta - c o_3 \cos \theta) a_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{r_{12}} d\phi d\theta$$

und erhalten statt (34)

$$a V_3 = \frac{a_1^2 |\mathfrak{M}_m^{(3)}|}{r_a} \int_{A_1(\text{Kugel})} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{r_a} \right) P_\nu (\cos \gamma_a) \left[\frac{2}{5} P_3 (\cos \theta) + \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{\nu+3} - c o_3 \right) \right. \\ \left. P_1 (\cos \theta) \right] \sin \theta d\theta d\phi$$

Wir ersetzen dabei $\cos^3 \theta = \frac{1}{5} (2 P_3 (\cos \theta) + 3 \cos \theta)$

Wenn man $c o_3 = \frac{3}{5} - \frac{2}{4} = \frac{12-10}{20} = \frac{1}{10}$ setzt und die Orthogonalitätsrela-

tionen (2) beachtet, erhält man

$$a V_3 = \frac{a_1^5 |\mathfrak{M}_m^{(3)}|}{r_a^4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi}{7} P_3^0(\cos \theta_a) = V_1(\text{Kugel}) \frac{a_1^2}{r_a^4} |\mathfrak{M}_m^{(3)}| \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}$$

$$P_3^0(\cos \theta_a) = a C_1^{(3)} P_3(\cos \Theta_1^{(3)})$$

θ_a ist hier mit $\Theta_1^{(3)}$ zu identifizieren. Man erhält also

$$a C_1^{(3)} = V_1(\text{Kugel}) |\mathfrak{M}_m^{(3)}| \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} \frac{a_1^2}{r_a^4}, \quad r_a = a$$

Wir hatten gesehen, daß sich wahrscheinlich V_3 aus 7 solchen einfachen Oktupolen zusammensetzen läßt. Man kann sie sich auch als Stromsysteme vorstellen. Entsprechend (37) erhalten wir

$$\tilde{j}_\phi = |\mathfrak{M}_m^{(3)}| \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{10} \right) \sin \theta$$

Die Stromdichte, für die Streckeneinheit des Meridians gerechnet, nimmt von den Polen aus zunächst einmal zu bis zu einem Maximum, das bei $\cos \theta_m$ liegt, durch

$$\cos \theta_m \left(-2 \sin^2 \theta_m + \cos^2 \theta_m - \frac{1}{10} \right) = 0$$

bestimmt.

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\cos \theta_m = \sqrt{0,7}, \quad \theta_m = 33,21^\circ.$$

Bei $\cos^2 \theta_0 = 0,1$, also $\theta_0 = 71,56^\circ$, wird die Stromdichte null, um dann am Äquator des betrachteten Koordinatensystems in entgegengesetzter Richtung zu fließen.

Über die Stromdichten, die das Dipolfeld bzw. das Quadrupolfeld erzeugen könnten, geben die folgenden Formeln und Tabellen Auskunft.

I. Der magnetische Dipol

An seinem magnetischen Äquator gilt nach (29) $\tilde{j}_{\phi_m} = |\mathfrak{M}_m^{(1)}|$ und aus (9) und (29) folgt $\text{ad} = \text{Vol}(a_1) \frac{1}{r_a^2} |\mathfrak{M}_m^{(1)}|$, wobei $r_a = a$ (Erdradius) zu setzen ist, und die Tabelle 9.

II. Die magnetischen Quadrupole

In der Breite von 45° eines jeden von ihnen gilt nach

$$(37) \quad \tilde{j}_{\phi_m}^{(2)} = \frac{1}{2} |\mathfrak{M}_m^{(2)}| \quad \text{und nach (36 a)}$$

$$\tilde{j}_{\phi_m}^{(2,1)} = \frac{5 \cdot a^4 \cdot C_1^{(2)}}{2 \cdot 2 \cdot a_1 \text{Vol}(a_1)}, \quad \tilde{j}_{\phi_m}^{(2,2)} = \frac{5 \cdot a^4 \cdot C_2^{(2)}}{2 \cdot 2 \cdot a_1 \text{Vol}(a_1)},$$

$$\tilde{j}_{\phi_m}^{(2,3)} = \frac{5 \cdot a^4 \cdot C_3^{(2)}}{2 \cdot 2 \cdot a_1 \text{Vol}(a_1)}. \quad \text{Siehe Tabelle 10.}$$

Man kann den Standpunkt vertreten, daß diese Veranschaulichungen rein formaler Natur sind, so wie die Entwicklungen des erdmagnetischen Potentials nach Kugelfunktionen als rein formale Darstellung angesehen werden können. Wir sind dagegen der Meinung, daß man diesen formalen Darstellungen bis zu einem gewissen Grade einen physikalischen Sinn beilegen kann. Die Prozesse, mit denen die soeben besprochenen Stromsysteme verknüpft sind und die das erdmagnetische Feld letztlich erzeugen, sind an den Erdkern und seine geometrische und physikalische Struktur gebunden. Man hat Gründe anzunehmen, daß der innere Erdkern (auch Zentralkörper genannt [1]) ein fester Körper ist. Die genannten Prozesse müssen sich also in dem Raum zwischen den Radien $a_1 \approx 3500$ km und $a_2 \approx 1400$ km abspielen. Dadurch werden ihnen gewisse bevorzugte Ausmaße aufgezwungen, die mit der räumlichen Konfiguration der flüssigen oder gasförmigen Schicht des äußeren Erdkerns verträglich sind. So ist es gewiß kein Zufall, daß die Energiedichten e_ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots$ mit wachsendem ν stark abnehmen.

Einen anderen Gesichtspunkt, der die Ansicht stützen kann, daß den

formalen Veranschaulichungen physikalische Bedeutung zukommen kann, liefert die folgende Betrachtung. Wir nehmen an, daß die elektrischen Ströme, die das erdmagnetische Feld erzeugen, durch Bewegungen von Elektronen zustande kommen. Wir nehmen an

$$(38) \quad \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = 0, \mu = \mu_0, \nabla \cdot \vec{j} = 0, \mathfrak{E} = \frac{1}{\kappa_e} \vec{j}$$

(κ_e ist die elektrische Leitfähigkeit, \mathfrak{D} die dielektrische Verschiebung) und setzen voraus, daß die *Maxwellschen* Gleichungen gültig sind

$$\nabla \times \mathfrak{E} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathfrak{H} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + \vec{j}$$

Daraus folgt bekanntlich

$$(39) \quad \nabla^2 \vec{j} = \kappa_e \mu_0 \ddot{\vec{j}}$$

Die Stromsysteme, die uns zur Veranschaulichung des erdmagnetischen Feldes dienten, wiesen keine j_r -Komponente auf.

Stromfelder von diesem Typus nennt man nach *Elsasser* toroidal [8]. Wir werden hier auch poloidale Stromfelder zulassen.

Wir nehmen an, daß die Stromdichte in einem Raumpunkte des Erdkernes eine periodische Funktion der Zeit ist. Das kann aus den Beobachtungen nicht ohne weiteres herausgelesen werden. Wenn aber einmal genügend lange und zuverlässige Reihen von Potentialentwicklungen vorliegen, werden wahrscheinlich gewisse Quasiperioden zu erkennen sein, deren Dauer $\tau = \frac{1}{\nu}$ zwischen 500 und 2000 Jahren liegen könnte. Für die folgende Abschätzung genügt es,

$$\vec{j} = \vec{j}_0 e^{i2\pi\nu t}$$

anzusetzen. Man erhält aus (39)

$$(40) \quad (\nabla^2 - 2\pi\nu i \kappa_e \mu_0) \vec{j}_0 = (\nabla^2 - k^2) \vec{j}_0 = 0$$

wobei k eine komplexe Zahl ist. Für toroidale Stromdichtefelder macht man bekanntlich nach *Lamb* den Ansatz

$$(41) \quad \vec{j}_0 = [\mathbf{r} \times \nabla F(\mathbf{r})]$$

wobei $F(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion des Ortsvektors ist. Da man (41) auch schreiben kann

$$(41a) \quad \vec{j}_0 = \text{rot}(\mathbf{r} F(\mathbf{r}))$$

sind diese Stromdichtefelder auch divergenzfrei, d.h. es können keine Radialströme vorkommen. Poloidale Stromfelder, die auch Vertikalkomponenten aufweisen, findet man durch den Ansatz:

$$(42) \quad \vec{j}_1 = k^{-1} \text{rot} [\mathbf{r} \times \nabla F_1(\mathbf{r})]$$

Auch dieser Ansatz ist divergenzfrei. Irgendein solenoidales Stromsystem kann man durch Übereinanderlagerung von beiden Typen darstellen.

Wir zeigen, daß (41a) eine Lösung von (40) ist. Dann ist auch (41) eine Lösung. Die Rotoroperation kann man mit dem Operator $(\nabla^2 - k^2)$ vertauschen und man erhält aus (40)

$$\text{rot} \{ (\nabla^2 - k^2) (\mathbf{r} F(\mathbf{r})) \} = \text{rot} \{ \mathbf{r} (\nabla^2 - k^2) F(\mathbf{r}) + F(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r} + 2 \nabla F(\mathbf{r}) \} = 0$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $F(\mathbf{r})$ aus $(\nabla^2 - k^2) F(\mathbf{r}) = 0$ bestimmt wird. Wie man sieht, ist auch (42) eine Lösung von (40), wenn man $F_1(\mathbf{r})$ so bestimmt, daß entsprechend $(\nabla^2 - k^2) F_1(\mathbf{r}) = 0$. Für $F(\mathbf{r})$ macht man den Ansatz

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi + \phi_n^m)$$

Die Funktionen $P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi + \phi_n^m)$ genügen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \dots}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \dots}{\partial \phi^2} + n(n+1) \dots = 0$$

wobei die Punkte durch die Funktionen zu ersetzen sind. Die Funktionen $f_n(r)$ müssen dann der folgenden Differentialgleichung genügen

$$\frac{r^2 d^2 f_n(r)}{dr^2} + 2r \frac{df_n(r)}{dr} - [(n+1) + k^2 r^2] f_n(r) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet:

$$f_n(r) = r^{-\frac{1}{2}} \left[A J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right) + B N_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right) \right]$$

Dabei ist $a_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi \kappa_e \cdot \mu_0 \nu}}$ gesetzt, das tatsächlich die Dimension einer Länge hat. Für $r \rightarrow 0$ wächst die *Neumannsche* Funktion $N_{n+\frac{1}{2}}$ über alle Grenzen, so daß sie als Lösung des Problems nicht zu gebrauchen ist. Die *Besselschen* Funktionen $J_{n+\frac{1}{2}}$ erfüllen die Randbedingung $f_n(r) = 0$ für $r = 0$. Um einen Einblick in den Verlauf der Lösungen zu bekommen, bestimmen wir die Größe a_0 .

In Übereinstimmung mit anderen Autoren [2], [9] (s.a. [27]) nehmen wir

$$\kappa_e = 3 \cdot 10^3 [\Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}] = 3 \cdot 10^{-6} [\text{cm}^{-2} \text{sec}] (\text{emE}) \quad \text{an.}$$

$$\mu_0 (\text{emE}) = 4\pi, \nu = \frac{1}{r}, r = 500 \text{ bzw. } 2000 \text{ Jahre. Man erhält}$$

$$a_0 = 0,82 \cdot 10^7 \text{ cm bzw. } 1,63 \cdot 10^7 \text{ cm, also} \\ 82 \text{ km, bzw. } 163 \text{ km.}$$

$$\text{Die Konstante A in } f_n(r) = A \cdot r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right)$$

wird durch Integration über $\frac{r}{a_0} \cdot dr$ zwischen 0 und 1 bestimmt. Sie hat dieselbe Dimension wie die schon benutzte Linienstromdichte \tilde{j}_ϕ .

Die Zylinderfunktionen mit halbzahligem Index $\nu = n + \frac{1}{2}$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ sind elementare Funktionen [10]. Nach den bisherigen Ausführungen sind besonders die für $n = 1, 2, 3$ interessant. Sie haben folgende Gestalt:

$$f_1(r) = A_1 r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{-\cos\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right)}{\sqrt{\frac{r}{a_0} \sqrt{i}}} + \frac{\sin\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right)}{\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i} \sqrt{\frac{r}{a_0} \sqrt{i}}\right)} \right]$$

(43)

$$f_2(r) = A_2 r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right)}{\sqrt{\frac{r}{a_0} \sqrt{i}}} \left(-1 + \frac{3}{\frac{r^2 i}{a_0^2}}\right) - \frac{3 \cos\left(\sqrt{i} \frac{r}{a_0}\right)}{\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right) \left(\sqrt{\frac{r}{a_0} \sqrt{i}}\right)} \right].$$

Wir brauchen die Lösungen nur an der Obergrenze des Erdkerns, also für Argumente $\frac{r}{a_0} \gg 1$. In diesem Bereich erhält man

$$f_1(r) \approx -A_1 r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right)}{\sqrt{\frac{r}{a_0} \sqrt{i}}}, \quad f_2(r) \approx -A_2 r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right)}{\sqrt{\frac{r}{a_0} \sqrt{i}}}.$$

Das sind besondere Fälle der allgemeinen asymptotischen Darstellung der Zylinderfunktionen [11]

$$J_\lambda(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(Z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(|Z|^{-3/2}\right)$$

Sie liefert für $n = \frac{7}{2}$

$$f_3(r) \approx A_3 r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{r}{a_0} \sqrt{i}\right)}{\sqrt{\frac{r}{a_0} \sqrt{i}}}$$

Nach unseren bisherigen Ergebnissen ist a_0 , das von ν abhängig ist, für verschiedene n verschieden. Im übrigen haben die Funktionen sehr ähnliche Gestalten. Es gelten

$$i^{1/2} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + i), \quad i^{-\frac{1}{2}} = (1 - i) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$i^{1/4} = e^{2\frac{\pi}{8}} = 0,9239 + i 0,3827$$

$$i^{-1/4} = 0,9239 - i 0,3827$$

Man erhält der Reihe nach die Realteile

$$R(f_1(r)) = -A_1 \frac{\sqrt{2a_0}}{\pi} \frac{0,9239 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \mathfrak{C}os\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) - 0,3827}{r} \\ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \mathfrak{S}in\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right)}{r}$$

$$R(f_2(r)) = -A_2 \frac{\sqrt{2a_0}}{\pi} \frac{0,9239 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \mathfrak{C}os\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) + 0,3827}{r} \\ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \mathfrak{S}in\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right)}{r}$$

$$R(f_3(r)) = A_3 \frac{\sqrt{2a_0}}{\pi} \frac{0,9239 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \mathfrak{C}os\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) + 0,3827}{r} \\ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \mathfrak{S}in\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right)}{r}$$

Man weiß ferner, daß für sehr große Argumente gilt

$$\mathfrak{C}os\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \approx \mathfrak{S}in\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \approx e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}}$$

so daß man schließlich gewinnt:

$$R(f_1(r)) = \frac{-A_1 \sqrt{2a_0}}{r} e^{+\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}} \left(0,9239 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) - 0,3827 \right. \\ \left. \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) \right)$$

$$R(f_2(r)) = + A_2 \sqrt{\frac{2a_0}{\pi}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}} \frac{0,9239 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) + 0,3827}{r} \\ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right)}{r}$$

(44)

$$R(f_3(r)) = + A_3 \sqrt{\frac{2a_0}{\pi}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}} \frac{0,9239 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right) - 0,3827}{r} \\ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{a_0}\right)}{r}$$

An den Lösungen (44) (und auch an den Lösungen (43)) ist zu erkennen, daß $f_n(r)$ in den Abständen $\pi a_0 \sqrt{2}$, d.h. in Abständen 362 km bei $r = 500$ Jahre, bzw. 725 km bei $r = 2000$ Jahre Nullstellen hat. Die Maximalwerte in den einzelnen Intervallen nehmen jeweils auf $1/23$ ab, wenn man sich von außen in den Erdkern hinein bewegen würde. Es ist naheliegend anzunehmen, daß die stärkste Stromdichte, die das sich periodisch ändernde Erdfeld erzeugt, ziemlich dicht unter der Oberfläche des Erdkerns fließt. Der induzierte Gegenstrom fließt dann in der Tiefe $\sqrt{2} \pi a_0$, aber seine Stromstärke beträgt nur $1/23$ der primären. Die primäre Stromdichte wird etwa auf $1/4$ dieses Intervalles, also auf die Tiefe a_0 , beschränkt sein, so daß die im vorstehenden gemachten Veranschaulichungen mindestens für V_1 und V_2 einen physikalischen Sinn haben. Die Ableitung der Gleichungen (44) zeigt, daß auch die poloidalen Stromdichtefelder eine mit $\sqrt{2} \pi a_0$ schalenförmige Struktur haben müssen, soweit sie als periodische Funktionen der Zeit angenommen werden. Man kann sich ihre Stromfäden etwa wie die Stromlinien sehr flacher *Bénard*-Zellen vorstellen.

Wie in [8] ausgeführt, sind die dazugehörigen Magnetfelder toroidal und treten nach außen nicht in Erscheinung.

Zu den Ausführungen muß einschränkend gesagt werden, daß die Schlüsse nur richtig sind, wenn die Bewegungen der Materie bei den Ableitungen zu vernachlässigen sind. *E. C. Bullard* [21] hat aber überzeugend gezeigt, daß die Energiequelle für das Entstehen des erdmagnetischen Feldes Konvektionsströmungen der Materie des Erdkerns sein müssen.

Wir fassen zusammen. Wenn die Materie des Erdkerns als unbewegt, in ihr eine homogene elektrische Leitfähigkeit und die Gültigkeit der gewöhnlichen *Maxwellschen* Gleichungen angenommen wird, haben die vorn dargestellten Veranschaulichungen einen physikalischen Sinn. Dabei bleibt aber die Frage offen, wie die genannten elektrischen Ströme in die Wege geleitet und unterhalten werden.

C. Über die hydromagnetischen Theorien des erdmagnetischen Hauptfeldes

Man ist im allgemeinen geneigt, das fundamentale Ergebnis von *E. C. Bullard* mit den Hilfsmitteln der Hydromagnetik zu behandeln. Ihre Differentialgleichungen bilden eine Koppelung der hydrodynamischen Differentialgleichungen mit den *Maxwellschen* Gleichungen. Wir setzen die *Navier-Stokeschen* Differentialgleichungen in der folgenden Form an:

$$(45) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\mathfrak{F}}{\rho} + \frac{1}{\rho} [\vec{j} \times \mathfrak{B}] - 2 [\vec{\Omega} \times \mathbf{v}] - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\eta}{3\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

(Bewegungsgleichungen)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0$$

(Kontinuitätsgleichung);

$\vec{\Omega}$ ist der Vektor der Rotationsgeschwindigkeit der Erde.

Bekanntlich sind die allgemeinen Gleichungen der Kontinua immer richtig, wenn für die eingepprägten Kräfte und den Spannungstensor geeignete Ansätze gemacht werden.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen ist von der *Stokeschen* Hypothese über den zweiten Koeffizienten der kinematischen Zähigkeit Gebrauch gemacht worden.

Außerdem wurde angenommen, daß sich die Normalspannungen auf ∇p reduzieren und der Ansatz von *Newton (Stokes)* geeignet ist, wonach die Tangentialspannungen dem Geschwindigkeitsabfall proportional sind. Dieser Ansatz zeichnet sich durch seine Einfachheit aus und ist schon deshalb gerechtfertigt, weil unsere Kenntnisse von der Struktur der Materie des Erdkerns sehr gering sind.

Für die dynamische Zähigkeit η nimmt *F. C. Bullard* [2], damit die Reibungskräfte zwischen Erdkern und Erdmantel klein bleiben, an

$$\eta = 10^{-2} \left[\frac{\text{g}}{\text{cm sec}} \right] = 10^{-2} [\text{poise}], \quad \nu^* = \frac{\eta}{\rho} \approx 10^{-3} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right] = 10^{-3} [\text{stok}].$$

Haruo Miki [9] kommt auf Grund sehr eingehender Untersuchungen zu dem Ergebnis, daß für einen flüssigen Erdkern

$$\eta \approx 10^{-2} - 10^{-1} [\text{poise}], \quad \text{mit } \frac{\eta}{\rho} = \nu^* \approx 10^{-3} \div 10^{-2} [\text{stok}],$$

für einen gasförmigen

$$\eta = 10^{-3} [\text{poise}], \quad \text{mit } \nu^* = 10^{-4} [\text{stok}] \text{ zu setzen ist.}$$

Diese Angaben stimmen gut überein. Als Vergleich seien angegeben

$$\eta (\text{Luft}) = 1,8 \cdot 10^{-4} [\text{poise}], \quad \frac{\eta}{\rho} = \nu^* (\text{Luft}) = 0,14 [\text{stok}] \text{ bei } 20^\circ \text{C}$$

$$\eta (\text{Wasser}) = 1,06 \cdot 10^{-2} [\text{poise}], \quad \frac{\eta}{\rho} = \nu^* (\text{Wasser}) = 1,06 \cdot 10^{-2} [\text{stok}]$$

bei 18°C .

Einander widersprechende Angaben macht *S. K. Runcorn*. In [12] wird $\eta < 10^{+6}$ [poise] angesetzt, während in [13] $\frac{\eta}{\rho} \approx 10^{+6}$ [stok] angenommen wird. Eine Begründung wird nicht angegeben. Aus der Anwendung ist aber zu erkennen, daß in [13] der turbulente Reibungsterm gemeint ist. Als Vergleich möge dienen, daß der vertikale Austauschkoefizient in der Atmosphäre $\approx 10^{+3} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$, der horizontale $\approx 10^{+8} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$ ist, ([13a]). Die Annahme von *S. K. Runcorn* in [13] erscheint daher plausibel.

In einer Strömung mit der kinematischen Zähigkeit $\nu^* \approx 10^{-3} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$ sind die Geschwindigkeitsprofile stabil, deren Höhe d durch die kritische *Reynoldssche* Zahl $R_{e \text{ krit}} \approx 1200$ (für Rohre mit dem Halbmesser d) gegeben wird.

$$d_{\text{krit}} = \frac{R_e \text{ krit } \nu^*}{\nu}$$

Für ν entnehmen wir den Ausführungen von *Elsasser* [1] den Wert $\nu \approx 0,1$ cm/sec.

Man erhält etwa $d_{\text{krit}} \approx 10$ cm.

Wenn man dazu geführt wird, größere Werte für ν anzunehmen, wird d kleiner.

In Bereichen von etwa 20 cm Durchmesser könnten nach den oben angegebenen Werten die Strömungen am Erdkern laminar sein. In den Bereichen in denen die Konvektionen stattfinden ($l = 1000$ km = 10^8 cm nach [13]), ist sie sicher turbulent. In Grenzschichten mögen immerhin Werte von $|\nabla^2 \mathbf{b}| \approx 0,1 \left[\frac{1}{\text{cm sec}} \right]$ vorkommen. Der Term $|\nu^* \nabla^2 \mathbf{b}|$ ist dann von der Größenordnung 10^{-4} , also vergleichbar dem Term der Coriolisbeschleunigung

$$2|\vec{\Omega} \times \mathbf{b}| \approx 2 \cdot 10^{-5}.$$

Wenn man die großräumige ausgeglichene Bewegung betrachtet, ändert sich das Bild vollkommen. In der freien Strömung ist die Reibungsbeschleunigung $\nu^* \nabla^2 \mathbf{b}$ neben der Coriolisbeschleunigung ganz zu vernachlässigen.

S. K. Runcorn hat ähnliche Überlegungen auch für die anderen Kräftedichten pro Masseneinheit angestellt und gefunden, daß sie alle neben der Coriolisbeschleunigung zu vernachlässigen sind [13]. Er folgert daraus im Anschluß an *J. Proudman* [14], daß die Bewegungen der Materie im Erdkern aus einer Anzahl von zylindrischen Wirbeln bestehen, deren Achse parallel zur Drehachse ist. Man kann das für Bewegungen ohne elektromagnetische Kräfte leicht folgendermaßen einsehen. Wir gehen von den Gleichungen (45), die auch für die turbulenten Zusatzbewegungen gelten sollen, zu denen der ausgeglichenen Bewegung über, die quasistationär verlaufen, indem wir den Operator

$$\bar{f}(t) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} f(t + \theta) d\theta \text{ auf die Gleichungen (45) anwenden.}$$

Man erhält bekanntlich

$$(46) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathfrak{F}}^* - 2[\vec{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}] + \frac{1}{\rho} [\vec{j} \times \mathfrak{B}] - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{p} + \nabla((\mathfrak{A}^* \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}),$$

$\vec{\mathfrak{F}}^*$ ist die ausgeglichene Kraftdichte pro Masseneinheit, \mathfrak{A}^* der kinematische Austauschensor. Auf diese Gleichungen beziehen sich die Überlegungen von S. K. Runcorn. Wir lassen zunächst die elektromagnetischen Kräfte außer acht und gehen zur Wirblichkeitsgleichung für $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{\mathfrak{v}}$ über. Wenn wir noch

$$(\vec{\mathfrak{v}} \cdot \nabla) \vec{\mathfrak{v}} = - \vec{\mathfrak{v}} \times (\nabla \times \vec{\mathfrak{v}}) + \frac{1}{2} \nabla \vec{\mathfrak{v}}^2 \quad \text{und}$$

$\mathfrak{A}^* = \text{const}$ im ganzen Raum setzen, erhalten wir aus (46)

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{\mathfrak{v}} \times \vec{\omega}) = - 2[\vec{\Omega} \times \vec{\omega}] - \frac{1}{2}[\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla \bar{p}] + \mathfrak{A}^* \nabla^2 \vec{\omega}$$

Für die Kraftdichte $\vec{\mathfrak{F}}^*$ wurde dabei die Existenz eines Potentials angenommen. Indem wir für

$$-\nabla \times (\vec{\mathfrak{v}} \times \vec{\omega}) = (\vec{\mathfrak{v}} \cdot \nabla) \vec{\omega} + \vec{\omega} \frac{d\bar{p}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{\mathfrak{v}} \quad \text{setzen, erhalten wir}$$

$$(47) \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{\mathfrak{v}} - \vec{\omega} \frac{d\bar{p}}{dt} - 2[\vec{\Omega} \times \vec{\omega}] - \frac{1}{2}[\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla \bar{p}] + \mathfrak{A}^* \cdot \nabla^2 \vec{\omega}$$

Die Gleichung (47) sagt aus, daß 5 Quellen für die Veränderung der Wirblichkeit eines Flüssigkeitsteilchens der ausgeglichenen quasistationären Strömung in Frage kommen.

1) Den Ausdruck $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{\mathfrak{v}}$ kann man als Vektor auffassen, den die lokale Dyade $\{\nabla \vec{\mathfrak{v}}\}$ dem Vektor $\vec{\omega}$ zuordnet. Dieser Term stellt das Wechselspiel zwischen den Translations- und den Rotationsgeschwindigkeiten dar. Durch Strecken der Feldlinie des $\vec{\omega}$ -Vektors wird die Wirblichkeit vergrößert, durch Stauchen verkleinert.

2) $-\vec{\omega} \frac{d\bar{p}}{dt}$ zeigt, wie auch Dichteänderungen zur Wirblichkeit beitragen können.

3) Ferner können nicht konservative Kraftsysteme zur Wirblichkeit der Strömung beitragen, wie der Term $2[\vec{\Omega} \times \vec{\omega}]$ zeigt.

4) Im Sinne des Bjerknesschen Theorems kann Wirblichkeit entstehen, wenn der Term $\frac{1}{2}[\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla \bar{p}]$ von null verschieden ist.

5) Durch die innere Reibung kann Wirblichkeit vernichtet werden, wie der Term $\mathfrak{A}^* \cdot \nabla^2 \vec{\omega}$ zeigt. Sie kann auch an Grenzschichten entstehen.

Wir wollen uns mit dem stationären Zustand der ausgeglichenen Strömung befassen, wie er sich an den oberen 2000 km des Erdkerns und vergleichsweise in den Atmosphären der Sonne und der Planeten ausbildet. Wir nehmen dabei an, daß $p(r)$ und $\rho(r)$ gegeben sind, so daß eine Barotropiebeziehung $p = p(\rho)$ besteht. Diese ist in der Atmosphäre der Sonne anscheinend gut, in der Erdatmosphäre nicht ganz und wahrscheinlich in den oberen 2000 km des Erdkerns bis auf eine äußere Schicht gut erfüllt. Wir werden darauf noch eingehen. Dann wird der vierte Term gleich null.

Auch der fünfte soll voraussetzungsgemäß vernachlässigt werden. Durch turbulente Reibung soll keine Wirblichkeit vernichtet werden. Die Entstehung von Wirblichkeit an Grenzschichten durch innere Reibung soll ebenfalls vernachlässigbar klein sein. Man weiß, daß dann die Materie mit den Wirbellinien fest verbunden bleibt. Das Wechselspiel der Prozesse, die durch die Terme 1 und 2 auf der rechten Seite von (47) dargestellt wird, hat dann langsame Schwankung in der Verteilung der Wirblichkeit zur Folge.

Den stationären Zustand, den wir jetzt betrachten wollen, denken wir uns durch Mittelung über so lange Zeiträume entstanden, daß man auch diese Schwankungen vernachlässigen kann. Die Bewegungen werden sich senkrecht zu den Richtungen des Schwerevektors einstellen ("horizontale" Bewegungen), d.h. es wird gelten $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Wenn ferner die Bewegung längs

Linien verläuft, auf denen $\vec{\omega} = \text{Const}_1$ ist, so wird auch $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$. Der Aus-

druck $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}$ verschwindet ebenfalls, wenn diese Linien mit den Linien $\vec{v} = \text{Const}_2$ zusammenfallen. Der stationäre Zustand, der eintritt, wenn $\mathfrak{A}^* = 0$, $[\nabla \frac{1}{\rho} \chi \nabla \bar{p}] = 0$ und die Stromlinien "horizontal" gelegen sind und mit den Linien $\vec{\omega} = \text{Const}_1$ und $\vec{v} = \text{Const}_2$ übereinstimmen, ist durch den Ausdruck

$$(48) \quad [\vec{\Omega} \times \vec{\omega}] = 0$$

gekennzeichnet. Die Wirbelvektoren sind alle parallel dem Vektor der Erdrotation gerichtet. Die Bahnen der "ausgeglichenen" Flüssigkeitsteilchen sind dann Kreise um die Rotationsachse. v_ϕ , die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit, ist allein von null verschieden; sie ist längs eines Kreises konstant. v_ϕ kann eine Funktion von r und θ sein, wenn die Rotationsachse als Achse eines Kugelkoordinatensystems angesehen wird. Zwischen diesen Stromlinien besteht ein turbulenter Impuls- und Wärmeenergieaustausch nach allen Richtungen.

Eine solche Strömung scheint in der Atmosphäre der Sonne sehr gut ausgebildet zu sein. In der Atmosphäre der Erde ist dagegen zu beachten, daß in gleichen Äquipotentialflächen der Schwere ein Temperaturgefälle vom Äquator nach den Polen vorhanden ist. Auch in zylindrischen Systemen, wie z. B. in der Äquatorebene des Erdkerns, kommen Temperaturgradienten senkrecht zur Achse der Rotation vor. Solange sie nicht allzu groß sind, wird durch turbulenten Wärmemengenaustausch ein stationärer Zustand erreicht. Wenn allerdings die Temperaturgradienten gewisse Größen überschreiten, die durch eine kritische *Rayleigh'sche* Zahl gekennzeichnet werden können, bilden sich, wie *R. Hide* ([13], [15]) experimentell gezeigt hat, statt der rotationssymmetrischen Form der Strahlströmung andere Formen aus. (Strahlströmung = jet-stream) Die Strahlströmung pendelt nunmehr zwischen erhitztem inneren und gekühltem äußeren Zylinder (man kann die Anordnung auch umkehren) in 2,3,4 oder 5 Schleifen hin und her, je nach der Größe der *Rossbyschen* Zahl

$$Ro = \left[\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{t}|}{|2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}]|} \right] = \frac{\text{Trägheitskraftdichte}}{\text{Corioliskraftdichte.}}$$

Wenn der gekühlte Zylinder sich innen befindet, können die Ergebnisse auch auf die Umgebung der Pole der Erdatmosphäre übertragen werden. Wenn man die langjährigen Monatsmittel der 500-mb Fläche betrachtet, erkennt man, daß hier auch Strahlströmungen mit einer Schleife vorkommen. Bei *Rossbyschen* Zahlen, die sehr klein gegenüber der kritischen *Rossbyschen* Zahl sind, werden die Schleifen instabil und es bilden sich zeitweise geschlossene Wirbel. Das muß vor allen Dingen bei den größeren Poldistanzen in der Erdatmosphäre eintreten.

Über die Strömungsverhältnisse im Erdkern, soweit die elektromagnetischen Kräfte vernachlässigt werden können, machen wir uns nach den vorstehenden Ausführungen folgendes Bild. In den zur Rotationsachse senkrechten Ebenen in der Umgebung des Äquators stellt sich in den oberen 1000 - 2000 km des Erdkerns eine ausgeglichene Strömung mit verschwindenden Komponenten in Achsenrichtung ein. Sie pendelt in Mäander-Form zwischen der Obergrenze des Erdkerns und dem inneren Kern hin und her.

Es wird oft angenommen, daß diese Strahlströmung nicht mäandert und eine \mathbf{v}_ϕ -Komponente, die nach Westen gerichtet ist, besitzt. Dafür sind mehrere Argumente anzuführen:

E. C. Bullard [21] sagte, daß wegen der Erhaltung des Drehimpulses $d\mathcal{D} = dm[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$ für ein Massenteilchen in einer turbulenten reibungslosen Flüssigkeit die äußeren Teile sich langsamer als die inneren drehen müßten. In den oberen Schichten des Erdkerns müßte sich also eine Westwärtsbewe-

gung gegenüber dem Erdmantel einstellen. Wenn man nun ferner nach *Elsasser* und *Bullard* die Annahme macht, daß die Feldlinien der magnetischen Feldstärke wegen der hohen elektrischen Leitfähigkeit in die Materie "eingefroren" seien, so kann man aus der Westwärtswanderung des Erdmagnetischen Feldes die im Erdkern auftretenden Horizontalgeschwindigkeiten erschließen. Auf diese Weise ist die im vorstehenden angegebene Geschwindigkeit von 0,1 cm/sec zustande gekommen.

Folgende Ergänzung ist zu machen.

Die Geschwindigkeiten des Spektrums für die aufsteigenden Ströme der nicht ausgeglichenen Konvektion sind im Durchschnitt etwa 2 bis 3 mal so groß wie die des Spektrums für die absteigenden Ströme. Wenn die aufsteigenden Ströme größere Ausmaße annehmen, erhalten sie durch die Wirkung der Coriolisbeschleunigung eine westwärtige Komponente. Dieser Effekt untergräbt die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung des Drehimpulses, weil auf der rechten Seite der Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \sum_{\nu=1}^n \mathfrak{M}_{\nu}$$

die Summe der Momente nicht verschwindet. Der zu erwartende Effekt wird aber verstärkt. Wie weit die magnetischen Feldlinien in die Materie "eingefroren" sein können, werden wir sogleich erörtern.

Daß eine \mathfrak{b}_{ϕ} -Komponente in westwärtiger Richtung im Erdkern vorhanden ist, scheint auch aus den Experimenten von *R. Hide* hervorzugehen (s. auch [15a]).

Die Beobachtung der Wanderung der Sonnenflecken zeigen dagegen, daß wenigstens in der Photosphäre der Sonne in der Nähe des Äquators eine verstärkte ostwärtige Drift vorhanden ist, und auch in der Atmosphäre der Erde und der Planeten ist im Mittel über lange Zeiträume eine ostwärtige Strahlströmung zu beobachten. Das folgt nach *Rossby* [16], wenn der horizontale Massenaustausch den vertikalen um Größenordnungen übertrifft und dabei eine starke Erhaltungsneigung für die radiale Komponente des Wirbelvektors angenommen wird. In einer reibungsfreien Flüssigkeit würde der Wirbelvektor eine konstante Größe sein. Auch wenn großräumige horizontale Konvektionsströme vorhanden sind, werden diese Überlegungen noch gelten, wenn der horizontale Massenaustausch den vertikalen bei weitem übertrifft. Wir meinen, daß sie auf die obersten Schichten der Materie des Erdkerns anwendbar sind.

Wir wollen zeigen, daß dort ein Temperaturgefälle vom Äquator zu den Polen vorhanden sein muß. Die soeben geschilderten Konvektionsströme in den zur Rotationsachse senkrechten Ebenen sind wahrscheinlich vorhanden. *R. Revelle* und *W. Munk* [17] schließen vom astronomischen Standpunkt aus,

daß die säkularen Schwankungen der Rotation der Erde auf Bewegungen im Erdkern zurückzuführen sind. Wegen der Schwankungsdaten (s. [6] oder [19]). Die nahezu rhythmisch verlaufenden Schwankungen $\Delta \tau$ der Dauer der Erdrotation in $\left(\frac{\text{sec}}{\text{Tag}}\right)$ könnte ein Maß für die Stärke der Ausbildung der Konvektionsströme sein.

Um der Theorie von *E. C. Bullard* [8], [21] gerecht zu werden, könnte man ein zweiblättriges Konvektionsstromsystem annehmen, das in der Äquatorebene läuft. Man hat aber zu beachten, daß dann erstens die exzentrische Lage des erdmagnetischen Dipols unerklärbar bleibt, wenn man nicht annehmen will, daß die Rotationsachse der Materie des Erdkerns mit der des erdmagnetischen Dipols übereinstimmt. Das ist aber deshalb nicht möglich, weil zwischen den Änderungen von $\Delta \tau$ und der Lage und Intensität des Dipols keine Korrelation zu bestehen scheint. (s. Abbildung 14). Ferner zeigt die Bewegung des erdmagnetischen Quadrupols, daß keine große Materienbewegung mit ihr verbunden sein kann, weil ebenfalls keine Korrelation zwischen $\Delta \tau$ und seiner Lage zu bestehen scheint. Außerdem sind die Bewegungen des Quadrupolfeldes keineswegs auf Ebenen senkrecht zur Rotationsachse beschränkt, sondern weisen erhebliche meridionale Komponenten auf. Die Materienbewegungen, die das Quadrupolfeld erzeugen, müssen also auf eine so dünne Grenzschicht an der Oberfläche des Erdkerns beschränkt bleiben, daß ihre Wirkung die Erdrotation nicht beeinflusst.

In dieser Grenzschicht müssen, wenn das soeben entwickelte Bild richtig ist, folgende Verhältnisse herrschen. In der Umgebung des Äquators vom Erdkern sammelt sich Wärme an, weil die Konvektionsströme, die im Innern fließen, die Umgebung der Pole nicht erreichen. In der Grenzschicht sind die Reibungskräfte nicht zu vernachlässigen, so daß sich ein intensiver horizontaler Austausch entwickelt und sich sogar eine horizontale Strahlströmung ausbildet. Die Ähnlichkeit zum ausgeglichenen Stromfeld der Erdatmosphäre ist überraschend, wenn man davon absieht, daß im Erdkern keine äquatoriale Westströmung vorhanden sein wird. Wir haben hier, wie etwa in der Sonnenatmosphäre, relativ so starken horizontalen Austausch anzunehmen, daß die Strahlströmung am stärksten in der Umgebung des Äquators ausgebildet ist [22]. Die Konvektionsströme des tieferen Erdkerns greifen unmittelbar nicht in diese Grenzschicht ein. Zwischen den höheren und tieferen Breiten der Grenzschicht bildet sich eine horizontale Strahlströmung mit einem Blatt aus. Es ist klar, daß dieses Bild nicht mit den Voraussetzungen der eleganten Theorie von *H. Takeuchi* und *Y. Shimazu* ([23], [24], [25], [25a]) vereinbar ist. Bevor wir dazu übergehen, wollen wir die bisher vernachlässigten elektromagnetischen Kräfte betrachten.

Zu diesem Zwecke wird das Gleichungssystem (45) durch die folgenden Gleichungen ergänzt [18], [26] :

$$(49) \quad \nabla \times \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathfrak{H} = \vec{j}, \quad \nabla \cdot \mathfrak{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathfrak{D} = 0,$$

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}, \quad j = \kappa_e (\mathfrak{E} + [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}])$$

\mathfrak{D} = Verschiebungsvektor

Wenn man eine Reihe von Größen eliminiert, erhält man (eine ausführliche Diskussion s. [26])

$$(50) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}]] + \lambda \nabla^2 \mathfrak{B}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathfrak{E}^* + \frac{1}{\mu\rho} [[\nabla \times \mathfrak{B}] \times \mathfrak{B}] + \nu^* \nabla^2 \mathbf{b} + \frac{\nu^*}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Dabei ist $\lambda = \frac{1}{\mu \kappa_e}$, also in em Einheiten mit

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \lambda = \frac{1}{4 \pi \mu' \kappa_e}$$

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes erhalten wir analog zu (47)

$$(51) \quad -[\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}]] = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathfrak{B} + \mathfrak{B} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Wir beschränken uns zunächst auf kleine Bereiche, in denen $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ gesetzt werden kann. Dann heißt die erste Gleichung von (50)

$$(52) \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = (\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \lambda \nabla^2 \mathfrak{B}$$

Kann der zweite Ausdruck neben dem ersten vernachlässigt werden, wann gilt

$$(52a) \quad \frac{\lambda}{v L} \ll 1 ?$$

L ist dabei eine kennzeichnende Länge.

λ wird klein, wenn die Leitfähigkeit κ_e groß wird. Wir nehmen gemäß

[27] $\kappa_e \approx 10^{-5}$ (emE) als obere Grenze an, $L \approx 10$ cm als Halbmesser kleinsten Turbulenzkörpers $v \approx 0,1$ cm/sec, $\mu' = 1$. Wir erhalten

$$\frac{\lambda}{v \cdot L} = \frac{1}{0,1 \cdot 10 \cdot 4\pi \cdot 10^{-5}} \approx 10^4.$$

Die Bedingung (52a) scheint in keiner Weise erfüllbar zu sein. Sie ist aber die Voraussetzung dafür, daß Analoga zu den *Helmholtz*schen Wirbelsätzen aus (52) abgeleitet werden, die aussagen würden, daß die magnetischen Feldlinien in die Materie eingefroren sind. Dieses Ergebnis betrifft aber noch nicht den Ansatz von *Elsasser* und *Bullard* für großräumige Bewegungen. Nehmen wir diese als im wesentlichen horizontal verlaufend an, so daß auch $\nabla \cdot \mathfrak{F} = 0$ gesetzt werden kann, so ist nach *Czada* [28] λ in (52a) durch eine andere Größe zu ersetzen. Wir setzen in der ersten Gleichung von (50)

$$\mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v}', \quad \mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{B}} + \mathfrak{B}' \quad \text{mit} \quad \overline{\mathfrak{v}'} = 0, \quad \overline{\mathfrak{B}'} = 0$$

wobei die Querstriche zeitliche Mittelwerte über eine hinreichend lange Dauer bedeuten sollen.

Wenn man in (50) zu den zeitlichen Mittelwerten übergeht, erhält man

$$(53) \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\bar{\mathfrak{v}} \times \bar{\mathfrak{B}}]] + \lambda \nabla^2 \bar{\mathfrak{B}} + [\nabla \times \overline{[\mathfrak{v}' \times \mathfrak{B}']}]$$

Mit Hilfe des *Prandtschen* Ansatzes über den Mischungsweg kann man setzen

$$\mathfrak{B}' = - (\vec{l} \cdot \nabla) \cdot \bar{\mathfrak{B}}$$

$$\text{und} \quad [\mathfrak{v}' \times \mathfrak{B}'] = - [\mathfrak{v}' \times (\vec{l} \cdot \nabla) \bar{\mathfrak{B}}] = - [\{\mathfrak{v}' \cdot \vec{l}\} \nabla \times \bar{\mathfrak{B}}]$$

$\{\mathfrak{v}' \cdot \vec{l}\}$ soll das tensorielle Produkt der beiden Vektoren darstellen.

$\overline{[\mathfrak{v}' \cdot \vec{l}]}$ = (A_{ik}) ist der kinematische Austauschensor.

$$\overline{[\mathfrak{v}' \times \mathfrak{B}']} = - (A_{ik}) \text{ rot } \bar{\mathfrak{B}}$$

Wegen $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ erhält man weiter

$$(53a) \quad [\nabla \times \overline{[\mathbf{b}' \times \mathfrak{B}']}] = - (A_{ik}) \nabla^2 \overline{\mathfrak{B}} \quad \text{und statt (53)}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = [\nabla \times \overline{[\mathbf{v} \times \mathfrak{B}]}] + (\lambda + (A_{ik})) \nabla^2 \overline{\mathfrak{B}}$$

Wenn man hofft, aus dieser Gleichung eine Information über die Größe von (A_{ik}) zu erhalten, wird man enttäuscht. Nach [29] kann man für den kinematischen Austausch tensor schreiben

$$(54) \quad (A_{ik}) = \overline{(v_i' v_k')} \omega_{ik} \quad (\text{nicht summieren}).$$

Wenn wir $\overline{v_i' v_k'} \approx 0,01 \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} \right]$, ω_{ik} , die Erhaltungstendenzen, zu 10 Jahren = $4 \cdot 10^8 \text{ sec}$ als obere Grenze annehmen, erhalten wir

$$(A_{ik}) \approx 4 \cdot 10^6,$$

etwa in Übereinstimmung mit den Annahmen von *Runcorn* über ν^* .

λ erhält für $\kappa_e = 10^{-5} [\text{emE}]$ folgenden Wert

$$\lambda = \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-5}} \approx 8 \cdot 10^4 \quad \text{und für } \kappa_e = 3 \cdot 10^{-6} [\text{emE}]$$

$$\lambda = \frac{1}{3 \cdot 4 \pi \cdot 10^{-6}} \approx 2,6 \cdot 10^5.$$

Es ist aber undenkbar, daß ein so langsamer turbulenter Massenaustausch die elektrische Leitfähigkeit beeinflussen soll. Der Fehler der Betrachtung liegt in der Voraussetzung, daß \mathfrak{B} bei den turbulenten Zusatzbewegungen mit der Materie bewegt, also ausgetauscht wird. Wir haben das (A_{ik}) für die magnetische Feldstärke zu benutzen, das nur einen geringen Bruchteil desjenigen für den Impulsaustausch (der Impuls ist eine Erhaltungsgröße) beträgt. Wenn wir also (52a) in den Zähler das obenstehende λ setzen, für v den von *Bullard* [1] angegebenen Wert von

$$v \approx 3 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]$$

so wird bei einer Länge von $L = 2 \text{ km}$

$$\frac{\lambda}{v \cdot L} \approx \frac{8 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^5} = 13.$$

Man kann auch nunmehr nicht annehmen, daß die magnetischen Feldlinien in die Materie "eingefroren" sind.

Die Länge $L = 2 \text{ km}$ entnehmen wir einer Arbeit von *Runcorn* [21]. Darin wird von der auf *E. C. Bullard* zurückgehenden Voraussetzung ausgegangen, daß im Erdkern ein starkes toroidales Magnetfeld \mathfrak{B}_0 als Primärfeld vorhanden ist. Durch die Bewegung leitender Materie in diesem Felde wird das Sekundärfeld \mathfrak{B}_1 erzeugt, das mit dem an der Oberfläche der Erde meßbaren Feld zu identifizieren ist. Die effektive Geschwindigkeit v_0 der Materie ist von der Größenordnung $L \cdot \omega$, wo ω eine Winkelfrequenz darstellt, die für die Feld- und Geschwindigkeitsänderungen von \mathfrak{B}_1 typisch ist und L eine typische Länge (Tiefe) angibt. Es wird angenommen, daß ω, L, κ_e (die Leitfähigkeit) allein das Verhältnis $\frac{|\mathfrak{B}_1|}{|\mathfrak{B}_0|}$ bestimmen. Dann ist mit den Mitteln

der Dimensionsanalyse zu schließen, daß

$$(55) \quad \frac{|\mathfrak{B}_1|}{|\mathfrak{B}_0|} = f [(L^2 \omega \kappa_e)^\alpha] \text{ gilt.}$$

Runcorn folgert nun aus dem Spektrum der Säkularvariationen des erdmagnetischen Feldes, daß $\alpha = \frac{1}{2}$ und $L^2 \kappa_e = 6,5 \cdot 10^4 \text{ [emE]}$ sein muß. Mit $\kappa_e = 3 \cdot 10^{-6} \text{ [emE]}$ folgt daraus

$$L^2 = 3 \cdot 10^{10}, \quad L = 1,8 \cdot 10^5 \text{ cm} = 1,8 \text{ km}.$$

Wir finden, daß der Ausdruck $\frac{\lambda}{vL}$ erst genügend klein wird, wenn L von der Größenordnung 1000 km wird. Das ist bei $|\omega_{ik}| \approx 4 \cdot 10^8$ und $|v| \approx 0,1 \text{ cm sec}$ ungefähr die Länge des Mischungsweges. Dann erst kann man annehmen, daß die Magnetfelder und die Materiebewegungen des ausgeglichenen Systems fest miteinander verbunden sind.

Ein anderes für die Hydromagnetik typisches Ergebnis ist die Möglichkeit, daß in bewegten gut leitenden Flüssigkeiten spontan Magnetfelder entstehen können. Der Prozeß, der zuerst von *Batchelor* [26] beschrieben wurde, kann sich bei günstigen Bedingungen so stark auswirken, daß ein großer Teil der Bewegungsenergie in die Magnetfelder fließt, die die Bewegung sehr stark beeinflussen. Die Voraussetzung dafür ist, wie *Lundquist* sehr allgemein gezeigt hat [18], daß die *Batchelorsche* Zahl

$$Ba = \mu \kappa_e \nu^* > 1$$

sein muß. In em-Einheiten ist $\mu = \mu_0 = 4\pi$ zu setzen, $\kappa_e = 3 \cdot 10^{-6}$, $\nu^* \approx 10^{-4}$. Es ist ausgeschlossen zu folgern, daß sich in der turbulenten Strömung des Erdkerns, auch in der Grenzschicht zum Mantel, auf diese Weise Magnetfelder entwickeln könnten.

Die Antwort würde wesentlich anders ausfallen, wenn wir von dem ausgeglichenen Strömungszustand ausgingen. Dann würde ν^* durch (A_{ik}) zu ersetzen sein. Mit einem Wert von $|(A_{ik})| \approx 10^6 \div 10^7$ würde das Kriterium erfüllt sein. Das kann man als Rechtfertigung der Ansätze von *Elsasser*, *Bullard*, *Takeuchi* und *Shimazu* ansehen. Wenn im ganzen Raum des Erdkerns die ausgeglichene Strömung betrachtet wird, könnte ein Magnetfeld sich selbst erregen. Dann würden, wie gezeigt, seine Feldlinien in die Materie "eingefroren" sein.

S. Lundquist hat ferner geschlossen, daß die gegenseitige Beeinflussung zwischen den hydromechanischen Bewegungen und den elektromagnetischen Feldern groß ist, wenn

$$(56) \quad Lu = |\mathfrak{B}| L_1 \kappa_e \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \gg 1.$$

Wir setzen in em E $|\mathfrak{B}| = 4\Gamma$, $\kappa_e = 3 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$, $\mu = \mu_0 = 4\pi$, $\rho \approx 11 \left[\frac{\text{gm}}{\text{cm}^3} \right]$ und finden, daß $Lu \gg 1$, wenn $L_1 = 1000$ km und mehr.

Modelle wie die soeben genannten kommen aber in Wirklichkeit im Erdkern nicht vor. *S. Runcorn* [13] hat gezeigt, und es ist leicht nachzuprüfen, daß die Corioliskräfte dichte mindestens 10^2 mal so groß ist wie die elektromagnetischen Kraftdichten. Wenn wir in em E eine größte Stromdichte von $3 \cdot 10^{-8}$ annehmen (d.h. 3 em E Stromeinheiten/cm auf 10^8 cm = 1000 km Tiefe verteilt), so ist mit $|\mathfrak{v}| = v \approx 0,1$ cm/sec

$$\frac{|2[\vec{\Omega} \times \mathbf{v}]|}{\mu \frac{|\vec{J} \times \mathfrak{B}|}{\rho}} \approx \frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^{-7}} \approx 2 \cdot 10^2.$$

Man muß also auch bei dem Vorhandensein elektromagnetischer Felder und ihrer rückgekoppelten Wirkung annehmen, daß die Corioliskraft die Bewegung der Materie bestimmt. Das Magnetfeld der Erde müßte dann ausschließlich eine Drift entlang der Breitenkreise zeigen. Das entspricht nicht unseren Ergebnissen. Wie bereits gesagt, kann man auch nicht die Achse des Dipols als Rotationsachse ansehen. Das von *E.C. Bullard* angegebene Konvektionssystem von zwei Quellen und zwei Senken liegt zwar nach unseren Auswertungen ungefähr in einer Ebene, aber diese richtet sich immer mehr gegen die Äquatorebene auf.

Wir meinen, daß man aus den Bewegungen des erdmagnetischen Feldes sehr wenig über die Bewegung der Materie in den Tiefen des Erdkerns, sondern höchstens etwas über die seiner oberen Grenzschicht wird aussagen können. Die Bewegungen in dieser Grenzschicht hängen nicht unmittelbar von den Bewegungen im Innern ab. Die mechanischen Bewegungen werden nicht durch die elektromagnetischen Kräfte beeinflusst. Ob ein starkes primäres toroidales Innenfeld existiert oder nicht, bleibe dahingestellt; es hat auf die Entstehung des Erdfeldes, das wir beobachten, keinen Einfluß. Aus diesen Ergebnissen schließen wir, daß die hydromagnetischen Gleichungen die Prozesse, die das Magnetfeld der Erde erzeugen, nicht beschreiben können.

Diese Überlegungen werden nicht durch die folgenden Feststellungen beeinträchtigt, sondern eher gestützt. *S. K. Runcorn* folgert aus dem Satz für die Erhaltung des Drehimpulses für die ganze Erdkugel, unter der Voraussetzung, daß sich Mantel und Kern der Erde wie starre Körper bewegen, das zwischen der Länge des Tages in Sekunden und der Änderung des Voraneilens des Erdkerns die Gleichung besteht:

$$(57) \quad \delta r = 6,7 \cdot 10^{-2} \delta \Omega_1,$$

wenn Ω_1 die Winkelgeschwindigkeit pro Jahr ist. Rechnet man Ω_1 in Radian pro Sekunde um und berechnet daraus die Geschwindigkeit am Äquator des Erdkerns in cm/sec, so erhält man

$$\delta r = 0,64 \delta v_g.$$

Nach *Revelle* und *Munk* [17] ist δr von der Größenordnung $(1 - 10) 10^{-3}$ sec. Man erhält für $\delta v_{\mathbf{g}} =$ bis $1,1 \cdot 10^{-2}$ cm/sec nach Osten. Man schließt daraus, daß die Geschwindigkeiten der Drift selbst ebenso groß oder vielleicht bis zu einer Größenordnung größer sein müssen. Die Westwarddrift des erdmagnetischen Nichtdipolfeldes beträgt nach *Bullard* 0,034 cm/sec. Aus diesen Feststellungen schließen wir, daß die Bewegungen der Materie nicht mit der Westwärtsbewegung des erdmagnetischen Feldes identisch sind.

Man darf annehmen, daß die Größe der turbulenten Zusatzbewegungen im Erdkern noch um eine Größenordnung größer ist als die der ausgeglichenen Strömung. Sie dürfte etwa 10 cm/sec haben. Wenn der kinematische Austauschtensor

$$|A_{ik}| \approx |\{v_i^1 v_k^1\} \omega_{ik}| \approx 10^7 \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$$

(nicht summieren)

angenommen wird, folgt $|\omega_{ik}| \approx 10^5$ sec = 10 Tage. Das ist aus folgendem Grund befriedigend. Die Schwankungen der Erdrotation, die auf die Bewegungen der Materie im Erdkern zurückgehen, zeigen im Laufe von 10 Jahren schon bedeutende Veränderungen. Die Erhaltungstendenz eines Wirbels muß im Durchschnitt gegenüber dieser Dauer verschwindend klein sein, sonst wäre ein mechanischer Übertragungsprozeß der ausgeglichenen Bewegungen des Erdkerns mit genügend kleiner Relaxationszeit nicht denkbar.

Wir haben oben zu zeigen versucht, daß die Koppelung der Bewegungen des Erdkerns relativ zu denen des Erdmantels nicht durch elektromagnetische Kräfte erfolgen kann, die das erdmagnetische Feld beeinflussen. Die Frage erhebt sich, ob die Relaxationszeit gering genug ist, in der eine Veränderung z. B. der äquatorialen Geschwindigkeit des Erdkerns dem Erdmantel mitgeteilt wird. Wir schreiben die Bewegungsgleichungen für die quasi-stationäre äquatoriale Geschwindigkeit an der Untergrenze der Grenzschicht des Erdkerns, der wir versuchsweise den Dickenwert (im Anschluß an *Run-corn*) 1 km erteilen.

$$(58) \quad \frac{d\bar{v}_{\mathbf{g}}}{dt} = A \nabla^2 \bar{v}_{\mathbf{g}}$$

Aus der Theorie dieser Differentialgleichung, die die Gestalt der Wärmeleitungsdifferentialgleichung hat, weiß man, daß der Geschwindigkeitsunterschied auf verschwindende Werte abgeklungen ist, wenn

$$4 r^2 \approx A t_{\text{rot}} \text{ ist.}$$

Mit $r = 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$ erhält man

$$t(\text{rot}) = \frac{4 \cdot 10^{10}}{10^7} \approx 4 \cdot 10^3 \text{ sec} \approx 1 \text{ Stunde.}$$

Ein Geschwindigkeitsausgleich zwischen dem tiefen Erdkern ($r = 1000 \text{ km}$) und dem Erdmantel würde sich in der 10^6 fachen Zeit, also in 100 Jahren vollziehen. Diese Zeiten sind offenbar zu groß. Es ist aber zu beachten, daß möglicherweise A für die Konvektionen des Erdkerns um 1-2 Zehnerpotenzen zu klein angenommen worden ist.

Die Bewegungen in der Grenzschicht werden wahrscheinlich einen horizontalen Austausch erzeugen, der die turbulenten vertikalen Austauschvorgänge in ihr noch um zwei Zehnerpotenzen übertrifft. Er findet in einer sehr seichten Schicht an der Obergrenze des Erdkerns statt.

Die in ihm stattfindende großräumige horizontale Strahlströmung muß eine Geschwindigkeit haben, die groß gegenüber der ausgeglichenen relativen Geschwindigkeit des Erdkerns ist. Anders ist es nicht zu erklären, daß die Schwankungen des erdmagnetischen Feldes mit den Änderungen der Erdrotation keine Korrelation haben. Diese Annahme über die Geschwindigkeit setzt voraus, daß eine erhebliche Temperaturdifferenz zwischen der Materie der Grenzschicht am Äquator des Erdkerns und der an den Polen besteht, die von der Größenordnung der Temperaturdifferenzen in der Erdatmosphäre in horizontaler Richtung sein könnte. Eine quantitative Untersuchung soll an anderer Stelle erfolgen. Mit diesen Temperaturdifferenzen werden thermo-elektrische Ströme verbunden sein, die vom Äquator zu den Polen fließen. Sie liefern wegen ihres poloidalen Charakters aber keinen Beitrag zum erdmagnetischen Feld.

D. Über die Plasmatheorie des erdmagnetischen Hauptfeldes

Das Bild von der leitenden Materie des Erdkerns, das man den hydromagnetischen Gleichungen zugrunde legt, ist zu einfach. Man hat offenbar in der Grenzschicht, in der das erdmagnetische Feld entsteht, zu beachten, daß die flüssige oder gasförmige Materie ein hochionisiertes Plasma ist, wie es z. B. von *A. Schlüter* [30] beschrieben wurde.

Daß die hydromagnetische Theorie in vielen Fällen nicht anwendbar ist, zeigen die Experimente, die unter der Leitung *W. Lochte-Holtgreven* über den *Tolman*-Effect in ionisierten Flüssigkeiten und Gasen angestellt wurden [31], [32], [33].

Bei den Untersuchungen rotierenden Quecksilbers würde die *Batchelor*-sche Zahl

$$Ba = \lambda \nu^* = 4 \pi \kappa_e \nu^*$$

$$\text{mit } \nu^* = 1 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right], \kappa_e = 1 \cdot 10^{-5} [\text{emE}] \quad Ba \approx 10^{-7} \ll 1$$

ergeben. Auf keine Weise dürften sich spontan Magnetfelder entwickeln.

Die genannten Physiker fanden aber trotzdem, daß in einem zylindrischen Gefäß, in dem Quecksilber mit einer Frequenz von 25 Hz rotierte, ein magnetisches Feld von $4,3 \cdot 10^{-4} \Gamma$ entstand. Die Magnetfelder wurden auf Diffusionsströme von Elektronen zurückgeführt. In einer Zirkulationsströmung eines flüssigen Metalls tritt immer dann eine elektrische Strömung auf, wenn $\nabla^2 \mathbf{b}$ sehr von null verschieden ist. Die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen des "Plasma" Quecksilber ist stets kleiner als die mittlere Ionengeschwindigkeit. Das erinnert an den *Tolman*-Effekt der metallischen Leiter, wonach die Elektronen der Beschleunigung der Metallgitter nicht vollkommen folgen.

Der von *W. Lochte-Holtgreven* beschriebene Vorgang ist aber etwas anderer Art, indem die Bewegung der Elektronen durch die Bewegung der Ionen erst bestimmt wird. Er ist vor allen Dingen 500mal so groß wie der *Tolman*-Effekt. Er wird nach [33] für stationäre Strömung durch die Gleichung dargestellt

$$(59) \quad \vec{j} = - \frac{2 \lambda^{*2} \cdot N \cdot e}{\eta} \nabla p_i .$$

Dabei ist η die dynamische Zähigkeit des Quecksilbers, λ^* die mittlere freie Weglänge der Elektronen, N ihre Zahl/ccm, e die elektrische Elementarladung, ∇p_i der Druckgradient, unter dem die Ionen stehen. Die mittlere freie Weglänge der Elektronen wird aus der experimentell ermittelten Leitfähigkeit errechnet

$$(60) \quad \lambda^* = \frac{m_e \cdot v_0 \cdot \kappa_e}{N \cdot e^2} .$$

m_e ist die Masse des Elektrons, $u_0 = \frac{m_e}{2} v_0^2$ ihre Grenzenergie am absoluten Nullpunkt.

Die oben angegebenen Werte für die Leitfähigkeit und kinematische Zähigkeit des Quecksilbers und seine Dichte zeigen, daß es eine gute Modellflüssigkeit für die Materie des Erdkerns liefern dürfte. (Siehe jedoch die Bemerkungen auf S. 182).

Es sei ferner erwähnt, daß *W. Lochte-Holtgreven* und *P. Schilling* Versuche mit gasförmigen Plasmen angestellt haben, die die Voraussagen auf Grund der Theorie von *A. Schlüter* gut bestätigen. Dieser hat ein Plasma-Modell für Gase durch die folgenden Annahmen definiert. Man betrachtet das Gemenge von Ionen (Index i , Ladung $+e$) und Elektronen (Index e , Ladung $-e$). Beide Komponenten sind durch Reibungsglieder miteinander gekoppelt. Man setzt ferner voraus, daß das Plasma quasineutral ist und daß die Stöße zwischen Elektronen und Ionen völlig elastisch verlaufen. Wenn γ die durchschnittliche Anzahl der Stöße pro Sekunde ist, so ist

$$(61) \quad \frac{m_e}{m_i + m_e} \gamma (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{B}_e)$$

die Änderung der Geschwindigkeit \mathfrak{B}_i der Ionen pro Sekunde. Man setzt als Bewegungsgleichungen an :

$$m_i \frac{d_i}{dt} \mathfrak{B}_i + \frac{m_i m_e}{m_i + m_e} \gamma (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{B}_e) = e \mathfrak{E} + e [\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}] + \mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_i$$

(62)

$$m_e \frac{d_e}{dt} \mathfrak{B}_e - \frac{m_i m_e}{m_i + m_e} \gamma (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{B}_e) = -e \mathfrak{E} - e [\mathfrak{B}_e \times \mathfrak{B}] + \mathfrak{R}_e - \mathfrak{R}_e$$

γ kann nicht von vornherein als konstant angenommen werden. *A. Schlüter* zeigt, daß seine Abhängigkeit \mathfrak{E} und \mathfrak{B} gering genug ist um vernachlässigt zu werden. \mathfrak{R}_i und \mathfrak{R}_e sind die inneren Reibungskräfte der beiden Komponenten.

Die substantiellen Ableitungen haben die folgenden Bedeutungen:

$$\frac{d_i \mathfrak{B}_i}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{B}_i}{\partial t} + (\mathfrak{B}_i \cdot \nabla) \mathfrak{B}_i \quad \text{und für } \mathfrak{B}_e \text{ entsprechend. Man kann}$$

den Gleichungen eine physikalisch sinnvollere Form geben. Als Summe der Gleichungen erhält man:

$$(m_i + m_e) \frac{d_1 \mathfrak{B}}{dt} = e [\mathfrak{D} \times \mathfrak{B}] + \mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_e - \mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}_e$$

(63)

$$\text{mit } \mathfrak{D} = \mathfrak{B}_i - \mathfrak{B}_e \text{ und } (m_i + m_e) \mathfrak{B} = m_i \mathfrak{B}_i + m_e \mathfrak{B}_e$$

Das sind die Bewegungsgleichungen des Plasmas.

\mathfrak{D} ist die Diffusionsgeschwindigkeit, \mathfrak{B} die Massengeschwindigkeit. Der Operator

$$\frac{d_1 \mathfrak{B}}{dt} \text{ ist wie folgt zu definieren:}$$

$$\frac{d_1 \mathfrak{B}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + (\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{B} + \frac{m_i m_e}{(m_i + m_e)} (\mathfrak{D} \cdot \nabla) \mathfrak{D}.$$

Wenn man die erste der beiden Gleichungen (62) mit m_2 , die zweite mit m_1 multipliziert und dann subtrahiert, erhält man die Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} m_i m_e \left(\frac{d_2 \mathfrak{D}}{dt} + \gamma \mathfrak{D} \right) &= e (m_i + m_e) \{ \mathfrak{E} + [\mathfrak{B}_x \mathfrak{B}] - e (m_i - m_e) [\mathfrak{D}_x \mathfrak{B}] \} \\ (64) \qquad \qquad \qquad &+ \{ m_e \mathfrak{R}_i - m_i \mathfrak{R}_e - m_e \mathfrak{N}_i + m_i \mathfrak{N}_e \} \end{aligned}$$

Dabei ist der Operator $\frac{d_2 \mathfrak{D}}{dt}$ folgendermaßen zu definieren:

$$\frac{d_2 \mathfrak{D}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + (\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{D} + (\mathfrak{D} \cdot \nabla) \mathfrak{B} - \frac{m_i m_e}{m_i + m_e} (\mathfrak{D} \cdot \nabla) \mathfrak{D}$$

Im allgemeinen ist \mathfrak{D} eine sehr kleine Geschwindigkeit. Man kann daher in den beiden substantiellen Ableitungen den letzten Term vernachlässigen.

In der letzten Gleichung können dagegen beide Glieder $(\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{D}$ und $(\mathfrak{D} \cdot \nabla) \mathfrak{B}$ von bedeutungsvoller Größe sein.

$(\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{D}$ ist die Konvektion der Diffusionsgeschwindigkeit, $(\mathfrak{D} \cdot \nabla) \mathfrak{B}$ zusätzliche Diffusion durch den Gradienten der Massenbeschleunigung. Zu diesem Gleichungssystem kommen noch die *Maxwellschen* Gleichungen mit $\vec{j} = eN\mathfrak{D}$. Die Bewegungsgleichungen unterscheiden sich von denen der Hydromagnetik nur unwesentlich. Groß ist dagegen der Unterschied zwischen der Diffusionsgleichung und der Leitungsgleichung der genannten Theorie

$$\vec{j} = \kappa_e (\mathfrak{E} + \mu [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]) + \rho_e \mathfrak{v}$$

wo ρ_e die Ladungsdichte ist.

Bei den Versuchen von *W. Lochte-Holtgreven* und *P. Schilling* kann $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{E}_e = 0$ (eingeprägte Feldstärke), $N\mathfrak{R}_i = -\nabla p_i = 0$, $N\mathfrak{R}_e = -\nabla p_e = 0$ gesetzt werden. N ist die Anzahl der Teilchen pro cm^3 .

$$m_e \ll m_i$$

Dann heißt die Diffusionsgleichung (63)

$$(64a) \quad \frac{d_2 \mathfrak{D}}{dt} + \gamma \mathfrak{D} = -\frac{\mathfrak{R}_i}{m_i} + \frac{\mathfrak{R}_e}{m_e} = -\frac{\mathfrak{R}_i}{m_i m_e} (+ m_e - m_i)$$

Auf beide Komponenten wirkte die gleiche sehr starke Reibungskraft, die alle übrigen Kräfte und auch die Koppelung zwischen beiden Komponenten überwog. Wir setzen für den ersten Teil des Gasstromes daher $\gamma = 0$ an. Wenn man eine Koordinatenachse in Bewegungsrichtung legt, sieht man, daß auf der rechten Seite eine positive Größe steht. Man findet, daß die Stromrichtung mit der Richtung der Bewegung übereinstimmt. Die Messungen der beiden Physiker bestätigen die Theorie. Das Ergebnis bedeutet, daß der *Tolman-Effekt* in Gasen dem in festen Körpern gerade entgegengesetzt gerichtet ist. Die Elektronengaskomponente reagiert schneller auf beschleunigende Kräfte als die Ionengaskomponente.

In der stationären Strömung einer Grenzschicht können wir wegen der großen freien Weglänge der Elektronen ebenfalls weitgehende Entkopplung, also $\gamma = 0$, annehmen.

Mit $\mathfrak{R}_i = -\frac{1}{N} \nabla p_i$, $\mathfrak{R}_e = -\frac{1}{N} \nabla p_e$ erhält man aus (64)

$$(64b) \quad \frac{d_2 \mathfrak{D}}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} (\nabla p_i + N \mathfrak{R}_i) + \frac{1}{\rho_e} (\nabla p_e + N \mathfrak{R}_e)$$

Beim Aufbau des stationären Zustandes wächst \mathfrak{R}_i bzw. \mathfrak{R}_e so lange an, bis $N \mathfrak{R}_i = -\nabla p_i$ bzw. $N \mathfrak{R}_e = -\nabla p_e$ ist. Bis zur Ausbildung des stationären Zustandes ist also der Wert der beiden Klammern positiv, wenn man in die Richtung der Bewegung blickt. Es ergibt sich also ein $\mathfrak{D} \neq 0$ für den Endzustand. Wegen der viel größeren freien Weglänge der Elektronen ist aber die Grenzschichtdicke in dem Elektronengas weit kleiner als in der Ionenkomponente. Das wird noch ausführlich gezeigt werden. Der resultierende Strom aus diesem Effekt ist also der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Auch das wurde von *W. Lochte-Holtgreven* und seinen Mitarbeitern beobachtet (persönliche Mitteilung).

Bei den Untersuchungen des Entstehens von in rotierendem Quecksilber wurde, wie Formel (58) ausweist, von denselben Vorstellungen ausgegangen. Dabei wurde aber angenommen, daß die Koppelung zwischen Ionen- und Elektronenkomponente auch in der gesamten Strömung klein ist.

Bemerkenswerterweise bestätigten die experimentellen Ergebnisse die absoluten Beträge der Formel (58) gut, aber die elektrische Stromrichtung war gerade umgekehrt als man nach Formel (58) erwarten mußte, also gleichsinnig mit dem Grenzschichteffekt in ionisierten Gasen. *W. Lochte-Holtgreven* erklärt diesen Effekt dadurch, daß im Quecksilber die Löcherleitung überwiege und führt als Beweis an, daß die *Hall*-Konstante des Quecksilbers positiv sei. Von Interesse für die Anwendung der Ergebnisse auf das Erdinnere ist, daß man sich die Materie des Erdkerns vielfach als geschmolzenes Eisen vorstellt, und daß Eisen ebenfalls eine positive *Hall*-konstante hat.

$$R(\text{Cu}) \cdot 10^{12} = -5,5 \quad R(\text{Fe}) \cdot 10^{+12} = +100. \quad [34]$$

Im stationären Zustand hätte man also bei einem gasförmigen Erdkern die gleiche Stromrichtung wie bei einem flüssigen Erdkern zu erwarten.

Das Vorkommen der genannten Effekte im Erdkern setzt voraus, daß die Materie des Erdkerns gegen eine obere feste Wand grenzt; sonst können die starken Geschwindigkeitsunterschiede, die ihre Voraussetzung sind, nicht zustande kommen. Aus den seismischen Beobachtungen folgt, daß die starke

Inhomogenität, die wir als Obergrenze des Erdkerns ansehen, bei

$$a_1 = 3473 \pm 4 \text{ km}$$

liegt (*Jeffreys* 1939) [1], [35]). Der Dichtesprung auf beiden Seiten der Inhomogenität wird durch den Faktor 1,6 charakterisiert.

Die Dichte ist eine Funktion der Temperatur, des Druckes, der chemischen Zusammensetzung und des Kristallgitters.

Es scheint uns unwahrscheinlich, daß eine so scharfe Inhomogenitätsschicht durch die chemische Zusammensetzung allein erklärt werden kann. Die atomare oder molekulare Diffusion (vielleicht auch die molare) hätten bei der herrschenden Temperatur im Laufe der geologischen Zeiträume eine mehr als 100 km dicke Übergangszone erzeugt. *Bullen* [36] hat folgende 4 Postulate aufgestellt.

a) Die Erde, der Mars und die Venus (auch der Mond) haben eine gemeinsame ursprüngliche Zusammensetzung.

b) Die Kompressibilität ist im wesentlichen eine einfache Funktion des Druckes in allen 3 Planeten.

c) Der äußere Erdkern ist zum großen Teil eine Hochdruckmodifikation der Materie des tiefen Erdmantels.

d) Jeder Planet hat einen inneren Kern von anderer chemischer Zusammensetzung als der äußere Kern (Eisen).

Diese Postulate stellen eine Modifikation der Arbeiten von *Ramsay* [38] dar. *Bullen* hat die Dichte der Erde als Funktion von r unter verschiedenen Annahmen berechnet. Sein Modell A liefert an der Obergrenze des Erdkerns den Druck $1,37 \cdot 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$, sein Modell B dagegen nur $1,33 \cdot 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$.

Seine Rechnungen und die Arbeiten vieler anderer Autoren (*Verhoogen*) zeigen, daß die Temperatur nicht die für die scharfe Inhomogenität ausschlaggebende Größe sein kann. Als Hauptbestandteile in den tiefen Schichten des Mantels sind nach *Birch* Si O_2 , Mg O und Fe O anzunehmen. Im Erdkern soll auch nicht gebundenes Eisen als wesentlicher Bestandteil hinzukommen.

Eine genauere Analyse der Bestandteile des Erdmantels und des Erdkerns verdanken wir *L. Knopoff* und *R. I. Uffen* [37]. Sie haben eine Interpolationsformel von *Birch* verwendet, die die von *Bridgman* gemessenen Werte mit denen, die man nach dem *Thomas-Fermi* Modell bei sehr hohen Drucken $\left(> 10^{14} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \right)$ erhält, verbindet. Für den tiefen Teil des Erdmantels

$\left(10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \right)$ erhalten sie die repräsentative Atomnummer 12,5 und die Zusammensetzung $(0,635 \text{ Mg} + 0,36 \text{ Fe})_2 \cdot \text{SiO}_4$,

wenn nur Fayalit und Forsterit (Olivin) als Bestandteile des Mantels zugelassen werden und die Temperatur 0° K . den Rechnungen zugrunde gelegt wird. Die Temperatur liegt in diesen Schichten zwischen dem absoluten Nullpunkt und dem Schmelzpunkt des Materials bei dem herrschenden Druck, der von *Uffen* an der Untergrenze des Mantels zu 5300° K bestimmt wird. Für dieses Intervall muß dann, wie eine Rechnung von *Knopff* und *Uffen* ergibt, die repräsentative Atomnummer von $Z = 12,5$ auf $Z = 13,5$ steigen und im Olivin muß die Magnesium-Komponente von 63 % auf 47 % abnehmen.

Über die Temperaturverhältnisse geben verschiedene Arbeiten Anhaltspunkte, die von *Y. Shimazu* [40] zusammengefaßt wurden. Nach *P. Valle* und *J. Jacobs* folgt aus der Kenntnis des adiabatischen Temperaturgradienten folgende adiabatische Temperaturzunahme

$$\frac{T_{100}}{T_{2898}} = 1,58$$

T_{100} = Temperatur in 100 km Tiefe

T_{2898} = Temperatur in 2898 km Tiefe

Wenn man für T_{100} nach *Verhoogen* [39]

$T_{100} = 760^\circ \text{ K}$ annimmt, erhält man $T_{2898} = 1200^\circ \text{ K}$;

$T_{100} = 1800^\circ \text{ K}$ (Schmelzpunkt des Gesteins, s. [40]) annimmt,

erhält man $T_{2898} = 2850^\circ \text{ K}$.

Der Temperaturgradient kann einen gewissen Exzess über den adiabatischen Gradienten hinaus nicht übersteigen, weil Konvektionen im Mantel möglich sind (*Shimazu* [40]). Wenn man diesen Exzeß zu $0,03^\circ/\text{km}$ annimmt ([40]), so erhält man als Untergrenze der Temperatur an der Untergrenze des Erdkerns

$T_{2898 \text{ min}} \approx 3000^\circ \text{ K}$. Nach [40] ist $T_{2898 \text{ max}} \approx 5300^\circ \text{ K}$.

Wenn man nicht annimmt, daß an der Obergrenze des Erdkerns eine Phasenumwandlung stattfindet, so erhält man (nach [37]) eine repräsentative Atomnummer von $Z = 22$ ($\text{Fe} \cdot Z = 26$). Das bedeutet, daß in dem 3-Komponentensystem $\text{Fe} - \text{Fe}_2\text{SiO}_4 - \text{Mg}_2\text{SiO}_4$ jetzt reines Eisen 90 % des gesamten Materials ausmacht.

Wir haben schon gesagt, daß man diese scharfe Inhomogenität an der Obergrenze des Erdkerns nicht allein durch eine Änderung in der chemischen Zusammensetzung wird erklären können. Sonst müßten Diffusionsvorgänge in den geologisch überschaubaren Zeiträumen dieser Grenze ihre Schärfe genommen haben. Man kann diese Meinung durch folgende Überlegungen stützen. Ionengitter, wie sie auch am Grunde des Erdmantels angenommen werden, stellen ein stabiles System der Elektronendichten oder Werte der Potentialfunktion dar, das durch abstoßende und anziehende Kräfte erzeugt wird. Die Gesamtenergie für den Kubikcentimeter einiger Bestandteile des Olivins läßt sich angeben ([34])

$$\text{MgO} \quad 242 \cdot 10^3 \text{ cal/mol bei } 15^\circ \text{C} = 0,87 \cdot 10^{12} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$$

$$\text{Fe} \quad 94 \cdot 10^3 \text{ cal/mol bei } 15^\circ \text{C} = 0,55 \cdot 10^{12} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$$

$$\text{SiO}_2 \quad 405,7 \cdot 10^3 \text{ cal/mol bei } 15^\circ \text{C} = 0,75 \cdot 10^{12} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}.$$

Man kann nun die spezifische Energie erg/cm^3 (Energiedichte) auch als spezifische Kraft dyn/cm^2 (Kraft pro Flächeneinheit) auffassen und sagen, daß bei einem Druck von etwa $0,8 \text{ dyn/cm}^2$ der Wärmebewegung auf das betrachtete Ionengitter dieses zerbricht. Die Richtung des Druckes ist so zu denken, daß sie die Atome von einander entfernt. Wir bemerken, daß der Druck, der das Ionengitter an der Untergrenze des Erdkerns nach innen zusammendrücken sucht, mit

$$1,33 \cdot 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \text{ bzw. } 1,37 \cdot 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3}$$

nahezu das Doppelte der "Wärmedrucke" darstellt. Man kann sich vorstellen, daß ein ständig wachsender Außendruck nicht ohne Einfluß zunächst auf die äußere Elektronenhülle, später auf alle Elektronen der Atome bleiben wird. Die Verwendbarkeit des *Thomas-Fermi* Modells für Berechnung der Druck-Dichtebeziehung sagt ja aus, daß eine solche Transformation vor sich gehen muß. Daß diese nicht stetig vor sich gehen wird, ist schon

aus den Erfahrungen von *P. W. Bridgman* [41] über das Verhalten der festen Körper bei Drucken bis $10^{11} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ zu erkennen. Die Interpolationskurve auf Grund der Theorie der endlichen Dehnungen von *Birch* geht auf diesen Umstand nicht ein.

Aus den bei *Knopoff* und *Uffen* mitgeteilten Kurven ist zu erkennen, daß die nach *Thomas* und *Fermi* gewonnenen Dichtewerte von Fe_2SiO_4 und Mg_2SiO_4 für p zwischen 10^{11} bis $10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ unterhalb von den nach *Birch* interpolierten Dichtewerten und somit auch unterhalb der wirklichen Werte liegen. Das hat seinen Grund darin, daß die elektrostatischen Anziehungskräfte der Ionen nicht in den Ansatz nach *Thomas* und *Fermi* für die Physik der hohen Drucke aufgenommen sind.

Wenn man die Verhältnisse in der Spanne zwischen $p = 10^{12}$ und $10^{14} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ richtig beschreiben will, muß man - so scheint es - annehmen, daß der Prozeß des Zerquetschens der Struktur der Elektronenhülle in Stufen vor sich geht. Wir können voraussetzen, daß bis zur Obergrenze des Erdkerns die Druck-Dichtekurve nach der Formel von *Birch* richtig ist. Bei dem in dieser Grenzschicht herrschenden Druck berühren sich die als Kugeln dargestellten 4 Ionen des Sauerstoffs O , die die Siliziumionen des Olivingitters tetraedrisch umgeben, wenn man die Radien der Kugeln mit den bekannten Ionenradien identifiziert. Das heißt, daß die Elektronenwolken anfangen einander merklich zu überdecken. Die äußeren Elektronenschalen der Ionen werden zusammenbrechen und diese werden in einem Elektronengas die Rumpfionen bilden. Dieser Zustand läßt sich mit einem Modell vergleichen, das *P. Gombas* [42] auf Grund des Atommodells von *Thomas-Fermi* und seiner Erweiterung nach *Dirac* für die Beschreibung des metallischen Zustandes geschaffen hat [42]. Dabei stellt man sich die Ionenrümpfe in Elementarkugeln mit dem Radius R_0 eingeschlossen vor, deren äußerer Teil durch das Elektronengas erfüllt ist. Wenn U die Gitterenergie ist, ergibt sich der Radius R_0 für Metalle aus der Gleichung

$$\frac{dU}{dR} = 0$$

als Gleichgewichtslage. Zum Unterschied dazu wäre R_0 im vorliegenden Falle aus dem Druck und der Dichte zu berechnen, bei denen dieser Zustand zuerst auftritt. Bemerkenswert ist dabei der folgende Umstand: Nach *P. Gombas* ergibt sich als Druck-Dichtebeziehung:

$$(65) \quad p = \frac{1}{4 \pi R_0^7} \left(4 A_4 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{7/3} + 3 A_3 R_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{6/3} + 2 A_2 R_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{5/3} + A_1 R_0^3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{4/3} \right),$$

während die *Birchsche* Formel lautet

$$(66) \quad p = 3/2 K_0 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{7/3} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{5/3} \right)$$

Wenn man die Konstanten geeignet bestimmt, so haben beide Kurven einigermaßen den gleichen Verlauf. Man kann also nicht unbedingt, was *Knopoff* und *Uffen* auch betonen, aus der Tatsache, daß die Funktion $\rho(p)$, wie sie sich bei der Berechnung der Dichte der Erde in größeren Tiefen ergibt, einen Sprung macht, schließen, daß auch die chemische Zusammensetzung des Materials eine überwiegend andere wird. Bei höherem Druck würden auch die inneren Schalen der Ionen zerquetscht werden und die Druck-Dichtekurve würde durch das *Thomas-Fermi-Modell* gut erfaßt werden. Es sei noch angemerkt, daß das *Thomas-Fermi-Modell* bei noch höherem Druck ($p = 10^{18} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$) in den Ansatz von *Fowler* eines homogenen Elektronengases kontinuierlich übergeht, der in der Physik der Fixsterne eine Rolle spielt.

Vorbehaltlich einer genaueren Untersuchung wollen wir annehmen, daß eine mit dem Druck sukzessive eintretende Zerquetschung der Elektronenschalen den Zustand der Materie im Erdinnern richtig beschreibt. Diese Untersuchung kann nach dem Vorbild der Arbeiten von *P. Gombas* u. a. erfolgen. Was dabei nicht erfaßt wird, ist die metallische Leitfähigkeit, die ziemlich sicher wenigstens für die Materie in den äußeren Schichten des Erdkerns angenommen werden muß. Sie muß mit anderen Methoden untersucht werden. Auch die Frage, ob die Materie sich wie eine Flüssigkeit oder ein Gas verhält, kann so nicht entschieden werden. Über diese Fragen liegt eine wichtige Arbeit von *H. Miki* ([9]) vor. Wenn man nach den Ergebnissen von *Knopoff* und *Uffen* eine repräsentative Atomnummer von $Z < 22$ und eine Temperatur $T > 2500^\circ \text{K}$ annimmt, wird man daraus schließen, daß die Materie des Erdkerns sich wie ein Gas verhält, d. h., daß ihr *Gibbsches* Potential

$$(67) G = E - p \cdot V - TS = E_{\text{Elektron}} - RT - RT \log \left(\frac{2\pi m_i K T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{V}{N_L}$$

das Minimum von G darstellt.

Wenn diese Überlegungen die Hypothese *Ramsays* stützen können, wonach die ganze Erde aus nahezu einheitlichem Material besteht, so gibt doch eine Tatsache einen Anhalt dafür, daß gewisse Differenzierungen vorkommen. Man findet, daß der Dichtegradient in der Schicht D'' zwischen 2700 - 2900 km wahrscheinlich einen abnormen Wert hat. Vielleicht kann man diese Tatsache als Diffusionseffekt deuten. Die Erfahrungen über Diffusionen der Atome und Moleküle von festen Körpern würde in geologischen Zeiträumen etwa diese Diffusionsbreite ergeben. Wenn man annimmt, daß die Materie des äußeren Erdkerns 10 Prozent mehr Eisen als die des mittleren Mantels enthält, könnte man diese Beobachtung schon erklären. Das die Materie des Erdkerns auch ungebundenes Eisen enthalten kann, wird allgemein angenommen. Die starke turbulente Diffusion im äußeren Erdkern hätte es dann gleichmäßig auf ihn verteilt, so daß bald nach der letzten großen geologischen Umwälzung ein Materialunterschied zwischen dem Erdkern und dem Erdmantel vorhanden wäre. Die nunmehr einsetzende Diffusion hätte dann, wenn das Bild richtig ist, die Dichteverhältnisse der Zone D'' geschaffen. Wenn allerdings, wie *Knopoff* und *Uffen* finden, das ungebundene Eisen 90 % der Materie des Erdkerns ausmachen, würde die Dichtezunahme der Zone D'' nicht nur etwa $0,3 \text{ g/cm}^3$ (*Bullen* [36]), sondern etwa $2,5 \text{ g/cm}^3$ ausmachen.

Die vorangehenden Ausführungen legen die Annahme nahe, daß die Untergrenze des Erdmantels eine ganz scharfe Grenze ist, so scharf wie zwischen dem festen und geschmolzenen oder sublimierten Material eines Ionengitters. Dieses Bild legen wir den folgenden Ausführungen zugrunde.

Damit die turbulente kinematische Zähigkeit, der kinematische Austauschtensor, die Bewegungen der großräumigen Bewegungen des Erdkerns gut überträgt, ist eine große Rauigkeit der Wand anzunehmen. Die Bewegungen bilden aber an den einzelnen Flächen laminare Grenzschichten aus, die jetzt genauer betrachtet werden sollen.

In der Strömung außerhalb der Grenzschicht fließen Elektronen und Ionen gleich schnell.

An der Grenzschicht treten aber Reibungskräfte auf, die die Bewegungen der Ionen stärker hemmen als die der Elektronen. Der sich einstellende elektrische Strom hat nach (64b) die Richtung der Reibungskraft, die auf die Ionen ausgeübt wird, so daß er der Richtung der hydrodynamischen Geschwindigkeit entgegen gesetzt ist. Die Dicke der Grenzschicht für Ionen wird deshalb die für Elektronen bedeutend übersteigen. Wir wollen die Verhältnisse quantitativ zu erfassen versuchen.

Wenn die makroskopische Geschwindigkeit u parallel zur Wand gerichtet ist und r den Abstand von ihr darstellt, so gilt

$$(68) \quad \sigma_{i,e} = \eta_{i,e} \frac{du_{i,e}}{dr} \quad \begin{array}{l} i \text{ für Ionen} \\ e \text{ für Elektronen.} \end{array}$$

Außerhalb der Grenzschichten sei eine vollkommene Parallelströmung vorhanden, deren ausgeglichene Geschwindigkeitsbeträge für Ionen und Elektronen die gleichen seien

$$\tilde{u}_e = \tilde{u}_i$$

Im Innern der Grenzschicht sind die Elektronen und Ionen wegen der relativ großen freien Weglänge der Elektronen teilweise (wir nehmen an vollständig) entkoppelt. Ferner nehmen wir dort, was nur dicht an der Wand richtig ist, an, daß das Geschwindigkeitsprofil linear sei. Dann sind in der im vorstehenden angeschriebenen Formel (68) σ_i und σ_e konstante Größen. Das von uns der Rechnung zugrunde gelegte Bild sagt also aus, daß die Spannungen von den parallel zur Wand verlaufenden Schichten auf die Obergrenze der Grenzschicht übertragen und von dort aus der Gesamtströmung mitgeteilt wird.

Der Resultierende aller Tangentialspannungen hält dem Druckgradienten das Gleichgewicht, so daß die Strömung außerhalb der Grenzschicht ohne Kraftwirkung bleibt.

Dann folgt aber, daß $\sigma_i = \sigma_e$ und weiter, daß

$$(69) \quad \eta_i \frac{du_i}{dr} = \eta_e \frac{du_e}{dr} \quad \text{gelten.}$$

Die aus der kinetischen Gastheorie folgenden Formeln für η_i bzw. η_e ergeben (s. etwa *Chapman* und *Cowling* [43]) nun das Verhältnis

$$\frac{\eta_i}{\eta_e} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} = 42 \sqrt{A}$$

wobei A das Atomgewicht ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß jedem Ion ein

Elektron zugeordnet ist, was sicher nicht ganz richtig ist. Man würde z. B. bei $\text{Mg}_2 \text{Si O}_4$ ein mittleres Atomgewicht

$$A = \frac{2 \text{ Mg} + \text{Si} + 4 \text{ O}}{7} = 20 \quad \text{erhalten.}$$

Wenn man dagegen die in der äußersten Schale freiwerdenden Elektronen berücksichtigt, erhält man für $\text{Mg}_2 \text{Si O}_4$:

$$A_1 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 24,3 + 4 \cdot 28 + 24 \cdot 16}{32} = 18,5$$

und für $\text{Fe}_2 \text{Si O}_4$:

$$A_2 = \frac{4 \cdot 55,8 + 4 \cdot 28 + 24 \cdot 16}{32} = 22,5 \quad ,$$

so daß wir trotzdem mit einem mittleren Atomgewicht von 20 rechnen können. Man erhält

$$\frac{du_i}{dr} : \frac{du_e}{dr} \approx \frac{1}{200} .$$

Man kann sich den Raum in der Verdrängungsdicke der Grenzschicht für die Ionen durch Elektronen angefüllt denken, die den Ionen voraneilen, denn die ausgeglichene Elektronenbewegung reicht sehr dicht an die Wand heran.

Wir vergleichen dieses Ergebnis mit den früher erhaltenen Stromstärken. Es gilt

$$j = e N_1 \mathfrak{S}_{i,e} \quad ,$$

wobei $\mathfrak{S}_{i,e}$ die Geschwindigkeit der Ionen relativ zu den Elektronen, N_1 die Anzahl der Elektronen ist.

$$\text{Es gilt: } N_1 = \frac{\rho N_L}{A} \approx \frac{1}{2} N_L \approx 3 \cdot 10^{23} \text{ [1/cm}^3\text{]}.$$

Die früher benutzte auf die Länge des Meridians bezogene Stromdichte \bar{j} soll berechnet werden. Wenn wir wie bisher ein lineares Geschwindigkeitsprofil annehmen, erhalten wir mit $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb

$$(69a) \quad \bar{j} = e \cdot \frac{1}{2} N_L \cdot \frac{1}{2} \delta^* \cdot u \approx 2,4 \cdot 10^4 \cdot \delta^* u \left[\frac{\text{Amp}}{\text{cm}} \right]$$

δ^* ist dabei die Verdrängungsdicke [13a].

Wir erhalten für

$$u = 0,5 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right], \quad \delta^* = 2 \cdot 10^{-5} \text{ [cm]} \quad \bar{j} = 24 \left[\frac{\text{Amp}}{\text{cm}} \right]$$

also Stromdichten, wie sie vorkommen können, wenn wir uns das erdmagnetische Feld als durch Ströme an der Oberfläche des Erdkerns erzeugt vorstellen.

Wir haben in der Grenzschicht die vollkommene Entkoppelung der Bewegung der Ionen und die der Elektronen angenommen. Das ist eine ideale Voraussetzung, die nur zum sehr geringen Teil wirklich vorhanden sein wird. Außerdem muß man annehmen, daß die lokalen Ströme wesentlich stärkere Dichten haben, da wir nur ihren ausgeglichenen und geschwächten magnetischen Effekt beobachten. Wir können mit Verdrängungsdicken von $\delta^* \approx 10^{-3}$ [cm] rechnen.

Nach *Blasius* gilt für eine überströmte Platte [13a]

$$(69b) \quad \delta^* = 1,73 \sqrt{\frac{\nu^* \cdot l}{u}},$$

wobei ν^* die kinematische Zähigkeit und l der Überströmungsweg ist. Wenn $\delta^* \approx 10^{-3}$ [cm], so folgt aus dieser Gleichung mit

$$\nu^* \approx 10^{-4} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right] \quad u = 50 \text{ cm/sec}$$

$$l = \frac{10^{-6} \cdot u}{3 \cdot \nu^*} \approx 1,7 \cdot 10^{-1} \text{ cm.}$$

Das sind die Dimensionen an Gleitflächen an der kristallinen Unterseite des Erdmantels, wie sie durchaus vorkommen könnten. Dabei brauchen keine besonderen Voraussetzungen über die Glattheit des Materials gemacht zu werden.

Wenn die hier vorgetragenen Gedanken über den Ursprung des erdmagnetischen Feldes richtig sind, würde seine formale Darstellung durch Stromsysteme an der Oberfläche des Erdkerns auch weitgehend eine ursächliche sein.

Zusammenfassend sagen sie folgendes aus:

Das erdmagnetische Feld entsteht durch Ströme an der Oberfläche des Erdkerns. Sie kommen dadurch zustande, daß sich in dem wie ein stark isonisiertes Gas verhaltenden Material des Erdkerns eine Grenzschicht an der mit scharfer Untergrenze versehenem Material des Mantels ausbildet. In dieser Grenzschicht fließen die Elektronen schneller als die Ionen. Diese lokalen Stromsysteme schließen sich nicht auf kurze Strecken, sondern bilden große Stromsysteme, weil im Innern des Erdkerns keine relative Bewegung der Elektronen an den Ionen stattfindet. Wenn man von den Wirkungen der im Erdkern und in dem unteren Erdmantel (Halbleiter) induzierten Ströme absieht, so stellt der elektrische Strom die horizontale hydromechanische Bewegung gut dar. Die Induktionsströme verwischen zahlreiche Einzelheiten, so daß das erdmagnetische Feld von den ursprünglichen Stromsysteme nur die allgemeinen Züge zeigt.

Wenn wir daher annehmen können, daß das erdmagnetische Feld in einer Grenzschicht des Erdkerns an der Unterseite des Erdmantels entsteht, in der die dort horizontalen Geschwindigkeiten die übrigen um eine Größenordnung oder mehr überwiegen, so werden die Vorstellungen der theoretischen Meteorologie anwendbar. Man kann sich die horizontalen Strom- bzw. Geschwindigkeitssysteme der ersten Abschnitte der Potentialentwicklungen nach Kugelfunktionen gut als "Wellen" im Sinne der Meteorologie vorstellen, wenn man sich z. B. die Linien gleichen Potentials auf der Oberfläche des Erdkerns als Funktionen der geographischen Länge dargestellt denkt. Zwischen der Geschwindigkeit und der ausgeglichenen Grundströmung, der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge L besteht nach *Rossby* [44] die Beziehung

$$(70) \quad C = u \left(1 - \frac{L^2}{L_s^2} \right)$$

L_s ist dabei die Wellenlänge, bei der die Welle bei gegebenem u stationär würde, d. h. $C = 0$ aufwiese. Für die Wellenlänge ergibt sich nach Rossby aus

$$L_s^2 = 4\pi^2 \frac{u}{\beta}, \quad \beta = \frac{2\Omega \sin \theta}{a_1} = \frac{4\pi \sin \theta}{a_1 r} \left[\frac{1}{\text{cm sec}} \right]$$

$$\text{mit } a_1 = 3,5 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

$$r = 8,64 \cdot 10^4 \text{ sec}$$

die Formel

$$(71) \quad L_s^2 = \frac{\pi \cdot u \cdot a_1 r}{\sin \theta_s}$$

Wir werden L und L_s durch $\frac{2\pi a_1}{\nu} \sin \theta$ bzw. $\frac{2\pi a_1 \sin \theta_0}{\nu}$ ausdrücken

wobei ν die Nummer des Abschnittes der Potentialentwicklung ist. Man erhält also aus der Formel (71)

$$(71a) \quad \sin^3 \theta_0 = \frac{\nu^2 \cdot r \cdot u}{4\pi a_1}$$

Wir haben gefunden, daß 1930 die "Welle", die den Dipol des erdmagnetischen Feldes darstellt, stagniert. Wenn man die Potentiallinien, die den Nordpol am Erdkern gerade umschlingen, als Begrenzung der Welle ansieht, erkennt man, daß θ_s mit der Lage des erdmagnetischen Dipols zu identifizieren ist. (71a) gestattet es, für $\nu = 1$ u_{1s} zu berechnen.

$$\text{Ergebnis sich } u_{1s} = 4,1 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right],$$

also noch etwas größer als in den vorangegangenen Abschätzungen angenommen wurde. Doch ist der Wert immerhin von der Größe, daß diese gültig bleiben. Man muß sich auch vorstellen, daß die Geschwindigkeit dicht an der laminaren Grenzschicht kleiner ist als einige 100 m tiefer, wo die Strahlströmung ihre größten Werte erreicht.

Um die Formel (70) anzuwenden, beachten wir, daß sich c aus ρ (1850) berechnen läßt. Es ergibt sich, daß

$$c(1850) \approx 0,0045 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right].$$

Wenn man u zunächst in der gleichen Größenordnung annimmt, wie bisher, so findet man

$$\frac{c}{u} \approx 1,1 \cdot 10^{-5},$$

so daß auch in diesem Falle im Hinblick auf die überhaupt erreichbaren Genauigkeiten $L(1850) \approx L_s(1850)$ gesetzt werden kann, obwohl, wie die Westwärtswanderung zeigt, der erstere Wert ein wenig größer sein muß als der zweite. Setzt man in Formel (71a) $\theta_s = 11,3^\circ(1850)$, so ergibt sich

$$u_s \cdot (1850) \approx 3,8 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right].$$

Das scheint zunächst einen Widerspruch zu den Formeln (9), (29), (69a) und (69b) zu ergeben, wonach gilt:

$$(72) \quad d \sim j \sim u^{1/2}$$

Nun ist aber sicher, daß das einfache Modell der Grenzschicht, das wir betrachtet haben, die Verhältnisse nur in sehr groben Zügen darstellt. Wir setzen daher an

$$\frac{d(1930)}{d(1850)} = \left(\frac{u(1930)}{u(1850)} \right)^\alpha$$

$$\text{mit } d(1930) = 0,31421, u(1930) = 4,1 \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$d(1850) = 0,32772, u(1850) = 3,8 \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

und finden $\alpha = -0,55$.

Statt (72) müßte man dann also schreiben:

$$(72a) \quad d \sim j \sim u^{-\frac{1}{2}}$$

Dieses Ergebnis sagte wegen Formeln (69a) und (69b) aus, daß auch in

der Grenzschicht die Bewegung der Elektronen noch weitgehend an die der Ionen gekoppelt ist, so daß sie nur wenig den letztgenannten voraneilen. Für die Stromstärke ist die Dicke der Grenzschicht nach Formel (69b) ausschlaggebend. Mit zunehmender Geschwindigkeit würde in diesem Bereich also die Energiedichte des erdmagnetischen Dipols abnehmen.

Es muß aber gesagt werden, daß man den Wert dieser Betrachtungen nicht überschätzen darf, weil die *Rossbysche* Theorie eine Reihe von Voraussetzungen enthält, die bei der vorliegenden Anwendung nicht erfüllt sind. Noch schwieriger ist ihre Verwendbarkeit auf die Wanderung des Quadrupols zu rechtfertigen. Wenn man als Durchschnitt für die Geschwindigkeit der Materie $u = 400 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]$ ansetzt, erhält man aus (71a)

$$\theta_{2s} = 18,40^\circ.$$

Dieser Wert ist sehr verschieden von $\theta = 50^\circ$; in dieser Poldistanz lagen die beiden Pole $P_1^{(2)}$ und $P_3^{(2)}$ des Quadrupols im Jahre 1850. Es ist auch nicht anzunehmen, daß sie mit diesem Wert übereinstimmen. Aus der durchschnittlichen Westdrift von $24^\circ/100$ Jahr läßt sich mit θ_{2s} die Geschwindigkeit c berechnen, wenn man beachtet, daß auch hier θ und θ_s nicht sehr voneinander verschieden sind. Man erhält

$$c_2 = -0,015 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right].$$

Als Ergebnis stellen wir heraus, daß die Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes als Wanderung langer horizontaler hydrodynamischer Wellen aufgefaßt werden kann. Die Experimente von *R. Hide* und die Beobachtung meteorologischer Prozesse ergeben, daß die Wellen höherer Frequenz als der zweiten eine weniger ausgeprägte Westwärtswanderung haben, wie es auch in den höheren Abschnitten der Potentialentwicklungen zu erwarten ist.

Auch die Wanderung von $P_1^{(2)}$ südwärts und von $P_3^{(2)}$ nordwärts lassen sich hydrodynamisch erklären.

Wenn wir die Stromdichte, die das Magnetfeld des erdmagnetischen Dipols erzeugt, in geomagnetischen Koordinaten (Θ_a, ϕ_a) bezogen auf den absoluten Raum, betrachtet, läßt sie sich schreiben:

$$\tilde{j}_\phi = |M_m^{(1)}| \sin \Theta_a = -\frac{a^3 d}{\text{Vol}(a_1)} \sin \Theta_a^{(1)}$$

Da \mathfrak{D} am Nordpol negativ ist, fließt der Strom nach Westen, während die ihn erzeugende Geschwindigkeit nach Osten gerichtet ist.

$$(73) \quad u_1 = v_\Phi = \frac{ad}{\text{Vol}(a_1)} \sin \Theta^{(1)}$$

Dieses Stromsystem können wir uns folgendermaßen entstanden denken. Wir betrachten die für das Erdinnere ungewöhnlich große Horizontalgeschwindigkeit als zu einer zweidimensionalen Strömung an der Oberfläche des Erdkerns gehörig. Die radialen Geschwindigkeitskomponenten seien vernachlässigt. Die Strömung sei reibungsfrei. Dann gilt für die vertikale Komponente des absoluten Wirbelvektors ein Erhaltungssatz. Es sei angemerkt, daß dieselben Annahmen schon für die Ableitung der *Rossbyschen* Formel gemacht wurden. Wenn man ferner annimmt, daß in der Umgebung der erdmagnetischen Pole der absolute Wirbel $\omega_a = \text{const.}$ sei, ergibt sich ([45], s.a. [22]) für die Winkelgeschwindigkeit

$$\Phi_a^\cdot = \frac{2\Omega_1}{1 + \cos \Theta_a^{(1)}}, \quad \Omega_1 = \Omega \cos \Theta^{(1)} \quad (\text{nach Tabelle 3}).$$

Daraus erhält man nach *Rossby* [45]

$$(74) \quad \frac{u_1}{C_{aq}} = \sin \Theta_a^{(1)} \left(\frac{\Phi_a^\cdot}{\Omega} - 1 \right) = \sin \Theta_a^{(1)} \left(\frac{1 - \cos \Theta_a^{(1)}}{1 + \cos \Theta_a^{(1)}} \right)$$

C_{aq} ist dabei die Translationsgeschwindigkeit des Äquators an der Unterseite des Erdmantels. Die von *Rossby* angegebenen Diagramme zeigen, daß

$$u_1 \sim \sin \Theta_a^{(1)}$$

den Verlauf von u_1 , z.B. an der Sonnenoberfläche und, wie bereits dargetan, auch an der des Erdkerns gut darstellen würde. Sie zeigen, daß diese Darstellung auch noch ziemlich gut ist, wenn die Annahme $\omega_a = \text{const.}$ in der Umgebung des Äquators nicht mehr gemacht werden kann. Daß der Pol dieser Strömung nicht mit dem Nordpol zusammenfällt, hat, wie gezeigt, seinen Grund darin, daß die Strahlströmung als eine horizontale, großräumige Konvektion ausgebildet ist.

Eine ähnliche Deutung lassen die beiden wesentlichen Bestandteile des Quadrupols zu. Wir gehen nach *Rossby* aus von den Gleichungen

$$(75a) \quad \frac{\partial \Phi_a^*}{\partial \Phi_a} + \frac{\partial \Theta_a^*}{\partial \Theta_a} = \Phi_a^* \operatorname{ctg} \Theta_a \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

$$(75b) \quad \omega_a \sin \Theta_a = -\frac{\partial \Theta_a^*}{\partial \Phi} + \sin^2 \Theta_a \frac{\partial \Phi_a^*}{\partial \Theta_a} + 2\Phi_a^* \sin \Theta_a \cos \Theta_a$$

(Wirbelgleichung)

Die absoluten Koordinaten sollen sich auf eine der beiden Stellen $P_1^{(2)}$ oder $P_3^{(2)}$ beziehen. Wir suchen die Verteilung von

$$\omega_a(\Theta_a) \text{ für } \Phi_a^* = \Omega_1 + c_0 \sin \Theta_a \cos \Theta_a.$$

Φ_a^* ist eine Funktion von Θ_a allein. Eine Θ_a^* -Komponente soll nicht vorhanden sein. Die Gleichung (75a) ist daher identisch erfüllt. Die Gleichung (75b) heißt

$$\omega_a \sin \Theta_a = c_0 \sin^2 \Theta_a (\cos^2 \Theta_a - \sin^2 \Theta_a) + 2\Omega_1 \sin \Theta_a \cos \Theta_a +$$

$$2c_0 \sin^2 \Theta_a \cos^2 \Theta_a$$

$$\xi'' = (\omega_a - 2\Omega \cos \Theta_a) = c_0 (3 \sin \Theta_a \cos^2 \Theta_a - \sin^3 \Theta_a)$$

$$\frac{d\xi''}{d\Theta_a} = \frac{d\omega_a}{d\Theta_a} (\omega_a - 2\Omega_1 \cos \Theta_a) = c_0 (3 \cos^3 \Theta_a - 9 \cos \Theta_a \sin^2$$

$$\Theta_{am}) = 0$$

$$\operatorname{tg} \Theta_{am} = \frac{1}{3} \sqrt{3}, \quad \Theta_{am} = 30^\circ$$

ξ'' ist die relative, vertikale Wirblichkeit der Strömung. Wir sehen, daß sie in der Umgebung der Pole $P_1^{(2)}$ bzw. $P_3^{(2)}$ konzentriert ist.

Hsiao lan Kuo [46] hat den Satz bewiesen, daß die Materie mit Wirblichkeit bei der hier angenommenen Bewegung immer so wandert, daß sie in Gebiete mit erhöhter, gleichgerichteter Wirblichkeit eindringt. Auf diese Weise machen wir uns klar, warum $P_3^{(2)}$ zum magnetischen Pol auf der Nordhalbkugel, $P_1^{(2)}$ von ihm weg wandert.

Wir wenden uns zum Abschluß der Frage zu, ob die *Maxwell'schen* Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form angewendet werden dürfen. Sie hängt mit der Frage zusammen, wie *S. K. Chakrabarty* [47] ausführt, wie weit die Annahmen, die den meisten Potentialentwicklungen des erdmagnetischen Feldes zu Grunde liegen, erfüllt sind:

1. Es ist ein zu vernachlässigendes externes Feld vorhanden.
2. Die Potentialbedingungen sind erfüllt.
3. Es sind Gewichte einzuführen, die die gegebenen Werte am Äquator stärker berücksichtigen als an den Polen.

S. K. Chakrabarty zeigt, daß die an sich willkürlichen Gewichte wegzulassen sind. Man findet dann, daß ein Nicht-Potentialfeld und auch ein schwaches externes Feld vorhanden sind, die gerade groß genug sind, die Forderungen von *Schrödinger* auf Grund seiner Unitären Feldtheorie zu erfüllen [48]. Die Vereinfachung, die ihr gegenüber die *Maxwell'schen* Gleichungen bedeuten, beeinträchtigen indessen die hier vorgelegten Schlüsse nicht.

Zusammenfassung

Abschnitt A. Es wird eine neue Methode angegeben, die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Feldes auf Grund der Kugelfunktionsentwicklungen seines Potentials zahlenmäßig zu erfassen. Außerdem werden Formeln für die mittlere Oberflächendichte \overline{X}_ν^2 , \overline{Y}_ν^2 , \overline{Z}_ν^2 und für $e_\nu = \frac{1}{8\pi}(\overline{X}_\nu^2 + \overline{Y}_\nu^2 + \overline{Z}_\nu^2)$, die mittleren Energiedichten des Feldes, mitgeteilt. ν kennzeichnen ν -ten Abschnitt der Potentialentwicklung. Die zeitliche Veränderung der Lage und der Intensität des Dipols und der drei einfachen Quadrupole, die den zweiten Abschnitt der Potentialentwicklungen darstellen, werden für die Zeit von 1850 bis 1950 in Abständen von 10 Jahren in Tabellen und Zeichnungen angegeben. Zwei der einfachen Quadrupole führen neben einer Westwärtsdrift von $24^\circ/100$ Jahren noch eine fast ebenso starke nordwärtige bzw. südwärtige Bewegung aus.

Abschnitt B. Es wird gezeigt, daß jeder einfache Multipol bis zur dritten Ordnung ausschließlich durch ein einfaches zonales Stromsystem erzeugt gedacht werden kann, dessen Achse die Achse des Multipols ist. Für den Dipol und die drei einfachen Quadrupole werden die Stromdichten als Funktion der Zeit angegeben. Der Skin-effekt von Stromsystemen mit etwa gleicher Periodizität wird untersucht und gefunden, daß diese in den obersten Schichten des Erdkerns fließen müssen.

Abschnitt C. Es wird im Anschluß an *S. K. Runcorn* gezeigt, daß die großräumigen Konvektionsströmungen im Erdkern, die das erdmagnetische Feld erzeugen könnten, auf zur Drehachse senkrechten Ebenen beschränkt sein müssen. Somit entsteht zwischen den Theorien, die das erdmagnetische Feld auf dem Boden der Hydromagnetik erklären wollen (*Elsässer, Bullard, Takeuchi* und *Shimazu*), und den Ergebnissen des Abschnittes A ein Widerspruch. Aus dem Verhalten der Änderung der Tageslänge von 1850 und den Veränderungen des erdmagnetischen Feldes wird geschlossen, daß kein stochastischer und auch kein ursächlicher Zusammenhang zwischen den beiden Phänomenen besteht. Die Bewegungen der Materie, die das erdmagnetische Feld erzeugen, sind deshalb auf eine sehr seichte Schicht an der Obergrenze des Erdkerns zu beschränken, in der im wesentlichen horizontale Bewegungen stattfinden. Sowohl deren ausgeglichene Geschwindigkeit als auch deren turbulente Zusatzbewegungen sind um Größenordnungen größer als die im Erdkern selbst. Es besteht ein ziemlich starkes Temperaturgefälle vom Äquator zu den Polen, das eine besondere oberflächennahe Strahlströmung erzeugt. Die Entstehung des erdmagnetischen Feldes in dieser Grenzschicht kann nicht mit den Mitteln der Hydromagnetik behandelt werden.

Abschnitt D. Ausgehend von den experimentellen Ergebnissen von *W. Lochte-Holtgreven* wird die Materie des Erdkerns als hochionisiertes Plasma angesehen. Die Möglichkeiten einer eingehenden Prüfung der Hypothese von *Ramsay* werden erörtert und es wird gefunden, daß das erdmagnetische Feld in der Grenzschicht zwischen dem Erdkern und dem Erdmantel entstehen könnte. Für den Zusammenhang zwischen der Stromdichte und der Geschwindigkeit des Materials werden erste Abschätzungen vorbehaltlich einer genaueren Untersuchung angegeben. Falls die hier vorgebrachten Gedanken richtig sind, ist die Westwärtswanderung der Isoliniengebilde des erdmagnetischen Feldes als diejenige langer hydrodynamischer Wellen aufzufassen. Die Abweichung der Achse des Dipols von der Rotationsachse erhält eine natürliche Erklärung. Auch die nord- bzw. südwärtige Bewegung der einfache Quadrupole kann erklärt werden.

Zum Schluß möchten wir Fräulein *G. Runge* und Herrn *G. Naitha* vom Geomagnetischen Institut Potsdam, die die umfangreichen Rechenarbeiten für diesen Aufsatz in vorbildlicher Weise durchgeführt haben, unseren besten Dank aussprechen.

Literatur

- [1] *Elsasser, W. M.*: The Earth's Interior and Geomagnetism. Rev. of Mod. Physics. Vol. 22 S. 1-34 (1950).
- [2] *Bullard, E. C. u. a.*: The westward Drift of the Earth's Magnetic Field. Phil. Transact. Roy. Soc. Vol. 243 S. 67-92 (1950).
- [3] *Chapman, S. and Bartels, J.*: Geomagnetism. Vol. II. Oxford 1951.
- [4] *Mauersberger, P.*: Betrachtungen über die zeitlichen Änderungen der Parameter des geomagnet. Feldes auf Grund d. vorliegenden Potentialentwicklungen. Abhdl. d. Geophys. Inst. Potsdam Nr. 5/1952.
- [5] *Lucke, O.*: Größengleichungen und Maßeinheiten. Abhdl. d. Geomagn. Inst. Potsdam (in Vorbereitung).
- [5a] *Mauersberger, P.*: Das Mittel der Energiedichte des geomagnet. Hauptfeldes a. d. Erdoberfläche und seine säkulare Änderung. Gerlands Beiträge Bd. 65 S. 207 (1956).
- [6] *Vestine, E. H.*: On Variations of the geomagnetic Field, fluid Motions and the Rate of the Earth's Rotation. J. of Geophysics. Res. 58. S. 127-145 (1953).
- [7] *Salmon, G. und Fiedler, W.*: Vorlesung über die Algebra d. Transformationen, Lpzg. 1877.
- [8] *Bullard, E. C.*: Electrodynamical Induction in a rotating Sphere. Proc. of Roy. Soc. London Vol. 199 S. 413-446 (1949).
- [9] *Miki, Haruo*: Phys. States of the Earth's Core. J. of Physics of the Earth. 1 S. 67 (1952).
- [10] *Magnus-Oberhettinger*: Formeln und Sätze . . . , Springer 1948.
- [11] *Courant u. Hilbert*: Methoden der math. Physik I. Springer 1931.
- [12] *Runcorn, S. K.*: Heat Flow in the Earth, Nature Vol. 166 S. 974/76 (1950).
- [13] *Runcorn, S. K.*: The Earth's Core. Transactions of Am. Geophys. Union Vol. 35 49 61 (1954).
- [13a] *Lettau, H.*: Atmosphärische Turbulenz, Leipzig 1939.
- [14] *Proudman, J.*: On the Motion of Solids in a Liquid possessing Vorticity. Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 92. S. 408-424 (1916).
- [15] *Hide, R.*: Some Experiments on the thermal Convection in a rotating Liquid. Quaterly J. of the Roy. Meteorolog. Soc. London 79. S. 161.

- [15a] *Inglis, D. R.*: Theories of the Earth's Magnetism. Rev. Mod. Phys. Vol. 27. S. 212-242 (1955).
- [16] *Rossby, C. G.* in: The Atmospheres of the Earth and the Planets. ed. by G.P. Kuiper Chicago 1949. 2. Kapitel.
- [17] *Revelle, R.* und *Munk, W.*: Evidence of the Rotation of the Earth Annales de Géophysique, Paris, Tome 11. (1955) S. 104-108.
- [18] *Lundquist, S.*: Studies in magneto-hydrodynamics. Arkiv f. Fysik 5 S. 297-347. (1952).
- [19] *Brower*: Proc. Nat. Acad. Sci 38 1-12 (1952).
- [20] *Runcorn*: Core Motions and Reversals of the geomagnetic Field Ann. de Géophys. 11 S. (73-80) 1955.
- [21] *Bullard, E. C.*: The magnetic Field with in the Earth. Proc. Roy. Soc. of London 197 S. 433-453.
- [22] *Lucke, O.*: Über d. allgem. Zirkulation i. d. unt. Atmosphäre der Erde im Lichte d. Hydrodynamik. Zt. Met. 6 S. 202-215 (1952),
- [23] *Takeuchi, H.* and *Shimazu, Y.*: On a self exciting Process in Magneto-Hydrdynamics. I. J. of the Physics of the Earth I S. 1-9 (1952).
- [24] *Takeuchi, H.* and *Shimazu, Y.*: II. J. of the Physics of the Earth I S. 57-64 (1952).
- [25] *Takeuchi, H.* and *Shimazu, Y.*: J. of Geophys. Research 58 S. 497-518 (1953).
- [25a] *Takeuchi, H.* and *Shimazu, Y.*: III. J. of the Physics of the Earth, Vol. 2 S. 5-12 (1954)
- [26] *Batchelor, S. K.*: On the spontaneous magnetic Field in a conducting Liquid in turbulent Motion. Proc. Roy. Soc. London A 201 (405-410) (1950).
- [27] *Rikitake, T.*: Electrical Conductivity of the Earth's Core. Ann. de Géophysique 11, 95 (1955).
- [28] *Czada, I. K.*: On the spontaneous magnetic Field in a conducting Liquid in turbulent Motion. Act. phys. ac. sci Hungariae I, 3 S. 235-246 (1951).
- [29] *Lucke, O.*: Bem. z. Definition d. Austauschensors. Z. f. Met. 4 S. 217 (1950).
- [30] *Schlüter, A.*: Dynamik des Plasmas Z. f. Naturforschung 5 a. S. 72-80 (1950).
- [31] *Lochte-Holtgreven, W.* und *Schilling, P.*: Über das Auftreten von Magnetfeldern in rotierenden Plasmen. Die Naturwissensch. 40 S. 387 (1953).
- [32] *Burhorn, F., Grien, H.* und *Lochte-Holtgreven, W.*: Über Auftreten von Magnetfeldern in zirkulierendem flüssigem Quecksilber. Die Naturwiss. 40 S. 387 (1953).
- [33] *Burhorn, F., Grien, H.* und *Lochte-Holtgreven, W.*: Auftreten von Magnetfeldern in zirkulierendem flüssigem Quecksilber. Z. f. Physik 137. S. 175-189 (1954).
- [34] *Seitz, F.*: The modern Theorie of Solids. New York und London 1940.

- [35] *Jeffreys, H.*: The Earth. Cambridge 1952.
- [36] *Bullen, K. E.*: Physical Properties of the Earth Core. Ann. d. Geophys. 1, S. 53-63 (1955).
- [37] *Knopoff, L. and Uffen, R. I.*: Compounds at high Pressures and Earth's Interior. J. Geophys. Res. 59. 471-484 (1954).
- [37a] *Birch, F.*: Elasticity and Constitution of the Earth's Interior. J. of Geophys. Res. 57 S. 227-286 (1952).
- [38] *Ramsay, W. H.*: On the Nature of the Earth's Core. M. N. R. A. S. Geophys. Suppl Vol. 5 S. 409-427 (1949).
- [39] *Verhoogen, J.*: Petrological Evidence of Temperature Distribution . . . Transact. Am. Geophys. Union Vol. 35, S. 85-91 (1954).
- [40] *Shimazu, Y.*: Equation of State of Materials composing the Earth's Interior. II. J. of Earth-Sciences 2, S. 95-172 (1954).
- [41] *Bridgman*: Einige Ergebnisse der Physik der hohen Drucke. Endeavour X. S. 63-69 (1951).
- [42] *Gombás, P.*: Die Statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen. Wien 1949.
- [43] *Chapman, S. und Cowling*: The Theory of non uniform Gases, Cambridge 1953 (S. 167).
- [44] *Rossby, C. G. and collab.*: Relation between Variations of . . . J. of Marine Research Vol. II N. 1. (1939).
- [45] *Rossby, C. G.*: On the Distribution of angular Velocity in . . . Bull. Am. Met. Soc. 28 (1947)
- [46] *Hsiao lan Kuo*: Vorticity Transfer as related . . . J. of Meteorology Vol. 8 S. 307-315. (1951).
- [47] *Chakrabarty, S.K.*: The spherical harmonic analysis of the Earth's magnetic Field. Indian J. of Met. and Geophys. Vol. 8 S. 62-68 (1955).

Tabelle 1 (nach [4])

Die Funktionen $g_1^0(t_1) \dots$, in $\gamma = 10^{-5} \Gamma$ angegeben

t_1	$g_1^0(t_1)$	$g_1^1(t_1)$	$h_1^1(t_1)$	$\dot{g}_1^0(t_1)$	$\dot{g}_1^1(t_1)$	$\dot{h}_1^1(t_1)$
1850	-32135	-2719	5823	15,0	11,02	7,81
1860	-32034	-2615	5890	15,4	9,84	5,74
1870	-31909	-2522	5938	15,9	8,65	3,85
1880	-31761	-2442	5968	16,8	7,47	2,16
1890	-31594	-2373	5982	17,9	6,28	0,66
1900	-31410	-2316	5982	19,2	5,10	-0,65
1910	-31211	-2270	5970	20,8	3,92	-1,76
1920	-31000	-2238	5947	22,6	2,73	-2,69
1930	-30779	-2216	5917	24,7	1,55	-3,42
1940	-30552	-2207	5880	27,1	0,36	-3,96
1950	-30319	-2209	5838	29,6	-0,82	-4,31

Tabelle 2 (nach [6])

Die Funktionen $g_1^0(t_1) \dots$, in $\gamma = 10^{-5} \Gamma$ angegeben

t_1	$g_1^0(t_1)$	$g_1^1(t_1)$	$h_1^1(t_1)$	$\dot{g}_1^0(t_1)$	$\dot{g}_1^1(t_1)$	$\dot{h}_1^1(t_1)$
1890	-31596	-2377	6038	1,3	18,4	1,0
1900	-31538	-2248	6023	13,7	9,2	-3,7
1910	-31365	-2178	5981	23,9	1,8	-6,3
1920	-31100	-2158	5931	29,2	3,7	-7,4
1930	-30827	-2135	5842	26,6	2,1	-5,3
1940	-30627	-2108	5808	13,9	1,3	-1,0
1950	-30546	-2096	5827	-1,3	3,7	+5,3

Tabelle 3 (nach [4])

	$\bar{e}_1 \left[\frac{\text{erg} \cdot 10^3}{\text{cm}^3} \right]$	$\dot{e}_1 \left[\frac{\text{erg} \cdot 10^5}{\text{cm}^3 \text{ Jahr}} \right]$	$d^{(1)} [\Gamma]$	$\dot{d}^{(1)} \left[\frac{\Gamma \cdot 10^4}{\text{Jahr}} \right]$	$\phi [^\circ]$	$\dot{\phi} [^\circ/\text{Jahr}]$	$\theta [^\circ]$	$\dot{\theta} [^\circ/\text{Jahr}]$
1850	8,55544	-0,74318	-0,32772	-1,424	295,0	-0,1187	168,7	+0,00957
1860	8,50542	-0,77308	-0,32676	-1,485	293,9	-0,1009	168,6	+0,00705
1870	8,44257	-0,80664	+0,32555	-1,555	293,0	-0,0843	168,6	+0,00585
1880	8,36697	-0,85602	+0,32409	-1,658	292,3	-0,0688	168,5	+0,00490
1890	8,28150	-0,91848	+0,32243	-1,788	291,6	-0,0542	168,5	+0,00338
1900	8,18678	-0,98583	+0,32058	-1,930	291,2	-0,0404	168,5	+0,00259
1910	8,08546	-1,06530	+0,31859	-2,099	290,8	-0,0273	168,4	+0,00212
1920	7,97664	-1,15133	+0,31644	-2,284	290,6	-0,0145	168,4	+0,00238
1930	7,86464	-1,24897	+0,31421	-2,495	290,5	-0,00229	168,4	+0,00280
1940	7,74993	-1,35742	+0,31191	-2,732	290,6	+0,00963	168,4	+0,00328
1950	7,63307	-1,46700	+0,30955	-2,975	290,7	+0,0210	168,4	+0,00468

Tabelle 4 (nach [6])

	$\bar{e}_1 \left[\frac{\text{erg} \cdot 10^3}{\text{cm}^3} \right]$	$\dot{e}_1 \left[\frac{\text{erg} \cdot 10^5}{\text{cm}^3 \text{ Jahr}} \right]$	$d^{(1)} [\Gamma]$	$\dot{d}^{(1)} \left[\frac{\Gamma \cdot 10^4}{\text{Jahr}} \right]$	$\phi [^\circ]$	$\dot{\phi} [^\circ/\text{Jahr}]$	$\theta [^\circ]$	$\dot{\theta} [^\circ/\text{Jahr}]$
1890	8,28772	-1,25538	+0,32255	-0,244	291,5	-0,1548	168,4	-0,00962
1900	8,25274	-0,75687	+0,32187	-1,476	290,5	-0,0654	168,5	-0,00682
1910	8,15923	-1,26343	+0,32004	-2,478	290,0	+0,00418	168,5	-0,00347
1920	8,02157	-1,52946	+0,31733	-3,025	290,0	-0,00860	168,5	-0,00406
1930	7,87818	-1,36283	+0,31448	-2,720	290,1	-0,00141	168,6	-0,000579
1940	7,77630	-0,69191	+0,31244	-1,390	290,0	-0,00820	168,6	+0,00255
1950	7,73797	+1,00154	+0,31167	+0,202	289,8	-0,0488	168,6	+0,00631

Tabelle 5

Die Funktionen $g_2^0(t) \dots$, in $\gamma = 10^{-5} \Gamma$ angegeben (nach [4])

t	$g_2^0(t)$	$g_2^1(t)$	$g_2^2(t)$	$h_2^1(t)$	$h_2^2(t)$	\dot{g}_2^0	\dot{g}_2^1	\dot{g}_2^2	\dot{h}_2^1	\dot{h}_2^2
1850	- 20	2835	150	- 245	1409,4	-12,6	1,3	16,1	-13,7	14,5
1860	- 146	2848	311	- 382	1499,7	-12,6	1,3	16,1	-13,7	4,4
1870	- 272	2861	472	- 519	1502,3	-12,6	1,3	16,1	-13,7	- 8,2
1880	- 398	2874	633	- 656	1469,6	-12,6	1,3	16,1	-13,7	- 9,2
1890	- 524	2887	794	- 793	1324,5	-12,6	1,3	16,1	-13,7	-13,2
1900	- 650	2900	955	- 930	1180,0	-12,6	1,3	16,1	-13,7	-15,5
1910	- 776	2913	1116	-1067	1019,3	-12,6	1,3	16,1	-13,7	-17,1
1920	- 902	2926	1277	-1204	856,0	-12,6	1,3	16,1	-13,7	-16,1
1930	-1028	2939	1438	-1341	701,9	-12,6	1,3	16,1	-13,7	-14,6
1940	-1154	2952	1599	-1478	566,9	-12,6	1,3	16,1	-13,7	-12,4
1950	-1280	2965	1760	-1615	459,4	-12,6	1,3	16,1	-13,7	- 9,2

Tabelle 6

Die Funktionen $g_2^0(t) \dots$, in $\gamma = 10^{-5} \Gamma$ angegeben (nach [6])

t	$g_2^0(t)$	$g_2^1(t)$	$g_2^2(t)$	$h_2^1(t)$	$h_2^2(t)$	\dot{g}_2^0	\dot{g}_2^1	\dot{g}_2^2	\dot{h}_2^1	\dot{h}_2^2
1890	- 619	2896	731	- 831	1389	-15,8	5,0	17,2	-19,5	15,4
1900	- 770	2935	923	-1019	1235	- 9,8	2,2	21,5	-12,5	15,4
1910	- 846	2946	1158	-1119	1069	- 7,0	-1,2	24,5	- 8,8	15,4
1920	- 916	2946	1381	-1231	916	- 8,9	1,2	19,0	-12,0	15,4
1930	-1023	2942	1535	-1369	769	-12,8	1,8	12,0	-17,5	15,4
1940	-1169	2942	1616	-1562	600	-17,0	0	4,2	-19,8	15,4
1950	-1358	2942	1635	-1769	462	-19,8	0	-5,0	-21,2	15,4

Anm. Die Parameter des geomagnetischen Feldes sind die gemäß [4] bzw. [6] ausgeglichenen Werte.

Tabelle 7 a (nach [4])

	\overline{V}_2^2	$e_2 \left[\frac{\text{erg } 10^3}{\text{cm}^3} \right] \overline{V}_2^{-\frac{1}{2}}$		$e_2 \left[\frac{\text{erg } 10^5}{\text{cm}^3 \text{ Jahr}} \right]$	$c_1^{(2)}$	$c_2^{(2)}$	$c_3^{(2)}$	
1850	$0,20213 \cdot 10^{-3}$	0,12064	0,1	$206 \cdot 10^{-5}$	0,0720	1812,0	46,25	-1858,2
1860	$0,21248 \cdot 10^{-3}$	0,12681	0,0	$895 \cdot 10^{-5}$	0,0534	1851,4	59,20	-1910,6
1870	$0,22017 \cdot 10^{-3}$	0,13140	0,0	$381 \cdot 10^{-5}$	0,0227	1881,2	67,35	-1948,6
1880	$0,22818 \cdot 10^{-3}$	0,13619	0,0	$576 \cdot 10^{-5}$	0,0344	1910,9	76,78	-1987,6
1890	$0,23246 \cdot 10^{-3}$	0,13874	0,0	$661 \cdot 10^{-5}$	0,0395	1935,9	63,22	-1999,1
1900	$0,24004 \cdot 10^{-3}$	0,14326	0,0	$871 \cdot 10^{-5}$	0,0520	1975,1	48,92	-2024,0
1910	$0,25021 \cdot 10^{-3}$	0,14933	0,1	$149 \cdot 10^{-5}$	0,0686	2028,6	26,84	-2055,5
1920	$0,26376 \cdot 10^{-3}$	0,15742	0,1	$538 \cdot 10^{-5}$	0,0918	2097,4	-0,76	-2096,6
1930	$0,28107 \cdot 10^{-3}$	0,16775	0,1	$922 \cdot 10^{-5}$	0,9147	2179,4	-30,08	-2149,4
1940	$0,30217 \cdot 10^{-3}$	0,18034	0,2	$294 \cdot 10^{-5}$	0,1369	2272,0	-56,60	-2215,4
1950	$0,32693 \cdot 10^{-3}$	0,19512	0,2	$649 \cdot 10^{-5}$	0,1581	2371,3	-75,81	-2295,5

Tabelle 7 b (nach [4])

	$P_1^{(2)}$		$P_2^{(2)}$		$P_3^{(2)}$	
	$\phi_1^{(2)} [^\circ]$	$\theta_1^{(2)} [^\circ]$	$\phi_2^{(2)} [^\circ]$	$\theta_2^{(2)} [^\circ]$	$\phi_3^{(2)} [^\circ]$	$\theta_3^{(2)} [^\circ]$
1850	20,07	$50,81^\circ$	$86,09^\circ$	$116,47^\circ$	$152,01^\circ$	$50,68^\circ$
1860	$19,16^\circ$	$52,79^\circ$	$85,24^\circ$	$118,07^\circ$	$148,69^\circ$	$50,06^\circ$
1870	$17,26^\circ$	$54,19^\circ$	$84,30^\circ$	$118,38^\circ$	$146,22^\circ$	$48,94^\circ$
1880	$15,11^\circ$	$55,32^\circ$	$83,34^\circ$	$118,23^\circ$	$144,10^\circ$	$47,68^\circ$
1890	$11,45^\circ$	$55,99^\circ$	$81,55^\circ$	$116,75^\circ$	$142,30^\circ$	$45,91^\circ$
1900	$8,01^\circ$	$56,70^\circ$	$79,73^\circ$	$115,10^\circ$	$140,43^\circ$	$44,27^\circ$
1910	$4,59^\circ$	$57,23^\circ$	$77,78^\circ$	$114,08^\circ$	$138,42^\circ$	$42,83^\circ$
1920	$1,44^\circ$	$58,23^\circ$	$75,84^\circ$	$113,47^\circ$	$136,24^\circ$	$41,32^\circ$
1930	$-1,24^\circ$	$59,13^\circ$	$74,05^\circ$	$113,00^\circ$	$135,82^\circ$	$40,18^\circ$
1940	$-3,36^\circ$	$60,07^\circ$	$72,52^\circ$	$112,96^\circ$	$131,35^\circ$	$39,31^\circ$
1950	$-4,88^\circ$	$61,05^\circ$	$71,32^\circ$	$113,32^\circ$	$128,81^\circ$	$38,72^\circ$

Tabelle 7c

	$\Delta \Theta_{\mu\nu} = (\frac{1}{2} P_{\mu}^{(2)} P_{\nu}^{(2)} - 90^{\circ})$		
	$\Delta \Theta_{12}$	$\Delta \Theta_{23}$	$\Delta \Theta_{13}$
1850	-0,02°	0,00°	+0,02
1860	-0,02°	-0,02°	-0,02
1870	-0,01°	-0,00°	+0,01
1880	+0,03°	+0,01°	+0,03
1890	-0,01°	0,00°	+0,01
1900	-0,02°	0,00°	+0,02
1910	0,00°	0,00°	0,00
1920	0,00°	0,00°	0,00
1930	+0,01°	-0,03°	+0,03
1940	+0,01°	+0,01°	-0,01
1950	-0,01°	-0,01°	+0,01

Tabelle 7d

Die Lage der einfachen Quadrupole relativ zum Dipol

	α	β	$\gamma_1 - \gamma_2$	$\delta_1 - \delta_2$
1850	50,7°	60,0°		
1950	56,7°	40,2°	41,3°	19,3°

Tabelle 8a (nach [6])

	\overline{V}_2^2	$e_2 \left[\frac{\text{erg} \cdot 10^3}{\text{cm}^3} \right]$	\overline{V}_2^2	$e_2 \left[\frac{\text{erg} \cdot 10^5}{\text{cm}^3 \text{ Jahr}} \right]$
1890	0,23848.10 ⁻³	0,1423	0,29771.10 ⁻⁵	0,1777
1900	0,25245.10 ⁻³	0,1507	0,26242.10 ⁻⁵	0,1566
1910	0,26261.10 ⁻³	0,1567	0,22827.10 ⁻⁵	0,1362
1920	0,27559.10 ⁻³	0,1645	0,26685.10 ⁻⁵	0,1592
1930	0,29047.10 ⁻³	0,1734	0,29044.10 ⁻⁵	0,1753
1940	0,30866.10 ⁻³	0,1842	0,26731.10 ⁻⁵	0,1595
1950	0,30311.10 ⁻³	0,1809	0,25332.10 ⁻⁵	0,1512

Tabelle 9
 Äquatoriale Stromdichten $\left[\frac{\text{AMP}}{\text{cm}} \right]$ für V_1

	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930
$\tilde{j}_{\phi_m}^{(1)} ([4]):$	4,757	4,743	4,725	4,704	4,680	4,653	4,624	4,593	4,560
$\tilde{j}_{\phi_m}^{(1)} ([6]):$					4,682	4,672	4,645	4,606	4,564
					1940	1950			
					4,527	4,493			
					4,535	4,524			

Tabelle 10
 Äquatoriale Stromdichten $\left[\frac{\text{Amp}}{\text{cm}} \right]$ für V_2

	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930
$\tilde{j}_{\phi_m}^{(2,1)}:$	0,5999	0,6129	0,6228	0,6326	0,6409	0,6539	0,6716	0,6944	0,7215
$\tilde{j}_{\phi_m}^{(2,2)}:$	0,0153	0,0196	0,0223	0,0254	0,0209	0,0162	0,00889	0,00252	0,00996
$\tilde{j}_{\phi_m}^{(2,3)}:$	0,6152	0,6325	0,6451	0,6580	0,6618	0,6701	0,6805	0,6941	0,7116
						1940	1950		
						0,7522	0,7851		
						0,0187	0,0251		
						0,7335	0,7600		

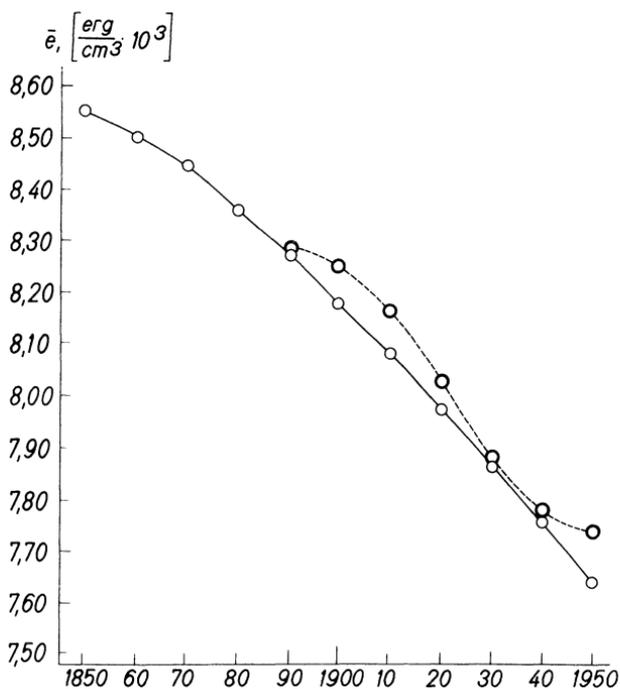


Abb. 1: Die mittlere Energiedichte des erdmagnetischen Dipols in $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \cdot 10^3$ als Funktion der Zeit nach den Ergebnissen von [4] und [6].

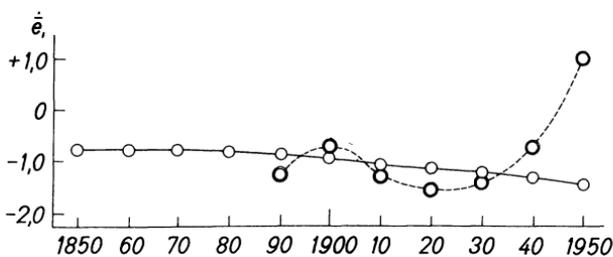


Abb. 2: Die jährliche Änderung der Energiedichte des erdmagnetischen Feldes in $\left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right] \cdot 10^3 / 10 \text{ Jahr}$ als Funktionen der Zeit nach [4] und [6].

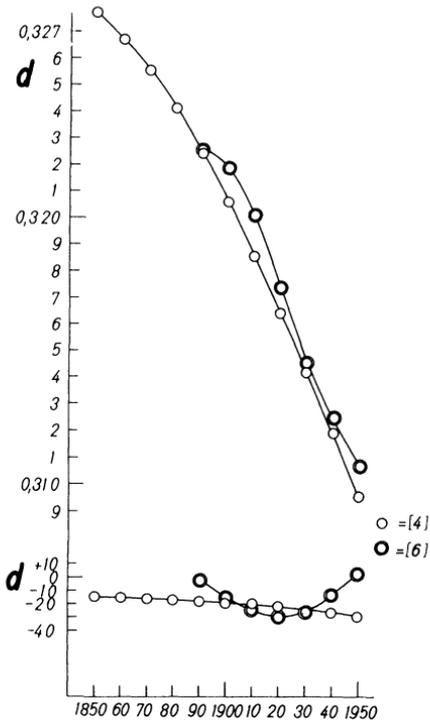


Abb. 3: Die Länge des Vektors und seine jährliche Änderung nach [4] und [6] in Γ bzw. $\Gamma \times 10^4 / 10$ Jahr.

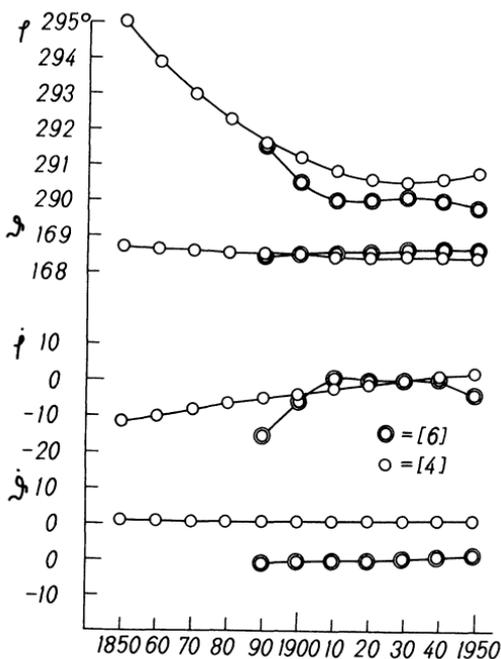


Abb. 4: Die Größe der Winkel $\phi^{(1)}$ und $\theta^{(1)}$ in $^{\circ}$ ($2\pi \sim 360^{\circ}$) und ihre 10-jährige Änderung nach [4] und [6].

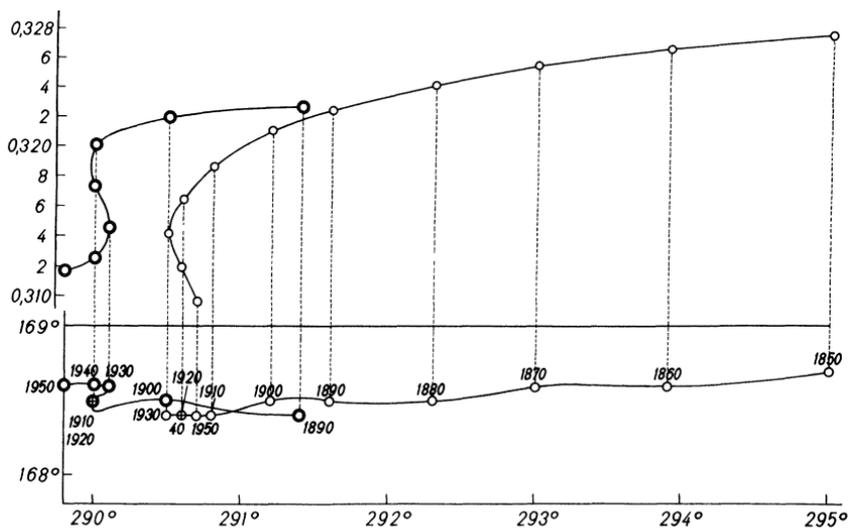


Abb. 5: Die Größen $\phi^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ (Grundriß) und die Längen des Vektors d (Aufriß) in $[^{\circ}]$ bzw. $[^{\circ}]$ ($2\pi \sim 360^{\circ}$) nach [4] und [6].

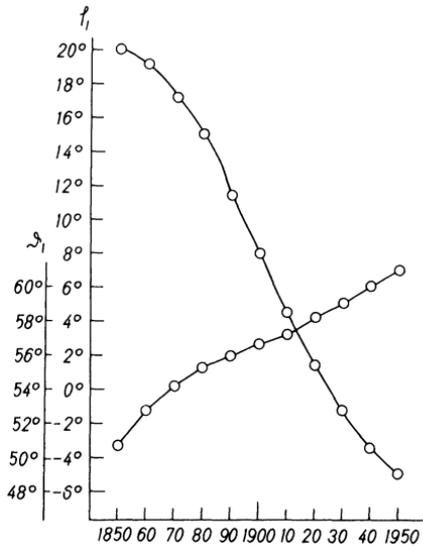


Abb. 6: $\phi_1^{(2)} \cdot \theta_1^{(2)}$ in $[\circ]$ ($2\pi \sim 360^\circ$) als Funktionen der Zeit nach [4].

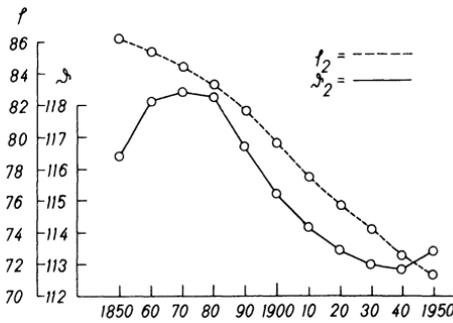


Abb. 7: $\phi_2^{(2)} \cdot \theta_2^{(2)}$ in $[\circ]$ ($2\pi \sim 360^\circ$) als Funktionen der Zeit nach [4].

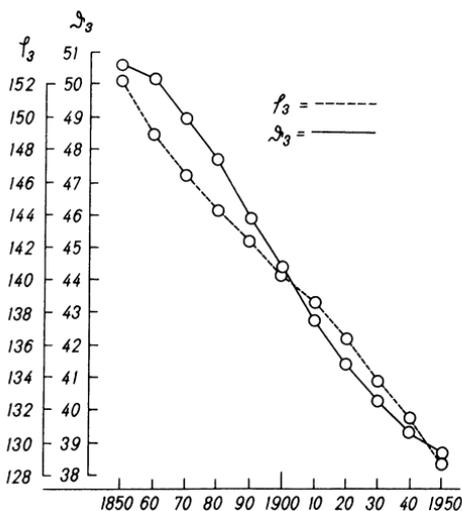


Abb. 8: $\phi_3^{(2)}, \theta_3^{(2)}$ in $[\circ]$ ($2\pi \sim 360^\circ$) als Funktionen der Zeit nach [4].

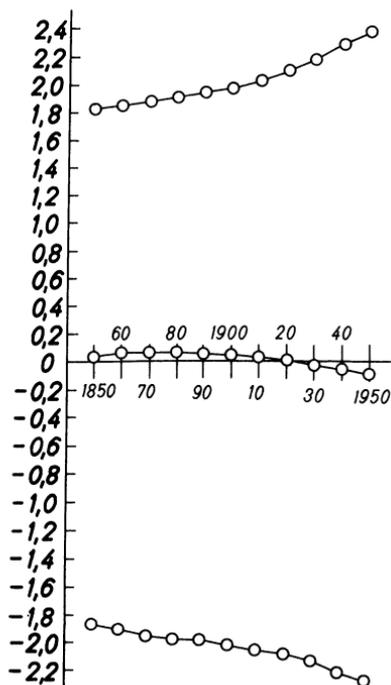


Abb. 9: $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, C_3^{(2)}$ in $[\gamma 10^{-3}]$ als Funktionen der Zeit nach [4].

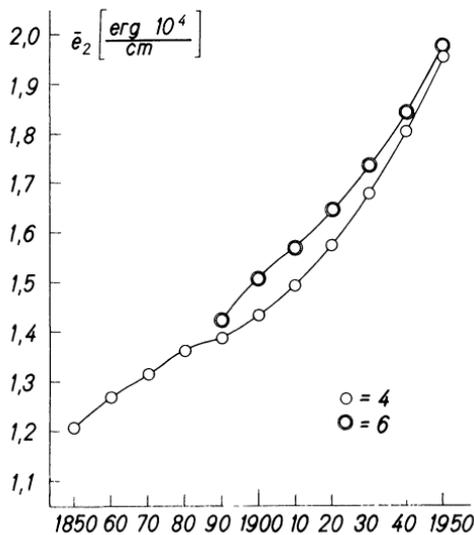


Abb. 10: Die Energiedichten des erdmagnetischen Feldes, soweit sie durch $V_2 \cdot a$ erfaßt werden, in $\left[\frac{\text{erg} \cdot 10^5}{\text{cm}^3} \right]$ als Funktion der Zeit.

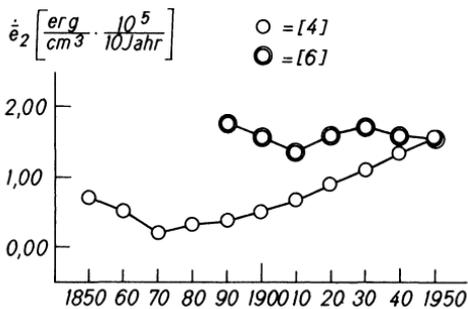


Abb. 11: Die zeitliche Änderung der Energiedichte des erdmagnetischen Feldes, soweit zu $V_2 \cdot a$ gehörig, in $\left[\frac{\text{erg} \cdot 10^5}{\text{cm}^3 \cdot 10/\text{Jahr}} \right]$ als Funktion der Zeit.

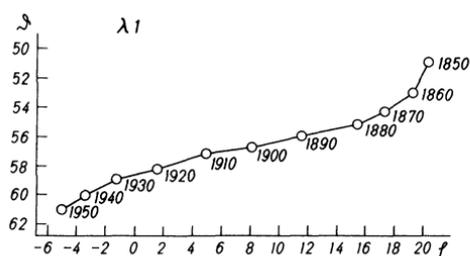


Abb. 12: Die Wanderung des Pols $P_1^{(2)}$ im (θ, ϕ) Koordinatensystem.

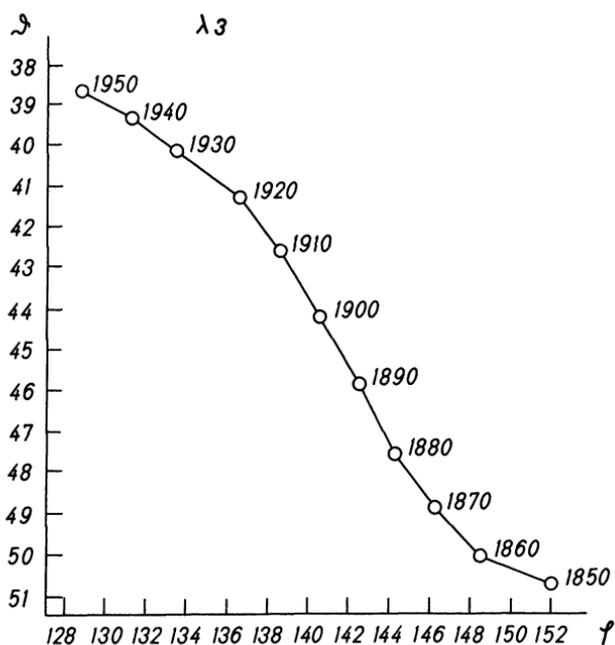


Abb. 13: Die Wanderung des Pols $P_3^{(2)}$ im (θ, ϕ) Koordinatensystem.

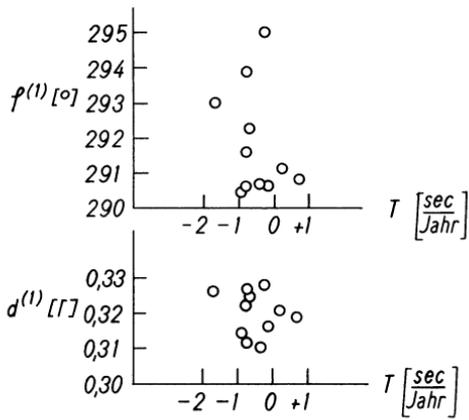


Abb. 14: Die Punktwolken $(\phi^{(1)}(t_v), T(t_v))$ und $(d^{(1)}(t_v), T(t_v))$
 Sie zeigen an, daß keine Korrelation zwischen den genannten Größen besteht.



ASKANIA-GRAVIMETER

Ein Beispiel höchster
GENAUIGKEIT:

GRAVITATIONS-
SCHWANKUNGEN
DURCH
GEZEITEN-
KRÄFTE

Maßstab 1:2

a) Theoretische
Gezeitenkurve
ermittelt nach den
Tabellen von
I. Goguel

b) Gemessene
Gezeitenkurve
aufgezeichnet durch ein
Askania-Gravimeter Gs 11
mit Registriereinrichtung

ASKANIA-WERKE AG.

BERLIN - FRIEDENAU

Airborne

MAGNETOMETER
ELECTROMAGNETIC
RADIO-ACTIVITY

Surveys

Consult



HUNTING GEOPHYSICS LTD

4 ALBEMARLE ST., LONDON, W.1.

Telephone: HYDe Park 5211
Cables: 'HUNTMAG' LONDON

HEAD OFFICE AND LABORATORIES

6 ELSTREE WAY, BOREHAM WOOD, HERTS.

Telephone: ELSTREE 2214

on geophysical prospecting for

OIL

FERROUS ORES

BASE METALS

RADIO-ACTIVE MINERALS

Walther Lietzmann

LEBENDIGE MATHEMATIK

2. Auflage

465 Seiten mit 343 Abbildungen und 10 Tafeln

Leinen DM 16.80

„Dieses Werk ist kein nettes Büchlein zur Veranschaulichung der Elementarmathematik, sondern durchleuchtet einmal wirklich die Mathematik, auch ihre abstraktesten Teile, in ihrer Einheitlichkeit und künstlerischen Schönheit. Aus elementarsten Begriffen ergibt sich alles, von den Klammerregeln und Kongruenzsätzen bis zu den Differentialgleichungen und der sphärischen Trigonometrie, ja zur Axiomatik. Dem Leser wird nichts erspart. Kann man auch nicht alle Beweise bringen, so wird doch nirgends eine Vereinfachung erschlichen, vielmehr auf alle Schwierigkeiten ausdrücklich hingewiesen, gerade auch auf die nur dem kritischen Wissenschaftler erkennbaren (Begriff der Menge, des Unendlichen, des Grenzwertes, der Wahrscheinlichkeit; wunde Stellen im Beweis der Kettenregel der Differentialrechnung oder in der Taylorschen Entwicklung). Und wo man blättert, wird man auch über vieles Elementare einschließlich der Anwendung völlig neu aufgeklärt. Wer kennt die Entstehungsweise der Meißtischblätter? Wer weiß, wie es im Innern einer Rechenmaschine zugeht, wie das Lochkartensystem funktioniert, wie der Eiffelturm verstrebt ist? Wer hat Funktionsleiter und Rechenstab wirklich durchdrungen? Und vieles, vieles andere, natürlich auch viel Geschichte sowie Geschichten und Scherze. Wer aber nur das letztere zu finden hofft, auf den wird das Buch besonders wohlützig wirken, wenn er sich nach Abschluß der Lektüre im Besitz ungewollter, aber umso soliderer Kenntnisse steht.“

VDI-Zeitschrift

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Prospekte verlangen Sie direkt vom
PHYSICA-VERLAG-WÜRZBURG

Bitte nehmen Sie bei Anfragen und Bestellungen auf unsere Zeitschrift Bezug!

Please, mention our review in writing to advisers



GRAVIMETRIE

SEISMIK

GEOMAGNETIK

GEOELEKTRIK

RADIOAKTIVITÄT

SEISMOS
G. M. B. H.

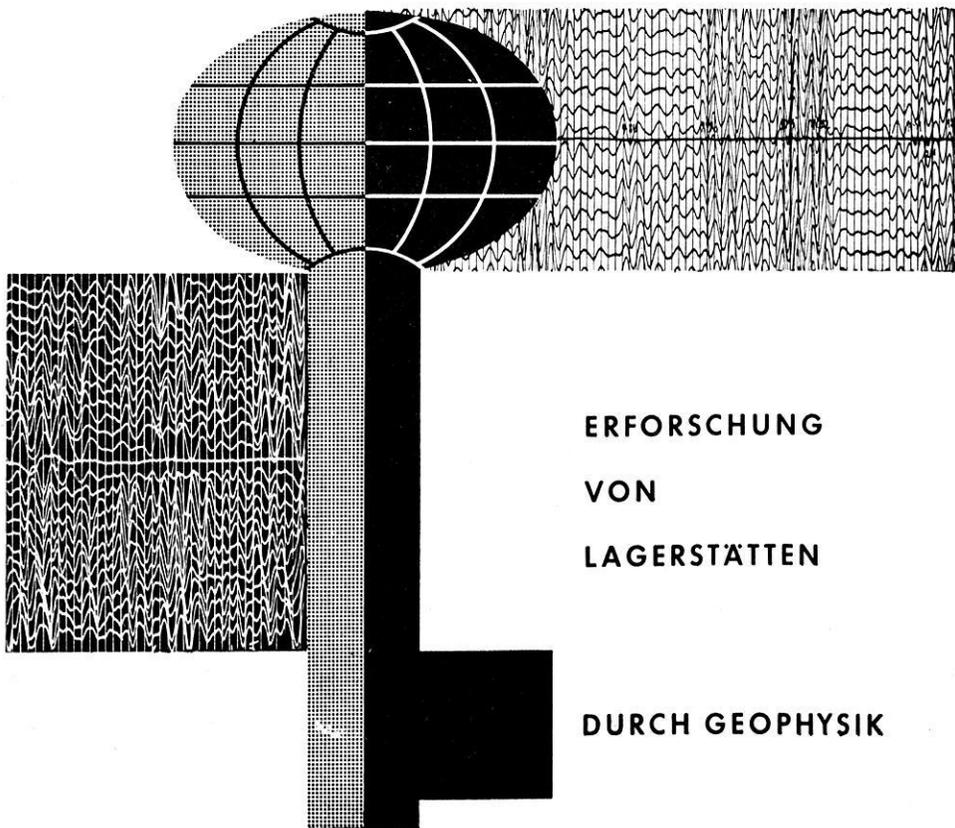
H A N N O V E R

Fernschr. 023419 · Ruf 70831

verringert Ihr Risiko



Bitte nehmen Sie bei Anfragen und Bestellungen auf unsere Zeitschrift Bezug!
Please, mention our review in writing to advisers.



ERFORSCHUNG
VON
LAGERSTATTEN

DURCH GEOPHYSIK

PRAKLA

HANNOVER · HAARSTRASSE 5

RUF: 8 0148 · FERNSCHREIBER: 092 28 47

DRAHT: PRAKLA

Bitte nehmen Sie bei Anfragen und Bestellungen auf unsere Zeitschrift Bezug!
Please, mention our review in writing to advisers