

ZEITSCHRIFT
FÜR
GEOPHYSIK

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

B. Brockamp, Münster i. W.

unter Mitwirkung von **A. Defant, Innsbruck** — **W. Dieminger, Lindau b. Northeim**
W. Hiller, Stuttgart — **K. Jung, Kiel** — **O. Meyer, Hamburg**
F. Möller, Mainz — **H. Reich, Göttingen.**

Jahrgang 25

1959

Heft 2



PHYSICA - VERLAG · WURZBURG

**Niedersächsische Staats- u.
Universitätsbibliothek
Göttingen**

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Kasemir, H. W.:</i> Der Gewittergenerator im luftelektrischen Stromkreis Tl. II	65
<i>Repsold, H.:</i> Ergebnisse der Messung natürlicher Erdströme bei Göttingen	97
<i>Israël, H.:</i> Der Diffusionskoeffizient des Radons in der Bodenluft	104
<i>Siebert, M.:</i> Die solaren Gezeiten im Barogramm des Juli 1959	109

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 34,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu nummerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel, auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die Zeitschrift für Geophysik bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Bernhard Brockamp, Münster (Westfalen), Steinfurter Straße 107

Anschrift der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80, Postscheck: Hamburg Nr. 55983

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Münzstrasse 12. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing und Hildgund Holler, sämtl. Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler, u. Charl. Kuhnert, beide Würzburg.

Typoskript: Physica-Verlag, Würzburg; Offsetdruck: fotokop, Darmstadt.

Printed in Germany



PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1959

Der Gewittergenerator im luftelektrischen Stromkreis II

Von H. W. Kasemir, Neptune¹⁾

Résumé: La publication traite du courant électrique au dedans et hors d'un nuage orageux. La calculation commence avec le courant d'une source ponctuelle située dans un médium dont la conductibilité augmente avec l'hauteur selon une fonction exponentielle. La terre est considérée comme une plaine conductive par un procédé de réflexion approprié. L'addition des courants de plusieurs sources ponctuelles de différente polarité permet de représenter les conditions de charge et de courant dans quelconque nuage orageux. Donné un pouvoir de courant de 1 ampère il résulte que la charge dans la tête d'un nuage orageux sera environ 2400 coulombs. C'est cent fois la valeur de 24 coulombs supposée jusqu'à présent comme elle était calculée à la base de la théorie électrostatique. Ce contenu de charge considérablement plus grand explique, qu'un nuage orageux puisse créer une suite de décharges d'éclairs, dont chaque éclair consomme environ 30 coulombs, et, en surplus, puisse continuellement produire un courant de 1 ampère = 1 coulomb/seconde jusqu'à la ionosphère. Mais le champ électrique de cette charge de nuage est abrité à l'extérieur à 90% par une charge de surface du signe opposé d'une grandeur d'environ - 2200 coulombs, à cause du chute de conductibilité à la surface du nuage. Un autre effet abritant est aussi représenté par la charge spaciales qui se forme à la proximité de l'orage par raison de la conductibilité augmentant avec l'hauteur. Cette augmentation avec l'hauteur est aussi la raison qu'un grand pourcent de la charge positive émanant de la tête d'orage ne retourné pas à la terre tout près de l'orage mais monte à la ionosphère. Appliqué à la charge négative descendant à la terre cela signifie qu'une grande partie de la charge négative sera distribuée sur toute la surface du globe et que seulement une mince partie reste ficée au dessous de l'orage. Cela résulte dans l'image que - déviant de l'usage commun jusqu'à présent - la surface de la terre et non pas la ionosphère doit être con-

¹⁾ Dr. H. W. Kasemir, Box 216 B, R. D. 2, Neptune N. J., U. S. A.

siderée comme "couche d'égalisation (= Ausgleichsschicht)": Aussi si la ionosphère n'existait pas la charge libre serait distribuée également par la surface du globe. Par cette raison on peut comprendre que des variations de l'hauteur ou de la conductibilité de la ionosphère n'auront à peu près aucune influence sur le champs électrique près de la surface de la terre.

Dans cette thèse le potentiel du globe a non plus la valeur zéro comme supposée jusqu'à alors mais plutôt une valeur négative calculée de la charge négative et la capacité du globe. D'autre part, le potentiel de la ionosphère résulte dans zéro, supposé que les générateurs électriques atmosphériques produisent des charges positives et négatives des mêmes quantités. Donnée ces valeurs du potentiel au globe et à la ionosphère le circuit électrique atmosphérique devient un système complet. Si l'on insistait à partir de l'image que le globe a le potentiel zéro, on arriverait aux hypothèses additionnelles et sans fondement concernant le potentiel du space mondial ou concernant un courant perpétuel et unipolaire de la ionosphère au space mondial. La représentation de l'orage par un ordre approprié de sources punctuelles permet d'examiner la validité de la représentation plus simple au sens mathématique par des sources-couches, (Quellschichten) la coupe finite des sources-couches est indentique avec la négligence des distributions marginales. Il est évident que, pour obtenir certains notions intégrales comme "courant productif (Nutzstrom)", "courant de perte (Verluststrom)", "effet (Wirkungsgrad)" etc., les deux modes de calculation produiront les mêmes résultats. Le courant productif du générateur orageux est défini comme le part de la charge orageuse négative qui se répand sur la terre et se distribue également au surface mondial et, enfin, retourne de la terre à la ionosphère comme contribution de l'orage au courant vertical. Ici, à la ionosphère, il se joint avec le courant des charges positives coulant de la tête orageuse à la ionosphère, tellement formant le complet circuit extérieur. Au contraire, le courant conducteur au dedans de l'orage est défini comme courant de perte parce qu'il ne contribue pas au champs électrique de beau temps. L'effet de l'orage est défini comme le ratio du courant productif divisé par le courant total. Considérant la conductibilité diminuée au dedans du nuage l'orage moyen devrait avoir un effet d'environ 90%.

VI. Das Gewitter als Quellschicht

Die Darstellung des Gewittergenerators durch Quellpunkte hat eine Reihe wesentlicher Erkenntnisse gebracht, sie bleibt aber auf die im Gewitter fließenden Ströme beschränkt. Die Frage nach der Spannung des Wolkenpols können wir nicht beantworten, weil das Potential einer unendlich kleinen Punktquelle in dieser selbst unendlich groß wird. Es bleibt sowohl die Frage nach den Widerständen als auch die nach der Leistung des Generators offen. Es gibt hier nur den Ausweg, eine passend gewählte Äquipotentialfläche als Randfläche des Wolkenpols willkürlich festzulegen, und ihren Potentialwert als Spannung des Generators zu definieren.

Einen anderen Weg geht H. Israëli [13] bei der Berechnung des elektrischen Energieanteils an der thermodynamischen Gesamtenergie des Gewitters. Er stellt die elektrisch aktiven Gebiete der Gewitterwolke nicht als Punktquellen sondern als Quellschichten dar. Bei der Voraussetzung einer rein homogenen Strömung, d.h. unter Vernachlässigung der Randstreuung ergibt sich dabei ein für die Rechnung außerordentlich einfaches Modellbild, bei dem sich alle bisher nicht zugänglichen Größen erfassen lassen. Das Potential einer Quellschicht wird nämlich nicht unendlich, weil sich die endliche Quellstärke und damit die endliche Ladung nicht in einem unendlich kleinen Punkt zusammendrängen muß, sondern sich auf einer endlichen Fläche ausdehnen kann. Auch die Widerstände lassen sich leicht berechnen, weil die einzelnen Stromröhren bei der homogenen Strömung konstanten Querschnitt haben, so daß die Strömung nur von einer einzigen Koordinate, nämlich der x -Koordinate, abhängt.

Es erhebt sich allerdings die Frage, ob die Voraussetzung der homogenen Strömung, die ja einen zwangsweisen Eingriff in die natürliche Strömung darstellt, die Ergebnisse nicht grundlegend fälscht. Durch die exakte Rechnung der Quellpunktströmung sind wir in der Lage, die Zuverlässigkeit der Quellschichtendarstellung mit der homogenen Strömung zu überprüfen. Dabei wird sich überraschenderweise zeigen, daß beide Rechnungsarten zu genau demselben Ergebnis führen.

Wir brauchen für die Ableitung der Formeln diesmal nicht den umständlichen Weg über die Eigenfunktionen der Differentialgleichung zu gehen, sondern können alle erforderlichen Gleichungen aus dem elektrotechnischen Ersatzschaltbild herleiten. Wir beginnen wieder mit der Darstellung des Einpolgenerators. In der Höhe h_1 befinde sich die positive Quellschicht mit der Gesamtstromergiebigkeit I , die auf der Fläche F gleichmäßig verteilt ist. Die Erdoberfläche stellt die negative Quellschicht mit der Gesamtstromergiebigkeit $-I$ dar. Die Raumla-

dungswirkung des fallenden Niederschlages, der den Quellschichten die Ladung zuführt, wird in diesem Bild wieder vernachlässigt.

In Fig. 4a ist das Stromlinienbild des Quellschichtgenerators dargestellt.

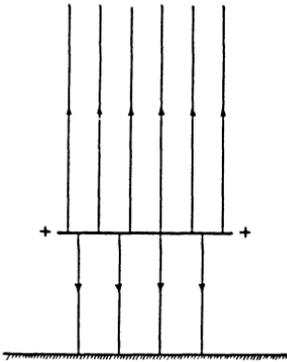


Fig. 4a: Stromlinien einer Quellschicht über der leitenden Erde unter Vernachlässigung der Randströmung

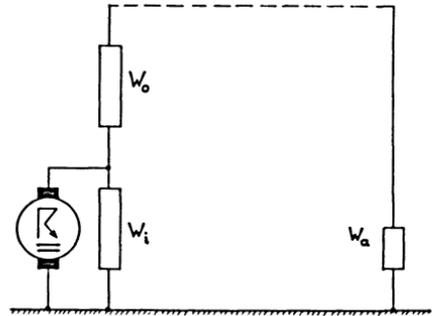


Fig. 4b: Ersatzschaltbild der einpoligen Quellschicht

Wir wissen aus den vorangegangenen Abschnitten, daß sich der von der positiven Quelle ausgehende Strom I aufteilt in einen Anteil I_N , der zur Ionosphäre bzw. ins + Unendliche abfließt und einen Anteil I_V , der von der Quellschicht zur Erde strömt. Ebenso teilt sich die Stromergiebigkeit der Erde auf in einen Strom $-I_V$, der von dem unter der positiven Quellschicht befindlichen Stück der Erdoberfläche ausströmt, und einen Strom $-I_N$, der gleichmäßig über die ganze Erdoberfläche verteilt von dieser zur Ionosphäre bzw. zum Unendlichen abfließt. Der Stromanteil $-I_V$ dient zur Neutralisierung des Anteils $+I_V$ der positiven Quellschicht, während der Anteil $-I_N$ den Beitrag des Generators zum luftelektischen Schönwettervertikalstrom darstellt und zur Neutralisierung von $+I_N$ dient.

In Anlehnung an die ausführlich besprochenen Verhältnisse bei der Punktquelle können wir ein ganz analoges Schaltbild nach Fig. 4b entwerfen mit den Widerständen W_i zwischen Quellschicht und Erde, W_0 zwischen Quellschicht und Ionosphäre und W_a als dem Widerstand des übrigen Luftraumes Erde-Ionosphäre. Betrachten wir nun vorerst nur das zylindrische Stück des Luftraumes mit dem Querschnitt F der Quellschicht, das sich unter und über dieser von der Erde bis zur Ionosphäre bzw. bis ins Unendliche erstreckt. mit den Widerständen W_i und W_0 . Die Aufteilung der Stromergiebigkeit $+I$ in die Anteile $+I_V$ und $+I_N$ muß der Größe der Widerstände W_i und W_0 entsprechen. Aus der Leitfähigkeitsfunktion der Luft lassen sich diese Widerstände durch eine einfache Integration berechnen.

$1/\lambda$ ist der spezifische Widerstand eines Einheitsvolumens Luft in der Höhe x . Damit erhalten wir den Widerstand W eines Zylinders von dem Querschnitt F und der Länge h_n bis h_m zu

$$(21) \quad W_{nm} = \frac{1}{\lambda_0 F} \int_{h_n}^{h_m} e^{-2kx} dx = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_n} - \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \right).$$

Daraus folgt

$$(22) \quad W_0 = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \frac{\lambda_0}{\lambda_1} {}^2)$$

und

$$(23) \quad W_i = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right).$$

Da sich nun die Ströme I_V und I_N umgekehrt verhalten müssen wie die Widerstände W_i und W_0 , folgt aus (22) und (23)

$$(24) \quad \frac{I_N}{I_V} = \frac{W_u}{W_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1.$$

Berücksichtigen wir noch, daß $I_N = I - I_V$ ist, so erhalten wir

$$(25) \quad I_V = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} I \quad \text{und} \quad I_N = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) I,$$

also genau dieselbe Beziehung wie bei der Punktquelle.

Es mag im ersten Augenblick sehr überraschend erscheinen, daß für die Aufteilung der Gesamtstromstärke im Verlust- und Nutzstrom bei der Punktquelle und bei der Quellschicht das gleiche Ergebnis herauskommt. Wir können dies aber leicht einsehen, wenn wir bedenken, daß wir uns die Quellschicht aus lauter einzelnen Punktquellen aufgebaut denken können. Dabei wäre sogar die Randstreuung noch mit berücksichtigt worden. Wir sehen also, daß die Vernachlässigung der Randstreuung, d. h. die zwangsmäßige Einführung einer homogenen Strömung an dem Verhältnis Nutz- und Verluststrom nichts geändert hat.

Dadurch, daß wir in unserem zylindrischen Stück sowohl die Stromstärke als auch die Widerstände in den einzelnen Teilen kennen, ist es auch möglich, den

²⁾ Da es praktisch keinen Unterschied bedeutet, ob wir W_0 von der Quellschicht bis ins Unendliche erstrecken oder nur bis zur Ionosphäre, wurde mit Rücksicht auf die einfachere Formel die Integration bis ins Unendliche erstreckt.

Spannungsabfall über einem vorgegebenen Widerstandsstück und damit die Potentialfunktion der Strömung zu berechnen. Für den Bereich zwischen Erde und Quellschicht gilt

$$(26) \quad \Phi_u = \frac{I}{\lambda_1 F 2k} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h_1,$$

und für den Bereich zwischen Quellschicht und Ionosphäre gilt

$$(27) \quad \Phi_0 = \frac{I}{\lambda F 2k} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \quad \text{für} \quad h_1 \leq x \leq \infty.$$

Wenn wir $\lambda = \lambda_1$ setzen, erhalten wir aus beiden Gleichungen die Klemmspannung U_k des Gewittergenerators zu

$$(28) \quad U_k = \frac{I}{\lambda_1 F 2k} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right).$$

Für die Zahlenwerte $I_N = 1 \text{ A}$, $h_1 = 7 \text{ km}$, $\lambda_1 = 5\lambda_0$, $\lambda_0 = 2 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\text{m Ohm}}$, $2k = \frac{1n \dot{0}}{10 \text{ km}}$, $F = 50 \text{ km}^2$ ergibt sich für die Klemmspannung der Wert $U_k = 8.7 \cdot 10^8 \text{ V}$.

Nun haben wir bisher nur die Strömung der Originalquelle mit der Stromergiebigkeit $+I$ und des unter ihr liegenden Stückes der Erdoberfläche mit der Stromergiebigkeit $-I_V$ betrachtet. Wir müssen also noch den von der Erde abströmenden Verluststrom $-I_V$ durch den Nutzstrom $-I_N$ zu der Gesamtstromergiebigkeit $-I$ ergänzen. Hier können wir aber nicht mehr – wie schon oben erwähnt – die Potentialfunktion in Zylinderkoordinaten berechnen sondern müssen auf die Darstellung in Kugelkoordinaten zurückgreifen. Wir erhalten das Potential Φ_N des Schönwettervertikalstromes zu

$$(29) \quad \Phi_N = \frac{I_{NG} e^{2kR_0}}{4\pi\lambda_0} \left[2k E i_{(-2kr')} + \frac{e^{-2kr'}}{r'} \right] r$$

oder in genügend genauer Annäherung

$$(30) \quad \Phi_N = \frac{I_{NG}}{4\pi\lambda_0} \frac{e^{-2k(r-R_0)}}{r}.$$

Dabei bedeutet I_{NG} hier bereits die Summe aller Nutzströme der gleichzeitig auf der Erde stattfindenden Gewitter, R_0 den Erdradius und r die Kugelkoordinat-

nate. Beim Übergang zu unseren Zylinderkoordinaten haben wir die Beziehung $r = R_0 + x$.

In Fig. 5 ist der Verlauf von Φ_N gestrichelt, der Verlauf von Φ_u und Φ_0 strichpunktiert eingezeichnet. Schließlich ist die im Gewitter herrschende Überlagerung von beiden Potentialfunktionen durch die ausgezogene Linie wiedergegeben.

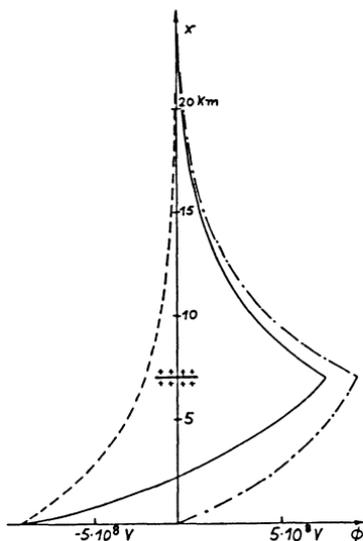


Fig. 5: Potentialverlauf mit der Höhe im Schönwettergebiet und im Gewitter (Einpolegenerator)

Wir sehen, daß das Potential im Gewittergebiet mit dem Wert $-7,5 \cdot 10^8 V$ am Erdboden beginnt, mit der Höhe rasch zunimmt, in etwa 2,3 km Höhe durch 0 hindurchgeht und in der Quellschicht den Maximalwert von $+7,2 \cdot 10^8 V$ erreicht. Über der Quellschicht nimmt das Potential mit weiterwachsender Höhe wieder rasch ab und nähert sich asymptotisch dem Wert 0. In 100 km Höhe hat das Potential bis auf einen verschwindenden Rest den Wert 0 fast erreicht. Die gestrichelt eingezeichnete Potentialkurve Φ_N der Schönwettergebiete nimmt ebenfalls von dem Bodenwert $-7,5 \cdot 10^8 V$ mit der Höhe stark ab und strebt dem Potentialwert 0 zu. Diese in Abschnitt IV bereits diskutierten Tatsachen sehen wir in der Potentialdarstellung der Fig. 5 deutlich vor Augen.

Die wichtigsten Ergebnisse von Abschnitt VI:

1. Da die Darstellung des Gewittergenerators durch Punktquellen in der Hauptsache nur den Stromverlauf in den beiden Stromkreisen ergibt, die Klemmspannung des Generators, die Widerstände und die Leistung aber nicht zu berech-

nen gestattet, wird als Modellbild statt einer Punktquelle eine Quellschicht mit zwangsweise homogener Strömung verwendet.

2. Die Berechnung von Potential- und Stromfunktion ebenso wie die der Klemmspannung, Widerstände usw. gestaltet sich außerordentlich einfach. Darüber hinaus ergibt sich, daß bezüglich der Aufteilung der Gesamtstromergiebigkeit in Nutz- und Verluststrom die in der Literatur gebräuchlichen beiden Gewitterdarstellungen zu demselben Ergebnis führen.

3. Der graphisch dargestellte Potentialverlauf im Gewittermodell und im Schönwettergebiet illustriert die in Abschnitt IV erläuterte Vorstellung von der luftelektrischen Strömung im Faraday-Käfig der Ionosphäre.

VII. Das Gewitter als Dipolquellschicht mit Berücksichtigung der erniedrigten Wolkenfähigkeit und der Wirkungsgrad der verschiedenen Gewittermodelle

Nach dem in Abschnitt V über Quellschicht und Punktquelle Gesagten bietet die Übertragung der Ergebnisse von der Bipolpunktquelle auf die Bipolquellschicht keine Schwierigkeiten. In Bezug auf die Berechnung von Nutz- und Verluststrom führen Punktquelle und Quellschicht zu demselben Ergebnis. Darüber hinaus lassen sich bei der Quellschichtendarstellung noch die Widerstände und die Klemmspannung des Generators berechnen. Weiterhin definieren wir den Wirkungsgrad w des Generators als das Verhältnis von Nutz- zu Gesamtstrom $w = \frac{I_N}{I}$. Mit Berücksichtigung der vorigen Abschnitte kommen wir zu folgender Formelzusammenstellung.

Für Quellpunkt und Quellschicht gilt

$$(31) \quad I_V = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} I; \quad I_N = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) I; \quad w = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Für die Quellschicht alleine gilt

$$(32) \quad U_K = \frac{I}{\lambda_1 2kF} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right);$$

$$W_i = \frac{I}{\lambda_0 2kF} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right); \quad W_o = \frac{I}{\lambda_0 2kF} \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Für die Bipolquelle aus Punktquellen oder Quellschichten gilt

$$(33) \quad I_{BV} = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) I ; \quad I_{BN} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) I ;$$

$$w = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} .$$

Für die Bipolquellschicht allein gilt

$$(34) \quad W_K = \frac{I}{2kF} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) ;$$

$$W_u = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right) ;$$

$$W_i = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) ;$$

$$W_0 = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \frac{\lambda_0}{\lambda_2} .$$

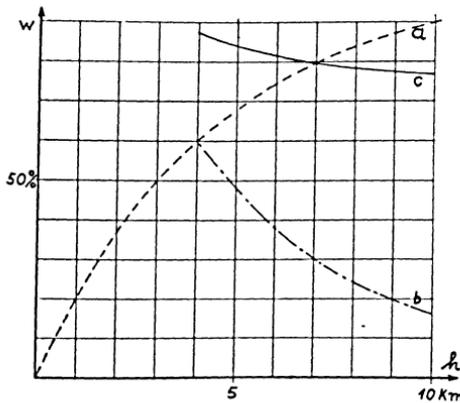


Fig. 6: Der Wirkungsgrad des Gewittergenerators in Abhängigkeit von der Höhe der Quellgebiete über dem Erdboden

- a) Der Einpolgenerator
- b) Der Bipolgenerator
- c) Der Bipolgenerator mit Berücksichtigung der niedrigen Wolkenleitfähigkeit

In Fig. 6 ist der Wirkungsgrad für den Einpolgenerator (gestrichelte Linie) und den Bipolgenerator (strichpunktierte Linie) in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden graphisch dargestellt. Dabei ist für den Bipolgenerator ein konstanter Abstand der beiden Quellschichten (bzw. Quellpunkte) von 4 km angenommen. Fig. 6 zeigt uns, daß der Einpolgenerator einen umso besseren Wirkungsgrad hat je höher der positive Pol über dem Erdboden liegt. Das ist durchaus verständlich, da mit wachsender Höhe der Innenschlußwiderstand W_i immer größer und der über der Quelle liegende Außenwiderstand immer kleiner wird, sodaß der Nutzstrom auf Kosten des Verluststromes ansteigt. Bei dem Bipolgenerator beginnt die Kurve erst mit der Höhe der positiven Quellschicht von 4 km, da bei einer Entfernung zwischen positiver und negativer Quellschicht von 4 km hier die negative Schicht gerade noch die Erde berührt. Der Wirkungsgrad beträgt an dieser Stelle genau wie beim Einpolgenerator 60%. Mit wachsender Höhe wird er immer schlechter. Wenn der positive Pol die Höhe von 10 km erreicht hat, und der negative Pol dementsprechend in 6 km Höhe liegt, dann hat der Wirkungsgrad bis auf 16% abgenommen.

Dies Ergebnis steht etwas im Widerspruch zu dem experimentellen Befund, daß gerade die tropischen Gewitter, die bis in Höhen von 10 und mehr Kilometer hinaufreichen, einen Hauptteil des luftelektrischen Generators ausmachen. Das erkennt man im weltzeitlichen Tagesgang des luftelektrischen Potentialgefälles, in dem sich der Einsatz der tropischen Gewitterzentren deutlich abhebt. Es wäre deshalb unverständlich, wenn gerade die tropischen Gewitter einen schlechten Wirkungsgrad haben würden. Nach unserer bisherigen Berechnung gilt dies allerdings nur für den Gewitteraufbau mit zwei Raumladungszentren, während der Einpolgenerator einen mit der Höhe wachsenden Wirkungsgrad hat. Wir müssen uns also die Voraussetzungen für die Berechnung des Zweipolgenerators nochmals kritisch ansehen. Dabei ist sofort der Einwand zu machen, daß die erniedrigte Leitfähigkeit der Wolkenluft nicht in Rechnung gestellt ist.

Alle bisherigen Ergebnisse laufen darauf hinaus, daß der Wirkungsgrad mit wachsendem Innenschlußwiderstand steigt. Dies ist der Fall, wenn die entgegengesetzt geladenen Quellen möglichst weit voneinander entfernt sind, und wenn die Leitfähigkeit des Zwischenmediums niedrig ist. Wir müssen also auch quantitativ untersuchen, wie stark sich diese erniedrigte Leitfähigkeit auf den Wirkungsgrad des Zweipolgenerators auswirkt.

Die Berechnung hierfür ist nicht weiter schwierig aber etwas umständlich und ist deshalb im Anhang durchgeführt. Von dort übernehmen wir die Gleichungen A IV (58) (59) (60) (67) für die Widerstände W'_0, W'_u, W'_i und den Wirkungsgrad w . Es bedeuten hierin h_1 und h_2 die Höhe der positiven bzw. negativen Quellschicht. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ist die Leitfähigkeit am Erdboden, in der Höhe der

oberen Quellschicht, in der Höhe der unteren Quellschicht respektive in der Wolke. Es ergibt sich

$$(35) \quad W_0 = \frac{1}{\lambda_0} \frac{1}{2kF} \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$$

$$(36) \quad W_u = \frac{1}{\lambda_0} \frac{1}{2kF} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right)$$

$$(37) \quad W_i = \frac{h_1 - h_2}{\lambda_3 F}$$

Weiterhin ist der Nutzstrom des Bipolgenerators nach A IV (65)

$$(38) \quad I_{BN} = \frac{W_i}{W_i + W_0 + W_u} I$$

und der Verluststrom nach A IV (66)

$$(39) \quad I_{BV} = - \frac{W_0 + W_u}{W_i + W_0 + W_u} I$$

Damit ergibt sich der Wirkungsgrad zu

$$(40) \quad w = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2 + \frac{\lambda_3}{2k\lambda_0} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right)}$$

Die Gleichungen (38) bis (40) sind in der im Anhang durchgeführten Rechnung nach der Methode der Überlagerung der Strömung von zwei Einpolgeneratoren gewonnen worden, wie sie bereits in Abschnitt V für den Bipolpunktquellengenerator ausführlich beschrieben worden ist. Nach dem in Fig. 3 gegebenen Ersatzschaltbild des Bipolgenerators können wir sie direkt aus dem Schaltbild entnehmen. Es handelt sich hier um die Stromverzweigung in den beiden parallel geschalteten Widerständen W_i und $W_0 + W_u + W_a$. Dabei ist der Widerstand W_a gegen $W_u + W_0$ zu vernachlässigen, da er in Praxis um etwa 6 Zehnerpotenzen kleiner ist als $W_u + W_0$. Den Widerstand W der Parallelschaltung von W_i und $W_u + W_0$ erhalten wir zu

$$(41) \quad W = \frac{W_i (W_0 + W_u)}{W_i + W_0 + W_u}$$

Da nun sowohl der Gesamtstrom I als auch die beiden Teilströme I_{BV} und I_{BN} an den von ihnen durchflossenen Widerständen immer die Generatorspannung erzeugen, folgt sofort

$$I_{BN} (W_u + W_0) = I \frac{W_i (W_0 + W_u)}{W_i + W_0 + W_u}$$

oder auch

$$I_{BN} = \frac{W_i}{W_i + W_0 + W_u} I$$

In dieser einfachen und klaren Rechnung zeigt sich der Wert der bisherigen Überlegungen, die die Rückführung der dreidimensionalen Strömung des luftelektrischen Stromkreises auf ein einfaches elektrotechnisches Schaltbild gestatten. Das bei der Strömung fast unlösbar erscheinende Problem, die Wolkenleitfähigkeit in der Rechnung mit zu berücksichtigen, kann auf Grund des Ersatzschaltbildes in wenigen Zeilen hingeschrieben werden.

Nach Gleichung (40) ist mit dem obengewählten konstanten Abstand der Quellschichten voneinander von 4 km der Wirkungsgrad unseres Bipolgenerators mit Berücksichtigung der niedrigen Wolkenleitfähigkeit $\lambda_3 = \frac{1}{3} \lambda_0$ in Fig. 6 als dick ausgezogene Linie eingetragen. Unsere Erwartungen sind voll eingetroffen. Durch den erhöhten Innenschlußwiderstand ist der Wirkungsgrad erheblich gestiegen und dabei noch verhältnismäßig unabhängig von der Höhe geworden. Bei einer Höhenänderung von 4-10 km sinkt der Wirkungsgrad nur von 87% auf 78% ab, während er ohne Berücksichtigung der erniedrigten Wolkenleitfähigkeit von 60 auf 16% abnimmt. Wir sehen, wie grundlegend wichtig die Berücksichtigung der erniedrigten Leitfähigkeit in der Gewitterwolke ist.

Wenn auch der zum Schluß berechnete Wirkungsgrad wegen der Vernachlässigung der Randstreuung, die ja wieder im Gebiet der normalen Luftleitfähigkeit liegt, einen Maximalwert darstellt und in Wirklichkeit etwas niedriger ausfallen wird, so werden wir doch festhalten können, daß im Durchschnitt mit einem Wirkungsgrad von 60-70% auch für den Bipolgewittergenerator zu rechnen ist.

Die wichtigsten Ergebnisse von Abschnitt VII:

1. Die Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung des Gewittergenerators mit ein oder zwei Quellpunkten oder -schichten auf S. 72.

2. Der Wirkungsgrad ist um so besser, je größer der Innenschlußwiderstand wird. Dieser wächst mit wachsendem Abstand der Pole oder bei Erniedrigung der Leitfähigkeit zwischen den Polen.

3. Es wird der Wirkungsgrad des Gewittergenerators berechnet unter Berücksichtigung der erniedrigten Wolkenleitfähigkeit. Aus einer graphischen Darstellung Fig. 6 des Wirkungsgrades bei den verschiedensten Verhältnissen kann man im Durchschnitt auf einen Wirkungsgrad von 60 bis 70% schließen.

4. Besonders bei einer Berechnung der tropischen Gewitter, die sich bis in Höhen von 10 km und mehr erstrecken, ist die Berücksichtigung der niedrigen Wolkenleitfähigkeit notwendig. Ohne diese hätten die tropischen Gewitter nur den schlechten Wirkungsgrad von 16%. Durch die geringe Wolkenleitfähigkeit steigt der Innenwiderstand des Gewittergenerators und damit sein Wirkungsgrad auf etwa 80%.

5. Die Rückführung der luftelektrischen dreidimensionalen Strömung auf ein elektrotechnisches Ersatzschaltbild gestattet eine außerordentlich einfache Berechnung selbst eines kompliziert aufgebauten Gewittermodells, wobei sogar noch die erniedrigte Leitfähigkeit der Wolke mit in Rechnung gestellt werden kann.

VIII. Die Fernwirkung eines beliebig aufgebauten Gewitters

Bisher haben wir die Strömung im Gewittergenerator selbst betrachtet oder den vom Gewitter weit entfernten Schönwettervertikalstrom. Wir müssen uns also noch mit dem Zwischengebiet beschäftigen, in dem sich die Stromlinien vom Gewitterzentrum ausbreiten, um schließlich in die zur Erdoberfläche senkrechten Stromlinien des negativen Nutzstroms einzumünden. Wir werden in den Stromlinienbildern Fig. 7a und 7b später sehen, daß dieses Gebiet weit über Ionosphärenhöhe liegt, wenn wir die Ionosphäre in der Rechnung nicht berücksichtigen. Wenn wir die hohe Leitfähigkeit der Ionosphäre mit in Rechnung stellen, so dringen keine Stromlinien mehr über diese hinaus, und wir kommen zu dem Bild der Strömung in einem sehr engen Kugelkondensator. Diesen können wir dann ohne merklichen Fehler in einen mit der Erdkugel oberflächengleichen Plattenkondensator aufbiegen mit einem Radius doppelt so groß wie der Erdradius.

Aus solcher Entfernung betrachtet würde unser Quellpunkt bzw. Quellschicht in 7 km Höhe über dem Erdboden mit seinem Spiegelbild praktisch zu einem Dipol zusammenschrumpfen. Wir wollen deshalb versuchen, uns die Potential- und Stromlinienfunktion für eine Dipolströmung bei der vorgegebenen Leitfähigkeitsverteilung abzuleiten. Dies gelingt, wie im Anhang gezeigt wird, durch einen Grenzübergang bei der Entwicklung der Potentialfunktion (3) in einer Taylor'schen Reihe, und wir erhalten nach A III (48, 49) für die Potentialfunktion Φ_D unseres Dipols die Gleichung

$$(42) \quad \Phi_D = \frac{I_N}{4\pi\lambda_0 k} \frac{x(1+k\sqrt{x^2+R^2})e^{-k(\sqrt{x^2+R^2}+x)}}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

oder in Polarkoordinaten

$$(43) \quad \Phi_D = \frac{I_N}{4\pi\lambda_0 k} \frac{\cos\theta(1+kr)e^{-k(1+\cos\theta)r}}{r^2}.$$

Der Ausdruck I_N/k ist das Dipolmoment M des Dipols. Es ist der auf k bezogene Nutzstrom I_N des Quellpunkts bzw. der Quellschicht. Bei der Übertragung der Quellpunkts- auf die Dipolströmung haben wir also zu setzen

$$(44) \quad M = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{I}{k} - \frac{I_N}{k}$$

Beim Grenzübergang $k=0$ gewinnen wir die bekannte Formel für die Dipolströmung in konstanter Leitfähigkeit.

Betrachten wir die $x=0$ Ebene d.h. die Erdoberfläche, so sehen wir aus Gleichung (42), daß hier die Potentialfunktion den konstanten Wert 0 annimmt. Folglich können wir diese Äquipotentialfläche durch die leitende Erdoberfläche ersetzen, ohne daß sich dadurch die Potentialfunktion ändert. Bilden wir aus Gleichung (30) die Orthogonaltrajektorien (Anhang A III (52)), so erhalten wir die Gleichung der Stromfunktion Ψ_D .

$$(45) \quad \Psi_D = I_N \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\cos\theta(1+\cos\theta) - \frac{\sin^2\theta}{2kr} \right] e^{-2kr(1-\cos\theta)} \right\}.$$

Hieraus ergibt sich folgende interessante Tatsache. Machen wir $\theta=180^\circ$, so erhalten wir $\Psi_D = I_N$. Mit $\theta=180^\circ$ haben wir aber alle vom Dipol ausgehenden und in ihm einmündenden Stromlinien erfaßt. Wäre die positive und negative Quelle, aus der sich der Dipol zusammensetzt, gleichstark, wie sie etwa bei der Dipolströmung in konstanter Leitfähigkeit ist, so müßten wir hier für Ψ_D den Wert 0 erhalten. Hier aber zeigt der Wert $\Psi_D = I_N$ an, daß der Dipol unsymmetrisch ist, d.h. daß die Stromergiebigkeit der positiven Quelle die der negativen um den Betrag I_N überwiegt. Das ist insofern nicht überraschend, als wir ja vor unserem Grenzübergang den Bipol aus 2 ungleichstarken Quellen aufgebaut haben. Diese Eigenschaft ist also trotz des Grenzüberganges erhalten geblieben. Um nun Strömungsgleichgewicht zu bekommen, müssen wir ebenso wie bei der einpoligen Quelle den Zusatzstrom $-I_N$ gleichmäßig über die Erdoberfläche verteilt von dieser abströmen lassen. Alle Überlegungen der vorangegangenen Abschnitte bleiben also erhalten.

Wenn wir die Ersatzdipolströmung für den aus 2 Quellpunkten oder -schichten gebildeten Gewittergenerator berechnen wollen, so überlagern wir einfach die Ersatzdipolströmungen der positiven und negativen Quelle. Das läuft formelmäßig lediglich darauf hinaus, daß wir den Nutzstrom I_{BN} (33) für diese Kombination zur Berechnung des Ersatzdipolmomentes heranziehen. Es wird

$$(46) \quad M = \frac{I_{BN}}{2k} = \frac{I}{2k} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right).$$

Mit diesem Rechenschema ist es auch leicht möglich, das Ersatzdipolmoment für Gewittermodelle anzugeben, die sich aus mehr als 2 Quellpunkten oder -schichten aufbauen. Maßgebend für die Strömung in etwas weiterer Entfernung ist lediglich der Nutzstrom des Gewittermodells, sodaß hier alle Arten von Gewitterdarstellungen in einem einheitlichen Strömungsbild zusammenfließen.

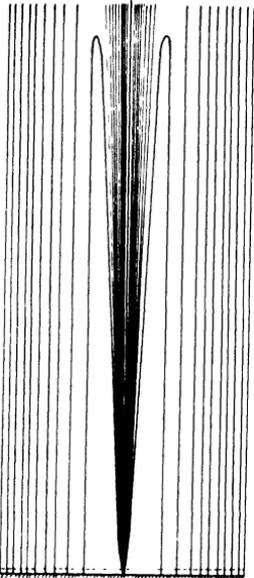


Fig. 7a: Stromlinien der Ersatzdipolströmung ohne Berücksichtigung der Ionosphäre



Fig. 7b: Stromlinien des Ersatzdipols mit Berücksichtigung der Ionosphäre

In Fig. 7a ist der geschlossene Stromkreis eines Gewittergenerators ohne Berücksichtigung der Ionosphäre dargestellt. Die Ionosphäre ist durch eine gestrichelte Linie eingezeichnet. Wir sehen sofort, daß die Strombahnen weit über Ionosphärenhöhe hinausgehen, um dann scharf umzubiegen und senkrecht auf die Erdoberfläche hinunterzustoßen. Deswegen ist mit Ausnahme des Gewittergebietes selbst in dem Raum zwischen Ionosphäre und Erde eine homogene Strömung wie in einem Plattenkondensator vorhanden. Daß der Abstand der senkrechten Stromlinien voneinander mit wachsender Entfernung vom Gewitter immer klei-

ner wird, ist folgendermaßen begründet. In jeden Kreisring, der von zwei nebeneinanderliegenden Stromlinien bei Rotation aus der Erdoberfläche ausgeschnitten wird, mündet derselbe Bruchteil des Gesamtstromes ein. Damit nun die Stromdichte in den einzelnen Kreisringen gleich bleibt, müssen diese flächengleich sein. Das ist nur durch stetig kleiner werdende Radien zu erreichen, wodurch dann die Stromlinien bei wachsendem Abstand von der Dipolquelle enger aneinander rücken.

In Fig. 7b ist das Stromlinienbild der Dipolströmung wiedergegeben, wenn man die Leitfähigkeit außerhalb der Ionosphäre gleich Null setzt. Hierbei sind die Stromlinien in der Ionosphäre aber nicht berechnet sondern ihr wahrscheinlicher Verlauf auf Grund folgender Überlegungen erschlossen. Wegen der sprunghaft erhöhten Leitfähigkeit beim Eindringen in die Ionosphäre würden schräg einmündende Stromlinien zur Normalen hin gebrochen werden. Da aber die vom Gewitterkopf und in erhöhtem Maße die von der Erde ausgehenden Stromlinien nahezu senkrecht hochsteigen und somit die Normalenrichtung fast besitzen, würde das Eindringen in die Ionosphäre keine wesentliche Änderung des Stromlinienverlaufs bringen. Beim Austritt aus der Ionosphäre in den Weltenraum nimmt aber die Leitfähigkeit stark ab, und demzufolge werden hier die Stromlinien von der Normalen weg gebrochen. Die vom Gewitterkopf und der Erde ausgehenden Stromlinien würden sich in flach gestreckten Bögen durch den Weltenraum schließen. Unter der Annahme, daß der Weltenraum die Leitfähigkeit 0 besitzt, würden sich diese Bögen sogar auf den Raum in der Ionosphäre zusammendrängen. Die Leitfähigkeit 0 des Weltenraumes wäre dabei so zu interpretieren, daß nicht nur eine Ionisation des Mediums wegen des Mangels an Atomen oder Molekülen wegfällt, sondern daß auch Ionen oder Elektronen die Grenze Ionosphäre-Weltenraum nicht durchdringen können. Die Berechtigung für diese Annahmen ist jedoch nicht gegeben, so daß in jedem Fall mit einem Hinausdringen der Stromlinien in den Weltenraum zu rechnen ist. Da es sich aber hier um frei bewegliche Ladungsträger handelt, müßte für die Berechnung ihrer Strombahnen das erdmagnetische Feld mit berücksichtigt werden. Solche Untersuchungen gehen aber über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, so daß in Fig. 7b die Stromlinien unter der (physikalisch nicht richtigen) Annahme der Leitfähigkeit 0 des Weltenraumes gezeichnet sind.

Die Darstellung der Erde durch eine ebene Platte mit der Größe der Erdoberfläche wie in Fig. 7a und 7b ist eigentlich nicht mehr zulässig. Wir müßten hier die Erde durch eine Kugel darstellen. Der Rechenaufwand dazu ist aber so unvergleichlich viel größer, daß hier darauf verzichtet worden ist. Das Wesentliche dieses Stromlinienbildes, nämlich die gleichmäßige Verteilung der Stromdichte auf der Erdoberfläche, würde auch bei der Darstellung der Erde als Kugel erhalten bleiben. Bei der Anwesenheit mehrerer Gewitter würden sich die ein-

zelen Stromlinienbilder überlagern und die Stromdichten auf der Erde zu der resultierenden Vertikalstromdichte aufsummieren.

Die wichtigsten Ergebnisse von Abschnitt VIII.

1. In Entfernungen vom Gewitter, die groß sind im Vergleich zu der Höhe des Gewitterkopfes über dem Erdboden, laufen die Potential- und Stromlinien des ein- und mehrpoligen Gewittermodells in dem einheitlichen Bild der Dipolströmung zusammen.

2. Das Dipolmoment M berechnet sich aus dem resultierenden Nutzstrom I_N des Gewittermodells durch die einfache Formel $M = I_N / k$. (k ist die Konstante der Leitfähigkeitsfunktion $\lambda = \lambda_0 e^{2 kx}$).

3. Ohne die Anwesenheit der Ionosphäre würden sich die Strombahnen bis in Gebiete weit oberhalb der Ionosphäre hinaufziehen. Bei Berücksichtigung der Ionosphäre knicken die Strombahnen wegen des plötzlichen Leitfähigkeitssprunges um und ziehen sich in flachen Bögen innerhalb der Ionosphäre bis zu der Stelle hin, an der sie die Ionosphäre verlassen, um senkrecht zur Erde hinabzusteigen.

4. Die homogene Strömung des Vertikalstroms zwischen Erde und Ionosphärenhöhe ist unabhängig davon, ob man den Leitfähigkeitssprung in der Ionosphäre mit berücksichtigt oder nicht.

Die Arbeit wurde ausgeführt am Meteorologischen Observatorium Aachen unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Israel, und der Verfasser möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Israel seinen herzlichen Dank aussprechen für die stete Förderung und viele anregende Diskussionen.

Mathematischer Anhang

A I. Die Strömung einer Punktquelle in einem Medium mit der Leitfähigkeit $\lambda = \lambda_0 e^{2kx}$

Gegeben:

Die Stromergiebigkeit der Punktquelle I .

Die Leitfähigkeit des Raumes $\lambda = \lambda_0 e^{2kx}$.

Die Leitfähigkeit der $x = 0$ Ebene λ_0 .

Die Stromquelle liegt im Mittelpunkt des Zylinderkoordinatensystems x, R, ϕ .

Gesucht:

Die Potentialfunktion Φ .

Die Stromfunktion Ψ .

Die Raumladungsfunktion q .

1. Die Eigenfunktionen der Differentialgleichung der elektrischen Strömung in Zylinderkoordinaten (Rotationssymmetrie)

Um die Differentialgleichung der Strömung zu erhalten, gehen wir aus von der Kontinuitätsgleichung der stationären Strömung

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{i} = 0$$

und der Beziehung

$$(2) \quad \vec{i} = \lambda \vec{E}.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \quad \operatorname{div} \lambda \vec{E} = \lambda \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{grad} \lambda = 0.$$

Da $\operatorname{div} \vec{E} = q/\epsilon$ ist, erhalten wir aus (3) die allgemeine Gleichung für die Raumladung

$$(4) \quad q = -\frac{\epsilon}{\lambda} \vec{E} \operatorname{grad} \lambda.$$

Mit $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ erhalten wir ebenfalls aus (3)

$$(5) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi + \frac{1}{\lambda} \operatorname{grad} \lambda \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

Da λ nur von der x -Koordinate abhängt, ist von dem Vektor $\text{grad } \lambda$ nur die x -Komponente von 0 verschieden. Somit bleibt von dem skalaren Vektorprodukt $\text{grad } \lambda \text{ grad } \Phi$ nur das Produkt der beiden x -Komponenten übrig. Mit $\frac{\text{grad } \lambda}{\lambda} = 2k$ erhalten wir aus (5)

$$(6) \quad \text{div grad } \Phi + 2k \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Um die Eigenfunktionen der Differentialgleichung zu bekommen, machen wir für Φ den Produktansatz

$$(7) \quad \Phi = f_{(R)} g_{(x)},$$

wobei f eine Funktion von R allein und g eine Funktion von x allein sein soll. Da bei den hier in Frage stehenden Problemen Rotationsymmetrie herrscht, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit ϕ und die Ableitung nach ϕ gleich 0 setzen. Schreiben wir noch $\text{div grad } \Phi$ in Zylinderkoordinaten aus, so erhalten wir aus (6) mit (7)

$$(8) \quad \frac{1}{f} \left(\frac{d^2 f}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{df}{dR} \right) + \frac{1}{g} \left(\frac{d^2 g}{dx^2} + 2k \frac{dg}{dx} \right) = 0.$$

Diese Gleichung muß auch dann gelten, wenn wir für den ersten Ausdruck in (8) den beliebig wählbaren, konstanten Wert $(j\gamma)^2$ setzen.

$$(9) \quad \frac{1}{f} \left(\frac{d^2 f}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{df}{dR} \right) = (j\gamma)^2.$$

Gleichung (9) in (8) eingesetzt ergibt für g eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

$$(10) \quad \frac{d^2 g}{dx^2} + 2k \frac{dg}{dx} - \gamma^2 g = 0.$$

Ihre Lösung lautet

$$(11) \quad g = A e^{(\sqrt{k^2 + \gamma^2} - k)x} + B e^{-(\sqrt{k^2 + \gamma^2} + k)x}.$$

Die Buchstaben A und B sind willkürlich wählbare Konstanten, die wir zur Anpassung der Lösung an die vorgeschriebenen Randbedingungen benutzen werden.

Die Gleichung (9) ist die Differentialgleichung einer Zylinderfunktion nullter Ordnung Z_0 mit dem Argument γR .

$$(12) \quad f = Z_{0(yR)} \cdot$$

Mit Gleichung (7) erhalten wir als Lösung für unsere Potentialfunktion

$$(13) \quad \Phi = [A e^{(\sqrt{k^2+y^2}-k)x} + B e^{-(\sqrt{k^2+y^2}+k)x}] Z_0.$$

Für konstante R nimmt mit wachsendem x die bei A stehende e -Fkt zu und die bei B stehende ab, wodurch sich der erste Ausdruck als Außenpolfunktion Φ_a und der zweite als Innenpolfunktion Φ_i erweist. Unter Außenpolfunktion wollen wir eine Potentialfunktion verstehen, deren Quellen oberhalb des betrachteten Gebietes in positiver x -Richtung liegen. Bei der Innenpolfunktion liegen die Quellen unterhalb in negativer x -Richtung. Im Hinblick auf die spätere Rechnung trennen wir (13) auf in die Gleichung der Außenpolfunktionen und in die der Innenpolfunktionen. Wenn wir noch berücksichtigen, daß A und B frei verfügbar sind, also auch als Funktionen des Parameters y angesehen werden können, läßt sich jede Potentialfunktion in einer Integraldarstellung nach y in den Eigenfunktionen der Differentialgleichung ausdrücken. Für Außenpolfunktionen erhalten wir die Integraldarstellung

$$(14) \quad \Phi_a = \int_0^{\infty} A(y) e^{(\sqrt{k^2+y^2}-k)x} Z_{0(yR)} dy,$$

und für die Innenpolfunktionen

$$(15) \quad \Phi_i = \int_0^{\infty} B(y) e^{-(\sqrt{k^2+y^2}+k)x} Z_{0(yR)} dy.$$

2. Die Potentialfunktion einer Punktquelle

Wir legen die Punktquellen in den Koordinatennullpunkt des Zylinderkoordinatensystems x, R, ϕ . Dann ist für positive x die Potentialfunktion der Punktquelle eine Innenpolfunktion von der Form (15) und für negative x eine Außenpolfunktion von der Form (14). Für die $x = 0$ Ebene müssen beide Potentialfunktionen ineinander übergehen. Daraus erhalten wir die erste Bestimmungsgleichung für die Funktionen $A(y)$ und $B(y)$. Aus $\Phi_a = \Phi_i$ für $x = 0$ erhalten wir nach (14) und (15)

$$(16) \quad A(y) = B(y).$$

Die zweite Bestimmungsgleichung gewinnen wir, wenn wir für die Quellstärke I in der $x = 0$ Ebene eine Integraldarstellung in Zylinderfunktionen finden können. Dieses Ergebnis muß mit einer Berechnung der Quellenstärkeverteilung auf der $x = 0$ Ebene aus den Potentialgleichungen (14) und (15) übereinstimmen. Bezeichnen wir die Stromdichte auf der $x = 0$ Ebene mit i_0 , so gilt

$$(17) \quad i_0 = -\lambda_0 \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right)_{x=0} - \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial x} \right)_{x=0} \right].$$

Mit (14) und (15) erhalten wir daraus

$$(18) \quad i_0 = 2\lambda_0 \int_0^\infty A_{(y)} \sqrt{k^2 + y^2} Z_{0(yR)} dy.$$

Eine Integraldarstellung für eine beliebige Quellstärkeverteilung erhalten wir nach [9] in der Form

$$(19) \quad i_0 = \int_0^\infty J_{0(yR)} y \int_0^\infty i_{(z)} J_{0(yz)} z dz dy.$$

J_0 ist dabei die Zylinderfunktion erster Art der Ordnung 0. Verteilen wir die Quellstärke I gleichmäßig auf einen sehr kleinen Kreis (Radius a), den wir später zu einem Punkt zusammenschrumpfen lassen, so gelten für die Gewichtsfunktion $i_{(z)}$ die Gleichungen

$$(20) \quad \begin{aligned} i_z &= \frac{I}{\pi a^2} & 0 \leq z \leq a, \\ i_z &= 0 & a < z \leq \infty. \end{aligned}$$

Damit wird das innere Integral von (19), das wir mit G bezeichnen wollen, zu

$$(21) \quad G = \frac{I}{\pi a^2} \int_0^a J_{0(yz)} z dz = \frac{I}{\pi a^2} \left. \frac{yz J_{1(yz)}}{y^2} \right|_0^a.$$

Mit der Reihenentwicklung der Zylinderfunktion J_1

$$J_1 = \frac{1}{2} yz - \frac{\left(\frac{1}{2} yz\right)^3}{1! 2!} \pm \dots$$

erhalten wir für $z = a \rightarrow 0$

$$(22) \quad G = \frac{I}{\pi a^2} \frac{y a y a}{2 y^2} = \frac{I}{2\pi} .$$

Setzen wir diesen Wert in (19) ein, so bekommen wir die Integraldarstellung der Quelldichte in der Form

$$(23) \quad i_0 = \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty y J_0(yR) dy .$$

Durch Vergleich mit (18) gewinnen wir die Gleichungen

$$(24) \quad A(y) = \frac{I}{4\pi\lambda_0} \frac{y}{\sqrt{k^2 + y^2}}$$

und

$$(25) \quad Z_{0(yR)} = J_{0(yR)} .$$

Damit sind die Funktionen $A(y) = B(y)$ bestimmt, und wir erhalten aus (14) die Darstellung des Quellpunktpotentials als Außenpolfunktion

$$(26) \quad \Phi_a = \frac{I}{4\pi\lambda_0} \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{k^2 + y^2}} J_0(yR) e^{(\sqrt{k^2 + y^2} - k)x} dy ,$$

und aus (15) die Darstellung als Innenpolfunktion

$$(27) \quad \Phi_i = \frac{I}{4\pi\lambda_0} \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{k^2 + y^2}} J_0(yR) e^{-(\sqrt{k^2 + y^2} + k)x} dy .$$

Beide Potentialdarstellungen lassen sich durch Lösung der Integrale auf die einheitliche Form bringen

$$(28) \quad \Phi = \frac{I}{4\pi\lambda_0} \frac{e^{-k(\sqrt{x^2 + R^2} + x)}}{\sqrt{x^2 + R^2}} .$$

In Polarkoordinaten r, θ, ϕ mit der Beziehung $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ und $\cos \theta = x / \sqrt{x^2 + R^2}$ lautet die Potentialgleichung

$$(29) \quad \Phi = \frac{I}{4\pi\lambda_0} \frac{e^{-kr(1 + \cos \theta)}}{r} .$$

Damit haben wir die gesuchte Potentialgleichung für eine Punktquelle gefunden, die sich in einem Medium mit in positiver x -Richtung zunehmender Leitfähigkeit befindet.

3. Die Raumladungsgleichung

Durch Differenzieren von (28) nach x erhalten wir die Feldstärke in der x -Richtung.

$$(30) \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = E_{(x)} = \frac{Ik}{4\pi\lambda_0} \frac{e^{-k(\sqrt{x^2+R^2}+x)}}{\sqrt{x^2+R^2}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{x}{k(x^2+R^2)} \right],$$

und damit nach (4) die Gleichung für die Raumladung

$$(31) \quad q = -\frac{k^2 \epsilon I}{2\pi\lambda_0} \frac{e^{-k(\sqrt{x^2+R^2}+x)}}{\sqrt{x^2+R^2}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{x}{k(x^2+R^2)} \right],$$

oder in Polarkoordinaten r, θ, ϕ

$$(32) \quad q = -\frac{k^2 \epsilon I}{2\pi\lambda_0} \frac{e^{-kr(1+\cos\theta)}}{r} \left[1 + \cos\theta + \frac{\cos\theta}{kr} \right].$$

4. Die Stromfunktion

Den Stromfluß durch eine Fläche erhalten wir, wenn wir die auf der Fläche senkrecht stehende Komponente der Stromdichte über diese Fläche integrieren. Zur Berechnung der Stromfunktion wählen wir eine Kreisscheibe mit dem Radius R' , die parallel zur $x = 0$ Ebene liegt. Aus (30) erhalten wir die Stromdichte in der x -Richtung zu

$$(33) \quad i_{(x)} = \lambda E_{(x)},$$

und durch Integration über die Scheibe die Stromfunktion

$$(34) \quad \Psi = \frac{Ik}{2} \int_0^{R'} \left[1 + \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} + \frac{x}{k(x^2+R^2)} \right] \frac{e^{-k(\sqrt{x^2+R^2}-x)}}{(x^2+R^2)^{1/2}} R dR.$$

Das Integral läßt sich geschlossen lösen, und wir erhalten für die Gleichung der Stromfunktion

$$(35) \quad \Psi = I \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) e^{-k(\sqrt{x^2+R^2}-x)} \right].$$

oder in Polarkoordinaten r, θ, ϕ

$$(36) \quad \Psi = I \left[1 - \frac{1 + \cos \theta}{2} e^{-k(1 - \cos \theta)} \right]$$

(In (35) ist statt R' wieder R gesetzt worden.)

A II. Die Potentialfunktion einer Punktquelle über einer leitenden Ebene

Gegeben:

Die Punktquelle mit der Stromergiebigkeit I in der Höhe h über der Ebene $x = 0$.

Die Leitfähigkeitsfunktion im Raum $\lambda = \lambda_0 e^{2kx}$.

Gesucht:

Die Potentialfunktion Φ .

Durch Verschiebung der Punktquelle auf der x -Achse in die Höhe h ändert sich die Potentialgleichung (28) in

$$(37) \quad \Phi_1 = \frac{I}{4\pi\lambda_h} \frac{e^{-k(\sqrt{(x-h)^2 + R^2} + x - h)}}{\sqrt{(x-h)^2 + R^2}}.$$

Wir versuchen die Lösung für unser Problem durch Spiegelung an der Ebene zu gewinnen, und erhalten die Potentialfunktion Φ_2 der Spiegelquelle mit der Stromergiebigkeit $-I_V$, durch Verschieben des Quellpunkts in die Tiefe $-h$. Nach (28) gilt dann

$$(38) \quad \Phi_2 = \frac{-I_V}{4\pi\lambda_{-h}} \frac{e^{-k(\sqrt{(x+h)^2 + R^2} + x + h)}}{\sqrt{(x+h)^2 + R^2}}.$$

Durch Überlagerung von Φ_1 und Φ_2 erhalten wir die Potentialfunktion für die Punktquelle über der leitenden Ebene.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Auf der $x = 0$ Ebene muß Φ konstant sein. Diese Bedingung läßt sich erfüllen, wenn wir dort Φ den speziellen Wert 0 geben. Damit erhalten wir eine

Bedingungsgleichung für das bisher noch frei verfügbare $-I_V$. Aus (37) und (38) folgt für $\Phi = 0$

$$(39) \quad -I_V = -\frac{\lambda_0}{\lambda_h} I.$$

Damit wird die Potentialgleichung des Quellpunktes über einer leitenden Ebene

$$(40) \quad \Phi = \frac{I}{4\pi\lambda_0} \left[\frac{e^{-k(\sqrt{(x-h)^2+R^2}+x+h)}}{\sqrt{(x-h)^2+R^2}} - \frac{e^{-k(\sqrt{(x+h)^2+R^2}+x+h)}}{\sqrt{(x+h)^2+R^2}} \right].$$

A III. Die Dipolströmung

1. Die Potentialfunktion einer Dipolströmung

Um aus (40) die Potentialgleichung einer Dipolströmung zu erhalten, lassen wir dort h gegen 0 gehen. Dann können wir die in der eckigen Klammer stehenden Terme in eine Taylorsche Reihe entwickeln. Bezeichnen wir den ersten Term mit A und den zweiten mit B , so erhalten wir

$$A = \frac{e^{-k\sqrt{x^2+R^2}}}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{h}{1!} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-k\sqrt{x^2+R^2}}}{\sqrt{x^2+R^2}} \pm \dots$$

$$B = \frac{e^{-k\sqrt{x^2+R^2}}}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{h}{1!} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-k\sqrt{x^2+R^2}}}{\sqrt{x^2+R^2}} + \dots$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$(42) \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-k\sqrt{x^2+R^2}}}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{x(1+k\sqrt{x^2+R^2})e^{-k\sqrt{x^2+R^2}}}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

ist, so wird

$$(43) \quad \Phi = \frac{2hI}{4\pi\lambda_0} \frac{x(1+k\sqrt{x^2+R^2})e^{-k(\sqrt{x^2+R^2}+x)}}{(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

Das Dipolmoment $2hI$ stellt bis auf einen konstanten Faktor k den Nutzstrom I_N des Gewittergenerators dar. Das erkennen wir sofort, wenn wir in der Gleichung

$$(44) \quad I_N = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_h}\right) I = (1 - e^{-2kh}) I$$

die e -Fkt. in eine Reihe entwickeln, die wir wegen $h \rightarrow 0$ mit dem zweiten Gliede abbrechen können.

$$(45) \quad I_N = \left(1 - 1 + \frac{2kh}{1!} + \dots\right) I,$$

oder auch

$$(47) \quad I_N = 2khI.$$

Damit wird nach (43) das Potential Φ des Dipols, der aus der Original- und Spiegelquelle gebildet werden soll,

$$(48) \quad \Phi = \frac{I_N}{4\pi\lambda_0 k} \frac{e^{-k(\sqrt{x^2+R^2}+x)} x (1+k\sqrt{x^2+R^2})}{(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

oder in Polarkoordinaten r, θ, ϕ

$$(49) \quad \Phi = \frac{I_N}{4\pi\lambda_0 k} \frac{\cos\theta (1+kr) e^{-kr(1+\cos\theta)}}{r^2}.$$

2. Die Stromfunktion einer Dipolquelle

Die Berechnung der Stromfunktion Ψ der Dipolquelle läßt sich einfacher nach der Gleichung (49) in Polarkoordinaten berechnen. Die Integration der Stromdichte i erfolgt dann über eine Kugelkalotte bei konstantem r bis zum Winkel θ_1 . Es gilt allgemein

$$(50) \quad \Psi = \int_0^{\theta_1} i d\theta = - \int_0^{\theta_1} \lambda \frac{\partial\Phi}{\partial r} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta.$$

Mit (49) erhalten wir damit

$$(51) \quad \Psi = \frac{I e^{-kr}}{2r} \int_0^{\theta_1} [k^2 r^2 + 2(1+kr) + (1+kr)kr \cos\theta] \cos\theta e^{-kr(1-\cos\theta)} \sin\theta d\theta.$$

Das Integral läßt sich geschlossen lösen. Wenn wir nach Einsetzen der Grenzen statt θ_1 wieder nur θ setzen, erhalten wir die Stromfunktion der Dipolströmung zu

$$(52) \quad \Psi = I \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\cos \theta (1 + \cos \theta) - \frac{\sin^2 \theta}{kr} \right] e^{-kr(1 - \cos \theta)} \right\}$$

A IV. Berechnung des Quellschichtengenerators

1. Der Einpolgenerator

Gegeben:

Die Quellschicht mit der Stromergiebigkeit I und der Fläche F in der Höhe h über dem Erdboden. Die Leitfähigkeit in der Höhe h sei λ_1 .

Die Leitfähigkeitsfunktion des Raumes $\lambda = \lambda_0 e^{2kx}$.

Gesucht:

Die Widerstände zwischen Quellschicht und $+\infty$ W_0
und zwischen Quellschicht und Erde W_u .

Der Verluststrom zwischen Quellschicht und Erde I_V .

Der Nutzstrom zwischen Quellschicht und $+\infty$ I_N .

Der Widerstand W eines zylindrischen Stückes des Luftraumes zwischen den Höhen h_n und h_m berechnet sich zu

$$(53) \quad W = \frac{1}{F} \int_{h_n}^{h_m} \frac{dx}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_n} - \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \right).$$

Damit ergibt sich

$$(54) \quad W_u = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right).$$

und

$$(55) \quad W_0 = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Die Ströme I_V und I_N verhalten sich umgekehrt wie die von ihnen durchflossenen Widerstände W_u und W_0 .

$$(56) \quad \frac{I_N}{I_V} = \frac{W_u}{W_0}.$$

Mit $I_N + I_V = I$ folgt daraus

$$(57) \quad I_N = \frac{W_u}{W_u + W_0} I, \quad \text{und} \quad I_V = \frac{W_0}{W_u + W_0} I.$$

2. Der Quellschicht-Zweipolgenerator mit Berücksichtigung der erniedrigten Wolkenleitfähigkeit

Gegeben:

Die positive Quellschicht in der Höhe h_1 mit der Fläche F und der Stromerzeugbarkeit I . In der Höhe h_1 hat die Leitfähigkeit den Wert λ_1 .

Die negative Quellschicht in der Höhe h_2 mit der Fläche F und der Stromerzeugbarkeit $-I$. In der Höhe h_2 hat die Leitfähigkeit den Wert λ_2 .

Die Leitfähigkeit in dem Raum zwischen den Höhen h_1 und h_2 hat den Wert λ_3 . Im übrigen Luftraum ist die Leitfähigkeit gegeben durch die Funktion $\lambda = \lambda_0 e^{2kx}$.

Gesucht:

Der Nutz- und Verluststrom I_N und I_V , und der Wirkungsgrad w .

Die Widerstände

W_u im Raum 3 zwischen Erde und negativer Quellschicht,

W_i im Raum 2 zwischen positiver und negativer Quellschicht,

W_0 im Raum 1 zwischen positiver Quellschicht und $+\infty$.

Nach (53) sind W_u und W_0 gegeben durch

$$(58) \quad W_0 = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

und

$$(59) \quad W_u = \frac{1}{\lambda_0 2kF} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right).$$

Der Widerstand W_i berechnet sich zu

$$(60) \quad W_i = \frac{h_1 - h_2}{\lambda_3 F}.$$

Aus Gleichung (57) erhalten wir den Verluststrom und den Nutzstrom der positiven Quelle I_V^+ und I_N^+ , wenn wir berücksichtigen, daß hier der untere Widerstand durch Hintereinanderschalten von W_u und W_i gegeben ist.

$$(61) \quad I_V^+ = \frac{W_0}{W_u + W_i + W_0} I,$$

und

$$(62) \quad I_N^+ = \frac{W_u + W_i}{W_u + W_i + W_0} I.$$

Ähnlich berechnet sich der Verlust- und Nutzstrom der negativen Quelle I_V^- und I_N^- , nur daß hier der obere Widerstand durch Hintereinanderschalten von W_0 und W_i gegeben ist.

$$(63) \quad I_V^- = - \frac{W_0 + W_i}{W_u + W_i + W_0} I.$$

$$(64) \quad I_N^- = - \frac{W_u}{W_u + W_i + W_0} I.$$

Wir erhalten den Nutzstrom des Bipolgenerators I_{BN} durch Überlagerung der Nutzströme der positiven und negativen Quellschicht in Raum 1.

$$(65) \quad I_{BN} = \frac{W_i}{W_u + W_i + W_0} I,$$

und den Verluststrom I_{BV} durch Überlagerung des Verluststroms der positiven Quelle und des Nutzstroms der negativen Quellschicht. Wir müssen dabei darauf achten, daß hier der Verluststrom der positiven Quellschicht mit negativem Vorzeichen anzusetzen ist, weil Stromrichtung und positive Koordinatenrichtung entgegengesetzt sind.

$$(66) \quad I_{BV} = - \frac{W_u + W_0}{W_u + W_i + W_0} I.$$

Der Wirkungsgrad ist durch das Verhältnis von Nutzstrom zu Gesamtstromerzeugung gegeben und berechnet sich nach (65) und (58) bis (60) zu

$$(67) \quad w = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0} 2k \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right)}.$$

A V. Die Oberflächenladung einer Kugel mit dem Radius K und der Leitfähigkeit λ_2 , die sich in einem Medium mit der Leitfähigkeit λ_1 befindet. Im Mittelpunkt der Kugel sei eine Stromquelle mit der Stromergiebigkeit I angeordnet.

Gegeben:

Eine Kugel mit dem Radius K und der Innenleitfähigkeit λ_2 . Im Mittelpunkt der Kugel befindet sich die Stromquelle mit der Stromergiebigkeit I und der Ladung Q . Der Außenraum hat die Leitfähigkeit λ_1 .

Gesucht:

Die Oberflächenladung Q^0 der Kugel.

Aus der Stetigkeit der Strömung an der Grenzfläche der Kugel K folgt

$$(68) \quad i = \frac{I}{4\pi K^2} = \lambda_1 E_1 = \lambda_2 E_2.$$

Die Oberflächenladungsdichte q' der Kugel berechnet sich aus der Flächendivergenz der Feldstärke

$$(69) \quad q' = \epsilon (E_1 - E_2) = \frac{I\epsilon}{4\pi K^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right).$$

Durch Integration über die Oberfläche ergibt sich die Gesamtladung Q^0 zu

$$(70) \quad Q^0 = I\epsilon \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right).$$

Da die Ladung Q der Stromquelle und ihre Stromergiebigkeit verbunden sind durch die Beziehung $I = \lambda_2 / \epsilon Q$, erhalten wir aus (70)

$$(71) \quad Q^0 = - \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) Q.$$

A VI. Die Gesamtladung einer Kugel mit der Raumladungsdichte q

Gegeben:

Im Mittelpunkt des Kugelkoordinatensystems r, θ, ϕ liegt der Mittelpunkt der Kugel mit dem Radius a .

Die Quellstärke der Kugel ist I .

Die Raumladungsdichte der Kugel ist gegeben durch $q = \frac{I\epsilon}{\frac{4}{3}\pi a^3\lambda}$.

Die Leitfähigkeitsfunktion $\lambda = \lambda_m e^{2kr \cos \theta}$

Die Leitfähigkeit im Mittelpunkt der Kugel λ_m .

Gesucht:

Die Gesamtladung der Kugel Q .

Auf einer Kreisscheibe senkrecht zur $\theta = 0$ Achse mit dem Radius $a \sin \theta$ und der Dicke $a \sin \theta d\theta$ ist die Ladung q' gegeben durch

$$(72) \quad q' = \frac{I\epsilon}{\frac{4}{3}\pi a^3\lambda_m} e^{2ka \cos \theta} \pi a^2 \sin^2 \theta a \sin \theta d\theta.$$

Die Gesamtladung Q der Kugel ergibt sich durch Integration von q' über die Kugel.

$$(73) \quad Q = \frac{\epsilon}{\lambda_m} \frac{I\pi a^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta e^{-2ka \cos \theta} d\theta.$$

Das Integral läßt sich geschlossen lösen, und wir erhalten

$$(74) \quad Q = \frac{\epsilon}{\lambda_m} I \frac{3}{2(2ka)^3} [(1 + 2ka) e^{-2ka} - (1 - 2ka) e^{2ka}].$$

Literatur

- [1] Simpson, G. C., Scrase, F. J.: The distribution of electricity in thunderclouds I. Proc. Roy. Soc. 309-352, 1937.
- [2] Simpson, G. C., Robinson, G. D.: The distribution of electricity in thunderclouds. II. Proc. Roy. Soc. 281-329, 1941.
- [3] Brooks, C. E. P.: The distribution of thunderstorms over the globe. Geoph. Mem. London 3 Nr. 4, 1925.
- [4] Wait, G. R.: Aircraft measurements of electric charge carried to ground through thunderstorms.
Thunderstorm Electricity. The University of Chicago Press. Edited by H. R. Byers.
- [5] Kasemir, H. - W.: Die Stromausbeute des Gewittergenerators in Bezug auf den luftelektrischen Vertikalstrom der Schönwettergebiete. Ber. D. Wetterd. US-Zone, 428-434, 1952.
- [6] Israël, H., Kasemir H. - W.: In welcher Höhe geht der weltweite luftelektrische Ausgleich vor sich. Ann. Geoph. 5, 313-324, 1949.
- [7] Wichmann, H.: Die Weltgewittertätigkeit und das luftelektrische Feld der Erde. Arch. Met. Geoph. Biokl. 290-302, 1951.
- [8] Küttner, J.: Die elektrischen und meteorologischen Vorgänge in der Basis von Gewitterwolken.
Das Gewitter. H. Israël. Akad. Verlagsges. Leipzig, 1950.
- [9] Ollendorff, F.: Potentialfelder der Elektrotechnik. Verlag Julius Springer, Berlin 1932.
- [10] Israël, H., Kasemir, H. - W.: Studien über das atmosphärische Potentialgefälle VI. Beispiele für das Verhalten luftelektrischer Elemente bei Nebel. Arch. Met. Geoph. Biokl. 71-85, 1952.
- [11] Holzer, R. E., Saxon, D. S.: Distribution of electrical conduction currents in the vicinity of thunderstorms. J. Geoph. Res. 207-216, 1951.
- [12] Simpson, G. C.: Atmospheric electricity during disturbed weather. Geoph. Mem. 84, 1-51, 1949.
- [13] Israël, H.: Bemerkungen zum Energie-Umsatz im Gewitter. Geof. Pura e Appl. 3-11, 1953.

Ergebnisse der Messung natürlicher Erdströme bei Göttingen

Von H. Repsold, Hannover ¹⁾

Zusammenfassung: Meßmethode und -apparat werden kurz beschrieben. Die Amplituden bei zwei gleichzeitig registrierenden (etwa 3 km voneinander entfernten) Erdstromstationen werden verglichen. Dabei ergibt sich ein linearer Zusammenhang der einander entsprechenden Amplituden. Die beiden Stationen lassen zwei verschiedene Anisotropien des spezifischen Widerstandes der obersten Erdschicht erkennen. Ferner wird der Zusammenhang zwischen Erdstrom- und Magnetfeldvariationen untersucht. Hierbei ergibt sich eine annähernd lineare Beziehung zwischen dem Amplitudenverhältnis (Erdstromamplitude/Magnetfeldamplitude) und der Quadratwurzel aus der Frequenz. Die Phasenverschiebung zwischen Erdstrom und Magnetfeld wächst von 90° bei niedrigen bis auf annähernd 180° bei höheren Frequenzen.

Abstract: The measuring-method and -apparatus are briefly described. A comparison is made between the amplitudes of two earth-current-stations (located about 3 km apart), recording simultaneously. A linear relationship between the corresponding amplitudes is found, and different anisotropies of the specific resistivity of the upper soil-layers at both stations. The connection between earth-current- and magnetic field-variations is studied. A nearly linear relationship is found between the amplitude-ratio (earth-current-amplitude/magnetic field-amplitude) and the square-root of the frequency. The phase-difference between the earth-currents and the magnetic field increases from 90° for low to nearly 180° for higher frequencies.

1. Die Meßapparatur

Es wurde eine Galvanometerapparatur (mit Stromfluß) benutzt. Diese Anordnung ließ sich einfacher herstellen als eine Kompensationsanlage, bei der die an den Elektroden abgegriffene Spannung laufend kompensiert wird. Die Einfachheit der Bauweise brachte den Vorteil, daß während der mehrmonatigen Beobach-

¹⁾ Dipl.-Geophys. Hans Repsold, Amt für Bodenforschung, Hannover.

tungszeit (Oktober 1956 bis Februar 1957 und Juli bis Dezember 1957) nur wenige Registrierungen ausfielen. Die Verzerrung des natürlichen Feldes durch den die Apparatur passierenden Strom wurde durch die Verwendung hoher Vorschaltwiderstände tunlichst unterdrückt, bei Galvanometern der Stromempfindlichkeit $4 \cdot 10^{-9}$ A/mm/m.

Es wurden Cu - Cu SO₄ - Elektroden benutzt, und zwar als Doppelelektroden, um den Übergangswiderstand möglichst klein zu halten. Der Abstand der Elektroden betrug 30 m. Dies ist sehr kurz im Vergleich zu Registrieranlagen, die andernorts verwandt werden. Bei Versuchen mit verschiedenen langen Meßstrecken

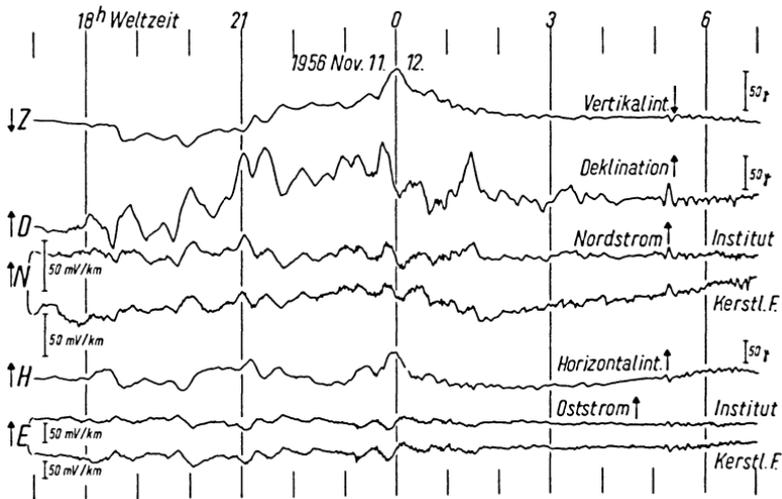


Abb. 1: Beispiel einer Registrierung vom 11./12. Nov. 1956. Erdstrom am Institut und am Kerstlingeröderfeld, zus. mit dem Göttinger Magnetogramm. (N, E = Erdstrom nach Norden, Osten; H, D, Z = Magnetfeld nach Norden, Osten, unten.)

hatte er sich aber als ausreichend erwiesen. Er erlaubt es, die Beobachtungen als differentielle Meßwerte aufzufassen. Die Vorschubgeschwindigkeit des Registrierfilms betrug 2 cm/Stunde. Zeitweise wurde zusätzlich eine Pulsationsregistrierung mit 6 mm/Minute betrieben. Die Empfindlichkeit der ganzen Meßapparatur lag etwa bei 3 mV/km pro mm Papierausschlag. Die Eichung wurde durch Einschaltung einer bekannten Spannung in die Meßleitung bewirkt. Deshalb ging der Einfluß des Bodenwiderstandes, der allerdings durch die Wahl der Vorschaltwiderstände gering gehalten wurde, in die Eichung ein und machte den Skalenwert um $\pm 10\%$ unsicher.

Zum Vergleich der zeitlichen Variationen des Erdstromes mit denen des erdmagnetischen Feldes standen die magnetischen Registrierungen des Geophysikalischen Institutes Göttingen zur Verfügung.

2. Vergleich gleichzeitiger Registrierungen zweier Stationen in ca 3 km Abstand

Um zu erkennen, wieweit die Erdstromvariationen durch örtliche Ursachen bedingt oder verändert werden, wurden zwei unabhängige Registrierstationen in der Umgegend von Göttingen aufgebaut, die eine am Warteberg in unmittelbarer Nähe des Geophysikalischen Institutes, die andere in einer Jagdhütte auf dem Kerstlingeröder Feld (Lageskizze in Abb.2). Beide Stationen besaßen je eine nord-südlich (N) und eine ost-westlich (E) verlaufende Meßstrecke. Ein Registrierbeispiel aller Komponenten zusammen mit dem Göttinger Magnetogramm findet man in Abb. 1. Auf den ersten Blick erkennt man eine weitgehende Übereinstimmung zwischen der Registrierung beim Institut und der auf dem Kerstlingeröder Feld.

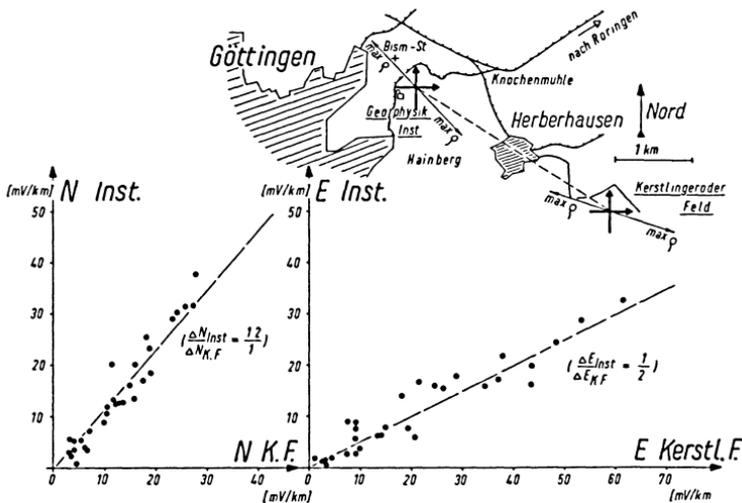


Abb. 2: Amplitudenproportionalität und Proportionalitätsfaktor zwischen den Erdstromregistrierungen am Institut und am Kerstlingeröderfeld; Lageskizze.

Zur Durchführung eines quantitativen Vergleichs wurden von einer größeren Anzahl deutlich erkennbarer Einzelvariationen gleichzeitige Amplituden entnommen und komponentenweise als Punktwolke aufgetragen (Abb.2). Man erkennt einen linearen Zusammenhang. Für die beiden Komponenten ergeben sich jedoch unterschiedliche Proportionalitätskonstanten. Diese deuten darauf hin, daß bei einer oder auch beiden Stationen eine Anisotropie der Leitfähigkeit des Erdbodens, und zwar der obersten Schichten, vorliegt, und daß diese Anisotropie an beiden Stationen verschieden ist. Zur Überprüfung wurde eine Widerstands-

messung nach Wenner durchgeführt. Diese ergab für die obersten 3 m Erdboden am Institut $NS: 200$ Ohmmeter, $EW: 200$ Ohmmeter; am Kerstlingeröder Feld $NS: 200$ Ohmmeter, $EW: 150$ Ohmmeter. Der Unterschied in der Anisotropie wurde außerdem mit einem bei Cagniard [1, 2] angegebenen Verfahren durch lineare Vektortransformation untersucht.

Die Wirkung der unterschiedlichen Leitfähigkeitsanisotropie erkennt man auch schon aus den Vektogrammen einzelner Variationen (Abb. 3). Die große Achse der Vektorellipse stimmt dabei mit der Richtung des maximalen spezifischen Widerstandes überein; denn die Erdstromanlage mißt den Spannungsabfall des Erdstromes am Bodenwiderstand. Die aus mehreren Vektogrammen durch Mittelung gewonnene Richtung maximalen spezifischen Widerstandes an den beiden Stationen ist in die Lageskizze in Abb. 2 eingetragen.

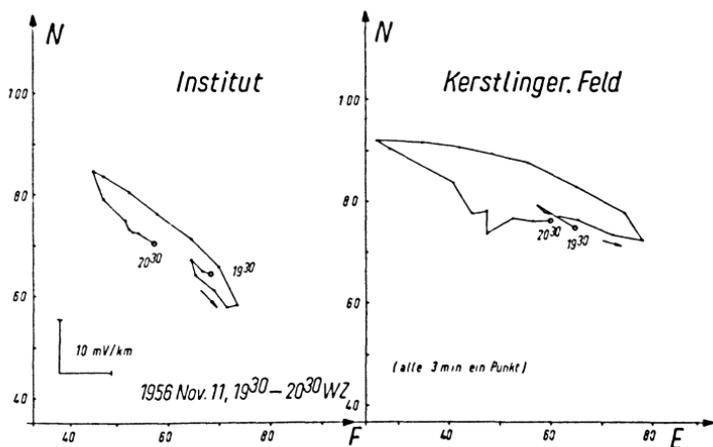


Abb. 3: Vektogramm eines ausgewählten Effektes (s. in Abb. 1) für Institut und Kerstlingeröderfeld zur Sichtbarmachung der Widerstandsanisotropien (dazu wurde aus den Registrierungen alle 3 Minuten ein Punkt entnommen).

3. Zusammenhang zwischen den Variationen des Erdstromes und des erdmagnetischen Feldes

Zur Zeit stärkerer Variationen des Erdstromes beobachtet man stets auch stärkere Schwankungen des erdmagnetischen Feldes. Es besteht wohl kaum ein Zweifel darüber, daß die Erdströme durch die Variationen des äußeren magnetischen Feldes elektromagnetisch induziert werden. Der Zusammenhang zwischen den Variationen des erdmagnetischen Feldes und denen der induzierten Erdströ-

me interessiert neuerdings besonders bei der erdmagnetischen Tiefensondierung [3, auch 1]. Deshalb wurden die Beziehungen zwischen magnetischen und Erdstrom-Variationen, für die gründliche aber nicht leicht durchschaubare theoretische Untersuchungen vorliegen [1], von der empirischen Seite eingehend untersucht.

Da der Strom durch Induktion entstanden ist, wurden die Stromkomponenten mit den dazu senkrechten Magnetfeldkomponenten in Beziehung gesetzt, also $-E$ mit der Horizontalintensität H und N mit der Deklination D (diese ist praktisch gleichbedeutend mit der Ostkomponente des Magnetfeldes). Das Verhältnis der Amplituden der in dieser Weise einander zugeordneten Variationen ist eine Funktion der Schwingungsdauer T der Störung.

Auf Grund theoretischer Überlegungen ist ein einfaches Bild zu erwarten, wenn man das Verhältnis nicht über T , sondern über der Quadratwurzel aus der Frequenz $\nu = 1/T$ aufträgt. Dies ist in Abb. 4 geschehen. Es wurden nach Möglichkeit annähernd sinusförmige Schwingungen und Wellenzüge benutzt, um ohne harmonische Analyse die Frequenz einigermaßen gut bestimmen zu können. Die Periode wurde dabei in der üblichen Weise durch Vermessen der Abstände zweier Maxima oder Minima ermittelt. Wo dies nicht möglich war, z. B. bei Bay-Störungen, wurde, wenn die Störung scharf begrenzt war, die Basisöffnung als halbe Periode oder, bei einer sanft auslaufenden Störung, die Länge der Tangente an die Öffnung als ganze Periode angenommen. Die Amplituden wurden nicht synchron aus den Erdstrom- und magnetischen Registrierungen entnommen, sondern es wurden jeweils die eventuell gegeneinander verschobenen Maximalwerte (Höhe von der Basis bis zum Scheitel) benutzt. Zwischen beiden Registrierungen zeigen sich nämlich charakteristische Phasenverschiebungen, die in Abb. 5 ebenfalls über $\sqrt{\nu}$ aufgetragen sind; und zwar läuft der Erdstrom stets der entsprechenden Magnetfeldkomponente voraus.

Für das Amplitudenverhältnis (Abb. 4) erhält man einen nahezu linearen Anstieg mit $\sqrt{\nu}$. Die Komponenten N/D und $-E/H$ unterscheiden sich darin nicht wesentlich. Auffällig ist lediglich die etwas größere Streuung in $-E/H$, die aber von der geringeren Empfindlichkeit der EW -Meßanlage herrührt. Dadurch war der Ausschlag auf dem Papier kleiner und die Ablesegenauigkeit geringer. Die gesamte, recht beträchtliche Streuung der Punkte ist sicher nicht nur auf Meßungenauigkeit zurückzuführen, sondern dürfte seinen Grund in der unterschiedlichen Geometrie des induzierenden Magnetfeldes haben. Ein einfacher funktioneller Zusammenhang wäre nur zu erwarten, wenn die Geometrie des Magnetfeldes stets erhalten bliebe und nur die Periode variierte.

Die Phasenverschiebung (Abb. 5) ließ sich nur bis zu Perioden von etwa 2 Minuten aus den Registrierungen entnehmen (auch die eingetragenen Punkte für die

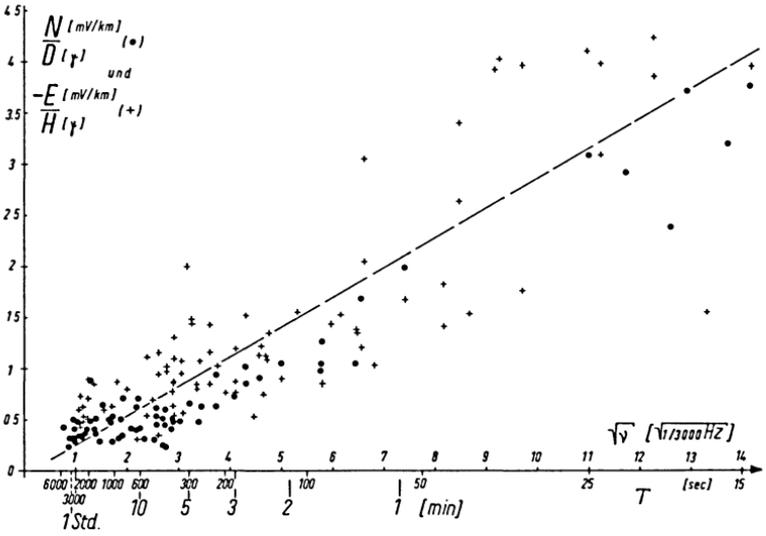


Abb. 4: Amplitudenverhältnis Erdstromamplitude / Magnetfeldamplitude in Abhängigkeit von der Quadratwurzel aus der Frequenz.

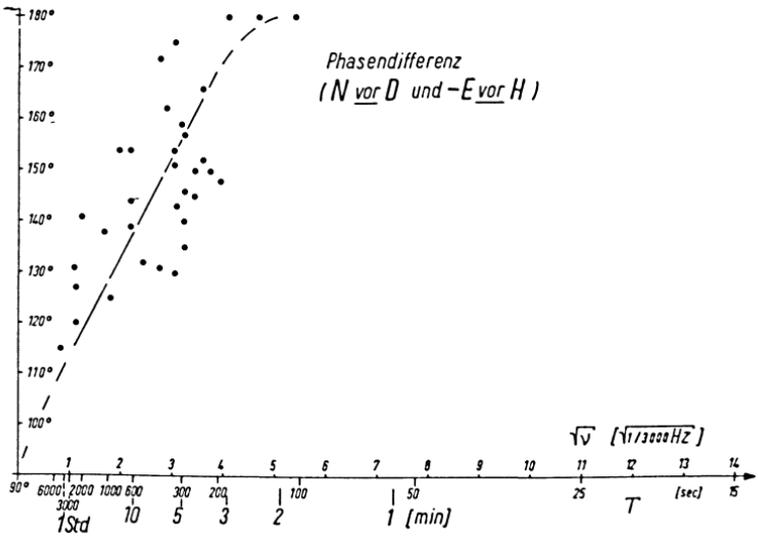


Abb. 5: Phasendifferenz Erdstrom vor Magnetfeld (Phasenvorlauf) in Abhängigkeit von der Quadratwurzel aus der Frequenz.

kurzen Perioden sind noch sehr unsicher). Der Verlauf der Phasenkurve hängt ab von dem unterschiedlichen Verhältnis von Ohm'schem zu induktivem Widerstand im Erdboden bei variierender Periode. Zur Interpretation muß man beachten, daß es sich um den direkt an der Erdoberfläche fließenden Strom handelt (der von dem Strom in größerer Tiefe nach Phase und Amplitude sehr verschieden sein kann). Bei dem Magnetfeld jedoch handelt es sich um das Gesamtfeld (Summe von äußerem und innerem Anteil).

(Die beschriebenen Messungen und Auswertungen wurden in den Jahren 1957 und 1958 im Rahmen einer Diplom-Arbeit am Göttinger Geophysikalischen Institut gemacht. Herrn Professor J. Bartels und den Herren Dr. W. Kertz und Dr. U. Schmucker möchte ich an dieser Stelle für Unterstützung und wertvolle Diskussionen und Anregungen meinen Dank aussprechen.)

Literatur

- [1] Cagniard, L.: "Electricité tellurique"; im Handbuch der Physik, Bd. 47, Geophysik I; Springer, Göttingen 1956.
- [2] Porstendorfer, G.: "Tellurik, Grundlagen und Anwendungen"; Diplomarbeit 1954, Bergakademie Freiberg; Freiburger Forschungshefte C 16, Berlin 1954.
- [3] Schmucker, U.: "Erdmagnetische Tiefensondierung in Norddeutschland 1957 bis 1959, ausgewählte Magnetogramme und erste Auswertung"; Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse; Beiträge zum Internationalen Geophysikalischen Jahr, Heft 5, Göttingen 1959 (im Druck).

Der Diffusionskoeffizient des Radons in der Bodenluft

(Bemerkungen zur Arbeit von E. Budde:
 "Bestimmung des Beweglichkeits-Koeffizienten der
 Radium-Emanation in Lockergesteinen")

Von H. Israël, Aachen ¹⁾

(Manuskripteingang: 1.7.1958)

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit beschreibt E. Budde [1] Versuche zur Bestimmung des Beweglichkeits-Koeffizienten (Diffusionskoeffizienten) von Radon in Bodenluft. Aus Messungen der Durchlässigkeit eines aus verschiedenen Erdbodenmaterialien gebildeten Filters für Radon leitet er ab, daß sich bei trockenem Material der Diffusionskoeffizient offensichtlich nicht merklich von dem für freie Luft geltenden Wert unterscheidet. Bei feuchtem Material dagegen findet er den Filterdurchsatz stark verringert und errechnet daraus folgende Diffusionskoeffizienten:

Bausand:	$k = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$
Sand mit Schluffanteil:	$k = 8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$
Geschiebemergel:	$k = < 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$

Die Übertragung dieser Werte auf die Verhältnisse im natürlichen Boden erscheint nicht ohne weiteres gestattet, da sich dabei Widersprüche mit der Erfahrung ergeben:

In einem körnig-lufthaltigem Boden gleichmäßigen Aktivitätsgehaltes ist die Radon-Konzentration in der Bodenluft bestimmt durch den Radium-Gehalt und das Emanationsvermögen des Bodenmaterials und durch das Verhältnis von Festvolumen zu Luftvolumen im Boden. In der Nähe der Erdoberfläche werden infolge des Konzentrationsgefälles zur Atmosphäre hin Diffusionserscheinungen wirksam, durch die ein Teil des Bodenluft-Radons zur "Exhalation" kommt. Die An-

¹⁾ Prof. Dr. Hans Israël, Meteorolog. Observatorium Aachen des Deutschen Wetterdienstes, Aachen, Pipinstr. 12.

wendung des zweiten Fickschen Diffusionsgesetzes liefert bei Berücksichtigung von Nacherzeugung und Zerfall des Radons folgende Beziehung für die Radonkonzentration $c(z)$ in Abhängigkeit von der Tiefe (H. Mache [2]).

$$(1) \quad c(z) = \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\sqrt{\lambda/k} z})$$

$c(z)$ = Radon-Konzentration in der Tiefe z

α = Nachlieferung von Radon pro cm^3 Bodenluft und sec.

λ = Zerfallskonstante des Radons ($2,097 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$)

k = Diffusionskoeffizient des Radons in der Bodenluft.

Die Radon-Konzentration nähert sich also von (praktisch) Null an der Erdoberfläche mit zunehmender Tiefe exponentiell einem Grenzwert α/λ an. Die "Halbwertstiefe"

$$(2) \quad Z = \frac{\ln 2}{\sqrt{\lambda/k}}$$

als Funktion des Diffusionskoeffizienten zeigt den in Abb. 1 wiedergegebenen Verlauf.

Nach dieser Beziehung sind für die drei von E. Budde* angegebenen Diffusionskoeffizienten folgende Halbwertstiefen zu erwarten:

Bausand: $Z = 16,6 \text{ cm}$

Sand mit Schluffanteil: $Z = 13,5 \text{ cm}$

Geschiebemergel: $Z = < 1,5 \text{ cm}$

d.h. die Tiefenprofile der Bodenluft-Emanation müßten in Bausand in 110 cm Tiefe, in Sand mit Schluff in 90 cm Tiefe und in Geschiebemergel in weniger als 10 cm Tiefe sich dem konstanten Tiefenwert α/λ bis auf 1% genähert haben.

Dies ist jedoch nach dem experimentellen Befund nicht der Fall:

1. Es ist eine bei allen Untersuchungen dieser Art bestätigte Tatsache, daß der Radon-Gehalt in den obersten Bodenschichten bis zu mindestens 2 m Tiefe zunimmt (H. Brandes [3], St. Meyer und E. Schweidler [4], H. Israëil und J. Saldukas [5] u.a.).

2. Es ist indes zu vermuten, daß der konstante Tiefenwert in der Regel erst in größerer Tiefe erreicht wird, wie vor allem aus der Tatsache zu schließen ist, daß Abriegelung der Exhalation durch Verstopfung der Oberflächen-Kapillaren

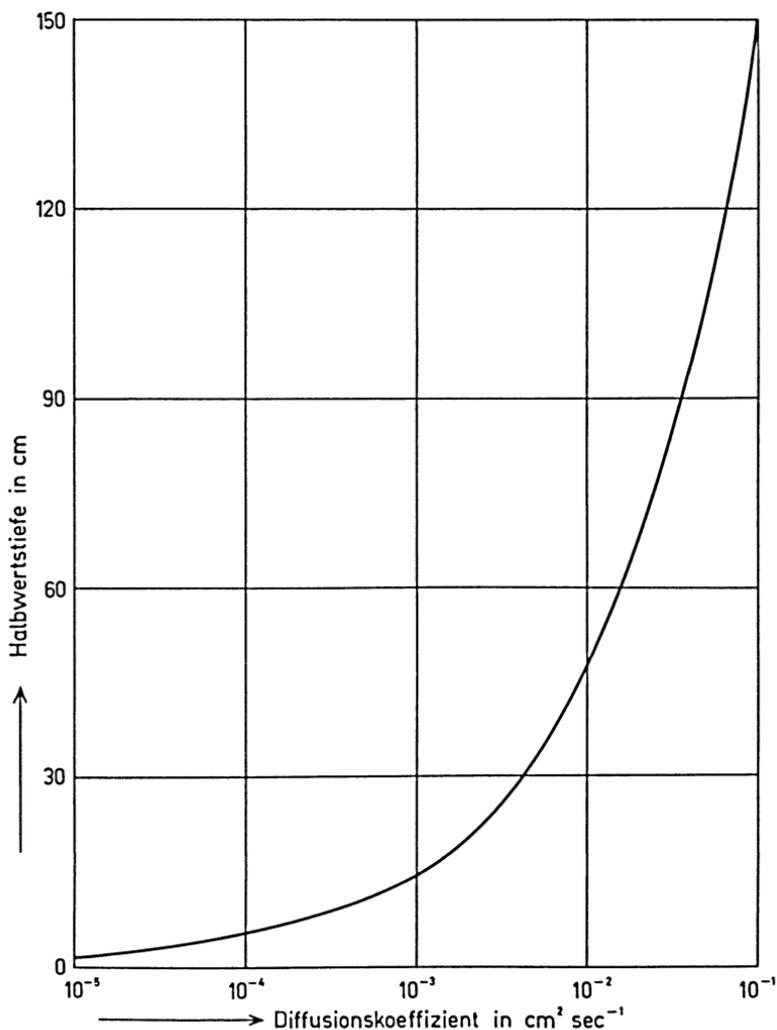


Abb. 1: Halbwertstiefe Z der Radon-Konzentration im Boden in Abhängigkeit vom Diffusionskoeffizient k .

bei Regen bzw. bei Tauwetter und nachfolgendem Frost den Radon-Gehalt auch noch in 1 m Tiefe und darunter wesentlich ansteigen lassen (A. Gockel [6], H. Bender [7]).

3. Die Exhalation des Bodens, die sich nach Gleichung (1) durch den Ausdruck

$$(3) \quad E = \left\{ \frac{d c(z)}{d z} \right\}_{z=0} = a \cdot \sqrt{k/\lambda}$$

ergibt, würde sich für die von Budde angegebenen k -Werte unter der üblichen Annahme über die mittlere Boden-Aktivität und das Emanierungsvermögen²⁾ zu etwa 10 bzw. 8 bzw. $< 1 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm² sec ergeben. Dem gegenüber sind nach allgemeinen Abschätzungen über den Radonkreislauf im System Boden - Atmosphäre etwa $60 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm² sec zu erwarten [10]. Messungen der Exhalation an verschiedenen Punkten ergeben in guter Übereinstimmung damit im Mittel einen Wert von etwa $40 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm² sec (Grenzen 21 u. $74 \cdot 10^{-18}$ [11]).

Es darf danach als wahrscheinlich gelten, daß die Diffusionskoeffizienten des Radons in der Bodenluft in der Regel nicht wesentlich unter dem für Freiluft geltendem Wert liegen können. Es besteht deshalb keine Veranlassung, die früher dafür ermittelten Werte von etwa 0,035 bis 0,05 cm² sec⁻¹ (V. J. Baranow und E. Gratscheva [12], H. Israëli und F. Becker [13]) als "wesentlich zu hoch" anzusprechen.

Eine Aufklärung der Diskrepanz zwischen den Budde'schen Versuchen und den wirklichen Verhältnissen kann nach Ansicht des Verfassers in zwei Richtungen versucht werden: Eine erste Möglichkeit ist die, daß bei den Laboratoriumsversuchen andere Bedingungen geherrscht haben, als sie den wirklichen Verhältnissen im Boden entsprechen: Während im Boden das Radon aus dem Inneren der ständig emanierenden feuchten Bodensubstanz nach außen in die Bodenkapillaren dringt, was ein mit Radon gesättigtes Bodenwasser zur Voraussetzung hat, erfolgt bei den genannten Laboratoriumsversuchen die Aktivierung von außen und ohne Nachlieferung. Es erscheint deshalb nicht ausgeschlossen, daß infolge dieser Abwandlung bei den Durchlässigkeitsversuchen eine gewisse Täuschung dadurch entstanden ist, daß bei den relativ kleinen Versuchsmengen Radon die hohe Löslichkeit des Radons im Wasser den Versuchsausfall beeinflusst hat. Es wäre denkbar, daß eine Separierung von Löslichkeit und Diffusion durch längere Versuchsdauern und größere Versuchsmengen sowie durch entsprechende Versuchsführung bei verschiedenen Temperaturen gelingt.

Die andere Möglichkeit wäre die, daß für den Radon-Transport im Boden neben der reinen gaskinetischen Diffusion evtl. noch andere Wirkungen angenommen werden können, die zu einer Vergrößerung des wirklichen Diffusionsgeschehens führen. Man hätte dann, wenn sich dies bestätigt, ebenso wie in der Atmosphäre zu unterscheiden zwischen gaskinetischer Diffusion und Scheindiffu-

²⁾ Radium-Gehalt zu $1 \cdot 10^{-12}$ g/g [8] Bodendichte zu 2 und Emanierungsvermögen zu 10% [9] angenommen.

sion infolge anderer Einflüsse. Man könnte hier etwa an eine Art vertikal zur Erdoberfläche hin gerichtete Gasbewegung im Boden denken, wie sie von G. Aeckerlein [14] vermutet und im Untergrund von Bad Nauheim als radonverfrachtender CO_2 -Strom vom Verfasser und F. Becker [15] nachgewiesen werden konnte.

Literatur

- [1] Budde, E.: Bestimmung des Beweglichkeits-Koeffizienten der Radium-Emanation in Lockergesteinen. ZS.f.Geophys. 24, 96-105, 1958.
- [2] Mache, H.: Über die Genesis der Ionen in der Atmosphäre. Wien. Ber. (IIa) 114. 1377-1388, 1905.
- [3] Brandes, H.: Dissertation Kiel 1905.
- [4] Meyer, St. und Schweidler, E.: Radioaktivität, Leipzig 1927.
- [5] Israë1, H. und Saldukas, J.: Bodenemanation und Gammastrahlung in dilluvialem Sandboden (Potsdam). Met. ZS. 56, 39-41, 1939.
- [6] Gockel, A.: Über den Gehalt der Bodenluft an radioaktiver Emanation. Phys. ZS. 9, 304-306, 1908.
- [7] Bender, H.: Über den Gehalt der Bodenluft an Radium-Emanation. Gerl. Beitr.z.Geophys. 41, 401-415, 1934.
- [8] Rankama, K. und Sahama, Th. G.: "Geochemistry", Chigago 1950, s.a. Landolt-Börnstein, "Zahlenwerte und Funktionen", 6. Aufl. 3, 1952, 307 ff.
- [9] Satterly, J.: On the radium content of fresh and sea water and some other substances. Proc. Cambr. Soc. 16, 360-364, 1911.
- [10] Israë1, H.: Die natürliche Radioaktivität in Boden, Wasser und Luft. Beitr.z.Phys.d.Atm. 30, 177-188, 1958.
- [11] Israë1, H.: Atmosphärische Elektrizität, Teil I, Leipzig 1957.
- [12] Baranov, V. J. und Gratscheva, E.: (Zur Theorie der geophysikalischen Erkundung nach der Emanationsmethode.) Trav. de l'Inst. d'Etat de Radium. 2, 61-67, 1933 (Russisch mit deutscher Zusammenfassung.)
- [13] Israë1, H. und Becker, F.: Die Emanationsverhältnisse in der Bodenluft. Gerl. Beitr. 48, 13-58, 1936.
- [14] Aeckerlein, G.: Neue Ergebnisse der Emanationsforschung im Erdenneeren. Phys. ZS. 37, 153-154, 1936.
- [15] Israë1, H. und Becker, F.: Die Boden-Emanation in der Umgebung der Bad-Nauheimer Quellenspalte. (Bad Nauheim zur Jahrhundertfeier 1935 gewidmet.) Gerl. Beitr. 44, 40-55, 1935.

Die solaren Gezeiten im Barogramm des Juli 1959

Von M. Siebert, Göttingen¹⁾

Zusammenfassung: Infolge einer ungewöhnlich konstanten Druckverteilung über Mitteleuropa in der zweiten Julihälfte traten die gezeitenartigen Schwankungen des Luftdruckes unmittelbar im Barogramm hervor. Die harmonische Analyse der Daten von nur 11 Tagen führte auch quantitativ auf Druckvariationen, wie sie sonst nur aus der Analyse langer Beobachtungsreihen bekannt sind.

Abstract: Tidal variations of atmospheric pressure appeared immediately on the barogram owing to an unusually uniform distribution of pressure over Central Europe during the second half of July. Using the data of 11 days only, the harmonic analysis also quantitatively yields pressure variations as they are known otherwise from analysis of long series of observations only.

Da die gezeitenartigen Schwankungen des Luftdruckes in mittleren und höheren Breiten meistens durch die mit dem Wetterablauf verbundenen Druckänderungen völlig verdeckt werden, ist es ganz außergewöhnlich, wenn in 51,5° Breite diese kleinen, periodischen Druckvariationen für mehr als eine Woche das Aussehen des Barogramms bestimmen. Dieser seltene Fall ist in der zweiten Julihälfte 1959 eingetreten. Abbildung 1 zeigt einen dem Original nachgezeichneten Ausschnitt von vier Tagen. Die Registrierung erfolgte mit einem Lambrecht-Mikrobarographen (Nr. 293) am Geophysikalischen Institut in Göttingen. Deutlich erkennbar ist eine halbtägige Druckwelle mit einem besonders ausgeprägten Minimum gegen 19^h. Der Wetterablauf äußert sich in einer ganz langsamen und gleichmäßigen Abnahme des Druckes. Die Wetterlage wurde bestimmt durch ein Hochdruckgebiet über Nordeuropa, von dem aus sich ein Hochdruckkeil nach Südwesten erstreckte und zeitweilig eine Brücke zu einem Azorenhoch bildete. Dadurch war Mitteleuropa völlig gegen atlantische Störungen abgeschirmt. Diese Wetterlage erwies sich als außerordentlich beständig.

Die weitere Betrachtung des Barogramms ergibt, daß die Tagesschwankung des Druckes an 11 aufeinanderfolgenden Tagen — nämlich vom 17. bis zum 27. 7. 1959 — jeweils geringer als 2 Torr war. Diese Tage wurden für die harmonische Analyse verwendet. Dazu wurden aus dem Barogramm zweistündliche Werte

¹⁾ Dr. Manfred Siebert, Göttingen, Geophysikalisches Institut der Universität, Herzberger Landstr. 180.

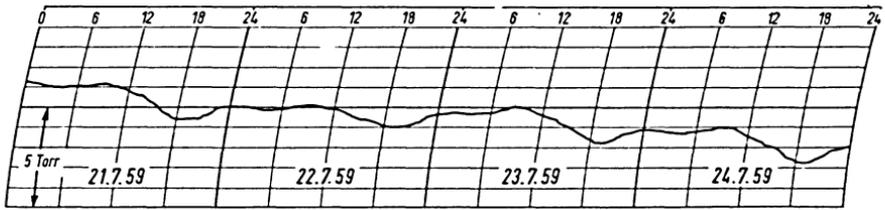


Abb. 1: Dem Original-Barogramm nachgezeichneter Ausschnitt von vier Tagen einer Registrierung mit einem Lambrecht-Mikrobarographen am Geophysikalischen Institut in Göttingen. Zeitangaben in mitteleuropäischer Zeit.

des Luftdruckes nach mitteleuropäischer Zeit mit einer Genauigkeit von 0,1 Torr abgelesen und der mittlere Tagesgang bestimmt. Die Mitternachtsdifferenz wurde linear eliminiert (Lamontsche Korrektur). Obwohl es sich bei den verwendeten Tagen um ausgesprochen heitere Tage gehandelt hat, bei denen nach Bartels [1] eine meistens einseitige Krümmung im Druckverlauf durch die Lamontsche Korrektur nicht erfaßt wird und zu einer Verfälschung der Ergebnisse der Analyse führen kann, ist in diesem Fall eine Berücksichtigung des Krümmungseffektes nicht erforderlich. Die Druckunterschiede über Mitteleuropa waren so gering und die Wetterlage so stationär, daß die interdiurne Druckänderung praktisch linear erfolgte. Das geht auch aus Abbildung 2 hervor, in der die Ta-



Abb. 2: Linear verbundene Tagesmittel des Luftdruckes vom 17.-27.7.59, gegeben in Abweichungen vom Tagesmittel des 27.7.

gesmittel des Druckes für die verwendeten Tage in Abweichungen vom Tagesmittel des letzten Tages eingetragen und linear verbunden sind. Wie außerdem aus der Abbildung abzulesen ist, betrug die durchschnittliche Druckabnahme weniger als 1 mb pro Tag.

Der aus den 11 Tagen berechnete und korrigierte mittlere Tagesgang ist in Abbildung 3 dargestellt. Er zeigt eine annähernd halbrätige Welle mit je einem

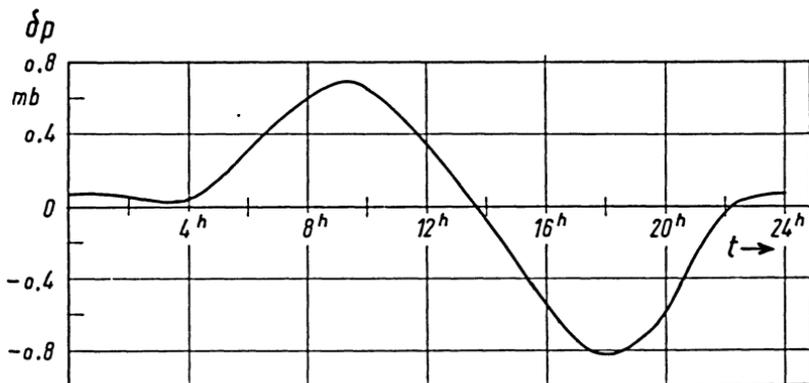


Abb. 3: Aus den Daten von 11 Tagen (17.-27.7.59) berechneter mittlerer täglicher Gang des Luftdruckes nach linearer Elimination der Mitternachtsdifferenz. Zeitangaben in mittlerer Ortszeit.

auffallenden Hauptmaximum und -minimum und je einem schwachen Nebenmaximum und -minimum. Auf Grund der Ergebnisse der Untersuchungen über die atmosphärischen Gezeiten ist ein solcher Verlauf des mittleren Tagesganges etwa zu erwarten. Von den Variationen mit eindeutig planetarischem Charakter ist die halbtägige solare Druckschwankung die weitaus größte. Sie hat ihre Maxima in Mitteleuropa um etwa 10³⁰ und 22³⁰ Uhr mittlerer Ortszeit. Dazu kommt eine stark ortsabhängige ganztägige Variation, deren Amplitude an heiteren Tagen die der halbtägigen noch übertreffen kann. Ihr Maximum nimmt sie um etwa 6³⁰ Uhr mittlerer Ortszeit an. Durch Überlagerung dieser beiden Wellen läßt sich der in Abbildung 3 wiedergegebene Tagesgang schon ungefähr verstehen.

Nach der Vorschrift der harmonischen Analyse wurden aus dem mittleren Tagesgang die harmonischen Koeffizienten und aus diesen die Amplituden c_n und die Phasenwinkel ϵ_n der einzelnen Variationen berechnet, deren Überlagerung wieder auf die mittlere Druckschwankung δp führt:

$$\delta p = \sum_n c_n \sin (nt + \epsilon_n)$$

Die Ergebnisse der numerischen Rechnung sind (Amplituden in Mikrobar):

$$\begin{aligned} c_1 &= 539 (328) \mu b; & \epsilon_1 &= 340,4^\circ (352,2^\circ) \\ c_2 &= 299 (289) \mu b; & \epsilon_2 &= 123,8^\circ (132,8^\circ) \\ c_3 &= 73 (71) \mu b; & \epsilon_3 &= 134,5^\circ (142^\circ) \\ c_4 &= 33 (15) \mu b; & \epsilon_4 &= 245^\circ (210^\circ) \end{aligned}$$

Die Phasenwinkel sind auf mittlere Ortszeit bezogen; sie wurden wegen der nach mitteleuropäischer Zeit vorgenommenen Druckablesungen entsprechend dem Abstand Göttingens von 15° E-Meridian umgerechnet. Die in den Klammern stehenden Werte sind zum Vergleich hinzugefügt worden. Es sind von Bartels [2] berechnete Juli-Werte der Amplituden und Phasenwinkel für Potsdam. Ihnen liegen die stündlichen Ablesungen aller Julitage der 30 Jahre 1893 bis 1922 zu Grunde.

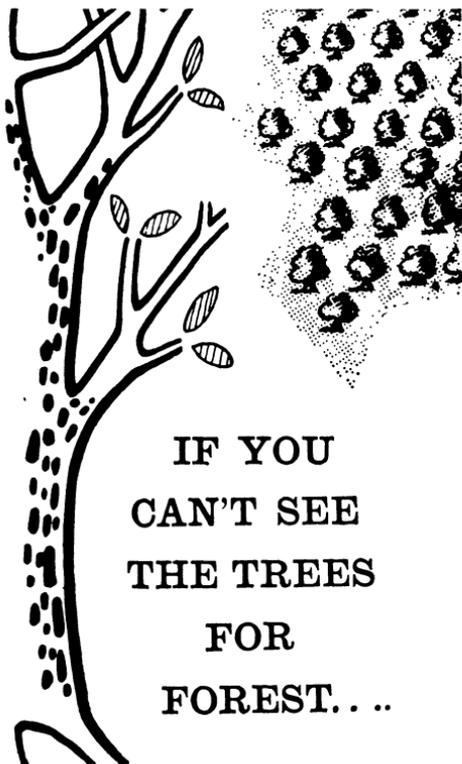
Bei der ganztägigen Variation fällt die Größe der Amplitude auf, wie sie sich für Göttingen ergeben hat. Bei ihrer Beurteilung muß jedoch berücksichtigt werden, daß c_1 – im Gegensatz zu den übrigen Variationen – stark vom Wetter beeinflusst wird. An den ausgewählten 11 Tagen betrug die mittlere tägliche Sonnenscheindauer 11,6 Stunden, während das langjährige Göttinger Tagesmittel für Juli 6,1 Stunden beträgt. An heiteren Tagen ist c_1 aber größer als im Durchschnitt über alle Tage. So hat Bartels [3] aus 76 heiteren Junitagen der Jahre 1893 bis 1916 für Potsdam sogar die Amplitude $c_1 = 667 \mu b$ erhalten. Bei der halbtägigen und sogar noch bei der dritteltägigen Druckvariation ist die Übereinstimmung mit den Vergleichswerten gut. Erst bei der kleinen vierteltägigen Variation beginnen die Unterschiede größer zu werden.

Insgesamt bestätigen die Ergebnisse der harmonischen Analyse auch quantitativ, daß der tägliche Druckverlauf an diesen Tagen vorwiegend von den solaren gezeitenartigen Schwingungen der Erdatmosphäre bestimmt worden ist. Die Berechnung der lunaren Druckvariation ist wegen ihrer Kleinheit aus den Daten von nur 11 Tagen nicht möglich.

Eine allgemeine Behandlung der atmosphärischen Gezeiten, insbesondere auch ihre Theorie, findet sich in den neueren zusammenfassenden Darstellungen von Kertz [4] und Siebert [5].

Literatur

- [1] Bartels, J.: Zur Berechnung der täglichen Luftdruckschwankung. Ann. Hydrogr. 51, S. 153-160, 1923.
- [2] Bartels, J.: Über die atmosphärischen Gezeiten. Abh. Preuß. Meteorol. Inst. 8, Nr. 9, 1927.
- [3] Bartels, J.: Der lokale Anteil in der täglichen Luftdruckschwankung. Beitr. Phys. freie Atmosph. 11, S. 51-60, 1923.
- [4] Kertz, W.: Atmosphärische Gezeiten. Handb. Phys. 48, S. 928-981, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
- [5] Siebert, M.: Atmospheric Tides. Advanc. Geophys. 7, New York 1960, (im Druck).



**IF YOU
CAN'T SEE
THE TREES
FOR
FOREST. . .**

Airborn survey, with its unrestricted movement and visibility, substantially cuts down field work. Photogeology and geophysical techniques provide the ground surveyor with a plan of action. At Huntings, ground and airborne methods are complementary; together they lead to fast and economical mapping and interpretation . . . for the discovery and development of all natural resources



**HUNTING GEOPHYSICS LTD.
4 ALBEMARLE ST., LONDON W. 1**

Telephone: HYDe Park 5211
Cables: 'HUNTMAG' LONDON
**HEAD OFFICE AND LABORATORIES,
6 ELSTREE WAY, BOREHAM WOOD,
HERTS.**

Telephone: ELSTREE 2214

"Journalfranz"
ARNULF LIEBING OHG.

WISSENSCHAFTLICHES ANTIQUARIAT
UND HOCHSCHULBUCHHANDLUNG

Wir liefern und kaufen ständig:
ZEITSCHRIFTENREIHEN
SAMMELWERKE-
LEXIKA, BIBLIOGRAPHIEN
und sonstige größere Veröffentlichungen
aller Wissensgebiete

■ Ankauf vollständiger Bibliotheken ■

WÜRZBURG 2

Briefanschrift: Postfach 1136

Geschäftsräume: Münzstraße 12

Fernruf: 5 40 20, Telegr.: Journalfranz

GEOPHYSICS

A Journal of General and Applied Geophysics

Published Quarterly by

**SOCIETY OF EXPLORATION
GEOPHYSICISTS**

Box 1536

Tulsa, Oklahoma

- The official journal of the leading international group of prospecting geophysicists
- Devoted to current problems in seismograph, gravity, magnetic and other methods of geophysical prospecting for oil and other minerals
- Covers geophysical instrumentation

SUBSCRIPTION RATES

ONE YEAR (4 issues) \$ 10.00,
foreign \$ 10.50 (payment with order)

ALSO AVAILABLE ON MICROCARDS



Geophysics abroad

Ask

SEISMOS
GmbH
HANNOVER - GERMANY

Central Processing Office with  **seisMAC** system

equipped to process
HTL Magnetic Discs
SIE Magnetic Tapes

Geophysikalische Messungen überall

SEISMOS
GmbH
HANNOVER

Refraktion · Reflexion · Gravimetrie (zu Lande und zu Wasser)
Goelektrik (Eigenpotential · Widerstand · Induktion)
Szintillometrie (carborne)
Magnetik