

TELMA	Band 47	Seite 129 - 138	2 Abb.	Hannover, November 2017
-------	---------	-----------------	--------	-------------------------

Grundlagen zur Wasserbewegung nach Darcy in Moor und Torf

Basic knowledge of the water movement due to Darcy in mire and peat

VOLKER SCHWEIKLE

Zusammenfassung

Die gesetzliche Einheit von k im Gesetz von Darcy ist $\text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^{-4}$ und konsistent für alle physikalischen Ableitungen. k ist deutlich temperaturabhängig. Das durchströmbare Porenvolumen in Torfen mit hoher elektrischer Ladungsdichte ist wahrscheinlich $< 0,1\%$ und erklärt die geringe Wasserleitfähigkeit des Katotelm. Die Viskosität η ist in einen Reibungsbeiwert μ_1 umrechenbar. Die Struktur des Strömungsgesetzes von Darcy schränkt die mathematisch zulässige Verschiebung von Elementen eines Terms in andere ein. Rechenregeln der Normalverteilung ergeben bei transformierten, schiefen Verteilungen keine plausiblen Ergebnisse.

Abstract

The legal (Germany) unit of k in the law of Darcy is $\text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^{-4}$ and equal for all physical derivations. k depends distinctly on temperature. The permeable pore volume of peat is probably $< 0,1\%$ of the total pore volume due to a high density of electrical charge and explains the very low water conductivity of the katotelm. It is possible to convert the viscosity η in a value of internal friction μ_1 . The structure of the law of Darcy limits the mathematical possibility to shift elements from one term to another. The use of rules of calculation for a normal distribution in statistics fails for transformed crooked distributions and give no plausible results.

1. Einleitung

Im Folgenden werden vier Fragenkomplexe behandelt:

(1) Die Diskussion der Strömungsgesetze von Hagen-Poiseuille und Darcy ergab (SCHWEIKLE 2012), dass die Wasserleitfähigkeit k_D die Einheit $\text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^{-4}$ besitzt, was üblicher Lehrmeinung nicht entsprach. Deshalb war zu prüfen, welche Einheit für k_D durch Einsetzen der Druckgröße $p/\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ in das Gesetz von Darcy, wie vom Gesetzgeber gefordert, entsteht.

(2) Das Katotelm von Mooren gilt als wasserundurchlässiges, organisches Gestein (im bodenkundlichen Sinne!), bedingt durch Porenvolumina um 50 %, Feinporigkeit und hoher elektrischer Ladungsdichte bis zu $2 \text{ Mol}\cdot\text{kg}^{-1}$. Es war anhand älterer Literatur zu schätzen, inwiefern dadurch die Durchströmbarkeit des Katotelms vermindert wird.

(3) Das Gesetz von Darcy besitzt eine Struktur die, in Verbindung mit dem Gesetz von Hagen-Poiseuille, vorgestellt und diskutiert wird und die die mathematische Freiheit des Verschiebens von Elementen zwischen Termen begrenzt.

(4) Kurz angerissen wird die Bildung des Mittelwerts von k_D , weil schon in der Telma Band 46 (SCHWEIKLE 2016) ausführlich dargestellt.

2. Einheit und Einfluss von Temperatur und elektrischer Ladungsdichte des Torfes auf das darcysche Gesetz

Mit der Einführung des *Gesetzes über Einheiten im Messwesen* und der zugehörigen *Ausführungsverordnung vom 13.12.1985* in Verbindung mit *DIN 1301, Teil 1 (12.93)* wurde die Druckgröße ΔH (*hydraulic head/m*) oder Δh (*mWS = Meter Wassersäule/m*) kassiert und im amtlichen Verkehr durch den Druck $p/\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ersetzt. Damit ändern sich Einheit und numerischer Wert der Wasserdurchlässigkeit k_D .

2.1 Abhängigkeit der Wasserleitfähigkeit k_D von der Temperatur $T/^\circ\text{C}$

Die Strömungsgesetze sind wie folgt zu schreiben:

$$\text{Darcy (l.c. HILLEL 1980)} \quad q_D = \frac{V}{A_{\text{pr}} \cdot t} = \frac{k_D \cdot \Delta p}{l} \quad (1) \text{ und}$$

$$\text{Hagen-Poiseuille (l.c. KUCHLING 2011)} \quad q_{\text{HP}} = \frac{V}{A_{\text{po}} \cdot t} = \frac{\bar{r}^2}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \quad (2)$$

mit V = eine Probe durchströmendes Wasservolumen/ m^3 , A_{pr} = Querschnitt eines Bodens/ m^2 , A_{po} = Querschnitt eines Rohres/ m^2 , t = Zeit/ s , Δp = Druckdifferenz/ Pa , bzw. $\Delta h/\text{mWS}$ (m Wassersäule) \cong einer Strecke über die der Druck p bzw. h wirkt, k_D = Materialkoeffizient oder Wasserleitfähigkeit/ $\text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^{-4}$, \bar{r} = mittlerer Porenradius/ m
 η = dynamische Viskosität von Wasser/ $\text{mPa}\cdot\text{s}$ und $\frac{\bar{r}^2}{8} = k_0 = \text{Permeabilität}/\text{m}^2$.

Werden die Strömungsgesetze (1) und (2) gleich gesetzt (SCHWEIKLE 2012), nach k_D aufgelöst, gekürzt und umgestellt, wird

$$k_D = \frac{\bar{r}^2}{8} \cdot \frac{1}{\eta} / \text{m}^2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^{-4}.$$

Darin ist:

- $\frac{1}{8}$ = eine numerische Korrekturgröße zu r^2 .
- $\frac{1}{\eta}$ = ein Fluidterm (Fluidität/ $10^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). Die dynamische Viskosität η beträgt 1,002 bei 20 °C und 1,792 mPa·s bei 0 °C, was einer Änderung von $0,028 \text{ mPa} \cdot \text{s} \cdot \text{°C}^{-1}$ entspricht.
- r^2/m^2 = ein Matrixterm, der nur auf den Porenquerschnitt A_{po} , oder die Permeabilität k_0/m^2 , die auf den Probenquerschnitt A_{pr} bezogen wird. Also gilt

$$k_0 = r^2 \cdot \frac{A_{\text{po}}}{A_{\text{pr}}} .$$
- Der Kehrwert von $\frac{\bar{r}^2}{8}$ ist $\frac{8}{\bar{r}^2}$ und entspricht dem Reibungsbeiwert einer elektrisch ungeladenen Porenwand. Setzt man den Porenquerschnitt A_{po} ins Verhältnis zu $\frac{8}{\bar{r}^2}$ wird ersichtlich, dass mit zunehmenden A_{po} bei kleinem r^2 die Wirkung der Reibung relativ geringer wird, bei größerem r^2 nicht mehr, weshalb die o.a. Gesetze (1) und (2) für Strömungen in Poren (oder offenen Gerinnen) mit großem Querschnitt nicht gelten.

2.2 Einheit von k_D nach dem Gesetz von Darcy mit p anstatt Δh

Das Gesetz von Darcy (1), aufgelöst nach k_D ergibt:

$$k_D = \frac{V \cdot l}{A_{\text{pr}} \cdot t \cdot \Delta p} = \frac{V \cdot l}{A_{\text{pr}} \cdot t \cdot \Delta h \cdot \varrho \cdot g} = \frac{V}{A_{\text{pr}} \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot \varrho \cdot g} \quad / \text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^{-4} . \quad (3)$$

mit $\sin \alpha = \frac{\Delta h}{l}$ (Bezugsebene ist die Horizontale).

p und h hängen wie folgt voneinander ab:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{V \cdot \varrho \cdot g}{A} = \frac{A \cdot h \cdot \varrho \cdot g}{A} = h \cdot \varrho \cdot g / \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$$

mit der Kraft F/N , der Aufstandsfläche A/m^2 von F , der Masse m/kg , der Erdbeschleunigung $g/\approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, dem Volumen eines Wasserkörpers V/m^3 , der Dichte von Wasser $\varrho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ und der Höhe einer Wassersäule h/m . $h \sim p$ und $\neq p$.

2.3 Ableitung von k aus der spezifischen Energie der Lage $\psi/\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$

$$\psi = \frac{W}{V_B} = \frac{F \cdot \Delta h}{V_B} = \frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{V_B} \quad (4)$$

$$\text{umgestellt ist } m \cdot g = \frac{\psi \cdot V_B}{\Delta h} \quad (4a)$$

$$\text{und nach Darcy } \frac{V_w}{t \cdot A_B} = \frac{k \cdot \Delta p}{l} = \frac{k \cdot F}{l \cdot A_B} = \frac{k \cdot m \cdot g}{l \cdot A_B} \quad (5)$$

(4a) eingesetzt in (5) ergibt

$$\frac{V_w}{l \cdot A_B} = \frac{k \cdot \psi \cdot V_B}{l \cdot A_B \cdot \Delta h} = \frac{k \cdot W}{l \cdot A_B \cdot \Delta h} = \frac{k \cdot m \cdot g \cdot \Delta h}{l \cdot A_B \cdot \Delta h} = \frac{k \cdot V \cdot \rho \cdot g}{l \cdot A_B} = \frac{k \cdot A_B \cdot \Delta h \cdot \rho \cdot g}{l \cdot A_B} = k \cdot \sin \alpha \cdot \rho \cdot g. \quad (6)$$

mit k_B = Boden, w = Wasser und $k = k_D$.

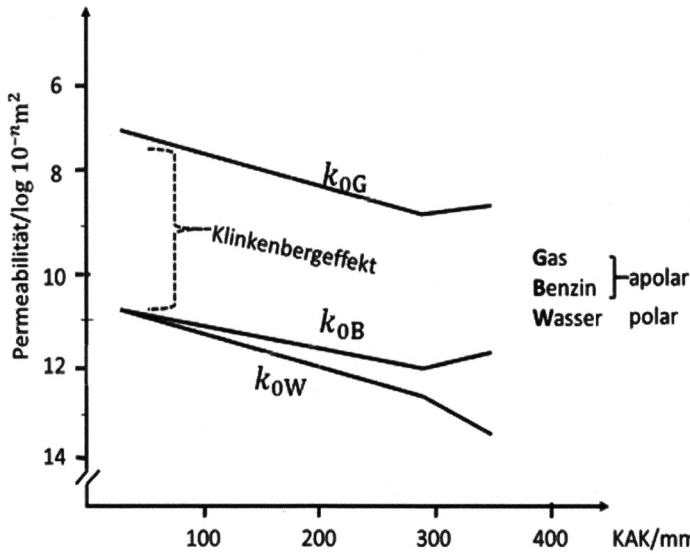


Abb. 1: Beziehung zwischen Permeabilität k_0 und Kationenaustauschkapazität KAK der Matrix
Relation between the permeability k_0 and the cation exchange capacity KAK of porous media

2.4 Bedeutung der elektrischen Doppelschicht bei elektrisch geladenem Festkörper

Die Permeabilität k_0 ist in der Abbildung 1 druck- und viskositätsnormiert dargestellt. Der parallele Verlauf von k_{0B} (Benzin) und k_{0L} (Luft) (beides apolare Fluide) ist der Reibung an den Grenzflächen zwischen Fluid und Festsubstanz geschuldet, die bei Benzin $\gg 0$ und bei Gas $= 0$ ist, was zu unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten führt (Klinkenbergeffekt). Die Fluidität von Wasser k_{0W} sinkt mit zunehmender Kationen-Austausch-Kapazität (KAK/Mol·m⁻³), bedingt durch elektrostatische Bindung starr eingeregelter Wasserdipole an der Matrix. Wird $r_B^2 = k_{0B} = 100$ gesetzt, ist $k_{0B} = k_{0W}$ bei Sand (Tongehalt 3 %, KAK 19 Mol·m⁻³), sinkt bei Lehm (Tongehalt 33 %, KAK 295 Mol·m⁻³) auf 25 % und Ton (Tongehalt 50 %, KAK 345 Mol·m⁻³) auf 3 %. In Gleichung (2) ist also r^2 durch $\Delta r^2 \triangleq \Delta k_0 = k_{0B} - k_{0W}$ zu ersetzen.

Die Reibung strömenden Wassers in Poren beträgt an der Grenzschicht zur festen Phase $\mu_a = \infty$, bedingt durch die oben beschriebenen elektrostatischen Bindungskräfte, einer zur Porenmitte hin abnehmenden Reibung der Wasserdipole in der diffusen Doppelschicht

sowie der inneren Reibung des Wassers $\frac{1}{\eta}$, die mit einem Reibungsbeiwert $\frac{1}{\mu_1}$ wie folgt zusammenhängt:

$$\mu_i = \frac{1}{\rho \cdot g \cdot d \cdot t} \cdot \eta, \text{ errechnet aus } F_{R\mu} = \mu_i \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta d} = F_{R\eta}$$

mit Dichte des Wassers $\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, Erdbeschleunigung $g/10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, Dicke einer Molekülschicht d/m , Zeit t/s , Masse m/kg , Gefällewinkel $\alpha/-$, Differenz der Geschwindigkeit zwischen Molekülschichten $\Delta v/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ und der Reibungskraft $F_{R\eta}/\text{N}$.

2.5 Schlussfolgerungen

- Die Einheit von k_D ist konsistent, unabhängig ob über (3), (4) oder (6) hergeleitet.
- Die „neuen“ k_D -Werte sind numerisch um vier Potenzen niedriger als die bis dato in der Literatur zitierten.
- k_D -Werte müssen auf 20 °C normiert angegeben werden.
- Die elektrostatische Eigenschaft einer Matrix beeinflusst durch Bildung einer starren und diffusen Doppelschicht des Wassers als polarem Fluid auf der Oberfläche der Matrix dessen Fließeigenschaften (SCHWEIKLE 1982: 15-24).
- Bei der Berechnung von Äquivalentporenradien aus k_{0W} wird elektrostatisch gebundenes Wasser der Festsubstanz zugerechnet.
- Bodenphysikalische Kennwerte wie Dichte, Raumgewicht, Poren- und Substanzvolumen sowie Feld- und Totwasserkapazität sind damit nicht nur bei Torfen, sondern auch bei Mineralböden mit > 15 % Tongehalt fragwürdig.
- Bei Torfen mit Kationenaustauschkapazitäten vom drei- bis achtfachen von tonigen Mineralböden dürfte der durchströmbare Porenquerschnitt $\ll 0,1 \%$ betragen. Damit ist das Katotelm für Wasser undurchlässig. Der Vollständigkeit halber sei darauf verwiesen, dass
 - ✓ k_D in Torfen auch vom Quellungsstatus der Matrix abhängt (für Tone siehe SCHWEIKLE 1982).
 - ✓ als Bezugsgröße das Bodenvolumen V/m^3 durch die Bodenmasse m/kg ersetzt werden muss, wenn sich das Bodenvolumen deutlich verändert. Es sei denn ein Referenzvolumen wird definiert, das bei Schrumpfung Atmosphäre beinhaltet. Anderenfalls wird gegen das Gesetz von der Erhaltung der Energie verstoßen.

3. Struktur des darcyschen Strömungsgesetzes

Physikalische Gesetze besitzen eine Struktur in der physikalische Basisgrößen (Länge, Zeit, Masse, Temperatur u. A.) zu abgeleiteten Größen (Kraft, Druck, Geschwindigkeit u. A., hier: Zielgröße, Materialgröße und Einflussgröße) zusammengesetzt werden. Elemente einer zusammengesetzten Größe dürfen nicht, wie in der Mathematik erlaubt, ohne Begründung in eine andere zusammengesetzte Größe verschoben werden (Abb. 2).

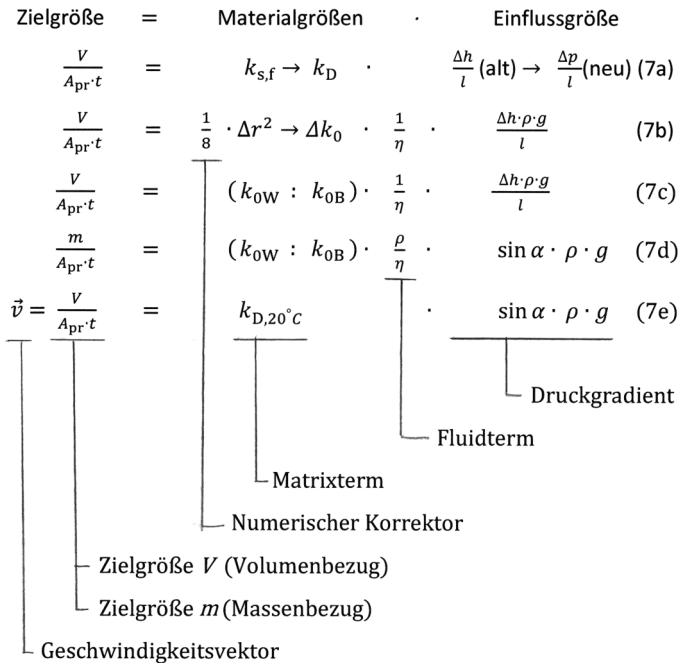


Abb. 2: Struktur des Strömungsgesetzes von Darcy mit Modifikationen
 Structure of the law of water flow of Darcy with modifications

Hinweise zum Gesetz:

- (7a): Empfohlene Indizierung der Wasserleitfähigkeit k_D statt k_f oder k_s , „(alt)“ heißt im Sinne des in Kapitel 2 zitierten Gesetzes „amtlich nicht mehr zulässig“.
- (7b/7c): Empfohlene Indizierung der Permeabilität: nicht $\frac{1}{8} \Delta r^2$, sondern Δk_0 , weil Δk_0 bei Bodenproben auch den Anteil der Porenfläche an der Probenfläche, die Porengrößenverteilung, die Gewundenheit der Poren (Tortuosität) und die Porenformen im Boden, die alles andere als kreisrund sind, beinhaltet.
- (7d): q aus dem Druckterm in den Fluidterm zu verschieben ist zwar mathematisch möglich, aber physikalisch nicht sinnvoll, da dann dem Druckterm ein ihn definierendes Element fehlt. Will man die Veränderung des Wasservolumens V durch Temperaturänderung (je $^\circ C$ $0,00011 \frac{kg}{dm^3}$) bei der Zielgröße berücksichtigen, kann V durch m ($q = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{q}$) ersetzt werden. Verschieben von q in den Zähler des Fluidterms ergibt $\frac{q}{\eta} = \frac{1}{\nu}$ mit $\nu = \frac{mm^2}{s}$ (kinematische Viskosität).
- (7e): Der Geschwindigkeitsvektor beschreibt die tatsächliche Strömungsgeschwindigkeit des Wassers im Torf/Boden nicht, aber die Richtung der Strömung und den Wassertransport durch einen Bezugs-Bodenquerschnitt. \vec{v} wird durch zu viele Effekte bestimmt. Beträgt z. B. die Porenfläche 50 % der Probenfläche, dann ist die tatsächliche

Strömungsgeschwindigkeit doppelt so groß wie die errechnete und es gilt $2 \cdot k_{D,20^\circ\text{C}}$, bzw. $k_{D,20^\circ\text{C}} \cdot \frac{A_{\text{bo}}}{A_{\text{po}}}$. Allerdings ist diese Korrektur lt. Kapitel 2 nicht immer möglich, weil $\frac{A_{\text{bo}}}{A_{\text{po}}}$ oft nicht bestimmbar.

Versickert Wasser ist $\alpha = 90^\circ$ und $\sin \alpha = 1$. Strömt Wasser parallel zum Gefälle ist $\sin \alpha < 1$ und > 0 . Sind beide Strömungsrichtungen möglich, ist $\frac{\vec{v}_x}{\vec{v}_z}$ ein Hinweis auf Höhe und Richtung der Abflüsse.

Bei radialem Fließen im Gefälle muss \vec{v}_x mit der Kontinuitätsgleichung erweitert werden. Höhe und Verteilung der Niederschläge erfordern Zeit und Gefälle abhängige Berechnungen. $\vec{v}_g = \vec{v}_z + \vec{v}_x$ ($_g$ = Gesamtabfluss, $_z$ = Sickerung, $_x$ = lateraler Abfluss) ist die Vektorsumme der Strömungsrichtungen und auch der Volumenströmung des Wassers, die in die allgemeine Wasserhaushaltsbilanz „Zufuhr (Zufluss, Niederschläge usw.) – Abfuhr (Abfluss, Evapotranspiration, usw.) \pm Vorratsänderung = 0“ , Flächen bezogen, einzubinden sind. (7e) liefert die physikalischen Grundlagen hydrogenetischer Moortypen.

Exkurs zu (7e): Bei offenen Gerinnen (Fließgewässern, wie Flüssen, Bächen und Gräben) werden i.d.R. empirische Strömungsgleichungen verwendet, die nicht alle die Viskosität des Wassers berücksichtigen. Gleichung (7e) ist nicht verwendbar, obwohl Druckgradient und Fluidterm gleich sind. Die Abstände zu geladenen Oberflächen in Bezug auf den fließenden Wasserkörper sind groß. Trotzdem wird die Menge des strömenden Wasservolumens beeinflusst durch die Kontaktfläche zwischen Wasser und benetztem Gerinnebett und deren Eigenschaften ($k_{D,20^\circ\text{C}}$), wie dem Querschnitt A des Gerinnes sowie der Art der Strömung, die mit höherer Geschwindigkeit turbulent wird. Dadurch steigt der Strömungswiderstand, was aber nach Reynolds korrigierbar wäre. Es gibt für $V = f(A, k_{D,20^\circ\text{C}})$ und $A = f(k_{D,20^\circ\text{C}})$, d. h. V und $k_{D,20^\circ\text{C}}$ hängen voneinander ab, keine einem physikalischen Gesetz folgende Lösung.

4. Mittelwert des Materialkoeffizienten k_D der Wasserleitfähigkeit von Torf

Parallel (nebeneinander liegend) $\bar{k}_D = \frac{1}{n} (k_1 + \dots + k_n)$

in Reihe (hintereinander liegend) $\bar{k}_D = \frac{\sum m_n}{\frac{m_1}{k_1} + \dots + \frac{m_n}{k_n}}$

mit Schicht-/Horizontmächtigkeit m/m , k_D und Schichten von $i-n$.

Mittelwertbildung von k_D (SCHWEIKLE 2016) ist nur nach obigen Vorgaben richtig.

Die Berechnung von geometrischen Mittelwerten von k_D ist immer falsch (Ausnahme: geringe Streuung von Messwerten).

Zitieren errechneter arithmetischer Mittel und grafische Darstellung der Verteilung der Streuung, als Boxplot mit Quantilen oder Punktwolken in Diagrammen, sind die alternative Präsentation von k_D

5. Schlussbetrachtung

Weitere Einschränkungen des darcyschen Gesetzes können den Lehrbüchern von HILLEL (1980) und BLUME et al. (1995, 2010) entnommen werden. Einzelergebnisse sind in den Kapiteln aufgeführt.

Das darcysche Gesetz in der Form der Gleichung (7e) ist für die Beschreibung der Wasserbewegung in Moor und Torf völlig ausreichend, auch wenn es i.d.R. die tatsächliche Strömung in Poren nicht beschreibt und als Bezugsbasis den Proben- und nicht den Porenquerschnitt verwendet.

Faszinierend ist der Einfluss molekularer Effekte zwischen Torfsubstanz und Wasser und zwischen Wassermolekülen, die die Strömungsrate bestimmen und durch $\mu_i = \frac{1}{\rho \cdot g \cdot d \cdot t} \cdot \eta$ darstellbar ist.

6. Literaturverzeichnis

BLUME, H.-P., FELIX-HENNINGSSEN, P., FREDE, H.-G., GUGGENBERGER, G., HORN, G. & STAHR, K. (Hrsg.) (1995): Handbuch der Bodenkunde; Weinheim (Wiley-VCH).

BLUME, H.-P., BRÜMMER, G., HORN, R., KANDELER, E., KÖGEL-KNABNER, I., KRETSCHMAR, R., STAHR, K. & WILKE, B.-M. (2010) (Hrsg.): Scheffer/Schachtschabel: Lehrbuch der Bodenkunde; Heidelberg (Spektrum).

HILLEL, D. (1980): Fundamentals of soil physics; Cambridge, Massachusetts, USA (Academic Press).

KUCHLING, H. (2011): Taschenbuch der Physik; München (Hanser).

SCHWEIKLE, V. (1982): Gefügeeigenschaften von Tonböden. – Hohenheimer Arbeiten Heft 117: 79 S.; Ulmer (Stuttgart) (siehe hier weitere Literatur).

SCHWEIKLE V. (2012): Der Einfluss der Temperatur auf k im Strömungsgesetz von Darcy. – Telma 42: 77-80; Hannover.

SCHWEIKLE, V. (2016): Diskussion des Mittelwerts der Wasserleitfähigkeit k in Torfen. – Telma 46: 213-216; Hannover.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. V. Schweikle
Ebertstraße 12a
D-69190 Walldorf
E-Mail: volker.schweikle@gmail.com

Erratum: In Kapitel 3, Abbildung 2, Gleichung 7c und 7d muss der Term $\frac{k_{0W}}{k_{0B}}$ ersetzt werden durch k_{0W} ; (weil $k_{0W} = k_{0B} - k_{0WDi}$, mit D_i = Anteil am Querschnitt des als Dipole an einer geladenen Torfoberfläche gebundenen Wassers).

Manuskript eingegangen am 15. Mai 2017

