

ZEITSCHRIFT
FÜR
GEOPHYSIK

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

W. Dieminger, Lindau über Northeim

unter Mitwirkung von *B. Brockamp*, Münster i. W. — *A. Defant*, Innsbruck — *W. Hiller*, Stuttgart
K. Jung, Kiel — *O. Meyer*, Hamburg — *F. Möller*, München — *H. Reich*, Göttingen.

Jahrgang 27

1961

Heft 6



PHYSICA - VERLAG · WÜRZBURG

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|--|-----|
| <i>Lucke O., Chr.-U. Wagner:</i> Die dynamischen Gleichungen in der Magnetosphäre II | 257 |
| <i>Prakash Prem:</i> A residual method | 275 |
| <i>Homilius J.:</i> Über die Auswertung geoelektrischer Sondierungskurven im Falle eines vielfach geschichteten Untergrundes | 282 |
| <i>Coroniti S. C., H. Dolezalek, H. Israël:</i> On the Electrical Feature of the Upper Stratosphere of Mesosphere | 301 |

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 40,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu nummerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die *Zeitschrift für Geophysik* bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Walter Dieminger, Max-Planck-Institut für Aeronomie, Lindau über Northeim (Hann.)

Anschrift der *Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80, Postscheck: Hamburg Nr. 559 83

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Benachrichtigung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Münzstr. 12. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing und Hildgund Holler, sämtlich Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler, und Charl. Kuhnert, beide Würzburg.

Druckerei: Bonitas-Bauer, Graphische Anstalt Würzburg

Printed in Germany



PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1961

Die dynamischen Gleichungen in der Magnetosphäre II

von O. Lucke und Chr.-U. Wagner, Potsdam ¹⁾

Zusammenfassung: Für das Plasma in der Magnetosphäre wird ein Kontinuumsmodell entwickelt, das zur Erklärung der Abweichungen des gemessenen Magnetfeldes vom theoretisch extrapolierten Verlauf dienen soll. Um die dynamischen Gleichungen des Plasmas aufstellen zu können, muß die magnetische Induktion an einem beliebigen Aufpunkt in der Magnetosphäre berechnet werden. Das geschieht in zwei Näherungen: Als erste Näherung wird ein Magnetosphärenkontinuum betrachtet, das nach allen Seiten unendlich ausgedehnt ist. Diese Näherung liefert als Grenzbedingung der Magnetosphäre $e_1 = 1/2 e_m$. Als zweite Näherung wird ein Plasma mit konstanter Permeabilität im Dipolfeld der Erde unter Berücksichtigung kollektiver magnetischer Wechselwirkungen behandelt. Es wird gezeigt, daß die Suszeptibilität stark von der Gestalt der Modell-Magnetosphäre abhängt, m. a. W. daß die Einführung eines Entmagnetisierungsfaktors notwendig wird. Eine Verkleinerung des Magnetfeldes erfolgt nicht nur durch den Diamagnetismus, sondern auch durch die in den VAN ALLEN Gürteln fließenden Ringströme. Es werden Gleichungen hergeleitet, aus denen sich als Spezialfall die von E. N. PARKER angegebenen Beziehungen ergeben. Zum Abschluß folgt eine erste Behandlung der beim Ausfließen der Strahlungsgürtel auftretenden Mechanismen.

Summary: A continuous model of the plasma in the magnetosphere is developed in order to explain the deviations between theoretically extrapolated and measured values of the magnetic field within the magnetosphere. To give dynamical equations of this plasma it is necessary to calculate the value of the magnetic field at any point within the magnetosphere. We have calculated two approximations. In the first one the model-magnetosphere is treated as an infinitely extended medium. Then we found the equation $e_1 = 1/2 e_m$ to be a limitation condition of the magnetosphere. As a second approximation a plasma with constant permeability is treated as being within the earth's dipole field. Collective magnetic interactions are taken into account. It is shown, that there is a great dependence of the susceptibility on the shape of the model-magnetosphere. But the reduction of the magnetic field is not only due to diamagnetism but also to the ring-currents, flowing within the VAN ALLEN radiation belts. For ring-currents equations are derived, which contain as a special case those, which were found by E. N. PARKER. Finally mechanism are treated, which occur in connection with the dropping-out-process of the radiation belts.

1. Einleitung

In dem folgenden Aufsatz werden die Ausführungen über die Dynamik des Gases in der Magnetosphäre des I. Teils dieser Arbeit ([1], [2]) ergänzt und verbessert.

¹⁾ O. LUCKE und Chr.-U. WAGNER, Potsdam, Telegrafenberg, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Geomagnetisches Institut Potsdam. Mitteilung Nr. 115.

Das Ziel ist, die dynamischen Gleichungen abzuleiten und auf einige erste Anwendungen hinzuweisen. Dabei wird ein Modell mit einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion entwickelt, das den EULERSCHEN Vorstellungen in der Dynamik einer Flüssigkeit entspricht. Auf die exakte Formulierung dieses Modells wird Wert gelegt.

Es wird wiederum vorausgesetzt, daß das Gas der Magnetosphäre (d. i. die hohe Atmosphäre über 1000 km Höhe) einen wesentlichen Anteil von Protonen und Elektronen enthält. In ihren untersten Schichten scheinen in der Plasmakomponente allerdings ionisierte Sauerstoffatome vorzuherrschen [3] [4]. Ein Teil der Protonen und Elektronen mit relativ hohen Translationsenergien E kann verhältnismäßig leicht mit Hilfe von Ionisationskammern und Zählrohren festgestellt werden [5]; er bildet die VAN ALLENSCHEN Strahlungsgürtel der Erde. Zwischen $r = 8000$ und $r = 13000$ km Entfernung vom Erdmittelpunkt aus findet man den P_1 -Gürtel, der hauptsächlich aus schnellen Protonen besteht. Weiter draußen liegen mit den beiden Maxima bei etwa $r = 15000$ km und $r = 22000$ km die Elektronengürtel E_2 und E_3 . Die wechselnde Teilchendichte besonders des äußeren von ihnen dürfte mit dem Mechanismus der Entstehung der starken Polarlichter zusammenhängen [6]. Man nimmt neuerdings an, daß diese Regionen zwischen 10 und 10^5 Ionen (oder Elektronen) im Kubikzentimeter enthalten und die Geokorona bilden. Zwischen $r = 55000$ und $r = 75000$ km ($f = r/a_0 = 9$ bis 12) wurde auch ein Gebiet erhöhter Teilchenkonzentration, das Elektron mit $E > 200$ eV enthält, festgestellt [7]. Wahrscheinlich handelte es sich um eine Plasmawolke mit eigenem Magnetfeld und eingefangenen schnellen Teilchen. Die Existenz solcher Wolken ist auch sonst im interplanetarischen Raum festgestellt worden. Im übrigen enthält das interplanetarische Gas jenseits der Geokorona sicher weniger als 100 Ionen/cm³ im Durchschnitt. Unter dem Druck der anlaufenden Plasmastrahlung der Sonne ist es jenseits 10 Erdradien ständig in Schwingungen begriffen, die die Ursache der geomagnetischen Pulsationen bilden dürften. Nach den bisherigen Messungen erstreckt sich diese Zone zwischen $f = 10$ und $f = 15$, während zwischen $f = 5$ und $f = 10$ systematische Abweichungen des Magnetfeldes vom extrapolierten Feld an der Erdoberfläche vorkommen [5].

Die Partikeldichte in der Magnetosphäre unterhalb 10 Erdradien dürfte im allgemeinen räumlich und zeitlich langsam (bezüglich der Gyrofrequenz) veränderlich und das Plasma quasineutral sein, wenn man von Plasmaschwingungen absieht.

Nach Formel (23) im I. Teil der Arbeit

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_e \langle w_0^2 \rangle}{3 n_e q_e^2}}$$

hat die DEBYESCHE Länge für BOLTZMANN-Teilchen mit Dichten zwischen

$$n_e = 10 \text{ bis } n_e = 10^5 \left[\frac{1}{\text{cm}^3} \right] \text{ und } \langle w_e^2 \rangle = 10^{12} \text{ [m}^2/\text{s}^2] \text{ die}$$

$$\text{Werte} \quad \lambda_D = 300 \text{ bis } 3 \text{ [cm]}$$

Diese Längen sind sehr klein gegenüber den Gebieten, die in den anschließenden Ausführungen betrachtet werden sollen.

2. Problemstellung

In der vorliegenden Betrachtung sollen die dynamischen Gleichungen des Plasmas hergeleitet und die Abweichungen des gemessenen vom theoretisch extrapolierten Magnetfeld gedeutet werden. Um die auf ein kleines Plasmavolumen wirkende Kraft angeben zu können, ist eine Berechnung der magnetischen Induktion an einem beliebigen Aufpunkt innerhalb der Magnetosphäre erforderlich. Mit dieser Aufgabenstellung kommt man an eine der Grenzen der klassischen Elektrodynamik, da die Größen magnetische Feldstärke \mathfrak{H} , magnetische Induktion \mathfrak{B} und Magnetisierung \mathfrak{M} im Kontinuumsbild erklärt sind, während ein tieferes Verständnis der magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Medien nur im Partikelbild erfolgen kann.

Unsere eingefangenen Teilchen stellen ein diamagnetisches Medium dar, das wieder durch Modellpartikel (siehe [1]) angenähert werden soll.

Man muß zwei Aufgabenstellungen korrekt voneinander trennen: Einmal kann man \mathfrak{B} und die magnetische Suszeptibilität für einen Punkt innerhalb der Magnetosphäre berechnen. Beide Größen ändern sich dann von Ort zu Ort. Man könnte von einer „inneren Suszeptibilität“ sprechen. Zum anderen kann man berechnen, wie das diamagnetische Medium „Magnetosphäre“ als Ganzes das Magnetfeld außerhalb der Strahlungsgürtel verzerrt. Dabei muß der gesamten Magnetosphäre eine Permeabilität zugeordnet werden. Auch in der klassischen Elektrodynamik wird bei der Untersuchung der magnetischen Eigenschaften der Stoffe als Gedankenexperiment ein Schnitt zwischen Partikel- und Kontinuumsmodell gemacht. Hier kann man aber auf Grund der großen Dimensionen das Magnetfeld im Inneren der Magnetosphäre direkt messen.

Die Berechnung von \mathfrak{B} innerhalb der Magnetosphäre erfolgt in drei Schritten: Zunächst wird das Modellpartikelgas durch ein entsprechendes Kontinuum ersetzt. Zur Berechnung einer nullten Näherung wird ein derartiges Kontinuum betrachtet, das aber nach allen Seiten unendlich ausgedehnt ist. Zum Abschluß wird dann das diamagnetische Medium im Dipolfeld der Erde behandelt. Daran schließt sich eine Behandlung der dynamischen Gleichungen und einiger erster Schlußfolgerungen an.

3. Modell einer kontinuierlichen, unendlich ausgedehnten Magnetosphäre

Dem Gedankenmodell liegt die in [1] beschriebene Vorstellung der Modellpartikel der Magnetosphäre zugrunde.

$$\vec{m}_{a\nu} = \frac{1}{2} \frac{m_a \omega_{a1\nu}^2}{B} = \frac{m_a (\omega_{a\nu}^2 - \omega_{a\Pi\nu}^2)}{2B} \quad (2)$$

für das ν -te eingefangene Teilchen der Sorte "a" ($a = e, p$) ist eine Bewegungs-invariante. Die Modellpartikel soll außer der Masse $m_{a\nu}$ und der elektrischen Ladung $\pm q_e$ das magnetische Moment $m_{a\nu}$ haben. Ihre Lage im ξ, t -Raum soll das Führungszentrum der kleinen Kreisbewegung sein, die durch Projektion der wirklichen Bewegung auf eine zur Feldlinientangente senkrechte Ebene entsteht. Wir betrachten ein kleines Volumen $\Delta\gamma$ in der Umgebung des Punktes ξ, w im 6-dimensionalen Phasenraum γ . Die momentane Verteilung der Modellpartikel in ihm werde durch die unstetige Verteilungsfunktion $F_{\Delta\gamma}^{(a)}(\xi^F, w^F)$ der Partikel der "a"-ten Sorte gekennzeichnet. Wir gehen zu einem Kontinuumsmodell durch die Einführung der Verteilungsdichtefunktion $f_a(\xi', w)$ über. Das geschieht durch die folgende Gleichung

$$F_{\Delta\gamma}^{(a)}(\xi, w) = \int f_a(\xi', w') d^3w' d^3x' \quad (3)$$

$f_a(\xi', w', t)$ sei eine stetig differenzierbare Funktion ihrer Argumente. Wenn N_b die Anzahl der Modellpartikel der Sorte "b" ist, wird eine kontinuierliche Belegung \mathfrak{N} durch die folgende Gleichung eingeführt

$$\begin{aligned} \sum_b \sum_{\nu=1}^{N_b} \vec{m}_{b\nu} &= \sum_b \int_A \int_\gamma f'_b(\xi', w', t) \vec{m}_b d^3x' d^3w' = \sum_b \int_{\Delta\gamma} n'_b \langle \vec{m} \rangle_b d^3x' \\ &= \int_{\Delta V} \sum_b n'_b \langle \vec{m} \rangle_b d^3x' = \int_{\Delta V} \mathfrak{N} d^3x = \Delta V \mathfrak{N} \end{aligned} \quad (4a)$$

Dabei bedeuten: ΔV die Projektion von $\Delta\gamma$ in den geometrischen Raum, $b = p, e$, ξ' den Quellpunktsvektor, w' den entsprechenden Vektor im Geschwindigkeitsraum, $\langle \vec{m} \rangle_b$ das durchschnittliche magnetische Moment einer Partikel der Sorte "b" in ΔV und $f'(\xi', w, t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, eine Modellpartikel mit dem durchschnittlichen Moment \vec{m}'_b im Punkte ξ', w' zur Zeit t zu finden. Es gelten

$$\int f'_b d^3w' = n'_b \quad (4b)$$

und allgemein für ein beliebiges Θ

$$\int f'_b \Theta d^3w' = n'_b \langle \Theta \rangle_b \quad (4c)$$

Statt (2) ist zu schreiben

$$|m_a(r)| = \frac{m_a \omega_a^2 r_1}{2B}, \quad (4c)$$

wobei ω_{a1} die mittlere Geschwindigkeitskomponente der Partikel der Sorte „a“ ist.

Die linearen Abmessungen des Volumens ΔV sollen ein Vielfaches der DEBYESCHEN Länge sein. Innerhalb dieses Volumens soll \mathfrak{M} ortsunabhängig sein.

Wir betrachten zunächst ein unendlich ausgedehntes Medium, das aus den oben definierten Modellpartikeln besteht.

Für das Plasma in einem kleinen Volumenelement ΔV sollen die Bewegungsgleichungen aufgestellt werden. Dazu muß das Magnetfeld genauer betrachtet werden, das auf dieses Volumen mit kontinuierlicher Magnetisierung wirksam wird. Es sei

$$\mathfrak{B}_0 = \mu_0 \mathfrak{H}$$

das Magnetfeld, das oberhalb 1000 km Höhe in der Atmosphäre herrschen würde, wenn kein Plasma vorhanden wäre. In dem kontinuierlichen Bild der physikalischen Verhältnisse in der unendlich ausgedehnten Modellmagnetosphäre, das hier entwickelt wurde, gilt nach [9] die Definitionsgleichung für die Magnetisierung

$$\frac{1}{\mu_0} \mathfrak{B} = \mathfrak{M} + \mathfrak{H} \text{ oder } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mu_0 \mathfrak{M} \quad (5a)$$

Aus (4 a) und (4 c) folgt

$$\mathfrak{B} \mathfrak{M} = - \frac{1}{2} \sum_a n_a m_a \omega_a^2 r_1 = - e_1 \quad (5b)$$

Diese Beziehungen werden benutzt, um \mathfrak{B} und \mathfrak{M} in Abhängigkeit von \mathfrak{B}_0 und e_1 darzustellen. \mathfrak{M} ist entgegengesetzt zu \mathfrak{B} gerichtet, die Energiedichte aber positiv.

Der Summationsbuchstabe a in (5 b) bezeichnet ebenso wie b die Summation über p und e . Er wird verwendet, wenn es sich um eine Summation im Aufpunkt handelt, während b für Summationen im Quellpunkt benutzt wird. Man erhält aus (5 a, b)

$$\mathfrak{B} = {}^0\mu \mathfrak{B}_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - 2 \varepsilon} + 1 \right) \mathfrak{B}_0 \quad (6a)$$

mit
$$\varepsilon = \frac{e_1}{e_m}, \quad e_m = \frac{\mathfrak{B}_0^2}{2\mu_0}$$

und weiter mit
$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\mu_0} {}^0\chi_m \mathfrak{B}_0$$

$${}^0\chi_m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - 2\varepsilon} - 1 \right) \quad (6b)$$

${}^0\mu'$ ist die relative Permeabilität des Gases in der unendlich ausgedehnten Modellmagnetosphäre, ${}^0\chi_m$ seine Suszeptibilität. Für kleine ε gelten:

$${}^0\mu' = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad {}^0\chi_m = \frac{\varepsilon}{2}$$

Offenbar kann in dieser Näherung ε höchstens den Wert $1/2$ annehmen. Wenn $e_1 > \frac{1}{2} e_m$ wird, können die Plasmateilchen nicht mehr als eingefangen gelten, d. h. sie sind keine Modellpartikel mehr.

4. Das Feld der magnetischen Induktion in der Magnetosphäre

Die in 3. behandelte Näherung ist sehr schlecht. Das sieht man insbesondere auch daran, daß die Wirkung der umliegenden Teilchen für einen Punkt in der Magnetosphäre keineswegs in allen Richtungen gleich groß ist. Sie hängt vielmehr sehr stark von der Lage des Punktes und damit von der Gestalt unseres diamagnetischen Mediums „Magnetosphäre“ ab. Um diese Abhängigkeit zu erfassen, soll im folgenden versucht werden, das Magnetfeld innerhalb eines Plasmas zu berechnen, das die Gestalt der Magnetosphäre hat. Die magnetische Induktion setzt sich aus einem äußeren Anteil \mathfrak{B}_0 zusammen, in den im wesentlichen das Dipolfeld der Erde eingeht (außerdem der von ionosphärischen und großräumigen Stromsystemen herrührende Anteil) und aus einem von den Partikeln herrührenden Anteil.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \sum_b \iint_{d\gamma} f'_b \mathfrak{B}_b d^3x' d^3w' = \mathfrak{B}_0 + \sum_b \int n'_b \langle \mathfrak{B} \rangle_b d^3x' = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 \quad (7)$$

Um diese Zusammensetzung besser zu durchleuchten, soll die Kraft auf ein geladenes Teilchen betrachtet werden.

Um die Beschleunigung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Felde zu erfassen, hat man zu setzen [8]

$$m_a b_a q_{ea} \left[\mathfrak{E}_0 + v_a \times \mathfrak{B}_0 + \sum_b \iint \frac{f_{ab}}{f_a} (\mathfrak{E}_b + v_a \times \mathfrak{B}_b) d^3w' d^3x' \right] \quad (8)$$

$\frac{f_{ab}}{f_a}$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte für die folgende Abhängigkeit: Wenn sich ein Partikel der Sorte „a“ im Punkte r , w befindet, ist auch gleichzeitig ein Partikel der Sorte „b“ im Punkte r' , w' zu finden (r' bezeichnet den „Quellpunkt“).

Nach Voraussetzung soll die COULOMB-Streuung, also die individuelle elektrostatische Wechselwirkung der Partikel vernachlässigt werden. Auch die kollektive elektrostatische Wechselwirkung soll unberücksichtigt bleiben, da angenommen wird, daß die Dimensionen der benutzten Volumenelemente immer sehr groß gegenüber den Wellenlängen der eventuell angeregten Plasmaschwingungen sind. Die Kreisfrequenz dieser Schwingungen ist bekanntlich

$$\omega_p = \sqrt{\frac{q e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}$$

und ihre Wellenlängen größer als λ_D [10a], wobei nach (1) gilt

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\langle w_e^2 \rangle}{3 \omega_p^2}}.$$

Für λ_p gilt sicher

$$\lambda_p < \frac{c_0}{\omega_p}$$

wobei c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Diese obere Grenze hat für

$$n_e = 10^5 \left[\frac{1}{\text{cm}^3} \right] \quad \text{den Wert } 15,6 \text{ m, für } n_e = 10 \left[\frac{1}{\text{cm}^3} \right] \quad 1,56 \text{ km.}$$

Wir machen daher für die folgenden Ausführungen die Annahme $\mathcal{E} = 0$. Nur für sehr schnell ablaufende Vorgänge, z. B. die in der Stoßfront ist die Annahme nicht gerechtfertigt.

Statt \mathcal{B}_0 wird nun nach (7) das Feld \mathcal{B} eingeführt, das man im Punkte \mathfrak{r} messen würde. Man erhält dann für (8)

$$m_a b_a = q e a \left[v_a \times \mathcal{B} \right] + q e a \left[v_a \times \iint \frac{f_{ab}^- f_a f_{b'}}{f_a} \mathcal{B}_b d^3 w' d^3 x' \right]. \quad (8a)$$

Der letzte Term stellt die Kraftdichte der mikroskopischen Wechselwirkungen der betrachteten Partikel dar. Nach den vorstehenden Ausführungen kann unter den gemachten Annahmen keine Korrelation zwischen den Besetzungen der Punkte \mathfrak{r} und \mathfrak{r}' durch Partikel bestehen. Deshalb gilt

$$f_{ab} - f_a f_{b'} \quad (9)$$

so daß der letzte Term von (8a) verschwindet.

\mathcal{B}_b in (7) ist das von einem Modellpartikel im Punkte \mathfrak{r} ausgespannte Feld. Daher ist anzusetzen

$$\mathfrak{B}_1 = -\mu_0 \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \sum_b V_m^{(b)}$$

mit

$$V_m^{(b)} = \frac{1}{4\pi} \int_M n_b \langle m \rangle_b \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}'} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} d^3 x', \quad (10b)$$

M soll andeuten, daß die Integration über das Gebiet der Magnetosphäre ausgewertet werden soll.

Es ist

$$\mu_0 \sum_b n_b \langle m \rangle_b = \mu_0 \mathfrak{M} = \chi_m \mathfrak{B}_0 \quad (10c)$$

so daß man schreiben kann:

$$\sum_b \mu_0 V_m^{(b)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_M \mathfrak{M} \cdot \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}'} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} d^3 x' = \frac{1}{4\pi} \int_M \chi_m \mathfrak{B}_0 \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}'} \frac{d^3 x'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \quad (10d)$$

Hierbei ist aber im Gegensatz zu 3. sowohl χ_m als auch \mathfrak{M} ortsabhängig. Man kann (10d) noch eine andere Form geben:

$$\sum_b \mu_0 V_m^{(b)} = \frac{1}{4\pi} \int_{A_M} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \chi_m \mathfrak{B}_0 \cdot d\mathfrak{S} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \mathfrak{B}_0 \cdot \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}'} \chi_m d^3 x', \quad (10e)$$

A_M ist die Oberfläche der Magnetosphäre, $d\mathfrak{S}$ ihr vektorielles Oberflächenelement. Für A_M wird folgende Annahme gemacht:

Die Magnetosphäre sei ein rotationssymmetrisches Gebilde. Ihre innere Begrenzungsfläche sei eine Kugel mit dem Radius

$$a_1 = a_0 f_1 \approx 1,2 \quad (a_0 = 6371 \text{ km} = \text{Erdradius})$$

Statt des wirklichen Feldes wird das Dipolfeld der Erde gesetzt. Es gilt

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}'} \mathfrak{B}_0 = 0$$

$$\mathfrak{B}_0 = \{B_{0r}, B_{0\vartheta}\} \text{ mit } B_{0r} = -\frac{2B_{00} \cos \vartheta}{f^3}, \quad B_{0\vartheta} = \frac{B_{00} \sin \vartheta}{f^3} \quad (11a)$$

in den Kugelkoordinaten des Dipols. $B_{00} = 3 \cdot 10^{-5} \frac{Wb}{m^2}$ ist die magnetische In-

duktion am geomagnetischen Äquator. Die äußere Begrenzungsfläche entstehe durch Rotation einer magnetischen Kraftlinie. Dort verschwindet das Oberflächenintegral in (10 e). Diese Kraftlinie sei so bestimmt, daß sie die Fläche der Kugel mit dem Radius a_1 bei ϑ_0 schneidet. Der Aufpunkt ξ liege in der Magnetosphäre. Um die Integration durchführen zu können, wird zunächst angenommen, daß

$$\mathfrak{B}_0 \cdot \frac{\delta}{\delta \xi} \chi_m = 0 \quad (12a)$$

gelte. Dann verschwindet das Volumenintegral von (10e). Auf diese Annahme wird noch genauer eingegangen werden.

In Kugelkoordinaten gilt für die innere Oberfläche mit dem Radius a_1 :

$$\left| \frac{1}{\xi - \xi'} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{a_1^n}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') \quad (11b)$$

Die Kugelfunktionen seien nach AD. SCHMIDT normiert. Es gelte also

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\text{E.K.}} P_n^m(\cos \vartheta) P_\nu^\mu(\cos \vartheta) \frac{\cos m\varphi \cos \mu\varphi}{\sin m\varphi \sin \mu\varphi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2n+1} \quad (11a)$$

wenn $m = \mu$, $n = \nu$ ist.

Die Integration über φ gibt dann für (10 e)

$$\begin{aligned} \sum_b \mu_0 V_m^{(b)} &= - \int_{\pi-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') \chi_m \frac{\cos \vartheta'}{f_1^3} a_1^2 \sin \vartheta' d\vartheta \\ &= \frac{B_{00} a_0^2}{f_1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \frac{a_1^n}{r^{n+1}} \int_{-x_0}^{+x_0} \chi_m x' P_n(x') dx' \end{aligned} \quad (11d)$$

mit $x' = \cos \vartheta'$.

Die Voraussetzung $\mathfrak{B}_0 \cdot \frac{\delta}{\delta \xi} \chi_m = 0$ sagt noch nichts darüber aus, wie χ_m von den Koordinaten senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien abhängt. Um (11d) integrieren zu können, kann man etwa den Ansatz machen

$$\chi_m = \chi_{m0} = \text{const.} \quad (12)$$

wobei beispielsweise χ_{m0} die Suszeptibilität in der Ebene des geomagnetischen Äquators unabhängig von f ist. Auf die physikalische Bedeutung der Annahme (12) wird weiter unten eingegangen. Dann ist in (11d) das Integral

$$\int_{-x_0}^{x_0} x' P_n(x') dx'$$

auszurechnen. Man erhält:

| | | | | |
|---------------------------------|------------------------------|---|---|-----|
| n = 1 | 3 | 5 | 7 | ... |
| | | | | |
| $\left(\frac{2}{3}x_0^3\right)$ | $\left(x_0^5 - x_0^3\right)$ | $\left \frac{1}{4}(9x_0^7 - 14x_0^5 + 5x_0^3)\right $ | $\left \frac{1}{8}\left(\frac{143}{3}x_0^9 - 99x_0^7 + 63x_0^5 - \frac{35}{3}x_0^3\right)\right $ | |

Offenbar ergibt sich für alle ungeraden n außer für n = 1 der Grenzwert Null, wenn x₀ → 1. Aus der Gestalt der Strahlungsgürtel heraus ist es klar, daß nur

Werte von ϑ₀ in der Größenordnung $\frac{\pi}{8}$ (x₀ ≈ 0,92) interessant sind. Für eine

Überschlagsrechnung genügt es dann, allein den Term $\frac{2}{3} x_0^3$ zu berücksichtigen.

Man erhält:

$$\sum_b \mu_o V_m^{(b)} = \chi_{m0} \frac{B_{00} a_0^3}{3} x_0^3 \frac{\cos \vartheta}{r^2} \tag{13}$$

$$\mathfrak{B}_1 = - \frac{\delta}{\delta r} \sum_b \mu_o V_m^{(b)} = \chi_{m0} B_{00} \frac{a_0^3}{r^3} \left(\frac{2}{3} x_0^3\right) \left\{ 2 \cos \vartheta, \sin \vartheta \right\} \tag{14}$$

Für ϑ = 24,5° — das ist etwa die geomagnetische Poldistanz der Polarlichtzone — ergibt sich $\frac{2}{3} x_0^2 = \frac{1}{2}$.

Man gewinnt dann

$$\mathfrak{B}_1 = \chi_{m0} \mathfrak{B}_0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \mu_o N \mathfrak{M} \tag{14 a}$$

und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \frac{1}{2} \mu_o N \mathfrak{M} = \mathfrak{B}_0 + \mu_o N \mathfrak{M} \tag{14 b}$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß man für ein beliebig geformtes Medium die Definitionsgleichung (5 a) etwas abwandeln muß zu

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mu_o N \mathfrak{M}$$

N ist eine Art „Entmagnetisierungsfaktor“, der stark von der Gestalt des Mediums abhängt. N ist unter gewöhnlichen Bedingungen für diamagnetische Stoffe klein. Statt der Gleichungen (6a) und (6b) erhält man in dieser Näherung

$$\mathfrak{B} = {}^1\mu' \mathfrak{B}_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 2 N \varepsilon} \right) \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon} \right) \mathfrak{B}_0$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{\mu_0} {}^1\chi_{m0} \mathfrak{B}_0 \quad \text{mit } {}^1\chi_{m0} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - 2 N \varepsilon} \right) - 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \varepsilon} - 1 \right)$$

Die Vorstellung der Modellpartikel kann jetzt bis $\varepsilon = \varepsilon_M = \frac{1}{2N} = 1$ benutzt werden.

Es sei hier bemerkt, daß der Wert $\varepsilon_M = 1$ nach den Ausführungen vieler Autoren in der noch zu besprechenden hydromagnetischen Approximation die Grenzbedingung für das Plasma der Magnetosphäre darstellt [10].

In das Ergebnis (15) geht sehr stark die Voraussetzung (12) mit ein, nach der die magnetische Suszeptibilität eine Konstante sein soll. Damit hängt aber auch die örtliche Abhängigkeit von \mathfrak{N} nur noch vom Verlauf von \mathfrak{B}_0 ab.

Die Annahme $\chi_m = \text{const.}$ in der Magnetosphäre bedeutet dort $\varepsilon = \text{const.}$ Die transversale Partikelenergie müßte demnach von der Äquatorebene aus zu den geomagnetischen Polen hin zunehmen. Wir werden sehen, daß beim Gleichgewicht das Umgekehrte der Fall sein muß. Die Voraussetzung (12) ist für den Gleichgewichtsfall also sicher nicht richtig. Einige Tatsachen scheinen aber darauf hinzudeuten, daß die Voraussetzung $\varepsilon = \text{const.}$ für eine stark gestörte Magnetosphäre und ganz besonders für den Fall des Ausfließens der Gürtel erfüllt ist.

Wenn ε seinen Grenzwert erreicht, wird das ursprüngliche Feld auf die Hälfte seines Wertes reduziert. Dieser Effekt dürfte bei den Verzerrungen des erdmagnetischen Feldes, die in den Regionen bei $r = 50000$ km Erdentfernung festgestellt wurden, die Hauptrolle spielen und bei der Theorie der magnetischen Stürme bedeutsam werden. $\varepsilon_M = 1$ scheint die richtige Grenzbedingung für die Außenseite der Magnetosphäre zu sein. Diesem Wert würde der Entmagnetisierungsfaktor $\frac{1}{2}$ entsprechen. Ob die hydromagnetische Näherung für die Dynamik des Plasmas in der Magnetosphäre anwendbar ist, soll in den folgenden Ausführungen untersucht werden.

Vorher sei noch festgestellt, daß im I. Teil dieser Arbeit $N = \frac{1}{3}$ angenommen wurde, offenbar ohne ausreichende Begründung. Einige darauf aufgebaute Folgerungen sind deshalb nicht stichhaltig.

5. Zur Theorie der elektrischen Ringströme

Es sollen nun die dynamischen Gleichungen des Plasmas aufgestellt werden. Dabei werden gleichzeitig die in der Magnetosphäre fließenden elektrischen Ringströme untersucht. Diese wurden schon von C. STÖRMER angenommen, nur dürften ihre Entfernungen bedeutend geringer sein, als zu seiner Zeit postuliert wurde.

Da nur magnetische kollektive Wechselwirkungen zwischen den Modellpartikeln berücksichtigt werden sollen, wird die zeitliche Änderung der Verteilungsdichte der BOLTZMANN-Teilchen f_a durch das Liouvillesche Theorem beschrieben:

$$\frac{\delta f_a}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} (\mathbf{w} f_a) + \frac{\delta}{\delta \mathbf{w}} (\vec{b} f_a) = 0$$

Man bildet wieder wie im I. Teil das nullte und erste Moment im Geschwindigkeitsraum, macht aber für die Kraftdichte jetzt den folgenden Ansatz:

$$\sum_a m_a \int \vec{b}_a f_a d^3 w = \mathfrak{s} \times \mathfrak{B} - 2 e_{II} \frac{d \mathfrak{B}_0}{ds B_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} \mathfrak{N} \mathfrak{B} + 2 \sum_a q_a \vec{\Omega} \times \mathbf{w} \quad (17)$$

Dabei ist gemäß den im I. Teil dargestellten Voraussetzungen

$$\mathbf{w}_I = \mathbf{v}_a + \mathbf{w}_{II} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_a \ll \mathbf{w}_I \quad (18)$$

und

$$\mathfrak{s} = \sum_a \mathfrak{s}_a = \sum_a n_a q_{ae} \mathbf{v}_a \quad (19)$$

Der dritte Term, der die ponderomotorischen Kräfte darstellt, hat hier eine andere Gestalt als im I. Teil, die wie folgt begründet wird:

$\frac{1}{2} \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{B}$ ist die Dichte der Wechselwirkungsenergie der Modellpartikel mit dem magnetischen Feld. Ihr Gradient ist einem negativen Druckgradienten äquivalent. Der letzte Term von (19) ist die Corioliskraftdichte. Man kann zeigen, daß sie im allgemeinen, besonders in niederen Breiten, klein ist gegenüber den anderen Kräften. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} \varrho \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} \mathbf{v} \right) &= \frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} \mathfrak{p} + \sum_a n_a q_{ae} \mathbf{v}_a \times \mu' \mathfrak{B}_0 - 2 e_{II} \frac{d \mathfrak{B}_0}{ds B_0} \\ &\quad - \frac{1}{2 \mu_0} \frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{B}_0^2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Diese Gleichung steht an Stelle von (45) im I. Teil. \mathfrak{p} ist der dort definierte Spannungstensor.

Man überlegt sich leicht, daß im natürlichen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren \hat{t}^0 , \hat{n}^0 , \hat{b}^0 (Tangential-, Normal- und Binormalvektor der magnetischen Kraftlinien) nur diejenigen Elemente, die aus \mathfrak{B}_0 gebildet werden, wesentlich von Null verschieden sind. Deshalb gilt ungefähr

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} p \approx -2 \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} e_{\parallel}$$

Der Ausdruck $-\frac{1}{2\mu_0} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{B}_0^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} e_{\perp}$ ist unabhängig vom benutzten Modell.

Wenn man wieder die konvektive Beschleunigung vernachlässigt, stationäre Verhältnisse annimmt und voraussetzt, daß die Energiedichte e_{\perp} nur von Partikeln der Sorte "a", z. B. Protonen, bestimmt wird, erhält man für den Driftstrom

$$v_a = \frac{1}{n_a q_a e B_0^2 \mu'(\varepsilon)} \mathfrak{B}_0 \times \left[\frac{2 e_{\parallel}}{B_0^2} \mathfrak{B}_0 \cdot \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \mathfrak{B}_0 + \frac{e_a \perp}{2 B_0^2} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \mathfrak{B}_0^2 + \frac{\mathfrak{B}_0^2}{4 \mu_0} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \varepsilon + \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} p_a \right] \quad (22)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in der Einpartikelnäherung gewonnenem überein [11], wenn $\mu' = 1$, $\frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} p = \frac{\delta \varepsilon}{\delta \mathfrak{r}} = 0$ gesetzt werden.

Die schon erwähnten Abweichungen der Extrapolation des Magnetfeldes von dem in der Magnetosphäre gemessenen haben zwei Ursachen

- a) den Diamagnetismus der Magnetosphäre,
- b) die soeben berechneten Driftströme.

Besonders starke Driftströme sind zu erwarten, wenn entweder ε sich seinem Grenzwert nähert, oder sein Gradient stark anwächst. Beide Bedingungen dürften in den Regionen zwischen $r = 4 a_0$ und $r = 10 a_0$ am ehesten vorkommen.

Wenn man die Bewegungen in Richtung der magnetischen Kraftlinien betrachten will, hat man das innere Produkt von (20) mit \mathfrak{B}_0 zu bilden. Man setzt dabei wieder voraus, daß gelte:

$$\frac{1}{B_0} \mathfrak{B}_0 \cdot \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} p = -2 \frac{d}{ds} e_{\parallel} \quad (23)$$

und

$$v \cdot \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} v = 0$$

Dann erhält man:

Weil $\sin \beta$ zu den niederen Breiten hin offenbar abnimmt, muß e und damit die Partikeldichte zunehmen. $\sin \beta$ muß oberhalb des Grenzwertes β_m , der aus

$$\sin \beta > \sin \beta_m \approx 0,9$$

folgt, bleiben. Man schließt daraus, daß die Partikeldichte am Äquator beträchtlich größer als in den Enden der Gürtel sein muß, wenn dynamisches Gleichgewicht herrschen soll. Das steht im Widerspruch zu den Annahmen (12a) und (12b).

Nach (15b) stellt

$$\varepsilon_a = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathcal{B}_0^2}{2\mu_0} - \frac{m_a n_a \omega_a^2 \perp}{2} = 0 \quad (25)$$

die Oberfläche der Magnetosphäre für die Partikel der Sorte "a" dar. Nach [10] und [4] macht man etwa die folgenden Annahmen

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\mathcal{B}_{00}}{f^3} \left[3 \cos^2 \vartheta + 1 \right]^{1/2}, \quad \omega_a \perp = \tilde{v} \cos \psi, \quad \tilde{v} = 2 \cdot 10^6 [m/s] \quad (26)$$

(geomagnet. Dipolfeld)

\tilde{v} ist dabei die Geschwindigkeit der von der Sonne heranlaufenden Plasmawolke. ψ ist der Winkel zwischen den Normalen der magnetischen Feldlinie und \tilde{b} , wobei $|\tilde{b}| = v$ ist.

\tilde{b} wird parallel zur Ebene des geomagnetischen Äquators angenommen und das Azimut φ von der Richtung von \tilde{b} aus gezählt. \tilde{b} hat die Richtung der negativen x-Achse.

Für $\varphi = 0$ sind dann die $\frac{r}{x}$ und $\frac{\vartheta}{z}$ -Komponenten von \mathcal{B}_0^0

$$\frac{2 \cos \vartheta}{(3 \cos^2 \vartheta + 1)^{1/2}}, \quad \frac{\sin \vartheta}{(3 \cos^2 \vartheta + 1)^{1/2}}$$

und die der Normalen zu \mathcal{B}_0^0

$$-\frac{\sin \vartheta}{(3 \cos^2 \vartheta + 1)^{1/2}}, \quad \frac{2 \cos \vartheta}{(3 \cos^2 \vartheta + 1)^{1/2}}$$

Die Komponenten von \mathfrak{b}^0 sind für $\varphi = 0$ dagegen

$$-\sin \vartheta, \quad -\cos \vartheta.$$

Daher ist

$$\cos \psi = \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{(3 \cos^2 \vartheta + 1)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\delta v_{\parallel}}{\delta t} &= \frac{\mathfrak{B}_0}{B_0} \frac{\mathfrak{B}_0}{B_0} \cdot \frac{\delta}{\delta r} \left[-2 e_{\parallel} + \frac{1}{2} e_{\perp} \right] \\ &= -\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}_0 \cdot \left[\frac{e_{\perp}}{B_0^4} \left(\mathfrak{B}_0 \frac{\delta}{\delta r} \right) \mathfrak{B}_0 \right] - \frac{\mathfrak{B}_0}{4\mu_0} \mathfrak{B}_0 \cdot \frac{\delta}{\delta r} \varepsilon - 2 \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}_0^2} \mathfrak{B}_0 \cdot \frac{\delta}{\delta r} e_{\parallel} \quad (24) \end{aligned}$$

Für $\frac{\delta}{\delta r} \varepsilon = \frac{\delta}{\delta r} e_{\parallel} = 0$ stimmt auch diese Gleichung mit der bisher bekannten überein [11].

6. Über das Ausfließen der Strahlungsgürtel

Wenn die mechanische Energiedichte in der Umgebung des geomagnetischen Äquators bedeutend zunimmt, wird das Plasma der Magnetosphäre gemäß (24) zu den Polen hin beschleunigt. Dieser Vorgang führt wahrscheinlich zum Ausfließen der Strahlungsgürtel [5]; er soll noch etwas erläutert werden.

Nach (24) herrscht Gleichgewicht, wenn

$$\frac{d}{ds} \left(-2 e_{\parallel} + \frac{1}{2} e_{\perp} \right) = 0 \quad (24a)$$

Man zeigt leicht, daß $e = e_{\parallel} + e_{\perp}$ gilt:

$$e_{\parallel} = \sum_a e_{a\parallel} = \sum_a n_a \frac{m_a}{2} \omega_a^2_{\parallel} = \sum_a \frac{m_a}{2} n_a \left(\omega_a^2 - \omega_{a\perp}^2 \right) = e - e_{\perp}$$

Man kann also statt (24a) schreiben:

$$\frac{d}{ds} \left[-2 e + \frac{5}{2} e_{\perp} \right] = 0 \quad \text{oder} \quad -e + \frac{5}{4} e_{\perp} = \frac{1}{4} e_0 \quad (24b)$$

e_0 ist der Wert der mechanischen Energiedichte dort, wo die magnetische Feldlinie, längs der integriert wurde, in die dichte Atmosphäre eintaucht, etwa in 1000 km Höhe über dem Erdboden. Für eine einzelne Partikel gilt

$$\frac{E_{\perp}}{E} = \frac{\omega_{\perp}^2}{\omega^2} = \sin^2 \alpha$$

α ist der Winkel, den die Bahntangente mit der magnetischen Kraftlinie bildet. E stellt die kinetische Energie der Partikel dar. Analog bilden wir

$$\frac{e_{\perp}}{e} = \sin^2 \beta \quad (24c)$$

Man erhält dann statt (24b)

$$e \left[\frac{5}{4} \sin^2 \beta - 1 \right] = \frac{1}{4} e_0 \quad (24d)$$

Wie in [4] näher ausgeführt wird, hat $\cos \varphi$ für $\cos \vartheta_0 = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ eine Nullstelle, die aber für $\varphi = 0$ nicht vorhanden ist. Die Grenzfläche (25) hat für $\varphi = 0$ demnach folgende Form:

$$B_{00}^2 (3\cos^2\vartheta + 1)^2 - \mu_0 f^6 m_a n_a \tilde{v}^2 (3\cos^2\vartheta - 1)^2 = 0 \quad (25 \text{ a})$$

oder

$$f^6 = \frac{B_{00}^2}{\mu_0 m_a n_a \tilde{v}^2} \left(\frac{3 \cos^2 \vartheta + 1}{3 \cos^2 \vartheta - 1} \right)^2$$

Wir betrachten hier nur die Umgebung des Äquators:

$$\cos^2 \vartheta \approx 1 - \vartheta^2$$

$$f^6 = \sqrt{\frac{B_{00}^2}{\mu_0 m_a n_a \tilde{v}^2}} \cdot 2 \left(1 + \frac{3}{4} \vartheta^2 \right) \quad (25 \text{ b})$$

Man erkennt, daß unter den hier angenommenen vereinfachten Verhältnissen die von der Sonne kommenden Partikel am ehesten in der Äquatorebene eingefangen werden können. Außerhalb von ihr werden sie mehr zu den Polen hin abgelenkt, bis sich in der Kugelfläche $\cos \vartheta_0 = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ eine günstige Einfallsmöglichkeit bietet. Da unter normalen Verhältnissen n_a selbst in der Äquatorebene im Vergleich zu den mittleren und hohen Breiten sehr große Werte hat, muß die Grenzfläche in der Äquatorebene gegenüber der Sonne eine Einbeulung zeigen, die sich wegen der Driftgeschwindigkeit der Teilchen in Richtung der Äquatorebene auseinanderzieht. Bei zunehmender Dichte der von der Sonne auslaufenden Teilchen werden die Spiegelpunkte der eingefangenen Teilchen gemäß (24) immer mehr zu den Polen hin gedrückt. Es entsteht eine große diamagnetische Wirkung. Das ist vielleicht eine Erklärung der Anfangsphase des magnetischen Sturmes. Die mittleren Breiten in diesen Höhen haben für die Aufnahme eingefangener Teilchen ein großes Fassungsvermögen. Aber wenn in der ganzen Schale die Sättigung $\varepsilon_m = 1$ nahezu erreicht ist, fließt der Strahlungsgürtel aus. Der Druck auf das Magnetfeld unterhalb der Magnetosphäre läßt nach. Im Gegenteil, dadurch, daß die Grenzzone der Erde näher kommt und schon bei geringeren Breiten endigt, werden die magnetischen Kraftlinien nach außen gedrückt und fangen die nunmehr ankommenden langsameren Teilchen der solaren Partikelstrahlung ein. Der in der ganzen Höhe fließende elektrische Ringstrom verstärkt den Vorgang. Das scheint

die Hauptphase der magnetischen Stürme zu erklären. Für eine quantitative Prüfung dieser Vorstellungen sind noch eingehende Studien notwendig.

Schließlich sei noch auf die weiteren Näherungen bei der Berechnung der Permeabilität des Gases in der Magnetosphäre eingegangen. Unter den Verhältnissen dieser Regionen kann man in der Gl. (16c) des I. Teils

$$\mathfrak{s} = j + \frac{\delta \mathfrak{P}}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \times \mathfrak{M} \quad (26)$$

die beiden letzten Terme auf der rechten Seite vernachlässigen. Statt der Formel (10a, d) wird die folgende benutzt:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \int_M \mathfrak{M} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}'} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} d^3 x' - \frac{\mu_0 \mu'}{4\pi} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \times \int_M \frac{\mathfrak{s}}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} d^3 x' \quad (27)$$

Dabei darf χ_m nicht mehr als konstant angesehen werden. Es gilt ferner

$$\mathfrak{s} = \sum_a \frac{1}{\mu'(\varepsilon) B_0^2} \mathfrak{B}_0 \times \left[\frac{2e_{II}}{B_0^2} \mathfrak{B}_0 \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \mathfrak{B}_0 + \frac{e_I}{2B_0^2} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} B_0^2 + \frac{B_0^2}{4\mu_0} \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \varepsilon + \frac{\delta}{\delta \mathfrak{r}} \mathfrak{p} \right] \quad (27 a)$$

Modelle, die eine bessere Annäherung an die wirklichen Verhältnisse in der Magnetosphäre darstellen als die bisher benutzten, sollen an anderer Stelle behandelt werden.

Literatur

- [1] LUCKE, O., Die dynamischen Gleichungen in der Magnetosphäre, Z. f. Geophysik, 26. Jahrg. (1960) 105.
- [2] LUCKE, O. und Chr.-U. WAGNER, Zur Theorie der elektrischen Ströme in der Magnetosphäre, Monatsber. d. Dt. Akad. d. Wiss. 2 (1960) 463.
- [3] SINGER, S. F., The structure of the earth's atmosphere, J. Geophys. Res. 65 (1960) 2577.
- [4] LUCKE, O., Die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse mit Anwendungen, Abh. 26 d. Geomgn. Inst. Potsdam, Akad. Verlag, Berlin 1961.
- [5] ROSSI, B., Scientific results of experiments in space, Transact. Am. Geophys. Union Vol. 41 (1960) 410.
- [6] LANGE-HESSE, G. Vortrag auf dem Symposium f. Geomagnetismus und Aeronomie, Berlin, Juni 1960.
- [7] GRINGAUS, K. J., W. G. KURT, W. J. MOROS, J. S. SCHKLOWSKIJ, Astron. Journal SSSR XXXVI (1960) 716.
- [8] GREEN, A. S., Ionic theory of plasmas and magnetohydrodynamics, Phys. of Fluids 2 (1959) 341.
- [9] SOMMERFELD, A., Elektrodynamik, Akad. Verlagsbuchhdlg., Berlin 1949.
- [10 a] LÜST, R. Über die Ausbreitung von Wellen im Plasma, Fortschritte d. Physik 7 (1959) 503.
- [10] BEARD, D. B., Interactions of plasma with the earth's magnetic field, Phys. Rev. Letters 5 (1960) 89.
- [11] PARKER, E. N., Newtonian developement of the dynamic properties of ionized gases of low density, Phys. Rev. 107 (1957) 924.

A residual method

By PREM PRAKASH, Dehra Dun ¹⁾

Summary: If the measured gravity field, a superposed effect of all lateral density contrasts, be continued to a depth h , the effect of causative features lying at this depth will be increased or decreased proportionately very much compared to that of other features. On the basis of this fact a new residual has been defined as the difference between gravity values on the plane of desired structures and those at the surface of measurement. This has been justified on several considerations and a mechanical process for working out such a residual has been provided.

Zusammenfassung: Wenn das gemessene Schwerefeld, das die Wirkung aller im Untergrund verteilten Dichteunterschiede enthält, in die Tiefe h fortgesetzt wird, so ändert sich hierbei der Einfluß der in diesem Niveau gelegenen Störungsmassen besonders stark. Hierauf beruht eine neue Definition des Restfeldes als Unterschied zwischen dem Schwerefeld in der Tiefe der gesuchten Störungsmasse und dem Schwerefeld an der Oberfläche. Die Berechtigung dieses Ansatzes wird nachgewiesen, und es wird eine Methode zur Ermittlung des Restfeldes entwickelt.

BACK-GROUND: There are several mathematical Methods for the interpretation of gravity data. These are:

1. Indirect Methods.
2. Downward continuation of the field.
3. Upward continuation of the field.
4. Calculation of derivatives of the field.
5. Statistical evaluation of the regional effect.
6. Calculation of residual.

Indirect methods consist in tallying by trial and error the residual of the given field with the theoretical field due to certain geometrically simple masses of prescribed densities. Apart from being too laborious and time consuming due to 'trial and error' element it depends on the calculation of residual of the observed field.

¹⁾ PREM PRAKASH, Oil & Natural Gas Commission, Geophysics Directorate, 30 — Rajpur Road, Dehra Dun (India).

Similar is the case with downward continuation; usually the regional is to be removed before or after the continuation of the field downwards to the approximate depth of desired shallow structures where this continued field would itself represent proportionately the structural topography. The interpretation by downward continuation is also thus based on the residual field to be otherwise known and is only thereafter meant for giving some additional information.

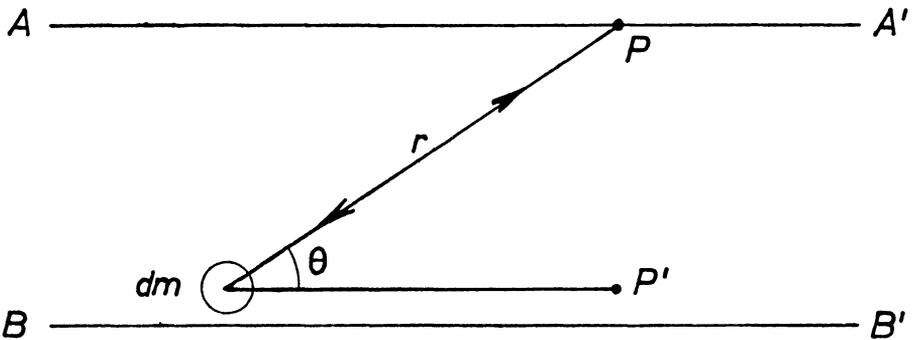
Perhaps the greatest asset of the derivative methods is their independence of the residual. In fact they themselves partly serve that purpose by embodying mostly the contribution of the shallow features only. But unfortunately this theoretical advantage is counter-acted to a great extent by the inherent difficulties in the calculation of a thing like derivative at a point from a discontinuous data. This in the first place hampers the correct estimation of the derivative and secondly becomes quite sensitive to the errors. Moreover, derivative cannot serve completely the purpose of residual as such for calculating the structures by downward continuation or by indirect methods.

Coming to the residual problem it is probably most important to note that it is not an aim in itself. A residual map primarily pin points the places underlain by subsurface density contrasts. Quite frequently it is further used for calculating the depth, shape, size etc. of these causative features. It is thus a basis upon which more complicated processes are built and therefore its importance cannot be over-emphasized. The residual methods are GRIFFIN's or grid method, the smoothening method, and various surface fitting methods which are well known for their limitations and a detailed criticism is not necessary.

THE PROBLEM: — Let us next come to what a residual should actually be. As we know the BOUGUER anomaly data with which we are dealing represents the superimposed effect of all lateral variations of density within earth's crust right from the MOHORovičić stratum of discontinuity upto the surface. Now, in prospecting one is generally interested in a few strata only belonging to a suitable geological age-group. The problem of residual is therefore to carve out quantitatively the lateral-density-variation-effect produced from within one of these few strata only. It must be mentioned here that this effect is a very small fraction of the total BOUGUER anomaly and also quite small in its own magnitude, so that when mechanical processes are applied for its isolation from the rest of the anomaly it tends to mix up with the errors of calculation as also with those of observation, interpolation etc., which, even in the modern surveys, are frequently of the order of the residual anomalies themselves. The residual anomaly map is therefore generally flooded with Pseudo-anomalies consequent upon these errors and having nothing to do whatsoever with the geological causative features. It seems imperative therefore to apply in the first stage a process to the data which should magnify many folds the effect of desired features only while keeping that

of others more or less at a constant level. Having achieved this objective, we should try to suppress or filter out by some suitable method the regional effect, that is in fact, the effect of all but a few causative features confined to some depth range. The above will be a rational approach to the residual problem which we shall adopt in deriving out formula.

SOLUTION: — Broadly speaking the gravity data is a function of space or its dimensions and can be further operated with respect to these only. Of all these known operations, which have been enumerated in the beginning of this article, the downward continuation is the only one which can help accomplish the first stage task of our approach. It is quite evident from the inverse square law that the attraction of a body at a point will continuously increase as this point approaches the body and will be maximum when the point is somewhere close to the body. Keeping this in view let us imagine the continuation of the entire plane of observed gravity downwards approaching by and by the depth at which the desired structures begin to appear. Before understanding the criteria governing the increase or decrease of gravity values on this plane due to its downward continuation, let us look into the elementary aspect of this question.



In the above diagram let P be any point on the surface AA' of the observed gravity. Let the plane AA' be continued to plane BB' on which the desired structures begin to appear and P' be the corresponding position of P .

Considering the vertical component of attraction of a small element dm of some structure on the plane BB' we see that this attraction component, which is the quantity of measurement by our instrument, is proportional to $(dm/r^2) \sin \theta$ according to the diagram, a quantity which increases as a function of r but decreases as that of θ as the point P moves to P' . Except in the case when the point P is vertically above dm , this elementary attraction component, hereafter simply called attraction, will therefore almost vanish as P comes to the level of P' after possibly attaining a maximum value between P and P' . In the exceptional case

when P is exactly above dm this attraction will go on increasing and finally become proportionately big as P comes to dm . Corresponding behaviour of such an attraction due to the entire body, of which dm is an element, will be obtained following integration of the quantity $(dm/r^2) \sin \Theta$ over the space occupied by this body. This is not practicable because such bodies are not fully known on the surface besides having a large variety of nongeometrical forms, yet the broad conclusions of the case of element dm also apply in the case of full structures. That is to say, as a result of continuation below to the approximate depth of these structures themselves, the gravity values at the points overlying these structures will rather sharply increase, falling away more or less to a constant level at the points situated outside the horizontal span of structures lying on the continuation plane.

In view of the fact that continuation of gravity data to the depth of some desired causative feature would sharply increase latter's effect while keeping deep regional effect comparatively constant, a simple and effective method of suppressing this regional effect would be to take out the difference between this continued and the observed gravity. Our new method therefore defines the residual at the continuation plane, by

$$(1) \quad R = g(h) - g(0) \dots \dots \dots$$

where h is the depth of causative feature (s) whose effect is to be called the residual. This, being a simple difference of two gravity values, will also be a dimensionally consistent definition of residual.

Though having a rational basis, this definition too does not apparently satisfy completely the requirement of a residual, since as a result of downward continuation the regional field will also slightly vary. Generally it is known that the effect of shallow features, interesting from the view point of petroleum prospecting, is very feeble on the surface, say of the order of one milligal in many cases. That it can easily become six to ten times this value near the very depth of these features, is also evident. Therefore, the residual part of the continued gravity will not be affected by the application of formula (1). Suppression of regional by its application is the only major thing to be examined. Though at considerable variance from the real conditions, regional is often imagined as an infinite slab, the attraction due to which is known to be constant throughout the space. Obviously therefore, formula (1) will completely eliminate such a regional effect. Contrary to this one of the inconvenient forms of regional would be a sphere or point mass howsoever big and deep but still capable of producing a non-uniform attraction, well pointed above its centre which can easily be mistaken for a shallow anomaly.

To illustrate the working of our formula let us have a spherical i. e., a point mass at a depth x below the surface. Its attraction at a point vertically above, on the surface will be proportional to $\frac{1}{x^2}$. Again if we continue below to a depth d , this attraction at the corresponding point of the lower plane will be proportional to $\frac{1}{(x-d)^2}$. Therefore, proportionate increase in its attraction due to continuation is

$$(2) \quad \left\{ \frac{1}{(x-d)^2} - \frac{1}{x^2} \right\} / \frac{1}{x^2} \\ = \frac{d(2x-d)}{(x-d)^2}$$

Rate of increase of (2) with respect to x , the depth of the attracting source is therefore,

$$(3) \quad \frac{-2dx}{(x-d)^3}$$

a quantity which is positive for all values of $x-d$ and goes on increasing as $x \rightarrow d$, becomes discontinuous at $x=d$ and thereafter changes sign and tends to zero as $x \rightarrow \infty$. This shows that this proportionate increase in the attraction is maximum for a feature situated near the continuation plane but for one situated below this plane it goes on decreasing with its depth. The depth of MOHOROVIČIČ discontinuity layer, which constitutes a common regional for example ranges between 15 to 30 kilometers and stretches wide almost like a plane below limited areas. On the assumption of an infinite plane, as earlier mentioned, its attraction would not undergo any change. But even on the so much unfavourable and unrealistic assumption of a point mass the increase due to continuation in its attraction would only be about 10% for an average depth of 20 kilometers and depth 1 kilometer of the continuation plane. It can therefore be easily imagined that the actual increase would be quite small for such regionals. For other shallower regionals like basement features, buried ridges and older sedimentary structures not wanted by us, this increase would no doubt be proportionately more and would thus influence the residual given by formula (1) but still by continuing to the precise depth of the desired structures, latter's effect can largely be magnified and retained predominantly in such a residual.

There is yet another way to judge the effectiveness of formula (1). This expression for residual is actually equal to,

$$R = g(h) - g(0) = \frac{h}{1!} g'(0) + \frac{h^2}{2!} g''(0) + \frac{h^3}{3!} g'''(0) + \dots$$

which is a weighted sum of all vertical derivatives of the observed field, weightage decreasing for higher derivatives and tending to zero. It is known that all these derivatives have alike properties for resolving anomalies and eliminating the regional, and lower the order more suitable a derivative is considered for that purpose. It follows therefore that their sum will have similar properties and more so when it is a weighted one with smaller weightage for higher derivatives. Moreover these derivatives have not been calculated as such and thus are not attended by errors of calculation which are so serious in the case of derivatives and tend to undermine their usefulness.

NUMERICAL COEFFICIENTS: — Next, we shall work out for practical application a mechanical process to evaluate residual according to formula (1). It assumes the knowledge of gravity values on a square grid, the length of whose side is taken to be the unit of length measurement. As felt by TREJO (1954), the use of derivative calculation should be dispensed with and replaced by the method of finite differences in performing the downward continuation. That is to say if $g(0,0-h)$ is the gravity value at a height h above any point say $(0,0)$ on the plane of measurement, the value at a depth h below that point will be

$$g(0,0,h) = 6g(0,0,0) - g(0,h,0) - g(0,-h,0) - g(h,0,0) - g(-h,0,0) - g(0,0,-h) \dots \dots \dots (4)$$

where h is generally written in grid units: $h = 1, 2, \dots$ etc. and then say $g(0,0,-1)$ is expressed as $\sum_{n=0}^k a_n g(r_n)$ with $\sum a_n = 1$. Now the sum $g(0,1,0) + g(0,-1,0) + g(1,0,0) + g(-1,0,0)$ can be written as $4\bar{g}(1)$ and also $g(0,0,0)$ as $g(0)$ and then if r_n includes the values 0 and 1, (4) can also expressed as

$$\sum b_n g(r_n), \text{ again with } \sum b_n = 1.$$

and finally

$$R = g(h) - g(0) = \sum c_n \bar{g}(r_n) \dots \dots \dots (5)$$

with now $\sum c_n = 0$. There are two well known papers dealing with upward and downward continuation of a potential field, namely those by Bullard and Cooper. (1948), and by Peters (1949), the former is a rigorous mathematical treatment and the latter presents convenient methods for ready use.

Making use of the Peters' coefficients for upward continuation to a height of one grid spacing, the coefficients for calculating the residual by formula (1) at a plane one grid spacing below the observation plane are given below:

| Average r_n | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{8.5}$ | $\sqrt{17}$ | $\sqrt{34}$ | $\sqrt{58}$ | $\sqrt{99}$ | $\sqrt{125}$ |
|-----------------------------------|----------|------------|------------|------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| Residual coefficients c_n | 5 · 8536 | — 4 · 2113 | — 0 · 1494 | — 0 · 1264 | — 0 · 0862 | — 0 · 0778 | — 0 · 0528 | — 0 · 0346 | — 0 · 0206 | — 0 · 0945 |

The number of these circles can be suitably reduced by adjusting the last coefficient in every case so that the sum Σc_n is always zero. The residual coefficients at any other depth can similarly be calculated from (4) or its equivalent.

$$g(0, 0, h) = 6 \bar{g}(0) - 4 \bar{g}(h) - g(0, 0, -h) \dots \dots \dots \quad (6)$$

by using the Peters' corresponding coefficients for $g(0, 0, -h)$ or any other formula in the form $\Sigma a_n \bar{g}(r_n)$, adjusting again the number as well as the radii of circles used according to new requirements.

The application has been made of this new method and interesting results obtained but due to certain difficulties it is not here possible to give maps etc.

References

- [1] BULLARD, E. C., COOPER, R. B. (1948): — The determination of the masses necessary to produce a given gravitational field, Proc. Royal Soc., p. 332.
- [2] PETERS, L. J. (1949): — The direct approach to magnetic interpretation and its practical application; Geophysics, p. 290.
- [3] TREJO, C. A. (1954): — A note on downward continuation of gravity, Geophysics P. 71.

Über die Auswertung geoelektrischer Sondierungskurven im Falle eines vielfach geschichteten Untergrundes ¹⁾

Von J. Homilius Hannover ²⁾

[Eingegangen am 30. Dezember 1961]

Zusammenfassung: Für die Auswertung geoelektrischer Sondierungskurven über einem horizontal geschichteten Untergrund mit mehr als drei Schichten unterschiedlichen spezifischen Widerstandes werden die Auswertungsprinzipien und -hilfsmittel aufgezeigt. Obwohl in der letzten Zeit die Berechnung von Modellkurven für mehrere Schichten mit elektronischen Rechenautomaten oder mit speziellen Rechenmethoden möglich ist, werden diese Hilfsmittel gewöhnlich erst in schwierigen Fällen oder zur Klärung grundsätzlicher Fragen herangezogen. Die Praxis stützt sich im wesentlichen auf die Auswertung durch 3-Schichtstandardkurven in Verbindung mit den Hilfspunktverfahren. Gezeigt wird die Auswertungstechnik im Falle eines vielfach geschichteten Untergrundes unter Berücksichtigung der Grenzen einer formalen Anwendung der Hilfspunktdiagramme. Als Beispiel für eine großräumige Untersuchung werden hierzu Messungen im Aachtal bei Singen betrachtet.

Summary: Principles and auxiliary means for the interpretation of geoelectrical sounding graphs are demonstrated in cases of more than three horizontal layers with different resistivities. Although model graphs for several layers can be calculated now by means of digital computers or special calculation methods, these means are usually applied only in complicated cases or for the solution of principal problems. In practice interpretation is carried out mainly by 3-layer standard graphs in connection with auxiliary diagrams. In this paper technique of interpretation in the case of a multiply stratified unterground is demonstrated with respect to the limits of formal application of auxiliary diagrams. As an example for a large-scaled survey, the measurements in the Aachtal near Singen are considered.

In den letzten Jahren sind von mehreren Seiten neue Verfahren zur raschen Berechnung von geoelektrischen Modellkurven entwickelt worden mit dem Ziel, die Technik der Auswertung von Sondierungskurven über einem Untergrund mit mehreren

¹⁾ Vortrag auf der 24. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft vom 12.—15. April 1961 in Hannover.

²⁾ Dr. JOACHIM HOMILIUS, Wissenschaftlicher Rat im Niedersächsischen Landesamt für Bodenforschung, Hannover, Wiesenstraße 1.

horizontal gelagerten Schichten zu verbessern. Es ist da an die Arbeiten von v. BARANOV und TASSENCOURT [1], von DEPPERMAN [2], [3] oder von MOONEY und WETZEL [4] über die Berechnung von Kurven mit elektronischen Rechenautomaten gedacht oder an das Verfahren von FLATHE [5], das Modellkurven mit Liegendwiderständen Null oder Unendlich auch mit Tischmaschinen zu berechnen gestattet.

Es drängt sich die Frage auf, ob alle Probleme der Auswertung in der Praxis gelöst sind, wenn nunmehr die Möglichkeit gegeben ist, Modellkurven elektronisch oder manuell in relativ kurzer Zeit und mit erträglichem Aufwand zu berechnen. Man muß sich dann fragen, welche Bedeutung noch den klassischen Auswertungsverfahren zukommt, nämlich dem Vergleich von Meßkurven mit 2-Schicht- und 3-Schichtstandardkurven unter Verwendung von Hilfspunktverfahren. Sind die Hilfspunktverfahren überholt, oder können sie zur Auswertung auch bei einem vielfach geschichteten Untergrund herangezogen werden, und wie kann das geschehen? Hier soll versucht werden, die aufgeworfenen Fragen aus den Erfahrungen zu beantworten, die bei der Bearbeitung einer großen Anzahl von Meßobjekten gewonnen wurden. Diese Untersuchungen sind im Rahmen der Gemeinschaftsaufgaben der Länder durch das Niedersächsische Landesamt für Bodenforschung ausgeführt worden.

Alle oben genannten Methoden sind synthetische Verfahren der Kurvenberechnung, die es nicht gestatten, aus Meßkurven unmittelbar die Folge der Schichten im Untergrund mit ihren Widerständen und Mächtigkeiten zu ermitteln. Die Auswertung von Modellkurven vollzieht sich in mehreren Schritten, wobei die Berechnungen von Modellkurven ein Teil, wenn auch in zunehmendem Maße ein sehr wichtiger Teil der Auswertung darstellt. Die einzelnen Schritte der Auswertung kann man wie folgt umreißen:

1. Festlegen des Typs jeder einzelnen Meßkurve an Hand der möglichen geologischen Schichtenfolge. Dies setzt eine allseitige Erkundung der geologischen Verhältnisse voraus. Auf die Kenntnis über den Aufbau des Untergrundes stützt sich zunächst die Gestaltung des Meßprogramms, dann aber auch die Auswertung.
2. Ermittlung der spezifischen Widerstände und der Mächtigkeiten der einzelnen Schichten unter Verwendung von 2- und 3-Schichtstandardkurven und der Hilfspunktverfahren; dabei Vergleich der Meßkurven gleichen Typs untereinander.
3. Bearbeitung kritischer Fälle durch Berechnung von Modellkurven.

Der letzte Punkt muß dann vorweggenommen werden, wenn zunächst zu klären ist, ob das geplante Untersuchungsobjekt überhaupt geoelektrisch bearbeitet werden kann.

Zur Beleuchtung der einzelnen Schritte sei das hierfür besonders geeignet erscheinende Untersuchungsgebiet des Aachtals herangezogen, das auf Vorschlag des Geo-

logischen Landesamtes in Baden-Württemberg in den Jahren 1958—1960 geoelektrisch gemessen wurde. Die Aach entspringt in der bekannten Karstquelle nördlich Singen und mündet bei Radolfszell in den Bodensee (Abb. 1). Der Fluß folgt in einem Teil seines Laufes einer glazialen Abflußrinne, die — wie es oftmals bei derartigen eiszeitlichen, mit Schottern aufgefüllten Flußtälern der Fall ist — für die angrenzenden Gemeinden hydrologisch von großer Bedeutung ist. Die jüngere Talfüllung besteht aus kiesigen Ablagerungen, deren Mächtigkeit recht unterschiedlich sein kann und zum Teil 15 m überschreitet. Wie aus einigen Bohrungen bei Singen hervorging, war zu erwarten, daß dieses obere Kieslager teilweise durch Geschiebemergel von einem unteren Kieslager getrennt ist, das seinerseits tonig-mergeligen Schichten des Quartärs und der Molasse aufliegt.

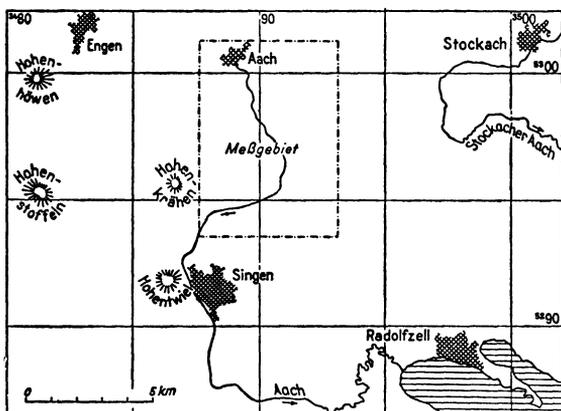


Abb. 1: Verlauf des Aachtals. Lage des Meßgebietes.

Dieser Talaufbau läßt sich in seiner Widerstandsfolge klar gliedern, so daß von der geoelektrischen Widerstandsmethode eine Unterstützung der im Aachtal eingeleiteten umfangreichen hydrogeologischen Arbeiten erhofft werden konnte. Allerdings mußte damit gerechnet werden, daß im Oberlauf die dort flacher liegenden jurassischen Schichten mit ihren hohen Widerständen um so mehr die geoelektrische Bearbeitung erschweren würden, je weiter die Untersuchungen nach Norden vorschritten. Durch eine rohe Übersichtsvermessung wurde zunächst festgestellt, daß die bei Singen³⁾ beobachteten zwei Grundwasserstockwerke sich bis in den Raum Volkertshausen verfolgen lassen, so daß mit Recht von einer großen altpleistozänen Rinnenbildung gesprochen werden kann. Die in Profilform vorgenommene Detail-

³⁾ Die geoelektrischen Untersuchungen bei Singen wurden von Herrn Dr. DEPPERMAN und Herrn Dr. FLATHE ausgeführt. Im Folgenden wird nur auf den von Herrn Dr. MEISER und dem Verfasser bearbeiteten nördlichen Talabschnitt oberhalb Friedingen eingegangen. Die genannten Herren sind bei der Bundesanstalt bzw. bei dem Niedersächsischen Landesamt für Bodenforschung tätig.

vermessung diente dann der Klärung des Rinnenverlaufs und der Stockwerksausbildung.

1. Festlegung des Kurventyps an Hand der möglichen geologischen Schichtenfolge

Entsprechend der klaren geologischen Gliederung im Aachtal, zu deren Erkundung wesentliche Vorarbeiten durch den beratenden Geologen SCHREINER ⁴⁾ geleistet wurden, war von vornherein im Bereich der Rinne im allgemeinen mit fünf, im Oberlauf sogar mit sechs Widerstandsschichten zu rechnen.

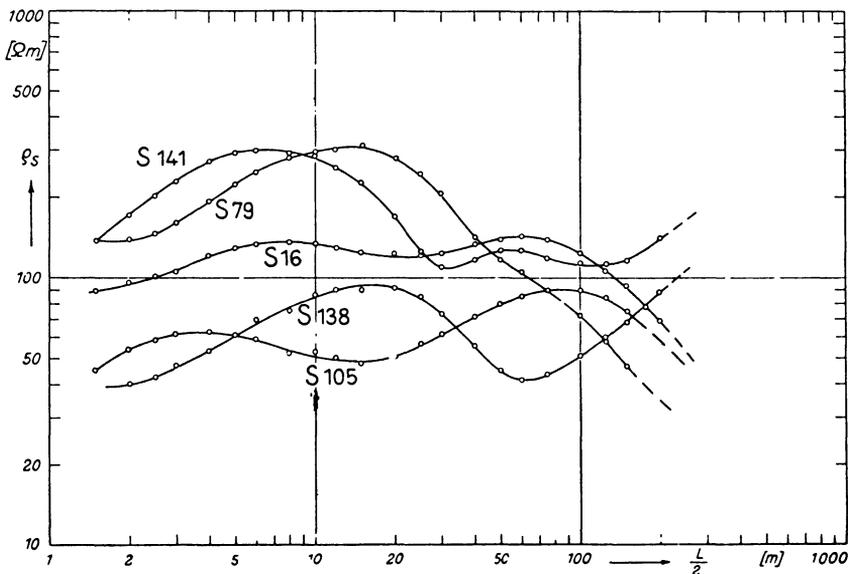


Abb. 2: Typische Sondierungskurven aus dem Gebiet des nördlichen Aachtals.

Abb. 2 zeigt eine Auswahl der Sondierungskurven aus dem Meßgebiet in der üblichen doppeltlogarithmischen Darstellung ⁵⁾. Die hohen spezifischen Widerstände, die sich in den Kurvenmaxima andeuten, sind den Kies-Sanden zuzuordnen, die niedrigen der humosen und tonig-mergeligen Deckschicht, der mergeligen Zwischenschicht oder den basalen Tonmergeln. Die hohen Endwiderstände bei den Kurven 138 und 141 deuten bereits darauf hin, daß diese aus dem Bereich am Oberlauf

⁴⁾ Herr Dr. A. SCHREINER, Geologisches Landesamt in Baden-Württemberg, Freiburg i. Br.

⁵⁾ Alle Sondierungskurven dieser Arbeit sind in Schlumberger-Anordnung gemessen oder berechnet worden. Die Betrachtungen sind jedoch auch für Meßkurven in Wenner-Anordnung gültig.

der Aach stammen, wo die jurassischen Schichten flacher liegen als im südlich gelegenen Unterlauf. In allen Kurven sind mindestens vier Widerstandsschichten zu erkennen: S 16 stellt (ebenso wie die Meßkurve in Abb. 7) den Idealtyp der Gliederung in zwei Grundwasserstockwerke dar, die geoelektrisch gleichwertig in der Sondierungskurve erscheinen. Bei S 79 dagegen tritt das obere Stockwerk, bei S 105 das untere Stockwerk mehr in Erscheinung. In S 138 ist nur das obere Stockwerk ausgebildet, dafür zeigen sich dank ihrer hohen Widerstände bei großen Elektrodenentfernungen die jurassischen Schichten. Bei S 141 schließlich sind das obere und das untere Stockwerk gut ausgebildet, dazu deutet der Anstieg der Meßkurve bei großen Elektrodenabständen auf die hochohmhigen Jurasschichten hin.

Bekanntlich gibt es vier Kurventypen, die bei drei Schichten unterschiedlichen spezifischen Widerstandes auftreten können (Minimumtyp, doppelt aufsteigender und doppelt absteigender Typ, Maximumtyp). Im Falle von vier Schichten verdoppelt sich die Zahl der Typen, da jeweils der spezifische Widerstand einer vierten Schicht höher oder niedriger liegen kann als der spezifische Widerstand der dritten Schicht. Im allgemeinen gibt es bei n Schichten 2^{n-1} Kurventypen.

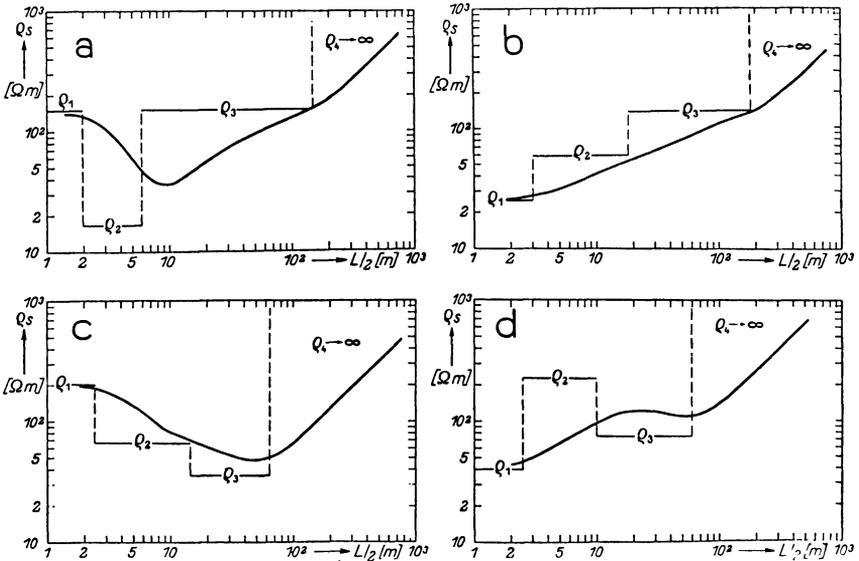


Abb. 3: Vier der acht möglichen Grundformen der Sondierungskurven für vier Schichten mit unterschiedlichen spezifischen Widerständen.

Abb. 3 zeigt von den acht möglichen 4-Schichttypen diejenigen, die aus den genannten 3-Schichttypen dadurch hervorgehen, daß eine Liegendschicht mit einem spezifischen Widerstand hinzukommt, der höher ist als der vorangehende spezifische

Widerstand. Man erkennt in Typ d zum Beispiel die Schichtfolge, die im Aachtal am Oberlauf auftritt, wenn das obere Grundwasserstockwerk allein vorhanden ist und die Kalke relativ flach liegen.

Die Festlegung des Kurventyps stellt die erste und wichtigste Vorentscheidung für die Auswertung dar. Die Entscheidung ist nicht immer trivial und an Hand einer einzelnen Meßkurve — insbesondere ohne Kenntnis der geologischen und hydrologischen Gegebenheiten — oftmals unmöglich. Diesen Schwierigkeiten ist nur durch eine gemeinsame Beurteilung vieler Messungen aus einem Untersuchungsgebiet zu begegnen. Der geschulte Auswerter kann bereits aus kleinen Abweichungen in den Sondierungskurven Rückschlüsse auf Veränderungen im Bau des Untergrundes ziehen. Eine wesentliche Unterstützung stellen dabei die Hinweise des beratenden Geologen dar, da hierdurch die Zahl der Deutungsmöglichkeiten eingeschränkt wird. Weiterhin ist es notwendig, sich vor der Auswertung ein genaues Bild von der Höhenlage der Meßstationen und des Grundwasserstandes zu machen.

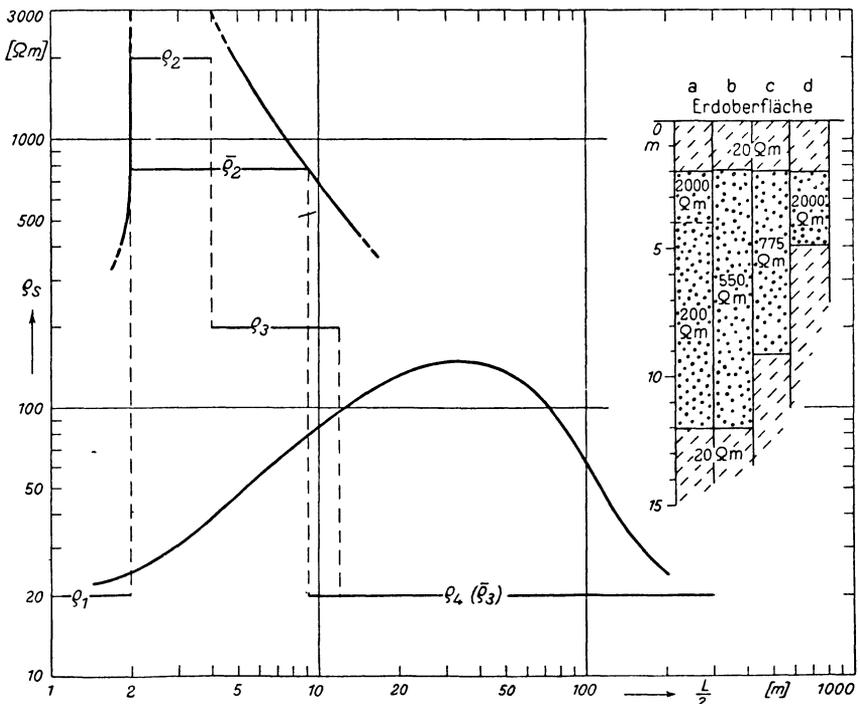


Abb. 4: Theoretische Sondierungskurve für vier Schichten unterschiedlichen spezifischen Widerstandes. $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3 > \rho_4$ (Profil a). Äquivalente Deutung als Dreischichtfall. $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$ (Profil b — d).

Daß in einem Meßgebiet die Kenntnis der Grundwasserhältnisse einen Beitrag zur Klärung des Kurventyps liefern kann, zeigt das theoretische Beispiel in Abb. 4.

Die dargestellte Sondierungskurve ist als 4-Schichtfall berechnet mit der Schichtenfolge a. Diese Schichtenfolge tritt im nördlichen Aachtal dann auf, wenn die Meßstelle so hoch über dem allgemeinen Talniveau liegt, daß die zwischen toniger Deckschicht und liegenden Tonen eingebetteten oberen Kiese nur teilweise grundwasserführend sind. Die Deutung der Kurve als 4-Schichtfall ist nicht die einzig mögliche. Vielmehr ist die Kurve innerhalb der Meßgenauigkeit auch den 3-Schichtfällen b—d äquivalent, bei denen die Kiese entweder als völlig grundwasserfrei oder als grundwassererfüllt anzunehmen sind. Im Rahmen der einander äquivalenten Deutungen als 3-Schichtfall können sogar die spezifischen Widerstände der Kiese — bei gleichzeitiger Abnahme der Kiesmächtigkeit *) — von 400 Ωm bis über 2500 Ωm anwachsen, ohne merkbare Änderungen in der Sondierungskurve hervorzurufen. Wegen des Äquivalenzprinzips ist für eine eindeutige Auswertung einer Sondierungskurve neben der Kenntnis des Kurventyps auch die Kenntnis der Widerstandswerte von entscheidender Wichtigkeit.

2. Ermittlung der spezifischen Widerstände und Mächtigkeiten der einzelnen Schichten

Besteht Klarheit über die geologischen Situationen und über die Schichtenfolge, so müssen die spezifischen Widerstände der einzelnen Schichten festgelegt werden. Da nur bei Meßkurven mit zwei Schichten die wahren spezifischen Widerstände unmittelbar den Kurven entnommen werden können, ist man in allen anderen Fällen gezwungen, jedes Mittel auszuschöpfen, sich Anhaltspunkte über die Widerstände der tieferen Schichten zu verschaffen.

Derartige Hilfen liefern Sondierungen an Bohrungen oder an Stellen, wo die Deckschicht fehlt oder wo Schichten im Untergrund sehr mächtig sind. Sondierungen an Bohrungen auszuführen, ist auch dann noch sinnvoll, wenn die Schicht, deren spezifischer Widerstand bestimmt werden soll, nicht durchbohrt ist. Eine solche Messung liefert in jedem Falle Mindest- oder Höchstwerte für den spezifischen Widerstand der betreffenden Schicht.

Bei der Ermittlung des spezifischen Widerstandes von grundwasserführenden Kies-Sanden hilft oftmals die Bestimmung des spezifischen Widerstandes von Wasserproben weiter, die aus Bohrungen, aus Brunnen oder auch — mit einem gewissen Vorbehalt — aus Oberflächenwässern zu entnehmen sind. Bekanntlich ist bei reinen Kies-Sanden, die vollständig wassererfüllt sind und keine lehmig-tonigen Beimengungen enthalten, der spezifische Widerstand ϱ dem spezifischen Widerstand ϱ_w des Porenwassers proportional, also

$$\varrho = F \cdot \varrho_w$$

*) Bei diesem Maximumtyp gilt $\varrho_2 \cdot m_2 = \text{konst.}$ innerhalb des im oberen Teil der Abb. 4 angezeigten Widerstands- und Mächtigkeitsintervalles. Beim Minimumtyp gilt bekanntlich näherungsweise $\varrho_2/m_2 = \text{konst.}$

Der Proportionalitätsfaktor F , der Formationsfaktor genannt wird, hängt ab vom Anteil des freien Porenraumes und von Größe, Gestalt und Verteilung der Poren (ARCHIE [6], vgl. auch [12], 723). Falls für den Formationsfaktor eines aus reinen Sanden bzw. Kiesen bestehenden Grundwasserleiters regionale Erfahrungswerte vorliegen, ist somit bei Kenntnis des Wasserwiderstandes eine Abschätzung des Gesteinswiderstandes möglich. Im Meßgebiet Aachtal kann mit einem Formationsfaktor von etwa 12 gerechnet werden. Mit diesem Wert von F lassen die gemessenen Wasserwiderstände (Aach-Wasser 24,6 Ωm , unterer Grundwasserleiter bei Bohrung Beuren 19,6 Ωm , bei Bohrung Friedingen 23,2 Ωm , oberer Grundwasserleiter bei Singen 21,0 Ωm) auf spezifische Kies-Widerstände von 240—300 Ωm schließen.

Sind derartige Hilfsmittel überhaupt nicht vorhanden, so müssen die spezifischen Widerstände der einzelnen Schichten geschätzt werden, was mit einiger Zuverlässigkeit möglich ist, wenn eine größere Anzahl von Sondierungskurven vorliegt. Den Endwiderstand der Sondierungskurve erhält man häufig durch Anlegen einer 2-Schichtkurve an den hinteren Kurvenast. Aber auch für die Zwischenwerte lassen sich auf diesem Wege einige Anhaltspunkte (Mindest- und Höchstwerte) gewinnen. Für das Meßgebiet Aachtal ergaben sich — abgesehen von der stark im Widerstand wechselnden Deckschicht — für den oberen und unteren Grundwasserleiter im Mittel spezifische Widerstände von 250—300 Ωm , für die trennende Geschiebemergelschicht meist 40 Ωm und für die liegenden Tonmergel um 30 Ωm . Die harten Kalke im Untergrund haben mindestens einen Widerstand von 120 Ωm . Generell mußten bei der Auswertung auch Abweichungen von diesen mittleren Werten zugelassen werden. Im allgemeinen wurde jedoch beobachtet, daß die spezifischen Widerstände der einzelnen Schichten über das ganze Meßgebiet wenig geändert werden mußten, um ein geologisch vernünftiges Bild zu erhalten.

Die Auswertung der Meßkurven erfolgt auch bei mehr als drei Schichten unterschiedlichen spezifischen Widerstandes auf graphischem Wege, nämlich durch Vergleich mit Standardkurven unter Zuhilfenahme von Hilfspunktverfahren. Die Hilfspunktverfahren sind bekanntlich empirisch gewonnene Diagramm-Systeme, die es gestatten, 3-Schichtkurven mittels 2-Schichtstandardkurven auszuwerten. Für jeden der vier 3-Schichtgrundtypen ist ein besonderes Nomogrammsystem notwendig⁷⁾. Bei der Auswertung von 3-Schichtmeßkurven sind die Hilfspunktverfahren entbehrlich geworden durch die sehr vollständigen Kataloge mit Standard-

⁷⁾ Zur Auswertung des Minimumtyps dient das H-Verfahren (Hummel-Verfahren), des doppeltaufsteigenden Typs das A-Diagramm (Anisotropie-Methode), des doppelt absteigenden Typs das VH-Diagramm (Methode des verschobenen Hummelpunktes) und des Maximumtyps das VA-Diagramm (Methode des verschobenen Anisotropiepunktes). Diese auf HUMMEL [7] und CAGNIARD [8] zurückgehenden Verfahren sind in Lehrbüchern ausführlich behandelt ([9] — [12], vgl. auch KOEFORD [13]).

Eine allgemeine Bedingung für die Auswertbarkeit einer Sondierungskurve mit 3-Schichtkurven und Hilfspunktverfahren kann nicht gegeben werden. Man kann aber sagen, daß die Auswertung dann möglich ist, wenn die einzelnen Schichten im Meßdiagramm angedeutet sind. Sind dagegen Schichten in der Sondierungskurve unterdrückt, so treten Schwierigkeiten bei einer formalen Anwendung der Hilfspunktverfahren auf. Diese sollen an zwei Scharen berechneter 4-Schichtkurven näher untersucht werden (Abb. 5 und 6). Die Widerstandsfolge der Kurven, die den Verhältnissen im Aachtal angepaßt sind, gehen aus den eingezeichneten Profilen hervor. In den beiden Scharen wird die Mächtigkeit der dritten Schicht variiert, wobei als Parameter die relative Mächtigkeit M dieser Schicht (= absolute Mächtigkeit/Mächtigkeit des Hangenden, s. [12], 735) verwendet wird. Man erkennt in beiden Scharen, daß bei kleinen Relativmächtigkeiten sich der wahre Charakter der Sondierungskurven als 4-Schichttyp nicht äußert; vielmehr haben in diesen Fällen die Kurven den Habitus des 3-Schichttyps $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3$ bzw. $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$. Erst bei Relativmächtigkeiten größer als 2 sind die Kurven mit einiger Sicherheit als 4-Schichttypen zu erkennen.

Für die folgenden Betrachtungen wird die Schichtenfolge als bekannt vorausgesetzt, und die Abweichungen, die bei der Ermittlung der Mächtigkeit der dritten Schicht durch Hilfspunktverfahren auftreten können, werden untersucht. Da im Falle der Abb. 5 (Typ $\varrho_1 > \varrho_2 < \varrho_3 > \varrho_4$) die zweite Schicht als guter Leiter zwischen zwei schlechteren Leitern eingebettet ist, wird die Bestimmung der Mächtigkeit der dritten Schicht versuchsweise mit dem H-Verfahren vorgenommen. Dazu wird an das durch die ersten beiden Schichten festgelegte H-Kreuz der Einheitspunkt ($\varrho_3 = 1, L/2 = 1$) der 3-Schichtkurvenschar [2; 0] angesetzt, und die Kurven werden übertragen, die zu den in den Profilen angegebenen Relativmächtigkeiten der dritten Schicht gehören. Man sieht, daß die asymptotische Übereinstimmung der zwei Scharen bei Relativmächtigkeiten kleiner als 2 sehr schlecht wird. Da zur Auswertung der Grenzkurve „Null“ das VH-Verfahren benutzt werden muß, wird nunmehr an das VH-Kreuz der Einheitspunkt der Kurvenschar [7/3; 0] angesetzt, und es werden die Kurven mit den entsprechenden Mächtigkeiten übertragen. Es wird deutlich, daß die Näherung vom VH-Punkt aus bei kleinen Mächtigkeiten der dritten Schicht ein besseres asymptotisches Verhalten zeigt als vom H-Punkt aus.

Der Kurventyp $\varrho_1 < \varrho_2 > \varrho_3 < \varrho_4$ in Abb. 6 fordert für die Bestimmung der Mächtigkeit der dritten Schicht an sich die Wahl des VA-Verfahrens, das im oberen Teil der Abbildung angesetzt ist. Die als bekannt vorausgesetzten Mächtigkeiten und die spezifischen Widerstände der ersten beiden Schichten bestimmen die Lage des VA-Kreuzes, an das zur weiteren Auswertung der Einheitspunkt einer geeigneten 3-Schichtkurvenschar vom Typ $\varrho_1 > \varrho_2 < \varrho_3$ angesetzt werden müßte (etwa die Schar [0,57; ∞]). Diese 3-Schichtchar wird ersetzt durch ein Kurvensystem des H-Verfahrens, das hier eine völlig ausreichende Genauigkeit hat. Dazu

wird die H-Kurve, die am VA-Kreuz beginnt und auf einen spezifischen Widerstand von $80 \Omega\text{m}$ strebt, als Leitlinie für 2-Schichtkurven benutzt. Diese sind jeweils an den Stellen eingetragen, die zu der in den Profilen angegebenen Mächtigkeit unter Berücksichtigung der Anisotropie gehören. Die Asymptoten der 2-Schichtkurven kommen danach mit denjenigen der 4-Schichtkurven zur Deckung, bei der

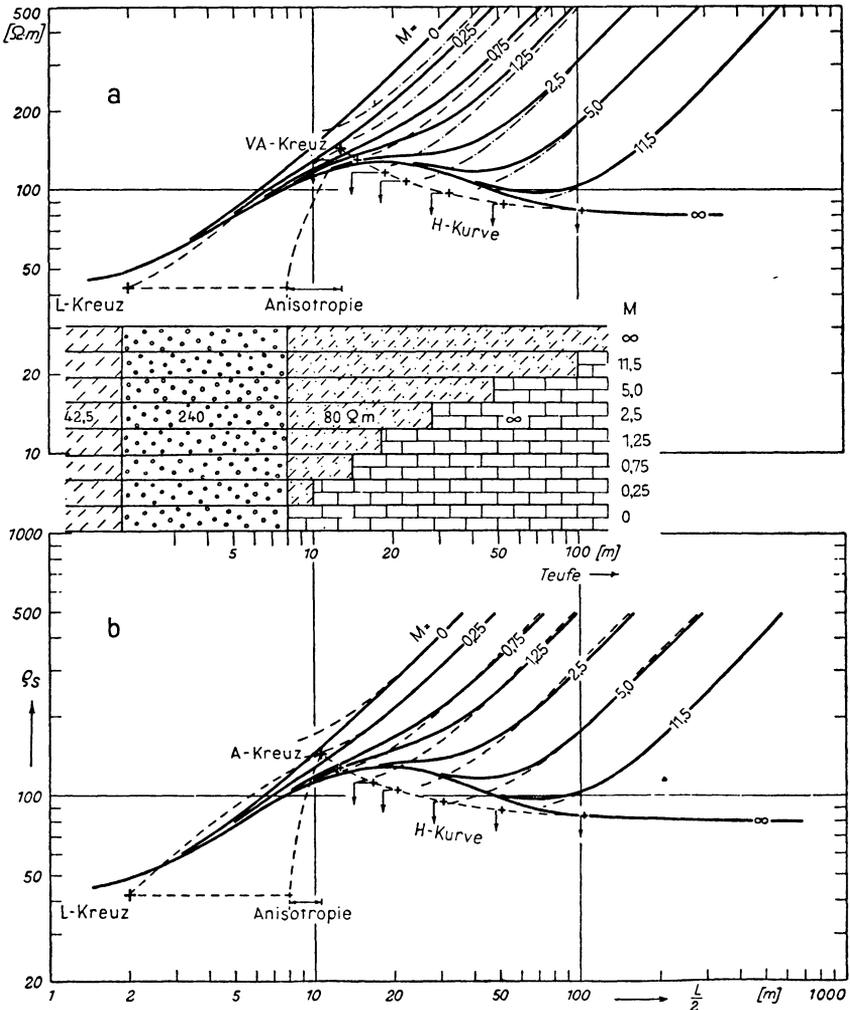


Abb. 6: Auswertung einer Schar von theoretischen Sondierungskurven für vier Schichten unterschiedlichen spezifischen Widerstandes mit Dreischicht- und Hilfspunktdiagrammen. Vergleich der Näherungen a) mit dem VA-Verfahren und b) mit dem A-Verfahren. M = Relative Mächtigkeit der dritten Schicht.

die Relativmächtigkeit der dritten Schicht größer als 2 ist. Dagegen werden die Abweichungen mit kleiner werdender Mächtigkeit stärker. Bei der Auswertung kleiner Mächtigkeiten liefert der Ansatz des A-Verfahrens bessere Ergebnisse, wie der untere Teil der Abb. 6 zeigt. Bei sehr großen Mächtigkeiten der dritten Schicht liefern beide Auswertungswege zufriedenstellende Ergebnisse. In diesem Fall sind in der Sondierungskurve die wahren Widerstände der dritten Schicht nahezu erreicht, so daß die Anisotropieunterschiede des A- und VA-Verfahrens im Vergleich zur Mächtigkeit der dritten Schicht vernachlässigt werden können.

Die Beispiele lassen erkennen, daß für die Wahl des Hilfspunktverfahrens nicht nur der Kurventyp, sondern auch die Relativmächtigkeit der auszuwertenden Schicht von Wichtigkeit ist. Die Relativmächtigkeit spiegelt sich im Habitus der Sondierungskurve wider. Der Wechsel in dem Näherungsverfahren ist bei derjenigen Relativmächtigkeit vorzunehmen, bei der ein Wechsel im Habitus vom 4- in den 3-Schichtenfall augenfällig wird (hier etwa $M = 2$). Der Wechsel ist dadurch charakterisiert, daß sich die dritte Schicht als Maximum bzw. als Minimum gerade nicht mehr bemerkbar macht. Der Kurvenverlauf liefert mithin den Hinweis, ob die Auswertung als Näherung von kleiner oder von großer Schichtmächtigkeit aus vorgenommen werden muß. Im Übergangsbereich muß eine Mittelung aus zwei Näherungen durchgeführt werden.

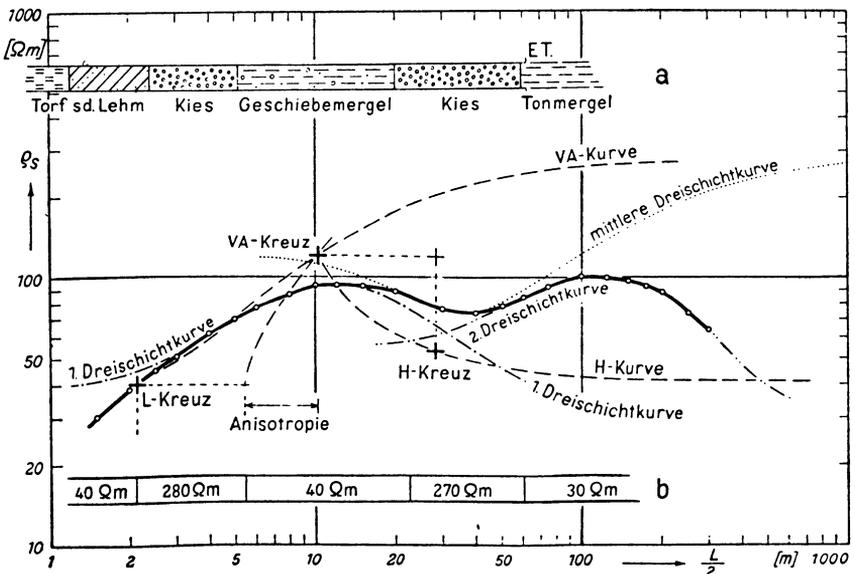


Abb. 7: Auswertung einer Sondierungskurve mit fünf Schichten unterschiedlichen spezifischen Widerstandes mit Dreischicht- und Hilfspunktdiagrammen.

In Abb. 7 soll die Auswertung eines 5-Schichtfalles erläutert und mit dem Bohrergebnis verglichen werden. Lehmig-anmoorige Deckschicht, Kiese des oberen Grundwasserleiters, Geschiebemergel, Kiese des unteren Grundwasserleiters und Tonmergel im Liegenden bilden zusammen einen deutlich zu gliedernden 5-Schichtfall mit der Widerstandsfolge $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3 < \rho_4 > \rho_5$. Die spezifischen Widerstände der Kiese sollen 250—300 Ωm , die des Geschiebemergels um 40 Ωm und des liegenden Tonmergels um 30 Ωm betragen. Um die ersten beiden Schichtgrenzen zu bestimmen, wird der vordere Kurvenbogen bis über das erste Maximum mit einer 3-Schichtkurve möglichst gut zur Deckung gebracht. Diese 3-Schichtkurve muß für die zweite Schicht spezifische Widerstände von 250—300 Ωm und für die dritte Schicht 40 Ωm haben, was durch eine Kurve des 3-Schichtdiagramms [7; 1] gut erfüllt wird. Der vordere Kurvenbogen, der durch die niedrigen spezifischen Widerstände des Torfs geprägt wird, bleibt unberücksichtigt, um die Betrachtungen an dieser Stelle nicht zu komplizieren. Aus dem Diagramm werden nun die beiden ersten Schichtgrenzen übertragen.

Um die Schichtgrenzen h_3 und h_4 zu ermitteln, benötigt man die Anisotropie, die durch die beiden ersten Schichten verursacht wird, und die Lage des VA-Kreuzes (Schnittpunkt der hier gültigen Linien des VA-Diagramms). Dazu wird nachträglich das VA-Diagramm an den Einheitspunkt der ersten Dreischichtkurve gelegt und das durch die Mächtigkeit und den spezifischen Widerstand der zweiten Schicht bestimmte VA-Kreuz übertragen. Die Anisotropie berechnet sich als Differenz des Rechtswertes des VA-Kreuzes und h_2 zu etwa 5 m.

An das VA-Kreuz wird nun der Anfangspunkt des Hummel-Diagramms angesetzt und diejenige H-Kurve auf das Meßkurvenblatt übertragen, deren Endwiderstand 40 Ωm ist. Diese H-Kurve dient nun als Leitlinie für den Einheitspunkt einer zweiten 3-Schichtkurve, die den zweiten Kurvenbogen unter Berücksichtigung des Endwiderstandes optimal annähern soll. Dies leistet eine Kurve aus der Schar [5; $1/2$] und liefert als Mächtigkeit der vierten Schicht 40 m bei einem Kieswiderstand von 260 Ωm und einem Liegendwiderstand von 26 Ωm . Die Tiefe h_3 der vierten Schicht erhält man, wenn man vom Rechtswert des H-Kreuzes die 5 m Anisotropie, abzieht, also $28 - 5 = 23 \text{ m} = h_3$. Die Endteufe der Kiese liegt dann bei $23 + 40 = 63 \text{ m}$. Das Bohrergebnis a und die Auswertung stimmen dann überein, wenn für die unteren Kiese ein spezifischer Widerstand von 270 Ωm und für den Liegendwiderstand 30 Ωm angenommen werden (Profil b). Die Korrektur, die zur Auswertung b führt, wird leicht mit Hilfe des Äquivalenzprinzips ausgeführt (hier für den Maximumtyp $m_4 \rho_4 = m_4^* \rho_4^*$). Weiter ist die Mächtigkeitsverringering berücksichtigt, die durch Wahl des höheren Endwiderstandes von 30 Ωm (statt 26 Ωm) erforderlich ist.

Nach Bestimmung der Mächtigkeiten der ersten beiden Schichten ist es auch möglich, die Mächtigkeit der dritten Schicht unmittelbar durch Anlegen einer geeigneten 3-Schichtkurvenschar zu erhalten. Es bietet sich hier die Schar [$1/3$; 2] an. Legt man

den Einheitspunkt dieser Schar an das VA-Kreuz, so strebt die mittlere Schicht einem spezifischen Widerstand von $40 \Omega\text{m}$ und die Endschicht einem spezifischen Widerstand von $240 \Omega\text{m}$ zu. Für die dritte Schicht erhält man eine Mächtigkeit von 18 m, wenn für die unteren Kiese ein spezifischer Widerstand von $270 \Omega\text{m}$ angenommen wird. Die vierte Schichtgrenze ermittelt man durch Anlegen einer geeigneten 3-Schichtkurve vom Maximumtyp an den hinteren Bogen der Sondierungskurve unter Beachtung des nunmehr festliegenden H-Kreuzes.

3. Bearbeitung kritischer Fälle durch Berechnung von Modellkurven

Die Auswertung der Meßkurven durch 3-Schichtkurven unter Verwendung von Hilfspunktverfahren kann bei den meisten Kurven eines Meßgebietes durchgeführt werden, wenn die einzelnen Schichten genügend mächtig sind und übereinander liegende Schichten sich im spezifischen Widerstand genügend unterscheiden. Allein zur Selbstkontrolle des Auswerters ist es jedoch notwendig, sich in einem Meßgebiet, wo mehrere horizontal gelagerte Schichten auftreten können, von Fall zu Fall ein genaues Bild vom Verlauf einer theoretischen Sondierungskurve zu verschaffen. Für die Konstruktion solcher Sondierungskurven — nicht nur in den Fällen, wo eine Schicht geringmächtig ist — sind die Hilfspunktverfahren ungeeignet. Hier muß die exakte Berechnung der Sondierungskurve durchgeführt werden.

Abb. 8 zeigt eine Schar von elektronisch berechneten 4-Schichtkurven, welche die Verhältnisse im Aachtal gut beleuchten. Es ist ein oberer kiesiger Grundwasserleiter ($300 \Omega\text{m}$) angenommen worden, der durch eine tonig-mergelige Zwischenschicht ($30 \Omega\text{m}$) von einem unteren Kieshorizont ($300 \Omega\text{m}$) getrennt ist. Das Liegende soll ebenfalls aus Ton-Mergel ($30 \Omega\text{m}$) bestehen. Bei gleicher Mächtigkeit der oberen Kiese (7,5 m) wird das Mächtigkeitsverhältnis von mergeliger Zwischenschicht und unteren Kiesen variiert. Man erkennt, daß sich eine geringmächtige Kiesschicht (Relativmächtigkeit 0,2 in den Kurven 4 und 7) in der Sondierungskurve noch ausprägt. Allerdings läßt sich aus dem Kurvenverlauf bei geringer Relativmächtigkeit kein Hinweis mehr auf die wahren spezifischen Widerstände des unteren Grundwasserleiters entnehmen.

Modellkurven von der Art, wie sie in Abb. 8 gezeigt werden, sind sehr geeignet, den Auswertungsbereich der Hilfspunktverfahren zu überprüfen. So dürfte eine quantitative Auswertung bei den Sondierungskurven 4 und 7 auch bei Kenntnis der wahren spezifischen Widerstände kaum möglich sein, wohl aber bei den Kurven 1—3, 5 und 6. Zu Vergleichszwecken ist als Kurve 8 eine 2-Schichtkurve angefügt. In diesem Fall ist lediglich der obere Kieshorizont ausgebildet.

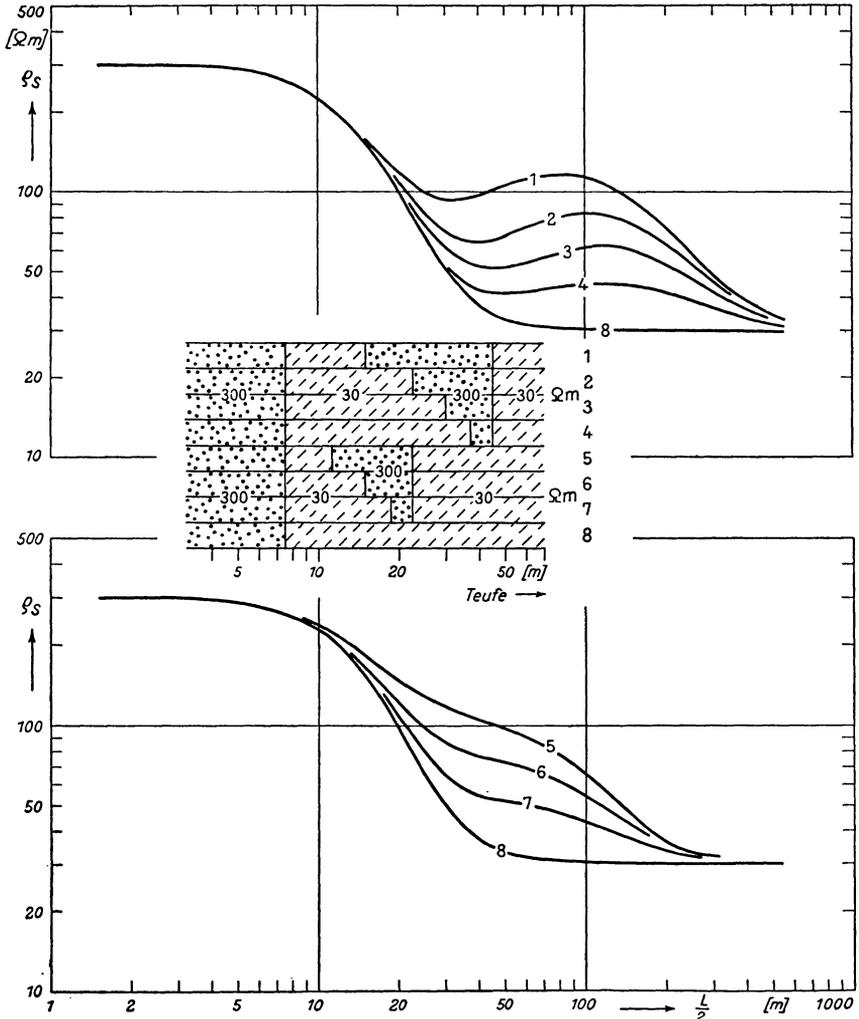


Abb. 8: Berechnete Modellkurven für vier Schichten. Beeinflussung der Kurvenform durch unterschiedliche Mächtigkeitsverhältnisse der zweiten und dritten Schicht.

Zum Schluß sei ein Einblick in das Untersuchungsergebnis des nördlichen Aachtals an Hand zweier Abbildungen gegeben. Abb. 9 zeigt das Meßgebiet. Durch den Tiefenlinienplan ist die Auflagerungsfläche der unteren Kies-Sande auf den grundwasserstauenden Tonmergeln des Altpleistozäns und der Molasse dargestellt. Da im nördlichen Teil des Meßgebietes wegen der relativ flach liegenden Weißjurakalke die Sondierungskurven nur schwer interpretierbar sind, ist dort im einzelnen der

Rinnenverlauf geoelektrisch nicht sicher festzulegen. Südöstlich Volkertshausen ist jedoch die Rinne gut zu erkennen, so daß auch detaillierte Aussagen möglich werden. Zwischen Beuren und Friedingen weitet sich das Tal und erreicht nördlich von

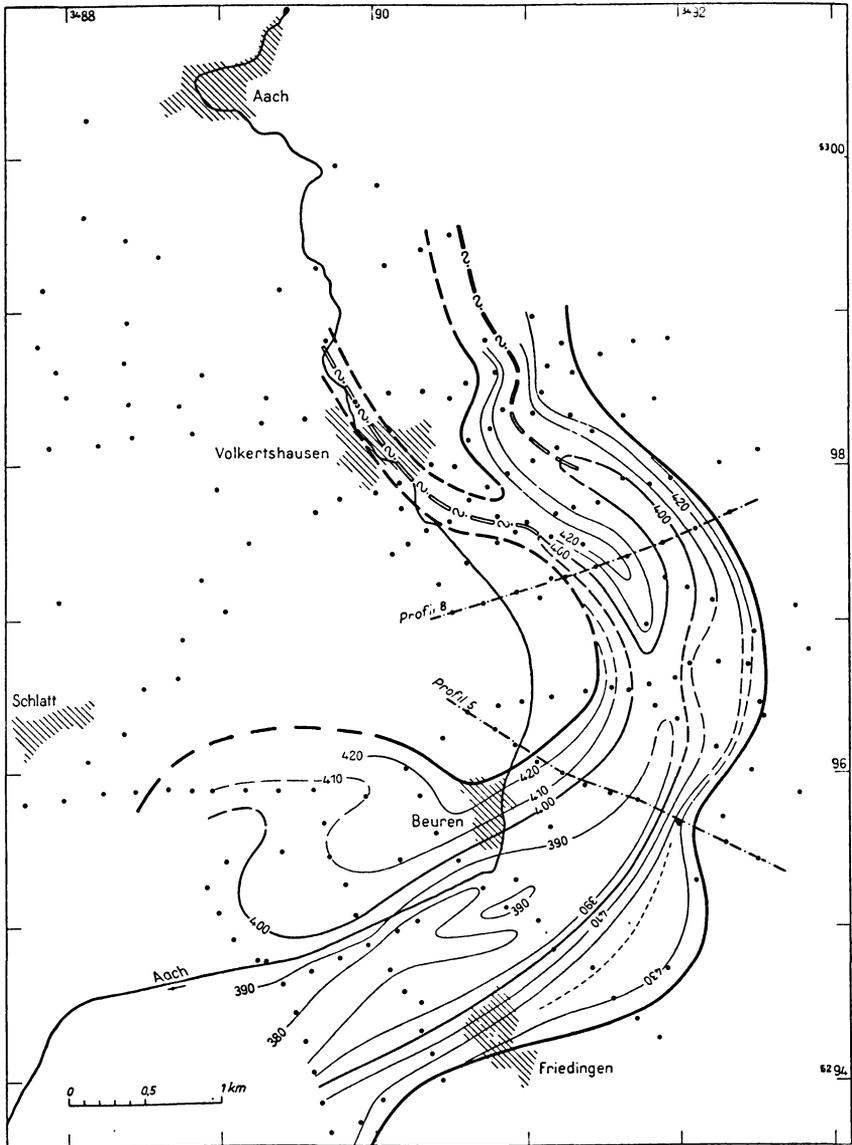


Abb. 9: Geoelektrische Untersuchungen im Gebiet des nördlichen Aachtals. Tiefenlinienplan der Basisfläche des unteren Grundwasserleiters.

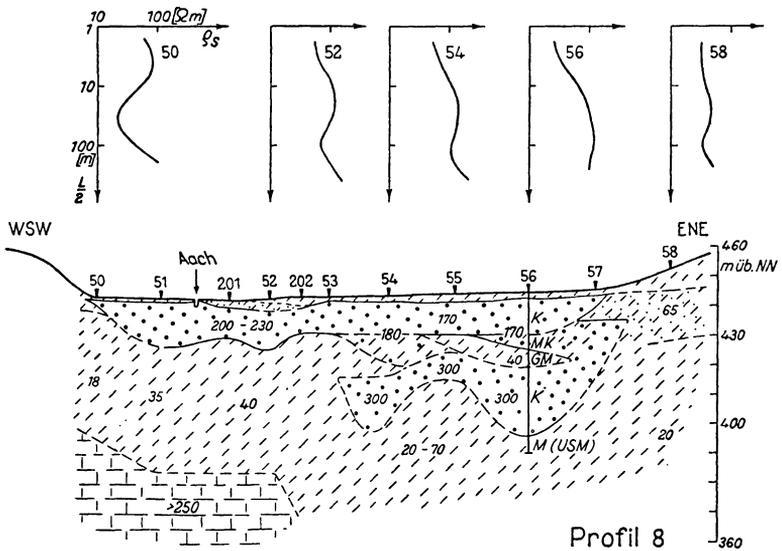
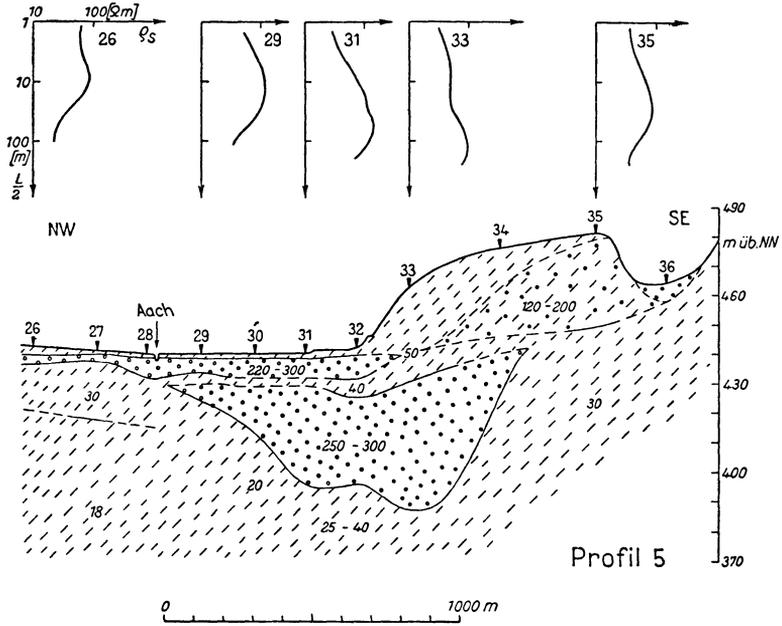


Abb. 10: Geoelektrische Untersuchungen im Gebiet des nördlichen Aachtals. Vertikal-schnitte mit Messkurven.

Singen eine beckenförmige Ausdehnung, wie aus dem benachbarten Meßgebiet Singen bekannt ist.

Den Talaufbau senkrecht zum Rinnenverlauf zeigen zwei Vertikalschnitte in Abb. 10. Die auf weiten Strecken im Unterlauf beobachtete Trennung der Grundwasserstockwerke ist nur in Profil 5 festzustellen. Die trennende Geschiebemergelschicht ist zwar sehr dünn, jedoch mit einiger Sicherheit noch erkennbar. Die Verbreitungsgebiete der oberen und der unteren Kiese fallen nicht zusammen. So ist z. B. bei Meßstelle 33 der untere Grundwasserleiter lediglich von mächtigen Geschiebeablagerungen überdeckt.

Profil 8 liegt in dem Teil des Meßgebietes, in dem sich bereits die hohen Widerstände der Malmkalke auf die Form der Sondierungskurven auswirken. Dies trifft insbesondere auf die Kurven 50 und 52 zu. In den Meßkurven 54 und 56 sind neben den oberen auch die unteren Kies-Sande gerade noch zu erkennen. An Meßstelle 56 wurde die nördlichste Testbohrung angesetzt. Die oberen Schichtgrenzen hatten gegenüber der Vorauswertung eine Abweichung von weniger als 10%, bei der Basisfläche der unteren Kiese trat in der Tiefenbestimmung eine Abweichung von etwa 20% auf. Dieses Ergebnis muß in Hinblick auf das sehr schwach ausgebildete Kurvenmaximum, wegen der großen Empfindlichkeit der Auswertung gegenüber kleinen Widerstandsänderungen bei kleinen Relativmächtigkeiten und wegen der äußerst schwierig anzubringenden Korrektur durch die sechste Schicht, dem Kalk, als optimal bezeichnet werden.

Herrn Dr. A. SCHREINER sei an dieser Stelle für seine geologische Beratung bei der Vorbereitung und Herrn Dr. P. MEISER für die Mitarbeit bei der Durchführung der Messungen im Aachtal und bei der Auswertung gedankt. Herrn Dr. K. DEPPERMAN und Herrn Dr. H. FLATHE dankt der Verfasser für anregende Diskussion.

Literatur

- [1] v. BARANOV, V. u. J. TASSENCOURT, Calcul mécanographique des diagrammes de sondage électrique, (Kurzfassung) Geophys. Prosp. VII. 1959.
- [2] DEPPERMAN, K., On the calculation of electrical resistivity curves, (Kurzfassung) Early Papers and History of the EAEG, Leiden 1961.
- [3] DEPPERMAN, K., Zur Berechnung geoelektrischer Widerstandskurven mit Hilfe des Magnetrommelrechners IBM 650. Unveröffentlichter Forschungsbericht der Bundesanstalt für Bodenforschung, Hannover 1959.
- [4] MOONEY, H. M. a. W. W. WETZEL, The potential about a point electrode and apparent resistivity curves for a two-three- and four-layer earth, University of Minnesota Press, Minneapolis 1956.
- [5] FLATHE, H., A practical method of calculating geoelectrical model graphs for horizontally stratified media, Geophys. Prosp. III, 1955.
- [6] ARCHIE, G. E., Electrical resistivity log as an aid in determining some reservoirs characteristics, Trans. AIME, Techn. Publ. 1422, 1942.

- [7] HUMMEL, J. N., A theoretical study of apparent resistivity in surface potential methods, Trans. Am. Inst. Min. and Met. Engineers, series Geoph. Prosp. 1932.
- [8] CAGNIARD, L., La prospection géophysique des eaux souterraines, Congres sur l'hydrologie des zones arides, UNESCO, Ankara 1952.
- [9] SOROKIN, L. W., Lehrbuch der geophysikalischen Methoden zur Erkundung von Erdöl-vorkommen, Berlin 1953.
- [10] LASFARGUES, P., Prospection électrique par courants continus. Paris 1957.
- [11] HAALCK, H., Lehrbuch der angewandten Geophysik, Teil II, 1958,
- [12] BENTZ, A., Lehrbuch der angewandten Geologie, Bd. 1, Stuttgart 1961.
- [13] KOEFORD, O., A generalized CAGNIARD graph for the interpretation of geoelectrical
- [14] "Abaques de Sondage Electrique", Companie Général de Géophysique, Geophys. Prosp. III, Supp. 3, 1955.

On the Electrical Feature of the Upper Stratosphere and Mesosphere

By S. C. Coroniti, H. Dolezalek, Wilmington ¹⁾ and H. Israël, Aachen ²⁾

[Eingegangen am 26. 10. 1961]

Summary: Recent measurements of energetic solar X-rays indicate that they penetrate to an altitude of 35 kms. As a result of the ensuing ionization, the electrical regime of the atmosphere between 30 to 80 km varies. Precise knowledge of the nature of this variation is lacking. To understand it is necessary to determine the variation with altitude of the quantities size and number of ions, the conductivity, and the electron density. These quantities can be measured by adapting present techniques to airborne carriers. More knowledge of these quantities will not only give a better understanding of the lower limit of the ionosphere but will also yield more information on the atmospheric electrical global current circuit.

Zusammenfassung: Neuere Messungen harter Röntgenstrahlen solaren Ursprungs haben gezeigt, daß diese bis in Höhen von etwa 35 km vorzudringen vermögen. Die daraus resultierende zusätzliche Ionisierung beeinflußt die elektrischen Eigenschaften der Atmosphäre zwischen 30 und 80 km Höhe, doch fehlt bisher jede genauere Kenntnis dieser Vorgänge. Daher sind Messungen der Höhenabhängigkeit der Zahlen der Ionen verschiedener Beweglichkeitsstufen, der elektrischen Leitfähigkeit und der Elektronendichten sehr erwünscht. Durch die Anpassung bereits bekannter Meßmethoden an verfügbare Meßinstrumententräger sollten diese Messungen prinzipiell durchführbar sein. Als ihr Resultat ist nicht nur eine bessere Kenntnis über die untere Grenze der Ionosphäre zu erwarten, sondern auch, daß eine Lücke unserer Information über den weltweiten luftelektrischen Stromkreis ausgefüllt wird.

One of the important unexplored regions of the upper atmosphere exists between 30 km to 70 km. As a result of rocket and satellite solar radiation measurements made during periods of sudden ionospheric disturbances, considerable scientific interest has been focussed on the physical processes within this region. These measurements, taken during solar flares of class 3 +, reveal that solar radiation consists of hard X-rays-, 1—8 Å ^[2], which produces ionization at altitudes of less

¹⁾ S. C. CORONITI and H. DOLEZALEK, Avco, Research and Advanced Development, 201 Lowell Street, Wilmington, Mass., USA.

²⁾ H. ISRAËL, Meteorolog. Observatorium Aachen des DWD.

than 50 km. Recent measurements by NRL^[4], during the summer of 1961, indicate the penetration of hard X-rays to an altitude of 35 km.

In the region of 30 km to 70 km the electron concentration is influenced by the intensity of ionizing radiation by the recombination rates of not only atomic and molecular but of small cluster of ions and by electron detachment and attachment rates. To understand which of these quantities prevail in physical processes throughout this region, it is necessary to determine the chemical, molecular, and atomic components and their density. The magnitude and the nature of these quantities will vary and change with altitude. It is the purpose of this note to suggest methods of measuring them.

In lower altitudes, up to 20 to 30 km, the electrical conductivity of the atmosphere is determined by the density of the so-called "small ions". According to the assumption of the majority of authors these small ions consist of clusters of approximately 10 to 20 molecules of the atmospheric gases around one electric charge of plus or minus $1,6 \cdot 10^{-19}$ coulombs. In the ionosphere the conductivity is determined practically only by free electrons. The transition is to be expected in the above mentioned region. We expect that this transition takes place in several steps: the cluster-ions will become smaller and finally go over into molecule ions, consisting of just one molecule with one electric charge. The mobility of these molecule ions might be different according to the chemical nature of the molecules. With the existence of free atoms the occurrence of atomic ions becomes probable. And finally the lifetime of the electrons with their very high mobility will be great enough to practically cancel out all influence of greater ions to the conductivity.

Beside the mobility two other essential atmospheric electric quantities are to be mentioned. They are the recombination coefficient in its different varieties and the attachment coefficient of the electrons. Their values vary with altitude. From measurements providing the ion spectrum in these altitudes much more information on these magnitudes as well as on mobility is to be expected.

The electrical conductivity of atmosphere from ground level to 30 km, due to small ions, has been measured by means of instrumented aircraft and balloon borne equipment. One measurement by NRL^[1] was made between 50 to 80 km. In these measurements, the mobility, which was assumed constant, was computed. Using a modified conductivity technique, the mobility of ions can be measured directly. These measurements will also yield the conductivity of atmosphere due to ions of a specified mobility. Hence, from these measurements, one can compute with a high degree of accuracy, the ion density, the size, and recombination rates. It is assumed, of course, that in addition to these measurements the electron density will be also measured simultaneously.

More knowledge of these quantities will not only give a better understanding of the lower limit of the ionosphere but will also yield more information on the

- 1 a Total conductivity parallel to the magnetic lines of force for the sunspot minimum
- 1 b the same for the sunspot maximum
- 2 a Total conductivity perpendicular to the magnetic lines of force for the sunspot minimum
- 2 b the same for the sunspot maximum
- 3 a HALL-conductivity for the sunspot minimum
- 3 b the same for the sunspot maximum

1 . . . 3 after SPREITER and BRIGGS [6]

- 4 a Total conductivity after ISRAËL und KASEMIR without consideration of free electrons and for $\alpha/p = \text{const.}$
- 4 b the same under consideration of free electrons for $(\alpha/p)^{0,3} = \text{const.}$
- 4 c the same for $\alpha/p = \text{const.}$

5 a Total conductivity after BOURDEAU, WHIPPLE Jr., and CLARK [7]

- 5 b negative polar conductivity, after the same authors
- 5 c positive polar conductivity after the same authors

6 a Total conductivity after STERGIS, CORONITI, and NAZAREK [7]

- 6 b negative polar conductivity after the same authors
- 6 c positive polar conductivity after the same authors

7 a Total conductivity after KUNKIS [5]

- 7 b positive polar conductivity after the same author
- 8 a Mean value of total conductivity close to the ground (schematic)
- 8 b negative polar conductivity after certain assumptions on the electrode-effect
- 8 c the same for the positive polar conductivity

atmospheric electrical global current circuit. As it is known, in an altitude of about 65 kms there is a layer the conductivity of which is assumed to be large enough to equalize the electrostatic potential around the globe in a time short enough to fit into the measurements made close to the ground ("Atmospheric Electric Equalizing Layer", [1]). But this height is only an estimation and with this statement it is not said that the equalizing currents will really flow in this altitude. A certain portion of them will flow under it, depending on the distance to the thunderstorm centers active at the moment of measurement. Another, probably much greater portion will flow in much higher altitudes since the conductivity increases with height also above 65 kms. Also this portion will depend on the thunderstorm centers and, thus, on latitude. The result of this will be the fact, that the atmospheric electric field in these altitudes will have a certain horizontal component. Another result might be, that the equalizing currents are partially flowing in a region where there occurs the elliptical decomposition of conductivity with respect to the direction of the electric field versus the magnetic field. This direction angle is changing with latitude, too. Finally, the influence of cosmic events on the atmospheric electric currents, so far considered by different authors with different results, might be more elucidated by measurements of ion spectra and field directions in the above mentioned layer between 30 and 70 kms.

All of these parameters can be measured by equipment installed in rockets or by equipment which can be parachuted from altitudes of 80 km. Sophisticated instrumentation could be developed for either method.

The mean free path is small enough up to 60 kms and more to use the well known method of perpendicular velocities for obtaining the ion spectra.

Figure 1 summarizes some available results concerning the electric conductivity from ground up to the ionosphere.

References:

- [1] R. E. BOURDEAU, E. C. WHIPPLE, jr., and J. F. CLARK: Analytic and Experimental Electric Conductivity between the Stratosphere and the Ionosphere. *Journ. Geophys. Res.* 64 (1959) 1363 ... 1370.
- [2] T. A. CHUBB, H. FRIEDMAN, and R. W. KREPLIN: Measurements Made of High-Energy X rays Accompanying Three Class 2 + Solar Flares. *Journ. Geophys. Res.* 65 (1960) 1831 ... 1832.
- [3] H. ISRAËL und H. W. KASEMIR: In welcher Höhe geht der luftelektrische Ausgleich vor sich? *Annales de Géophysique* 5 (1949) 313 ... 324.
- [4] R. W. KREPLIN — private communication.
- [5] A. KUNKIS: Researches on Air-Earth Current on High Mountains. Contract AF 61 (514)-640, Techn. Note No. 8, Aachen, 1956, 48 pages and 56 figures.
- [6] J. R. SPREITER, and B. R. BRIGGS: Theory of Electrostatic Fields in the Ionosphere. *Journ. Geophys. Res.* 66 (1961) 2345 ... 2354.
- [7] C. G. STERGIS, S. C. CORONITI, and A. NAZAREK: Conductivity Measurements in the Stratosphere. *Proc. Conf Atmos. Elec.*, May 1954; *Geophys. Res. Pap. ARDC* No. 42, p. 43 ... 52.

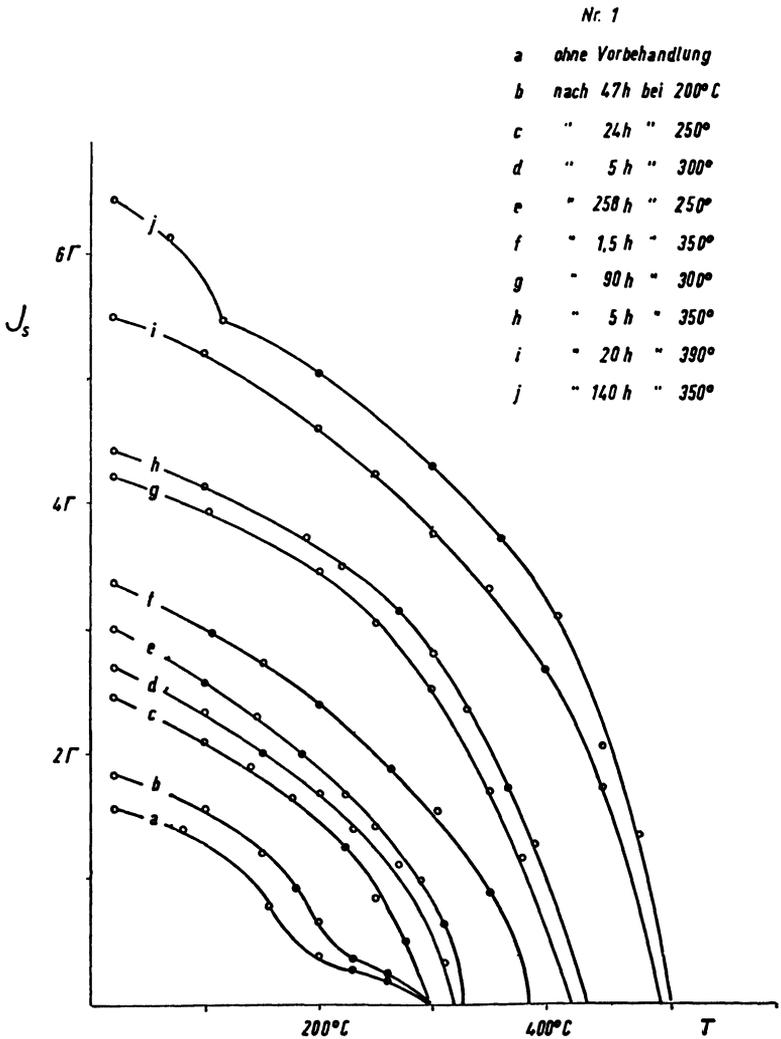
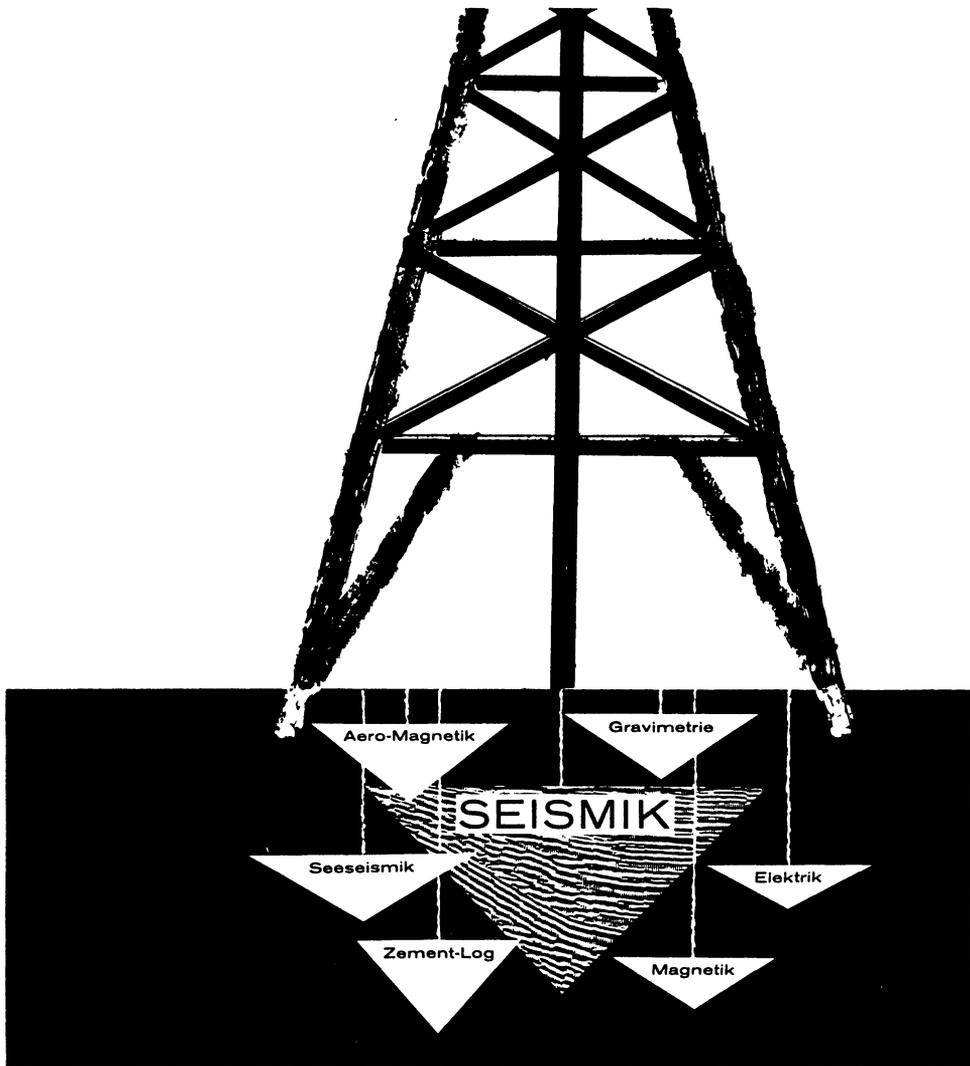


Figure 1: The electric conductivities of the atmosphere from the ground up to the ionosphere after different authors:

SEISMOS

beschafft für Sie Informationen aus dem Untergrund

Seismos G. m. b. H.,
Wilhelm-Busch-Straße 4,
Hannover.
Fernruf 7 08 31
Fernschreiber 09 22419



mit erfahrem Personal, modern ausgerüsteten Meßtrupps,
leistungsfähigem Abspielzentrum
und
elektronischer Datenverarbeitung

