

ZEITSCHRIFT
FÜR
G E O P H Y S I K

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

W. Dieminger, Lindau über Northeim

unter Mitwirkung von

B. Brockamp, Münster i. W. — *A. Defant*, Innsbruck — *W. Hiller*, Stuttgart — *K. Jung*, Kiel
E. A. Lauter, Kühlungsborn — *O. Lucke*, Berlin — *O. Meyer*, Hamburg — *F. Möller*, München
H. Reich, Göttingen

Jahrgang 33

1967

Heft 2



P H Y S I C A - V E R L A G · W Ü R Z B U R G

INHALTSVERZEICHNIS

THYSSEN, F.: Die Temperaturabhängigkeit der P-Wellengeschwindigkeit in Gletschern und Inlandeis	65
DATTA, B. K.: Das Spektrum seismischer Wellen bei der Reflexion an einer Übergangsschicht	80
SCHUCH, M. und R. WANKE: Strömungsspannungen in einigen Torf- und Sandproben	94
SCHREIBER, H.: Ein analytischer Weg zur Bestimmung der Elektronendichte in der Magnetosphäre aus Whistler-Daten	110
BEHRENS, J. und W. WEIGEL: Bemerkungen zu Blubberbeobachtungen bei sprengseismischen Messungen auf See	131
Kurzmittteilung:	
THYSSEN-BORNEMISZA, S.: Mit einem Seegravimeter bestimmte Horizontalgradienten . .	143
Ergänzung zum Vorlesungsverzeichnis (Wintersemester 1966/67)	145
Buchbesprechungen	145

DIE ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint zweimonatlich. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang (6 Hefte) 60,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrgangs vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu nummerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autornamen, Titel und Zeitschriftentitel auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur; etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Berechnung. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die *Zeitschrift für Geophysik* bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. WALTER DIEMINGER, Max-Planck-Institut für Aeronomie, 3411 Lindau über Northeim (Hann.)

Anschrift der *Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*:

2 Hamburg 13, Binderstraße 22, Postscheck: Hamburg Nr. 559 83

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., D 87 Würzburg, Werner-von-Siemens-Straße 5. Pers. haft. Ges.: Arnulf Liebing und Hildegund Holter, sämtlich Buchhändler in Würzburg. Kommanditistin: Gertrud Liebing, Würzburg.

Druckerel: R. Oldenbourg, Graph. Betriebe GmbH, München

Printed in Germany



PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1967

Die Temperaturabhängigkeit der P-Wellengeschwindigkeit in Gletschern und Inlandeisen

Von F. THYSSEN, Münster¹⁾

Eingegangen am 1. August 1966

Zusammenfassung: Der Einfluß von Temperatur, Mächtigkeit und Schmelzprozessen auf die Geschwindigkeit der P-Wellen in Eis wird diskutiert und eine empirische Formel für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von vorgenannten Größen angegeben. Die Formel beschreibt sowohl die seismische Geschwindigkeit auf Gletschern als auch die Maximalgeschwindigkeit in Inlandeisen.

Summary: The influence of temperature, thickness and melting on the velocity of P-waves in ice is discussed and an empirical formula for the dependence of the velocity on these parameters is given. The formula describes the seismic velocity on glaciers and the maximum velocity on ice caps.

Die elastischen Konstanten des Eises und damit die durch sie bestimmten seismischen Geschwindigkeiten sind temperaturabhängig. Versuche, diese Abhängigkeit zur Temperaturbestimmung mächtiger Inlandeise zu nutzen, begannen bald nach den ersten seismischen Arbeiten auf Gletschern und im grönländischen Inlandeis. Schon 1933 bzw. 1935 wurde von B. BROCKAMP [1933, 1935] diese Beziehung diskutiert. Dabei wurden sowohl Meßwerte von Alpengletschern als auch vom grönländischen Inlandeis herangezogen. ROBIN [1958] gab 1958 einen Temperatur-Koeffizienten der Geschwindigkeit an, der auf Messungen im Labor wie auch auf Feldmessungen beruhte.

Die bisher bekannt gewordenen Versuche, die Abhängigkeit der seismischen Geschwindigkeit von der Temperatur zu erfassen, können unter den nachstehend aufgeführten Gesichtspunkten ergänzt und erweitert werden.

Es wird im folgenden versucht, dieses Problem mit Hilfe des Materials der Gruppe Geophysik der E.G.I.G. I²⁾, Leitung B. BROCKAMP, sowie Untersuchungen des hiesigen Instituts an Gletschern und Meßergebnissen aus der Literatur neu zu behandeln.

¹⁾ Dr. FRANZ THYSSEN, Institut für Reine und Angewandte Geophysik der Universität Münster, Steinfurterstraße 107.

²⁾ Expedition Glaciologique Internationale au Groenland, 1959. An der Expedition waren die Länder Dänemark, Deutschland, Frankreich und die Schweiz beteiligt. Die Leitung lag bei einem internationalen Direktionskomitee; die technische Durchführung lag in Händen von P. E. VICTOR.

Die Meßgenauigkeit der für die folgenden Untersuchungen benutzten Werte ist nicht immer optimal; es ist jedoch zu beachten, daß eine Reihe von Messungen nicht für die Erfassung der Geschwindigkeit mit höchster Genauigkeit angelegt worden waren. Auf diese Unterlagen mußte jedoch zurückgegriffen werden, wodurch eine größere Streuung der Werte unvermeidbar war.

Trotz dieser Einschränkung ist die Abweichung von einem linearen Zusammenhang zwischen Temperatur und Geschwindigkeit größer, als durch Meßfehler zu erklären ist. Dieses gilt besonders dann, wenn die an Alpengletschern gemessenen Werte in die Untersuchung einbezogen werden.

Hält man als Näherung an einem linearen Zusammenhang zwischen Temperatur und Geschwindigkeit fest, so ist zu folgern, daß offenbar bisher noch nicht genügend berücksichtigte Parameter die P-Wellen-Geschwindigkeit mitbestimmen. Um die Temperaturabhängigkeit eindeutig erfassen zu können, wird daher unter den zur Verfügung stehenden Meßwerten nachfolgende Auswahl getroffen:

- I. Es werden nur Meßwerte der Geschwindigkeit benutzt, bei denen im Firngebiet die Maximalgeschwindigkeit sicher erreicht wurde. Dieses setzt im allgemeinen eine Auslage von 15–20facher Länge der seismisch bestimmten Firnmächtigkeit voraus.
- II. Es werden zur Bestimmung des Temperatur-Koeffizienten zunächst nur Werte verwendet, bei denen die Eismächtigkeit mindestens das 20–30fache der Wellenlänge der seismischen Wellen beträgt.

Die Abb. 1, der Meßwerte der EGIG zugrunde liegen, zeigt, daß der Temperatur-Koeffizient bei kleinen Auslagen stark von der Profillänge abhängig ist. Dieses ist auf den Einfluß des Firns zurückzuführen. Zur Illustration ist zusätzlich der von ROBIN [1958] in der Antarktis gemessene Temperatur-Koeffizient eingetragen. Von

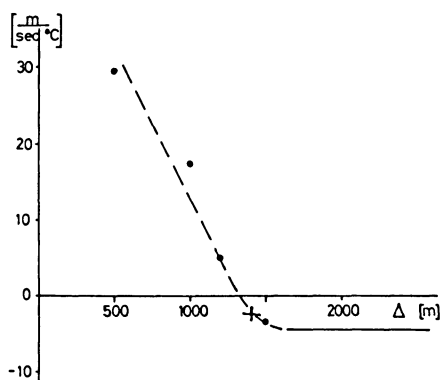


Abb. 1: Temperatur-Koeffizient der P-Wellengeschwindigkeit gegen die Profillänge aufgetragen. — • Werte der EGIG; + Wert nach ROBIN [1958].

einer bestimmten Entfernung an nimmt die Geschwindigkeit ihren größten und der Temperatur-Koeffizient bei der Maximalgeschwindigkeit seinen kleinsten Wert an. Vergleichbare Werte können daher nur gewonnen werden, wenn die Meßbedingungen die Erfassung dieser Maximalgeschwindigkeit erlauben. Diese Maximalgeschwindigkeit kann aber auch über die Ablagerungsbedingungen noch indirekt von der Temperatur abhängen; doch soll dieser Punkt nicht weiter erörtert werden, da er für die Zuordnung der im Felde gemessenen seismischen Geschwindigkeiten zur Temperatur nicht entscheidend ist. Die Unterschiede zwischen manchen Laborwerten und Feldbeobachtungen können hierin jedoch begründet sein.

Seismische Feldmessungen liefern Meßwerte, die im Gegensatz zu Ultraschallmessungen an kleinen Proben durch Mittelwertbildung über ein großes Probenvolumen entstehen. Die hier angegebenen Geschwindigkeiten sind daher nur mit Mittelwerten über eine größere Anzahl Messungen an kleineren Proben zu vergleichen. Der Temperatur-Koeffizient der Geschwindigkeit wird wegen der angegebenen Auswahlkriterien als Temperatur-Koeffizient der Maximalgeschwindigkeit mächtiger Inlandeise abgeleitet. Dieses hat zur Folge, daß auf eine mittlere Dichte des Eises über das untersuchte Probenvolumen von 0,90 bis 0,916 bezogen wird. Der genaue Wert ebenso wie seine Streuung und eine mögliche Abhängigkeit von der Temperatur wird hier nicht gesondert untersucht. Letztere ist indirekt im Temperatur-Koeffizienten der Maximalgeschwindigkeit enthalten. Der direkte Einfluß von Dichte und Firn auf die Geschwindigkeit wird nicht behandelt.

Nicht immer sind die notwendigen Angaben aus der Literatur vollständig zu gewinnen. Ohne auf die Erfassung aller in der Literatur angegebenen Werte Gewicht zu legen, ist in der Tabelle I, Nr. 12 bis 19, eine Anzahl Messungen aufgeführt, bei denen die Auswahlkriterien sicher erfüllt sind. Mit diesen Werten wird für die Temperaturabhängigkeit der Geschwindigkeit seismischer P-Wellen folgender Zusammenhang abgeleitet:

$$v = 3,75 - 4,5 \cdot 10^{-3} T \quad (\text{km/sec})$$

Dabei ist T die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$. Leider konnte nicht mit genügender Sicherheit geklärt werden, ob die in der Antarktis bei sehr tiefen Temperaturen gemessenen Geschwindigkeiten das Auswahlkriterium I erfüllen. Daher ist die obige Formel zunächst nur für den Temperaturbereich von etwas oberhalb der Schmelztemperatur bis -28° durch Meßwerte zu belegen.

Die Geschwindigkeit der P-Wellen im Bereich der Schmelztemperatur

Es ist üblich, die gemessenen Geschwindigkeiten in einem Diagramm abhängig von der Temperatur darzustellen. Diese Art der Darstellung ist jedoch in der Nähe des Schmelzpunktes unbefriedigend; in einem sehr kleinen Temperaturbereich fällt abhängig von den Verunreinigungen die Geschwindigkeit von der des Eises auf die des Wassers ab. Abb. 2 zeigt eine Darstellung für einen Modellversuch, bei dem (soweit

vorhanden) die experimentell bestimmten Konstanten, nämlich die Schmelzwärme und die gemittelte spezifische Wärme zwischen 0 und -30°C benutzt wurden. In dieser Darstellung wird als Abszisse die in einem gedachten Experiment einer Eisprobe gleichmäßig über das ganze Probenvolumen zugeführte Wärmemenge pro Gramm gewählt. Im Anfang befindet sich die Probe auf -30°C . Zunächst wird die Wärmemenge benutzt, um die Probe bis zur Schmelztemperatur aufzuwärmen. Dann wird die Wärme für den Schmelzprozeß verbraucht. Der Gehalt an Flüssigkeit in der Probe steigt an. Unterhalb der Schmelztemperatur wird der Temperatur-Koeffizient $-4,5 \cdot 10^{-3}$ (km/sec $^{\circ}\text{C}$) benutzt. (Das Eis wird als trockenes Eis bezeichnet. Vom Beginn des Schmelzens an wird die Abhängigkeit vom Wassergehalt wirksam; das Eis wird naß.) Soweit sich während des Schmelzprozesses durch den Salzgehalt noch die Temperatur ändert, ist dieses zu berücksichtigen.

Die Abhängigkeit der seismischen Geschwindigkeiten vom Wassergehalt ist für Gletschereis, soweit dem Verfasser bekannt, nicht untersucht. Es gibt jedoch Messungen an Meereis von M. P. LANGLEBEN und E. R. POUNDER [1963]. In ihrer Veröffentlichung sind die elastischen Konstanten des Meereises abhängig vom „brine-Gehalt“ angegeben. Für den E -Modul ergaben sich dabei für kaltes Eis und für Eis von nur wenigen Graden unter 0 zwei unterschiedliche lineare Zusammenhänge zwischen E -Modul und „brine-Gehalt“ b . Für das schmelzende Meereis treten Komplikationen auf, die es zweckmäßig erscheinen lassen, sich auf die bei kaltem Eis abgeleiteten Zu-

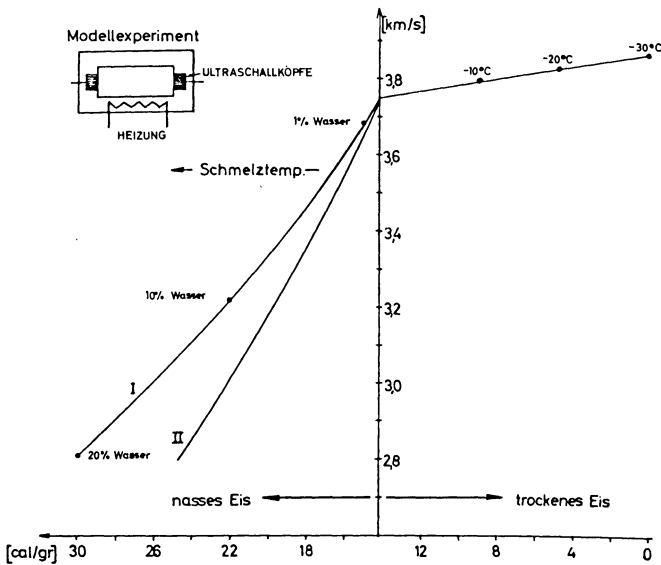


Abb. 2: Geschwindigkeit der seismischen P-Welle, abhängig von der zugeführten Wärmemenge. Unterhalb der Schmelztemperatur sind die Geschwindigkeitsabnahmen nach WYLLIE I [1956], LANGLEBEN und POUNDER II, eingetragen.

sammenhänge zu beschränken. Es scheint so, als ob bei kaltem Eis der E -Modul in einfacher Weise von b abhängt. Von LANGLEBEN und POUNDER wird bei hinreichender Unabhängigkeit der übrigen Parameter für den E -Modul folgender Zusammenhang abgeleitet:

$$E = (10,00 - 0,351 b) \cdot 10^{10} \quad (\text{dyn/cm}^2)$$

$$\sigma = 0,295; \quad \rho = 0,910; \quad T = -15^\circ\text{C}; \quad b = \text{brine-Gehalt.}$$

Mit Hilfe dieser Werte ist unter Verwendung des vorher abgeleiteten Temperaturkoeffizienten von $4,5 \text{ m/sec}^\circ\text{C}$ mit $b = 0$ die Kompressionswellengeschwindigkeit bei 0°C $3,75 \text{ km/sec}$. Für die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von b ergibt sich mit einer Näherung für kleine b -Gehalte $6 \text{ m/sec}^{0/100}$. Beschränkt man sich darauf, wegen des Fehlens direkter Messungen nur eine erste Näherung anzugeben, so kann dieser Wert auch bei der Abschätzung des Einflusses des Wassergehaltes auf die P-Wellen-Geschwindigkeit in Gletschereis und damit des Schmelzprozesses herangezogen werden.

Eine weitere Möglichkeit, den Einfluß des Wassergehaltes auf die Geschwindigkeit v abzuschätzen, wird durch die in der Lagerstättegeophysik bewährte Formel von WYLLIE [1956] gegeben. Diese bringt zwischen v , der Geschwindigkeit v_f des festen Anteils und der Geschwindigkeit v_{fl} des in den Poren enthaltenen Flüssigkeitsanteils b folgende Beziehung:

$$\frac{1}{v} = \frac{b}{v_{fl}} + \frac{1-b}{v_f}$$

Unter der Annahme, daß für die Geschwindigkeit des festen Anteils die des trockenen Eises mit seinen Lufteinschlüssen genommen und der Schmelzprozeß als Erzeuger eines zusätzlichen mit Wasser gefüllten Porenraumes angesehen wird, ergibt sich mit einer linearen Näherung für kleine Porositäten eine Verminderung der Geschwindigkeit von $6 \text{ m/sec}^{0/100}$.

In der Abb. 2 sind für das Modellexperiment die aus beiden Ergebnissen folgenden Abhängigkeiten vollständig eingetragen. Bei größeren Wassergehalten laufen die beiden Kurven auseinander. Sieht man jedoch von den oberen Schichten der Gletscher ab, so ist eine Begrenzung auf kleine Wassergehalte hinreichend.

Nimmt man nach einer Zusammenstellung von LLIBOUTRY [1964] für das Innere (nicht permeable Eis) eines Gletschers einen Wassergehalt von $0,0$ bis $0,6\%$ und einen Mittelwert nahe bei $0,1\%$ an (Mer de Glace), so läßt sich eine Verminderung der Geschwindigkeit der P-Wellen in temperierten Gletschern von ca. 40 m/sec und im Mittel von weniger als 10 m/sec erklären. Wesentlich größere Effekte können dabei in den oberen Schichten der Gletscher auftreten. AMBACH [1956] hat für den Vernagtferner in 15 cm Tiefe einen Wassergehalt von 3% abgeleitet (Juli 1952), der auf eine Verminderung der Wellengeschwindigkeit von ca. 200 m/sec führen würde.

Die an Gletschern gemessenen sehr viel kleineren Geschwindigkeiten der seismischen Wellen lassen sich für das impermeable Gletscherinnere durch den Einfluß des Wassergehaltes nicht erklären. Darüber hinaus folgt, daß auch Gletscher mit stark negativen Temperaturen, sofern man die für Inlandeis abgeleiteten Temperaturkorrekturen anwendet, eine seismische Geschwindigkeit ähnlich niedrig wie die der Alpengletscher aufweisen (z. B. Tabelle I, Nr. 8). Bei diesem Eis ist der Wassergehalt sicher noch weit geringer als bei den temperierten Alpengletschern.

Nachstehend soll der Einfluß der Geometriebedingungen auf die Geschwindigkeit der P-Wellen in Gletschern und Inlandeisen diskutiert werden. Hierbei ist unter dem „Einfluß der Geometriebedingungen“ die Einwirkung von Mächtigkeit und Ausdehnung auf die Geschwindigkeit der P-Wellen zu verstehen.

Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit der P-Welle von den Geometriebedingungen auf Gletschern

Die Formen vieler Gletscher und Randgebiete von Inlandeisen lassen sich in erster Näherung mit Platten vergleichen; im Zungenbereich nimmt der Gletscher häufig eine Keilform an. Die Mächtigkeit kann Werte unter 10 m im Zungenbereich und mehrere 1000 m im Inneren der Inlandeise erreichen.

Zur Untersuchung der Eismächtigkeit werden für seismische Zwecke durch Sprengungen Erschütterungen ausgelöst. Ihr Frequenzspektrum enthält stärkere Anteile im Bereich von 10–300 Hz. Das Frequenzspektrum wird durch Firn und Temperatur beeinflusst. Ein entscheidendes Gewicht für die im Seismogramm aufgezeichneten Frequenzen erhält darüber hinaus die Frequenz-Charakteristik der zur Registrierung eingesetzten Apparatur. Es ist üblich, als Frequenz des ersten Einsatzes im Seismogramm die Frequenz anzugeben, die sich aus dem ersten Viertel der Schwingung ableiten läßt. Ohne auf die Problematik hier näher einzugehen, ist dieses Verfahren benutzt worden, wenn Registrierungen zugänglich waren oder wenigstens eine Abbildung in der herangezogenen Veröffentlichung vorlag. Einige Arbeiten enthalten direkt Frequenzangaben, ohne daß in allen Fällen ersichtlich war, in welcher Art diese gewonnen worden waren. Diese Werte wurden benutzt, soweit keine Registrierung eine eigene Bestimmung erlaubte. Bei Tabelle I, Nr. 11, waren keine Angaben gemacht, und so wurde, da die gleiche Apparatur wie bei Tabelle I, Nr. 2, benutzt worden war, die Frequenz wie bei Nr. 2 angenommen. Bei sehr großen Mächtigkeiten ist die Angabe der Frequenz unkritisch. Bei fehlenden Frequenzangaben wurden die Frequenzwerte ausgelassen. Theoretische Untersuchungen wie auch Experimente an Modellkörpern [FUCHS 1965, GUTDEUTSCH 1962 u. a.] ergeben eine Abnahme der Geschwindigkeit der P-Wellen, wenn die Wellenlänge vergleichbar mit der Mächtigkeit wird. Als Parameter tritt das Produkt aus Frequenz ν und Mächtigkeit H auf. Bei großen Werten von $\nu \cdot H$ geht die Geschwindigkeit in die Vollraumgeschwindigkeit über, bei sehr kleinen Werten von $\nu \cdot H$ wird die Geschwindigkeit der Plattenwelle erreicht. Die Theorie ist nicht genügend weit entwickelt, um den Zusammen-

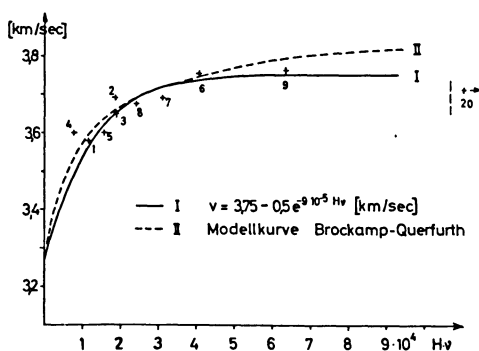
Tabelle I.

Nr.	Meßwert	Temperatur	Meßwert	Mächtigkeit	Frequenz	Meßwert	Ort (Literatur)
	[km/sec]	[°C]	$-4,5 \cdot 10^{-4} \cdot T$			[m]	
1	3,58	0	3,58	280	41,5	3,76 (0,18)	Pasterze [Brockamp u. Mothes 1930]
2	3,72	-6,5	3,69	150	125	3,78 (0,09)	Weststation Grönland [Brockamp u. Wölcken 1933]
3	3,65	0	3,65	270	70	3,74 (0,09)	Pasterze [Brockamp u. Arndt 1958]
4	3,60	0	3,60	110	70*	3,85 (0,25)	Gepatschferner [Förtsch, Schneider u. Vidal 1955]
5	3,60	0	3,60	215	70*	3,73 (0,13)	Hintereisferner [Förtsch u. Vidal 1956]
6	3,81	-13,3	3,75	254	160*	3,76 (0,01)	Baffin Islands [Röthlisberger 1955]
7	3,72	-5,8	3,69	200 gesch.	160*	3,72 (0,03)	„ „
8	3,70	-5,5	3,675	150	160*	3,74 (0,06)	„ „
9	3,76 $\pm 0,01$	0	3,76	550	115*	3,76 (0,00)	Alaska-Mala- spina-Gletscher [Allen u. Smith 1953]
10	3,60	0	3,60	195	60*	3,77 (0,17)	Rhone-Gletscher [Gerecke u. Müller 1932]
11	3,80	-11	3,75	300 Mittelw.	125 gesch.	3,76 (0,01)	Tschajew-Gl. N.-Semlja [Wölcken 1961]
12	3,80	-10	3,76	700	80	3,76 (0,00)	C. IV Grönland [Joset u. Holtz- scherer 1953]

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr.	Meßwert [km/sec]	Temperatur [°C]	Meßwert $-4,5 \cdot 10^{-3} \cdot T$	Mächtigkeit [m]	Frequenz [Hz]	Meßwert + geometr. - temp. Korrektur [km/sec]	Ort (Literatur)
13	3,835	-17	3,76	1440	80	3,76 (0,00)	C. VI Grönland [Joset u. Holtz- scherer 1953]
14	3,82	-17	3,74	1440	80	3,74 (0,00)	C. VI Grönland [Brockamp u. Kohnen 1966]
15	3,83	-19	3,74	1510	80	3,74 (0,00)	P. N. Grönland [Brockamp u. Kohnen 1966]
16	3,865	-25,5	3,75	1830	80	3,75 (0,00)	N.-Grönland [Bentley, Pomeroy u. Dorman 1957]
17	3,88	-28	3,75	3110	80	3,75 (0,00)	S. C. Grönland [Brockamp u. Kohnen 1966]
18	3,85 Mittelw.	$-22 \pm 2,6$ Mittelw.	3,75	1660 Mittelw.	—	3,75 (0,00)	Antarctic Penninsula [Behrend 1963]
19	3,865	-28	3,74		—	3,74 (0,00)	Byrd-Land Antarktis [Bentley 1964]
20	3,71 Mittelw.	0	0	0,12	2 MHz Ultra- schall	3,71 (0,00)	Pasterze 1965

hang bei den komplizierten Formen und Übergängen zwischen einzelnen Formen, welche an Gletschern und Randgebieten von Inlandeisen auftreten, berechnen zu können. Es ist daher hier als Näherung eine empirische Formel aufgestellt worden. Diese beschreibt die Verhältnisse in der Nähe der Vollraumgeschwindigkeit. Für den Übergang zur Plattenwelle ist sie nicht mehr brauchbar. Die Formel wurde unter Verwendung der Werte 1—11 der Tabelle I abgeleitet. Dabei ist bei den Gletschern und Inlandeisen mit negativer Temperatur zunächst die vorher abgeleitete Temperaturkorrektur angebracht worden. Die Abb. 3 zeigt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der P-Wellen und dem Produkt $\nu \cdot H$.

Abb. 3: Zusammenhang zwischen $\nu \cdot H$ und v .

Die ausgezogene Kurve entspricht der empirischen Formel.

Die gestrichelte Kurve gibt Messungen an Eisplatten [BROCKAMP-QUERFURTH 1964] wieder.

Als Näherung für die in der Abb. 3 aufgezeigten Zusammenhänge wurde ein Exponentialansatz gewählt. Es ergibt sich damit für v bei 0°C :

$$v = 3,75 - 0,5 e^{-9 \cdot 10^{-5} \nu \cdot H} \quad (\text{km/sec})$$

$$\nu = \text{Frequenz (Hz)}; \quad H = \text{Mächtigkeit (m)}$$

Eine von BROCKAMP-QUERFURTH [1964] an Eisproben gemessene Modellkurve ist zur Veranschaulichung beigelegt. Die bei diesem Modellexperiment benutzten Geometriebedingungen differieren ebenso wie die Temperaturverteilung gegenüber den Verhältnissen an Gletschern. Die angegebene Formel ist belegt für Mächtigkeiten ab etwa 100 m, für Frequenzen ab etwa 40 Hz und damit für das Produkt $f \cdot H = 4000 \text{ m/sec}$.

Als empirische Formel für die Geschwindigkeit der P-Wellen auf Gletschern und Inlandeisen folgt bei Berücksichtigung der Temperatur und der Geometriebedingungen:

$$v = 3,75 - 0,5 e^{-9 \cdot 10^{-5} \nu \cdot H} - 4,5 \cdot 10^{-3} T \quad (\text{km/sec})$$

$$\nu = \text{Frequenz (Hz)}; \quad H = \text{Mächtigkeit (m)}; \quad T = \text{Temperatur in } ^\circ\text{C}$$

Die Abb. 4 stellt die in der Tabelle I aufgeführten Werte und die mit der obigen Formel berechneten gegenüber.

Abb. 4 zeigt, daß die angegebene Formel die Geschwindigkeit der P-Wellen in Eis mit genügender Genauigkeit erfaßt. Es ist somit möglich, die Geschwindigkeit der P-Welle zu berechnen. Um die Temperaturabhängigkeit deutlich herauszustellen, enthält die folgende Abb. 5 die auf sehr große Mächtigkeiten reduzierten Werte der Tabelle I.

Die in der Abb. 5 eingetragene Gerade stellt die schon früher abgeleitete Temperaturabhängigkeit dar. Die Streuung der Werte bei null Grad ist deutlich größer als die der Meßwerte bei stark negativen Temperaturen. Dieses ist auf die besonderen Bedingungen zurückzuführen, die bei Messungen auf Gletschern auftreten und die zunächst bei der Ableitung der obigen Formel vernachlässigt wurden.

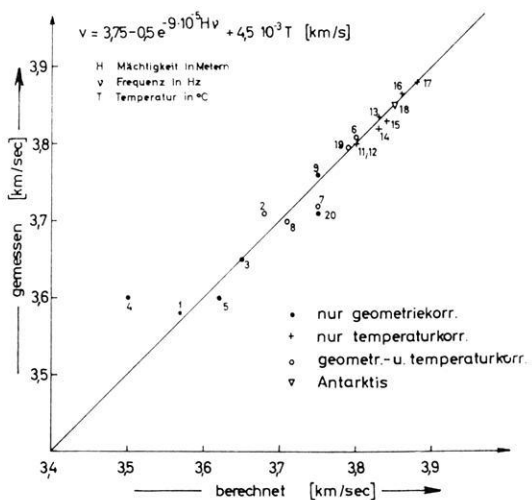


Abb. 4: Zusammenstellung der gemessenen und der nach der o. a. Formel berechneten Werte für die P-Wellengeschwindigkeit in Eis.

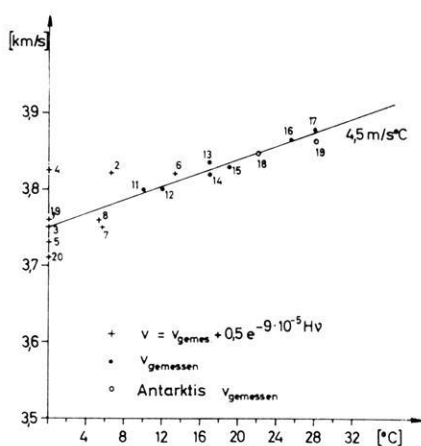


Abb. 5: Darstellung der auf sehr große Mächtigkeiten reduzierten Geschwindigkeiten der P-Wellen und ihre Abhängigkeit von der Temperatur.

Der Einfluß der Verwitterungszone, der Profillänge und der Mächtigkeit auf die Geschwindigkeitsbestimmungen der P-Welle auf Gletschern

Ein Gletscher stellt sich zunächst als eine einheitliche Eismasse dar; diese Auffassung ist jedoch bei genauerer Diskussion nicht haltbar. Durch Strahlung und Schmelzwässer ebenso wie durch Regen wird die obere Schicht des Gletschers verändert. Die Tiefe, bis zu der diese Veränderungen noch bemerkbar werden, ist von den meteorologischen Verhältnissen abhängig. Darüber hinaus dürfte die Anzahl und Verteilung der Spalten im Eis und die Dränage eine Rolle spielen. Diese Verwitterung der obersten Schichten des Eises kann je nach den Abflußbedingungen zur Erhöhung des Luftgehaltes oder aber des Wassergehaltes führen. In nicht sehr oberflächennahen Verwitterungsschichten wird im allgemeinen der Wassergehalt bis zu einer gewissen Tiefe zunehmen. Dieses bewirkt eine Geschwindigkeitsabnahme der P-Wellen in der Art, wie sie vorher für den Wassergehalt diskutiert wurde. Durch den Luftgehalt in den obersten Dezimetern wird eine weit stärkere Verminderung der P-Wellen-Geschwindigkeiten auftreten. Diese Effekte werden sich besonders bei kleinen Profillängen zeigen. Die Laufzeitkurve wird im Anfang gekrümmt sein, ähnlich wie Firn auf Gletschern und Inlandeisen eine Krümmung der Laufzeitkurve bewirkt. Da die Tiefenwirkung der Verwitterung unterschiedlich ist, können zusätzlich Scheingeschwindigkeiten auftreten.

Bei Profillängen, die groß gegenüber der Mächtigkeit des Gletschers sind, wird die Geschwindigkeit erkennbar, die bei dünnen Gletschern durch die schon vorher diskutierten Geometrie-Effekte beeinflusst ist. Zwischen beiden Geschwindigkeitsbereichen kann die wahre Vollraumgeschwindigkeit des Eises dann erkennbar werden, wenn die Verwitterung im Verhältnis zur Mächtigkeit des Gletschers nicht zu tief greift und die Mächtigkeit nicht so gering ist, daß die Geometrie-Effekte schon bei geringen Entfernungen in der Laufzeitkurve bemerkbar sind. In der Abb. 6 ist der Sachverhalt skizziert.

Die Aufteilung der Laufzeitkurve auf Gletschern in drei Bereiche ist nur bei kleinen Geophonabständen zu erfassen. Bei zu großen Abständen zwischen den Geophonen wird ein Mittelwert für die Geschwindigkeit gewonnen. Dieser liegt für im Verhältnis zur Mächtigkeit große Profillängen bei der durch die Geometriebedingungen bestimmten Geschwindigkeit. Dieses gilt auch deshalb, weil sich Schwankungen in der Mächtigkeit der Verwitterungszone über die große Länge des Profils im allgemeinen herausmitteln. Eine mögliche systematische Zunahme der Verwitterungsschicht in Profiltrichtung, z. B. vom Firnbereich zur Zunge eines Gletschers hin, bleibt in ihrem Einfluß auf die Geschwindigkeit jedoch erhalten und muß im Zusammenhang mit einem Gegenschuß diskutiert werden.

Bei kleinen Profillängen wird die Geschwindigkeitsbestimmung schwierig, wenn der Geophonabstand nicht sehr eng ist und kein Gegenschuß vorliegt. Es können dann sowohl sehr große wie sehr kleine Scheingeschwindigkeiten auftreten.

Die Abb. 7 zeigt zwei Laufzeitkurven, die im Rahmen der Arbeiten des Instituts für Geophysik der Universität Münster am 28. August 1965 auf dem Pasterzenkees ge-

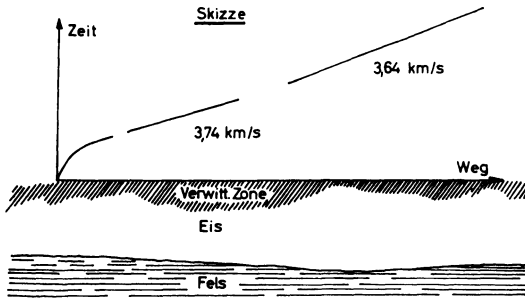


Abb. 6: Skizze der Laufzeitkurve und der Verwitterung auf Gletschern.

wonnen wurden. An diesem Tage war die Gletscheroberfläche im Arbeitsgebiet weißlich durch den Luftgehalt der obersten Eisschichten. Der Einfluß der Verwitterungszone ist in den Laufzeitkurven deutlich zu erkennen.

Die Laufzeitkurven sind im Anfang gekrümmt und erreichen auf der kurzen Entfernung von 40 m die Geschwindigkeiten 3,74 km/sec bzw. 3,45 km/sec im Gegenschuß. Es liegt also eine Scheingeschwindigkeit vor. Das Profil der Abb. 7 könnte als Einzelfall angesehen werden, da es nur selten möglich ist, alle Profile in so dichter Geophonfolge zu besetzen wie den in Abb. 7 angegebenen Profilschnitt. Aus diesem Grunde wurden alle im August 1965 gewonnenen Profile zur Interpolation heran-

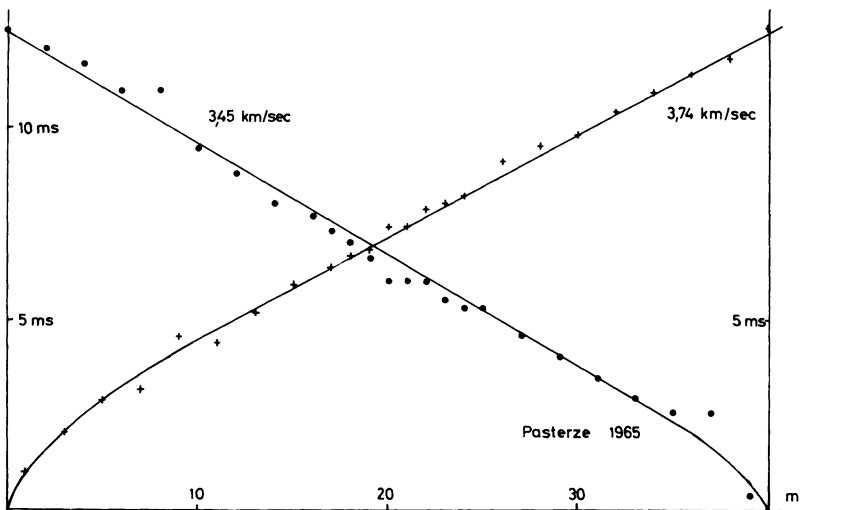


Abb. 7: Laufzeitkurven von Schuß und Gegenschuß auf dem Pasterzenkees 1965, Einfluß der Verwitterungszone.

gezogen. Dazu wurde zwischen den ausgewerteten Einsatzzeiten und Wegstücken die Intervallgeschwindigkeit gebildet und für die angegebenen Entfernungsbereiche gemittelt. Dieses Verfahren führte zu folgendem Ergebnis:

Entfernung (m)	Geschwindigkeit v (km/sec)
0—100	3,46
100—350	3,71
350—Felseinsatz	3,66

Da die Einsatzzeiten nur auf eine Millisekunde genau sind, folgt eine größere Streuung der Werte.

Ultraschallmessungen auf der Pasterze bei den vorher schon erwähnten Arbeiten des hiesigen Instituts ergaben als Mittelwert über alle (teilweise stark schmelzenden) Proben 3,71 km/sec. Bei einer Auswahl nicht so deutlich schmelzender Proben war der Mittelwert 3,74 km/sec. Zu diesen Messungen waren die Proben an verschiedenen Stellen der Gletscherzunge aus einigen Metern Tiefe gewonnen worden.

Die in der Literatur angegebenen Geschwindigkeitswerte berücksichtigen die Aufgliederung der Laufzeitkurve in drei Bereiche im allgemeinen nicht, es müßte als zusätzlicher Parameter die Profillänge noch berücksichtigt werden. Dieses wurde jedoch bei der hier angegebenen Behandlung des Problems vernachlässigt. Die Profillängen sind fast immer so groß, daß die durch die Geometriebedingungen bestimmte Geschwindigkeit im wesentlichen zur Auswirkung kommt. Der angegebene Sachverhalt hat jedoch eine über den Rahmen der üblichen Meßgenauigkeit hinausgehende Streuung der Meßwerte für die Geschwindigkeit zur Folge.

Unter der Annahme, daß im impermeablen Gletscherinneren der Wassergehalt der temperierten Gletscher bei etwa 0,1% liegt, ist eine Korrektur von 6 m/sec an die Geschwindigkeit der P-Welle anzubringen. Ihr Einfluß auf die Größe der Geometrie-korrektur ist gering und wird vernachlässigt.

Die empirische Formel für die Geschwindigkeit der P-Wellen in Gletschern und Inlandeisen lautet mit einer ersten Näherung zur Berücksichtigung des Wassergehaltes:

$$v = 3,75 - 0,5 e^{-9 \cdot 10^{-5} \nu \cdot H} - 4,5 \cdot 10^{-3} T - 6 \cdot 10^{-3} \cdot b \quad (\text{km/sec})$$

Dabei ist ν = Frequenz (Hz), H = Mächtigkeit (m), T = Temperatur in °C und b = Wassergehalt in ‰.

Die in der angegebenen Formel abgeleitete Geschwindigkeit der P-Wellen für Gletscher und Inlandeise wird in ihrer Abhängigkeit von Temperatur, dem Produkt aus Mächtigkeit und Frequenz und dem Wassergehalt durch Schmelzprozesse oder Lauge-reste beschrieben. Die Abhängigkeit vom auflastenden Druck wurde ebenso wie eine mögliche Anisotropie des Eises vernachlässigt.

Die hier erläuterten Zusammenhänge erlauben eine genauere Temperaturbestimmung in Inlandeisen. Darüber hinaus wird durch die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Mächtigkeit eine kritische Diskussion der mit den Verfahren der Reflexions- und Refraktionsseismik bisher bestimmten Gletschermächtigkeiten erforderlich.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. B. BROCKAMP, möchte ich auch an dieser Stelle meinen Dank für zahlreiche Anregungen und Hinweise aussprechen. Darüber hinaus danke ich allen Kollegen, insbesondere den Herren R. ARNDT, H. QUERFURTH, H. KOHNEN und H. R. THAKE für die Unterstützung bei der Durchführung der vorliegenden Untersuchung.

Literatur

- ALLEN, C. R. und G. I. SMITH: Seismic and Gravity Investigations on the Malaspina Glacier, Alaska. Trans. Amer. Geophys. Union, 34, 755—760, 1953.
- AMBACH, W.: Zur Bestimmung des Luft- und Schmelzwassergehaltes des Gletschereises. Z. Gletsch. Glazialgeol., 3, 297—304, 1956.
- BEHRENDT, J. C.: Seismic Measurements on the Ice Sheet of the Antarctic Peninsular. Journ. of Geophys. Res., 68, 5971—5990, 1963.
- BENTLEY, C. R., POMEROY, P. W. und H. J. DORMAN: Seismic Measurements on the Greenland Ice Cap. Annales de Geophys., 13/4, 253—285, 1957.
- BENTLEY, C. R.: The Structure of Antarctica and its Ice Cover. Res. in Geoph., Vol. 2, 335—389, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.
- BROCKAMP, B. und H. MOTHES: Seismische Untersuchungen auf dem Pasterzegletscher I. Zeitschr. f. Geoph., 482—499, 1930.
- BROCKAMP, B. und K. WÖLCKEN: Die seismischen Ergebnisse der Hauptexpedition bis „km 120“. Wiss. Ergebn. d. Deutschen Grönland-Exp. Alfred Wegener 1929 und 1930/31, Bd. II, 1933.
- BROCKAMP, B.: Überlegungen zur Temperaturverteilung im Inlandeis auf Grund seismischer Ergebnisse. Wiss. Ergebn. d. Deutschen Grönland-Exp. Alfred Wegener 1929 und 1930/31, Bd. III, 1935.
- BROCKAMP, B. und R. ARNDT: Pers. Mitteilung. 1958.
- BROCKAMP, B. und H. QUERFURTH: Untersuchungen über die Elastizitätskonstanten von See- und Kunsteis. Zeitschr. Polarf. 34, 1/2, 253—262, 1964.
- BROCKAMP, B. und H. KOHNEN: Ein Beitrag zu den seismischen Untersuchungen auf dem Grönländischen Inlandeis. Zeitschr. Polarf. (im Druck), 1966.
- FÖRTSCH, O., SCHNEIDER, H. J. und H. VIDAL: Seismische Messungen auf dem Gepatsch- und Kesselwandferner in den Öztaler Alpen. Gerl. Beitr. z. Geoph., 64, 233—261, 1955.
- FÖRTSCH, O. und H. VIDAL: Die Ergebnisse der seismischen Messungen auf dem Hintereisferner in den Öztaler Alpen 1954. Gerl. Beitr. z. Geoph., 65, 131—156, 1956.

- FUCHS, K.: Investigation on the Wave Propagation. *Zeitschr. f. Geoph.*, 31, 51—89, 1965.
- GERECKE, F. und H. K. MÜLLER: Seismische Untersuchungen des Geophysikalischen Institutes in Göttingen I, Messungen auf dem Rhonegletscher. *Zeitschr. f. Geoph.*, 8, 65—71, 1932.
- GUTDEUTSCH, R.: Über Vielfacheinsätze elastischer Wellen an Schichten. *Zeitschr. f. Geoph.*, 28, 11—46 und 53—78, 1962.
- JOSET, A. und HOLTZSCHERER, J. J.: Etudes des Vitesses de Propagation des Ondes Seismiques sur l'Inlandseis du Groenland. *Annales de Geophys.*, 9, 329—344, 1953.
- LANGLEBEN, M. P. und E. R. POUNDER: Elastic Parameters of Sea, Ice and Snow, Herausgeb. Kingery, W. D., 69—78, MIT Press, Cambridge, Mass., 1963.
- LLIBOUTRY, L.: *Traité de Glaciologie*. 107—108, Masson u. Cie., Paris, 1964.
- ROBIN, G. de Q.: Seismic Shooting and Related Investigations. *Glaciology III*, Norsk Polar-institut, Oslo, 1958.
- RÖTHLISBERGER, H.: Studies in Glacier Physics on the Penny Ice Cap Baffin Island 1953, Part III, Seismic Sounding. *J. of Glaciology*, 539—552, 1955.
- WÖLCKEN, K.: Seismische Eisdickenmessungen auf Nowaja Semlja 1932/33. *Zeitschr. Polarf.*, V, 1/2, 87—91, 1961.
- WYLLIE, M. R. J., GREGORY, A. R., GARDNER, L. W.: Elastic Wave Velocities in Heterogeneous and Porous Media. *Geophysics*, Vol. XXI, Nr. 1, 41—70, 1956.

Das Spektrum seismischer Wellen bei der Reflexion an einer Übergangsschicht

Von B. K. DATTA, Clausthal-Zellerfeld¹⁾

Eingegangen am 28. Juni 1966

Zusammenfassung: Die Übergangsschicht wird gewöhnlich definiert als eine Schicht, in der sich die Geschwindigkeit mit der Tiefe linear verändert. Jedoch ist der Geschwindigkeitsgradient einer solchen Schicht an den Grenzen diskontinuierlich. Eine bessere Näherung der Wirklichkeit wäre eine Schicht mit kontinuierlichem Geschwindigkeitsgradienten. In dieser Arbeit wird ein theoretisches Modell einer Schicht behandelt, die diese Bedingung erfüllt. Man findet, daß in einer solchen Schicht die Amplitude der reflektierten Wellen bei zunehmenden Frequenzen monoton abnimmt, im Gegensatz zur Übergangsschicht mit linearer Geschwindigkeitsänderung, wo die Amplitude eine Serie von Nullpunkten durchläuft mit dazwischenliegenden abnehmenden Maxima.

Summary: The transition layer is usually defined as a layer in which velocity varies linearly with depth. However, the velocity gradient in such a layer is discontinuous at the boundaries. A better approximation of the reality would be a transition layer with continuous velocity gradient. In this paper a theoretical model of transition layer is considered which satisfies this condition. It is found that in such a layer the amplitude of reflected waves decreases monotonously as the frequency increases, in contrast to the case of transition layer with linear velocity law, for which the amplitude goes through a series of zeros with decreasing maximum amplitude between them.

1. Einleitung

Die Übergangsschicht ist von verschiedenen Autoren als eine Schicht definiert worden, in der die Geschwindigkeit mit der Tiefe linear zu- oder abnimmt [WOLF 1937, BERRIMAN, GOUPILLARD und WATERS 1958, BORTFELD 1960]. Das Problem der Reflexion von einer ähnlichen Schicht wurde erstmalig von RAYLEIGH [1945] in der Akustik und später in der Seismologie von SEZAWA und KANAI [1935] behandelt. Auch in letzter Zeit sind eine Reihe von Arbeiten über dieses Problem veröffentlicht worden [PETERSON, FILLIPONE and COHER 1955, WUENSCHEL 1960, MENZEL und ROSENBAACH 1957, 1958a, 1958b, DATTA 1956, SCHOLTE 1961]. Es wird jedoch (außer bei [MENZEL et. al. 1958b]) bei allen diesen Arbeiten vorausgesetzt, daß die Dichte konstant bleibt und die Geschwindigkeit sich linear verändert. Die Arbeiten von

¹⁾ Dr. BINOD K. DATTA, Institut für Theoretische Physik der TH Clausthal, Clausthal-Zellerfeld.

MENZEL und ROSENBACH stellen eine Ausnahme dar, da in ihnen neben der oben beschriebenen Schicht auch der Fall mit sowohl variabler Geschwindigkeit als auch variabler Dichte behandelt und betont wird, daß hauptsächlich der Gradient des Schallwiderstandes das Spektrum der seismischen Wellen bestimmt. SCHOLTE hat theoretisch einen allgemeinen Fall mit variabler Dichte und Geschwindigkeit behandelt, sich jedoch bei seinem Beispiel wie die zuerst zitierten Autoren auf lineare Geschwindigkeitsveränderungen und konstante Dichte beschränkt.

Dieses theoretische Modell einer Übergangsschicht ist jedoch nicht ganz befriedigend, da sie an der oberen und unteren Grenzschicht Unstetigkeiten des Schallwiderstandsgradienten aufweisen. Die wirkliche Übergangsschicht hat vermutlich fließende Grenzen, d. h. ihr Schallwiderstandsgradient ist überall, innerhalb der Schicht sowohl als an den Grenzen, stetig. In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, wie diese Art der Übergangsschicht das Spektrum reflektierter seismischer Wellen beeinflußt.

2. Wellengleichung

Wir betrachten eine Übergangsschicht mit der Dichte $\rho(z)$ und der Geschwindigkeit $V(z)$ zwischen zwei Halbräumen mit den Geschwindigkeiten V_1 und V_2 . Nehmen wir an, eine longitudinale Planwelle pflanzt sich in dem oberen Halbraum fort und läuft in Normalenrichtung durch die Übergangsschicht auf den unteren Halbraum zu.

In diesem Fall kann die Bewegungsgleichung folgendermaßen geschrieben werden

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} [(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z}] = \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

worin u die Verschiebung bedeutet.

Nun führen wir das Potential Φ ein, definiert durch

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Nach Einsetzen dieses Wertes in (1) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\rho(z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \rho(z) V^2(z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Unter der Annahme konstanter Dichte reduziert sich obige Gleichung zu

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - V(z)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

und wenn Φ proportional $\exp(i\omega t)$, ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 \Phi}{V(z)^2} = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung kann jedoch nur für einige spezielle Formen von $V(z)$ gelöst werden, z. B. wenn $V(z)$ sich linear oder exponentiell mit z verändert. Wie jedoch zuvor besprochen, sind diese Fälle für unser Problem nicht geeignet, da sie Unstetigkeiten des Geschwindigkeitsgradienten an den Grenzen aufweisen.

Eine besondere Form der Geschwindigkeitsveränderung, die die Bedingung des kontinuierlichen Überganges erfüllt, kann mathematisch wie folgt ausgedrückt werden:

$$V(z) = A \left[\left(1 + \exp \left\{ \frac{z - z_m}{H_s} \right\} \right) / \left(1 + B \exp \left\{ \frac{z - z_m}{H_s} \right\} \right) \right]^{1/2}, \quad (5)$$

worin

$$A = V_1$$

$$B = V_1^2 / V_2^2$$

$$H_s = H/n$$

H = effektive Dicke der Schicht

n = ein Parameter zur Bestimmung des Maßstabes der Übergangsschicht, der so gewählt wird, daß $th \ n/2 \approx 1$ und $th \ (-n/2) \approx -1$ ist.

Wenn $(z - z_m)/H_s$ groß und negativ: $V(z) \rightarrow V_1$;

ist $(z - z_m)/H_s$ groß und positiv: $V(z) \rightarrow V_2$.

Der Verlauf von $V(z)$ ist in Abb. 1 für $V_1 = 2000$ m/s und $V_2 = 4000$ m/s dargestellt.

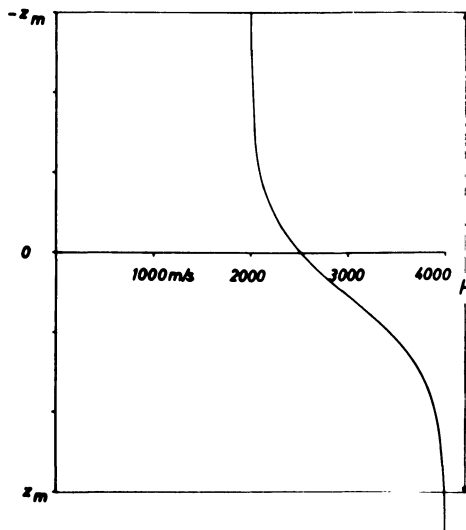


Abb. 1: Geschwindigkeitsverlauf als Funktion der Tiefe nach Gleichung (5).

3. Eine Methode zur Lösung der Wellengleichung

Da in der gegebenen Form (4) nur für einige bestimmte Fälle von Geschwindigkeitsänderungen, die jedoch nicht die in (5) dargestellte einschließen, analytisch lösbar ist, erhebt sich die Frage nach einer allgemeineren Differentialgleichung zweiter Ordnung, die unseren Zwecken besser entspricht. Die allgemeinste Gleichung dieser Art ist eine Differentialgleichung der FUCHSSchen Klasse, bekannt als Gauß-Gleichung oder hypergeometrische Gleichung, deren Lösungen viele Funktionen der mathematischen Physik als spezielle oder Grenzfälle einschließen. Nach ähnlichen Gedankengängen untersuchte EPSTEIN [1930] die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einer inhomogenen absorbierenden Ionosphäre. Es gelang ihm, durch Einsatz der Eigenschaften hypergeometrischer Funktionen die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für eine breite Auswahl von Ionosphärenmodellen zu finden.

Die von ERDELYI et al. [14] gegebene hypergeometrische Gleichung lautet

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2} + [c - (a+b+1)\zeta]\frac{du}{d\zeta} - abu = 0, \quad (6)$$

worin a, b, c von z unabhängig sind.

EPSTEIN gebrauchte eine andere Form der Gleichung, und auch seine Symbole a, b, c bedeuten etwas anderes.

Im Folgenden wird gezeigt, daß durch passende Zuordnung der Werte für a, b, c die Gl. (6) der Gl. (4) gleichwertig ist, wobei die Geschwindigkeit entsprechend (5) variiert.

Wenn wir eine neue unabhängige Variable

$$\delta = \frac{z - z_m}{H_s} = \log(-\zeta) \quad (7)$$

einführen, wird (6) transformiert zu

$$(1 + e^\delta)\frac{d^2u}{d\delta^2} - [c + (a+b)e^\delta - 1]\frac{du}{d\delta} + abe^\delta u = 0. \quad (8)$$

Diese Gleichung kann wiederum in eine normierte Gleichung verändert werden, indem die Transformation

$$\Phi = u(1 + e^\delta)^{(a+b-c+1)/2} \exp[1/2(c-1)\delta] \quad (9)$$

eingeführt wird.

Gl. (8) wird auf diese Art nach Einführung der unabhängigen Variablen z

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{1}{4H_s^2} [\{(a+b-c+1)(a+b-c-1) + [(c-1)^2 - (a-b)^2](1+e^\delta)\} \frac{e^\delta}{(1+e^\delta)^2} - (c-1)^2] \Phi = 0 \quad (10)$$

Gl. (10) ist der Gl. (4) gleichwertig, vorausgesetzt, daß der Koeffizient von Φ in (10) gleich dem Wert ω^2/V^2 ist, in dem V von (5) bestimmt wird. Das bedeutet

$$\left. \begin{aligned} (a+b-c+1)(a+b-c-1) &= 0 \\ \frac{(c-1)^2}{4H_s^2} &= -\frac{\omega^2}{V_1^2} \\ \frac{(a-b)^2}{4H_s^2} &= -\frac{\omega^2}{V_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} a+b-c &= \pm 1 \\ c-1 &= \pm 2i \frac{\omega}{V_1} H_s \\ a-b &= \pm 2i \frac{\omega}{V_2} H_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Hier können wir entweder negative oder positive Werte einsetzen. Die Wahl ist willkürlich, da sie die Endresultate nicht beeinflusst. Bei der Wahl negativer Werte erhalten wir

$$\begin{aligned} a &= -i\omega H_s \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \\ b &= i\omega H_s \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \\ c &= 1 - 2i \frac{\omega}{V_1} H_s \end{aligned} \quad (13)$$

Wenn wir daher die hypergeometrische Gl. (6) lösen und mit Hilfe dieser Lösungen die Ausdrücke für Reflexions- und Transmissionskoeffizienten durch die Parameter a, b, c dargestellt finden und die Werte dieser Parameter von (13) einsetzen, so können wir unser Problem als gelöst betrachten.

Gl. (6) hat drei Singularitäten: bei $\zeta = 0$, $\zeta = \infty$ und $\zeta = 1$. Da es eine Gleichung zweiter Ordnung ist, gibt es entsprechend drei Paare linear unabhängiger Lösungen, und jedes Lösungspaar konvergiert in der Nähe seines eigenen singularen Punktes. Es wird ausreichen, wenn wir die Lösungen in den Bereichen von $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ untersuchen.

Wir beginnen mit dem sigularen Punkt $\zeta = 0$. Um eine Lösung zu erhalten, versuchen wir erst eine Reihenlösung mit ansteigenden Potenzen von ζ .

Setzt man

$$u = \zeta^x (1 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots) \quad (14)$$

in (6) ein; so ergibt sich daraus durch Koeffizientenvergleich der sukzessiv ansteigenden Potenzen von ζ

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 1 + c) &= 0 \\ a_1(\alpha + 1)(\alpha + c) &= \alpha(\alpha + a + b) + ab \\ a_2(\alpha + 2)(\alpha + c + 1) &= a_1\{(\alpha + 1)(\alpha + a + b + 1) + ab\} \\ &\dots\dots\dots \\ a_n(\alpha + n)(\alpha + c + n - 1) &= a_{n-1}\{(\alpha + n - 1)(\alpha + a + b + n - 1) + ab\}. \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen entnimmt man

$$\alpha = 0 \text{ oder } \alpha = 1 - c.$$

So erhalten wir die folgenden zwei Lösungen

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} \zeta + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1) \cdot 1 \cdot 2} \zeta^2 + \dots \\ &+ \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)\Gamma(n+1)} \zeta^n + \dots \\ &= F(a, b; c; \zeta), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= (\zeta)^{1-c} \left\{ 1 + \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{(2-c) \cdot 1} \zeta \right. \\ &+ \left. \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{(2-c)(3-c) \cdot 1 \cdot 2} \zeta^2 + \dots \right\} \\ &= (\zeta)^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; \zeta). \end{aligned} \tag{16}$$

Um die Lösungen für den singularen Punkt $\zeta = \infty$ zu finden, wenden wir eine Reihe absteigender Potenzen von ζ an. Setzt man

$$u = \zeta^\alpha \left(1 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right) \tag{17}$$

in (6) ein, dann erhält man durch Koeffizientenvergleich der sukzessiv absteigenden Potenzen von ζ

$$\begin{aligned} (\alpha + a)(\alpha + b) &= 0 \\ a_1\{(\alpha - 1)(\alpha + a + b - 1) + ab\} &= \alpha(\alpha - 1 + c) \\ a_2\{(\alpha - 2)(\alpha + a + b - 2) + ab\} &= a_1(\alpha - 1)(\alpha - 2 + c) \\ &\dots\dots\dots \\ a_n\{(\alpha - n)(\alpha + a + b - n) + ab\} &= a_{n-1}(\alpha - n + 1)(\alpha - n + c). \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen entnimmt man $\alpha = -a$ oder $\alpha = -b$.

So erhalten wir die folgenden Lösungen

$$u_3 = (\zeta)^{-a} F\left(a, a - c + 1; a - b + 1; \frac{1}{\zeta}\right), \quad (18)$$

$$u_4 = (\zeta)^{-b} F\left(b, b - c + 1; b - a + 1; \frac{1}{\zeta}\right). \quad (19)$$

Die Reihen (15) und (16) konvergieren nur, wenn $|\zeta| < 1$ und können daher im Fall $|\zeta| > 1$ nicht als Lösung von (6) angesehen werden. Gleichermassen können die Reihen (18) und (19) nur im Fall $|\zeta| > 1$ als Lösung angesehen werden. Durch die Methode der analytischen Fortsetzung können diese Lösungen jedoch über den Bereich ihrer Konvergenz mit der entsprechenden Reihe hinaus erweitert werden. In dem neuen Bereich erhalten wir dann drei Lösungen, eine durch Fortsetzung des ersten Bereiches, und zwei durch die Gl. (15) und (16) bzw. (18) und (19). Da es nur zwei linear unabhängige Lösungen in jedem Bereich geben kann (da Gl. (6) von zweiter Ordnung ist), muß es einen linearen Zusammenhang mit konstanten Koeffizienten zwischen diesen drei Lösungen geben. Auf diese Weise erhalten wir die Lösungen in der Form

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_{11}u_3 + \lambda_{12}u_4 & (a) \\ u_2 &= \lambda_{21}u_3 + \lambda_{22}u_4 & (b) \\ u_3 &= \lambda_{31}u_1 + \lambda_{32}u_2 & (c) \\ u_4 &= \lambda_{41}u_1 + \lambda_{42}u_2 & (d) \end{aligned} \quad (20)$$

Als Beispiel wollen wir u_1 betrachten. Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung können wir es in einer der Gl. (20a) ähnlichen Form ausdrücken, gültig sowohl diesseits als auch jenseits des Bereiches $|\zeta| < 1$.

Wir erreichen dies durch folgenden Zusammenhang [ERDELYI 1953]

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-\zeta)^s ds, \quad (21)$$

worin $|\arg(-\zeta)| < \pi$ und worin der Integrationsweg in der Weise angelegt ist, daß er die Pole bei $s = 0, 1, 2, \dots$ von den Polen bei $s = -a - n$ und $s = -b - n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) des Integranden trennt. Vorausgesetzt, daß a, b, c nicht gleich $0, -1, -2, \dots$, ist es immer möglich, einen solchen Integrationsweg zu finden.

Dies kann auf folgende Weise gezeigt werden. Betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-\zeta)^s ds. \quad (22)$$

Wir wählen den Integrationsweg derart, daß er bei $|\zeta| < 1$ alle Pole von $\Gamma(-s)$ einschließt und alle Pole von $\Gamma(a+s)$ und $\Gamma(b+s)$ ausschließt, siehe Abb. 2a.

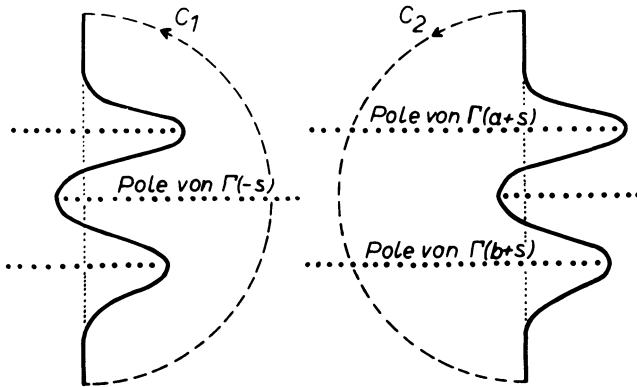


Abb. 2: Integrationsweg für Integral (22) bei a) \$|\zeta| < 1\$, b) \$|\zeta| > 1\$.

Wenn der Radius des Halbkreises \$C_1 = \infty\$, ist der Beitrag des Halbkreises zum Integral gleich Null [WHITTAKER and WATSON 1927].

Durch den Residuensatz erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-\zeta)^s ds &= -\sum \\ & \text{(Residuen in den Punkten } s = 0, 1, \dots) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} \zeta^n \right] \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; \zeta) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} u_1, \end{aligned} \quad (23)$$

wodurch (21) bewiesen ist.

Nun betrachten wir die analytische Fortsetzung von (21) im Bereich \$|\zeta| > 1\$. In diesem Fall kann die Kontur des Integrals nicht durch einen rechtsseitigen, sondern nur durch einen linksseitigen Halbkreis \$C_2\$ geschlossen werden, siehe Abb. 2b. Nach den gleichen Gedankengängen wie vorher kann bewiesen werden, daß das Integral in (22) die Summe der Beiträge der beiden Polgruppen auf der linken Seite des Integrationsweges \$C_2\$ ist, so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} u_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b-a-n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(c-a-n)\Gamma(n+1)} (-\zeta)^{-a-n} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-b-n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c-b-n)\Gamma(n+1)} (-\zeta)^{-b-n}. \end{aligned} \quad (24)$$

Gebrauchen wir nun die Formeln

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}$$

oder

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)} = (-1)^n \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)},$$

so können wir (24) in folgender Form schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} u_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\Gamma(a)(a-c+1)(a-c+2)\dots(a-c+n)\Gamma(b-a)}{(a-b+1)(a-b+2)\dots(a-b+n)\Gamma(c-a)} \\ &\quad \times (-\zeta)^{-a} (\zeta)^{-n} (-1)^{2n} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)\Gamma(b)(b-c+1)(b-c+2)\dots(b-c+n)\Gamma(a-b)}{(b-a+1)(b-a+2)\dots(b-a+n)\Gamma(c-b)\Gamma(n+1)} \\ &\quad \times (-\zeta)^{-b} (\zeta)^{-n} (-1)^{2n} \quad (25) \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)} (-1)^{-a} (\zeta)^{-a} F\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{\zeta}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(a)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)} (-1)^{-b} (\zeta)^{-b} F\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{\zeta}\right). \end{aligned}$$

So wird

$$u_1 = (-1)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} u_3 + (-1)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} u_4. \quad (26)$$

Gleichermaßen erhalten wir

$$u_2 = (-1)^{1-c-a} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(b+1-c)} u_3 + (-1)^{1-c-b} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(a+1-c)} u_4, \quad (27)$$

$$(-1)^{-a} u_3 = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)} u_1 - (-1)^{c-1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(2-c)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} u_2 \quad (28)$$

und

$$(-1)^{-b} u_4 = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)} u_1 - (-1)^{c-1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)\Gamma(b)} u_2. \quad (29)$$

Die Lösungen (26) bis (29) haben die Form von Gl. (20).

4. Bestimmung des Reflexionsfaktors

Nun wollen wir die Variable Φ untersuchen, die mit jeder dieser Lösungen verbunden ist.

Zuerst, wenn \mathfrak{z} groß und negativ ist, ist $-\zeta = e^{\mathfrak{z}}$ sehr klein im Vergleich zu Eins, und die Transformation (9) wird

$$\Phi = u \exp\left[1/2(c-1)\mathfrak{z}\right]. \quad (30)$$

In diesem Bereich erhält man zwei Lösungen, nämlich u_1 und u_2 ; für große negative Werte erhält man bei Anwendung von (15) und (16)

$$u_1 = 1$$

und

$$u_2 = (\zeta)^{1-c} = (-1)^{1-c} \exp[(1-c)\zeta].$$

Entsprechend gibt es bei Anwendung von (13) zwei Werte für

$$\Phi_1 = \exp[(c-1)\zeta/2] = \exp(-i\omega V_1^{-1}z) \exp(i\omega V_1^{-1}z_m) \quad (31)$$

und

$$\Phi_2 = (-1)^{1-c} \exp(i\omega V_1^{-1}z) \exp(-i\omega V_1^{-1}z_m). \quad (32)$$

Diese Gleichungen zeigen klar, daß bei großen negativen Werten von ζ zwei Wellen vorhanden sind, die in entgegengesetzten Richtungen laufen. So können wir Φ_1 als einfallende und Φ_2 als reflektierte Welle ansehen.

Wenn ζ groß und positiv ist, wird e^ζ sehr groß im Vergleich zu Eins, und die Transformation (9) wird

$$\Phi = u \exp[(a+b)\zeta/2]. \quad (33)$$

In diesem Bereich befinden sich die beiden Lösungen u_3 und u_4 ; für große und positive Werte von ζ liefern sie bei Gebrauch von (13)

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= (\xi)^{-a} \exp[(a+b)\zeta/2] \\ &= (-1)^{-a} \exp[(b-a)\zeta/2] \\ &= (-1)^{-a} \exp(i\omega V_2^{-1}z) \exp(-i\omega V_2^{-1}z_m) \end{aligned} \quad (34)$$

sowie gleichermaßen

$$\begin{aligned} \Phi_4 &= (-1)^{-b} \exp[(a-b)\zeta/2] \\ &= (-1)^{-b} \exp(-i\omega V_2^{-1}z) \exp(i\omega V_2^{-1}z_m) \end{aligned} \quad (35)$$

Hier stellt Φ_3 eine nach oben laufende Welle unterhalb der Übergangsschicht dar, welche nicht vorhanden sein kann, wenn die einzige Energiequelle oberhalb der Übergangsschicht liegt. Φ_4 ist die durch die Übergangsschicht hindurchgehende Welle.

Nun müssen wir eine Lösung finden, die den Zusammenhang zwischen einfallender, reflektierter und hindurchgehender Welle herstellt, und diese Lösung darf Φ_3 nicht enthalten. Die einzige Lösung für diese Voraussetzung ist (29).

So können wir als Lösung oberhalb der Übergangsschicht festhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)} \exp(-i\omega V_1^{-1}z) \exp(i\omega V_1^{-1}z_m) \\ & - \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)\Gamma(b)} \exp(i\omega V_1^{-1}z) \exp(-i\omega V_1^{-1}z_m) \end{aligned} \quad (36)$$

Unterhalb der Übergangsschicht erhalten wir

$$\exp(-i\omega V_2^{-1} z) \exp(i\omega V_2^{-1} z_m) \quad (37)$$

Daher ist der Reflexionsfaktor bei $z = 0$

$$\begin{aligned} R &= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)\Gamma(b)} \exp(-2i\omega V_1^{-1} z_m) \\ &= -\frac{\Gamma(1-2i\omega V_1^{-1} H_s) \Gamma[1+i\omega H_s(1/V_1+1/V_2)] \Gamma[i\omega H_s(1/V_1+1/V_2)]}{\Gamma(1+2i\omega V_1^{-1} H_s) \Gamma[1+i\omega H_s(1/V_2-1/V_1)] \Gamma[i\omega H_s(1/V_2-1/V_1)]} \\ &\quad \times \exp(-2i\omega V_1^{-1} z_m) \end{aligned} \quad (38)$$

d. h.

$$\begin{aligned} R &= -\frac{(1/V_2-1/V_1)}{(1/V_2+1/V_1)} \times \frac{\Gamma(1-2i\omega V_1^{-1} H_s)}{\Gamma(1+2i\omega V_1^{-1} H_s)} \left[\frac{[1+i\omega H_s(1/V_2+1/V_1)]}{[1+i\omega H_s(1/V_2-1/V_1)]} \right]^2 \\ &\quad \times \exp(-2i\omega V_1^{-1} z_m) \end{aligned} \quad (39)$$

Es ist interessant zu vermerken, daß bei $H \rightarrow 0$ der obige Ausdruck zu

$$R = -\frac{1/V_2-1/V_1}{1/V_2+1/V_1} = \frac{V_2-V_1}{V_1+V_2}$$

wird, welches einfach die Fresnel-Formel für Reflexionen an scharfen Trennflächen darstellt.

Für den absoluten Wert von $|R|$ erhalten wir einen einfacheren Ausdruck

$$\begin{aligned} |R| &= (R \times R^*)^{1/2} \\ (R^* &= \text{konjugierte komplexe Zahl von } R) \end{aligned}$$

Daher folgt aus (38)

$$\begin{aligned} R \times R^* &= \frac{\Gamma(1-2i\omega V_1^{-1} H_s) \Gamma(1+2i\omega V_1^{-1} H_s) \Gamma[1+i\omega H_s(1/V_1+1/V_2)]}{\Gamma(1+2i\omega V_1^{-1} H_s) \Gamma(1-2i\omega V_1^{-1} H_s) \Gamma[1+i\omega H_s(1/V_2-1/V_1)]} \\ &\quad \frac{\Gamma[1-i\omega H_s(1/V_1+1/V_2)] \Gamma[i\omega H_s(1/V_1+1/V_2)] \Gamma[-i\omega H_s(1/V_1+1/V_2)]}{\Gamma[1-i\omega H_s(1/V_2-1/V_1)] \Gamma[i\omega H_s(1/V_2-1/V_1)] \Gamma[-i\omega H_s(1/V_2-1/V_1)]} \end{aligned}$$

Bei Anwendung der Formel

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (40)$$

erhalten wir

$$R \times R^* = \frac{sh^2 [\omega H_s(1/V_1-1/V_2) \pi]}{sh^2 [\omega H_s(1/V_1+1/V_2) \pi]} \quad (41)$$

d. h.

$$|R| = \frac{\operatorname{sh} \left[\omega H_s (1/V_1 - 1/V_2) \pi \right]}{\operatorname{sh} \left[\omega H_s (1/V_1 + 1/V_2) \pi \right]} \quad (42)$$

Auch hier sehen wir wieder, wie bei

$$\frac{\omega H_s}{V_1} = 2 \pi \frac{H_s}{\lambda} \rightarrow 0$$

(λ = Wellenlänge der einfallenden Welle)

$$|R| \rightarrow \frac{V_2 - V_1}{V_1 + V_2},$$

d. h. für sehr große Wellenlänge oder sehr geringe Dicke der Übergangsschicht wird $|R|$ durch die Fresnel-Formel für scharfe Trennflächen gegeben, wie es auch sein sollte. Andererseits wird bei sehr kurzen Wellen oder sehr großer Dicke der Übergangsschicht, d. h. $H_s/\lambda \rightarrow \infty$,

$$|R| \rightarrow \exp \left(-2 \pi \frac{\omega}{V_2} H_s \right) \rightarrow 0 \quad (43)$$

Das bedeutet bei großen Werten von H/λ , daß der Reflexionsfaktor bei zunehmenden Werten von H/λ exponentiell abnimmt.

5. Numerische Beispiele

Wir wollen das Verhalten von $|R|$ an Beispielen erläutern. Nehmen wir eine Geschwindigkeitsänderung von 2000 m/s bis 4000 m/s und von 2000 m/s bis 2500 m/s an: dann zeigen Abb. 3 und 4 wie $|R|$ sich mit $2 \pi H/\lambda$ verändert. Wir sehen den bedeutenden Unterschied zwischen dem Spektralcharakter der Reflexion von einer Übergangsschicht mit stetigem Geschwindigkeitsgradienten und dem einer Reflexion von einer Übergangsschicht mit unstetigem Geschwindigkeitsgradienten. Zum Beispiel geht $|R|$ bei einer Übergangsschicht mit linearer Geschwindigkeitsänderung für Integralwerte von $n\pi$ durch eine Reihe von Nullwerten, mit abnehmenden Maxima zwischen denselben (siehe [WOLF 1937]). Bei der stetigen Übergangsschicht gemäß Gl. (5) und Abb. 3 und 4 nimmt $|R|$ bei zunehmendem $2 \pi H/\lambda$ dagegen monoton ab. Außerdem ist im ersteren Fall für große Werte von H/λ der Wert von $|R|$ umgekehrt proportional zu H/λ , wogegen bei letzterem Fall $|R|$ sich exponentiell mit H/λ verändert, gemäß Gl. (43).

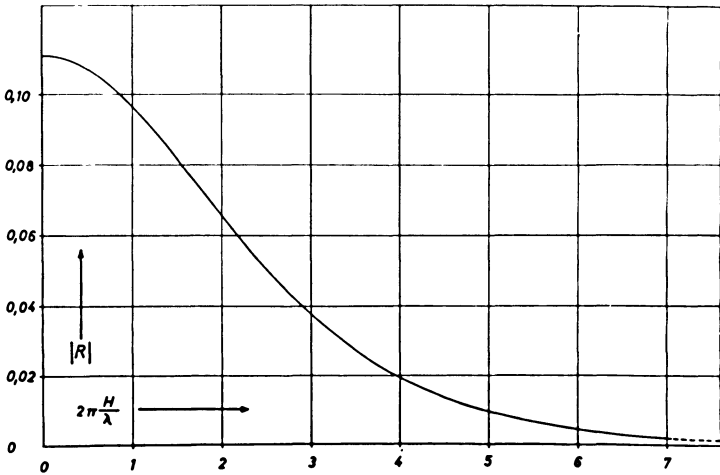
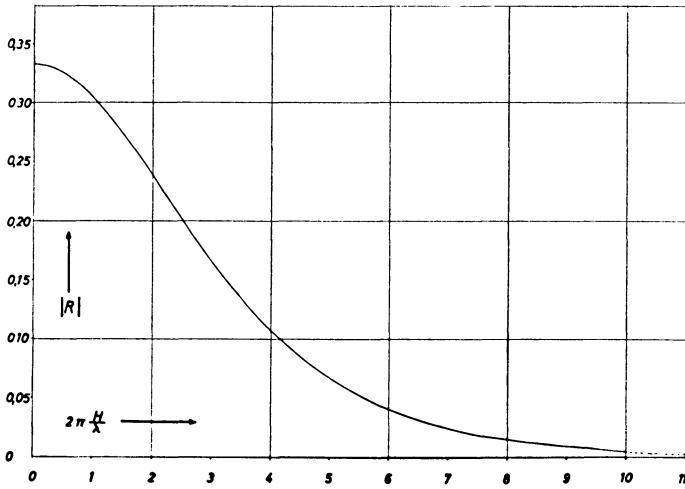


Abb. 3 und 4: Verlauf des Reflexionskoeffizienten R als Funktion der Schichtdicke $2\pi H/\lambda$ für die Geschwindigkeitsänderung von 2000 bis 4000 m/s (Fig. 3) und 2000 bis 2500 m/s (Fig. 4).

Ich danke meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. MENZEL, Institut für die Physik des Erdkörpers, Universität Hamburg, für die Anregung zu dieser Arbeit und für förderndes Interesse.

Literatur

- BERRYMAN, L. H., P. L. GOUPILLARD and K. H. WATERS: Reflections from multiple transition layers, Part I and II. *Geophysics* 23, Nr. 2, 223—252, 1958.
- BORTFELD, R.: Seismic waves in transition layers. *Geophysical Prospecting* 8, 178—217, 1960.
- DATTA, A. N.: Longitudinal propagation of elastic disturbance for linear variation of elastic parameters. *Indian Journ. Theor. Phys.* 4, 43—50, 1956.
- EPSTEIN, P.: Reflection waves in an inhomogeneous absorbing medium. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 16, 627, 1930.
- ERDELYI, A. (Herausgeber): Higher transcendental functions, vol. I. California Inst. of Technology, Bateman manuscript project McGraw-Hill Book Comp. Inc. 1953.
- MENZEL, H., und O. ROSENBACH: Theoretische Untersuchungen über den Einfluß der Verwitterungsschicht auf das Spektrum elastischer Wellen in der Reflexionsseismik. *Geophysical Prospecting* 5, 328—348, 1957.
- MENZEL, H., und O. ROSENBACH: Bemerkung über den Einfluß der Verwitterungsschicht auf das Spektrum seismischer Wellen. *Geofisica Pura e Applicata*, Milano, 40, 36—40, 1958.
- MENZEL, H., und O. ROSENBACH: The influence of a layer complying with a linear velocity law on the shape of seismic pulses. *Geophysical Prospecting* 6, 408—432, 1958.
- PETERSON, R. A., W. R. FILLIPONE and F. B. COHER: The synthesis of seismograms from well-log data. *Geophysics* 20, 516—538, 1955.
- RAYLEIGH, LORD (JOHN WILLIAM STRUTT): *Theory of Sound*, 2nd. Ed., reprinted by Dover. Publications, New York, 1945.
- SCHOLTE, J. G. J.: Propagation of waves in inhomogeneous media. *Geophys. Prosp.* 9, 86, 1961.
- SEZAWA, K., and K. KANAI: The effect of sharpness of discontinuities on the transmission of a reflection of elastic waves. *Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo)*, 13, 750—756, 1935.
- WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: *A course of modern analysis*. 4th Ed., Cambridge University Press 1927.
- WOLF, A.: Reflection of elastic waves from transition layers of variable velocity. *Geophysics* 2, 357—363, 1937.
- WUENSCHEL, P. C.: Seismogram synthesis including multiples and transmission coefficients. *Geophysics* 25, 106—129, 1960.

Strömungsspannungen in einigen Torf- und Sandproben

M. SCHUCH und R. WANKE, München¹⁾

Eingegangen am 3. März 1966

Zusammenfassung: In der vorliegenden Arbeit wurden elektrische Strömungsspannungen (Elektrodenabstand $a = 0,2$ [m]) in einigen Torf- und Sandproben als Funktion des Druckgradienten untersucht. Bei den Torfproben war die Strömungsspannung (elektrische Feldstärke $E = U/a$ [V/m]) stets eine lineare Funktion des Druckgradienten (Abb. 4—5). Die Linearität der Strömungsspannung gegenüber dem Druckgradienten war bei den Sandproben ab einem bestimmten Gradienten nicht mehr gegeben (Abb. 6—8). Mit Hilfe der Messung der elektrolytischen Leitfähigkeit σ , der Viskosität η und der Dielektrizitätskonstanten ϵ konnte das ζ -Potential bestimmt werden (Tabelle 4). Die ζ -Potentiale bei den Torfproben betragen bis zu $37 \cdot 10^{-3}$ [V], während sie bei den Sandproben sogar einen Wert von 2,3 [V] erreichen können. Die Bodenproben wurden auf ihre Wasserdurchlässigkeit untersucht (Tabelle 5 und 6). Es ergab sich eine befriedigende Übereinstimmung mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen. Eine numerische Abschätzung des Strömungspotentials etwa $10 \cdot 10^{-3}$ [V] an Hand von Daten chemischer Analysen und der gemessenen elektrolytischen Leitfähigkeit bilden den Abschluß der Arbeit.

Summary: In this paper electrical streaming potential (distance of electrodes $a = 0,2$ [m]) in some peatmoss and sand samples were examined as a function of the pressure gradient. In the peatmoss samples the streaming potential (electrical field $E = U/a$ [V/m]) was always a linear function of the pressure gradient. The linearity of the streaming potential in relationship to the pressure gradient was not given after a certain pressure gradient in the sand samples. It was possible to determine the ζ -potential with the help of the measurements of the electrolytical conductivity σ , the dynamic viscosity η and the dielectric constant ϵ . The ζ -potentials in the peatmoss samples amount up to $37 \cdot 10^{-3}$ [V], whereas they can amount to 2,3 [V] in the sand samples. The used samples were examined for their conductivity. A satisfactory agreement with the known results of the literature was reached. In the last part of the paper a numerical estimation of the streaming potential about $10 \cdot 10^{-3}$ [V] based on the chemical analysis and the measured electrolytical conductivity are being dealt with.

In der vorliegenden Arbeit wurden Strömungspotentiale in Torf- und Sandproben untersucht. Strömungspotentiale sind Prozesse der Elektrokinese. Die Elektrokinese umfaßt folgende Phänomene:

¹⁾ Dr. MAX SCHUCH, Dipl. Geophys., Bayer. Landesanstalt für Bodenkultur, Pflanzenbau und Pflanzenschutz, München 19, Menzinger Straße 54. — Direktor: Oberregierungsdirktor Dr. H. VIDAL.

RUDOLF WANKE, Dipl. Phys., Institut für Angewandte Geophysik der Universität München, München 2, Richard-Wagner-Straße 10. — Vorstand: Prof. Dr. G. ANGENHEISTER.

A. Feste Phase bewegt, flüssige Phase ruhend.

1. Elektrophorese oder Kataphorese.
2. Elektrophoretisches Potential (Dorneffekt, Sedimentationspotential).

B. Feste Phase ruhend, flüssige Phase bewegt.

1. Elektroendosmose oder Elektroosmose.
2. Strömungspotential.

M. SCHUCH [1963] befaßt sich in seiner Arbeit „Beobachtungen von Eigenpotentialen an Torflagerstätten mit verschiedenartigen Elektroden“ unter anderem auch mit der Erklärung des in Mooregebieten auftretenden Eigenpotentials des Bodens und dessen Schwankungen. „Ein Eigenpotential ist das dem Erdboden oder geologischen Körper eingeprägte, eigene, natürliche elektrische Potential“ [SCHUCH 1958]. Er fand, daß neben Konzentrationspotentialen das Eigenpotential und vor allem seine Schwankungen von den Wasserbewegungen im Boden herrühren und daß insbesondere das Vorzeichen des Potentials von der Strömungsrichtung der Bodenlösung abhängig ist.

Der von M. SCHUCH [1963] in oben angeführter Arbeit vorgenommene und in folgendem kurz beschriebene Modellversuch bildet den Ausgang vorliegender Untersuchungen: Ein Plexiglasrohr wurde mit Torf gefüllt, durch das man anschließend Bodenlösung filtrierte. Dabei ergab sich, daß sich die Flüssigkeitseintrittsstelle negativ gegen die Flüssigkeitsaustrittsstelle auf lud. Nach etwa 8 Stunden wurde z. B. eine Spannung von -10 mV, nach 14 Stunden eine Spannung von -15 mV gemessen, die dann konstant blieb. Diese Erscheinung kann wie folgt erklärt werden: Durchströmt eine Elektrolytlösung ein Kapillarsystem, so lagern sich Ionen eines Vorzeichens an der Kapillarwand an. Es bildet sich eine elektrische Doppelschicht. Die Abb. 1 zeigt schematisch den Aufbau der Doppelschicht mit den dazugehörigen Grenzen und Grenzpotentialdifferenzen.

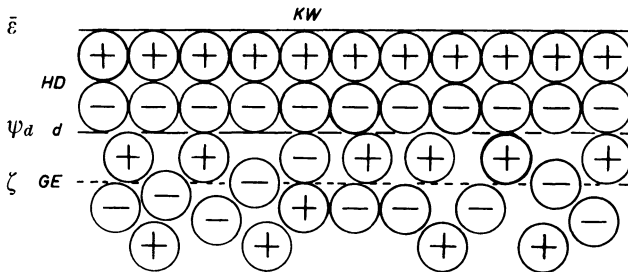


Abb. 1: Ionenverteilung und Festlegung der Potentiale in einer Kapillaren.

KW = Kapillarwand, $\bar{\epsilon}$ = NERNST'Sches Phasengrenzpotential, HD = HELMHOLTZ'sche Doppelschicht (mehrere Ionendurchmesser dick), d = Grenze der HELMHOLTZ'schen Doppelschicht, ψ_d = Potential von d gegenüber der Kapillarwand, GE = Gleitebene der Lösung, ζ = Potential der Gleitebene gegenüber der Kapillarachse.

Da die eine Belegung der Doppelschicht an der festen Phase (Kapillarwand) haftet, werden zunächst durch die strömende Lösung ständig Ionen gleichen Vorzeichens, die sich jenseits der Gleitebene der beweglichen Flüssigkeit befinden, wegtransportiert. Es entsteht auf diese Weise eine Ladungstrennung; die Enden der Kapillare werden gegeneinander aufgeladen. Die so zwischen Anfang und Ende einer Kapillare entstandene Spannung nennt man Strömungsspannung oder Strömungspotential U . Da aber die Lösung eine bestimmte elektrolytische Leitfähigkeit besitzt, wird infolge des so aufgebauten elektrischen Feldes eine Ionenwanderung entgegengesetzter Richtung eintreten, wodurch das entstandene Strömungspotential wieder zum Teil abgebaut wird. Für diese resultierende Strömungsspannung U stellte HELMHOLTZ 1872 folgende Beziehung auf:

$$U = (\varepsilon \zeta / 4 \pi \sigma \eta) \cdot \Delta P$$

U = Strömungspotential, ε = DK (Dielektrizitätskonstante), ζ = ζ -Potential, σ = elektrolytische Leitfähigkeit, η = dynamische Viskosität, ΔP = Druckdifferenz zwischen den Meßpunkten.

Bei Variation der Probenlänge l und gleichbleibendem Elektrodenabstand a muß der Druckgradient $\Delta P/l$ und der Elektrodenabstand a in der Gleichung berücksichtigt werden.

Sie lautet dann:
$$U = (\varepsilon \zeta / 4 \pi \sigma \eta) \cdot (\Delta P/l) \cdot a .$$

Die verwendete Apparatur zur Bestimmung der Strömungsspannung in Moor- und Sandproben

Als Behälter für die Moor- bzw. Sandproben diente ein 30 cm langes Plexiglasrohr (Isolator), dessen Innendurchmesser 5,8 cm betrug. An beiden Enden konnten vorkammerähnliche Rohrstutzen aus dem gleichen Material angeschraubt werden. Die Vorkammern A und B sollen gewährleisten, daß der ganze Querschnitt der Probe von der Flüssigkeit durchströmt wird. In die Enden des Probebehälters wurden Dichtungsringe nach HARTGE [1961] eingeführt, die verhindern sollten, daß die Flüssigkeit nur an der Rohrwand entlangfließt. Einlauf- und Auslaufrohrchen, das Thermometer und die Elektroden wurden mit Hilfe durchbohrter Gummistopfen in den Bohrungen des Plexiglasrohres befestigt (Abb. 2). Der Elektrodenabstand konnte in Abständen von 5 cm variiert werden. Die Temperatur der Bodenlösung wurde mit dem Thermometer ($1/10$ °C Teilung) während des Versuches beobachtet. Die elektrolytische Leitfähigkeit, die Viskosität und die Dielektrizitätskonstante der Bodenlösung sind stark temperaturabhängig.

Die Fließgeschwindigkeit der Lösung konnte durch Heben oder Senken einer mit der Versuchsflüssigkeit gefüllten, mit dem Hals nach unten aufgehängten Flasche, deren Öffnung über einen Schlauch mit einer Vorkammer VK verbunden war, variiert werden (Abb. 3). Die sich einstellende Potentialdifferenz an der Grenze c_1/c_2 der unten an-

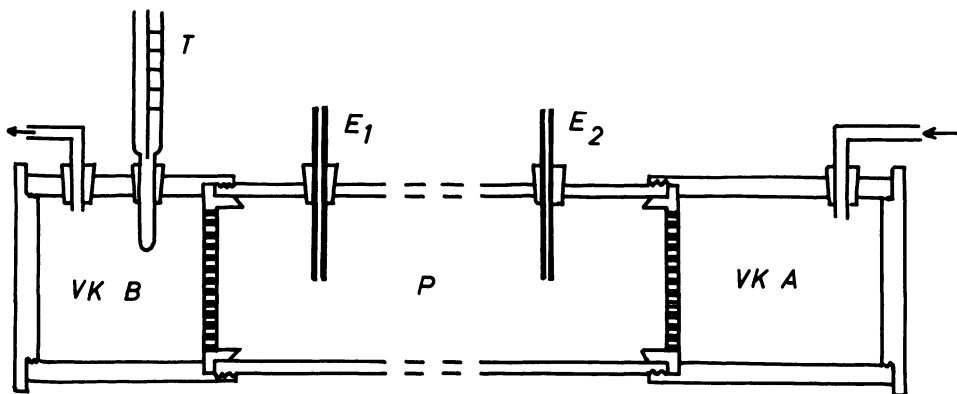


Abb. 2: Der Probebehälter zur Bestimmung von Strömungspotentialen in Torf- und Sandproben.

P = Probebehälter (Länge 30 cm, \varnothing 5,8 cm), E_1 und E_2 = Kalomelelektroden, VK A = Vorkammer A; VK B = Vorkammer B, T = Thermometer mit $1/10^\circ\text{C}$ -Teilung. Durch das Rohr rechts tritt die Versuchsflüssigkeit in die Vorkammer A ein, durchströmt, die Probe in dem Behälter P und verläßt das Gerät durch das Rohr der Vorkammer B links im Bild. Die Vorkammern sind von dem Probebehälter durch siebartige Plexiglasscheiben getrennt, wie in der Abbildung angedeutet.

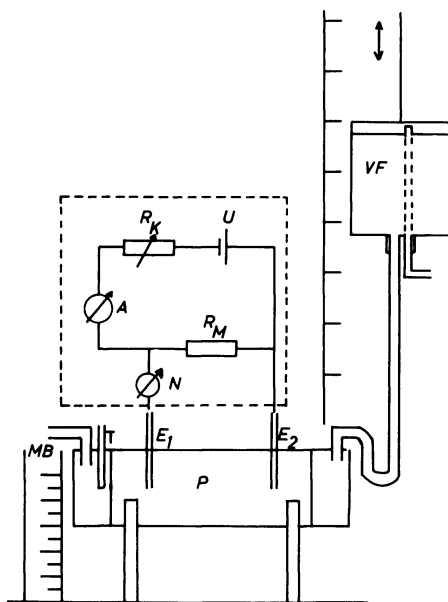


Abb. 3: Schematischer Aufbau der Versuchsanordnung zur Messung von Strömungsspannungen an Bodenproben.

Im unteren Teil ist der Probebehälter P mit Vorkammer, Elektroden E_1 , E_2 , Thermometer T und Meßbecher MB dargestellt. Darüber ist die Kompensationsschaltung schematisch angedeutet (N = Nullinstrument, R_M = Meßwiderstand, A = Amperemeter, R_K = veränderlicher Widerstand). Rechts im Bild ist das Gefäß VF mit der Versuchsflüssigkeit dargestellt.

geführten Kette wurde nach der von M. SCHUCH [1963] entwickelten Arbeitsweise über zwei unpolarisierbare Elektroden (Kalomelektroden) abgegriffen und gemessen.

Kalomelektrode/KCl/c₁/c₂/KCl/Kalomelektrode

Metallelektroden sind für Messungen der Strömungspotentiale nicht geeignet, da die Polarisationsspannungen an den Metallelektroden die Messungen verfälschen können.

Die Durchführung der Messungen

Zuerst wurden die Versuche an Moorproben mit einem Elektrodenabstand von 20 cm durchgeführt. Die Höhe des Niveaus der Versuchslösung (s. Abb. 3) wurde zwischen 0 cm und 120 cm in 20-cm-Schritten variiert.

$$1 \text{ [N]} = 1 \text{ [Dyn]} = 10^5 \text{ [dyn];}$$

$$1 \text{ [m WS]} = 1000 \text{ [mm WS]} = 1000 \left[\frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \right] = 9,8 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 0,99 \cdot 10^{-1} \text{ [at]}$$

$$= 73,5 \text{ [Torr]} = 0,98 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \right];$$

$$\text{Druckgradient: } \frac{\Delta P}{l} = \frac{\Delta P}{0,3} \left[\frac{\text{N/m}^2}{\text{m}} \right]; \quad l = \text{Länge der Probe.}$$

Die Druckhöhe während der Messung konnte als konstant angesehen werden, da die erreichte Durchflußgeschwindigkeit (etwa $2 \cdot 10^{-3}$ [cm/sec]) minimal war. Jeder Höhe des Flüssigkeitsvorratsgefäßes entspricht eine bestimmte Strömungsgeschwindigkeit der Lösung durch die Probe, die ihrerseits eine bestimmte Strömungsspannung zur Folge hat. Die Einstellzeit des Strömungspotentials beträgt einige Stunden und ist abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit. Diese ist eine lineare Funktion der Geschwindigkeit des durch die Probe fließenden Wassers. Nach H. REICHARDT [1936] und PH. BOCQUET [1956] gilt die Helmholtzsche Beziehung auch für turbulente Strömung nach Einstellung eines stationären Zustandes. Das steht in Widerspruch zu den Messungen an Sandstein von V. S. TUMAN [1963]. Er fand, daß die Strömungsspannung nicht linear mit dem Druck zunimmt, wenn der Druck einen bestimmten Wert übersteigt. — An einer Probe konnten nur wenige Messungen bei unterschiedlichen Drücken vorgenommen werden. Versucht man die Anzahl der Messungen pro Probe zu vergrößern, d. h. wird ein Versuch an einer Probe über mehrere Tage ausgedehnt, so verfälscht die aus den Elektroden austretende KCl-Lösung sowie eine Abnahme der Durchlässigkeit der Probe [SILLANPÄÄ 1956] sehr bald die Ergebnisse.

Entgegen der Meinung von F. WILKENS [1957] ist es nach Meinung der Verfasser nicht notwendig, daß man bei der Messung der Strömungsspannung in einem porösen System, das von einer Lösung durchflossen wird, jeweils die gleiche Kapillare erfaßt, da man mit den Elektroden über mehrere Kapillaren mittelt. Man muß aber darauf achten, daß die Meßpunkte in einer zur Strömungsrichtung senkrechten Ebene liegen (Äquipotentialflächen).

Ist die Strömung über den ganzen Querschnitt der Probe verteilt, dann werden die freibeweglichen Ionen (diffuse Ionenwolke) im Mittel in jeder Kapillare von der Flüssigkeit gleich schnell transportiert. Die Größe und die Geschwindigkeit der Ladungstrennung ist in allen Kapillaren etwa gleich. Die Probenquerschnitte sind in diesem Fall „Equipotentialflächen“. Daher ist es gleichgültig, wie tief (Rand- oder Achsenzone) die Elektroden in die Probe eingeführt werden.

Die Mantelzone der Probe muß von den obenstehenden Betrachtungen ausgeschlossen werden, da in diesem Grenzbereich die Strömungsgeschwindigkeit meist viel größer als in der Achsennähe der Probe ist. Dieser Effekt machte sich besonders bei den Sandproben bemerkbar. Schnelles Fließen in der Mantelzone konnte mit dem Auge beobachtet werden. Hier mußte darauf geachtet werden, daß die Potentialdifferenz möglichst in Achsennähe gemessen wurde.

Meßergebnisse

Mit oben beschriebener Apparatur wurden Strömungsspannungen in Abhängigkeit des Druckgradienten an Torf- und Sandproben gemessen. Die Versuchsflüssigkeit war Bodenlösung, die zusammen mit den Proben entnommen wurde.

1. Die Torfproben wurden in den südlichen Chiemseemooren (Süddeutschland) aus verschiedenen Tiefen in senkrechter und waagrechter Richtung gestochen.

In der Abb. 4 sind die beobachteten Strömungsspannungen (in Volt) in Abhängigkeit des Druckgradienten (in Newton/m^3) von Torfproben aus 50 cm Tiefe dargestellt. Messungen an den senkrecht gezogenen Proben ergaben die ausgezogene Gerade mit der Steigung von $28 \cdot 10^{-7} [\text{V}/\text{Nm}^{-3}]$, Beobachtungen an den waagrecht entnommenen Proben lieferten die gestrichelte Gerade mit einer Steigung von $18,75 \cdot 10^{-7} [\text{V}/\text{Nm}^{-3}]$.

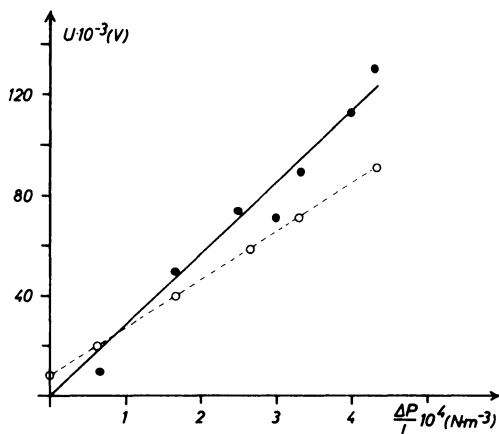


Abb. 4.

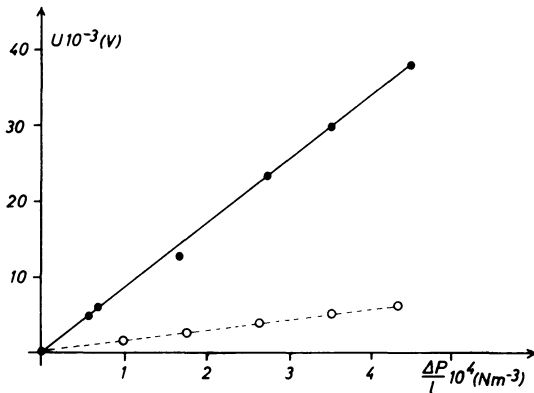


Abb. 5.

In der Abb. 5 sind die Strömungsspannungen, gemessen an Torfproben aus 100 cm Tiefe, dargestellt. Den senkrecht gezogenen Proben ist die ausgezogene Gerade mit einer Steigerung von $8,53 \cdot 10^{-7} \text{ [V/Nm}^{-3}\text{]}$, der waagrecht entnommenen Probe die gestrichelte Gerade mit einer Steigerung von $1,09 \cdot 10^{-7} \text{ [V/Nm}^{-3}\text{]}$ zugeordnet.

2. Die Sandproben wurden nördlich von München genommen ($\lambda = 48^\circ 21,0'$; $\varphi = 11^\circ 38,5'$). Da es sich um 50% Feinsand und 50% Mittelsand (nach DIN 4220) handelte, konnten keine ungestörten oder nur wenig gestörte Proben genommen werden. Die Abb. 6, 7 und 8 geben einige Beispiele von Meßergebnissen.

Bei den Abb. 6 und 7 handelt es sich um tonarme Sandproben, äußerlich erkennbar durch die graue Färbung.

In der Abb. 6 sind die Ergebnisse von zwei nacheinander an der gleichen Probe durchgeführten Potentialmessungen in Abhängigkeit des Druckgradienten dargestellt. Die Kurve 1 stellt die 1., die Kurve 2 die 2. Meßreihe dar. Ab etwa $1 \cdot 10^4 \text{ [N/m}^3\text{]}$ ist keine Reproduzierbarkeit mehr vorhanden. Die Steigung des linearen Teils der Kurve beträgt $42,86 \cdot 10^{-7} \text{ [V/Nm}^{-3}\text{]}$.

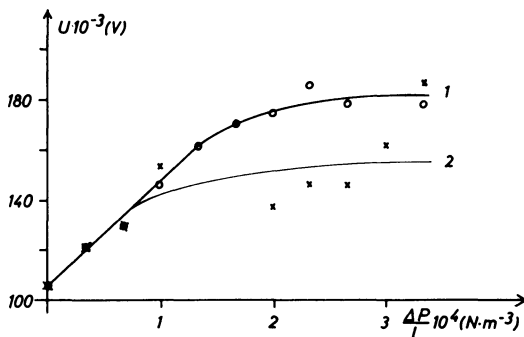


Abb. 6.

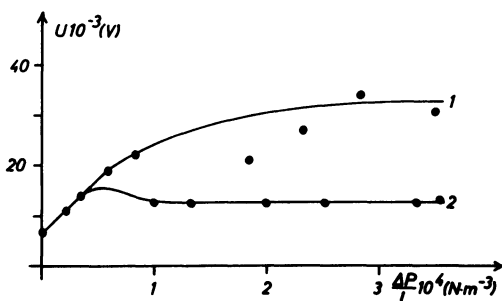


Abb. 7.

Abb. 7 stellt das Meßergebnis an einer gleichartigen Probe dar. Wie ersichtlich liegen gleiche Verhältnisse vor wie bei Abb. 6. Die Steigung des linearen Teils der Kurve beträgt $20 \cdot 10^{-7} [V/Nm^{-3}]$. Die unbefriedigende Reproduzierbarkeit ist auf eine Änderung des Korngefüges während des Versuches insbesondere bei höherem Druckgradienten zurückzuführen.

Die Abb. 8 gibt die Meßwerte bei einer tonhaltigen Probe, äußerlich erkennbar an der bräunlichen Färbung, wieder. Schon geringe Druckgradienten liefern hier hohe Strömungsspannungen. Die Steigung der Geraden beträgt $201 \cdot 10^{-7} [V/Nm^{-3}]$.

Abb. 4 mit 8 zeigen bei einem Druckgradienten Null gelegentlich das Auftreten eines konstanten Potentials. Die Spannungs-Druckgradienten-Kurve geht nicht durch den Koordinatenursprung. Dieses konstante Potential kann nicht durch ein Diffusionspotential an den Übergängen Elektrode—Probe erklärt werden, da die verwendeten Kalomel-Elektroden als verbindende Leiter eine konzentrierte KCl-Lösung hatten. Das K-Ion und das Cl-Ion haben nahezu gleiche Beweglichkeit ($u_{K^+} = 6,75 \cdot 10^{-8} [m^2/V \cdot s]$; $v_{Cl^-} = 6,85 \cdot 10^{-8} [m^2/V \cdot s]$) [GERTHSEN 1953].

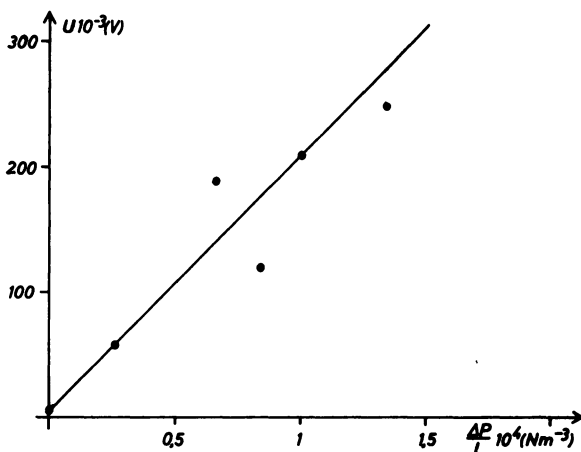


Abb. 8.

Nach Meinung der Verfasser ist das Auftreten statischer Potentialdifferenzen an den beiden Elektroden durch unterschiedliche Konzentrationspotentiale bedingt, die durch spurenweises Austreten von KCl-Lösung aus den Elektroden an den Kontaktstellen mit der Bodenprobe (mit Filtrierpapier verstopfte Glasröhrchen) verursacht worden ist. Gleich große Konzentrationspotentiale geben keine Potentialdifferenz, da sie sich gerade aufheben.

$$E_1/c^1_{\text{KCl-konz.}}/c^1_{\text{Bodenlös.}}/c^2_{\text{Bodenlös.}}/c^2_{\text{KCl-konz.}}/E_2.$$

Fließt jedoch nur aus einer Elektrode eine geringe Menge KCl-Lösung in die Bodenlösung, dann ergibt sich folgende Konzentrationskette:

$$E_1/c^1_{\text{KCl-konz.}}/c^1_{\text{Bodenlös.+KCl}}/c^2_{\text{Bodenlös.}}/c^2_{\text{KCl-konz.}}/E_2.$$

Das Konzentrationspotential $c^1_{\text{Bodenlös.+KCl}}/c^2_{\text{Bodenlös.}}$ verursacht das konstante Potential. Würden konstante Potentiale nur an senkrecht herausgestochenen Proben (50-s und 100-s) auftreten, so könnte man den bei den Moorproben mit der Tiefe variierenden pH-Wert für diese Spannungen verantwortlich machen [SCHUCH 1963].

Bestimmung des ζ -Potentials

Aus der Steigerung der Geraden $U = f(\Delta P/l)$ läßt sich bei Kenntnis der elektrolytischen Leitfähigkeit σ , der Viskosität η und der Dielektrizitätskonstanten ϵ das ζ -Potential berechnen.

1. Die Viskosität der Bodenlösung aus verschiedenen Tiefen zeigt neben einer Temperaturabhängigkeit auch eine nicht zu vernachlässigende Abhängigkeit der Konzentration. Die Viskosität wurde mit einem OSTWALDSchen Viskosimeter, z. B. [F. KOHLRAUSCH 1962] von der Firma Schott & Gen., Mainz, gemessen. Die Viskosität ist in Abb. 9 als Funktion der Temperatur aufgetragen. Zur Kontrolle des Gerätes wurde die Viskosität von destilliertem Wasser gemessen. Es ergab sich in dem beobachteten Temperaturbereich nahezu eine Gerade (DW). Wasser, das bei der Sandprobeentnahme im Sandwerk bei Massenhausen geschöpft wurde, lieferte die Kurve SW. Ferner wurde Bodenelektrolyt von Torfvorkommen untersucht. Torfproben aus 50 cm Tiefe wurden ausgepreßt und einmal (Kurve 1a) bzw. zweimal (Kurve 1b) filtriert. Die Kurven 2a und 2b wurden beobachtet an einmal bzw. zweimal filtriertem Bodenelektrolyt, der aus Torfproben von 100 cm Tiefe gepreßt wurde.

2. Elektrolytische Leitfähigkeit

Zur Bestimmung der elektrolytischen Leitfähigkeit diente eine Leitfähigkeitsmeßzelle von den Wissenschaftlich Technischen Werkstätten Weilheim (WTW) und eine Wechselstrombrücke (Pontavi mit Summer (etwa 1400 Hz)) der Firma Hartmann & Braun. Die Gefäßkonstante k der Leitfähigkeitsmeßzelle betrug $k = 0,53^8 \text{ [cm}^{-1}] = 53,8 \text{ [m}^{-1}]$. Als Abstimmmanzeige diente ein Kopfhörer. Die Versuchstemperatur betrug

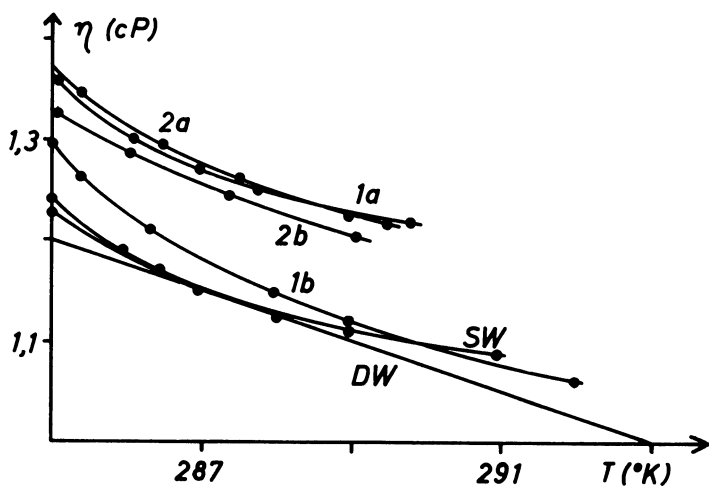


Abb. 9.

19 °C. Für die verwendeten Lösungen ergaben sich für die elektrolytische Leitfähigkeit folgende Werte:

Tabelle 1:

Bodenelektrolyt aus:		
50 cm Tiefe	100 cm Tiefe	einem Sandwerk bei Massenhausen
$\sigma [\Omega^{-1} \cdot m^{-1}] 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$

Die deutliche Abnahme der Leitfähigkeit mit zunehmender Tiefe ist ein Zeichen für die große Ionenabsorptionsfähigkeit des Moores. Aus diesem Grunde lassen sich radiologische Untersuchungen zum Studium der Strömungsvorgänge im Moor schlecht anwenden [SCHUCH 1960].

3. Die Dielektrizitätskonstante wurde mit einer Schwingkreisordnung gemessen. Dabei wird die Resonanzfrequenz ν einmal mit luftgefülltem Meßkondensator (ν_1) und einmal mit Versuchsflüssigkeit gefülltem Meßkondensator (ν_2) bestimmt. Es gilt für:

$$2\pi\nu_1 = \omega_1 = 1/\sqrt{(\epsilon_r C \cdot L)}; \quad 2\pi\nu_2 = \omega_2 = 1/\sqrt{(\epsilon_r \cdot C \cdot L)}$$

C = Kapazität des Meßkondensators ($450 \cdot 10^{-12}$ [F]),

L = Induktivität der Spule ($0,8 \cdot 10^{-8}$ [H]).

Daraus ergibt sich die Dielektrizitätskonstante der Versuchsflüssigkeit

$$\epsilon_r = \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$$

Die Resonanzfrequenz ν_1 bei luftgefülltem Meßkondensator betrug 83,5 [MHz].

Für die Resonanzfrequenz ν_2 der Versuchsflüssigkeit ergaben sich folgende Werte, aus denen sich ϵ_r berechnen läßt.

Tabelle 2:

	Moorbodenelektrolyt aus:		Wasser	destilliertes	Methyl-
	50 cm Tiefe	100 cm Tiefe	aus dem Sandwerk bei Massenhausen	Wasser	alkohol
ν_2 [MHz]	8,25	8,75	8,5	9,3	14,75
ϵ_r	100	90	96	81	32

Alle 3 Lösungen zeigen eine größere Dielektrizitätskonstante als Wasser. Für das verwendete Methanol wurde ein um 6% kleinerer Wert als in der Literatur angegeben gemessen. Für destilliertes Wasser ergab sich der Tabellenwert 81.

Alle Lösungen hatten eine meßbare elektrolytische Leitfähigkeit. Die Messungen mußten deshalb bei hohen Frequenzen ausgeführt werden, damit der Verlustfaktor $\text{tg } \delta$ möglichst unter 0,1 bleibt [KOHLEAUSCH 1962].

$$\text{tg } \delta = \frac{\sigma}{\omega_2 \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0}$$

Danach ergeben sich für die untersuchten Lösungen folgende Verlustfaktoren:

Tabelle 3:

Verlustfaktor	Moorbodenelektrolyt aus:		Wasser aus dem Sand- werk bei Massenhausen
	50 cm Tiefe	100 cm Tiefe	
$\text{tg } \delta$	0,437	0,113	2

Aus allen bisher gemessenen (σ , η , ϵ_r) und berechneten Werten ($U/(\Delta P/l)$) kann das ζ -Potential (Bodenlösung/Kapillarsystem der Bodenprobe) berechnet werden. Die folgende Tabelle stellt die bisherigen Ergebnisse zusammen.

Tabelle 4: Elektrolytische Leitfähigkeit σ , Viskosität η , der Steigung des Druckgradienten, der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_r und des ζ -Potentials der Grenzschicht Bodenlösung/Kapillarsystem.

	Moorprobe (Bernau) aus 50 cm Tiefe	Moorprobe (Bernau) aus 100 cm Tiefe	Sandproben aus Massenhausen
gemessen: σ [$\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$]	$1 \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$
gemessen: η [Ns/m^2]	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$

Fortsetzung von Tabelle 4:

		Moorprobe (Bernau) aus 50 cm Tiefe	Moorprobe (Bernau) aus 100 cm Tiefe	Sandproben aus Massenhausen	
berechnet:					
Steigung der Geraden [V/Nm ⁻³]	w	18,8 · 10 ⁻⁷	1,1 · 10 ⁻⁷	42,9 · 10 ⁻⁷	20 · 10 ⁻⁷
	s	28 · 10 ⁻⁷	8,5 · 10 ⁻⁷	200 · 10 ⁻⁷	
gemessen:					
ϵ_r		100	90	96	
berechnet:					
ζ ([Nm/As]=[V])	w	25 · 10 ⁻³	0,8 · 10 ⁻³	490 · 10 ⁻³	230 · 10 ⁻³
	s	37 · 10 ⁻³	6 · 10 ⁻³	2300 · 10 ⁻³	

4. Die Kenntnis der Wasserdurchlässigkeit der untersuchten Bodenproben ist für eine Abschätzung der Strömungsspannungen notwendig, die auf Grund der gemessenen elektrolytischen Leitfähigkeit im nächsten Abschnitt gemacht werden soll. Die abgeschätzten Strömungsspannungen sollen mit den beobachteten verglichen werden.

Der Durchlässigkeitsbeiwert k oder die Durchlässigkeit eines Bodens ist in Abwandlung des HAGEN-POISEUILLEUN-Gesetzes durch das Gesetz von DARCY [SILLANPÄÄ 1956, LOMTADSE 1955, v. ENGELHARDT 1960] gegeben:

$$k = q / (F \cdot h \cdot t / l) \text{ [m/sec]}$$

q = die in der Zeit t (sec) durchflossene
Flüssigkeitsmenge (m³),

F = Querschnitt der Probe (m²),

l = Länge der Probe (m),

t = Durchflußzeit (sec),

h = mittlere Druckhöhe (m).

Der k -Wert kann von verschiedenen Größen [BENDEN 1944] abhängig sein, z. B.:

1. $k = f(v)$ wobei $v = q/F = k \cdot J$; $J = h/l$

2. $k = f(\bar{\alpha})$; $\bar{\alpha}$ = Porenziffer

3. $k = f(\eta)$; η = Viskosität

4. $k = f(u) \cdot f(d)$; $f(d)$ = Funktion der Körnung

$f(u)$ = Funktion des Hohlraumes

5. $k = f(t)$; t = Temperatur

6. $k = f(D)$; D = Durchmesser der Kapillaren

Ermittelt wurden die Durchlässigkeitswerte k nach dem DARCYschen Gesetz: An Torfproben, bei einem Probenquerschnitt von 26,5 cm² und einer Länge von 30 cm ergaben sich folgende Werte:

Tabelle 5:

Probe	h [m]	t [sec]	q [m ³]	q/t [m ³ · sec ⁻¹]	k [m · sec ⁻¹] · 10 ⁻⁵
50 — w	0,25	60	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$2,33 \cdot 10^{-7}$	1,49
50 — s	0,25	120	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$4,33 \cdot 10^{-7}$	2,78
100 — w	0,40	120	$5,3 \cdot 10^{-5}$	$4,40 \cdot 10^{-7}$	1,78
100 — s	0,25	120	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$4,15 \cdot 10^{-7}$	2,55

Die in senkrechter (s) Richtung gestochenen Proben haben eine größere Durchlässigkeit als die aus waagrechter (w) Lage entnommenen Proben. Das ist in erster Linie auf die Genese des Moores zurückzuführen. Das Pflanzenmaterial wächst senkrecht. Dazu kommt noch eine bevorzugte vertikale, ascendente und descendente Wasserbewegung. Dieses Ergebnis mit Werten ähnlicher Größenordnung stellt auch SCHUCH [1964] fest.

An Sandproben mit gleichen Abmessungen wie die Torfproben wurden die folgenden Werte erhalten:

Tabelle 6:

h [m]	t [sec]	q [m ³]	q/t [m ³ · sec ⁻¹]	k [m · sec ⁻¹] · 10 ⁻⁴
0,2	60	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$2,33 \cdot 10^{-7}$	1,32
0,3	168	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$2,86 \cdot 10^{-7}$	1,08
0,4	60	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$4,00 \cdot 10^{-7}$	1,13
0,5	60	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$6,34 \cdot 10^{-7}$	1,44
0,6	60	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$6,00 \cdot 10^{-7}$	1,13
0,7	114	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$6,85 \cdot 10^{-7}$	1,10
0,8	60	$4,9 \cdot 10^{-5}$	$8,15 \cdot 10^{-7}$	1,15
1,0	45	$5,4 \cdot 10^{-5}$	$12,00 \cdot 10^{-7}$	1,36

Als Mittelwert für k ergibt sich $k = 1,21 \cdot 10^{-4}$ [m · sec⁻¹]. Dieser Wert steht im guten Einklang mit der von PRESS [1960] für feinen Sand angegebenen Größe. Obige k -Werte haben einen Schwankungsbereich. Der Grund dafür dürfte in der Tatsache liegen, daß die untersuchten Sandproben kein starres Gefüge hatten.

Numerische Abschätzung der Strömungsspannungen

a) in Moorproben:

Da eine chemische Analyse des betreffenden Moorwassers nicht vorlag, wurden die Werte eines anderen Hochmoores (Gersfeld/Rhön) herangezogen [BENADE und KOMMA 1948].

Aus dieser Zusammensetzung ist ersichtlich, daß NH_4^+ , Na^+ , Al^{+++} , Ca^{++} , Fe^{++} und Mg^{++} die Hauptvertreter der Kationen sind, während bei den Anionen HCO_3^- , organische Säuren (Huminsäure), NO_2^- und NO_3^- vorherrschen. Es wurden auf Grund der Konzentrationen der einzelnen Ionenarten Durchschnittswerte für die Beweglichkeit und die Wertigkeit errechnet. 58% aller Ionen sind einwertig, 22,8% sind zwei-

wertig und 19,2% sind dreiwertig. Das ergibt eine durchschnittliche Wertigkeit von $z^* = 1,6$. Die mittlere Beweglichkeit der Ionen beträgt etwa $\bar{u} = \bar{v} = 5 \cdot 10^{-8}$ [$\text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$] [KOHLEAUSCH 1962].

Da die elektrolytische Leitfähigkeit σ gemessen wurde, ergibt sich mit $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ [A · sec] für die Teilchendichte n (hier für die Lösung dessen Viskosität die Kurve 1a der Abb. 9) der Wert $n_{1a} = \sigma/e_0 z^* (\bar{u} + \bar{v}) = 10^{-4}/1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}$; $n_{1a} = 4 \cdot 10^{17}$ [Teilchen/Molvoll.]

1 Molvolumen sind $22,4 \cdot 10^{-3}$ [m^3]. Das ergibt für n_{1a}

$$n_{1a} = 1,79 \cdot 10^{19} \text{ [Teilchen/m}^3\text{].}$$

Das entspricht etwa der Konzentration von NaCl, die eine Leitfähigkeit von 10^{-2} [$\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$] verursacht [GERTHSEN 1963].

Welche von der Strömungsgeschwindigkeit abhängige Ladungstrennung muß erfolgt sein, damit eine meßbare Strömungsspannung existiert?

Die eingeprägte Stromdichte j_1 ist gegeben durch

$$j_1 = \rho \cdot v$$

ρ = transportierte Ladungsdichte,

v = Geschwindigkeit der Versuchslösung in der Probe.

Die Dichte des Rücklaufstromes j_2 beträgt:

$$j_2 = \sigma \cdot E$$

E = das durch j_1 erzeugte elektrische Feld.

Beträgt die Geschwindigkeit der Lösung $2 \cdot 10^{-3}$ [cm/sec] = $2 \cdot 10^{-5}$ [m/sec], so ergibt sich für die Stromdichte j_1

$$j_1 = 1,79 \cdot 10^{13} \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \cdot 1,6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 9,15 \cdot 10^{-9} \text{ [A/cm}^2\text{]} = 9,15 \cdot 10^{-5} \text{ [A/m}^2\text{]}$$

Diese Stromdichte wurde aus der Teilchenkonzentration n_{1a} und der Fließgeschwindigkeit der Bodenlösung errechnet. Es wurde also die Geschwindigkeit der Ladungsträger mit der Geschwindigkeit der Bodenlösung gleichgesetzt. Setzt man für den stationären Zustand die beiden Stromdichten gleich, so erhält man für die elektrische Feldstärke den Betrag nach

$$E = \rho \cdot v / \sigma = 4,57 \cdot 10^{-5} \text{ [V/cm]} \cdot 4,57 \cdot 10^{-3} \text{ [V/m]}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = |E| \cdot l = 4,57 \cdot 10^{-3} \cdot 0,20 \text{ [V]}$$

$$U = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ [V]} \approx 10^{-3} \text{ [V].}$$

Größenordnungsmäßig stimmt diese theoretisch erhaltene Strömungsspannung mit der gemessenen überein (s. Tab. 4).

b) in Sandproben:

Als chemische Zusammensetzung der verwendeten Bodenlösung wurde die Zusammensetzung der typischen Wässer der oberen Süßwassermolasse nach Analysen der Staatlichen Chemischen Untersuchungsanstalt München von L. GERB herangezogen. Dabei wurde folgende Zusammensetzung verwendet:

Tabelle 7:

Anionen	Konzentration [mg/l]	Kationen	Konzentration [mg/l]
HCO_3^-	211	Ca^{++}	42,1
Cl^-	3,2	Mg^{++}	18,1
SO_4^-	—		
NO_3^-	—		

Auf Grund dieser Konzentrationsverhältnisse ergibt sich eine mittlere Wertigkeit $z^* = 1,28$. Die mittlere Beweglichkeit der vorhandenen Ionen ist $\bar{u}^* = \bar{v}^* = 4 \cdot 10^{-4} [\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}] = 4 \cdot 10^{-8} [\text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}]$. Aus der elektrolytischen Leitfähigkeit σ , der Elementarladung e_0 , der mittleren Wertigkeit z^* und der mittleren Beweglichkeit $\bar{u}^* = \bar{v}^*$ ergibt sich eine Teilchendichte zu

$$1,1 \cdot 10^{19} [\text{Teilchen/Mol}] = 4,9 \cdot 10^{14} [\text{Teilchen/cm}^3] = 4,9 \cdot 10^{20} [\text{Teilchen/m}^3]$$

Daraus ergibt sich eine eingeprägte Stromdichte

$$j_1 = 4,9 \cdot 10^{14} \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \cdot 1,28 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} = 12 \cdot 10^{-7} [\text{A/cm}^2]$$

$$j_1 = 12 \cdot 10^{-3} [\text{A/m}^2]$$

Mit $\sigma = 9 \cdot 10^{-2} [\text{S} \cdot \text{m}^{-1}]$ und $l = 0,2 [\text{m}]$ ist die Strömungsspannung gleich $U = 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = U = 26,8 \cdot 10^{-3} [\text{V}]$.

In der obigen Betrachtung wurde unter starker Vereinfachung des Modells allein aus der errechneten Teilchendichte n , der mittleren Wertigkeit z^* , der Geschwindigkeit v und der gemessenen Leitfähigkeit σ die Strömungsspannung U berechnet. Es geht aus obiger Darstellung hervor, daß U eine lineare Funktion der Geschwindigkeit v und somit auch der Druckdifferenz ΔP ist.

Danksagung

Vorliegende Untersuchung wurde am Institut für Angewandte Geophysik der Ludwig-Maximilians-Universität München erstellt. Herrn Prof. Dr. G. ANGENHEISTER, Vorstand des Instituts, sei für sein Mitwirken, Herrn Dr. P. GIESE für sein reges Interesse vielmals gedankt.

Dem Direktor der Bayer. Landesanstalt für Bodenkultur, Pflanzenbau und Pflanzenschutz, Herrn ORD Dr. H. VIDAL, der uns auch die Forschungseinrichtungen der Moorforschungsstelle Bernau zugänglich machte, danken wir für die vielseitige Unterstützung.

Literatur

- BENADE, W. und E. KOMMA: Naturgeschichte und balneologische Merkmale der Schwarzwässer (Moorwässer). Z. f. phys. Therapie, Bäder- und Klimakunde, 1. Jg., H. 5/6, 1948.
- BENDEL, L.: Ingenieurgeologie Bd. 1, Wien 1949.
- BOCQUET, PH. E.: The Streaming Potential Concept, Diss. University Michigan U.S.A. 1953.
- V. ENGELHARDT, W.: Porenraum der Sedimente, Mineralogie und Petrographie in Einzeldarstellungen, Bd. 2, 1960.
- GERTHSEN, CHR.: Physik, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.
- KOHLRAUSCH, F.: Praktische Physik, Bd. 1 und 2, Stuttgart 1962.
- LOMTADSE, N. B.: Bodenphysikalisches Praktikum, Berlin 1955.
- PRESS, H.: Taschenbuch der Wasserwirtschaft, Hamburg-Blankensee 1960.
- REICHARDT, H.: Über Abweichungen der HELMHOLTZschen Theorie elektrokinetischer Erscheinungen. Z. phys. Chem. (A), 154, S. 337, 1931.
- REICHARDT, H.: Elektrokinetische Vorgänge in Kapillaren. Z. phys. Chem. (A), 166, S. 433, 1933.
- REICHARDT, H.: Das elektrische Strömungspotential bei turbulenter Strömung. Z. phys. Chem. (A), 174, S. 15, 1935.
- SCHUCH, M.: Beobachtungen von Eigenpotentialen an Torflagerstätten mit verschiedenartigen Elektroden. Z. f. Geophysik 29, S. 175—196, 1963.
- SCHUCH, M.: Eigenpotentiale an Torflagerstätten, Umschau in Wissenschaft und Technik, 19, S. 605, 1964.
- SCHUCH, M.: Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit nach der Bohrlochmethode und an ungestörten Bodenproben in Bayerischen Moorkommen. Mitteilungen der Deutschen Bodenkundlichen Gesellschaft, Bd. 2, S. 169—177, 1964.
- SCHUCH, M.: Möglichkeiten der Eigenpotentialmethode, Untersuchungen an Mooren, Serpentin, Glaukonitsandsteinen und Basalten. Diplomarbeit, ausgeführt am Inst. f. Angewandte Geophysik der Universität München, 1958 (unveröffentlicht).
- SILLANPÄÄ: Studies on the hydraulic conductivity of soils and its measurement, Suomen Maataloustieteellisen, SEURAN JULKAISUJA 87 ACTA AGRALIA FENNIA, Helsinki 1956.
- TUMAN, V. S.: Thermo-Telluric Currents Generated by an Underground Explosion and Other Geological Phenomena. Geophysics 28, p. 91—99, 1963.
- WILKENS, F.: Elektrische Grenzflächenerscheinungen im Bereich oberflächennaher Erdschichten. Z. f. Geophysik 46, S. 1, 1957.

Ein analytischer Weg zur Bestimmung der Elektronendichte in der Magnetosphäre aus Whistler-Daten

Von H. SCHREIBER, Göttingen¹⁾

Eingegangen am 23. Mai 1966

Zusammenfassung: Unter Voraussetzung longitudinaler Ausbreitung wird das Whistler-Laufzeitintegral untersucht. Das Magnetfeld der Erde wird durch das Feld eines Dipols angenähert. Mit der Annahme einfacher Potenzgesetze für die Elektronendichte wird das Laufzeitintegral in eine gut konvergierende Reihe entwickelt. Durch diese Umwandlung kann die Laufzeit der Whistler analytisch berechnet werden als Funktion der Frequenz und des Ortes, an dem die dem Whistler-Weg zugehörige Feldlinie die Erdoberfläche durchstößt. Die Berechnung liefert einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Poldistanz des Feldlinien-Durchstoßpunktes und der Nose-Frequenz, so daß der von einem Nose-Whistler durchlaufene Weg bestimmt werden kann. Den Einfluß der unteren Ionosphäre auf die Laufzeit und die Nose-Frequenz kann man ebenfalls berücksichtigen.

Eine Anzahl Nose-Whistler-Daten der Stationen Stanford und Seattle aus dem Sommerhalbjahr 1961 wurden untersucht. Sie ergaben die mittlere nächtliche Elektronendichteverteilung $N = 3,4 \cdot 10^{39} \cdot r^{-4}$ ($N = \text{El. cm}^{-3}$, $r = \text{geozentr. Abstand in cm}$) zwischen 2 und 5 Erdradien geozentrischer Entfernung. Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit anderen bisher veröffentlichten Dichteverteilungen zeigt Unterschiede bis zu einem Faktor zwei. Diese Unterschiede werden größtenteils auf tatsächliche zeitliche Änderungen der Elektronendichte in der Magnetosphäre zurückgeführt.

Summary: Provided a longitudinal propagation of whistlers, the travel-time-integral has been investigated. The geomagnetic field is approximated by a dipole field. Assuming simple power functions for the electron-density distribution, the travel-time-integral is developed into convergent power series. By this the travel-time of whistlers can be calculated analytically as a function of frequency and of the point at which the field line belonging to the whistler-path intersects the earth's surface. Furthermore the calculation gives a unique relation between the co-latitude of the intersecting point and the whistler nose-frequency, by which the whistler ray path can be determined. The influence of the lower ionosphere on the travel time and nose-frequency can be taken into account.

A number of nose-whistlers recorded at the stations Stanford and Seattle during the summer 1961 has been investigated. They gave the average night-time electron density distribution of $N = 3,4 \cdot 10^{39} r^{-4}$ ($N = \text{electrons per cm}^3$, $r = \text{geocentric distance in cm}$) between two and five earth's radii geocentric distance. A comparison of this result with other electron density profiles published so far shows differences up to a factor of two. These differences are mainly due to actual variations in the magnetospheric electron density.

¹⁾ Dipl.-Phys. HERMANN SCHREIBER, Geophysikalisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Herzberger Landstraße 180.

1 Einleitung

Whistler gehören zu der großen Anzahl verschiedenartiger atmosphärischer Geräusche, die mit geeigneten Empfängern am Erdboden registriert werden können. Es sind von hohen nach tiefen Frequenzen abfallende Pfeiftöne von 1 bis 3 sec Dauer. Dabei handelt es sich um elektromagnetische Impulse, die durch natürliche Blitze entstehen und die ein kontinuierliches Frequenzspektrum umfassen. Die maximalen Intensitäten liegen zwischen 5 und 10 kHz. Weitgehend erklärt wurden typische Eigenschaften der Whistler 1953 von STOREY [1953] durch die Annahme, daß die durch den Blitz freiwerdende elektromagnetische Energie sich längs der erdmagnetischen Feldlinien ausbreitet. Auf dem Weg durch das magnetosphärische Plasma tritt Dispersion auf, d. h., die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist frequenzabhängig. Deshalb erreichen verschiedene Frequenzen des elektromagnetischen Wellenpakets zeitlich nacheinander den zum Ort des Blitzes konjugierten Punkt.

Abb. 1 zeigt das Spektrogramm eines Nose-Whistlers, eines Whistlers, bei dem eine bestimmte Frequenz ein Minimum in der Laufzeit hat. Weitere Spektrogramme sowie die Unterscheidungsmerkmale der verschiedenen Typen von Whistlern findet man bei HELLIWELL [1965].

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in der Magnetosphäre von der Elektronendichte des Plasmas und der Magnetfeldstärke abhängt, können aus den Eigenschaften des ankommenden Pfeiftones Aussagen über den Zustand der Magnetosphäre, insbesondere über die Elektronendichte, gemacht werden. Whistler treten in mittleren geomagnetischen Breiten recht häufig auf; an vielen Stationen werden zehn und mehr pro Minute registriert. Bei einer geeigneten Analyse könnte man also kontinuierliche Information über die Magnetosphäre erhalten. Verschiedene, teilweise unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der magnetosphärischen Elektronendichte aus Whistler-Daten geben z. B. ALLCOCK [1959], POPE [1961], SMITH [1961]. Die Ergebnisse werden dabei durch numerische Auswertung des Laufzeitintegrals erhalten.

In der vorliegenden Arbeit wird das Laufzeitintegral mit ausreichender Genauigkeit analytisch berechnet, wodurch der Einfluß der verschiedenen Parameter besser

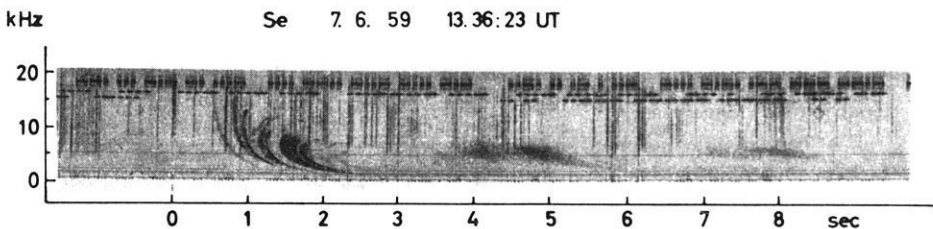


Abb. 1: Spektrogramm zweier Nose-Whistler im Abstand von 0,025 sec mit mehreren gut erkennbaren Linien. Das erste Echo nach dreifachem Weg entlang der Feldlinien ist verwaschen. (Aus HELLIWELL, Whistlers and related ionospheric phenomena [1965].)

sichtbar wird. Ferner wird es möglich, eine analytische Beziehung zwischen der Nose-Frequenz (der Frequenz mit der kürzesten Laufzeit) eines Whistlers und der von diesem Whistler durchlaufenen Feldlinie zu geben. Die Methode soll auf eine Reihe von Whistler-Daten angewendet werden und das Ergebnis mit einigen bisher veröffentlichten Elektronendichteprofilen verglichen werden.

2 Ausbreitung der Whistler durch die Magnetosphäre

2.1 Der Brechungsindex für Whistler

Die für die Ausbreitung von Whistler-Energie durch das magnetosphärische Plasma gültigen Gesetze liefert die magneto-ionische Theorie. Der komplexe Brechungsindex n ist danach gegeben durch die Appleton-Hartree-Formel. Es läßt sich (am einfachsten anhand von Zahlenbeispielen) zeigen, daß für Whistler die quasi-longitudinale Form des Appleton-Hartree-Gesetzes verwendet werden kann [HELLIWELL 1965]:

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 - iZ \pm Y \cos \Theta} \quad (2.1)$$

Dabei ist

$$X = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m 4 \pi^2 f^2} = \frac{f_0^2}{f^2}, \quad Y = \frac{eH}{2 \pi m f} = \frac{f_H}{f}, \quad Z = \frac{v}{2 \pi f}$$

Θ Winkel zwischen Magnetfeld und Wellennormale

N Elektronendichte in El. cm^{-3}

v Anzahl der Stöße der Elektronen pro Sekunde

$f_0 \left(\frac{e^2 N}{4 \pi^2 m \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{Plasmafrequenz} = 9 \cdot 10^3 N^{1/2} \text{ Hz}$

$f \frac{eH}{2 \pi m} = \text{Gyrofrequenz} = 2,78 \cdot 10^6 \cdot H \text{ Hz}$

H Betrag der Feldstärke des Magnetfeldes (hier Feldstärke des Erdfeldes)

f Frequenz der Welle

e/m spez. Elektronenladung

$4 \pi \epsilon_0$ $1 \text{ esL}^2/\text{erg cm.}$

Sämtliche Größen in dieser Arbeit, insbesondere Zahlenwerte, sind in Gaußschen *cgs*-Einheiten angegeben.

Die beobachtete geringe Intensitätsabnahme der Whistler-Energie nach mehrfachem Durchlaufen der Magnetosphäre rechtfertigt die Vernachlässigung der Elektronenstöße. Setzt man $Z = 0$, so erhält man in (2.1) nur dann einen reellen Brechungsindex, wenn das Minuszeichen gilt. Das Pluszeichen würde einen rein imaginären Brechungsindex ergeben, die Welle würde absorbiert. Es wird der reelle Brechungsindex μ eingeführt durch

$$\mu^2 = 1 + \frac{X}{Y \cos \Theta - 1} \quad (2.2)$$

Man kann (ebenfalls anhand von Zahlenbeispielen) zeigen, daß für die Whistler-Ausbreitung durch die Magnetosphäre

$$1 \ll \frac{X}{Y \cos \Theta - 1} \quad (2.3)$$

angenommen werden kann wodurch sich (2.2) weiter vereinfacht zu

$$\mu = \frac{X^{1/2}}{(Y \cos \Theta - 1)^{1/2}} = \frac{f_0}{(f_H f \cos \Theta - f^2)^{1/2}} \quad (2.4)$$

Dies ist, genau gesagt, der Phasenbrechungsindex für Whistler. Der Gruppenbrechungsindex μ_G , der für die Ausbreitung der Energie maßgeblich ist, wird nach der folgenden allgemeinen Formel berechnet:

$$\mu_G = \mu \left(1 + \frac{f}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial f} \right) \quad (2.5)$$

Man erhält mit (2.4)

$$\mu_G = \frac{1}{2} \frac{f_0 f_H \cos \Theta}{f^{1/2} (f_H \cos \Theta - f)^{3/2}} \quad (2.6)$$

2.2 Ausbreitung im homogenen anisotropen Plasma

Die Geschwindigkeit, mit der sich die elektromagnetische Energie der Whistler ausbreitet, sei v_{GS} . In einem anisotropen dispersiven Plasma, wie es Magnetosphäre und Ionosphäre darstellen, hat v_{GS} im allgemeinen eine andere Größe und Richtung als die Gruppengeschwindigkeit v_G im isotropen Medium. Der Vektor der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energie v_{GS} kann dargestellt werden durch

$$\mathbf{v}_{GS} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \omega}{\partial k_2}, \frac{\partial \omega}{\partial k_3} \right)$$

wobei ω die Kreisfrequenz der Welle und k_1, k_2, k_3 die Komponenten des Wellenzahlvektors \mathbf{k} sein sollen. Wählt man Kugelkoordinaten k, Θ, Φ , dann ist

$$\mathbf{v}_{GS} = \mathbf{e}_k \frac{\partial \omega}{\partial k} + \mathbf{e}_\Theta \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \Theta} + \mathbf{e}_\Phi \frac{1}{k \sin \Theta} \frac{\partial \omega}{\partial \Phi}$$

mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\Phi$. Der letzte Summand in dieser Gleichung fällt fort, da $\frac{\partial \omega}{\partial \Phi} = 0$ gilt. Die Geschwindigkeit v_{GS} wird Gruppen-Strahlen-Geschwindigkeit genannt.

In Abb. 2 ist die Wellennormaleinrichtung WN einer im Punkt 0 ankommenden Welle unter dem Winkel Θ zum Magnetfeld H eingezeichnet. Aus der Zeichnung ersieht man, daß für den Winkel α zwischen v_G und v_{GS} gilt:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \Theta}. \quad (2.7)$$

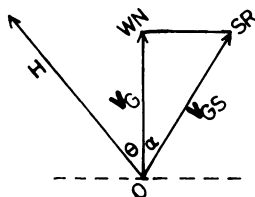


Abb. 2: Schematische Darstellung der Lagen von Gruppengeschwindigkeitsvektor und Gruppen-Strahlen-Geschwindigkeitsvektor. Der Vektor v_G zeigt in Wellennormalenrichtung WN , v_{GS} zeigt in Strahlenrichtung SR .

Setzt man $k = \frac{\mu\omega}{c}$ (c = Lichtgeschwindigkeit), so erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Theta} \quad (2.8)$$

Ferner entnimmt man der Zeichnung $v_{GS} = v_G \frac{1}{\cos \alpha}$ (2.9)

Der Vektor v_{GS} liegt in der Ebene, die durch v_G und H bestimmt ist. In diese Ebene sei die Funktion $\mu(\Theta)$ um den Punkt 0 eingezeichnet (Abb. 3). Die Wellennormale schneidet die Kurve $\mu(\Theta)$ im Punkt P . Man entnimmt der Zeichnung

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Theta} \quad (2.10)$$

Dabei ist β der Winkel zwischen der Tangente an die Funktion $\mu(\Theta)$ im Punkt P und der Senkrechten auf der Wellennormalen. Ein Vergleich von (2.8) und (2.9) liefert: $|\alpha| = \beta$. Man bezeichnet $\mu(\Theta)$ als Brechungsindexfläche und erhält als Ergebnis: die Normale der Brechungsindexfläche gibt die Strahlenrichtung an.

Der Winkel $(\Theta + \alpha)$ zwischen Magnetfeldrichtung und Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Energie kann untersucht werden, indem mit Hilfe von (2.8) und (2.4) der Ausdruck

$$\operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \theta \left(\cos \theta - \frac{2}{Y} \right)}{1 + \cos^2 \theta - 2 \frac{1}{Y} \cos \theta} \quad (2.11)$$

gebildet wird.

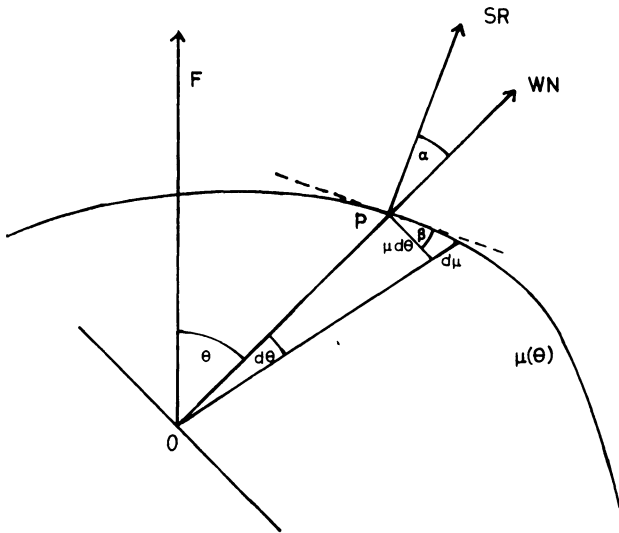


Abb. 3: Zusammenhang zwischen Brechungsindexfläche $\mu(\theta)$ und Strahlenrichtung SR. Die Senkrechte auf $\mu(\theta)$ im Schnittpunkt mit der Wellennormalen ist die Strahlenrichtung.

Hieraus können die maximalen Werte für $\theta + \alpha$ in Abhängigkeit von Y berechnet werden. Nach R. L. SMITH [1961] ist der Winkel $(\theta + \alpha)$ kleiner als 37° , solange $Y = f_H/f$ größer als 1,7 ist. Der kleinste bisher bei Whistlern gemessene Wert für Y liegt bei 1,7; deshalb übersteigt der Winkel zwischen Magnetfeld und Ausbreitungsrichtung nicht den Wert von 37° . Bei den meisten Whistlern ist $Y > 2,5$; dann erhält man $(\theta + \alpha) < 20^\circ$.

Diese Darstellung zeigt, wie stark Whistler-Energie entlang den erdmagnetischen Feldlinien geführt wird. Sie liefert bereits eine Erklärung dafür, daß ein in die Ionosphäre eindringender elektromagnetischer Whistler-Impuls die Magnetosphäre durchläuft und zur entgegengesetzten Hemisphäre gelangt. Viele Eigenschaften registrierter Whistler können jedoch mit dem einfachen Bild, wonach die Energie ungefähr entlang der Feldlinien läuft, nicht erklärt werden. Man nimmt deshalb diskrete Wege entlang den Feldlinien an, auf denen Whistler sich bevorzugt ausbreiten. Solche Wege stellt man sich als Schalen oder Schläuche mit erhöhter Elektronendichte vor.

2.3 Ausbreitung der Whistler in Schläuchen erhöhter Elektronendichte

Zur Annahme diskreter Wege parallel zu den Feldlinien führen folgende Beobachtungen und theoretischen Erwägungen:

Whistler bestehen oft aus ganz reinen, abfallenden Tönen; die Spuren auf den Spektrogrammen sind sehr dünn. Eine Whistler-Spur besteht oft aus einer Anzahl von diskreten Linien. Diesen einzelnen Linien muß man diskrete Wege zuordnen. Wären keine solchen Wege vorhanden, so müßten die Spuren breit und verwaschen sein. Verschiedene Whistler, die kurz nacheinander empfangen werden, zeigen gleiche Spektrogramme, d. h. die gleiche Anzahl von Linien in gleichen Abständen. Die Laufzeiten aufeinanderfolgender Echos verhalten sich sehr genau wie 1:2:3 bei Long-Whistlern, die die Magnetosphäre zweimal durchlaufen, also einmal an der Erdoberfläche reflektiert werden, und wie 1:3:5 bei Short-Whistlern, die die Magnetosphäre nur einmal durchlaufen. Es wurde aber z. B. auch folgendes beobachtet:

Eine Short-Whistler-Spur besteht aus zwei Linien A und B; die Laufzeiten für eine bestimmte Frequenz sind T_A und T_B . Das erste Echo nach dreimaligem Weg durch die Magnetosphäre enthält vier Linien mit den Laufzeiten $3 T_A$, $3 T_B$, $2 T_A + T_B$, $2 T_B + T_A$. Das würde bedeuten: Teile der Energie haben den Weg gewechselt.

Es wurden ferner für Whistler, die an verschiedenen Stationen empfangen wurden und ähnliche Spektrogramme lieferten, die Orte der auslösenden Blitze bestimmt. Dabei stellte sich heraus, daß die Spektrogramme vom Ort des Blitzes und der Lage der Station unabhängig sind. Alle diese aufgezählten Eigenschaften sind leicht erklärbar, wenn diskrete Whistler-Wege in der Magnetosphäre vorliegen.

YABROFF [1961] hat für eine plausible Elektronendichteverteilung, die mit steigender Höhe eine stetig abfallende Elektronendichte liefert, Whistler-Wege berechnet. Das Ergebnis zeigte, daß die Wege nicht parallel zu den Feldlinien verlaufen. Sie sind weitgehend abhängig vom Ort des Blitzes. Aufeinanderfolgende Echos haben unterschiedliche Wege, so daß die beobachteten Laufzeitverhältnisse nicht erklärt werden können. Außerdem sind die berechneten Wege im Gegensatz zur Beobachtung abhängig von der Frequenz und der Richtung der Wellennormalen beim Eindringen in die Ionosphäre. Bei Annahme einer Elektronenverteilung mit einem nach außen abfallenden Grundniveau der Elektronendichte und überlagerten dichteren Zonen entlang bestimmter Feldlinien berechnete YABROFF dagegen Whistler-Wege, die genau mit dem Verlauf der Feldlinien übereinstimmen und die unabhängig vom Ort der Blitze und der Frequenz sind.

Die aus Whistler-Beobachtungen gefolgerte Annahme von Schläuchen oder Schalen erhöhter Elektronendichte parallel zu Feldlinien des erdmagnetischen Feldes wurde in letzter Zeit auch durch Ergebnisse anderer Experimente unterstützt: z. B. zeigten Topside-Sounder-Messungen Schwankungen in der Elektronendichte quer zur Feldrichtung. Ferner wurde eine hohe Korrelation gefunden zwischen Unregelmäßigkeiten in der F_2 -Schicht und dem Empfang von Funksignalen, die sich wie Whistler ausbreiten [CARPENTER 1963]. Die von M. SIEBERT [1965] gegebene theoretische

Deutung der Breitenabhängigkeit der Perioden von erdmagnetischen Pulsationen fordert ebenfalls eine dem Erdfeld angepaßte schalenförmige Struktur der Magnetosphäre.

Eine ausführliche Behandlung der Ausbreitung von Whistlern auf diskreten Wegen geben SMITH [1961], SMITH und HELLIWELL [1960] und HELLIWELL [1965]. Dabei zeigt es sich, daß Whistler-Energie sowohl in Schalen erhöhter Elektronendichte als auch unter gewissen Bedingungen in Schalen erniedrigter Elektronendichte eingefangen werden kann. Eine in der Mitte eines Schlauches um 10% höhere Elektronendichte reicht aus, um die Whistler-Energie im Schlauch zu führen. Die Strahlenrichtung ist dabei nicht immer parallel zum Magnetfeld, sondern oszilliert um die Magnetfeldrichtung. Der Weg eines Whistlers in einem Schlauch ist also länger als die Magnetfeldlinie, um die der Schlauch zentriert ist. An seinem Rande wird der Brechungsindex wegen der geringeren Elektronendichte kleiner als in der Mitte. Deshalb wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit in den äußeren Teilen des Schlauches größer, so daß der längere Weg durch eine größere Ausbreitungsgeschwindigkeit kompensiert wird. Nach Abschätzungen von SMITH macht man einen Fehler, der in den meisten Fällen kleiner als 1% ist, wenn man bei der Berechnung der Laufzeit longitudinale Ausbreitung direkt entlang der Feldlinien annimmt. Durch diese Näherungen werden die Berechnungen in den folgenden Abschnitten wesentlich erleichtert.

3 Berechnung des Whistler-Laufzeitintegrals

Die Laufzeit T eines Whistlers, der sich mit der Geschwindigkeit v_{GS} auf einem Weg W ausbreitet, ist

$$T = \int \frac{1}{v_{GS}} ds \text{ mit } ds \text{ als Wegelement.} \quad (3.1)$$

Nimmt man nach Abschnitt 2 Ausbreitung längs einer Feldlinie des erdmagnetischen Feldes an, so erhält man nach (2.9) und (2.6) mit $\Theta = 0$, $\alpha = 0$

$$T = \frac{1}{2c} \int \frac{f_0 f_H}{w f^{1/2} (f_H - f)^{3/2}} ds \quad (3.2)$$

Die Laufzeit ist danach abhängig vom Weg, von der Elektronenverteilung (in f_0) und der Magnetfeldstärke (in f_H) sowie von der Frequenz f der Welle. Der Integrand ist umgekehrt proportional zu $f_H^{1/2}$; d. h., die Laufzeit wird wesentlich durch die Eigenschaften des erdfernen Teiles des Weges bei geringen Magnetfeldstärken bestimmt. Bei bekanntem Weg und Magnetfeld müßte sich aus gemessenen Werten T und f die Plasmafrequenz f_0 und damit die Elektronendichteverteilung berechnen lassen. Bisher ist es jedoch nicht gelungen, die Integralgleichung (3.2) durch ein auch

für die Anwendung brauchbares Verfahren allgemein zu lösen. Ebenso kann das Integral selbst für einfache Elektronendichtemodelle nicht in geschlossener Form bestimmt werden.

Eine Lösung des Integrals durch einen analytischen Ausdruck ist jedoch zum Verständnis der Zusammenhänge zwischen der Whistler-Laufzeit und den verschiedenen Eigenschaften der Magnetosphäre sehr nützlich. Insbesondere kann dann die Elektronendichte einfacher bestimmt werden als durch rein numerische Auswertung des Integrals. Das Ziel ist also, das Laufzeitintegral unter Annahme möglichst allgemeiner Gesetze für die Elektronenverteilung zu lösen. Im folgenden wird mit Hilfe einer Reihenentwicklung ein Lösungsweg angegeben.

Da für Whistler $Y > 1$, d. h. $f_H > f$ gilt, kann man den Integranden in (3.2) in eine konvergierende Reihe entwickeln. Dabei genügt eine explizite Berechnung der ersten vier Glieder. Eine Abschätzung ergibt, daß für $Y = f_H/f = 2$ das Restglied R_5 noch etwa 10% des gesamten Ausdrucks ausmacht. Da für die Nose-Frequenz f_m , die allein bei der Auswertung in Abschnitt 6 benutzt werden soll, immer $f_H > 2f_m$ gilt, ja sogar für den größten Teil des Weges $f_H \gg 2f_m$ ist, gibt die Entwicklung des Integranden bis zum vierten Glied eine gute Näherung. Die Laufzeit kann also dargestellt werden als Summe von Integralen, die gegenüber dem ursprünglichen Integral in (3.2) wesentlich einfacher sind:

$$T = \frac{1}{2c} f^{-1/2} \int \frac{f_0}{w f_H^{1/2}} ds + \frac{3}{4c} f^{1/2} \int \frac{f_0}{w f_H^{3/2}} ds + \frac{15}{16c} f^{3/2} \int \frac{f_0}{w f_H^{5/2}} ds + \frac{35}{32c} f^{5/2} \int \frac{f_0}{w f_H^{7/2}} ds \quad (3.3)$$

Als Wege werden nach Abschnitt 2 die Feldlinien des erdmagnetischen Feldes angenommen. Eine geeignete Näherung für das vorhandene Erdfeld zwischen zwei und fünf Erdradien geozentrischer Entfernung ist das Dipolfeld. Das Erdfeld wird also dargestellt durch

$$H = r^{-3} M (1 + 3 \cos^2 \vartheta)^{1/2} \quad (3.4)$$

mit r = Abstand vom Erdmittelpunkt, ϑ = geomagnetische Poldistanz, M = magn. Moment der Erde = $8,06 \cdot 10^{25}$ Gauß cm^3 . Für die Gyrofrequenz f_H erhält man

$$f_H = \frac{eH}{2\pi m} = r^{-3} \frac{eM}{2\pi m} (1 + 3 \cos^2 \vartheta)^{1/2} \quad (3.5)$$

Das Wegelement ds ergibt sich zu

$$ds = 2r_0 \sin \vartheta \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \right)^{1/2} d\vartheta \quad (3.6)$$

Dabei ist r_0 der Abstand des Scheitels einer Feldlinie vom Erdmittelpunkt.

Unter der Voraussetzung, daß die Elektronendichte oberhalb der F_2 -Schicht nach außen abnimmt, werden als einfache Modelle Potenzgesetze für die Elektronendichteverteilung angenommen:

$$N = A_n r^{-n} (1 + 3 \cos^2 \vartheta)^{1/2} \quad (3.7)$$

Dabei soll n die natürlichen Zahlen 3, 4, 5, 6 annehmen können. Mit (3.8) erhält man für die Plasmafrequenz

$$f_0 = \frac{(e^2 N)^{1/2}}{4 \pi^2 \epsilon_0 m} = 9 \cdot 10^3 r^{-n/2} (A_n (1 + 3 \cos^2 \vartheta)^{1/2})^{1/2} \quad (3.8)$$

wobei f_0 in Hz und N in El.cm^{-3} zu messen sind. Der Unterschied zwischen dem Ausdruck (3.8) und einem entsprechenden Ausdruck ohne den Faktor $(1 + 3 \cos^2 \vartheta)^{1/4}$ ist unwesentlich, da dieser Faktor für die meisten Werte von ϑ sehr nahe bei eins liegt. Die Annahme der Modelle (3.7) für die Plasmafrequenz f_0 in den Integralen (3.3) unterscheidet sich deshalb nur wenig von der Annahme reiner Potenzgesetze. Nach unserer derzeitigen Kenntnis vom Aufbau der Magnetosphäre ist es sinnvoll, die sich aus (3.7) für $n = 3, 4, 5, 6$ ergebenden speziellen Modelle genauer zu untersuchen und daraus das brauchbarste zu ermitteln.

Zwischen dem Abstand r_0 des Scheitels einer Feldlinie vom Erdmittelpunkt und der Poldistanz des Feldliniendurchstoßpunktes an der Erdoberfläche gilt die Beziehung

$$a = r_0 \sin^2 \vartheta_0, \quad a = \text{Erdradius} \quad (3.9)$$

Zur Abkürzung werden noch eingeführt

$$K_n = \frac{18 \cdot 10^3 A_n^{1/2}}{c \left(\frac{eM}{2\pi m} \right)^{1/2}} \quad (3.10)$$

und

$$G = \frac{2\pi m}{eM} a \quad (3.11)$$

Hiermit sowie mit den Gleichungen (3.5), (3.6), (3.8) erhält man für die Laufzeit T , indem über die halbe Länge einer Feldlinie integriert und ein Faktor zwei vor die Integrale gesetzt wird:

$$T_n(f, \vartheta_0) = K_n a^{\frac{5-n}{2}} [f^{-1/2} C_{1n}(\vartheta_0) + f^{1/2} C_{2n}(\vartheta_0) + f^{3/2} C_{3n}(\vartheta_0) + f^{5/2} C_{4n}(\vartheta_0)] \quad (3.12)$$

Die Abkürzungen C_{in} sind die entsprechenden Integrale, die hier nicht explizit hingeschrieben werden sollen. Sie sind bis auf konstante Faktoren alle vom Typ

$$\sin^{-(p+1-n)} \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \sin^{p-n} \vartheta \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta\right)^{q/2} d\vartheta$$

mit $p = 4, 10, 16, 22$ und $q = 1, 0, -1, -2$.

Für die Zahlen $n = 2, 3, 4, \dots$ sind diese Integrale lösbar (siehe z. B. GRÖBNER und HOFREITER [1957]). Eine ausführliche Behandlung findet sich bei SCHREIBER [1965].

Einige der ausgerechneten Funktionen $C_{in}(\vartheta_0)$ werden in den folgenden Gleichungen als Beispiele angegeben:

$$C_{13}(\vartheta_0) = \frac{1}{\sin^2 \vartheta_0} \frac{1}{4\sqrt{3}} \log \left(2 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta_0 \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \vartheta_0 \right)^{-1} + \frac{1}{2} \cos \vartheta_0 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta_0 \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

$$C_{14}(\vartheta_0) = \frac{1}{\sin \vartheta_0} \left(E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) - E \left(\vartheta_0, \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \right) \quad (3.14)$$

Die Funktion $E(\varphi, k)$ ist das Legendre-Normalintegral 2. Gattung.

$$C_{15}(\vartheta_0) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \log 2 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta_0 \right)^{1/2} - \sqrt{3} \cos \vartheta_0 \right] + \log 2 \frac{\cos \vartheta_0 + \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta_0 \right)^{1/2}}{\sin \vartheta_0} \quad (3.15)$$

$$C_{16}(\vartheta_0) = \cos \vartheta_0 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta_0 \right)^{1/2} + \sin \vartheta_0 \left[\frac{1}{4} F \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) - \frac{1}{4} F \left(\vartheta_0, \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) + E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) - E \left(\vartheta_0, \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \right] \quad (3.16)$$

Die Funktion $F(\varphi, k)$ ist das Legendre-Normalintegral 1. Gattung

$$C_{23}(\vartheta_0) = \frac{3}{4} G \frac{\cos \vartheta_0}{\sin^8 \vartheta_0} \left(\frac{1}{7} \sin^6 \vartheta_0 + \frac{6}{35} \sin^4 \vartheta_0 + \frac{8}{15} \sin^2 \vartheta_0 + \frac{16}{35} \right) \quad (3.17)$$

$$C_{24}(\vartheta_0) = \frac{3}{4} G \frac{1}{\sin^7 \vartheta_0} \left[\frac{1}{6} \sin^5 \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + \frac{5}{24} \sin^3 \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + \frac{5}{16} \left(\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right] \quad (3.18)$$

Die mit den C_{in} erhaltene Gleichung für die Laufzeit T wird also recht kompliziert. T ist jedoch als Funktion von f und ϑ_0 darstellbar.

4 Beziehungen zwischen der Whistler-führenden Feldlinie und der Nose-Frequenz

Nach Gl. (3.12) kann die Whistler-Laufzeit für eine bestimmte Frequenz berechnet werden, wenn die Poldistanz ϑ_0 des Durchstoßpunktes der zum Whistler-Weg gehörenden Feldlinie bekannt ist. Aus der Lage der Station ist der Wert ϑ_0 nicht zu bestimmen. Wie STOREY [1953] angibt, können Whistler, die in 2000 km Entfernung von der Station die Ionosphäre nach unten verlassen, noch von der betreffenden Station registriert werden. Dieser Einflußbereich ist aber zu groß, um eine „mittlere“ durchlaufene Feldlinie bestimmen zu können.

Es wird im folgenden gezeigt, wie aus der Nose-Frequenz von Whistlern die durchlaufenen Feldlinien berechnet werden können. Diese Berechnungen werden durch die im vorigen Abschnitt gegebene Lösung des Laufzeitintegrals möglich. Nimmt man ein homogenes Plasma mit konstanter Magnetfeldstärke und Elektronendichte an, dann erhält man aus (3.2) für die Whistler-Laufzeit entlang eines Weges S

$$T = \frac{1}{2c} \frac{f_H f_0}{f^{1/2} (f_H - f)^{3/2}} S \quad (4.1)$$

Dieser Ausdruck hat ein Minimum für die Frequenz $f_{T_{\min}}$

$$f_{T_{\min}} = \frac{1}{4} f_H \quad (4.2)$$

Bei homogenem Plasma ist also die Nose-Frequenz $f_{T_{\min}}$ nur von der Magnetfeldstärke abhängig. Für das inhomogene Plasma der Magnetosphäre läßt sich die Frequenz f_m mit minimaler Laufzeit ebenfalls durch Differenzieren des Ausdrucks für die Laufzeit und Nullsetzen berechnen.

Das ergibt:

$$3 f_m \int_w \frac{f_0 f_H}{(f_H - f_m)^{5/2}} ds = \int_w \frac{f_0 f_H}{(f_H - f_m)^{3/2}} ds \quad (4.3)$$

Da auf dem ganzen Wege eines Whistlers $f_m < f_H$ ist, kann man Zähler und Nenner dieser Gleichung entsprechend der Reihenentwicklung bei der Lösung des Laufzeitintegrals in konvergente Reihen entwickeln. Tut man das bis zum dritten Glied, so erhält man eine kubische Gleichung für die Nose-Frequenz f_m . Eine Entwicklung bis zum vierten Glied würde eine biquadratische Gleichung ergeben usw. Die dabei auftretenden Integrale können nach Abschnitt 3 für die dort angenommenen Elektronendichtemodelle (3.7) wieder berechnet werden. Sie sind Funktionen von ϑ_0 . Setzt man die Abkürzungen C_{in} ein und dividiert durch die in allen Gliedern auftretenden Konstanten, so erhält man aus (4.3) für die kubische Näherung

$$6 f_m^3 C_{4n}(\vartheta_0) + 3 f_m^2 C_{3n}(\vartheta_0) + f_m C_{2n}(\vartheta_0) - C_{1n}(\vartheta_0) = 0 \quad (4.4)$$

In dieser Gleichung steht nicht mehr der Normierungsfaktor A_n für die Elektronendichtemodelle, d. h., die Nose-Frequenz ist unabhängig von A_n . Wenn sich also in der gesamten Magnetosphäre die Elektronendichte um einen konstanten Faktor ändert, bleibt die Nose-Frequenz der entlang einer bestimmten Feldlinie gelaufenen Whistler unverändert.

Die Reihenentwicklung von (4.3) bis zum dritten Glied erscheint ausreichend. Wenn nämlich nach dieser Näherung die Nose-Frequenz für ein homogenes Plasma berechnet wird, ergibt sich $f_m = 0,258 f_H$ gegenüber dem exakten Ergebnis von $f_m = 0,25 f_H$. Damit ist aber die Genauigkeit, mit der f_m aus den Spektrogrammen abgelesen werden kann, erreicht.

In Abb. 4 sind die aus Gl. (4.4) erhaltenen Funktionen $f_m(\vartheta_0)$ für Modelle mit $n = 3, 4, 5, 6$ dargestellt. Der Unterschied zwischen den einzelnen Kurven ist relativ gering; das bedeutet: auch ohne ein bestimmtes Modell anzunehmen, kann aus der Nose-Frequenz eines Whistlers ziemlich genau die Feldlinie bestimmt werden, längs der er sich ausgebreitet hat. Voraussetzung ist dann nur eine nach oben gleichmäßig abfallende Elektronendichte.

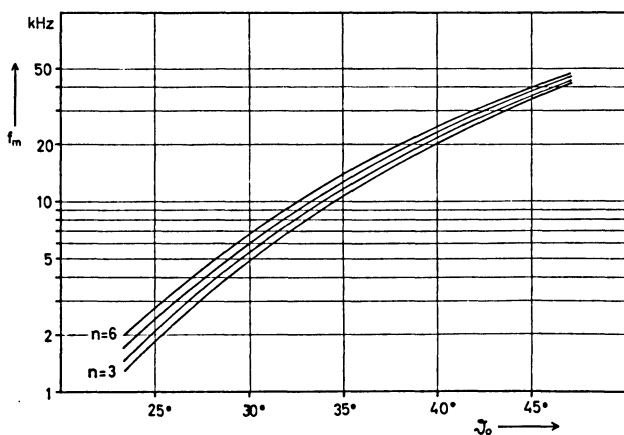


Abb. 4: Nose-Frequenz f_m als Funktion der geomagnetischen Poldistanz der durchlaufenen Feldlinie für Elektronendichtemodelle nach (3, 7).

Gl. (3.12) gibt dann die Laufzeit $T_n(f, \vartheta_0)$ für verschiedene Frequenzen. Speziell für $f = f_m$ folgt aus (3.12) die Laufzeit der Nose-Frequenz f_m . Außerdem kann aus (4.4) für ein bestimmtes n der zu jedem Wert f_m gehörige Wert ϑ_0 berechnet werden. Damit wird die Laufzeit der Nose-Frequenz eine reine Funktion von ϑ_0 , und man erhält aus (3.12), wenn dort die eckige Klammer mit Φ abgekürzt wird:

$$T_n(f_m(\vartheta_0), \vartheta_0) = K_n a^{\frac{5-n}{2}} \cdot \Phi_n(f_m(\vartheta_0), \vartheta_0) \quad (4.5)$$

Die Funktionen $\Phi_n(f_m(\vartheta_0), \vartheta_0)$ sind in Abb. 5 für $n = 3, 4, 5, 6$ dargestellt. Sie bestimmen die Laufzeit der Nose-Frequenz bis auf den konstanten Faktor in (4.5). Bei logarithmischer Aufzeichnung haben die Kurven nur eine geringe Krümmung.

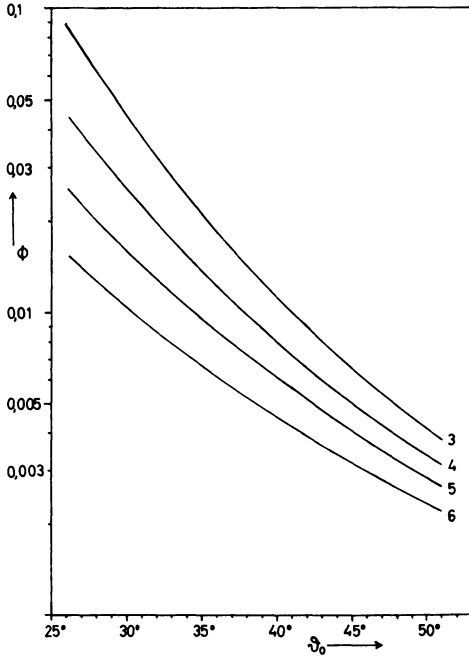


Abb. 5: Die berechneten Φ_n nach (4.5). Die Zahlenwerte der Ordinate gelten, wenn f_m in sec^{-1} eingesetzt wird.

5 Korrekturen für den Ionosphärendurchgang der Whistler

Die Elektronenverteilung in der unteren Ionosphäre, insbesondere in der F_2 -Schicht entspricht keinem der in den Berechnungen der vorhergehenden Abschnitte angenommenen Modelle. Es ist deshalb zweckmäßig, dieses Gebiet aus den Berechnungen auszuklammern. Denkt man sich die Entstehung und Registrierung der Whistler nicht am Erdboden, sondern oberhalb der F_2 -Schicht (z. B. in einer Höhe von 530 km), dann ändert sich an den Berechnungen nur wenig: Es ist in den Gleichungen des vorigen Abschnitts der wirkliche Erdradius $a = 6,37 \cdot 10^8$ cm durch den um $0,53 \cdot 10^8$ cm größeren Wert $a_k = 6,7 \cdot 10^8$ cm zu ersetzen. Die Kurven in den Abb. 4 und 5 wurden bereits mit dem Wert a_k berechnet. Setzt man a_k ein, dann bedeutet ϑ_0 die Poldistanz einer erdmagnetischen Feldlinie in einer Höhe von 530 km. Durch diese einfache Änderung bleibt die Ionosphäre in den Berechnungen unberücksichtigt.

Die Whistler-Daten, aus denen die Elektronenverteilung durch Vergleich mit den Berechnungen bestimmt werden soll, müssen dann allerdings etwas korrigiert werden. Zur Abschätzung der Korrekturglieder wird für die Ionosphäre ein einfaches Modell angenommen: Die Ionosphäre bestehe aus einer einzigen homogenen Schicht, die in 100 km Höhe beginnt, die eine Dicke $d = 430$ km und eine Elektronendichte $N = 1,5 \cdot 10^5 \text{ El.cm}^{-3}$ besitzt. Das Magnetfeld in der Schicht sei konstant und gleich dem Wert des Dipolfeldes in 300 km Höhe auf der Feldlinie mit $\vartheta_0 = 40^\circ$. Mit diesem Modell erhält man für einen zweimaligen Durchgang eines Whistlers durch die Schicht nach Gl. (3.3) mit $f_H \gg f$

$$\Delta T = \frac{1}{c} f^{-1/2} \int \frac{f_0}{f_H^{1/2}} ds \simeq 6 f^{-1/2} \quad (5.1)$$

Für die Nose-Frequenz gilt also

$$\Delta T(f_m) = T_m(f_m) - T_{mk}(f_m) = 6 f_m^{-1/2} \quad (5.2)$$

Mit diesem Wert müssen die aus Spektrogrammen entnommenen Laufzeiten T_m der Nose-Frequenz von Short-Whistlern korrigiert werden.

Die gemessenen Werte f_m müssen ebenfalls korrigiert werden, um sie mit Berechnungen, bei denen die Ionosphäre ausgeklammert wurde, vergleichen zu können. Es sei f_m die Nose-Frequenz eines Short-Whistlers, die an der Erdoberfläche gemessen wird; f_{mk} sei die Nose-Frequenz desselben Whistlers ohne zweimaligen Ionosphärendurchgang. Es muß $f_{mk} < f_m$ sein, da höhere Frequenzen nach (5.1) die Ionosphäre schneller durchlaufen, die Nose-Frequenz sich also beim Ionosphärendurchgang nach höheren Werten verschiebt. Die Laufzeiten der beiden Frequenzen seien $T_{mk}(f_m, \vartheta_0)$ bzw. $T_{mk}(f_{mk}, \vartheta_0)$. Deren Differenz ist

$$T_{mk}(f_m, \vartheta_0) - T_{mk}(f_{mk}, \vartheta_0) = 6 f_{mk}^{-1/2} - 6 f_m^{-1/2} \quad (5.3)$$

Wird (5.3) noch durch $T_{mk}(f_m, \vartheta_0)$ nach (5.2) dividiert, so ergibt sich

$$\frac{6 f_{mk}^{-1/2} - 6 f_m^{-1/2}}{T_m(f_m, \vartheta_0) - 6 f_m^{-1/2}} = \frac{T_{mk}(f_m, \vartheta_0) - T_{mk}(f_{mk}, \vartheta_0)}{T_{mk}(f_m, \vartheta_0)} \quad (5.4)$$

Mit der Annahme der Elektronendichtegesetze aus Abschnitt 3 können die T_{mk} auf der rechten Seite der Gleichung nach (3.12) berechnet werden. Dann erhält man eine Beziehung zwischen f_m und f_{mk} , aus der für gemessene Werte T_m und f_m der Wert f_{mk} näherungsweise zu berechnen ist.

Bei der Elektronendichtebestimmung im folgenden Abschnitt werden die korrigierten Daten T_{mk} und f_{mk} benutzt und mit den nach (4.5) berechneten Werten $T_m(f_{mk}(\vartheta_0), \vartheta_0)$ verglichen. Die an den Meßwerten anzubringenden Korrekturen sind nur gering, da der Weg durch die Ionosphäre nur einen sehr kleinen Teil des gesamten Whistler-Weges ausmacht.

6 Bestimmung der Elektronendichte in der Magnetosphäre

Die Elektronendichtebestimmung wurde nach den in den Abschnitten 3 bis 5 hergeleiteten Beziehungen im einzelnen folgendermaßen durchgeführt:

a) Zur Verfügung standen Werte für die Nose-Frequenz f_m und deren Laufzeit T_m für eine Anzahl von Nose-Whistlern des Jahres 1961 der Stationen Stanford und Seattle [CARPENTER 1961]. Aus diesem Material wurden Daten aus den Monaten April 1961 bis September 1961 ausgewählt. Dabei wurden nur solche Whistler berücksichtigt, die in ihrer Spur drei und mehr Linien aufweisen, die also mehrere verschiedene Nose-Frequenzen und zugehörige Laufzeiten liefern. Zu den Daten T_m und f_m wurden über (5.2) und (5.4) die korrigierten Werte T_{mk} und $(f_{mk})_n$ für Elektronendichtemodelle nach (3.7) mit $n = 3, 4, 5, 6$ berechnet. Aus den f_{mk} wurden nach Gl. (4.4) die ϑ_{0k} -Werte ebenfalls für Elektronendichtemodelle mit $n = 3, 4, 5, 6$ bestimmt. Zwei der für den betrachteten Zeitraum angegebenen Whistler wurden nicht berücksichtigt. Sie wurden in Zeiten hoher magnetischer Aktivität ($K_p = 7$) registriert. Da an magnetisch stark gestörten Tagen Magnetfeld und Elektronenkonzentration von den mittleren Werten stark abweichen, hatten auch die Nose-Frequenz und deren Laufzeit extreme Werte.

Die von den Stationen angegebenen Fehler der benutzten Daten schwanken stark wegen der unterschiedlichen Qualität der Spektrogramme. Sie sind bei fast allen Whistlern kleiner als 10% und wurden bei den Rechnungen nicht berücksichtigt.

b) In Abb. 6 sind die Punkte (T_{mk}, ϑ_{0k}) für jedes der untersuchten Dichtemodelle in Diagramme eingezeichnet. Punkte, die zu demselben Whistler gehören, wurden durch Geraden verbunden. Ferner wurden die nach (4.5) berechneten theoretischen Kurven $T_n(f_{mk}(\vartheta_{0k}), \vartheta_{0k})$ eingezeichnet. Wegen der geringen Krümmung der Kurven können sie mit den zu den Whistlern gehörenden Geraden verglichen werden. Der Faktor $K_n a_k^{(5-n)/2}$, der nur die Höhe der berechneten Kurven in den Diagrammen festlegt, wurde auf folgende Weise berechnet: Die Kurve wurde nacheinander durch jeden der insgesamt 43 Punkte gelegt, das ergab 43 Faktoren. Das Mittel dieser Werte wurde als bester Wert für $K_n a_k^{(5-n)/2}$ angesehen. Die so erhaltenen Zahlenwerte unterscheiden sich nur sehr wenig (um etwa 1%) von den Werten, die man aus der Forderung erhält, daß die Summe der senkrechten Abstandsquadrate in den Diagrammen ein Minimum sein soll. Die berechneten Werte sind

$$\begin{aligned}
 K_3 a_k &= 43 \\
 K_4 a_k^{1/2} &= 62 \\
 K_5 &= 84 \\
 K_6 a_k^{-1/2} &= 118
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Dabei wurden alle Größen in *cgs*-Einheiten eingesetzt. Durch (6.1) sind die K_n bestimmt und damit nach Gl. (3.10) auch die Faktoren A_n für die Elektronendichtegesetze. Normiert man bei den einzelnen Diagrammen die Summen der Abstands-

quadrate so, daß die Summe S_4 für das Modell mit $n = 4$ den Wert 1 hat, so erhält man $S_3 = 2,03$; $S_4 = 1$; $S_5 = 1,28$; $S_6 = 1,85$.

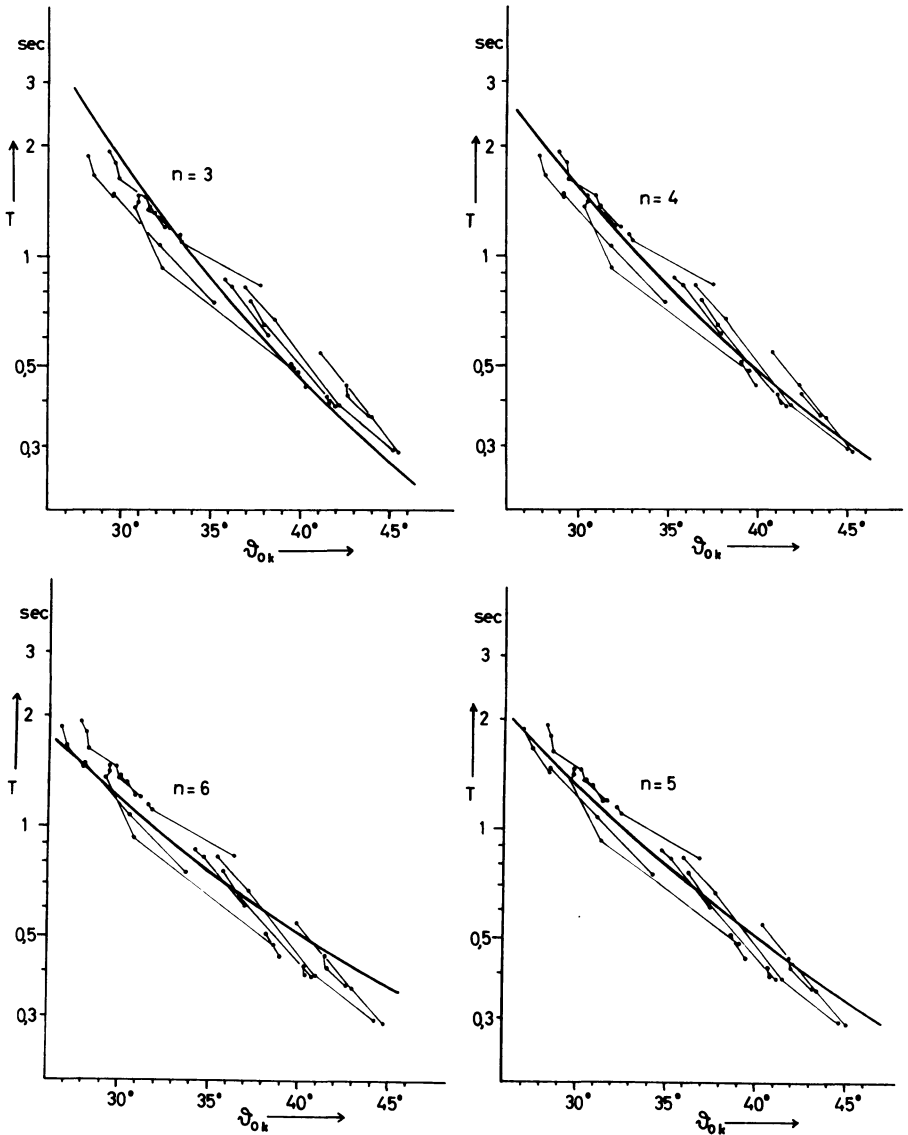


Abb. 6: Vergleich der verschiedenen berechneten Kurven $T_n(f_{mk}(\vartheta_{0k}), \vartheta_{0k})$ mit den untersuchten Daten. Durch Geraden verbundene Punkte gehören zu einem Whistler. Die Kurve für $n = 3$ verläuft zu steil, die für $n = 6$ zu flach.

In Abb. 6 ist diese unterschiedliche Übereinstimmung zwischen berechneten Kurven und den untersuchten Daten sofort zu erkennen. Die geringste Abweichung ergibt das Modell mit $n = 4$. Steigung und Höhe der Geraden in den Diagrammen hängen von den Eigenschaften der Magnetosphäre zur Zeit der Registrierung des betreffenden Whistlers ab. Haben die Kurven eine wesentlich andere Steigung als die Geraden, dann verläuft das wahre Elektronendichteprofil anders als das angenommene. Unterschiedliche Höhe zwischen Geraden und Kurven bei etwa gleicher Steigung deuten an, daß zum Zeitpunkt des betreffenden Whistlers der Normierungsfaktor A_n für das Dichtemodell vom mittleren Faktor verschieden war. Die Steigungen der Geraden in den Diagrammen schwanken weniger als die Höhen. Bei Änderungen der Elektronendichte in der Magnetosphäre variiert also der Normierungsfaktor stärker als die Form des Dichteprofiles.

c) Aus den Zahlenwerten in (6.1) wurden die Normierungsfaktoren A_n berechnet. Die Elektronendichtegesetze sind dann

$$\left. \begin{aligned} N_3 &= 2,4 \cdot 10^{30} r^{-3} \\ N_4 &= 3,4 \cdot 10^{39} r^{-4} \\ N_5 &= 4,5 \cdot 10^{48} r^{-5} \\ N_6 &= 5,9 \cdot 10^{57} r^{-6} \end{aligned} \right\} \cdot (1 + 3 \cos^2 \vartheta)^{1/2} \quad (6.2)$$

(r in cm, N in El.cm^{-3})

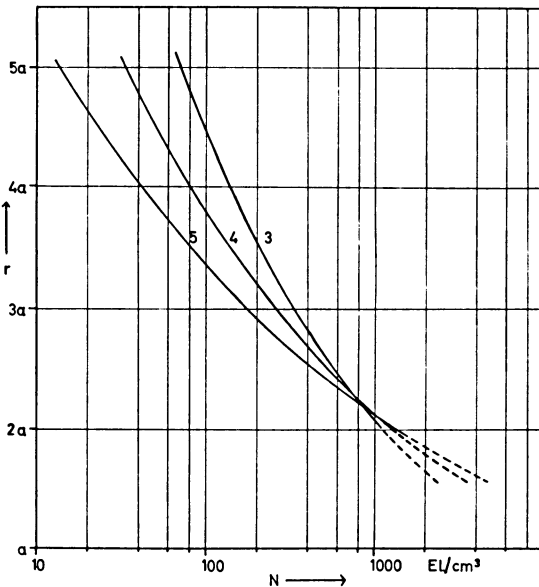


Abb. 7: Elektronendichtegesetze in Gleichung (6.2) gestrichelte Teile der Kurven sind extrapoliert.

In Abb. 7 sind diese Elektronendichteprofile als Funktion des Abstandes vom Erdmittelpunkt aufgetragen, und zwar für die Äquatorebene, d. h. für $\vartheta = 90^\circ$. Das Dichtegesetz mit $n = 6$ ist nicht eingezeichnet worden; es entspricht am wenigsten dem wahren Verlauf der Elektronendichte. Das Profil N_4 stimmt am besten mit den benutzten Daten überein. Es wird deshalb als mittleres nächtliches Elektronendichteprofil des Sommerhalbjahres 1961 angesehen.

In Abb. 8 ist das Gesetz mit $n = 4$ zusammen mit anderen vorwiegend aus Whistler-Daten hergeleiteten Dichtegesetzen eingezeichnet. Die Kurven b) und c) weisen eine um einen Faktor 1,5 bis 2 höhere Elektronendichte auf als das aus den Daten des Sommerhalbjahres 1961 gefundene Gesetz. Die Steigungen der verschiedenen Kurven zeigen bessere Übereinstimmung. Da die Elektronendichte in der Magnetosphäre zeitlich variiert und die Dichtegesetze in Abb. 8 aus Daten verschiedener Zeiträume gewonnen wurden, ist ein eingehender Vergleich sämtlicher Profile sehr schwierig. R. L. SMITH [1961] fand z. B. im Sommer eine um den Faktor 2 geringere Elektronendichte als im Winter. Allein dadurch ließe sich der Unterschied zwischen dem in dieser Arbeit gefundenen Dichteprofil und den Kurven b) und c), die ein Jahresmittel darstellen, erklären. Aus einem von SMITH [1961] veröffentlichten Diagramm konnten die

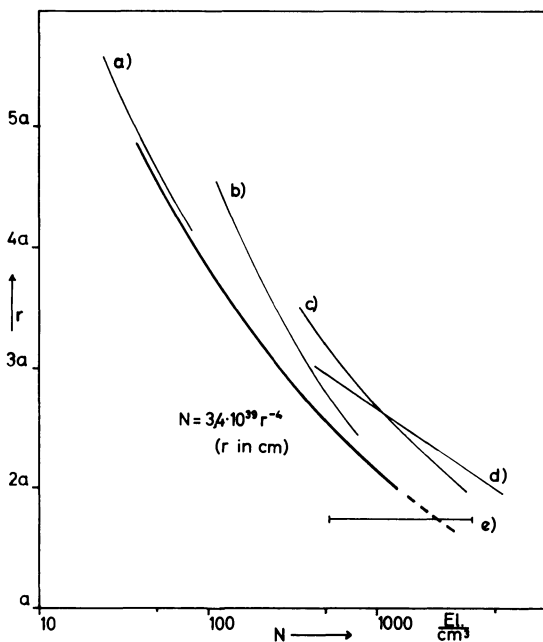


Abb. 8: Elektronendichte N als Funktion des geozentrischen Abstandes r . Vergleich verschiedener Ergebnisse mit dem Profil $N = 3,4 \cdot 10^{39} r^{-4}$; a) POPE [1961], b) SMITH [1961] c) CARPENTER [1964], d) ALLCOCK [1959], e) BOWLES [1962].

Daten, die zur Bestimmung der Kurve b) führten, entnommen werden. Bei Anwendung der in der vorliegenden Arbeit benutzten Methode erhält man aus den Daten ein mit der Kurve b) in Abb. 8 ziemlich gut übereinstimmendes Ergebnis. Daraus läßt sich schließen, daß die Unterschiede zwischen den einzelnen Kurven in Abb. 8 wesentlich auf unterschiedliche Daten und damit auf tatsächliche zeitliche Schwankungen in der Elektronendichte zurückzuführen sind.

Außer den bereits erwähnten jahreszeitlichen Änderungen der Elektronendichte wurden auch Änderungen bei steigender erdmagnetischer Aktivität und bei Schwankungen in der Sonnenfleckenzahl gefunden [CARPENTER 1962], die einen Vergleich der einzelnen Ergebnisse ebenfalls erschweren. Von M. SIEBERT [1965] angegebene Dichtegesetze, die aus der Breitenabhängigkeit der Perioden erdmagnetischer Pulsationen für das magnetosphärische Plasma gewonnen wurden, können nicht direkt mit Whistler-Ergebnissen verglichen werden. Wegen der Zunahme atmosphärischer Störungen am Tage können für die Auswertung geeignete Whistler fast nur nachts registriert werden. Deshalb geben die Profile in Abb. 8 die Elektronendichte nachts wieder, während aus den Pulsationen vom Typ ρc die Dichte des Plasmas am Tage bestimmt wurde.

Herrn Dr. M. SIEBERT danke ich für zahlreiche Anregungen und die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. D. L. CARPENTER und seinen Mitarbeitern in Stanford für die Überlassung der benutzten Whistler-Daten.

Literatur

- ALLCOCK, G. M.: The electron density distribution in the outer ionosphere derived from whistler data. *J. Atmosph. Terr. Phys.* 14, 185—199, 1959.
- BOWLES, K. L.: Profile of electron density over the magnetic equator obtained using the incoherent scatter technique. NBS Report 76, 33, 1962.
- CARPENTER, D. L.: Whistler-mode propagation data, Sel — 62 — 001, (1961), Sel — 63 — 006 (1963), Stanford Electronics Labs.
- CARPENTER, D. L.: Electron density variation in the magnetosphere deduced from whistler data. *J. Geophys. Res.* 67, 3345, 1962.
- CARPENTER, D. L.: On a remarkable correlation between whistler-mode propagation and high frequency north-scatter. *J. Geoph. Res.* 68, 5649—5657, 1963.
- CARPENTER, D. L.: Whistler measurements of electron density in the magnetosphere. *Rev. Geophys.* 2, 415, 1964.
- GRÖBNER, W., und N. HOFREITER: *Integraltafeln*, Springer, Berlin, 1957.
- HELLIWELL, R. A.: Whistler and related ionospheric phenomena. Stanford, California 1965.
- POPE, J. H.: An estimate of electron densities in the exosphere by means of nose-whistlers. *J. Geoph. Res.* 66, 67—75, 1961.
- SCHREIBER, H.: Ein analytischer Weg zur Bestimmung der Elektronendichte in der Magnetosphäre aus Whistler-Daten. Diplomarbeit, Math.-Nat. Fak. Univ. Göttingen, 1965.
- SIEBERT, M.: Geomagnetic pulsations with latitude-dependent periods and their relations to the structure of the magnetosphere. *Planet. Space Science* 12, 137—147, 1964. — Zur Theorie erdmagnetischer Pulsationen mit breitenabhängigen Perioden. *Mitteilungen Max-Planck-Inst. Aeronomie* Nr. 21, 1—106, 1965.
- SMITH, R. L., und R. A. HELLIWELL: A theorie of whistlers in field-aligned columns of enhanced ionisation. *J. Geophys. Res.* 65, 815—823, 1960.
- SMITH, R. L.: Properties of the outer atmosphere deduced from nose-whistlers. *J. Geoph. Res.* 66, 3699—3718, 1961.
- STOREY, R. L. O.: An investigation of whistling atmospheric. *Phil. Trans. Soc., London A* 246, 113—141, 1953.
- YABROFF, J. W.: Computation of whistler ray paths. *J. Res. nat. Bur. Stand.* 65 D, 485—505, 1961.

Bemerkungen zu Blubberbeobachtungen bei sprengseismischen Messungen auf See¹⁾

Von J. BEHRENS, Clausthal²⁾ und W. WEIGEL, Hamburg³⁾

Eingegangen am 29. Juli 1966

Zusammenfassung: Aus Blubberbeobachtungen bei refraktionsseismischen Messungen auf See wird der Einfluß der Sprengstoffart auf die erste Blubberperiode (Impulsfolgezeit) untersucht. Dabei zeigt sich für vier verschiedene Sprengstoffarten eine deutliche Abhängigkeit zwischen einer spezifischen Konstanten in der Formel von WILLIS und den gemessenen Impulsfolgezeiten. Die Bestimmung unbekannter Ladungstiefen kann bei Kenntnis dieser Konstanten, der Impulsfolgezeit und der Ladungsgröße nachträglich rechnerisch vorgenommen werden.

Die Betrachtung der mittleren Hauptfrequenzen der direkten Wasserschallwelle und der zum ersten Refraktionseintritt gehörenden Wellengruppe läßt eine Abhängigkeit von der Konstanten C in der Formel von WILLIS und damit von der Art des Sprengstoffes erkennen.

Summary: From observations of bubble pulses on refractive measurements on sea the influence of the kind of explosives on the first bubble-period (pulse — repetition rate) is analysed. For four different kinds of explosives a clear dependence between a special constant in the formula of WILLIS and the measured pulse-repetition rates has been found. The determination of unknown depth of charges can be analytically carried out after the seismic measurements, if this constant, the pulse-repetition rate, and the quantity of the charge are known.

Looking to the mean main-frequencies of the water sound and the wave packet belonging to the first refractive onset, a dependence on the constant C in the formula of WILLIS and consequently the kind of the explosive is observed.

1. Einleitung

Bei seismischen Messungen auf See werden häufig Einsätze registriert, die durch sogenannte Blubber hervorgerufen werden. Diese im Seismogramm zusätzlich beobachteten Impulse werden bekanntlich durch das ein- oder mehrmalige Pulsieren der bei einer Sprengung im Wasser erzeugten Gasblase angeregt [COLE 1948]. Die Impulse stellen einerseits eine Erhöhung des Informationsgehaltes dar, können jedoch durch ihre Vielzahl die Deutungs- und Korrelationsmöglichkeit von Seismogrammen außerordentlich erschweren [BEHRENS 1963, WEIGEL 1963]. Eine genaue Kenntnis der Beziehungen zwischen den gegebenen Größen wie Ladungsmenge, atmosphärischem

¹⁾ Erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft in Freiburg, Herbst 1964.

Veröffentlichung Nr. 5 im Rahmen der Arbeitsgruppe Skagerrak-Projekt.

²⁾ Dr. JÖRN BEHRENS, Institut für Geophysik der Bergakademie Clausthal — Technische Hochschule.

³⁾ Dipl.-Geophys. WILFRIED WEIGEL, Institut für die Physik des Erdkörpers, Universität Hamburg.

Druck, Schußtiefe, Sprengstoffart und der Folgezeit der einzelnen Blubberimpulse ist daher für die Auswertung von seismischen Messungen auf See besonders wichtig. Die Beziehung wird für die erste Pulsation des Blubbers durch die Formel von WILLIS [1941] quantitativ beschrieben. Diese Formel ist bisher von vielen Autoren experimentell von kleinen Ladungen bis zu Ladungen im Tonnenbereich bestätigt worden.

In der vorliegenden Arbeit werden anhand der Formel von WILLIS folgende Zusammenhänge untersucht:

1. Der Einfluß verschiedener Sprengstoffarten auf die Impulsfolgezeit, d. h. auf die Zeitdifferenz zwischen dem durch die Explosion abgestrahlten ersten Impuls und dem ersten Blubberimpuls.
2. Der Einfluß der Sprengstoffart auf das Frequenzspektrum von Impulsen erster Einsätze refraktierter Wellen und direkt gelaufener Wellen des Wasserschalles.

2. Beschreibung der Untersuchungen

Das Material für die Untersuchungen stammt von den Ergebnissen refraktionsseismischer Messungen, die in norwegischen Fjorden (1961) vom Institut für Geophysik der Bergakademie Clausthal — Technische Hochschule — sowie im Skagerrak (1962/64) vom Institut für die Physik des Erdkörpers der Universität Hamburg unter Professor Dr. H. MENZEL*) in Zusammenarbeit mit skandinavischen Instituten geplant und ausgeführt worden sind.

Sowohl bei den Messungen in den Fjorden als auch im Skagerrak zeigen sich im Bild der Refraktionseinsätze und der Einsätze des Wasserschalles deutlich Impulse, die in ihrer Entstehung auf Blubber zurückgeführt werden können. Abbildung 1 zeigt in zwei Beispielen die Registrierung von Einsätzen refraktierter Wellen mit zugehörigen Blubbereinsätzen.

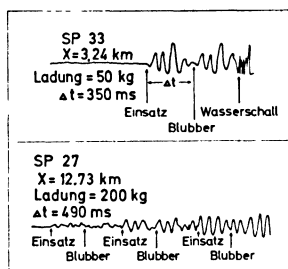


Abb. 1: Seismogramme mit Einsätzen refraktierter Wellen und zugehörigen Blubbereinsätzen.

Der Blubberimpuls läßt sich auf Grund seines dem zugehörigen Refraktionsimpuls ähnlichen Schwingungsbildes leicht identifizieren. Besonders deutlich ist dieses auf dem oberen Seismogramm zu erkennen.

*) Prof. Dr. HEINZ MENZEL, Institut für die Physik des Erdkörpers der Universität Hamburg.

a) Bestimmung der spezifischen WILLIS-Konstanten

In der Formel von WILLIS

$$\Delta t = C \cdot \frac{L^{1/3}}{(h+k)^{5/6}} \quad [\text{s}] \quad (1)$$

ist die Sprengstoffart durch die Konstante C charakterisiert. Diese läßt sich bestimmen, wenn die Größen Δt (Impulsfolgezeit), L (Ladung), h (Schußtiefe) und k (atmosphärischer Druck) bekannt sind.

Aus den Ergebnissen der Messungen im Fjord und im Skagerrak konnten die Konstanten C für folgende Sprengstoffarten ermittelt werden:

TNT
 Geomit
 Ammon-Gelit II
 Gummidynamit

In den Abbildungen 2 und 3 ist das Resultat dieser Ermittlungen dargestellt worden. Abbildung 2 gibt das Ergebnis der Messungen im Skagerrak wieder, während Abbildung 3 die Ergebnisse der Messungen in norwegischen Fjorden zum Inhalt hat. Die Kurvenscharen zeigen die Abhängigkeit der Impulsfolgezeit Δt von der Schußtiefe h , berechnet für die Ladungen 5 kg, 10 kg, 25 kg, 50 kg, 100 kg, 200 kg und 400 kg und für die Konstanten C zwischen 1,75 und 1,95 als Parameter gemäß der Formel von WILLIS.

Alle für eine bestimmte Ladung, Sprengstoffart und Schußtiefe gemessenen Impulsfolgezeiten — durch kurze senkrechte Striche dargestellt — sind zu mittleren Δt -Werten zusammengefaßt worden. Diese Mittelwerte sind in beiden Abbildungen durch lange senkrechte Striche symbolisiert worden. Die eingezeichneten horizontalen Linien geben jeweils die Beträge der mittleren Fehler der Mittelwerte wieder. Mit Hilfe dieser Mittelwerte ließen sich die für jede Sprengstoffart charakteristischen mittleren Konstanten C_m einschließlich ihrer mittleren Fehler finden.

Die mit BG bezeichnete gestrichelte Grenzkurve wurde nach COLE berechnet. Das Gebiet oberhalb der Grenzkurve umfaßt die Schußtiefen, bei denen ein Blubber auftritt, d. h. ein freies Schwingen der Gasblase ohne Kontakt mit der Wasseroberfläche möglich ist. Im Bereich der Schußtiefen unterhalb der Grenzkurve durchbricht die Gasblase die Wasseroberfläche. Es treten sogenannte Ausbläser auf.

Für den Sprengstoff TNT, der 1964 bei den Messungen im Skagerrak verwendet wurde (Abbildung 2), ergab sich bei Ladungen von 25 kg und genau bestimmten Schußtiefen von 10 m eine mittlere Konstante $C_m = 1,95 \pm 0,02$ [$\text{s} \cdot \text{m}^{5/6} \text{kg}^{-1/3}$]. Wegen des geringen mittleren Fehlers des aus einem Kollektiv von $n = 27$ gewonnenen Wertes von C_m wurde dieser Wert der Konstanten als repräsentativ auch für Ladungen über 25 kg für den Sprengstoff TNT angesehen. Die mit Hilfe dieser repräsentativen

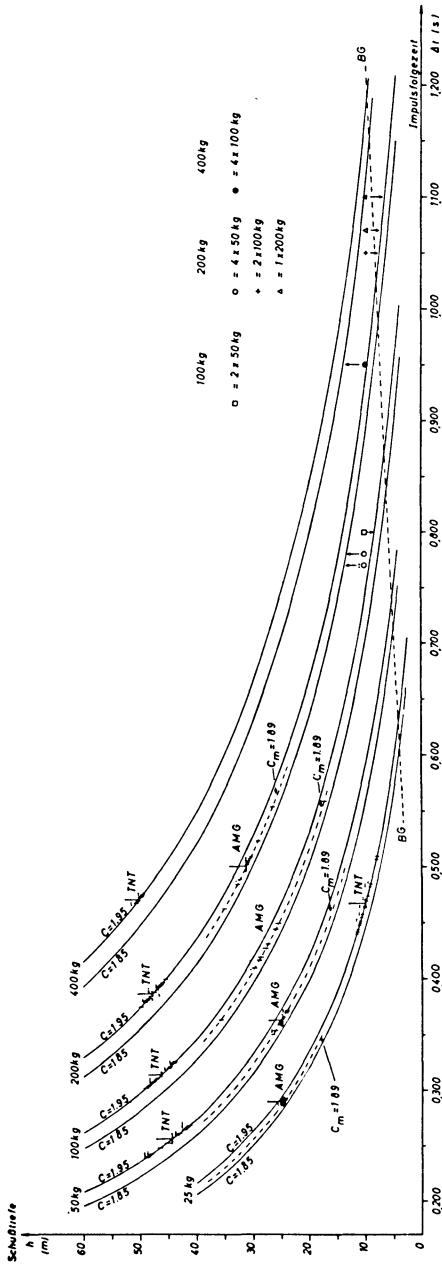


Abb. 2: Bestimmung der mittleren Willis-Konstanten C_m für TNT und Ammon-Gelit II aus Blubberbeobachtungen.

Ladungsbereich: 25 kg bis 400 kg.

Gestrichelte Linie BG: Nach COLE berechnete Grenzkurve.

Senkrechte Pfeile: Hinweis auf die Zugehörigkeit von Meßwert und Parameterkurve.

Die Zahl der Punkte oberhalb der Meßwerte gibt die Anzahl der Werte an.

Konstanten aus den gemessenen Impulsfolgezeiten nachträglich bestimmten Schußtiefen zeigen bei den Ladungen 50—400 kg in zahlreichen Fällen eine Abweichung von der Sollschußtiefe (50 m). Diese Abweichung läßt sich durch das Auftreiben der Ladung infolge von Strömung erklären.

Die Konstante der Sprengstoffart *Ammon-Gelit II*, die 1962 im Skagerrak benutzt wurde (Abbildung 2), konnte mit Hilfe der Messungen bei 25 m Schußtiefe und Ladungen von 25 kg sowie 50 kg bestimmt werden. Man erhält einen Wert von $C_m = 1,89 \pm 0,03$ [$s \cdot m^{5/6} kg^{-1/3}$], der als charakteristisch für den Sprengstoff *Ammon-Gelit II* betrachtet wurde. Bei den Ladungen 100 kg und 200 kg sollte die Schußtiefe bei 30 m liegen. Die mit Hilfe der Konstanten C_m und den einzelnen Impulsfolgezeiten bestimmten Schußtiefen weisen jedoch starke Streuungen auf. Diese

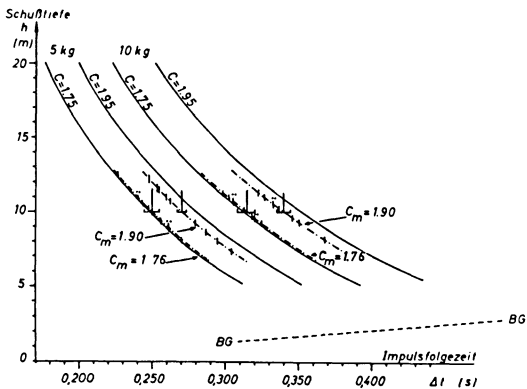


Abb. 3: Bestimmung der mittleren WILLIS-Konstanten C_m für Geomit und Gummodynamit aus Blubberbeobachtungen.

Ladungsbereich 5 kg bis 10 kg.

Gestrichelte Linie BG: Nach COLE berechnete Grenzcurve.

Die Zahl der Punkte oberhalb der Meßwerte gibt die Anzahl der Werte an.

Streuungen haben ihre Ursache in der fehlerhaften Lokalisierung der Ladungen infolge schlechter Wetterbedingungen. Für die Ladungen von 100 kg ergab sich eine so große Streuung, daß auf eine Mittelbildung verzichtet wurde.

Mit den Sprengstoffen *Geomit* und *Gummodynamit* wurde 1961 in norwegischen Fjorden geschossen (Abbildung 3). Der Sollwert der Schußtiefen betrug für alle Ladungen 10 m, die Ladungen hatten die Größe von 5 kg und 10 kg. Für Geomit resultierte eine Konstante $C_m = 1,90 \pm 0,03$ [$s \cdot m^{5/6} kg^{-1/3}$] für Gummodynamit eine Konstante $C_m = 1,76 \pm 0,06$ [$s \cdot m^{5/6} kg^{-1/3}$].

Die nach der oben beschriebenen Methode ermittelten Konstanten für die verwendeten Sprengstoffarten sind in der Tabelle 1 zusammengefaßt worden.

Der Zusammenhang zwischen den bestimmmbaren Größen (L , Δt , h , k) und den in Tabelle 1 aufgeführten Konstanten, wie er durch die Formel (1) beschrieben wird, gilt nur für Sprengungen im freien Wasser bei einteiligen Ladungen. Bei Ladungen, die aus räumlich getrennten Einzelladungen bestehen oder in der Nähe einer Grenzfläche gezündet werden, wird die Formel von WILLIS nicht mehr erfüllt. Diese Tatsache

Tabelle 1.

Sprengstoffart	$C_m \pm \Delta C_m$ [$s \cdot m^{3/2} \cdot kg^{-1/2}$]	
TNT	1,95	$\pm 0,02$
Geomit	1,90	$\pm 0,03$
Ammon-Gelit II	1,89	$\pm 0,03$
Gummidynamit	1,76	$\pm 0,06$

wird deutlich durch die auf der rechten Seite der Abbildung 2 eingetragenen Meßwerte. Die Werte, die aus Sprengungen mit Ammon-Gelit III auf dem Seeboden gewonnen wurden, stammen von Untersuchungen im Lago Bianco 1964 und wurden von Herrn Dr. BAULE freundlicherweise den Autoren zur Verfügung gestellt [BAULE 1964].

Der Einfluß der Ladungsteilung bewirkt mit zunehmender Zahl der Einzelladungen eine Verschiebung der Impulsfolgezeiten nach kleineren Werten hin. Die Meßergebnisse bei einer Ladung von 200 kg zeigen diese Tendenz besonders deutlich. Quantitative Untersuchungen von VEES [1964] und KNUDSEN [1958] bestätigen diese Aussage. Die Wirkung des Seebodens zeigt sich in einer Erhöhung der beobachteten Impulsfolgezeiten (Beispiel: Einzelladung 200 kg).

b) Abhängigkeit des Frequenzspektrums von der Konstanten C_m

Die Konstante C stellt ein Maß für die Brisanz des entsprechenden Sprengstoffes dar. Es lag daher nahe, das Verhalten des Frequenzspektrums bestimmter Wellengruppen im Seismogramm zu prüfen [RIXMANN 1935].

Da das Signal des direkt gelaufenen Wasserschalles nur dem Einfluß des übertragenden Mediums Wasser unterliegt, wurde die Auswertung dieses Signales hinsichtlich einer Frequenzuntersuchung als besonders geeignet angesehen. Als zusätzliche Informationsquelle wurde die zu dem ersten Refraktionseinsatz gehörende Wellengruppe ausgewählt, weil sie nicht wie spätere Wellengruppen durch Interferenz mit früheren Einsätzen gestört wird.

Die Auswertung bestand in der Ermittlung der Hauptfrequenzen in den zu untersuchenden Wellenzügen. In besonderen Fällen wurde das Ergebnis durch Anwendung der harmonischen Analyse kontrolliert und erweitert [BURKHARDT 1964]. In Abbildung 4 ist als Beispiel das Fourier-Spektrum eines ersten Refraktionsimpulses dar-

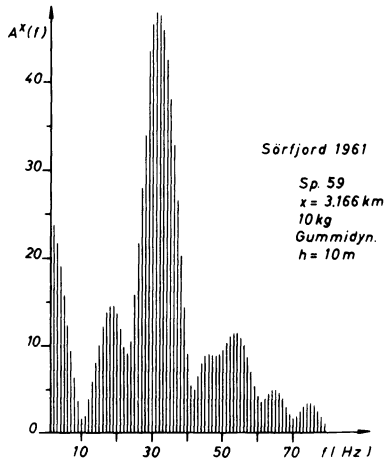


Abb. 4: Beispiel eines Amplitudenspektrogrammes.

Registrierentfernung: 3,166 km.

Ordinate: Spektrale Amplitude $A^x(f)$ in willkürlichen Einheiten.

Abszisse: Frequenz in Hz.

gestellt. Die Ordinate $A^x(f)$ bezeichnet die spektrale Amplitude in willkürlichen Einheiten. Auf der Abszisse ist die Frequenz in Hz aufgetragen. Die Hauptfrequenz wird durch das starke Maximum bei 31 Hz gekennzeichnet.

c) Frequenzauswertung der Seismogramme für zwei Entfernungsbereiche

Für die Beurteilung der Abhängigkeit des Frequenzspektrums von der gewählten Sprengstoffart wurde als erster Schritt ein Vergleich der Hauptfrequenzen gleicher Wellentypen in zwei verschiedenen Entfernungsbereichen — 2 bis 4 km und 5 bis 8 km — angestellt.

In den Abbildungen 5a—5c sind die Hauptfrequenzen für den Ersteinsatz (Abbildung 5a) und den Einsatz des Wasserschalles (5b; 5c) in Abhängigkeit von der Entfernung für den Entfernungsbereich 2—4 km dargestellt worden. Für das Meßgebiet Sörfjord beziehen sich die oberen Kurven auf den Sprengstoff Geomit, die unteren auf die Sprengstoffart Gummidynamit. Alle Refraktionsersteinsätze stammen dabei von demselben Refraktor.

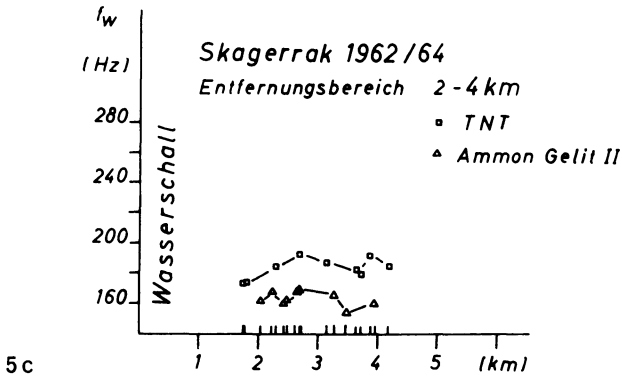
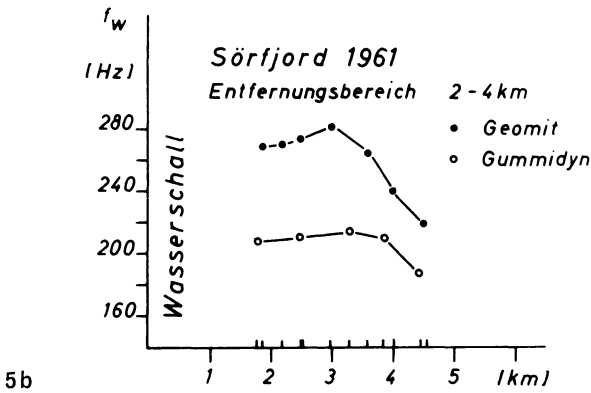
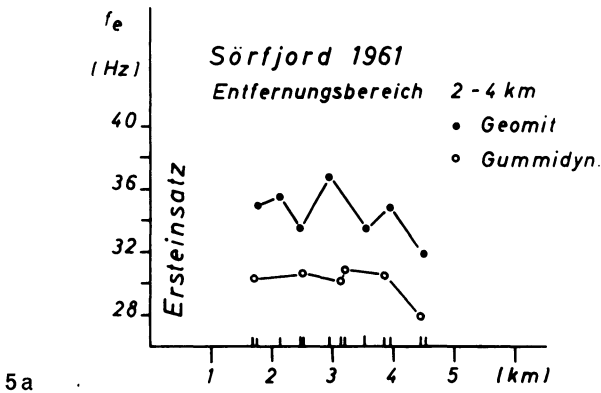


Abb. 5a bis 5c: Hauptfrequenzen in Abhängigkeit von der Registrierentfernung.
Entfernungsbereich: 2 bis 4 km.

Für das Beobachtungsgebiet Skagerrak gelten die entsprechenden Kurven für TNT und Ammon-Gelit II. Aus allen Darstellungen ergibt sich ein deutlicher Frequenzunterschied bezüglich der einzelnen Sprengstoffarten. Für den Wasserschall zeigt sich bei einem Vergleich beider Meßgebiete im Skagerrak gegenüber dem Sörfjord eine augenfällige Verschiebung der Hauptfrequenzen zu tieferen Werten. Da die Geophone

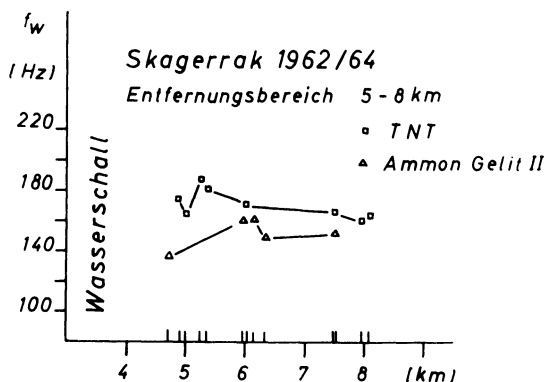


Abb. 5d: Hauptfrequenzen in Abhängigkeit von der Registrierentfernung.

Entfernungsbereich: 5 bis 8 km.

bei allen Messungen auf dem Meeresboden lagen und alle Seismogramme mit derselben geeichten Apparatur registriert wurden, ist eine Erklärung für die beobachtete Frequenzverschiebung in der unterschiedlichen Bodenbeschaffenheit und der damit verbundenen Änderung der Ankopplung des Geophones an den Boden zu suchen.

Der Unterschied der Hauptfrequenzen des Wasserschalles bezüglich der Sprengstoffe TNT und Ammon-Gelit II tritt auch im Meßgebiet Skagerrak für den Entfernungsbereich 5—8 km (Abbildung 5d) deutlich in Erscheinung. Gegenüber dem Entfernungsbereich 2—4 km liegen die Frequenzen im Mittel tiefer. Die Ursache liegt in dem Einfluß der größeren Schußentfernungen auf die Hauptfrequenzen [VEES 1965; BURKHARDT, ROSENBACH u. VEES 1964].

d) Vergleich der in den beiden Entfernungsbereichen gewonnenen Mittelfrequenzen mit den WILLIS-Konstanten verschiedener Sprengstoffarten

Um einen unmittelbaren Vergleich zwischen den Konstanten der vier benutzten Sprengstoffarten und den in den beiden Entfernungsbereichen gewonnenen Hauptfrequenzen anstellen zu können, wurden letztere für jede Sprengstoffart und jeden Entfernungsbereich zu Mittelwerten zusammengefaßt. Diese Mittelwerte einschließlich ihrer mittleren Fehler sind in Tabelle 2 dargestellt worden:

Tabelle 2.

Entfernungsbereich 2—4 km	Meßgebiet	Sprengstoffart	Mittlere Hauptfrequenz Ersteinsatz	Mittlere Hauptfrequenz Wasserschall
			$\bar{f}_e \pm \Delta f_e$ [Hz]	$\bar{f}_w \pm \Delta f_w$ [Hz]
	Sörfjord	Geomit	35 ± 1	259 ± 8
	Sörfjord	Gummidynamit	30 ± 1	207 ± 5
	Skagerrak	TNT	—	184 ± 2
	Skagerrak	Ammon-Gelit II	—	163 ± 2
Entfernungsbereich 5—8 km				
	Skagerrak	TNT	—	168 ± 4
	Skagerrak	Ammon-Gelit II	—	152 ± 5

Außer den WILLIS-Konstanten haben noch die Schußentfernung, die Ladungsgröße und die Schußtiefe einen Einfluß auf das Frequenzspektrum. Aus den Abbildungen 5a—5d zeigt sich jedoch, daß dieser Einfluß innerhalb der gewählten Entfernungsbereiche gegenüber der Einwirkung der verschiedenen Sprengstoffarten selbst vernachlässigbar ist. Dieser Tatbestand drückt sich auch in der Größenordnung der mittleren Fehler der Mittelwerte für die Hauptfrequenzen aus (Tabelle 2).

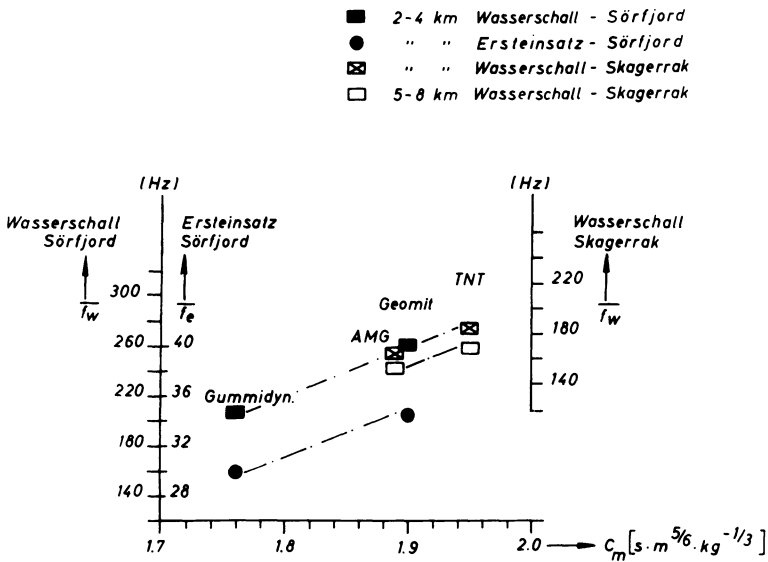


Abb. 6: Abhängigkeit der mittleren Hauptfrequenzen \bar{f}_w und \bar{f}_e von der mittleren WILLIS-Konstanten C_m .

Die Zuordnung der Konstanten nach der Formel von WILLIS zu den entsprechenden mittleren Hauptfrequenzen ist in Abbildung 6 vorgenommen worden. Auf den Ordinaten sind die mittleren Hauptfrequenzen des Wasserschalles f_w und des Ersteinsatzes f_e aufgetragen, auf der Abszisse die mittlere Konstante C_m .

Um die Gesetzmäßigkeit der Änderung der Frequenzen in Abhängigkeit von der Konstanten C_m in einer Darstellung zu erfassen, wurden die Skalen der Ordinaten für die Meßgebiete Sörfjord und Skagerrak gegeneinander versetzt.

Die Abbildung 6 zeigt deutlich, daß mit wachsendem C_m das Frequenzspektrum zu höheren Frequenzen verschoben wird. Nach den vorliegenden Ergebnissen gilt dieses sowohl im Frequenzbereich des Wasserschalles (Darstellung durch Rechtecke) als auch im Bereich der Frequenzen refraktierter Wellen (Darstellung durch Punkte).

3. Schlußbetrachtung

Die Frage nach dem Einfluß der Sprengstoffart auf die Impulsfolgezeit konnte auf dem Wege über die Formel von WILLIS durch Bestimmung der Konstanten C_m für die Sprengstoffe TNT, Geomit, Ammon-Gelit II und Gummidynamit beantwortet werden. Die Kenntnis dieses Einflusses ist wichtig, weil bei seismischen Messungen auf See je nach Beschaffungsmöglichkeit oft auf einem Profil mit sehr unterschiedlichen Sprengstoffarten geschossen wird. Die Schußtiefen können häufig nur bei kleinen Ladungen und geringen Ladungstiefen hinreichend genau bestimmt werden. Exakte Laufzeitmessungen lassen sich aber nur bei genau bekannten Schußtiefen ausführen. Mit Hilfe bekannter WILLIS-Konstanten ist es jedoch jederzeit möglich, nach Messung der Impulsfolgezeit rückwirkend die Schußtiefe zu bestimmen.

Hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen dem Frequenzspektrum und den verwendeten Sprengstoffarten lassen die beschriebenen Untersuchungen erkennen, daß die Hauptfrequenz von Impulsen erster Einsätze refraktierter Wellen und direkt gelaufener Wellen des Wasserschalles eindeutig von der WILLIS-Konstanten C und somit von den Eigenschaften, speziell von der Brisanz, des Sprengstoffes selbst abhängig sind.

Die gemeinsamen Untersuchungen mit den skandinavischen Instituten wurden durch die großzügige Finanzierung seitens der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* ermöglicht.

Das *Innenministerium des Landes Schleswig-Holstein*, das *Bundesministerium für Verteidigung* und die zuständigen Dienststellen der *NATO* haben wesentlich zur erfolgreichen Durchführung der Skagerrak-Messungen beigetragen. Unseren skandinavischen Kollegen ist sehr zu danken für die gute Zusammenarbeit bei der Planung und Durchführung der Untersuchungen. Allen Herren beider Institute, die bei der Vorbereitung und Ausführung der Messungen tätig waren, gebührt unser Dank. Herrn Professor Dr. H. MENZEL sei ebenfalls für anregende Diskussionen herzlich gedankt.

Literatur

- BAULE, H.: Bericht über Erschütterungen in Sprengpunktnähe bei den Testsprengungen im Lago Bianco in der Schweiz, Juni/Juli 1964.
Untersuchungen im Rahmen des Geophysikalischen Schwerpunktprogramms der Deutschen Forschungsgemeinschaft durch das Institut für Geophysik, Schwingungs- und Schalltechnik der Westfälischen Berggewerkschaftskasse Bochum.
- BEHRENS, J.: Refraktionsseismische Messungen im Sörfjord, Dissertation 1963, Clausthal.
- BURKHARDT, H.: Some Physical Aspects concerning Seismic Scaling Laws for Underwater Explosions. *Geophys. Prospecting* 12, 1964.
- BURKHARDT, H., O. ROSENBACH und R. VEES: Der seismische Impuls bei Unterwassersprengungen in verschiedenen Registrierentfernungen. S.C.E. Renn. de Budapest E 7, 1964.
- COLE, R. H.: *Underwater Explosions*, Princeton University Press, 1948.
- KNUDSEN, W.: Elimination of secondary Pressure Pulses in offshore Exploration (A Model Study). *Geophysics*, 23, S. 440—458, 1958.
- RIXMANN, F.: Untersuchungen über die Abhängigkeit der Bodenbewegung bei Sprengungen von der Ladung. *Zeitschrift für Geophysik* 11, S. 197—207, 1935.
- VEES, R.: Sprengungen mit einfachen und mehrfachen Ladungen. 1. Bad Kreuznacher DFG-Kolloquium, 11 N 32, 1964.
- VEES, R.: *Der seismische Impuls bei Unterwassersprengungen*, Dissertation Clausthal, 1965.
- WEIGEL, W.: Über refraktionsseismische Messungen im Skagerrak. Vortrag auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft in Bochum, 1963.
- WEIGEL, W.: *Wasserschallbeobachtungen im Skagerrak*. Geophysikalisches Kolloquium, Universität Hamburg, 1963.
- WILLIS, H. F.: Underwater explosions, time interval between successive explosions. *British Report WA — 47—21*, 1941.

Kurzmitteilung

Mit einem Seegravimeter bestimmte Horizontalgradienten

Von S. THYSSEN-BORNEMISZA, New York¹⁾

Eingegangen am 1. Juni 1966

Es ist kürzlich vorgeschlagen worden, Horizontalgradienten der Schwere mit dem Seegravimeter in küstennahen Gebieten zu bestimmen [THYSSEN-BORNEMISZA 1965]. Die Abb. 1 zeigt nun solche Gradienten, die aus Frei-Luft-Werten berechnet sind, welche sich aus Profilkreuzungen mit einem LaCoste-Romberg Seegravimeter ergaben [VON HUENE and RIDLON 1965]²⁾. Bei *Profilkreuzungen* kann die Positionsbestimmung verbessert werden durch Vergleiche von korrespondierenden Tiefenbestimmungen unter Berücksichtigung etwaiger Gezeitenstörungen. Fast alle der benutzten Profilkreuzungen sind ebenfalls in Abb. 1 wiedergegeben.

Die im Santa Barbara Channel gemessenen Horizontalgradienten stimmen gut mit den veröffentlichten Isogammen von ausgedehnten Schweremessungen in dieser Gegend überein [VON HUENE and RIDLON 1966]. Obwohl die verwendeten Profilkreuzungen durchschnittlich 7 bis 8 km entfernt waren und Schwerewerte an diesen Kreuzungen bis zu 8 mgal schwanken konnten, sind brauchbare Gradienten erhalten worden. Ein Horizontalgradient, der aus vier Schwerewerten abgeleitet ist, wird durch größere Meßfehler verhältnismäßig wenig gestört. Da ferner Schweregradienten unabhängige Größen darstellen und auch von variablen Stationsabständen wenig beeinflussbar sind [THYSSEN-BORNEMISZA 1966], kann diese Schweremeßmethode besonders in Küstengewässern von Vorteil sein.

¹⁾ Dr. S. THYSSEN-BORNEMISZA, The Plaza, New York City (USA).

²⁾ Meßwerte und Informationen sind von Herrn Dr. R. VON HUENE, Earth & Planetary Sciences Division, U.S. Naval Ordnance Test Station, China Lake, Californien (USA) freundlicher Weise zur Verfügung gestellt worden.

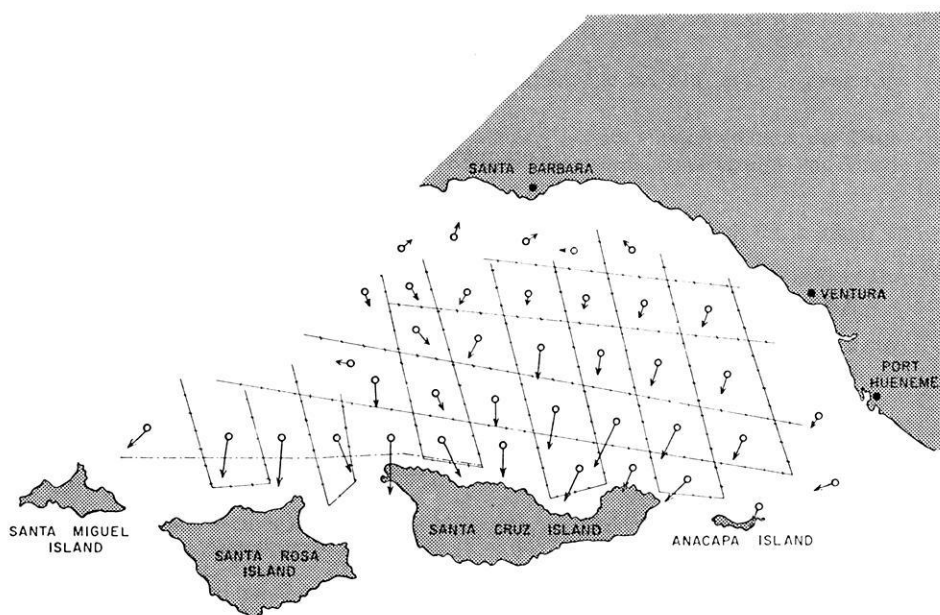


Abb. 1.

Maßstäbe: |——| 15 Kilometer

○→ 100 E

Literatur

- VON HUENE, R., and J. B. RIDLON: Offshore Gravity and Magnetic Anomalies in the Santa Barbara Channel, California, NAVWEPS Report. 8961., NOTS TP 3917, December 1965.
- VON HUENE, R. and J. B. RIDLON: Offshore Gravity Anomalies in the Santa Barbara Channel, California, *Journal of Geophys. Res. (USA)* 71, S. 457—463, 1966.
- THYSSEN-BORNEMISZA, S.: Double-Track Profiling with the Gravity Meter, *Geophysics (USA)*, 30, S. 1135—1137, 1965.
- THYSSEN-BORNEMISZA, S.: Ermittlung örtlicher Horizontalgradienten aus Gravimetermessungen im Nördlinger Ries, *Zeitschr. f. Geophysik*, 32, S. 119—120, 1966.

Ergänzung
zum Verzeichnis der geophysikalischen Vorlesungen
an den deutschsprachigen Universitäten und Hochschulen

Wintersemester 1966/67

Universität Münster

Spezielle Methoden der Geophysik (2)
Praktische Seismometrie (2 14tgl.)

BROCKAMP
BAULE

Technische Hochschule Zürich

Allgemeine Geophysik (Seismologie, Erdelektrizität) (2)
Geophysikalische Prospektion (Seismik) m. Üb. (3)
Geoelektrik und Magnetik (2)
Bohrlochgeophysik (2)
Wolken- und Niederschlagsphysik (1)
Atmosphärenphysik II, Physik der hohen Atmosphäre (2)
Dynamische Grundlagen der Wetterprognose (2)
Atmospheric Radiation (1)
Strömungslehre I (3)

GASSMANN
GASSMANN
M. WEBER
RYBACH
M. DE QUERVAIN
DÜTSCH
KUHN
LONDON

Buchbesprechungen

Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie, Band V, Heft 1, Innsbruck 1964.

Das Heft enthält die abschließende Arbeit von W. Kick, Regensburg, über den Chogolungma-Gletscher (36°N, 75°E) im Karakorum, in der die Auswertungsergebnisse der photogrammetrischen Aufnahme vom Oktober 1954, eines Geschwindigkeitsprofils unmittelbar unterhalb des letzten Seitenzuflusses, sowie u. a. eine auf vergleichendem Quellenstudium fußende Rekonstruktion der Schwankungen während der letzten 150 Jahre vorgelegt werden. Obgleich die Angaben früherer Beobachter viel offen lassen, ist zu sehen, wie das säkulare Verhalten den aus den Alpen bekannten Ablauf widerspiegelt, wenn auch mit ungewöhnlicher Verzögerung. Das Ende befand sich 1902 nach einer Aufnahme bei WORKMAN (die leider nicht vom gleichen Standpunkt wiederholt wurde) etwas hinter dem heutigen. Der weiteste Vorstoß wird auf 1913 datiert. Ältere parallele Stadien (als 19. Jh.) wurden nicht gefunden. Von größtem Wert sind die beiliegenden Karten: Ganze Zunge i. M. $\frac{1}{100\,000}$ (Äquidistanz 50, am Ufer 100 m), mittleres Drittel $\frac{1}{25\,000}$ (25, 50 m), Zungenende mit Arandu $\frac{1}{12\,500}$ (10, 10 m) sowie eine Übersicht der Rakaposhi- und Haramosh-Kette. Die Aufnahme umfaßt 80 Platten 13 × 18 cm von 17 Standlinien, Phototheodolit $f = 16$ cm nach FINSTERWALDER, Triang. Wild T2. Bleibt zu bedauern, daß Auswertung und Veröffentlichung zehn Jahre in Anspruch genommen haben.

OLAF HARTMANN

F. BERNHARDT und H. PHILIPPS †: *Angenäherte Berechnungen der vertikalen, langwelligen Strahlungsströme G und U in Abhängigkeit von einer vorgegebenen Feuchteverteilung, einer vorgegebenen vertikalen Kohlendioxidverteilung und einer vorgegebenen vertikalen Temperaturverteilung.* Abhandlungen des Meteorologischen Dienstes der DDR, Nr. 81, Band XI, Akademie-Verlag Berlin 1966, 31 Seiten, 21 Abbildungen, Preis: MDN 9,—.

Mit dieser Arbeit setzen beide Autoren ihre gründlichen Untersuchungen des Strahlungshaushaltes der Atmosphäre unter verschiedenen klimatologischen Bedingungen fort (s. auch Nr. 45 und Nr. 77 der Abhandlungen des Meteorologischen Dienstes der DDR). Die beiden Haushaltsgrößen G (= Gegenstrahlung der Atmosphäre zum Boden hin) und U (= langwellige Ausstrahlung der Atmosphäre einschließlich des Bodens) wurden hier für verschieden hohe Bezugsniveaus und verschieden hohe Wolkendecken in verschiedenen Klimagebieten angepaßten Atmosphärenmodellen berechnet. Die Ergebnisse sind in Diagrammen und Tabellen wiedergegeben. Sie gestatten dem Praktiker eine einfache Abschätzung zu erwartender Werte von G und U .

E. RASCHKE

K. YA. KONDRAT'YEV: *Radiation Heat Exchange in the Atmosphere.* Übersetzung aus dem Russischen von O. TEDDER, bearbeitet von C. D. WALSHAW, Pergamon London 1965, 412 Seiten, 105 Abbildungen, £ 5.—.

In diesem Lehrbuch werden die Grundlagen des Energieaustausches in der Atmosphäre durch langwellige elektromagnetische Strahlung (Wärmestrahlung) behandelt.

Die ersten drei Kapitel enthalten die theoretischen und physikalischen Grundlagen über die Wärmestrahlung in der Erdatmosphäre sowie deren meßtechnischer und auch theoretischer Erfassung. In den beiden folgenden Kapiteln sind dann verschiedene Rechenmethoden angegeben, mittels derer Strahlungsströme in der Atmosphäre berechnet werden können. Die Kapitel 6 und 7 enthalten Beobachtungs- und auch die für bestimmte klimatologische Verhältnisse berechneten Ergebnisse der atmosphärischen Emission und der Strahlungsbilanz am Boden und in verschiedenen Höhen. Im letzten Kapitel sind dann die durch Strahlung bewirkten Temperaturänderungen in der Atmosphäre (heating rates) besprochen.

Zwei Gründe lassen aber die Notwendigkeit der Übersetzung des russischen Originaltextes als fraglich erscheinen:

1. Der Originaltext wurde schon 1956 in Leningrad veröffentlicht. Die 1965 veröffentlichte Übersetzung erfuhr keinerlei Neubearbeitung, so daß man in ihr alle neueren Forschungsergebnisse der vergangenen 10 Jahre vermißt, zu denen zum Teil der Autor selbst beigetragen hat. Ein Literaturverzeichnis verschiedener zwischen 1956 und 1961 erschienener Arbeiten, das der Autor der Übersetzung nachträglich hinzugefügt hat, erhöht kaum die Aktualität des Buches, denn diese Arbeiten sind im Text nicht berücksichtigt.

2. Ursprünglich scheint das Buch als Lehrbuch für die Studenten an sowjetischen Hochschulen bestimmt zu sein. Darauf weist z. B. die Auswahl der hier beschriebenen Strahlungsmeßgeräte (YANISHEVSKIJ; LAIKHTMAN und KUCHEROV) und bestimmter Berechnungsmethoden (Strahlungsdiagramme von SHEKTER und DIMITRIEV) hin, die im westlichen Ausland wenig bekannt sind. Andere Geräte und Methoden, die sich in anderen Ländern sehr gut durchgesetzt haben, sind nur sehr kurz erwähnt.

Die beiden obenerwähnten Gründe lassen das Buch in dieser Form trotz seiner vorzüglichen Ausführungen über den Energieaustausch durch Strahlung nur als Nachschlagwerk erscheinen. Eine gründliche Neubearbeitung wäre zu empfehlen.

E. RASCHKE

Die Welt der Sterne

VON W. BRUNNER. 2., unveränderte Auflage. Mit 152 Abbildungen. 288 Seiten,
Leinen DM 16,-

Traité des sections coniques,

faisant suite au traité de géométrie supérieure

VON M. CHASLES. Teil I (Alles Erschienene). Mit 5 Tafeln. 1865. Neudruck 1962.
XII, 368 Seiten, Leinen DM 56,-

Triumph der Mathematik

Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur
VON H. DÖRRIE. 5. Auflage. Mit 122 Abbildungen. 391 Seiten, Leinen DM 18,50

Introduction to Boolean Algebras

VON PH. DWINGER. VI, 61 Seiten, broschiert DM 10,-

Handbuch der Kugelfunktionen

Theorie und Anwendungen

VON E. HEINE. 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage. 2 in 1 Band. 1878-1881.
Neudruck 1961. XVI, 484 und XII, 380 Seiten. Leinen DM 78,-

Diophantische Approximationen

Eine Einführung in die Zahlentheorie

VON H. MINKOWSKI. Mit 82 Abbildungen. 1907. Neudruck 1961. 235 Seiten,
Leinen DM 27,-

Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen

VON I. G. PETROVSKIJ. Übersetzt von R. HERSCHEL. 100 Seiten, Halbleinen DM 7,80

Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen

VON L. RÉDEI. 226 Seiten, Leinen DM 35,-

Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen

VON K. WEIERSTRASS. Herausgegeben von H. A. Schwarz. 2. Ausgabe 1893.
Neudruck 1962. 96 Seiten, Leinen DM 22,-

Tafeln zur harmonischen Analyse und Synthese periodischer Funktionen

Tables for the Harmonic Analysis and Synthesis of Periodic Functions

VON L. ZIPPERER. In englischer und deutscher Sprache. 1961. 8 Seiten, 24 Tafeln,
20 Grundtafeln und 20 Berechnungsblätter. In Mappe DM 9,75.



PHYSICA - VERLAG · WÜRZBURG

GEOPHYSICS

A Journal of General and Applied Geophysics

Published Quarterly by
**SOCIETY OF EXPLORATION
GEOPHYSICISTS**

Box 1536 Tulsa, Oklahoma

- The official journal of the leading international group of prospecting geophysicists
- Devoted to current problems in seismograph, gravity, magnetic and other methods of geophysical prospecting for oil and other minerals
- Covers geophysical instrumentation

SUBSCRIPTION RATES

ONE YEAR (4 issues) \$ 10.00,
foreign \$ 10.50 (payment with order)

Also available on microcards

GEOPHYSIKER

oder

GEOLOGE

(promovierend)

für die
Ausführung und Auswertung
geoelektrischer Untersuchungen
im norddeutschen Raum
gesucht

Willy Thiele

Bohrunternehmen/Geophysik
31 Celle/Hann., Bremer Weg 27
Telefon 54 53 und 39 53

Neudrucke

Reprints

Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg

Band 1—14 und 15 (Heft 1). 1922—1943. DM 1400.—

Band 1, 3—14: je DM 100.—; Band 2: DM 68.—;

Band 15 (Heft 1): DM 50.—

Physikalische Blätter Jahrgang 1. 1944. DM 30.—

ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

Band 21—24. 1941—1944. DM 250.—

Band 21—23: je DM 70.—; Band 24: DM 60.—



»Journal Franz« Arnulf Liebing, oHG.

8700 Würzburg / Germany, Postfach 1 136

Von der Messung bis zum Endbericht

Integrierte Datenverarbeitung in der angewandten Geophysik

Mit problemorientierten Programmsystemen



PRAKLA-SEISMOS · RECHENZENTRUM

CONTROL DATA 3300



plant
untersucht
schafft Grundlagen

GEOPHYSIK IN ALLER WELT

3000 HANNOVER 1 · POSTFACH 4767 · RUF: 807 21 · FERNSCHREIBER: 922847 · DRAHT: PRAKLA
Amsterdam · Ankara · Brisbane · Djakarta · Kuala-Belait · Madrid · Rio de Janeiro · Tripolis · Wien

Die Schwankungen und Pendelungen des Klimas in Europa seit dem Beginn der regelmäßigen instrumentellen Beobachtungen (1670)

Von Dr. Hans von Rudloff, Freiburg/Br. Sammlung »Die Wissenschaft«, Band 122. Gr. 8°. VIII, 368 Seiten mit 120 Abbildungen und 68 Tabellen. 1967. Halbleinen. DM 48,- (Best.-Nr. 7122).

Inhalt: Das Beobachtungsmaterial: Beschaffung, Kritik und Güte der Meßreihen – Die Säkular-Reihen der Haupt-Klimaelemente – Begriff und Spektrum der Klimaschwankungen: Einordnung der heutigen Schwankungen des Klimas in gültige Maßstäbe innerhalb der großen Ereignisse im Klimageschehen – Definition der Klimaschwankungen – Periodenforschung und Persistenz – Der zeitliche Ablauf der Klimaschwankungen in Europa: Kurze Literatur-Auswahl – Klimaschwankungen in historischer Zeit (von Professor Dr. phil. nat. H. Flohn) – Der räumliche und zeitliche Ablauf der Haupt-Klimaelemente seit dem Beginn der Instrumenten-Beobachtungen und sein Verhältnis zu den Perioden 1851 (1901) bis 1950. – Zeitweilige Schwankungen des Klimas im Jahresablauf – Verschiebungen der Witterungsregelfälle (Singularitäten) – Echte Klimaschwankungen der letzten 300 Jahre – Die wahrscheinlichsten Ursachen der Klimaschwankungen während der vergangenen 300 Jahre. Rückblick und Ausblick – Tabellenanhang – Literatur-Verzeichnis.

Dieses Buch behandelt die Klimaschwankungen der letzten 300 Jahre in Europa und dem Polargebiet einschließlich Grönland. Es beginnt in der sogenannten »kleinen Eiszeit« (1550–1700) und endet mit dem Winter 1965/66.

Ein Beitrag von Prof. Dr. H. Flohn, Bonn, leitet durch die Beschreibung der Klimaschwankungen in der Zeit vor Beginn der Instrumenten-Beobachtungen in den Hauptteil des Buches ein, der Entwicklung der Klima-Meßtechnik. Die ersten brauchbaren und fortlaufenden Messungen setzten 1670 in England ein. Schon um 1750 gab es Beobachtungsstationen auf privater Basis; Ende des 18. Jahrhunderts wurden die ersten erfolgreichen Versuche zur Gründung internationaler Beobachtungsnetze gemacht. Diese historischen Messungen wurden berücksichtigt, außerdem die Ergebnisse von über 150 europäischen Beobachtungsstationen mit sehr weit zurückliegenden Beobachtungsreihen ausgewertet. In vielen Gebieten Europas wurde ein Rückgang der Temperatur, verbunden mit einer Niederschlagszunahme, festgestellt, deren Ursachen weder auf die Industrie (Kohlendioxid), Autoabgase und die Kernversuche zurückgeführt werden können, da bereits in früheren Jahrhunderten ähnliche Schwankungen auftraten. Die Hauptursache für diese Vorgänge sieht der Verfasser in den Strahlungsschwankungen, die auf die Großzirkulation wirken und damit die klimatischen Gegebenheiten beeinträchtigen.

Zum gleichen Thema erscheint im 4. Quartal 1967:

Die Klimaschwankungen des Eiszeitalters

von Dr. Burkhard Frenzel.

Bitte fordern Sie ausführliche Prospekte bei unserer Abt. 43 an.