

# Zeitschrift für Geophysik

Band 39

1973

Heft 1

## Inhaltsverzeichnis

STUKENBRÖKER, B.: Ergebnisse von Erdzeiten-Parallelregistrierungen mit drei ASKANIA-Gravimetern . . . . .	1
DRIMMEL, J., G. GANGL, R. GUTDEUTSCH, M. KOENIG und E. TRAPP: Modellseismische Experimente zur Interpretation makroseismischer Daten aus dem Bereich der Ostalpen	21
BORM, G.: Solutions of Boundary Value Problems of Multilayer Analogs of Geoelectrics and Hydrology . . . . .	41
JACOBY, W. R.: Isostasie und Dichteverteilung in Kruste und oberem Mantel . . . . .	79
BUNTEBARTH, G.: Modellberechnungen zur Temperatur-Tiefen-Verteilung im Bereich der Alpen und des Alpenvorlandes . . . . .	97
BUNTEBARTH, G.: Über die Größe der thermisch bedingten Bouguer-Anomalie in den Alpen	109
EHRISMANN, W., W. LEPPICH, O. LETTAU, O. ROSENBACH und P. STEINHAUSER: Gravimetrische Detail-Untersuchungen in den westlichen Hohen Tauern . . . . .	115
EHRISMANN, W.: Ein allgemeines Verfahren zur digitalen Berechnung der Schwerkirkung von Modellkörpern . . . . .	131
KAHLE, H.-G., and M. TALWANI: Gravimetric Indian Ocean Geoid . . . . .	167



PHYSICA-VERLAG. WÜRZBURG

# ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

als zweimonatliche Publikation herausgegeben  
im Auftrag der **Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft** von  
**W. Dieminger**, Lindau/Harz  
und  
**J. Untiedt**, Münster i. W. (als Stellvertreter)

unter Mitwirkung von

*A. Defant*, Innsbruck – *W. Hiller*, Stuttgart – *W. Kertz*, Braunschweig – *Th. Krey*, Hannover –  
*E. A. Lauter*, Kühlungsborn – *H. Menzel*, Hamburg – *O. Meyer*, Hamburg – *F. Möller*, München –  
*St. Müller*, Zürich – *H. Reich*, Göttingen – *U. Schmucker*, Göttingen – *M. Siebert*, Göttingen –  
*H. Soffel*, München

Veröffentlicht werden Originalarbeiten aus dem gesamten Gebiet der Geophysik und aus den Grenzgebieten in deutscher, englischer oder französischer Sprache. Außerdem erscheinen mehrmals im Jahr auf Einladung hin verfaßte Übersichtsartikel.

Für kurze Mitteilungen, bei denen Interesse an raschem Erscheinen besteht, gibt es neben den normalen Veröffentlichungen die „Briefe an den Herausgeber“ (ohne Zusammenfassung). Sie werden nach Möglichkeit im nächsten Heft gebracht.

Jede Originalarbeit beginnt mit einer deutschen und einer englischen oder französischen Zusammenfassung. Bei deutschsprachigen Aufsätzen und Briefen werden Titel der Arbeit und Abbildungsunterschriften zusätzlich in englischer oder französischer Sprache gebracht.

Die Autoren erhalten 50 Sonderdrucke ihrer Arbeit kostenlos. Weitere Exemplare können vom Verlag gegen Berechnung geliefert werden. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Es wird gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschezeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden.

Die Zitate sollen entsprechend folgendem Beispiel angefertigt werden:

Im Text: Bei der ersten Zitierung [JUNG, MENZEL und ROSENBACH, 1965], bei jeder folgenden Zitierung [JUNG *et al.*, 1965]. Im Literaturverzeichnis: JUNG, K., H. MENZEL und O. ROSENBACH: Gravimetermessungen im Nördlinger Ries. *Z. Geophys.* 31, 7–26, 1965

Manuskripte sind zu senden an Prof. Dr. WALTER DIEMINGER, Max-Planck-Institut für Aeronomie, 3411 Lindau/Harz.

Anschrift der *Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*:

2 Hamburg 13, Binderstr. 22  
Tel. (04 11) 441972977

Postscheckkonto: Hamburg 55983  
Bank: Neue Sparcasse, Hamburg 24/11528

Aufgenommen werden nur Arbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Nutzungsrecht an den Verlag über.

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bezugspreis je Band (6 Hefte) 140,— DM, Einzelheft je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Band, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Jahresende vorliegt.

Der Mitgliedsbeitrag schließt den Bezug der Zeitschrift ein.

Bestellungen nehmen alle Buchhändler der Welt entgegen oder können direkt an den Physica-Verlag, D-8700 Würzburg, Postfach 1136, gerichtet werden.

Gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Dem Heft liegt ein Prospekt des Verlages Ferdinand Enke, Stuttgart, bei.

---

Bekanntmachung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing KG, D-8700 Würzburg, Werner-von-Siemens-Straße 5. Pers. haft. Ges. Arnulf Liebing und Hildgund Holler, sämtlich Buchhändler in Würzburg. Kommanditistin: Gertrud Liebing, Würzburg.

Druckerei: Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg  
Printed in Germany

© PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1973

## **Ergebnisse von Erdzeiten-Parallelregistrierungen mit drei ASKANIA-Gravimetern**

### **Results of Simultaneous Observations of Tidal Forces with Three ASKANIA-Gravimeters**

Gewidmet meinem verehrten Lehrer Prof. Dr. Dr. E. h. K. JUNG

B. STUKENBRÖKER, Kiel<sup>1)</sup>

Eingegangen am 9. Oktober 1972

*Zusammenfassung:* Von Februar bis Juli 1972 wurde mit drei ASKANIA-Gs11/15-Gravimetern eine Parallelregistrierung der Vertikalkomponente der Gezeitenkräfte durchgeführt. Über die halbe Registrierdauer wurde mit einem Verfahren der kontinuierlichen Kalibrierung registriert. Die Registrierungen wurden einer gleitenden Analyse nach dem Verfahren von VENEDIKOV unterworfen. Es wird gezeigt, daß mit einem geeigneten Auswahl- und Kalibrierverfahren die Zuverlässigkeit der Analyseergebnisse wesentlich gesteigert werden kann.

*Summary:* From February to July 1972 the vertical component of tidal forces was recorded by three ASKANIA Gs11/15 gravimeters simultaneously. During one part of the registration period a special method of continuous calibration was used. The records were successively analysed by the method of VENEDIKOV. It is shown that reliability of the results can fundamentally be raised by suitable methods of selection and calibration.

#### **1. Einleitung**

Die Erfahrungen der letzten drei Jahre haben gezeigt, daß Ergebnisse mit ASKANIA-Gezeitengravimetern neuerer Bauart (mit kapazitivem Indikator) im Vergleich zu den Ergebnissen, die mit den älteren Gravimetern (mit photoelektrischem Indikator) gewonnen wurden, wesentlich zuverlässiger geworden sind.

Um an die eigentlichen Probleme der Deformation des Erdkörpers mit gravimetrischen Messungen herangehen zu können, ist es zunächst notwendig, die Funktion der verwendeten Meßanlagen zu überprüfen. Eine Vergleichsregistrierung mit verschiedenen Gravimetern in derselben Station unter denselben Bedingungen für alle Geräte ist das am besten geeignete Mittel zur Erkennung instrumenteller Fehler; sie kann gleichzeitig Auskunft über den Stand der instrumentellen Entwicklung geben. Aus diesem Grund wurde in der Zeit vom 18. 2. bis zum 10. 7. 1972 mit den drei

---

<sup>1)</sup> Dipl.-Geophys. BERTHOLD STUKENBRÖKER, Institut für Geophysik, 23 Kiel, Neue Universität.

Gravimetern ASK 204, ASK 210 und ASK 219 eine Parallelregistrierung der Vertikal-komponente der Gezeitenkräfte durchgeführt. In die Untersuchung einbezogen wurde die Anwendung eines Verfahrens zur kontinuierlichen Kalibrierung der Meßanlagen [STUKENBRÖKER 1971].

Ziel der Messungen war es, aus dem Datenmaterial für die Haupt-Partialtiden möglichst gesicherte Gravimeterfaktoren  $\delta$  und Phasenverschiebungen  $\varphi$  zu ermitteln. Der Gravimeterfaktor gibt hierbei das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung die Phasendifferenz von gemessener und theoretischer Gezeitenwirkung für die einzelnen Tiden an. Etwaige signifikante Unterschiede zwischen den Ergebnissen der drei Meßsysteme sollen erklärt oder durch eine sorgfältige, nichtwillkürliche Bearbeitung des Datenmaterials vermieden werden.

## 2. Messungen

### 2.1. Stationsdaten

Der Meßraum befindet sich im Keller des Kieler Instituts. Die Gravimeter stehen auf einem gemeinsamen vom Gebäude isolierten Fundament.

Geographische Koordinaten:

$$\varphi = 54,33799^\circ$$

$$\lambda = -10,12022^\circ$$

Die Raumtemperatur wird mit Heizlüftern auf  $\pm 0,1$  C konstant gehalten. Die relative Luftfeuchtigkeit beträgt ca. 30–55 %.

### 2.2. Instrumente

Zur Verfügung stehen die drei ASKANIA-Gravimeter Gs11/No.204, Gs15/No.210 und Gs15/219. Alle sind mit kapazitivem Indikator und mit elektromagnetischer Eicheinrichtung [SCHULZE 1965] ausgerüstet.

Zur Unterdrückung höherfrequenter Anteile wird das Meßsignal mit einem einfachen RC-Glied ( $R=220$  k $\Omega$ ,  $C=100$   $\mu$ F,  $\tau \approx 22$  sec) gedämpft. Über einen Impedanzwandler erfolgt mit einem Kompensationsschreiber eine analoge Registrierung.

### 2.3. Kalibrierung

Große Bedeutung kommt der elektromagnetischen Eicheinrichtung zu. Mit ihr kann eine Kalibrierung des gesamten Meßsystems durch elektromagnetische Auslenkung des Massebalkens ohne jede Einstellsicherheit (wie bei der Spindelkalibrierung) durchgeführt werden.

#### 2.3.1. Diskrete Kalibrierung

Am 21. 4. und 22. 4. 1972 wurden alle drei Gezeiten-Meßsysteme nach diesem Verfahren mit je 207 Auslenkungen kalibriert. Als Mittelwert aus Auslenkungen mit positiver und negativer Stromrichtung unter Zugrundelegung der vom Hersteller angegebenen Stromfaktoren  $e$  ergaben sich die in Tabelle 1 angegebenen Kalibrierfaktoren.

### 2.3.2. Kontinuierliche Kalibrierung

Vom 28. 4. 1972 an wurden alle drei Meßsysteme kontinuierlich kalibriert. Hierzu wird den Partialtiden der Gezeiten eine künstlich erzeugte „Tide“ überlagert. Über ein Sinus-Potentiometer, das durch einen Synchronmotor über ein Getriebe angetrieben wird, wird der elektromagnetischen Einrichtung des Gravimeters eine genau bestimmte sinusförmige Spannung angelegt. Die Frequenz dieser künstlichen „Tide“ wurde zu  $\nu_K = 4$  cpd ( $T_K = 6$  Std.) gewählt. Mit diesem Verfahren werden die bei Impulskalibrierungen auftretenden Informationsverluste während der Einlaufzeit der gedämpften Signalspannung nach dem Impuls vermieden [STUKENBRÖKER 1971].

### 2.4. Registrierzeitraum

Die gesamte Registrierdauer wird in drei Zeiträume unterteilt

- 1) 18. 2. 1972 14<sup>00</sup> UT – 25. 4. 1972 10<sup>00</sup> UT  
mit diskreter Kalibrierung  
1557 stündliche Daten
- 2) 5. 5. 1972 8<sup>00</sup> UT – 12. 6. 1972 17<sup>00</sup> UT  
mit kontinuierlicher Kalibrierung  
922 stündliche Daten
- 3) 16. 6. 1972 9<sup>00</sup> UT – 10. 7. 1972 6<sup>00</sup> UT  
mit kontinuierlicher Kalibrierung  
574 stündliche Daten

Am 12. 6. und 13. 6. 1972 traten im Bereich der Kieler Universität längere Stromunterbrechungen auf.

## 3. Bearbeitung des Datenmaterials

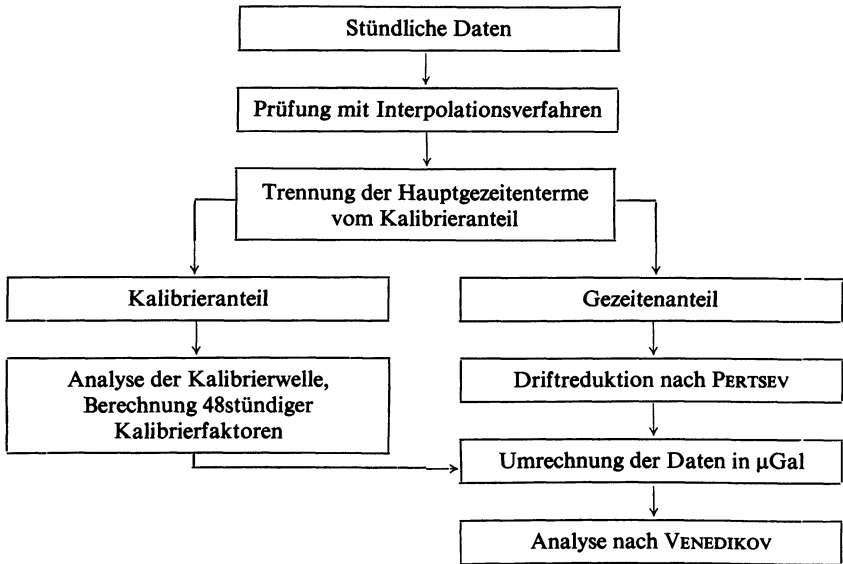
### 3.1. Registrierperiode I

Die stündlichen Beobachtungswerte werden mit einem Interpolationsverfahren auf mögliche grobe Fehler hin untersucht und durch erneute Ablesung korrigiert. Anschließend werden sie mit  $\bar{E}_K$  auf  $\mu\text{Gal}$  umgerechnet. Mit dem von LECOLAZET entwickelten Verfahren wird jeweils für 24 Werte der „mittlere quadratische Fehler“  $\sigma$  berechnet [LECOLAZET 1959], um Anhaltspunkte für Störungen zu erhalten. Mit Hilfe dieser Angaben wird eine erneute Überprüfung des Datenmaterials vorgenommen. Mit der von PERTSEV entwickelten Kombination [ $X'_0$ ] werden die Werte von der Drift befreit [MELCHIOR 1966]. Abschließend wird die Analyse nach dem Verfahren von VENEDIKOV durchgeführt [VENEDIKOV 1966], wobei jeweils 48 Beobachtungswerte zu einem Intervall zusammengefaßt werden.

Phasenkorrektur: Wegen der Eigenschaften der verwendeten RC-Glieder werden die Werte der Phasenverschiebungen  $\varphi$  für ganztägige Tiden um  $+0,1^\circ$  und für halbtägige Tiden um  $+0,2^\circ$  korrigiert (Korrekturwerte experimentell bestimmt).

### 3.2. Registrierperioden 2 und 3

Die Bearbeitung unterscheidet sich von 3.1 dadurch, daß die aufgeprägte Kalibrierwelle eliminiert wird; außerdem wird in Anpassung an das VENEDIKOV-Analysenverfahren für 48stündliche Werte ein Kalibrierfaktor berechnet:



## 4. Ergebnisse

### 4.0. Bemerkung zu den Ergebnissen mit Gerät ASK 219

Aus den im folgenden aufgeführten Ergebnissen geht hervor, daß die Drift des Gerätes ASK 219 während der gesamten Untersuchungszeit überdurchschnittlich groß ist — sie liegt größenordnungsmäßig im Bereich der Gezeitenwirkung. Hierauf ist die Unsicherheit der einzelnen Analysenergebnisse mit dem Beobachtungsmaterial dieses Gerätes, die sich in der Fehlerangabe ausdrückt, zurückzuführen.

Wie erst nach Abschluß der Arbeiten bekannt wurde, ist das anomale Verhalten des Gravimeters ASK 219 auf einen Fehler in der Temperaturkompensation des Gerätes zurückzuführen, der inzwischen lokalisiert wurde und z. Z. im Herstellerwerk behoben wird. Die Eigenschaften des Gerätes ASK 219 können aus diesem Grund nicht repräsentativ sein für Erdzeitengravimeter gleichen Typs.

Obwohl die vorliegende Untersuchung mit Meßgeräten gleicher Bauart durch das anomale Verhalten eines Instruments in ihrer eigentlichen Zielsetzung beeinträchtigt wird, treten doch zwei Ergebnisse deutlich hervor:

1. Für die Zuverlässigkeit der Analysenergebnisse mit Erdzeitengravimetern ist eine geringe Instrumentendrift von entscheidender Bedeutung. Da die Drift der Gravimeter stark temperaturabhängig ist, führt dies zur Forderung nach großer Temperaturkonstanz im Meßraum.

2. Mit dem während der Registrierperioden 2 und 3 angewendeten Kalibrier- und Auswahlverfahren können auch unter ungünstigen Bedingungen zuverlässige Ergebnisse erzielt werden.

#### 4.1. Registrierperiode 1

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der elektromagnetischen Kalibrierung aufgeführt. Tabellen 2 und 3 geben die Ergebnisse der Analysen an.

Es zeigen sich deutliche Unterschiede in den Ergebnissen für die Tiden  $K_1$  und  $S_2$ . Die Fehlerangaben deuten eine große Schwankungsbreite beim Gerät ASK 219 an. Um hierüber einen Überblick zu erhalten, wird für die Tiden  $O_1$  und  $M_2$  eine gleitende Analyse mit einem Verschiebungsintervall von 48 Std und  $N=15$  durchgeführt. Abb. 1 und 2 zeigen die Ergebnisse für  $O_1$ , Abb. 3 und 4 die Ergebnisse für  $M_2$ .

Tabelle 1: Kalibrierfaktoren  $\bar{E}_K$  für Registrierperiode 1  
Calibration factors  $\bar{E}_K$  for registration period 1

Gravimeter	$\bar{E}_K$ [μGal/mm]
ASK 204	1,994
ASK 210	2,347
ASK 219	2,109

Tabelle 2: Fehler- und Driftverhalten während der Registrierperiode 1  
 $\bar{\sigma}$  = „mittlerer quadratischer Fehler“ (LECOLAZET)  
Error and drift behaviour of registration period 1  
 $\bar{\sigma}$  = “mean quadratic error” (LECOLAZET)

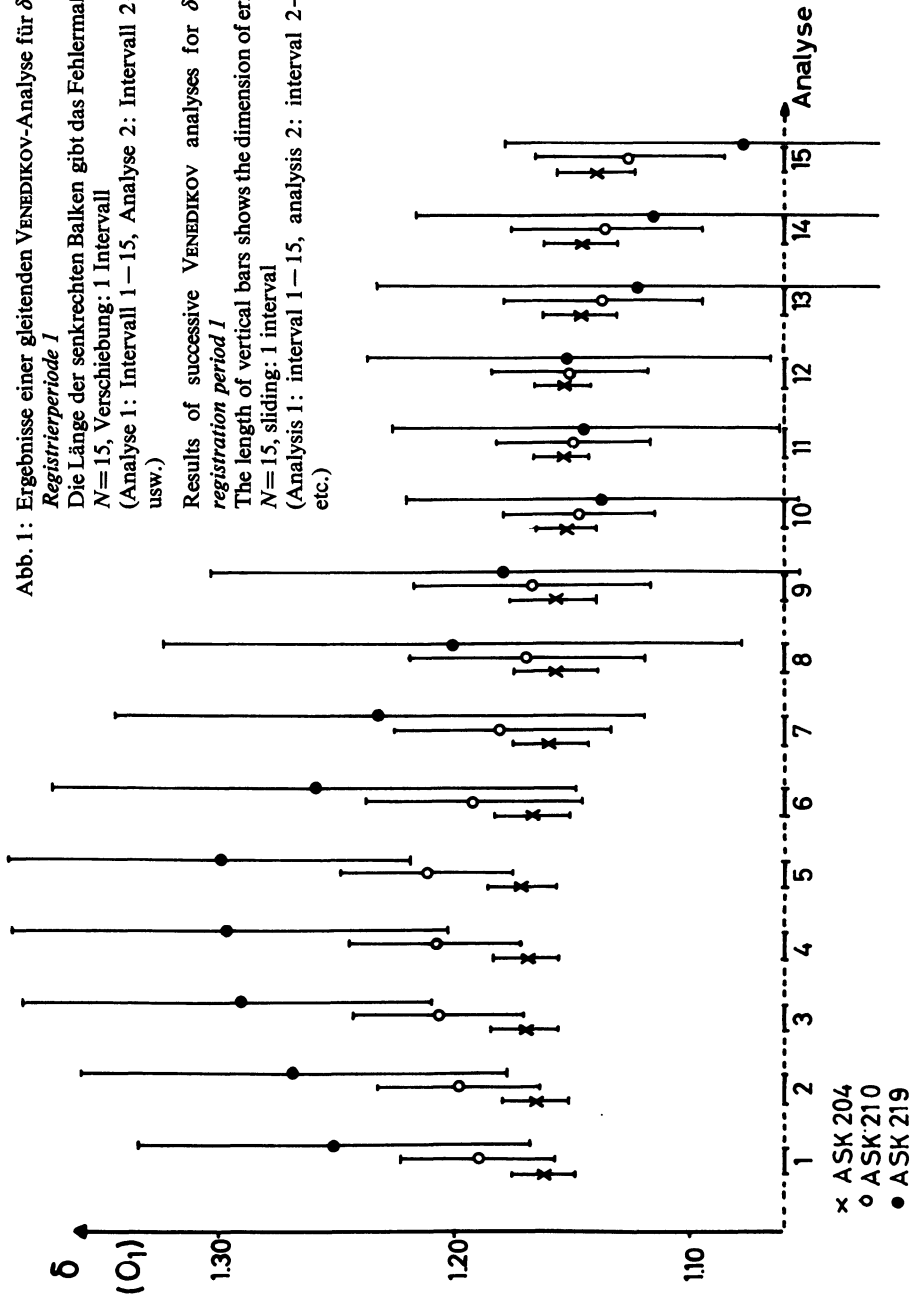
Gravimeter	$\bar{\sigma}$ [μGal]	$\overline{\text{Drift}}$ [μGal/Tag]
ASK 204	0,4357	+ 20,17
ASK 210	0,6532	- 10,36
ASK 219	0,5981	+ 123,23 !

Tabelle 3: Ergebnisse der VENEDIKOV-Analyse — Registrierperiode 1  
 $N$  = Anzahl der Intervalle  
Results of VENEDIKOV analysis — registration period 1  
 $N$  = number of intervals

Gravimeter	$N$	$O_1$		$K_1$		$M_2$		$S_2$	
		$\delta$	$\varphi$	$\delta$	$\varphi$	$\delta$	$\varphi$	$\delta$	$\varphi$
ASK 204	30	1,1526	- 0,15°	1,1596	+ 0,69°	1,1769	+ 0,97°	1,1969	+ 0,02°
		± 0,0107	± 0,53°	± 0,0098	± 0,48°	± 0,0043	± 0,21°	± 0,0068	± 0,33°
ASK 210	30	1,1578	- 0,18°	1,2164	+ 1,10°	1,1811	+ 0,59°	1,2432	+ 0,18°
		± 0,0273	± 1,35°	± 0,0251	± 1,18°	± 0,0126	± 0,61°	± 0,0201	± 0,93°
ASK 219	30	1,1641	+ 1,28°	1,3139	- 0,28°	1,1400	+ 0,48°	1,2671	- 0,89°
		± 0,0697	± 3,43°	± 0,0639	± 2,79°	± 0,0225	± 1,13°	± 0,0360	± 1,63°

Abb. 1: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\delta(O_1)$   
*Registrierperiode I*  
 Die Länge der senkrechten Balken gibt das Fehlermaß an.  
 $N=15$ , Verschiebung: 1 Intervall  
 (Analyse 1: Intervall 1–15, Analyse 2: Intervall 2–16  
 usw.)

Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\delta(O_1)$   
*registration period I*  
 The length of vertical bars shows the dimension of errors.  
 $N=15$ , sliding: 1 interval  
 (Analysis 1: interval 1–15, analysis 2: interval 2–16,  
 etc.)



× ASK 204  
 o ASK 210  
 • ASK 219



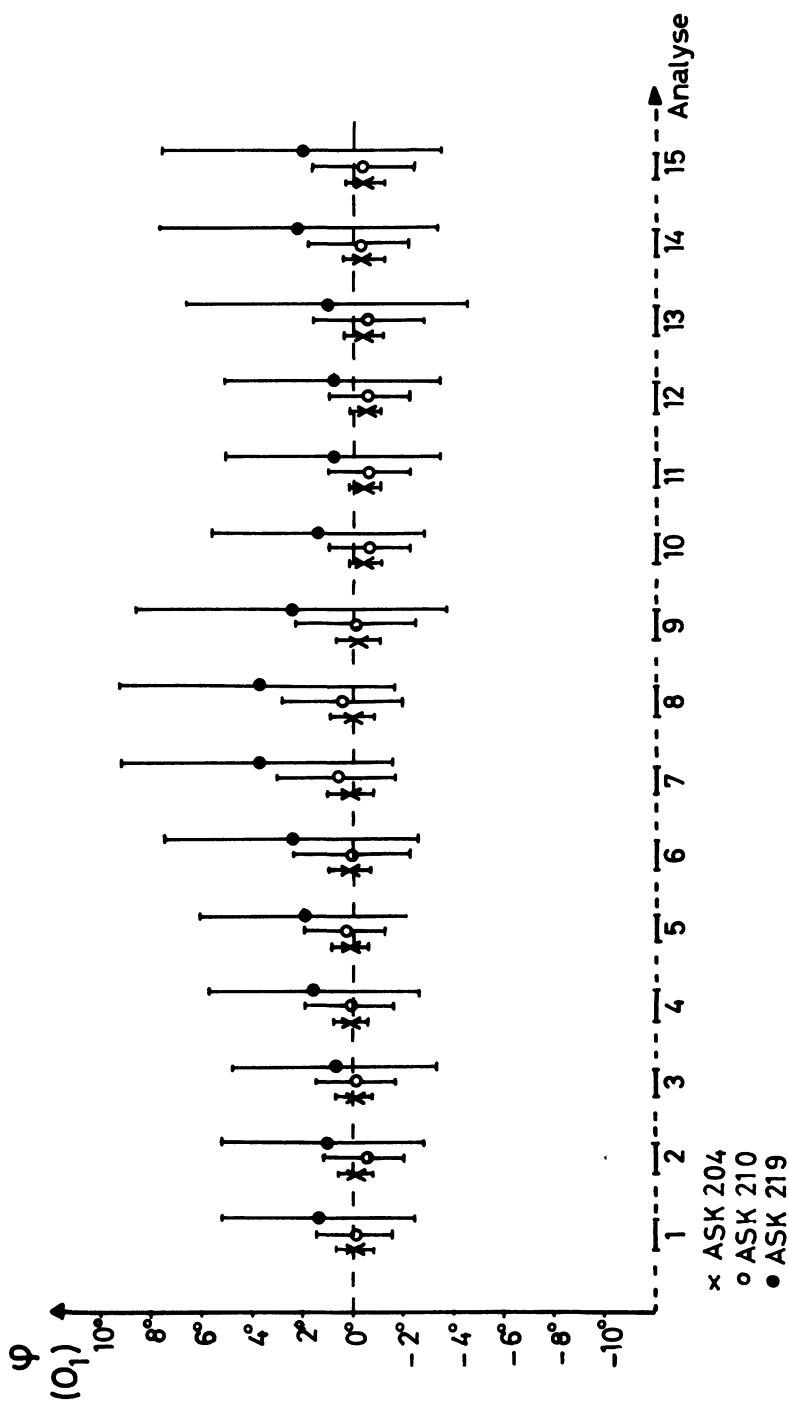
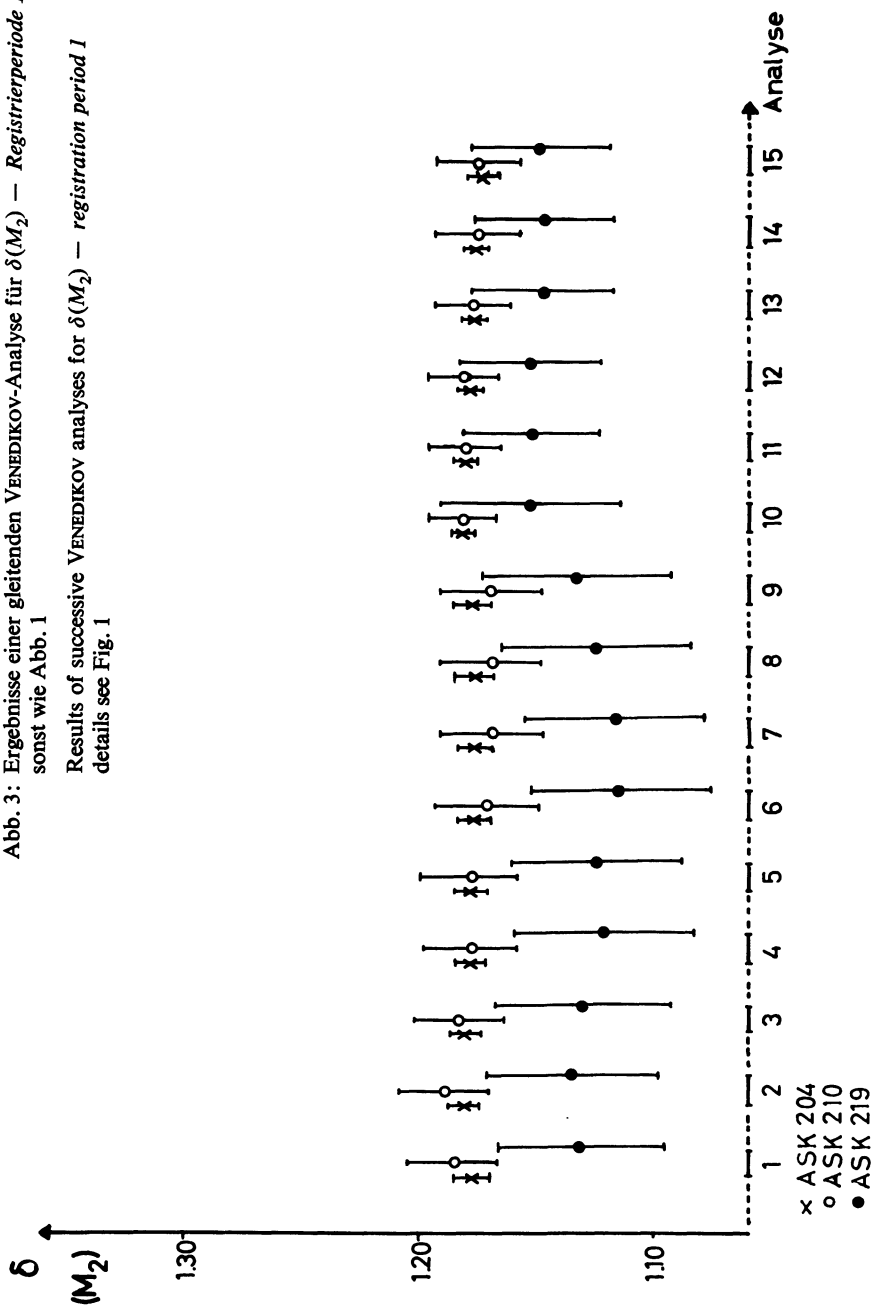


Abb. 2: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\varphi(O_1)$  — Registrierperiode I, sonst wie Abb. 1  
 Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\varphi(O_1)$  — registration period I, details see Fig. 1

Abb. 3: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\delta(M_2)$  — Registrierperiode 1  
sonst wie Abb. 1

Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\delta(M_2)$  — registration period 1  
details see Fig. 1



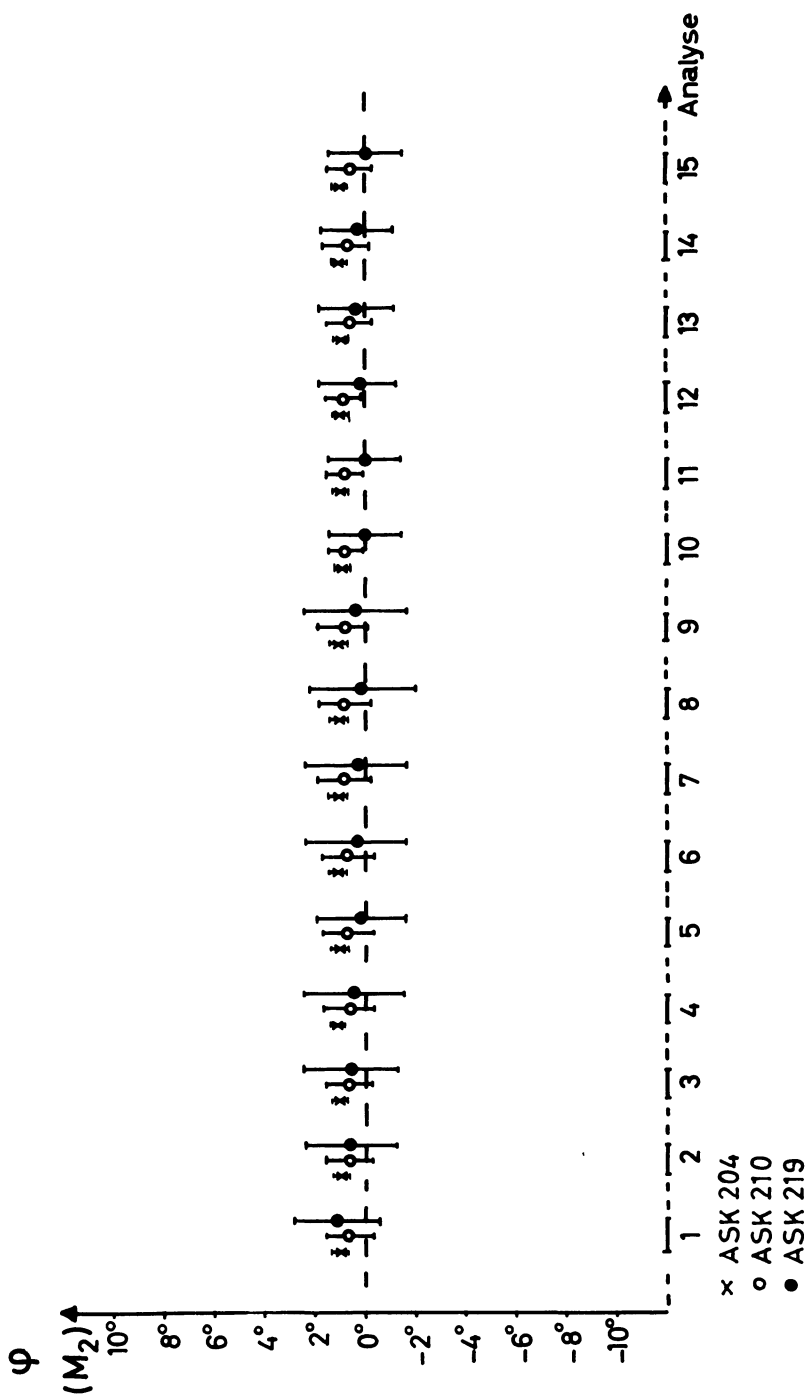


Abb. 4: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\varphi(M_2)$  — Registrierperiode 1, sonst wie Abb. 1  
 Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\varphi(M_2)$  — registration period 1, details see Fig. 1

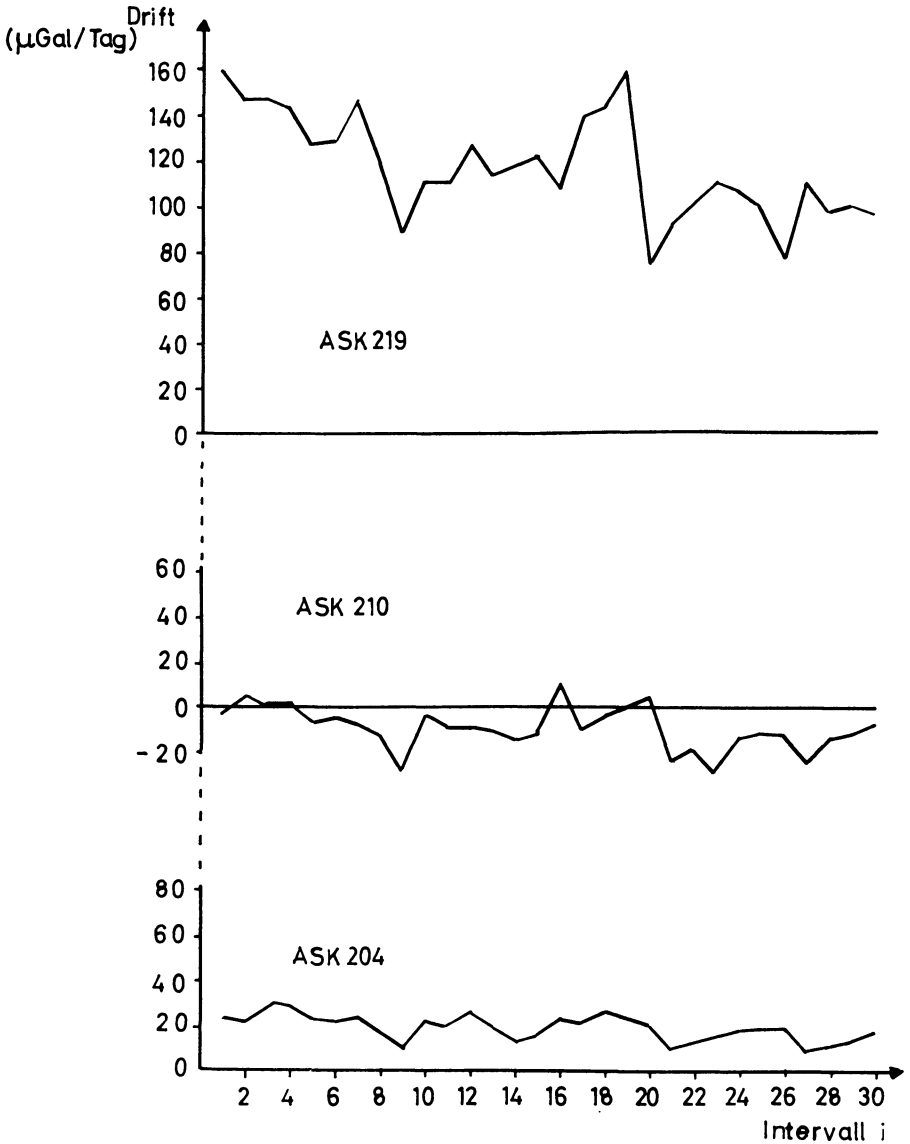


Abb. 5: Drift — *Registrierperiode 1*  
 Während Intervall 8 und 19 traten Störungen der Temperatur im Meßraum auf.  
 Drift — *registration period 1*  
 During interval 8 and 19 there were temperature disturbances in the station.

Tabelle 4a: Kalibrierfaktoren der *Registrierperiode 2*  
 Calibration factors of *registration period 2*

<i>i</i>	ASK 204		ASK 210		ASK 219	
	$E_{Ki}$	$m_{Ki}$	$E_{Ki}$	$m_{Ki}$	$E_{Ki}$	$m_{Ki}$
1	2,013	+0,16	2,336	-0,46	2,129	-0,29
2	2,012	+0,11	2,358	+0,46	2,126	-0,44
3	2,010	+0,03	2,356	+0,39	2,126	-0,44
4	2,002	-0,39	2,342	-0,24	2,137	+0,09
5	2,009	-0,04	2,349	+0,08	2,103	-1,51
6	1,995	-0,77	2,350	+0,11	2,162	+1,26
7	2,008	-0,08	2,341	-0,24	2,164	+1,34
8	2,012	+0,09	2,353	+0,25	2,126	-0,44
9	2,009	-0,03	2,340	-0,30	2,131	-0,17
10	2,012	+0,10	2,363	+0,67	2,127	-0,39
11	2,012	+0,09	2,349	+0,10	2,137	+0,09
12	2,010	+0,02	2,353	+0,26	2,129	-0,27
13	2,012	+0,11	2,371	+1,00	2,130	-0,25
14	2,010	+0,01	2,352	+0,21	2,130	-0,22
15	2,015	+0,24	2,330	-0,75	2,136	-0,03
16	2,014	+0,22	2,348	+0,04	2,159	+1,11
17	2,012	+0,11	2,316	-1,36	2,152	+0,80
18	2,010	+0,03	2,346	-0,06	2,128	-0,34
	2,010		2,347		2,135	$E_K$

Tabelle 4b: Kalibrierfaktoren der *Registrierperiode 3*  
 Calibration factors of *registration period 3*

<i>i</i>	ASK 204		ASK 210		ASK 219	
	$E_{Ki}$	$m_{Ki}$	$E_{Ki}$	$m_{Ki}$	$E_{Ki}$	$m_{Ki}$
19	2,023	-0,34	2,337	-0,29	2,129	-0,44
20	2,018	+0,13	2,356	+0,51	2,110	-1,37
21	2,009	-0,36	2,335	-0,37	2,126	-0,62
22	2,015	-0,05	2,330	-0,57	2,138	-0,03
23	2,012	-0,20	2,340	-0,13	2,145	+0,31
24	2,010	-0,28	2,323	-0,87	2,144	+0,25
25	2,016	+0,03	2,344	+0,002	2,127	-0,54
26	2,016	+0,01	2,342	-0,06	2,122	-0,81
27	2,008	-0,38	2,342	-0,05	2,101	-1,79
28	2,021	+0,27	2,368	+1,04	2,236	+4,34
29	2,030	+0,69	2,327	-0,67	2,153	+0,66
	2,016		2,343		2,139	$E_K$

*i* = Nummer des 48-Stunden-Intervalls

$E_{Ki}$  = Kalibrierfaktor [ $\mu$ Gal/mm]

$E_K$  = Mittelwert der Kalibrierfaktoren [ $\mu$ Gal/mm]

$m_{Ki}$  = Abweichung vom Mittelwert  $E_K$  in %

Das anomale Driftverhalten ist für die wenig zuverlässigen Ergebnisse des Gerätes ASK 219 verantwortlich zu machen: Im Durchschnitt ist die Drift von gleicher Größenordnung wie die Gezeitenwirkung (s. hierzu Abb. 5).

#### 4.2. Registrierperioden 2 und 3

Für jeweils 48 aufeinanderfolgende Beobachtungswerte wird die Amplitude der Kalibrierwelle und damit der Kalibrierfaktor  $E_{Ki}$  berechnet. Der Fehler für diese  $E_{Ki}$ , der nur vom Verfahren herrührt, wird zu  $\varepsilon \leq 0,01\%$  bestimmt. Bedingt durch Ablesefehler und Noise im 6-Stunden-Bereich liegt der Fehler  $\varepsilon_{Ki}$  je nach Amplitude der Kalibrierwelle zwischen 0,1 und 0,2%. Tabelle 4a und b zeigen die Kalibrierergebnisse der kontinuierlichen Kalibrierung.

Tabelle 5a: Fehler- und Driftverhalten während der *Registrierperiode 2*

Error and drift behaviour of *registration period 2*

Gravimeter	$\bar{\sigma}$ [ $\mu\text{Gal}$ ]	$\overline{\text{Drift}}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{Tag}$ ]
ASK 204	0,3136	+ 14,29
ASK 210	0,7937	- 7,20
ASK 219	0,4733	+ 99,98 !

Tabelle 5b: Fehler- und Driftverhalten während der *Registrierperiode 3*

Error and drift behaviour of *registration period 3*

Gravimeter	$\bar{\sigma}$ [ $\mu\text{Gal}$ ]	$\overline{\text{Drift}}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{Tag}$ ]
ASK 204	0,3707	+ 19,54
ASK 210	1,0731	+ 8,10
ASK 219	0,4205	+ 123,23 !

Tabelle 6: Ergebnisse der VENEDIKOV-Analyse — *Registrierperioden 2 und 3*

$N$  = Anzahl der Intervalle

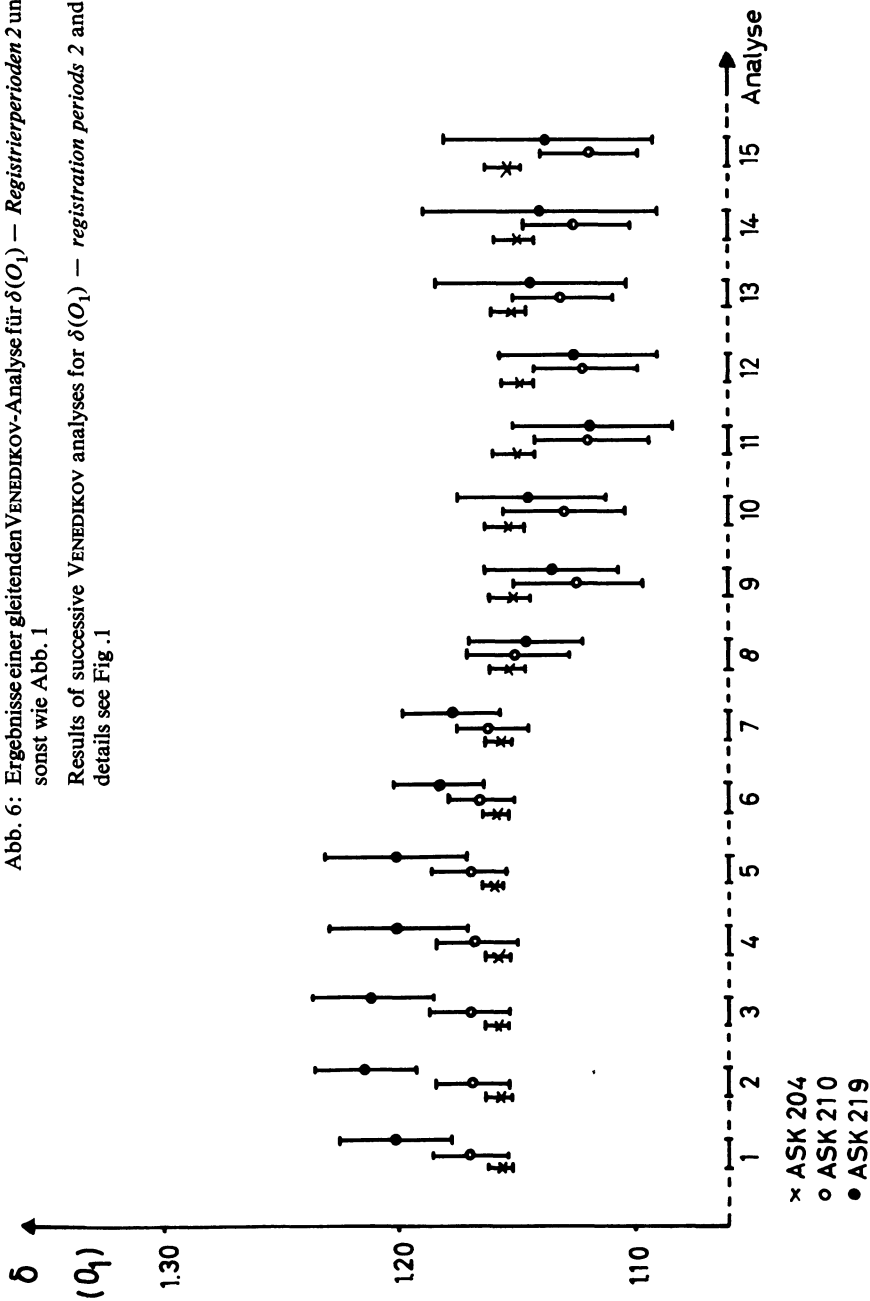
Results of VENEDIKOV analysis — *registration periods 2 and 3*

$N$  = number of intervals

Gravimeter	$N$	$O_1$		$K_1$		$M_2$		$S_2$	
		$\delta$	$\varphi$	$\delta$	$\varphi$	$\delta$	$\varphi$	$\delta$	$\varphi$
ASK 204	29	1,1592 $\pm 0,0065$	+ 0,37° $\pm 0,32^\circ$	1,1576 $\pm 0,0038$	- 0,44° $\pm 0,19^\circ$	1,1905 $\pm 0,0035$	+ 1,21° $\pm 0,17^\circ$	1,2139 $\pm 0,0097$	- 0,21° $\pm 0,46^\circ$
ASK 210	29	1,1630 $\pm 0,0165$	+ 0,98° $\pm 0,82^\circ$	1,1668 $\pm 0,0098$	- 0,73° $\pm 0,48^\circ$	1,1964 $\pm 0,0110$	+ 1,52° $\pm 0,53^\circ$	1,2200 $\pm 0,0305$	- 0,95° $\pm 1,43^\circ$
ASK 219	29	1,2007 $\pm 0,0212$	+ 0,12° $\pm 1,01^\circ$	1,1774 $\pm 0,0126$	- 1,58° $\pm 0,61^\circ$	1,2217 $\pm 0,0140$	+ 0,93° $\pm 0,66^\circ$	1,2448 $\pm 0,0383$	- 3,32° $\pm 1,76^\circ$

Abb. 6: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\delta(O_1)$  — Registrierperioden 2 und 3  
sonst wie Abb. 1

Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\delta(O_1)$  — registration periods 2 and 3  
details see Fig. 1



x ASK 204  
o ASK 210  
• ASK 219

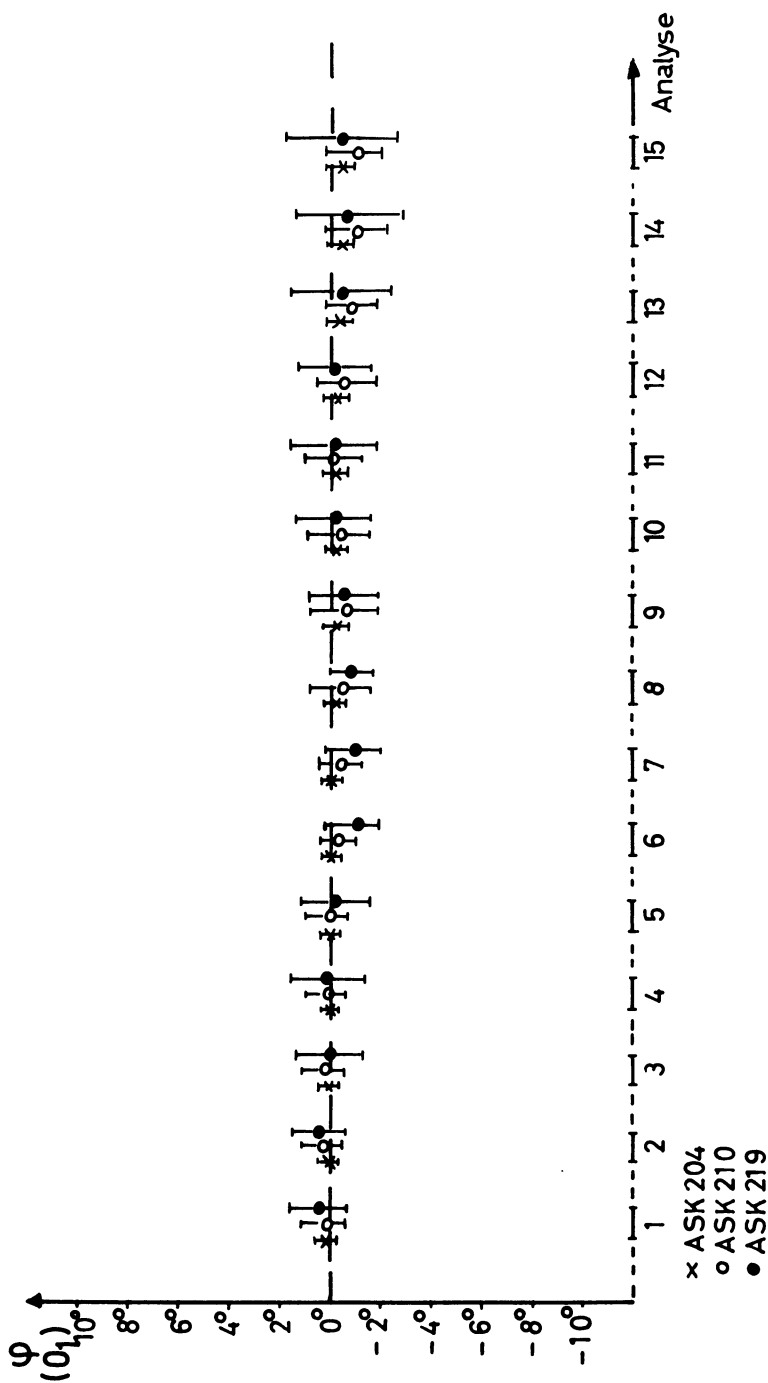
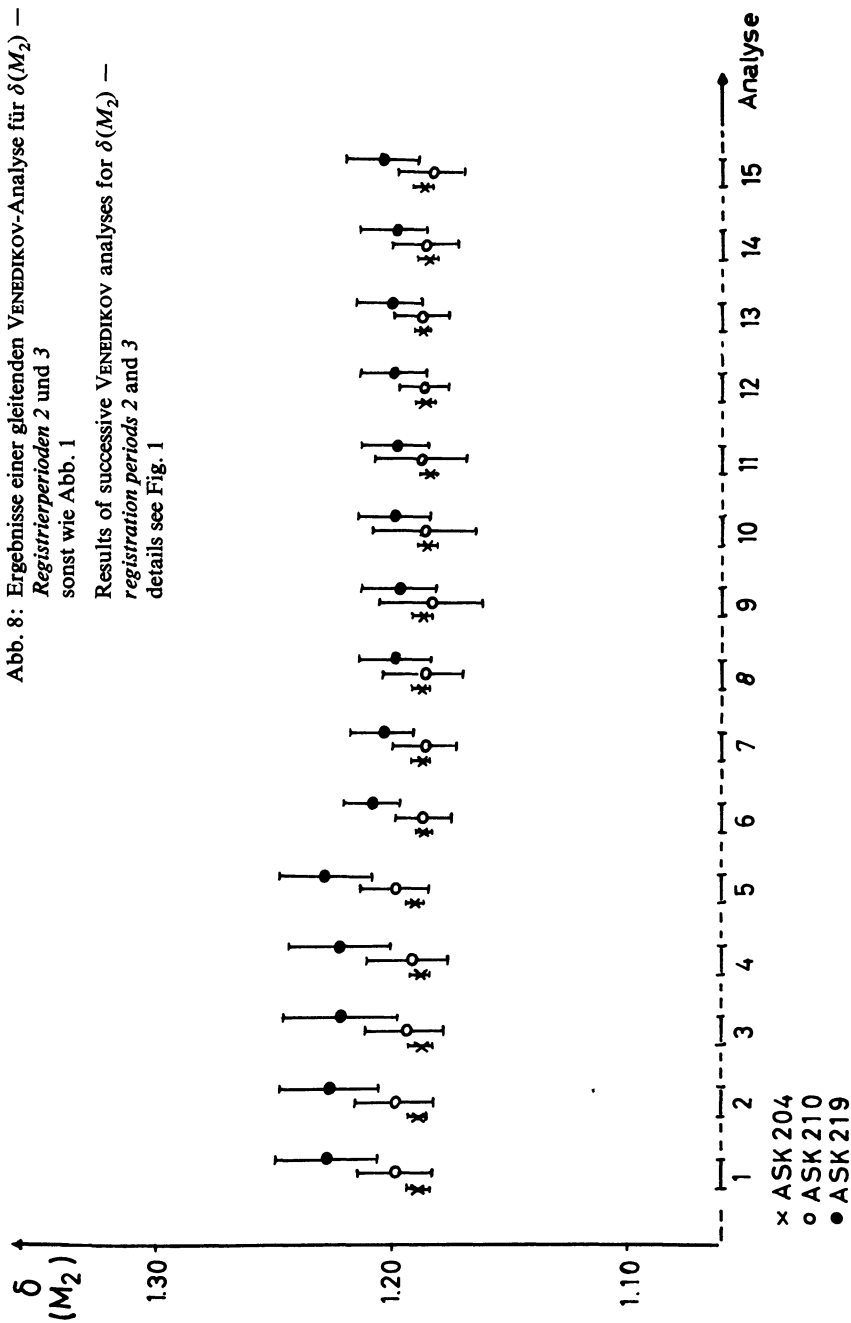


Abb. 7: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\varphi(O_1)$  — Registrierperioden 2 und 3, sonst wie Abb. 1  
 Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\varphi(O_1)$  — registration periods 2 and 3, details see Fig. 1



Abb. 8: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\delta(M_2)$  —  
 Registrierperioden 2 und 3  
 sonst wie Abb. 1

Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\delta(M_2)$  —  
 registration periods 2 and 3  
 details see Fig. 1



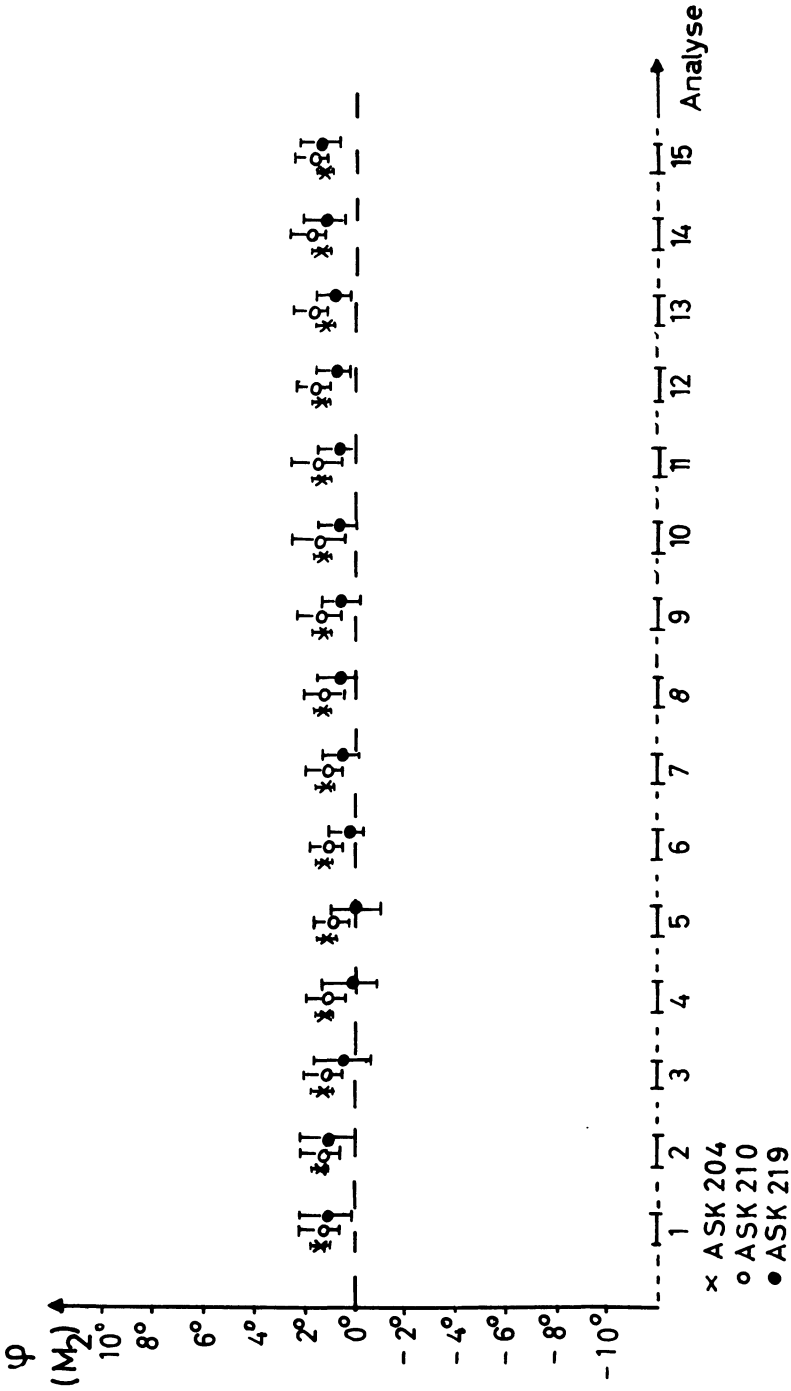


Abb. 9: Ergebnisse einer gleitenden VENEDIKOV-Analyse für  $\varphi(M_2)$  — Registrierperioden 2 und 3, sonst wie Abb. 1  
 Results of successive VENEDIKOV analyses for  $\varphi(M_2)$  — registration periods 2 and 3, details see Fig. 1

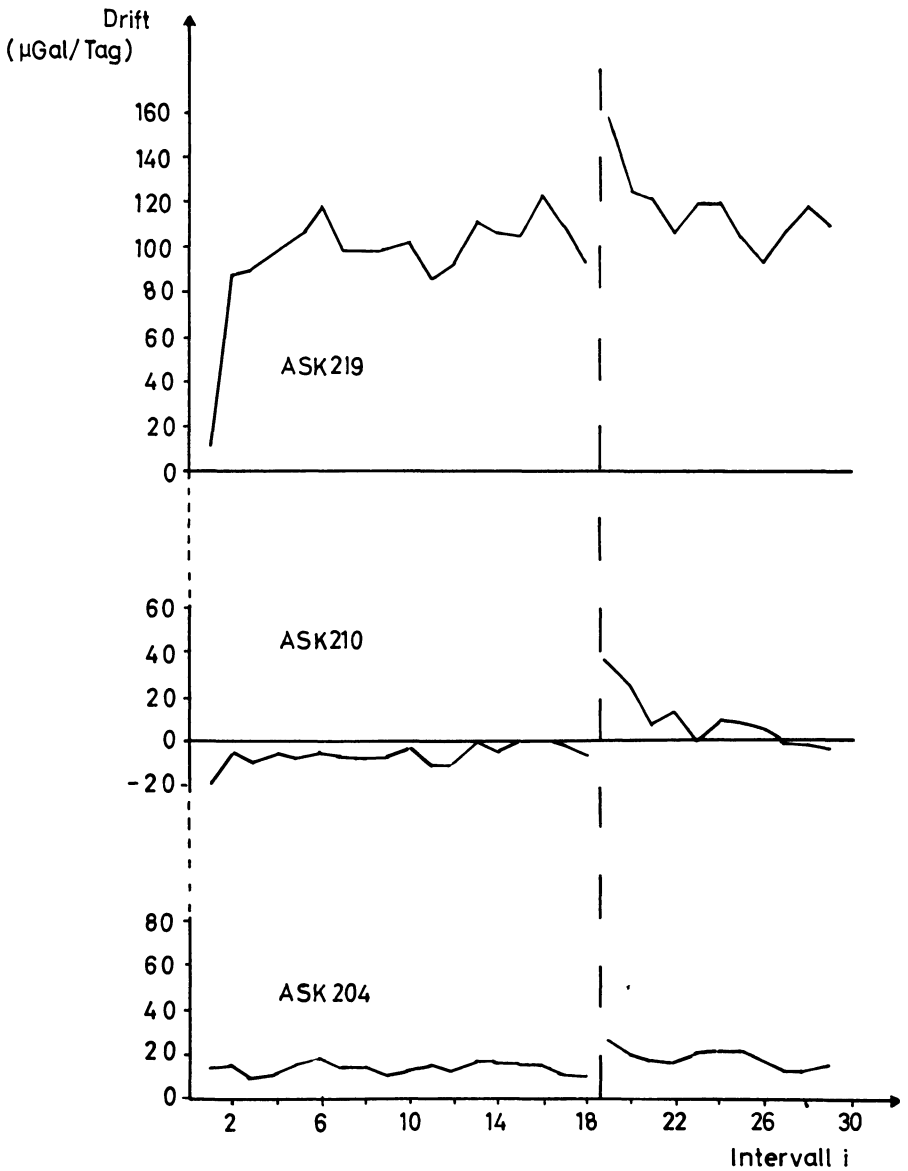


Abb. 10: Drift — *Registrierperioden 2 und 3*

Drift — *registration periods 2 and 3*

Tabelle 7: Ergebnisse der VENEDIKOV-Analyse — *Registrierperioden 2 und 3 mit ausgewählten Intervallen*  
*N = Anzahl der Intervalle*

Results of VENEDIKOV analysis — *registration periods 2 and 3 with a special selection of intervals*  
*N = number of intervals*

Gravi- meter	N	O <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>		M <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>	
		δ	φ	δ	φ	δ	φ	δ	φ
ASK 204	29	1,1592 ± 0,0065	+ 0,37° ± 0,32°	1,1576 ± 0,0038	- 0,44° ± 0,19°	1,1905 ± 0,0035	+ 1,21° ± 0,17°	1,2139 ± 0,0097	- 0,21° ± 0,46°
ASK 210	26	1,1566 ± 0,0110	+ 0,46° ± 0,54°	1,1545 ± 0,0065	- 0,39° ± 0,32°	1,1951 ± 0,0110	+ 1,60° ± 0,53°	1,2116 ± 0,0303	- 0,60° ± 1,43°
ASK 219	22	1,1659 ± 0,0194	- 0,24° ± 0,95°	1,1635 ± 0,0112	- 0,83° ± 0,55°	1,1965 ± 0,0123	+ 1,27° ± 0,59°	1,2354 ± 0,0308	- 0,43° ± 1,43°

Die Analysenergebnisse sind in Tabelle 6 angeführt. In Abb. 6–9 sind die Ergebnisse der kontinuierlichen Analysen wie unter 4.1 dargestellt. Das Driftverhalten zeigt Abb. 10.

Innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen zeigt sich diesmal gute Übereinstimmung bei den Geräten ASK 204 und ASK 210. Aus Tabelle 4a und b geht hervor, daß für das Gerät ASK 219 erhebliche Abweichungen der Kalibrierfaktoren vom Mittelwert  $\bar{E}_K$  auftreten.

In einer zweiten Analyse werden für ASK 210 und ASK 219 die Intervalle mit großen Abweichungen der  $E_{iK}$  vom  $\bar{E}_K$  ausgeschieden. Dies sind für ASK 210:  $i=13, 17$  und  $28$  und für ASK 219:  $i=5, 6, 7, 16, 20, 27$  und  $28$ . Eine Zusammenstellung dieser Ergebnisse zeigt Tabelle 7. Man erkennt, daß jetzt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Ergebnissen der drei verschiedenen Meßsysteme bestehen.

## 5. Zusammenfassung

Die 4monatige Vergleichsregistrierung neuester Gezeitengravimeter hat gezeigt, daß die instrumentelle Entwicklung grundsätzlich soweit fortgeschritten ist, daß sich bei geeigneter Bearbeitung des Datenmaterials und bei Lösung des Kalibrierproblems gute Übereinstimmung der Ergebnisse verschiedener Geräte erreichen läßt.

Aus den Werten der Tabelle 7 ergeben sich die folgenden gewichteten Mittelwerte für die Gezeitenstation Kiel (die Gewichte wurden umgekehrt proportional dem Quadrat des Fehlers der VENEDIKOV-Analyse gewählt):

Tide	$\delta$	$\varphi$
$O_1$	1,1591	+0,34°
$K_1$	1,1573	-0,46°
$M_2$	1,1913	+1,25°
$S_2$	1,2154	-0,26°

Ein Einfluß der Nutation des flüssigen Erdkerns auf die Tide  $K_1$  ist nicht erkennbar ( $\delta(O_1) - \delta(K_1) \approx 0$ ). Die Tide  $M_2$  wird, wie fast alle Stationen West-Europas zeigen, durch den indirekten Effekt der Meeresgezeiten beeinflusst.

Das Verfahren der Verwendung einer „Pilotwelle“ ist zur Erkennung von Störungen der Meßsysteme gut geeignet. So steht ein physikalisch sinnvolles Kriterium zur Verfügung, mit dem eine auswählende Beurteilung der Beobachtungswerte durchgeführt werden kann. Registrierzeiträume von 40 bis 60 Tagen sind unter günstigen Stationsbedingungen ausreichend für die Ermittlung gesicherter Repräsentativwerte der wichtigsten Partialtiden.

## Danksagung

Der Autor dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung, mit der die vorliegenden Untersuchungen durchgeführt werden konnten.

**Literatur**

- LECOLAZET, R.: Sur l'estimation des erreurs internes affectant les résultats d'une analyse harmonique mensuelle. Bull. Inf. Mar. Terr. 17, 269—278, 1959
- MELCHIOR, P.: The Earth Tides. London, 1966
- SCHULZE, R.: Eine neue Eicheinrichtung im Gezeitengravimeter. Askania Warte 66, 17—20, 1965
- STUKENBRÖKER, B.: Steigerung der relativen Meßwertgenauigkeit einer Erdzeitenmeßanlage mit einem ASKANIA-Gs11-Gravimeter unter Verwendung einer Vorrichtung zur kontinuierlichen Kalibrierung. Bull. Inf. Mar. Terr. 61, 3051—3065, 1971
- VENEDIKOV, A. P.: Une méthode pour l'analyse des marées terrestres à partir d'enregistrements de longueur arbitraire. Com. Obs. Roy. Belg. 250, Sér. Géophys. 71, 463—485, 1966

## **Modellseismische Experimente zur Interpretation makroseismischer Daten aus dem Bereich der Ostalpen**

### **Model Seismic Experiments for the Interpretation of Macroseismic Data Observed in the Eastern Alps**

Gewidmet Prof. Dr. Dr. h.c. KARL JUNG, † 28. April 1972

J. DRIMMEL<sup>1)</sup>, G. GANGL<sup>2)</sup>, R. GUTDEUTSCH<sup>2)</sup>, M. KOENIG<sup>3)</sup> und E. TRAPP<sup>1)</sup>

Eingegangen am 6. November 1972

*Zusammenfassung:* Die Erdbeben der Ostalpen besitzen vorwiegend N bis NW ausgedehnte Schüttergebiete. Als repräsentative Beispiele werden Isoleistenkarten und Karten der relativen Bebenintensität von den vier stärksten ostalpinen Beben dieses Jahrhunderts vorgelegt. Aus diesen geht hervor, daß die Nördlichen Kalkalpen für südlich liegende Bebenzentren eine Zone besonders kleiner Intensität darstellen. Nördlich davon nehmen die Intensitäten wieder zu. Aus Bohrungen ist bekannt, daß eine Zone relativ unverfestigter Sedimente, Flysch und Molasse, von den härteren Gesteinen der Nördlichen Kalkalpen zum Teil keilförmig überlagert wird. Im Liegenden der unverfestigten Zone folgt das Böhmisches Kristallin. Damit ergibt sich das Modell einer austreichenden Zone verringerter Wellengeschwindigkeit. Diese Struktur wird mit Hilfe der 2dimensionalen Modellseismik untersucht. Ob die Zone verringerter Wellengeschwindigkeit als Wellenleiter wirksam werden kann, hängt entscheidend vom Ort der Anregung ab. Kanalwellen werden dann mit großen Amplituden erzeugt, wenn die seismische Quelle sich im Kanal oder im Liegenden des Kanals befindet. In der Zone des austreichenden Kanals steigt die Bebenintensität um 1—2 Grad MS an. Das Modell gibt daher größenordnungsmäßig die makroseismischen Beobachtungen in den Nördlichen Kalkalpen und in der Molasse wieder.

*Summary:* In the Eastern Alps earthquakes are predominantly felt N to NW of the epicentre. Maps are presented showing isoseismals and relative intensity for the 4 strongest earthquakes of this century in the Eastern Alps. The Northern Calcareous Alps evidently represent a zone of particularly low intensity for southerly earthquake centres. To the north intensities increase again. Geological profiles derived from drilling suggest a model in which a zone of relatively unconsolidated sediments, Flysch and Molasse is partially covered by the wedge-shaped layer of harder rocks of the Northern Calcareous Alps. Below the unconsolidated zone follows the Bohemian Crystalline. This yields a model of an outcropping low-velocity

1) Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, A-1190 Wien, Hohe Warte 38.

2) Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien, A-1190 Wien, Hohe Warte 38.

3) Institut für Geophysik der Universität Hamburg, D-2000 Hamburg 13, Binderstr. 22.

layer. This structure is investigated with the aid of two-dimensional model seismology. Whether the low velocity channel could become effective as a wave-guide depends decisively on the location of focus. Channel waves of great amplitudes are produced if the seismic source is located in the channel or in the underground of the channel. In the zone of the outcropping channel the earthquake intensity increases by 1–2 degrees MS. The model therefore reproduces the macroseismic observations in the Northern Calcareous Alps and Molasse zone fairly well.

### Einleitung

Die Tatsache, daß Erdbeben in den Ostalpen besonders in N- bis NW-Richtung ausgedehnte Fühlbarkeitsgebiete besitzen, ist seit langem bekannt. SUESS [1873] stellt als erster Untersuchungen dieser Ausbreitungsanomalie an. KAUTSKY [1924] verwendet mehr als 1000 Lokalbeben und zusätzlich Informationen aus den damals noch recht weitmaschig vorliegenden Schwerenetzen. Er glaubt, einen Zusammenhang zwischen den Schwereanomalien und der bevorzugten Ausbreitungsrichtung der Erdbebenwellen zu erkennen. Später benutzt SCHWINNER [1929, 1930] darüber hinaus Ergebnisse der Magnetik. Die damals diskutierten Vorstellungen über die Ausbreitungsanomalie müssen auf Grund neuer Erkenntnisse modifiziert werden. Heute ist der größte Teil des interessierenden Gebietes teils durch Bohrungen, teils auf Grund geophysikalischer Prospektionsarbeiten der Erdölindustrie aufgeschlossen. Ein wichtiges Ergebnis dieser Arbeiten ist die Erbohrung des Böhmisches Kristallins und der Molasse in den Nördlichen Kalkalpen [KRÖLL und WESSELY 1967]. Demnach überschieben die Alpen das Böhmisches Kristallin von Süden nach Norden wie ein Keil. Zur Zeit ist noch nicht bekannt, wie weit sich das Böhmisches Kristallin unter den Alpen nach Süden fortsetzt. Trotzdem helfen die neuen Erkenntnisse die Ausbreitungsmechanismen der Erdbebenwellen besser zu verstehen. So verwendet GANGL [1969] zur Deutung der Ausbreitungsanomalie einen sich nach Norden verjüngenden Keil mit hoher Extinktion über Grundgebirge kleiner Extinktion. Er kann zeigen, daß das Zusammenwirken von geometrischer Amplitudenabnahme und Extinktion zur Ausbildung einer Art Schattenzone führen kann, wie sie tatsächlich auch beobachtet wird.

### Makroseismische Auswertung

Die Isoseisten der ostalpinen Beben weichen beträchtlich von der Kreisgestalt ab und dehnen sich in nordwestlicher Richtung aus. Als repräsentative Beispiele sind für diese Auswertung die vier stärksten Beben ( $I_0 \geq 7^\circ$  MS) im Bereich der östlichen Ostalpen ausgewählt worden, weil dafür die makroseismischen Daten in ausreichender Menge vorliegen:

1. Judenburger Beben	7,0° MS	1. 5. 1916
2. Schwadorfer Beben	7,5° MS	8. 10. 1927
3. Obdacher Beben	7,5° MS	3. 10. 1936
4. Seebensteiner Beben	7,5° MS	16. 4. 1972



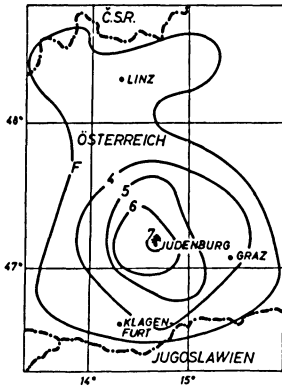
Die Abb. 1 a—d stellen Isoseisten dieser Beben dar. Die Ausweitung des Schüttergebietes nach Norden bzw. Nordwesten ist klar erkennbar. Die Ausbreitungsanomalie tritt besonders deutlich in Erscheinung, wenn man die Abweichung  $\delta I$  der gefühlten Intensität  $I_{\text{beob}}$  von der mittleren, für diese Herdentfernung gültigen Intensität  $I_{\text{mitt}}$ <sup>4)</sup>

$$\delta I = I_{\text{beob}} - I_{\text{mitt}}$$

graphisch aufträgt. Die Ergebnisse finden sich in den Abb. 2 a—d. In diesen Abbildungen sind nur diejenigen Gebiete zur Auswertung herangezogen worden, aus denen Bebenmeldungen vorliegen. Gebiete ohne Bebenmeldung und ohne Negativmeldung sind unberücksichtigt geblieben. Unter Vorbehalt darf man jedoch diese Gebiete als besonders intensitätsarm interpretieren. Die Intensitätsabnahme mit der Entfernung ist in dieser Form der Darstellung nicht mehr enthalten. Man muß sich jedoch vor Augen halten, daß eine vom Herdmechanismus herrührende Richtungsabhängigkeit der Intensität durchaus noch in der  $\delta I$ -Verteilung vorhanden sein kann. Wir glauben jedoch, daß die  $\delta I$ -Werte maßgeblich durch Untergrundeigenschaften bestimmt werden und haben daher in den Abb. 2 a—d neben geographischen Merkmalen auch die geologischen Großeinheiten eingetragen.

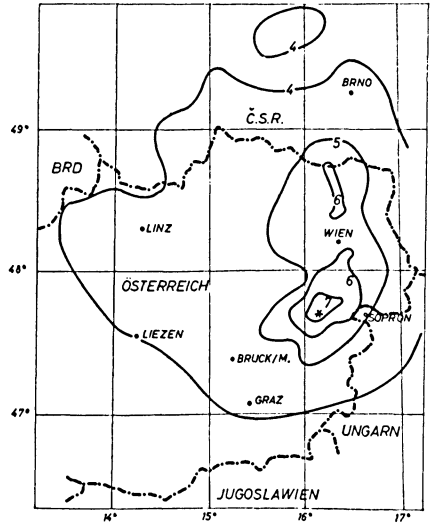
Die beiden Beben bei Judenburg und Obdach (Abb. 1 a, 1 c, 2 a und 2 c) ereigneten sich im Bereich der Mur-Mürztal-Störungszone. Bei beiden kommen in geringer Herddistanz statistisch verteilt etwa gleich viele positive wie negative  $\delta I$ -Werte vor. Hieraus kann man nur schließen, daß das Auflösungsvermögen der Methode nicht ausreicht, um eine Anomalie festzustellen, denn bei der Auswertung wurden die beobachteten Intensitäten über quadratische Flächenelemente mit der Seitenlänge 18,5 km gemittelt. Lediglich 30 km südlich des Epizentrums in Abb. 1 c fällt eine Zone verstärkter  $\delta I$  auf (Abb. 2 c), die etwa mit der in geologisch junger Vergangenheit noch mobilen Lavanttal-Störung zusammenfällt. Bei beiden Beben jedoch ist die Korrelation der Nördlichen Kalkalpen mit negativen  $\delta I$  bzw. geringen Bebenintensitäten so klar, daß sie nicht mehr als Zufallsprodukt angesehen werden kann. Ebenso wenig als ein Zufallsergebnis dürfte das Zusammenfallen der nördlichen Flysch- und Molasse-Zone mit positiven  $\delta I$ -Werten anzusehen sein. Die Korrelation ist beim Obdacher Beben besser als beim Judenburger Beben. Das Gebiet wird im Norden etwa durch den Donaubogen östlich Passau begrenzt. Man kann unter Umständen einen Zusammenhang mit dem hier austreichenden Böhmischem Kristallin vermuten, obgleich die Grenze der Schüttergebiete bei beiden Beben nicht genau mit der Linie des Ausstreichens zusammenfällt.

<sup>4)</sup> Es wurden zunächst die Abstände der Isoseisten vom Epizentrum aus 16 in gleichbleibenden Winkelabständen am Epizentrum aufgetragenen Radien bestimmt. Diese Abstände wurden gemittelt und ergaben mittlere Isoseistenradien. Aus den mittleren Isoseistenradien verschiedener Intensitätsgrade wurde der Verlauf der gemittelten Intensität  $I_{\text{mitt}}$  bestimmt. Die lokal beobachteten Intensitätswerte wurden über quadratische Flächenelemente mit der Seitenlänge 18,5 km gemittelt und ergaben damit  $I_{\text{beob}}$ .



\* EPIZENTRUM

Abb. 1a

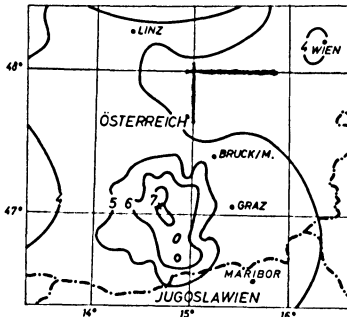


\* EPIZENTRUM

Abb. 1b

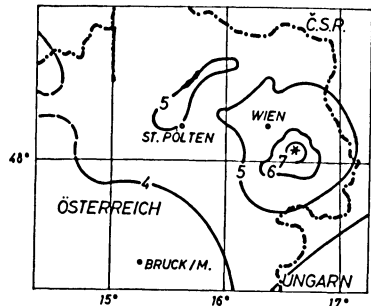
Abb. 1 a: Isoseisten des Judenburger Bebens am 1. 05. 1916  
 Maximalintensität: 7° MS  
 Isoseits of Judenburg earthquake on 1. 05. 1916  
 maximum intensity: 7° MS

Abb. 1 b: Isoseisten des Seebensteiner Bebens am 16. 04. 1972  
 Maximalintensität: 7,5° MS  
 Isoseits of Seebensteiner earthquake on 16. 04. 1972  
 maximum intensity: 7,5° MS



\* EPIZENTRUM

Abb. 1c



\* EPIZENTRUM

Abb. 1d

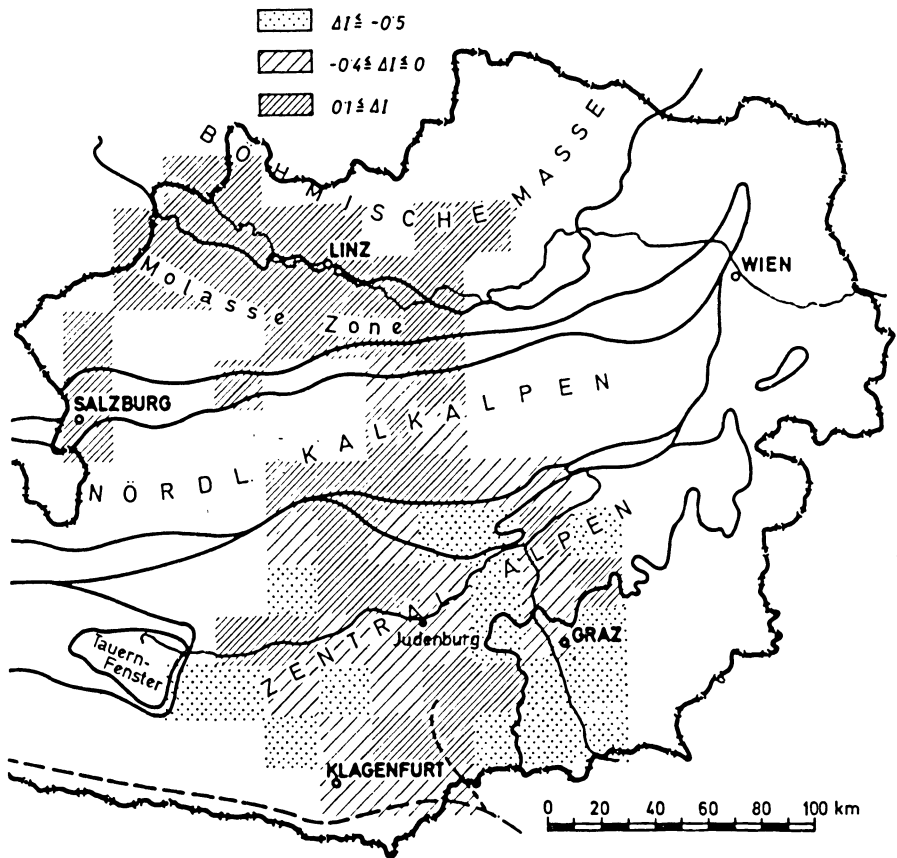


Abb. 2a: Judenburger Beben am 1. 05. 1916  
 $\Delta I$ -Verteilung

Judenburg earthquake on 1. 05. 1916  
 $\Delta I$ -distribution

Abb. 1c: Isoseisten des Obdacher Bebens am 3. 10. 1936  
 Maximalintensität: 7,5° MS

Isoseist of Obdach earthquake on 3. 10. 1936  
 maximum intensity: 7.5° MS

Abb. 1d: Isoseisten des Schwadorfer Bebens am 8. 10. 1927  
 Maximalintensität: 7,5° MS

Isoseits of Schwadorfer earthquake on 8. 10. 1927  
 maximum intensity: 7.5° MS

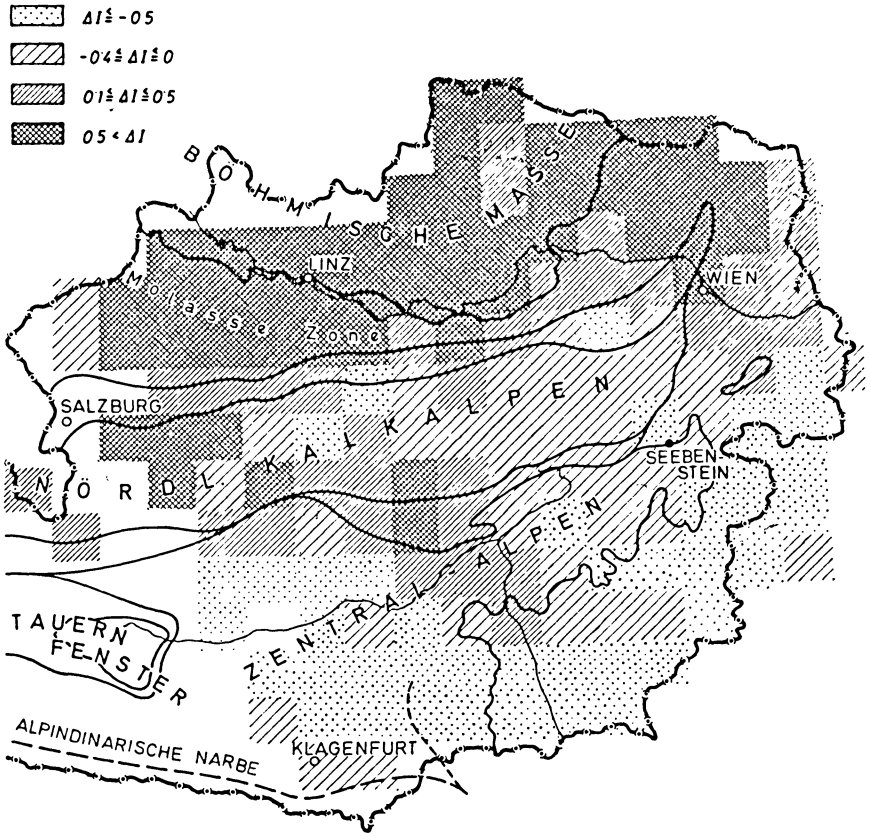


Abb. 2b: Seebensteiner Beben am 16. 04. 1972  
 $\Delta I$ -Verteilung

Seebenstein earthquake on 16. 04. 1972  
 $\Delta I$ -distribution

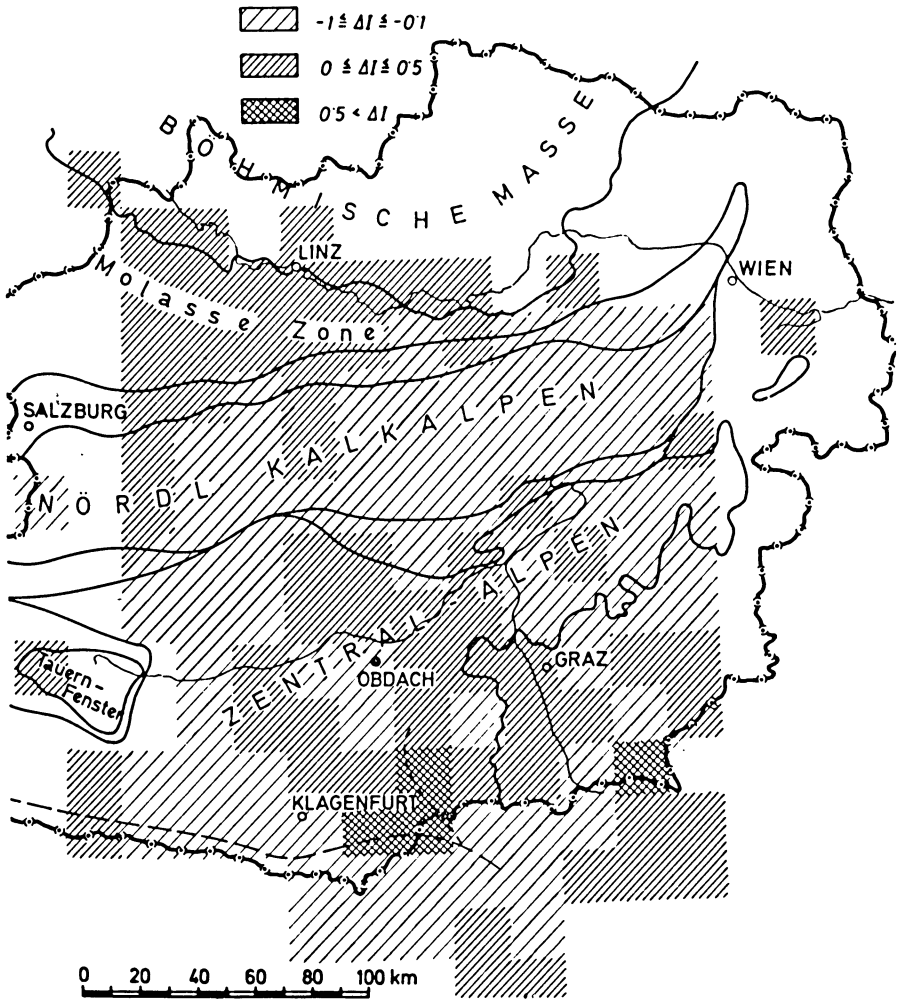


Abb. 2c: Obdacher Beben am 3. 10. 1936  
 $\Delta I$ -Verteilung

Obdach earthquake on 3. 10. 1936  
 $\Delta I$ -distribution

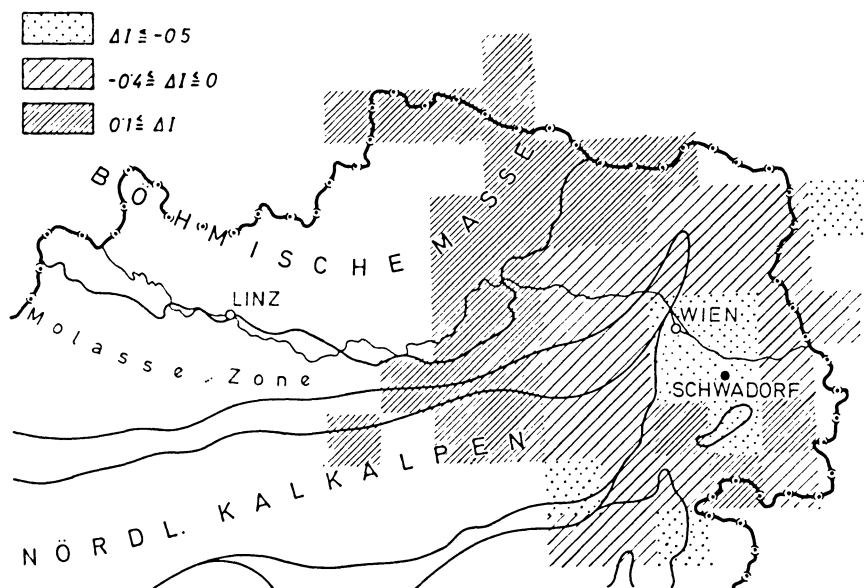


Abb. 2d: Schwadorfer Beben am 8. 10. 1927

 $\Delta I$ -Verteilung

Schwadorf earthquake on 8. 10. 1927

 $\Delta I$ -distribution

Abb. 2b (Seebenstein-Beben) zeigt eine allgemeine Zunahme der relativen Bebenintensität von SO nach NW. Eine Schattenzone wie in den Abb. 2a und c ist nicht feststellbar, lediglich südlich Amstetten gibt es schwache Andeutungen dafür. Beim Schwadorfer Beben (Abb. 2d) verschwindet die Schattenzone in der  $\delta I$ -Darstellung. Wahrscheinlich ist diese Beobachtung im Zusammenhang mit dem Abtauchen der nordalpinen Decken gegen Osten unter die tertiären Sedimente des inneralpinen Wiener Beckens zu sehen.

Wenn ein Zusammenhang mit der geologischen Einheit der Nördlichen Kalkalpen besteht, dann muß die Schattenzone um so stärker ins Gewicht fallen, je länger der Weg ist, den die Erdbebenwellen im Bereich dieser Einheit zurücklegen müssen. Da die Kalkalpen nach Osten hin in die Tiefe abtauchen, darf man für die weit im Osten liegenden Beben ohne weiteres annehmen, daß die Kalkalpen mindestens nicht die gleiche Wirkung auf ihre Ausbreitungsmechanismen besitzen wie im Falle der westlich liegenden Bebenherde. Das zeigen die Abb. 2b und d auch sehr deutlich. Die beiden ausgewerteten Bebenzentren liegen ganz im Osten Österreichs, und zwar das Epizentrum des Schwadorfer Bebens weiter östlich als das Epizentrum des Seebensteiner Bebens. Es muß daher die Koinzidenz kleiner Bebenintensitäten mit den Nördlichen Kalkalpen als ein wichtiges Ergebnis festgehalten werden. Es hat den

Anschein, als ob die seismische Energie sich vorwiegend in Tiefenzonen ausbreitet, die erst nördlich der Kalkalpen zutage treten. Damit steht fest, daß das Modell eines einzigen festen Keiles über einem festen Halbraum [GANGL 1969] doch zu einfach ist, um die Wirklichkeit richtig zu beschreiben. Es erscheint daher notwendig, nach einem differenzierten Modell zu suchen.

**Modell der östlichen Ostalpen**

Für die vorliegenden Untersuchungen legen wir das von CLAR und SCHLAGER [1964] vorgeschlagene Profil der Ostalpen (Abb. 3) zugrunde. Die kristallinen Gesteine der Böhmisches Masse tauchen gegen Süden unter die tertiären Sedimente, welche infolge geringer Verfestigung durch eine niedrigere P-Wellengeschwindigkeit gekennzeichnet sind. Diese wächst mit zunehmender Tiefe und beträgt im Mittel etwa 3000 m/s.

Die von Süden überschobenen Einheiten der Flysch-Zone bzw. des Helvetikums sind vorwiegend kompakte Sandsteine, für welche mit einer Geschwindigkeit von fast 4000 m/s gerechnet werden muß. Alle bisher genannten Einheiten werden von den Decken der Nördlichen Kalkalpen überschoben. Durch das Vorherrschen von Kalk- und Dolomitgesteinen beträgt die mittlere Geschwindigkeit 6000 m/s. ANGENHEISTER, BÖGEL, GEBRANDE, GIESE, SCHMIDT-THOMÉ und ZEIL [1972] geben sogar Werte bis zu 6800 m/s an.

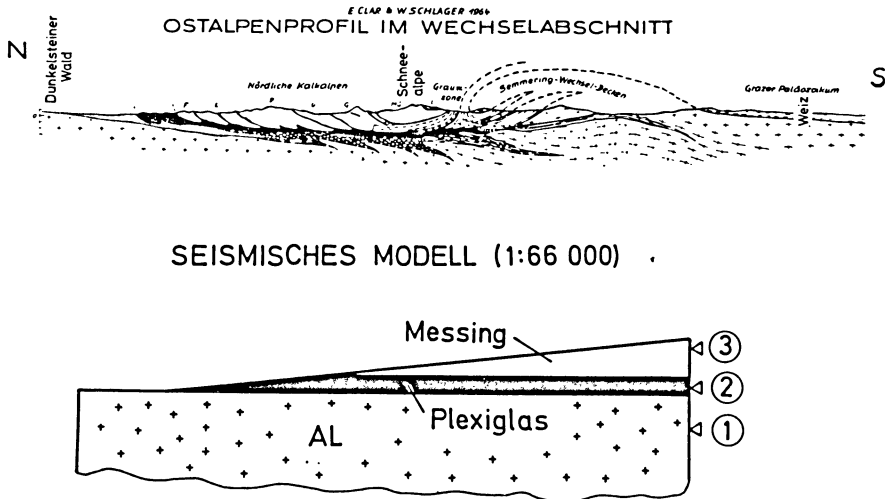


Abb. 3: Profil der Nördlichen Kalkalpen nach CLAR und SCHLAGER 1964 und seismisches Modell im Maßstab 1:66000 geological cross-section of the Northern Calcareous Alps after CLAR and SCHLAGER 1964 and seismic model scale, 1:66000

### Modellseismische Messungen

Das geologische Profil stellt angenähert einen Keil dar, der auf einer Schicht kleiner Wellengeschwindigkeit, also einem Wellenleiter, lagert. Unter dieser Schicht folgt Material hoher Wellengeschwindigkeit. Diese Struktur wird für die modellseismische Untersuchung nachgebildet:

Geologische Einheiten	Modell			
	Material	Geschwindigkeit der longitudinalen Plattenwelle (km/s)	Geschwindigkeit der Scherwelle (km/s)	Dichte (g/cm <sup>3</sup> )
Böhmisches Massiv	Aluminium	5,50	3,15	2,7
Flysch, Molasse	Plexiglas	2,40	1,40	1,2
Nördliche Kalkalpen	Messing	3,75	2,20	3,5

Näherungsweise entsprechen die akustischen Parameter des Modelles denen der Natur, bis auf die Dichte des Messings. Diese ist zu hoch, um mit der mittleren Dichte der Nördlichen Kalkalpen vergleichbar zu sein [KRÖLL 1964]. Die gesuchten Effekte dürften daher nicht quantitativ, immerhin aber größenordnungsmäßig auf die Natur übertragen werden können.

Das Profilstück zwischen Böhmischem Kristallin und Semmering von ca. 80 km Länge wird durch ein Modell von 120 cm Länge dargestellt. Der Abbildungsmaßstab beträgt also 1:66000 und gilt angenähert auch für die Wellenlängen und Perioden. Die Herdmechanismen der hier untersuchten Beben beeinflussen zweifellos die Intensitätsverteilung, doch werden sie nicht speziell variiert. Für alle Experimente wurde ein keramischer Dickenschwinger verwendet von 12 mm Durchmesser und 3 mm Dicke. Dieser wurde nacheinander in den Positionen 1, 2 und 3 an der Stirnseite des Modells angekoppelt. Er strahlte in Richtung seiner Normalen vorwiegend *P*-Wellen, unter Winkeln von 45° hierzu vorwiegend *S*-Wellen. Die Anregung in den drei verschiedenen Tiefen 1, 2 und 3 soll den Einfluß der Herdtiefe auf die Intensitätsverteilung klären helfen. Die Frage liegt nahe, weil die Ausbreitungsanomalie der Ostalpen bekanntlich bei Beben gleichen Ortes oft recht unterschiedlich ausfallen kann. Vom Standpunkt der Geotektonik interessiert, ob die Bebenzentren an bestimmte Tiefen gebunden sind, denen man auf Grund der Materialeigenschaften eine höhere Mobilität zuschreibt. Alle Messungen erfolgten auf einem Profil längs der Oberkante des Modells, welche die Erdoberfläche darstellt. Die Profile sind 108 cm lang. „Horizontale“ und „vertikale“ Komponenten (*H* und *V*) der ankommenden Welle wurden mit einem piezoelektrischen Biegeschwinger aufgenommen. Der Biegeschwinger besitzt eine charakteristische breitbandige Übertragungsfunktion, die hier nicht speziell untersucht wird. Auf eine Beschreibung der benutzten modellseismischen Apparatur soll hier verzichtet werden, weil sie aus älteren Arbeiten bekannt ist (s. z. B. KLUSMANN [1964]).



## Diskussion der Ergebnisse

### *Profil 1* (Anregung im Grundgebirge, s. Abb. 4a und b)

Die Wellenenergie ist an den Aluminiumhalbraum gebunden. In die Messingschicht gelangen Wellen nur durch mehrfache Brechung unter Energieverlust durch partielle Reflexionen. Dort werden daher nur kleine Amplituden beobachtet. Langperiodische Schwingungen, welche bei großen Laufzeiten erkennbar sind, müssen als Störungen infolge einer sekundär an der Modellecke entstandenen Rayleighwelle interpretiert werden. Bei  $\Delta=80$  cm überquert das Profil die Grenze vom Messing zum Plexiglas. Ab hier nehmen zunächst die refraktierten *P*-Wellen aus dem Aluminium, welche bereits vorher als erste Einsätze in Erscheinung treten, an Amplitude zu. Mit größeren Laufzeiten jedoch treffen langperiodische Schwingungen auf, die offenbar von einer im Kanal geführten Welle herrühren. Da ihre Phasengeschwindigkeiten, gemessen im Kanal selbst, zwischen 2400 und 2900 m/s liegen, handelt es sich in der Tat um eine „Kanalwelle“, die im Kanallinneren durch *P*- und *S*-Wellen aufgebaut ist, deren Amplitude im Al-Untergrund jedoch nach einem Exponentialgesetz abfällt. Sie hängt mit einer Scherwelle sehr kleiner Amplitude im darüberliegenden Messing zusammen. Diese Scherwelle bildet einen Einsatz, der ab  $\Delta=55$  cm deutlich sichtbar ist und bei 80 cm in die „Kanalwelle“ übergeht. Zwischen  $\Delta=80$  cm und  $\Delta=120$  cm kann man natürlich nicht mehr die „Kanalwelle“ messen, sondern nur eine sekundäre, von ihr erzeugte Welle. Die neue Welle muß den neuen Randbedingungen genügen, die sich durch das Fehlen des Messingkeiles ergeben. Ihre Phasengeschwindigkeit und Amplitude verändern sich mit dem Ort nach Gesetzmäßigkeiten, die KOENIG [1972] untersucht hat. Hiernach ist die lokale Phasengeschwindigkeit näherungsweise gleich der nach der Theorie der Dispersion seismischer Wellen an planparallelen Schichten berechneten Phasengeschwindigkeit. Die Amplitude des Wellensystems nimmt mit Annäherung an die Keilachse bei  $\Delta=120$  cm ab. Sie ist schon bei  $\Delta=116$  cm praktisch nicht mehr zu erkennen. Vermutlich ist das eine Folge destruktiver Interferenz und Brechung in den Untergrund. Anders jedoch verhalten sich die direkt durch das Aluminium gelaufenen *P*-Wellen, weil die Mächtigkeit der Überdeckung mit zunehmendem  $\Delta$  abnimmt und ab  $\Delta=120$  cm verschwindet. Die *P*-Amplituden nehmen generell zu und liefern in der Nähe der Keilachse die größten Beiträge. Bei der großen Laufzeit von 580  $\mu$ sec erkennt man außerdem Reflexionen aus großer Tiefe, welche wegen des Nichtvorhandenseins von Deckschichten besonders klar zur Geltung kommen. Diese Reflexionen rühren von der Unterseite des Modells her. Sie seien hier wegen der hiermit verbundenen interessanten Konsequenzen für die Interpretation von Erdbebenseismogrammen erwähnt.

### *Profil 2* (Anregung im Kanal, Abb. 5a und b)

Hier ist die Wellenenergie vorwiegend an den Plexiglas-Kanal gebunden. Im Gegensatz zu dem eben diskutierten Profil 1 werden schon bei kleinen  $\Delta$  kräftige Einsätze im Messing beobachtet. Sie sind leicht als gebrochene *P*- und *S*-Wellen sowie als

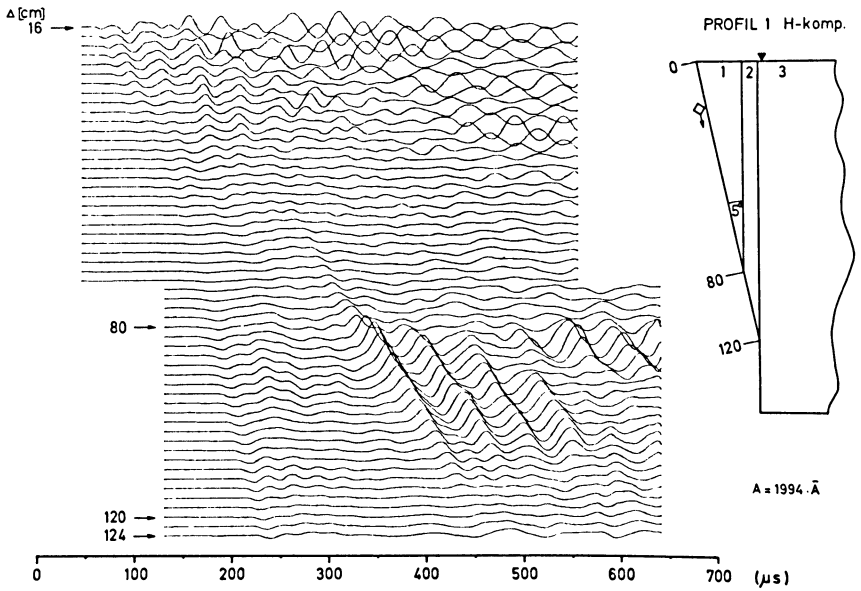


Abb. 4a: Anregung im Grundgebirge; *H*-Komponente  
source in the basement; horizontal-component

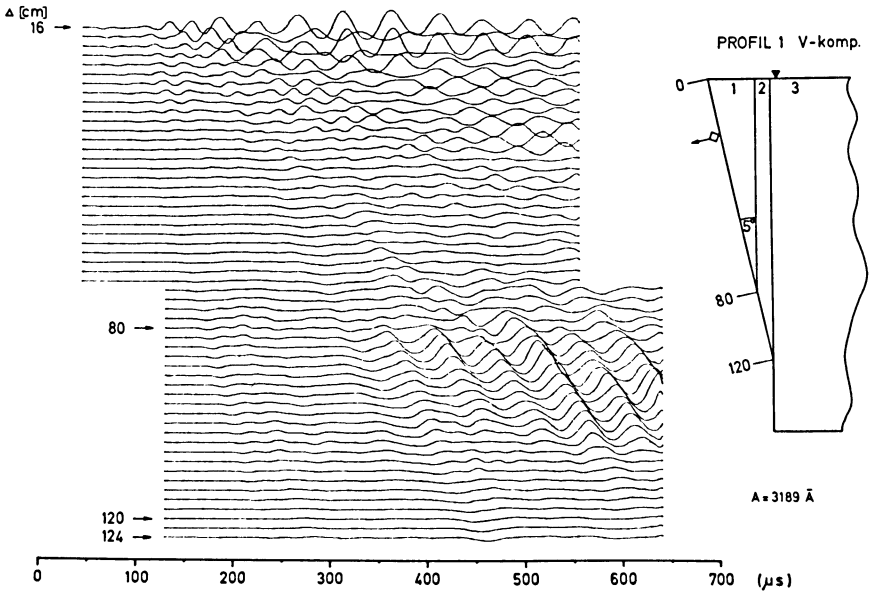


Abb. 4b: Anregung im Grundgebirge; *V*-Komponente  
source in the basement; vertical-component

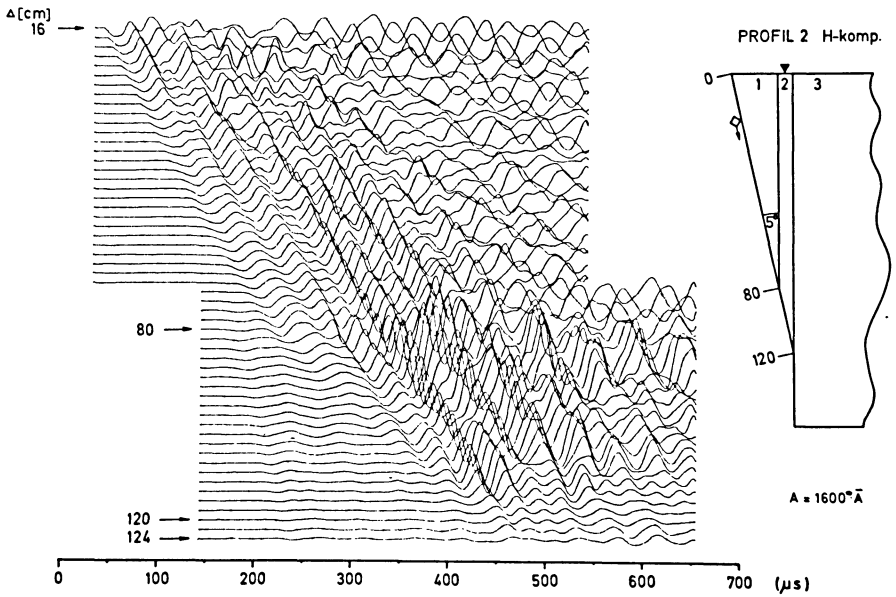


Abb. 5a: Anregung im „Kanal“; *H*-Komponente  
source in the middle of the velocity-channel; horizontal-component

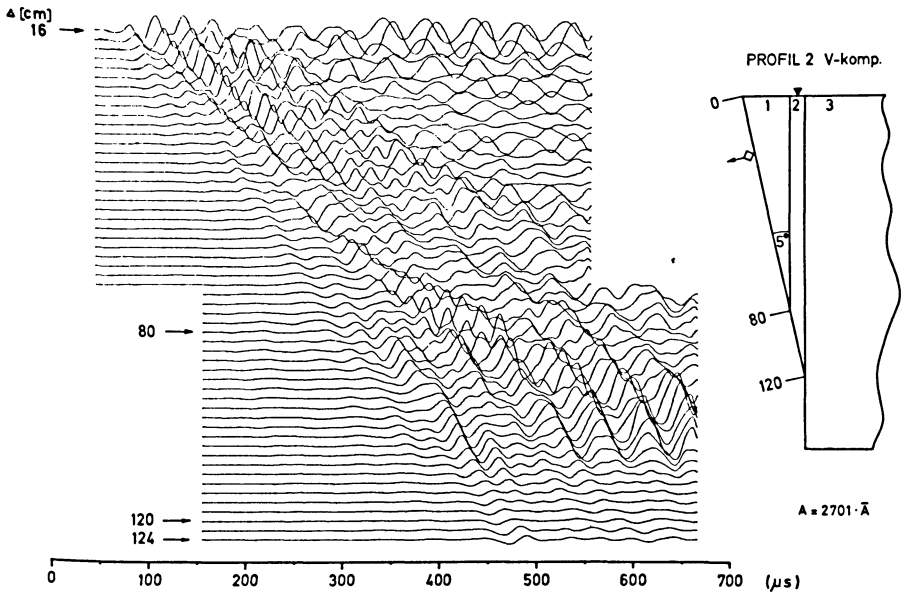


Abb. 5b: Anregung im „Kanal“; *V*-Komponente  
source in the middle of the velocity-channel; vertical-component

multiple Reflexionen zu deuten. Alle diese Einsätze nähern sich mit zunehmendem Laufweg dem Ersteinsatz und bauen mit diesem zusammen ein neues, vorwiegend longitudinales, Interferenzsystem mit großer Periode auf. Dieses Wellensystem tritt bei der großen Anregungstiefe, Profil 1, interessanterweise nicht auf. Es handelt sich offensichtlich um eine an den Messingkeil gebundene Welle, die mit Annäherung an die Messingkeilachse an Energie zunimmt. Sie besitzt ungefähr die Geschwindigkeit 3600 m/s der Stabdehnungswelle in Messing und ist daher der bei GUTDEUTSCH [1968] beschriebenen  $L$ -Welle vergleichbar. Die  $L$ -Welle tritt beim Keil mit freien Grenzflächen auf. Während die Energie der  $L$ -Welle am Keil mit freien Grenzflächen jedoch im Keil verbleibt, strahlt im vorliegenden Fall die an den Messingkeil gebundene Welle ihrerseits  $P$ - und  $S$ -Wellen in den darunterliegenden Kanal ab. Es muß sich daher um eine Welle mit Extinktion handeln, die in ähnlicher Form auch unter den Wellensystemen, die, unter der Bezeichnung „leaking modes“ zusammengefaßt, vorkommen. Im folgenden soll diese Welle mit  $L'$ -Welle bezeichnet werden. Die aus dem Kanal kommende Wellengruppe tritt ab  $\Delta=80$  cm mit sehr starken Amplituden auf. Ihre im Kanal selbst gemessene Phasengeschwindigkeit übertrifft merkwürdigerweise jene bei Profil 1. Sie liegt zwischen 2900 und 3600 m/s. Daher kann dieses System nicht streng als „Kanalwelle“ angesprochen werden. Es strahlt  $S$ -Wellen an die Umgebung ab. Auch die im Messing geführte  $L'$ -Welle dürfte beteiligt sein. Das wäre auch auf Grund der Anregungsbedingungen verständlich. Im Bereich des austreichenden Kanals zwischen  $\Delta=80$  cm und  $\Delta=120$  cm unterscheidet sich diese Messung qualitativ nicht vom Profil 1.

### *Profil 3* (Anregung an der Oberfläche, Abb. 6a und b)

Im Gegensatz zu den Messungen auf den Profilen 1 und 2 werden hier auch höhere Frequenzen im Messingkeil angeregt. Hierdurch erscheinen die Einsätze der Reflexionen von der Messingkante deutlich, besonders solche vom Typ PS, SP und SS. Auch eine am Geber erzeugte Rayleighwelle mit breitem Frequenzspektrum tritt in Erscheinung. Die anormale Dispersion dieser Rayleighwelle läßt sich besonders bei den langen Wellen beobachten. Diese bilden deutlich Schwingungszüge zunehmender Periode für  $\Delta < 80$  cm und besitzen vorwiegend transversale Schwingungsrichtung. Eine gewisse Ähnlichkeit besitzen sie mit den Biegewellen an dünnen Platten und der  $B$ -Welle am Keil in Luft, die von GUTDEUTSCH [1968] untersucht wurde. Hier jedoch ist der Keil einseitig an ein akustisch „weiches“ Medium angekoppelt. Das hat zur Folge, daß ein Teil der Energie dieser Welle in Form von  $S$ -Wellen abgegeben wird, d. h. diese Welle erleidet Extinktion. Einfachheitshalber möge diese Welle mit  $B'$ -Welle bezeichnet werden. Besonders stark wird die langperiodische  $L'$ -Welle mit  $c=3600$  m/s angeregt, welche ab  $\Delta=40$  cm den ersten Einsatz bildet. Ihre Amplitude nimmt kräftig mit Annäherung an die Messingkeilachse zu. Dort interferiert sie mit einer reflektierten Welle des gleichen Typs. Die beiden Wellentypen dominieren in der Umgebung der Messingkeilachse. Wenn sie dort auftreffen, wird diese Keilachse zum Ausgangspunkt neuer Elementarwellen, die sich auch in den Kanal hinein ausbreiten.

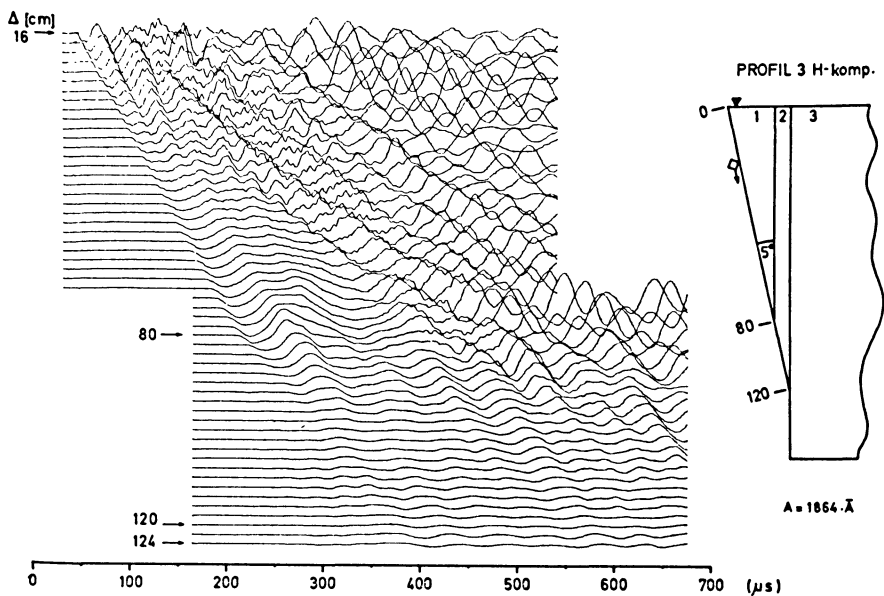


Abb. 6a: Anregung an der Oberfläche; *H*-Komponente  
source near the surface; horizontal-component

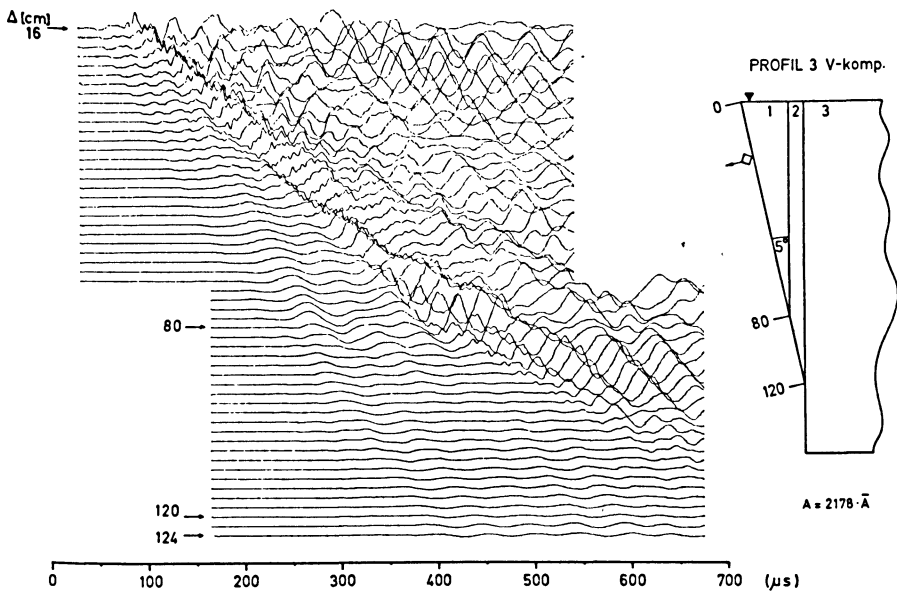


Abb. 6b: Anregung an der Oberfläche; *V*-Komponente  
source near the surface; vertical-component

Die sekundären Wellen werden für  $\Delta > 80$  cm sichtbar. In dem Zeitbereich, wo man die gebererzeugten „Kanalwellen“ erwartet, d. h. für  $\Delta = 80$  cm, etwa bei  $280 \mu\text{s}$ , deutet nichts auf das Eintreffen neuer Wellen hin. Demnach spielen die Anteile seismischer Energie, die schon in Gebernähe zum Kanal gelangten, eine untergeordnete Rolle.

Interessant ist aber die Tatsache, daß vor allem die  $B'$ -Wellen sehr starke sekundäre Wellenamplituden im Plexiglas erzeugen. Die Wellen breiten sich mit normaler Dispersion aus und verschwinden an der Plexiglaskeilachse. Es handelt sich dabei wieder um eine Welle von dem Typ der von KOENIG [1972] untersuchten Mechanismen.

### Zusammenfassung der Ergebnisse

Es dominieren drei Wellenmechanismen am Modell mit ausstreichendem Geschwindigkeitskanal. Der erste stellt ein Wellensystem dar, das im wesentlichen an den Kanal gebunden ist. Es kann daher praktisch nicht an der Oberfläche des Modells beobachtet werden, sondern nur im Kanalinneren. Es strahlt an die Umgebung geringfügig Energie in Form von Raumwellen ab und schreitet mit Dispersion fort. Der zweite Mechanismus stellt ein Wellenpaar dar, welches sich bevorzugt in dem das Deckgebirge bildenden Keil ausbreitet. Die beiden beteiligten Wellen haben Dispersion und sind dem Erscheinungsbild nach der vorwiegend longitudinalen  $L$ -Welle und der vorwiegend transversalen  $B$ -Welle am Keil mit freier Grenzfläche ähnlich. Die Amplituden der beiden Wellen nehmen mit Annäherung an die Messingkeilachse zu. Der dritte Wellenmechanismus wird von den ersten beiden als Sekundäreffekt erzeugt und nur im Bereich des zutagetretenden Kanals beobachtet. Seine Laufzeit und Amplitude wird durch die Art der Anregung bestimmt. In ihm dominiert eine Welle mit normaler Dispersion, die bereits in anderen Arbeiten untersucht wurde. Wichtig ist die Feststellung, daß die Amplitude dieser Welle noch vor dem Zutagetreten des Grundgebirges verschwindet, vermutlich als Folge destruktiver Interferenz und Brechung in den Untergrund. Je nach Art der Anregung dominiert entweder der erste oder der zweite Ausbreitungsmechanismus. Wenn die Anregung auf dem Messingkeil erfolgt, herrscht der zweite Mechanismus vor, bei Anregung im Untergrund oder im Kanal dominiert der erste von beiden.

### Bedeutung für die Analyse makroseismischer Daten

Um einen Vergleich mit den makroseismischen Daten vornehmen zu können, muß man versuchen, die Amplituden der hier gezeigten Seismogramme in die Intensitätsskala für Erdbeben zu übertragen. Es wird der empirische Zusammenhang zwischen Bebenintensität und maximaler Bodenbeschleunigung  $B_{\max}$  in der Form

$$\bar{I} = 3 \log (B_{\max}) + \text{const.}$$

herangezogen. (Das konstante Glied ist in dieser Untersuchung belanglos.)

Um einen ersten Überblick zu gewinnen, wurden die Maxima der Amplitudenbeträge  $A = \sqrt{H^2 + V^2}$  für jedes einzelne Profil bestimmt. Der Ausdruck  $I = 3 \log A + \text{const.}$  ist jedenfalls dann mit  $\bar{I}$  vergleichbar, wenn sich die dominierende Frequenz

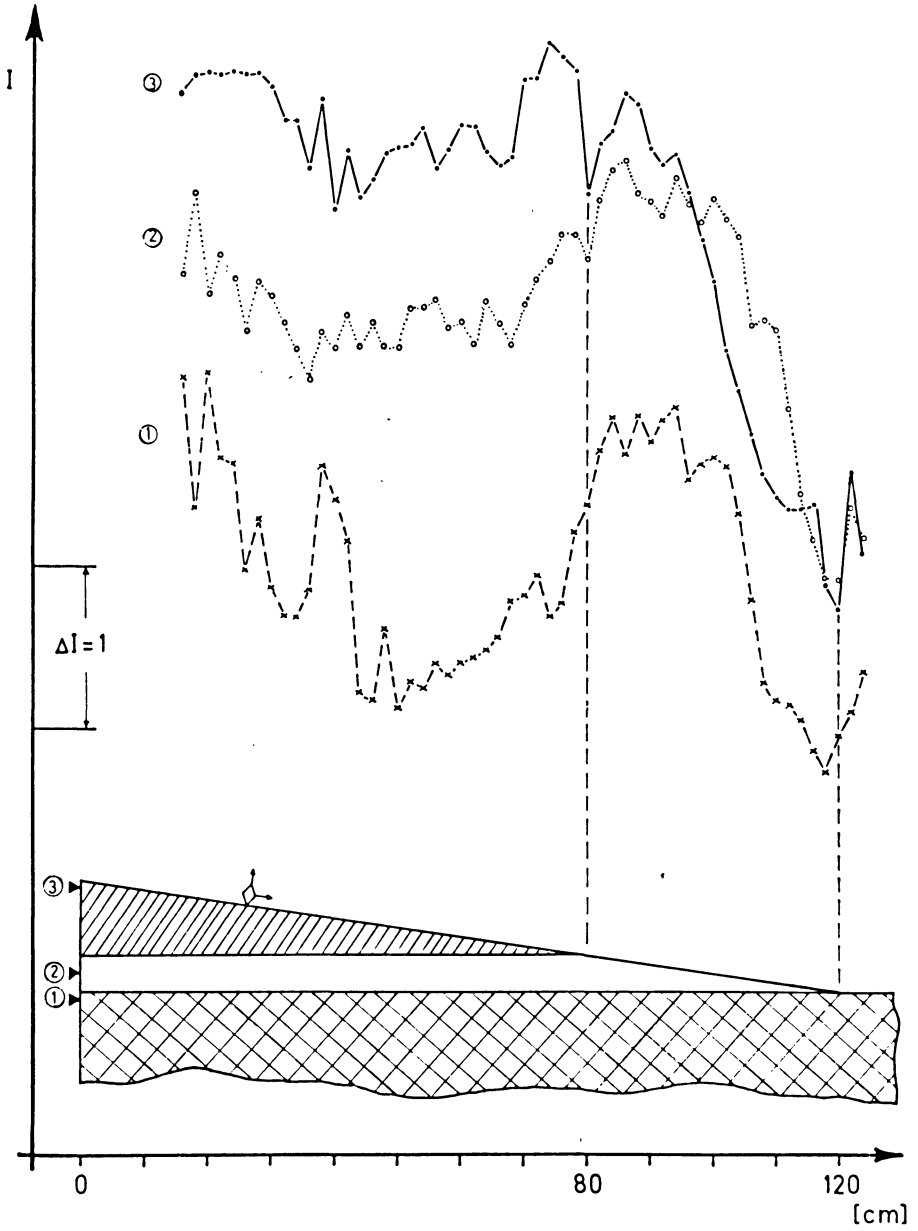


Abb. 7: Relative Änderungen  $\Delta I$  aus modellseismischen Messungen  
 relative Variation of  $\Delta I$  derived from model seismic measurements

der Wellen nicht mit der Entfernung ändert oder wenn der Aufnehmer beschleunigungsproportional arbeitet. Die erste dieser beiden Bedingungen ist sicher näherungsweise erfüllt, wie man aus den Seismogrammen sehen kann.

Relative Änderungen  $\delta I$  dürften daher näherungsweise gleich  $\delta \bar{I}$  sein. Eine Darstellung findet sich in Abb. 7. Ein Vergleich der von den Profilen 1, 2 und 3 herrührenden Kurven ist aufschlußreich. Allen Kurven gemeinsam ist der Intensitätsabfall in kleiner Entfernung vom Herd. Wenn auch zu bedenken wäre, daß es sich hierbei um Messungen an einem zweidimensionalen Modell handelt, also die Übertragung auf die dreidimensionalen Verhältnisse der Materie nur bedingt möglich ist, so lassen die Unterschiede doch klar erkennen, daß man aus dem Intensitätsabfall mit der Entfernung nicht nach einem aus der Literatur bekannten Verfahren auf die Herdtiefe schließen kann. Alle drei Kurven erfahren einen erneuten Anstieg mit Annäherung an das Zutagetreten des Kanals. Bei Anregung in großer Tiefe (Profil 1) liegt das Maximum der Bebenintensität etwa auf der Mitte des ausstreichenden Kanals, nimmt aber bei noch größeren Entfernungen rasch ab, um bei Ausstreichen des Kanals ein Minimum zu erreichen. Im Falle kleiner Herdtiefe liegt das Intensitätsmaximum bei kleineren Entfernungen. Es fällt bei der Anregung im Deckgebirge (Profil 3) etwa mit dem Zutagetreten des Kanals zusammen. Wesentlich erscheint uns weiterhin die Tatsache, daß bei der Anregung in der Tiefe (Profil 1) die Intensität in sehr großen Entfernungen ( $\Delta=120$  cm) die in mittleren Entfernungen ( $\Delta=60$  cm) übertrifft. Hiernach liegt für die große Anregungstiefe eine Bevorzugung der Energieausbreitung in Richtung zum ausstreichenden Kanal vor. Das ist aber nicht der Fall bei kleinerer Anregungstiefe. Möglicherweise ist damit die NW-Vergenz der Isoseisten ostalpiner Beben zu erklären. Die Zunahme der Bebenintensität im Nördlichen Alpenvorland findet mit diesem Modell eine plausible Erklärung als Folge der Wellenausbreitung in einem Kanal verringerter Wellengeschwindigkeit. Die Modellversuche zeigen außerdem, daß die Bebenherde in großer Tiefe, also im kristallinen Grundgebirge liegen müssen.

### Danksagung

Das Geofysikální Ústav, Československá akademie věd, Praha, sowie das Szeizmológiai Obszervatóriuma, Budapest, haben uns freundlicherweise die im eigenen Bereich gesammelten makroseismischen Daten des Seebensteiner Bebens zur Verfügung gestellt. Ihnen sei hierfür herzlich gedankt.

Diese vorliegende Arbeit stellt einen von der Österreichischen Akademie der Wissenschaften finanzierten Beitrag zum Internationalen Geodynamics Project dar. Die modellseismischen Messungen erfolgten mit Hilfe der am Institut für Geophysik der Universität Hamburg befindlichen modellseismischen Apparatur. Die genannte Anlage ist Eigentum der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Bad Godesberg.

Der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei für ihre Unterstützung an dieser Stelle gedankt.



**Literatur**

- ANGENHEISTER, G., H. BÖGEL, H. GEBRANDE, P. GIESE, P. SCHMIDT-THOMÉ und W. ZEIL: Recent investigations of surficial and deeper crustal structures of the Eastern and Southern Alps. Geol. Rundsch. 61, 349—395, 1972
- CLAR, E., und W. SCHLAGER: 1964 Literaturhinweise siehe GANGL [1969]
- GANGL, G.: Ein Beitrag zur Seismizität des Alpenostrandes (Erdbeben in Niederösterreich). Mitt. d. Erdb. Komm., N.F. 68, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Math.-Nat. Klasse, Wien 1969.
- GUTDEUTSCH, R.: Rayleighwellen am Keil mit freien Grenzflächen. Hamburger Geophysikalische Einzelschriften, Heft 10, 1968
- KAUTSKY, F.: Die Erdbeben des östlichen Teiles der Ostalpen, ihre Beziehungen zur Tektonik und zu den Schwereanomalien. Mitt. d. Erdb. Komm., N.F. 58, Wien 1924
- KLUSMANN, J.: Untersuchung über die Ausbreitung elastischer Wellen im flözartigen Schichtverband. Dissertation, Bergakademie Clausthal 1964
- KOENIG, M.: Das Frequenzverhalten des Rayleighwellensystems in einer keilförmigen Schicht über einem Halbraum größerer Wellengeschwindigkeit und Dichte. Dissertation, Hamburg 1972
- KRÖLL, A.: Die Ergebnisse der Aufschlußarbeiten der ÖMV AG in der Molassezone Niederösterreichs in den Jahren 1957—1963, Teil IV. Ergebnisse der geophysikalischen Untersuchungen. Erdöl-Zeitschrift, Heft 6 — Juni 1964
- KRÖLL, A., und G. WESSELY: Neue Erkenntnisse über Molasse, Flysch und Kalkalpen auf Grund der Ergebnisse der Bohrung Urmansau I. Erdöl-Erdgas-Zeitschr. 83, 342—353, 1967
- SCHWINNER, R.: Zur Deutung der Transversalbeben in den nordöstlichen Kalkalpen. Zeitschr. f. Geoph. V, 16—31, 1929
- SUCESS, E.: Die Erdbeben Niederösterreichs. Denkschriften d. Österr. Akad. d. Wissenschaften, Math.-Nat. Klasse 33, 61—98, Wien 1873



# **Solutions of Boundary Value Problems of Multilayer Analogs of Geoelectrics and Hydrology**

A Tribute to Prof. Dr. Dr. h.c. KARL JUNG

\* Oct. 8th, 1902      † Apr. 28th, 1972

G. BORM, Bochum<sup>1)</sup>

Eingegangen am 15. November 1972

*Summary:* Exact solutions for the distribution of the potential of stationary current fields in rectangular, conductive multilayer analogs of geoelectrics and hydrology are given using a generalized theory. These analogs, which consist of a number of horizontally bounded domains, each of them having different conductivity, may be chosen to be either two- or three-dimensional, either finite or infinite, and either continuous or discrete.

*Zusammenfassung:* Die exakten Lösungen für die Verteilung des Potentials stationärer Strömungsfelder in rechteckigen, leitenden Mehrschichtmodellen der Geoelektrik und Hydrologie werden mit Hilfe einer verallgemeinerten Theorie berechnet. Diese Modelle, die aus einer Anzahl horizontal voneinander abgegrenzter Bereiche mit jeweils unterschiedlicher Leitfähigkeit bestehen, können zwei- oder dreidimensional, endlich oder unendlich, kontinuierlich oder diskret sein.

## **1. Introduction**

The geoelectric or hydraulic response of a field system which cannot be constructed or analyzed directly without excessive difficulty or expense can with advantage be determined or predicted by means of electric analogs.

These analogs become most important in the case of field analysis problems since the system under consideration is either inaccessible underground or because the necessary measurements would require costly instrumentation.

In geoelectrics and hydrology analogs are often used to simulate natural or artificial electric or hydraulic current flow either in the laboratory or with computers. It is well known that there exists an excellent analogy between hydraulic conductivity and electric conductivity as well as between electrostatic potential and pressure height of ground water in an aquifer.

---

<sup>1)</sup> Dr. GÜNTER BORM, Institut für Geophysik der Ruhr-Universität, D-4630 Bochum, Universitätsstraße 150, Postfach 2148.

Field analysis problems can be formulated either in two or in three dimensions. For two-dimensional problems, a two-dimensional analog is adequate. The most important analogs for stationary plane current flow in a layered ground are

- (a) the parallel-plate model of HELE-SHAW [1898],
- (b) conductive sheets or plates [KARPLUS 1958],
- (c) the two-dimensional multilayer network [LIEBMANN 1950, BORM 1968, JELITTO 1969, JELITTO-BORM 1970a].

The parallel-plate model of HELE-SHAW is often applied to simulate plane laminar ground water currents in an aquifer. Theory, design, and scaling of such models are investigated in a number of publications [DE WIEST 1965, JOHNSON 1963]. Hence only solid conductive analogs are discussed in the present paper.

Problems which can be treated only in three-dimensional coordinates require three-dimensional conductive analogs such as

- (a) the electrolytical tank [UTZMANN 1959],
- (b) squared or cubical or cylindrical solid conductors [POLUBARINOVA-KOCHINA 1962, REBER 1964].

The main difficulty of the latter type is that it is generally impossible to measure the potential distribution at interior points of the analog. This difficulty can be overcome by the use of

- (c) the three-dimensional multilayer resistance network analog [BORM-JELITTO 1972].

In general it can be assumed that geoelectric and hydraulic current fields are laterally infinite. On the other hand, in physical analogs such as electrolytical tank or conductive plates, it is very difficult to simulate potential fields to be unbounded. Therefore it is obvious that the effect of the side walls of the physical analog system cannot be neglected.

In the present paper an attempt is made to evaluate the effect of the side walls so that the experimental results obtained by physical analog measurements can be interpreted properly.

Under certain conditions, the formulas derived for the potential distribution in continuous conductive models are also valid for resistance network analogs. These are superior to continuous analogs in many respects. One of the main advantages is the fact that they can easily be constructed so that the lateral sides have no effect on the current- and potential field in the interior of the model.

The theory developed for the potential distribution in plane analogs can directly be extended to three-dimensional models by means of a second Fourier transformation. On the other hand, this does not hold for commonly used conformal mapping methods. The present paper will show that all finite or infinite, continuous or discrete, two- or three-dimensional, solid conductive multilayer analogs of geoelectrics and hydrology can be treated by means of a common generalized theory.

## 2. Green's Function of a Rectangular, Homogeneous, Conductive Plate

In a rectangular homogeneous conductive plate with height  $H$  and width  $2B$  and with electric or hydraulic conductivity  $\sigma$ , the initial current density  $j(x, z)$  is known in a certain area  $A$  as shown in Fig. 1.

POISSON'S equation for the scalar potential distribution  $V$  in the plate is given by

$$\nabla^2 V = \partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = \sigma^{-1} j(x, z). \quad (1)$$

Normally the solution for POISSON'S equation is obtained in two steps: First, GREEN'S function of a current source at the point  $(x_0, z_0)$  is to be found for the potential on the conductive plate. Then the potential distribution due to the known initial current density is obtained as a superposition by integrating or summing the current density function  $j(x, z)$  over the area  $A$ .

In order to determine the potential of the stationary current field, it is useful to divide the plate into two parts by a line passing through the source point  $(x_0, z_0)$  and being parallel to one of the boundaries (Fig. 1).

Such a division of the plate makes it possible that solutions can be found satisfying the initial value conditions as well as the conditions at the boundaries, where the normal derivatives of the potential are to vanish.

Let the potential in the domain  $z \leq z_0$  be  $\bar{V}$  and in the domain  $z \geq z_0$  be  $\underline{V}$ . Then the solutions may be written in the form

$$\bar{V} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos \lambda(x+B) [\bar{a} \exp(-\lambda z) + \bar{b} \exp(\lambda z)], \quad (2)$$

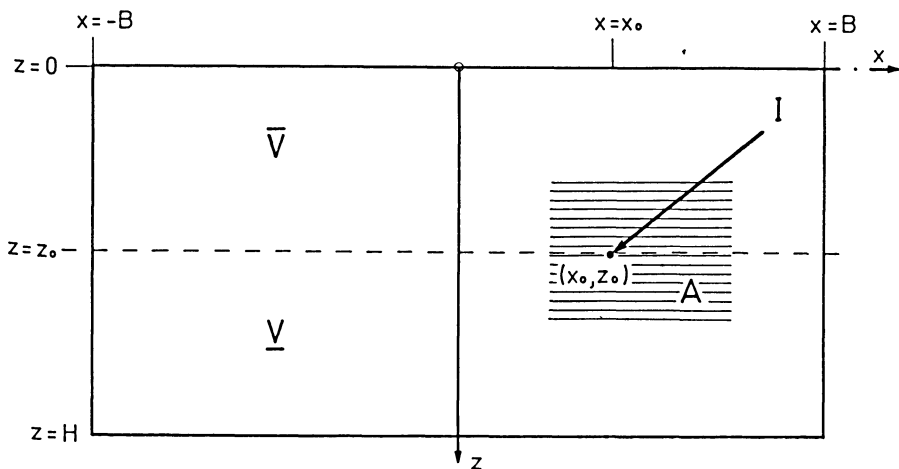


Fig. 1: Illustration of notations

$$\underline{V} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos \lambda(x+B) [\underline{a} \exp(-\lambda z) + \underline{b} \exp(\lambda z)] \quad (3)$$

where

$$\lambda = k\pi/(2B). \quad (4)$$

The boundary conditions

$$(\partial \bar{V} / \partial x = \partial \underline{V} / \partial x = 0) |_{x=\pm B} \quad (5)$$

and

$$\partial \bar{V} / \partial z |_{z=0} = \partial \underline{V} / \partial z |_{z=H} = 0 \quad (6)$$

are satisfied only with

$$\bar{a} = \bar{b} \equiv \bar{\alpha}/2 \quad (7)$$

and

$$\underline{a} \exp(-\lambda H) = \underline{b} \exp(\lambda H) \equiv \underline{\alpha}/2. \quad (8)$$

Thus the more specialized solutions are of the form

$$\bar{V} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\alpha} \cos \lambda(x+B) \cosh \lambda z. \quad (9)$$

$$\underline{V} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{\alpha} \cos \lambda(x+B) \cosh \lambda(H-z). \quad (10)$$

At the boundary  $z = z_0$ , two conditions are to be satisfied:

(a) the continuity of the potential

$$\bar{V}(x_0, z_0) = \underline{V}(x_0, z_0) \quad (11)$$

(b) the GAUSS-GREEN's divergence theorem as given by the following equation

$$(\partial \bar{V} / \partial z - \partial \underline{V} / \partial z = I \sigma^{-1} \delta(x-x_0)) |_{z=z_0} \quad (12)$$

where  $\delta$  is DIRAC's delta-function.

The assumed Fourier solutions (9) and (10) for  $\bar{V}$  and  $\underline{V}$ , respectively, are substituted in the continuity equation (11). Because of the linear independence of the particular solutions in the Fourier-series, the following simplified condition is obtained

$$\bar{\alpha} \cosh \lambda z_0 = \underline{\alpha} \cosh \lambda(H-z_0). \quad (13)$$

Thus eq. (12) becomes

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cos \lambda(x+B) \lambda \underline{G}(\lambda) = I \sigma^{-1} \delta(x-x_0) \quad (14)$$

where

$$\underline{G}(\lambda) = \cosh \lambda(H-z_0) [\tanh \lambda z_0 + \tanh \lambda(H-z_0)]. \quad (15)$$

The constant term of the potential, which is obtained when  $k$  equals zero, is not considered as it is of no practical importance in this case.

Both sides of eq. (14) are multiplied by  $\cos \lambda'(x+B)$ , where  $\lambda' = \kappa \pi / (2B)$  with  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ , and integrated over the width  $2B$  of the model plate.

Because of the orthogonality relation

$$\int_{-B}^B \cos \lambda(x+B) \cos \lambda'(x+B) dx = \begin{cases} 2B; & \lambda = \lambda' = 0 \\ B; & \lambda = \lambda' \neq 0 \\ 0; & \lambda \neq \lambda' \end{cases} \quad (16)$$

and because of the property of the delta function

$$\int_{-B}^B \delta(x-x_0) \cos \lambda(x+B) dx = \cos \lambda(x_0+B) \quad (17)$$

the following equation is obtained from eq. (14)

$$\alpha = I \cos \lambda(x_0+B) / [\sigma B \underline{G}(\lambda) \lambda]. \quad (18)$$

From eqs. (18) and (13) the coefficients  $\alpha$  and  $\bar{\alpha}$  can be determined uniquely. Hence the explicit solutions for the potentials  $\bar{V}$  and  $\underline{V}$  in the two domains are

$$\bar{V} = \frac{I}{\sigma B} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \cos \lambda(x+B) \cos \lambda(x_0+B) \cosh \lambda z / [\lambda \bar{G}(\lambda)] \} \quad (19)$$

$$\underline{V} = \frac{I}{\sigma B} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \cos \lambda(x+B) \cos \lambda(x_0+B) \cosh \lambda(H-z) / [\lambda \underline{G}(\lambda)] \} \quad (20)$$

where

$$\bar{G}(\lambda) = \cosh \lambda z_0 [\tanh \lambda z_0 + \tanh \lambda(H-z_0)] \quad (21)$$

$$\underline{G}(\lambda) = \cosh \lambda(H-z_0) [\tanh \lambda z_0 + \tanh \lambda(H-z_0)] \quad (15)$$

and

$$\lambda = k \pi / (2B)$$

It is well known that electric current will flow in the plate only when there is a sink corresponding to the source. Let the coordinates of the sink be  $(x_1, z_1)$  and the potentials induced by the sink be  $\bar{V}^{(-)}$  and  $\underline{V}^{(-)}$ .

The potentials  $\bar{V}^{(-)}$  and  $\underline{V}^{(-)}$  are obtained by substituting  $(-I)$  for  $I$  and  $(x_1, z_1)$  for  $(x_0, z_0)$  in the eqs. (19) and (20), respectively.

Thus the potential at any point in the plate is obtained by superposing the potentials induced by the source and by the sink, and this is valid for any arbitrary pair of source and sink.

The superposition of the potentials as discussed above offers a complete solution of the boundary value problem of the homogeneous rectangular conductive plate. This solution is only valid for NEUMANN'S boundary conditions stating that the normal derivatives of the potential are to vanish at all points of the boundaries excluding sources and sinks if located on the boundary. However, the same theory can be used in the case of DIRICHLET'S boundary conditions by suitable modification.

For the purpose of demonstrating the practical use of the theory of the potential distribution in homogeneous, rectangular, conductive plates, some important analog problems of geoelectrical or hydrological interest are discussed in the following section.

### 3. Examples to Show the Practical Use of the Theory of the Potential Distribution in Two-Dimensional Conductive Plate Analogs in Model Geoelectrics and Model Hydrology

#### (a) The Potential Distribution in a Two-Dimensional Conductive Plate with a Symmetrical Configuration of Current Sink and Source

On simulating geoelectrical deep soundings, where the current source  $(-x_0, 0)$  is symmetric to the sink  $(+x_0, 0)$ , the expression for the potential distribution is given by

$$V = \underline{V} = \frac{I}{\sigma B} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [\cos \lambda(B-x_0) - \cos \lambda(B+x_0)] \cos \lambda(x+B) \times \times \cosh \lambda(H-z) / [\lambda \sinh \lambda H] \}. \quad (22)$$

By taking into consideration that  $\cos \lambda(x+B) = (-1) \cos \lambda x$ , the potential induced by the pair of sink and source is obtained from eq. (22) as given below

$$V = \frac{I}{\sigma B} \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \{ [\cos \lambda(x+x_0) - \cos \lambda(x-x_0)] \times \times \cosh \lambda(H-z) / [\lambda \sinh \lambda H] \}. \quad (23)$$

Fig. 2 shows the equipotential lines in a homogeneous plate with unit conductivity  $\sigma$ , width  $2B$ , height  $H=B$ , and with source at  $(-B/2, 0)$  and sink at  $(+B/2, 0)$ , for a



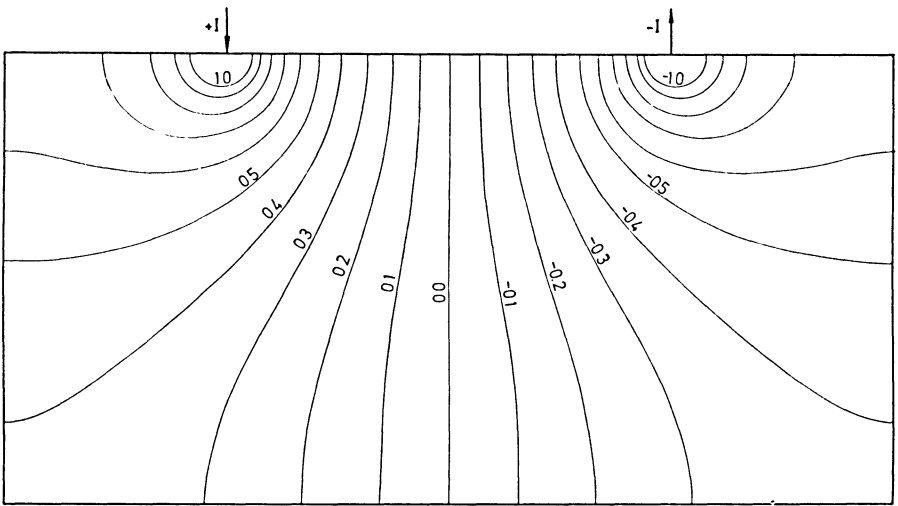


Fig. 2: Equipotential lines in a homogeneous rectangular conductive plate with width  $2B$ , height  $H=B$ , and unit conductivity  $\sigma$ , where a unit current  $I$  is fed in by symmetrical configuration of source  $(-B/2, 0)$  and sink  $(+B/2, 0)$

given unit current  $I$ . The reflection effect of the boundaries can obviously be seen: The equipotential lines follow a semi-circular path near the source and sink, but those running at greater distances from source and sink deviate from the semi-circular path until they become orthogonal to the nearest boundary.

#### *Asymptotic Behaviour of the Potential due to Relatively Large Extensions of the Analog*

As the height  $H$  of the plate increases to a very large value, the equation for the potential distribution becomes

$$\lim_{H \rightarrow \infty} V = \frac{I}{\sigma B} \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} [\cos \lambda(x+x_0) - \cos \lambda(x-x_0)] \times \exp(-\lambda z)/\lambda. \quad (24)$$

This equation is useful for the determination of the configuration coefficients necessary for the simulation of geoelectrical deep sounding in the laterally finite analog.

If in addition to height  $H$ , width  $2B$  also extends to great distances, the series given in eq. (24) can be replaced by an integral expression. Since  $\lambda = k\pi/(2B)$  and  $d\lambda = \pi/B$ ,

eq. (24) converts to

$$\lim_{H, B \rightarrow \infty} V = \frac{I}{\sigma \pi} \int_0^{\infty} [\cos \lambda(x+x_0) - \cos \lambda(x-x_0)] \times \exp(-\lambda z) d\lambda/\lambda. \quad (25)$$

According to GRÖBNER-HOFREITER [1966], evaluation of the above integral leads to

$$\lim_{H, B \rightarrow \infty} V = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \left\{ \frac{(x-x_0)^2 + z^2}{(x+x_0)^2 + z^2} \right\}. \quad (26)$$

This is the well known expression for the potential in a semi-infinite plate with a symmetrical configuration of source and sink at the boundary.

*(b) Configuration Coefficients for Geoelectrical Four Point Probe Measurements on a Two-Dimensional Conductive Plate*

In order to determine the potential distribution in the homogeneous, conductive plate, it might be tempting to use the simple logarithmic formula (26) instead of the more complicated but exact expression as given in eq. (24).

The relative error  $\epsilon$ , as a result of this approximation, is plotted in Fig. 3 against  $x/B$ , where the current  $I$  is fed into the plate at the source  $(-x_0/B, 0)$  and sink  $(x_0/B, 0)$ .

It can obviously be seen from Fig. 3 that, even for relatively large values of  $x/B$ , the approximation in the intervals between sink and source is remarkably good. When the distance between sink and source is not greater than  $B/3$ , the maximum error is already less than 5%. In the direct vicinity of the sink or source, the effect of the lateral boundaries can be neglected totally.

In the intervals between the source and the lateral boundary, and the sink and the lateral boundary, the value of the relative error becomes very large, when the probe point approaches the boundary.

The configuration coefficients, used in geoelectrical deep sounding with symmetrical four point probe arrangements, are defined as the reciprocal values of the voltages between the probe points  $(-L/2, 0)$  and  $(+L/2, 0)$ , when the current and conductivity are unit (Fig. 4).

The configuration coefficients, necessary for geoelectrical analog measurements, can be approximatively obtained from the simple eq. (26), as long as the distance  $x_0$  does not exceed  $B/3$ . For larger values of  $x_0$  the configuration coefficients are to be determined by means of eq. (24).

For a WENNER electrode configuration, where  $x_0 = L/2 = 3D/2$ , the configuration coefficients  $k_w^{\square}$  are

$$k_w^{\square} = B / \left[ 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \{(\cos \lambda D - \cos 2\lambda D)/\lambda\} \right]. \quad (27)$$

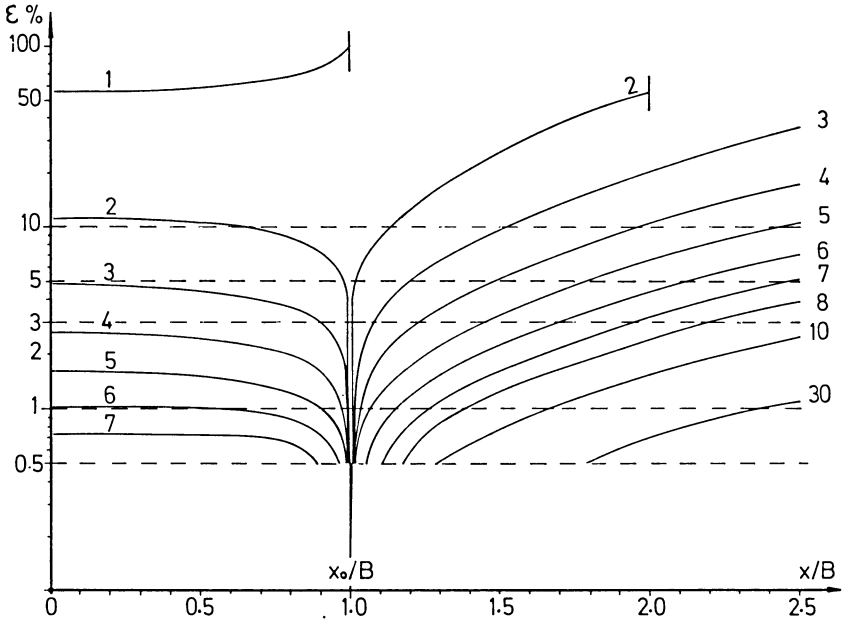


Fig. 3: Relative error arising from substitution of eq. (26) for eq. (24). The current  $I$  is symmetrically fed into the finite plate with width  $2B$  equal to twice the values of the curve parameters

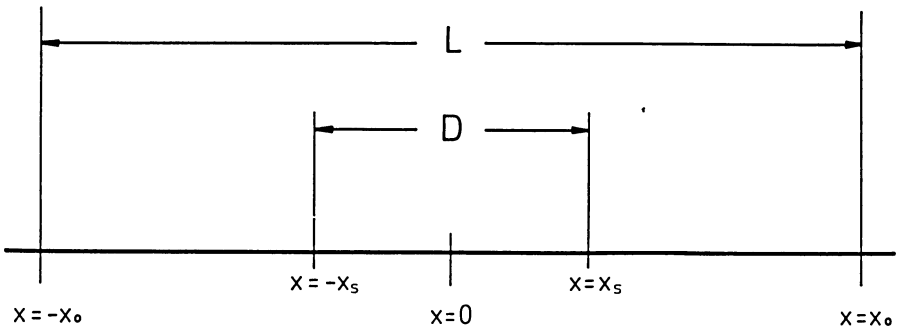


Fig. 4: Symmetrical four point probe configuration for geoelectrical deep sounding

For a SCHLUMBERGER electrode configuration, the configuration coefficients  $k_s^\square$  are given by the following equation

$$k_s^\square = B / \left[ 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \left\{ \left( \cos \lambda \left( \frac{L-D}{2} \right) - \cos \lambda \left( \frac{L+D}{2} \right) \right) / \lambda \right\} \right]$$

Tabelle 1: Comparison of the SCHLUMBERGER configuration coefficients  $k_s^\square$  of a laterally finite analog with width  $2B$  to those  $k_s^\infty$  of a semi-infinite plate, when the potential probes are located at the points  $(\pm 0.05B, 0)$ .

$L/(2B)=x_0/B$	$k_s^\square$	$k_s^\infty$
0.00	0.000	0.000
0.02	1.537	1.538
0.04	3.123	3.125
0.06	4.695	4.702
0.08	6.259	6.275
0.10	7.815	7.847
0.12	9.364	9.419
0.14	10.902	10.991
0.16	12.430	12.562
0.18	13.946	14.134
0.20	15.448	15.705
0.30	22.697	23.560
0.40	29.387	31.414
0.50	35.353	39.269
0.60	40.447	47.123
0.70	44.546	54.977
0.80	47.548	62.831
0.90	49.379	70.685
1.00	49.995	78.539

which can be simplified to

$$k_s^\square = B / \left[ 4 \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \{(\sin \lambda L \sin \lambda D) / \lambda\} \right]. \quad (28)$$

In Table 1, some values of SCHLUMBERGER configuration coefficients  $k_s^\square$ , valid for the laterally finite analog, are compared with the SCHLUMBERGER configuration coefficients  $k_s^\infty$  for the semi-infinite plate. For small values of  $x_0$ , there is no significant difference between  $k_s^\square$  and  $k_s^\infty$ . As the source approaches the lateral boundary, however, the difference between the values of  $k_s^\square$  and  $k_s^\infty$  increases more and more, and right at the boundary  $k_s^\square$  is only 60% of  $k_s^\infty$ .

The distance  $D$  between the probes has been chosen as  $D=0.01B$ . Occasionally it is of advantage to increase the distance between the potential probes, in order to avoid the difficulties arising from the measurement of very small voltages. When, for example, the distance between the probes is doubled, the values of the configuration coefficients are halved etc. They are inversely proportional to the distance between the probes, as long as the differential quotient at the centre of the four point probe configuration can accurately be approximated by the finite difference quotient (Fig. 6).

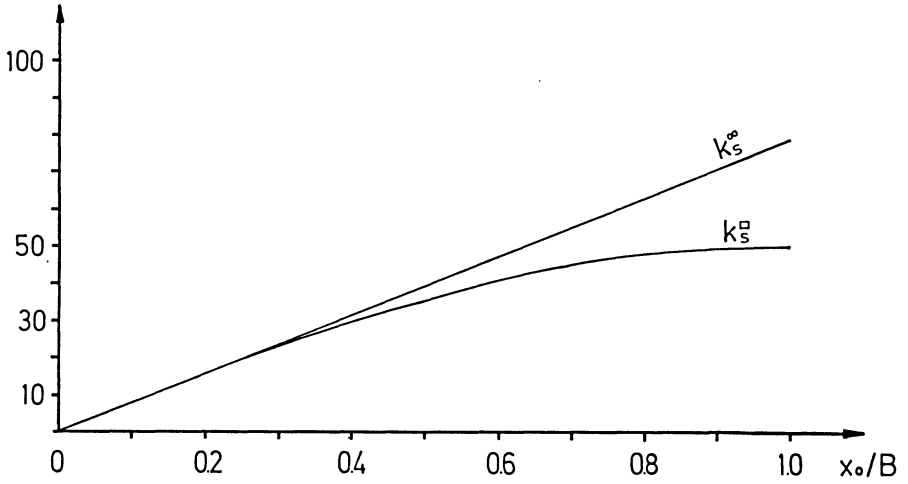


Fig. 5: Graphical representation of Table 1

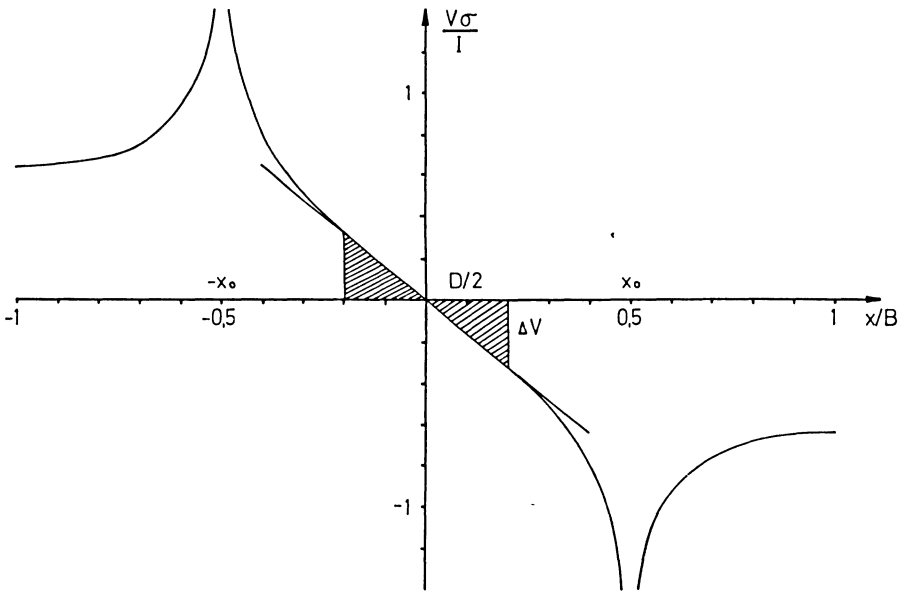


Fig. 6: Approximation of the differential quotient of the potential in the centre of the electrode configuration by the finite difference quotient

With this, the most important conclusions regarding the theory of the potential distribution in a finite, homogeneous, conductive plate, useful in model geoelectrics, come to an end. Application of the theory as discussed in the preceding sections to problems in model hydrology shall be illustrated by the following two examples.

*(c) Analog Simulation of Pressure Lines of Ground Water Near a Drainage Pipe in a Finite Aquifer Applying the Method of Images*

Let the longitudinal axis of the drainage pipe under consideration pass through the sink point  $(x_0, z_0)$ , and let it be perpendicular to the plane of the paper. Further, let the amount of drained ground water per unit time be  $-Q$ .

The pressure lines of the ground water are simulated by the equipotential lines in the conductive plate analog which are induced when the total amount of charge  $Q$  per unit time penetrates the model at the upper boundary line and is drained off the analog at the sink  $(x_0, z_0)$ .

In this case the upper boundary is an equipotential line. The initial value of the current density at this line source, however, is an unknown function.

A boundary value problem of this kind can most readily be solved by introducing a virtual current source, being a mirror image of the sink reflected at the upper boundary line (Fig. 7). With this, the potential field between sink and upper boundary can be determined in the same manner as discussed in Section 2. To that end, a coordinate transformation  $z' = z + H$  is found to be useful.

In Fig. 8 the pressure lines are plotted for a finite two-dimensional plate of width  $2B$ , height  $H = B$ , the axis of drainage pipe passing through the centre of the lower boundary, and with unit discharge  $-Q$  per unit time. It can be seen that the equipotential lines near the sink follow a semicircular path whilst those approaching the

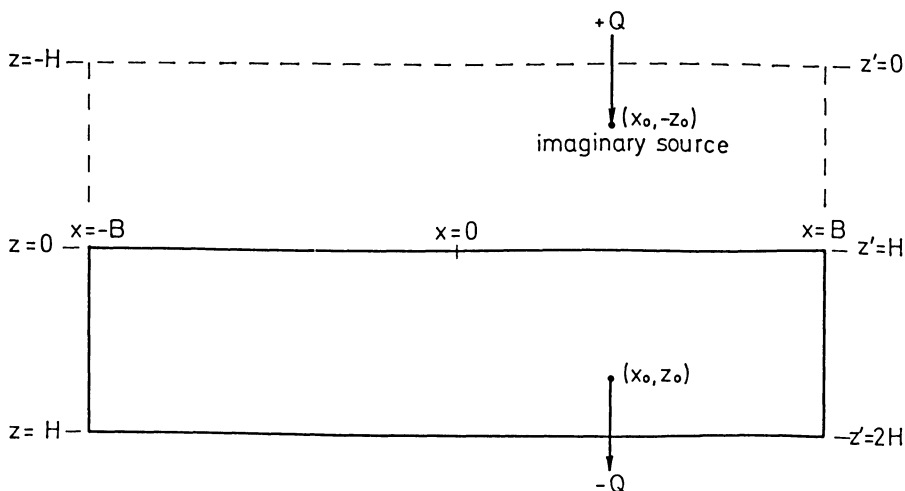


Fig. 7: Illustration of current sink and imaginary source

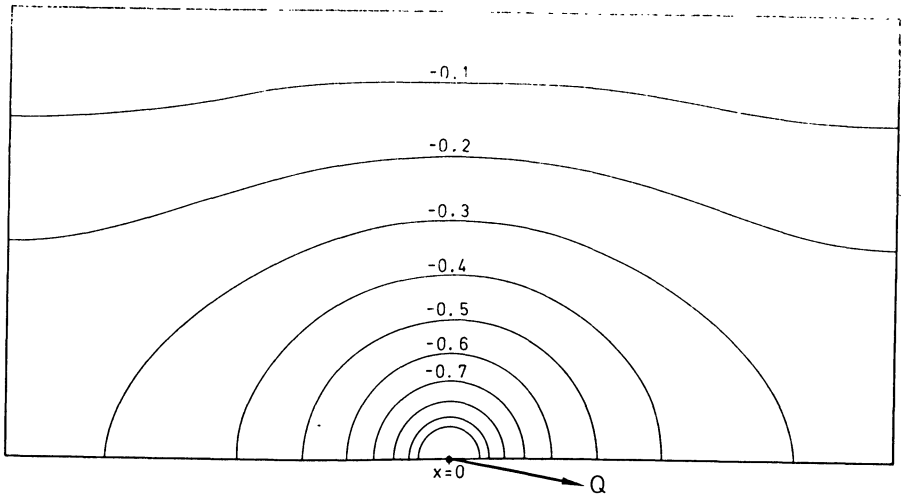


Fig. 8: Pressure lines around a drainage pipe with axis perpendicular to the plane of the paper and passing through the point  $(0, H)$  of the finite analog of width  $2B$  and height  $H$ . The discharge current  $Q$  is normalized as unit

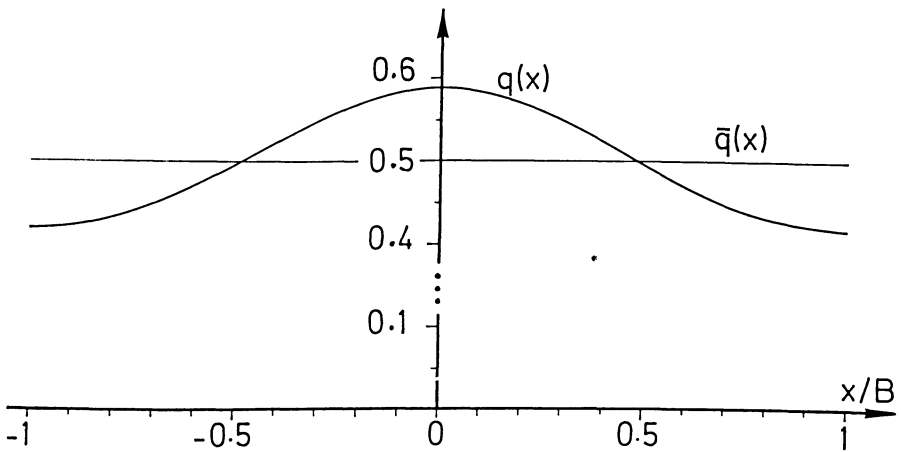


Fig. 9: Gradient of the potential at the upper boundary of the potential field as shown in Fig. 8

upper boundary have more and more decreasing curvatures, until they become parallel to the  $x$ -axis at the upper boundary itself.

The current density  $q(x)$  can be determined from the gradient of the potential. The gradient in  $z$ -direction is a relative maximum at the points  $(x_0, z)$  falling on the line connecting sink and imaginary source (Fig. 9).

After this, a more complicated hydrological problem with a known initial value of the potential shall be discussed, for which case the method of images can not be applied.

*(d) Green's Function of a Rectangular Conductive Plate with a known Initial Value of the Potential*

When no initial value of the current density but an initial value of the potential is known, eqs. (9) and (10) represent, similarly as before, solutions of the boundary value problem. However, the equations of potential continuity (11) and of current divergence (12) reduce to one single equation

$$(\bar{V} = \underline{V} = V_0 \delta(x - x_0))|_{z=z_0}. \quad (29)$$

Eq. (13) holds good as before, while eq. (14) is to be replaced by

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{\alpha \cos \lambda(x+B) \cosh \lambda(H-z_0)\} = V_0 \delta(x-x_0). \quad (30)$$

As a result of applying the relations (16) and (17), the solutions of the potentials  $\bar{V}$  and  $\underline{V}$  are finally obtained as follows

$$\bar{V} = (V_0/B) \sum_{k=1}^{\infty} \{\cos \lambda(x_0+B) \cos \lambda(x+B) \cosh \lambda z / \cosh \lambda z_0\}, \quad (31)$$

$$\underline{V} = (V_0/B) \sum_{k=1}^{\infty} \{\cos \lambda(x_0+B) \cos \lambda(x+B) \times \cosh \lambda(H-z) / \cosh \lambda(H-z_0)\}. \quad (32)$$

In the above equations the constant terms, arising when  $k=0$ , have been omitted.

As an example, regarding the practical application of the above formulas, a hydraulic analog with a positive initial potential  $V_0$  on the left half and a negative initial potential  $-V_0$  on the right half of the upper boundary, will be considered. This is an adequate analogy of the pressure field produced in the earth by water infiltrating into the ground of a reservoir and emerging to the surface of the earth behind the wall of the reservoir.

In view of the properties of symmetry, as discussed in preceding sections, the following solution for the potential distribution is obtained

$$V = (V_0/B) \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \left\{ \left[ \cosh \lambda(H-z) / \cosh \lambda(H-z_0) \right] \int_0^{\infty} [\cos \lambda(x+x_0) - \cos \lambda(x-x_0)] dx_0 \right\}. \quad (33)$$



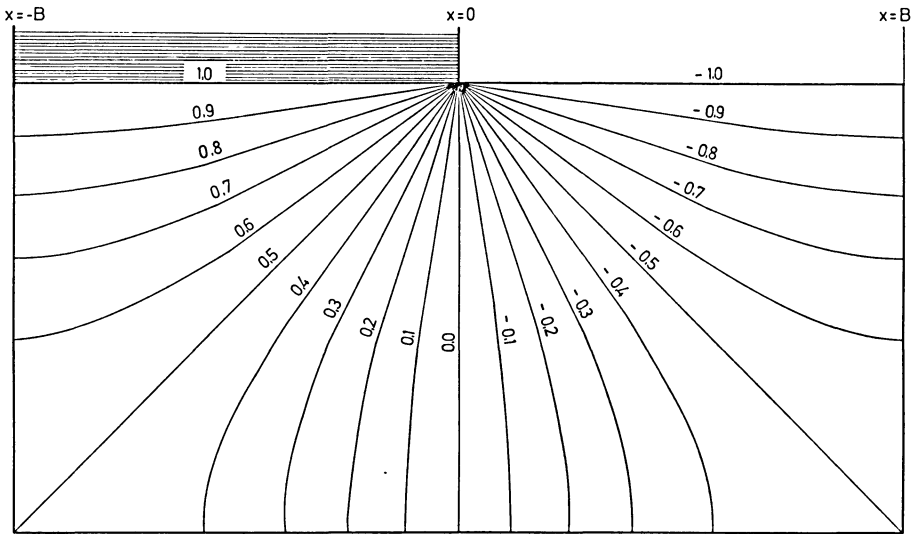


Fig. 10: Equipotential lines in a homogeneous, rectangular conductive plate of width  $2B$ , height  $H=B$ , with positive unit potential  $V_0$  at the left half and negative unit potential  $-V_0$  at the right half of the upper boundary

Evaluation of the integral yields

$$V = (-2V_0/B) \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \{ \sin \lambda x \cosh \lambda(H-z) / \cosh \lambda(H-z_0) \}. \quad (34)$$

In Fig. 10 the pressure field in a finite rectangular plate of width  $2B$ , height  $H=B$ , and with positive unit potential at the left half and negative unit potential at the right half of the upper boundary, is shown. The pressure lines follow ray paths passing through the origin and having identical angular distances. They become orthogonal to the boundary after boundary reflections.

It is worth to note that the *current* lines will follow identical paths when the origin is a current source and the lower and lateral boundaries act as a common sink. This phenomenon is well known in potential theory and is frequently used in the method of reciprocity of potential- and current-boundary value problems in geoelectrics and hydrology.

*Asymptotic Behaviour of the Pressure- and Current-Field due to Relatively Large Extensions of the Analog*

When the height  $H$  of the plate extends to a very large value, eq. (34) reduces to

$$\lim_{H \rightarrow \infty} V = (-2V_0/B) \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} [ \sin \lambda x \exp(-\lambda z) / \lambda ]. \quad (35)$$

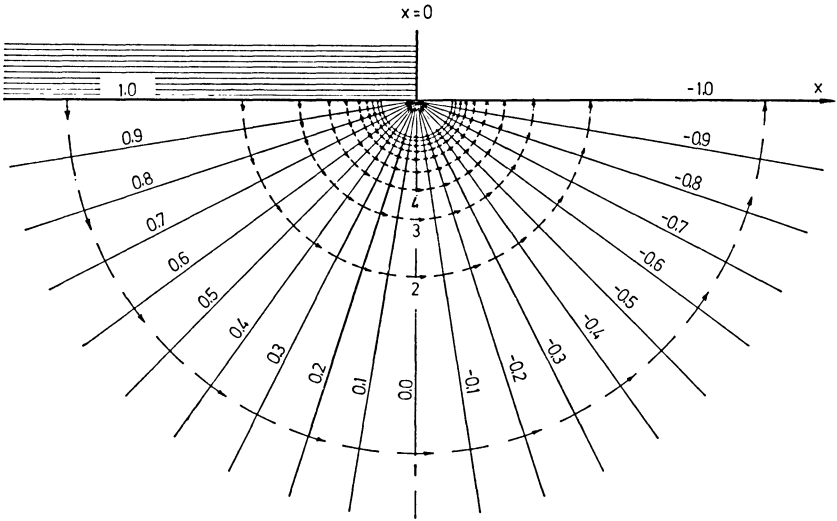


Fig. 11: Pressure lines (—) and current lines (- -) in a semi-infinite plate with the same initial value of the potential as given in the caption of Fig. 9

If, in addition hereto, width  $2B$  also increases to a relatively large value, the potential becomes

$$\lim_{H, B \rightarrow \infty} V = (-2V_0/\pi) \int_0^\infty \sin \lambda x \exp(-\lambda z) d\lambda/\lambda = (-2V_0/\pi) \arctan(x/z). \tag{36}$$

Hence the equipotential- and pressure-lines are rays passing through the origin  $(0, 0)$  and having identical angular distances. The current lines can readily be derived from the magnitude of the potential gradient. Thus,

$$|q(x, z)| = \sigma |\text{grad } V| = 2\sigma V_0/(\pi \sqrt{x^2 + z^2}). \tag{37}$$

Accordingly the current lines are semi-circles around the origin  $(0, 0)$  with radii as given below

$$R = \sqrt{x^2 + z^2} = 2\sigma V_0/[\pi q(x, z)]. \tag{38}$$

Eqs. (36) and (37) and Fig. 11 are found to be very useful in predicting the mean hydraulic conductivity of the subsurface earth. If the pressure height  $h=2V_0$  of the water in the reservoir is known and if a real estimate of the amount of infiltrating water can be made by measurements, the product  $\sigma q(x, z)$  can, in the most idealized cases, directly be read off or interpolated between the dashed lines of Fig. 11.

On the other hand, if the pressure height in the reservoir and the mean hydraulic conductivity of the ground beneath the reservoir are known, the expected flow of infiltrating water can readily be predicted by the use of Fig. 11.

#### 4. The Potential Distribution in a Rectangular Conductive Plate Consisting of a Number of Domains, Each of them Having Different Conductivity

The theory developed for the determination of the potential distribution in a homogeneous conductive plate can be extended to two-dimensional analogs consisting of a number of horizontally bounded domains, each of which has different electric or hydraulic conductivity.

For this purpose, let the source of the current  $I$  be located at any point of the multilayer analog (Fig. 12) so that in each of the different domains, GREEN's function is of a similar form as given in eq. (2) or (3). But the constant coefficients of the series vary from domain to domain depending on conductivity and thickness of the concerned domain. Thus,

$$V_j = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \cos \lambda(x+B) [a_j \exp(-\lambda z) + b_j \exp(\lambda z)] \} \quad (39)$$

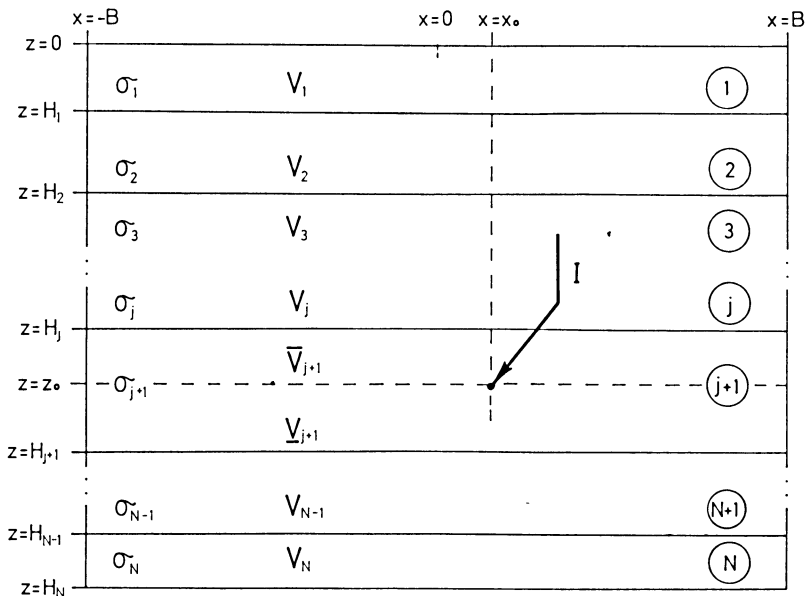


Fig. 12: Illustration of notations

where again

$$\lambda = k\pi/(2B).$$

At the transition  $H_j$  between domain  $j$  and domain  $j+1$  the continuity equation

$$(V_j = V_{j+1})|_{z=H_j} \quad (40)$$

is to be satisfied.

Substitution of eq. (39) in eq. (40) yields

$$a_j - a_{j+1} + (b_j - b_{j+1}) \exp(2\lambda H_j) = 0. \quad (41)$$

A second system of equations is obtained from the refraction law of current, density

$$(\sigma_j \partial V_j / \partial z = \sigma_{j+1} \partial V_{j+1} / \partial z)|_{z=H_j} \quad (42)$$

where it has been assumed that the source  $(x_0, z_0)$  is not located directly at any of the transitions  $H_j$ . Thus,

$$\sigma_j a_j - \sigma_{j+1} a_{j+1} = (\sigma_j b_j - \sigma_{j+1} b_{j+1}) \exp(2\lambda H_j). \quad (43)$$

At least the current divergence equation

$$(\partial \bar{V}_j / \partial z - \partial \underline{V}_j / \partial z = \sigma_j^{-1} I \delta(x - x_0))|_{z=z_0 \neq H_j, H_{j-1}} \quad (44)$$

corresponding to eq. (12), will yield

$$\begin{aligned} (\underline{a}_j - \bar{a}_j) \exp(-\lambda z_0) - (\underline{b}_j - \bar{b}_j) \exp(\lambda z_0) = \\ = I \cos \lambda(x_0 + B) / (\sigma B \lambda). \end{aligned} \quad (45)$$

If the source is located directly at one of the transitions  $H_j$  between two successive domains of different conductivity, eqs. (24) and (26) reduce to the following one single equation

$$(\sigma_j \partial V_j / \partial z - \sigma_{j+1} \partial V_{j+1} / \partial z = I \delta(x - x_0))|_{z=z_0=H_j} \quad (46)$$

Upon substituting eq. (39) in eq. (46),

$$\begin{aligned} (\sigma_{j+1} a_{j+1} - \sigma_j a_j) \exp(-\lambda H_j) - (\sigma_{j+1} b_{j+1} - \sigma_j b_j) \exp(\lambda H_j) = \\ = I \cos \lambda(x_0 + B) / (B \lambda) \end{aligned} \quad (47)$$

is obtained.

The system of eqs. (41), (43) and (45) or (46) contains as many linearly independent equations as unknown coefficients  $a_j$  and  $b_j$ . Hence the boundary value problem of the conductive multilayer analog can uniquely be solved.

Depending on the number of domains of different conductivity, the difficulties concerning the numerical calculation of the potential distribution become excessively great. However, in model geoelectrics and model hydrology, one is often concerned with the relatively simple two- or three-layer cases. For these the potential distribution can rapidly be determined by the use of a digital computer.

### Three-Layer Analogs

In the case of a geoelectrical or hydraulic three-layer problem, the deepest domain is generally assumed to extend to infinite depth. When the current  $I$  is fed into the analog at the source  $(x_0, 0)$  on the upper boundary, the potentials  $V_1$ ,  $V_2$  and  $V_3$ , corresponding to the three different domains, are given by

$$V_j = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \cos \lambda(x+B) [a_j \exp(-\lambda z) + b_1 \exp(\lambda z)] \} \quad (39)$$

where

$$j=1, 2, 3.$$

The coefficients  $a_j$  and  $b_j$  are found to be

$$a_1 = b_1 + Q = Q[K_0(\lambda) + 1] \quad (48)$$

$$b_1 = QK_0(\lambda) \quad (49)$$

$$a_2 = b_2 \exp(2\lambda H_2)/k_2 \quad (50)$$

$$b_2 = [b_1(\exp(2\lambda H_1) + 1) + Q] / [\exp(2\lambda H_1) + \exp(-2\lambda H_2)/k_2] \quad (51)$$

$$a_3 = 2a_2\sigma_2/(\sigma_3 + \sigma_2) \quad (52)$$

$$b_3 = 0 \quad (53)$$

where

$$Q = I \cos \lambda(x_0 + B) / (\sigma_1 B \lambda) \quad (54)$$

$$K_0(\lambda) = [k_1 \exp(-2\lambda H_1) + k_2 \exp(-2\lambda H_2)] / [1 - k_1 \exp(-2\lambda H_1) - k_2 \exp(-2\lambda H_2) + k_1 k_2 \exp(-2\lambda(H_2 - H_1))] \quad (55)$$

$$k_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (56)$$

$$k_2 = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_2 + \sigma_3). \quad (57)$$

The potential  $V_1$  of the upper domain is therefore

$$V_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \cos \lambda(x+B) \cos \lambda(x_0+B) \times \\ \times [(b_1 + Q) \exp(-\lambda z) + b_1 \exp(\lambda z)] \}.$$

By substitution of eqs. (49) and (54) the above equation becomes

$$V_1 = I / (\sigma_1 B) \sum_{k=1}^{\infty} [ \cos \lambda(x+B) \cos \lambda(x_0+B) \times \\ \times [\exp(-\lambda z) + 2K_0(\lambda) \cosh \lambda z] / \lambda ] \quad (58)$$

where  $K_0(\lambda)$  is given by eq. (55).

By comparing eq. (58) with eq. (24) it can be recognized that the potential field in a multilayer is obviously composed of

(a) a "homogeneous" part  $V^0$  which is identical to the potential in a homogeneous conductive plate with semi-infinite height  $H$ , and

(b) an "anomalous" part  $\hat{V}_1$  due to the refraction- and reflection-effects of the boundaries and transitions between successive domains of different conductivities.

$$V^0 = I / (\sigma_1 B) \sum_{k=1}^{\infty} [ \cos \lambda(x+B) \cos \lambda(x_0+B) \exp(-\lambda z) / \lambda ] \quad (59)$$

$$\hat{V}_1 = I / (\sigma_1 B) \sum_{k=1}^{\infty} [ \cos \lambda(x+B) \cos \lambda(x_0+B) K_1(\lambda) / \lambda ] \quad (60)$$

where

$$K_1(\lambda) = 2K_0(\lambda) \cosh \lambda z. \quad (61)$$

Formulas for the two layer case can be derived from the equations given above by substituting  $k_2 = 0$  in eq. (57).

It is very interesting to note that the "kernel function"  $K_0(\lambda)$  is of identically the same form as the kernel function of the potential anomaly as found by STEFANESCU [1930] while solving the fundamental geoelectrical boundary value problem of the conductive three-layer earth.

## 5. Illustration of the Practical Use of the Theory of the Two-Dimensional Conductive Multilayer Analogs in Model Geoelectrics and Model Hydrology

### (a) Equipotential Lines in a Two-Dimensional Two-Layer Analog with Symmetrical Configuration of Source and Sink

Let the conductivity  $\sigma_1$  of the upper half of the rectangular plate of width  $2B$  and height  $H=B$  be unit, and the conductivity  $\sigma_2$  of the lower half be equal to 20. Further, let the source of the unit current  $I$  be located on the upper boundary of the analog at the point  $(-B/2, 0)$  and the sink be located at  $(B/2, 0)$ .

The potential distribution as shown in Fig. 13 has been numerically calculated by means of eq. (58) when the difference  $\cos \lambda(x_0+x) - \cos \lambda(x_0-x)$  has been substituted for the product  $\cos \lambda(x+B) \cos \lambda(x_0+b)$  and when the conductivity of the domain beneath the second layer has been set equal to zero. According to eq. (22), only odd values of  $k$  have been used for summing up the series.

In Fig. 14 the inverse case is shown. The conductivity of the upper half of the analog is unit as before, but the conductivity of the lower half is only equal to  $1/20$ .

It can obviously be seen from the figures that the potential distribution in the area near to the transition line is governed by the law of refraction: The equipotential lines penetrating the transition line are bent towards the normal in the first case and bent away from the normal in the second case.

### (b) Calculation of Apparent Resistivity of a Two- or Three-Layer Analog with a Schlumberger Electrode Configuration

The apparent resistivity  $\rho_s$  of a multilayer analog with a SCHLUMBERGER electrode configuration is defined by the equation

$$\rho_s = \rho_1 \left[ 1 + \frac{\partial \hat{V}_1 / \partial x}{\partial V^0 / \partial x} \Big|_{x=z=0} \right] \quad (62)$$

where the resistivity  $\rho_1$  is given by the reciprocal value of the conductivity  $\sigma_1$ .  $\hat{V}_1$  represents the "anomalous" part and  $V^0$  the "homogeneous" part of the potential at the upper boundary.

In the case of a three-layer analog with symmetrical configuration of sink and source (Fig. 4), the derivatives in the  $x$ -direction are obtained as

$$(\partial V^0 / \partial x)|_{x=z=0} = (-2I \rho_1 / B) \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \sin \lambda x_0 \quad (63)$$

$$(\partial \hat{V}_1 / \partial x)|_{x=z=0} = (-4I \rho_1 / B) \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \sin \lambda x_0 K_0(\lambda). \quad (64)$$

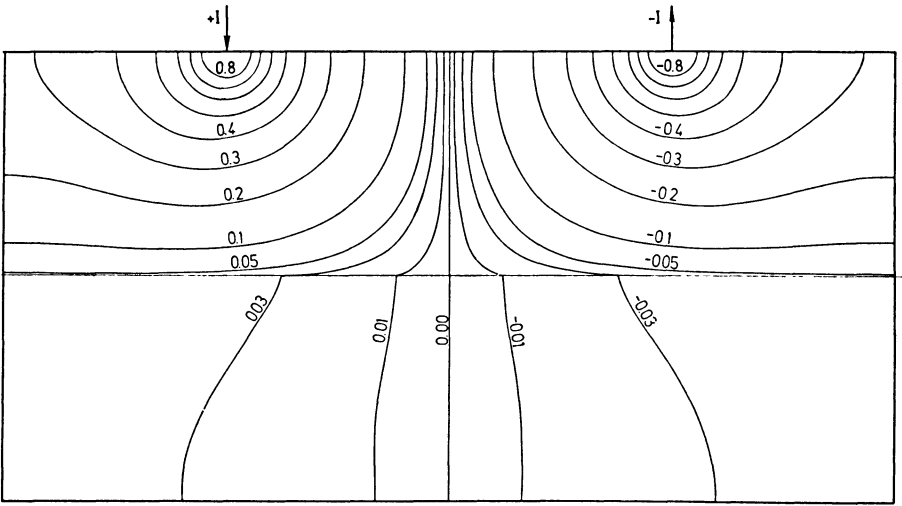


Fig. 13: Equipotential lines in a two layer analog of width  $2B$  and height  $H=B$ . The conductivity of the upper half is unit, and the conductivity of the lower half is equal to 20. The source of the unit current  $I$  is located at  $(-B/2, 0)$ , and the sink located at  $(+B/2, 0)$

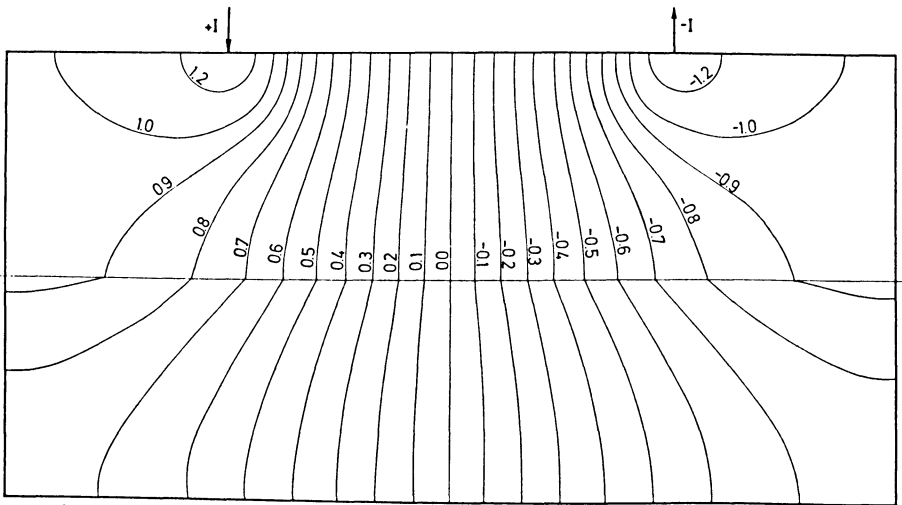


Fig. 14: Equipotential lines in a two layer analog similar to that shown in Fig. 13 but with only 1/20 as conductivity of the lower half



On calculating the apparent resistivity it has been found that it does not only depend on the conductivity and thickness of the several domains but also on the width  $2B$  of the analog. However, this difficulty can be overcome, when it is possible to simulate infinite extensions of the lateral boundaries. This can be done, for example, by the help of special resistance network termination strips as suggested by KARPLUS [1958]. Then the eqs. (63) and (64) can be substituted by the following integrals

$$(\partial V^0/\partial x)|_{x=z=0} = (-2I\rho_1/\pi) \int_0^\infty \sin \lambda x_0 d\lambda = -2I\rho_1/(\pi x_0) \quad (65)$$

$$(\partial \hat{V}_1/\partial x)|_{x=z=0} = (-4I\rho_1/\pi) \int_0^\infty \sin \lambda x_0 K(\lambda) d\lambda. \quad (66)$$

Hence the apparent resistivity of a three layer analog with a SCHLUMBERGER electrode arrangement is obtained as below

$$\rho_s = \rho_1 \left[ 1 + 2x_0 \int_0^\infty \sin \lambda x_0 K_0(\lambda) d\lambda \right]. \quad (67)$$

The integral can not be evaluated analytically but can rapidly be computed with the help of numerical integration or series expansion method by the use of an electronic computer.

In the two-layer apparent resistivity diagram as shown in Fig. 15, the ratio  $\rho_s/\rho_1$  is plotted against  $x_0/H_1$ . The ratio of the resistivity  $\rho_2$  of the second layer to the resistivity  $\rho_1$  of the first layer is the curve parameter.

In the three-layer case the number of free parameters is already relatively large. Therefore in practice, the ratio of the thicknesses  $(H_2 - H_1)/H_1$  of the first and second layers is usually chosen to be the curve parameter. Thus, for each ratio of resistivity  $\rho_3$  of third layer to resistivity  $\rho_2$  of second layer, a separate set of apparent resistivity curves is to be drawn.

In Fig. 16 three-layer apparent resistivity curves of the "maximum type" with  $\rho_1=1$ ,  $\rho_2=3$ ,  $\rho_3=0$ , and of the "uniformly increasing type" with  $\rho_1=1$ ,  $\rho_2=3$ ,  $\rho_3=\infty$ , are shown. On the other hand, curves of the "minimum type" with  $\rho_1=1$ ,  $\rho_2=1/3$ ,  $\rho_3=\infty$ , and of the "uniformly decreasing type" with  $\rho_1=1$ ,  $\rho_2=1/3$ ,  $\rho_3=0$ , are presented in Fig. 17.

The two- and three-layer apparent resistivity curves of the two-dimensional analog are of a qualitatively similar form as the well known two- and three-layer apparent resistivity curves used for the interpretation of geoelectrical four point probe measurements. Hence it is obvious that the two-dimensional analog is a worthy tool for demonstration of the typical aspects of the two- and three-layer cases of geoelectrical deep sounding.

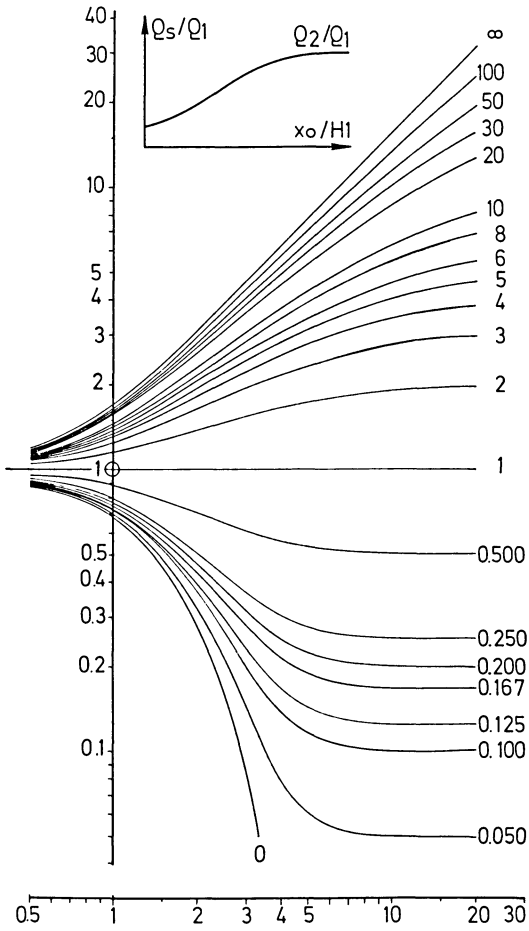


Fig. 15: Two-layer apparent resistivity curves. Resistivity and thickness of the upper layer are unit. Resistivity of the second layer is variable

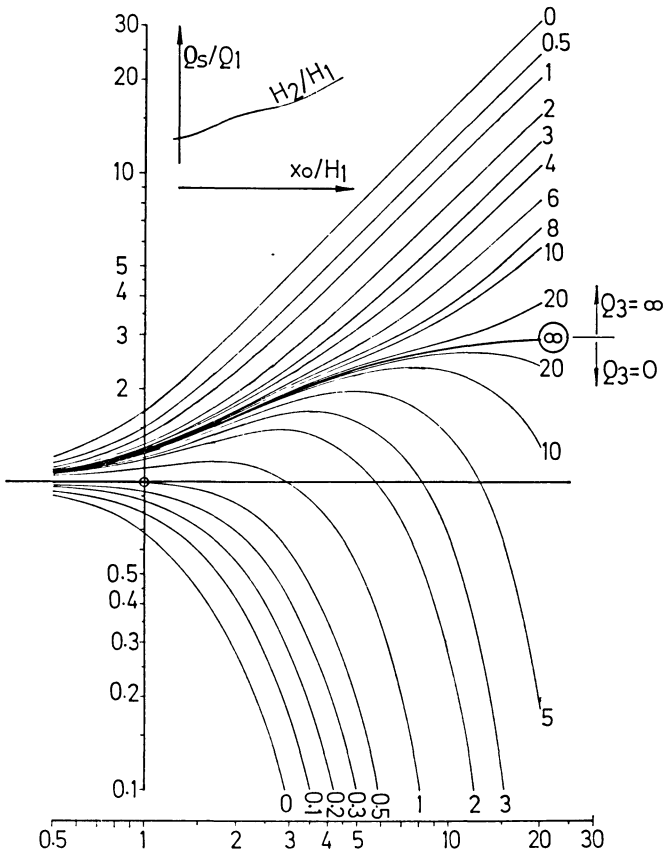


Fig. 16: Three-layer apparent resistivity curves. Resistivity and thickness of the first layer are normalized as unit. Resistivity of second is three times that of the first. Thickness of third layer is assumed as infinite. Thickness of the second layer is variable

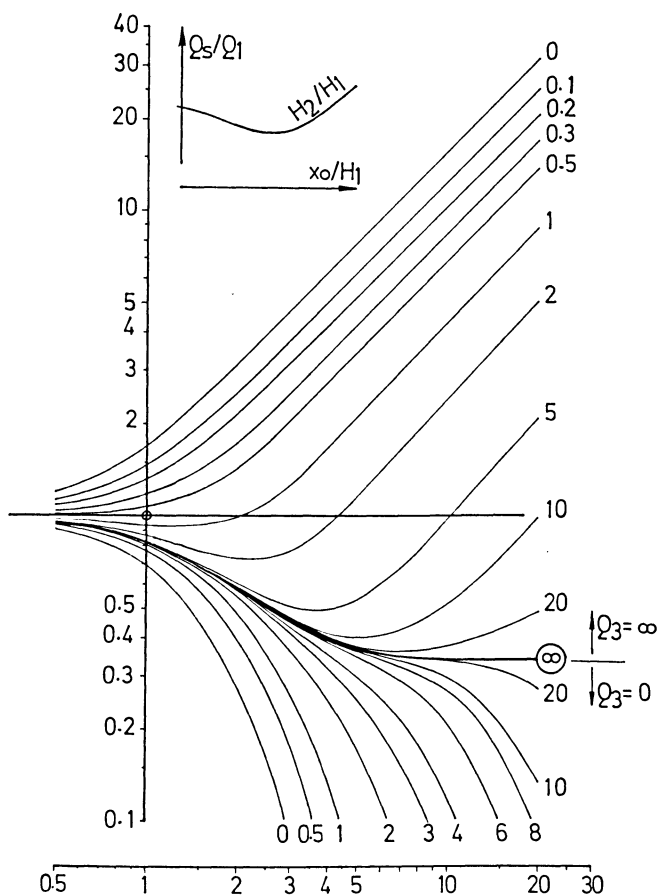


Fig. 17: Three-layer apparent resistivity curves for the same conditions as given in the caption of Fig. 15, but with resistivity of second layer only one third that of the first

*(c) Pressure Lines of Ground Water in a Layered Ground Beneath the Wall of a Reservoir*

As a final example for the practical application of the theory of the potential distribution in a multilayer model, an analog similar to that given in Fig. 7 but consisting of two horizontally bounded domains of different hydraulic conductivities will now be considered.

Let the conductivity of the first domain ( $0 \leq z \leq H_1$ ) be  $\sigma_1$  and of the second domain ( $H_1 \leq z \leq H_2$ ) be  $\sigma_2$ . Further, let the potential on the left half of the upper boundary by  $V_0$  and on the right half be  $-V_0$ .

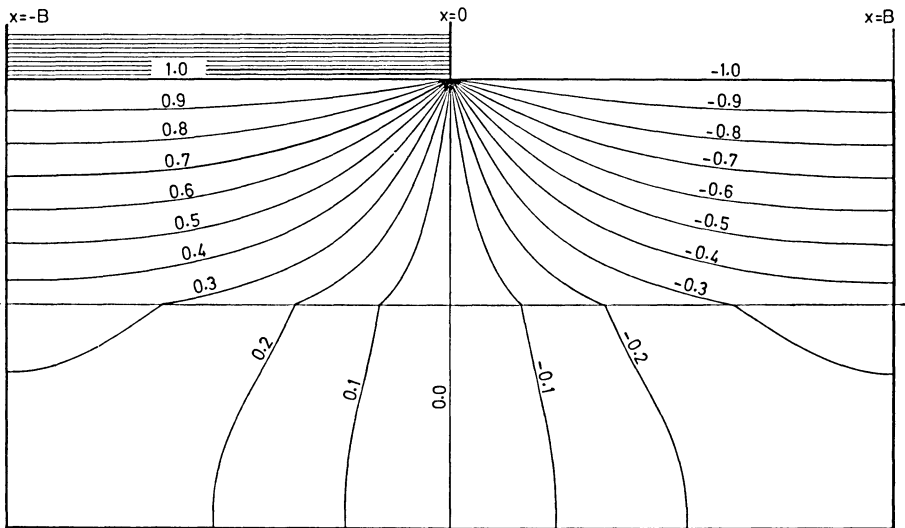


Fig. 18: Equipotential lines in an analog as discussed in Fig. 10 but with conductivity of the lower half four times that of the upper half

The potential field in the two domains, which is an exact analogy of the underground water pressure field, is determined by the following equations

$$V_1 = (-2V_0/B) \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} [\sin \lambda x [\exp(-\lambda z) + C_1(\lambda)]/\lambda] \quad (68)$$

$$V_2 = (-2V_0/B) \sum_{\substack{k=1 \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} [\sin \lambda x C_2(\lambda)/\lambda] \quad (69)$$

where

$$C_1(\lambda) = 2C_0(\lambda) \sinh \lambda z \quad (70)$$

$$C_2(\lambda) = [\exp(-\lambda H_1) + 2C_0(\lambda) \sinh(\lambda H_1) \cosh \lambda(H_2 - z)] / \cosh \lambda(H_2 - H_1) \quad (71)$$

$$C_0(\lambda) = [k_1 \exp(-2\lambda H_1) + \exp(-2\lambda H_2)] / [1 + k_1 \exp(-2\lambda H_1) + \exp(-2\lambda H_2) + k_1 \exp(-2\lambda(H_2 - H_1))] \quad (72)$$

$$k_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2).$$

In Fig. 18 the potential lines are shown for an analog of width  $2B$  and height  $H=B$ , with conductivity of the lower half four times that of the upper half, and with positive

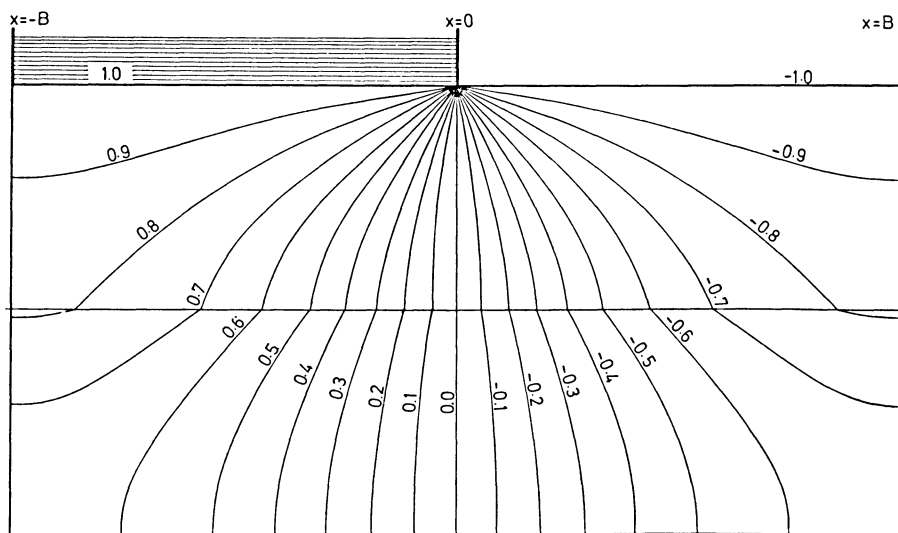


Fig. 19: Equipotential lines in an analog as discussed in Fig. 10 but with conductivity of the lower half only one fourth that of the upper half

unit potential on the left half and negative unit potential on the right half of the upper boundary of the analog. It can readily be recognized from the figure that the pressure lines near the transition line are drawn into the more conductive medium so that they are bent towards the normal of the interface.

On the other hand, when the hydraulic conductivity of the lower domain is less than that of the upper domain, the equipotential lines in the upper half are bent towards the normal while the equipotential lines in the lower half are bent away from the normal to the interface as shown in Fig. 19.

## 6. Simulation of Continuous Multilayer Potential Fields by Resistance Network Analogs

The continuous conductive analogs simulate the continuous original field by means of a continuous electric analog field. It is shown by LIEBMANN [1950] that a continuous electric field can be replaced with advantage by a discrete equivalent network consisting of ohmic resistors. The application of resistance network analogs leads directly to the solution of the potential differential equation in two or three dimensions.

Variations in field properties are readily simulated by varying the magnitudes of the network resistors in a suitable manner. In order to receive the desired accuracy of measurement different net spaces may be used in different domains of the field under study [LIEBMANN 1954]. Moreover, the network boundaries can be extended to infinity by the use of termination strips as suggested by KARPLUS [1958]. Hence the resistance network analog is far more flexible in its application than the continuous conductive analogs.

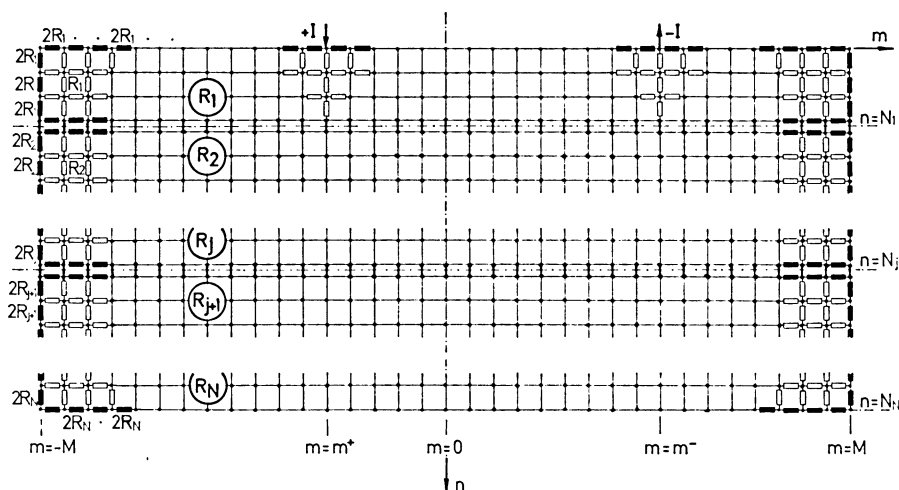


Fig. 20: Resistance network analog corresponding to the continuous conductive multilayer analog as sketched in Fig. 12. Magnitudes of the resistors on the boundaries and transitions (dark) are twice that of the (light) resistors connecting interior points

As electrical analog for stationary potential- and current-fields in a layered ground, a network with horizontally bounded domains, each having identical resistors, is adequate.

The potential distribution in such a network is, for a porous underground, a more accurate analogy than the continuous conductive models, and in practice, it is very useful for the demonstration of geoelectrical resistivity methods and of hydraulic underground water flow in an aquifer.

Based on the theory given by JELITTO [1969], the expression for the potential  $V_j$  at a node point  $(m, n)$ , located in the domain  $j$ , can be found after suitable modification of the boundary and transition conditions. The general form of the potential is thus

$$V_j = (R_1 I / 2M) \sum_{k=1}^{2M-1} [\cos \beta(M+m) \cos \beta(M+m_0) K_j(\varphi) / \sinh \varphi] \quad (73)$$

where

$$\beta = k\pi / (2M) \quad (74)$$

$$\varphi = \text{arcosh}(2 - \cos \beta). \quad (75)$$

The kernel functions  $K_j(\varphi)$  are determined by the reflection coefficients and the thicknesses of the several domains of the multilayer network analog.

It is very interesting to note that, for three-layer resistance network analogs, the kernel function  $K_0(\varphi)$  is of identically the same form as the kernel function of the potential in a continuous conductive analog as given by eq. (55), when  $\exp(\varphi)$  has been substituted for  $\exp(\lambda)$ , and the discrete coordinates  $(m, n)$  have been substituted for  $(x, z)$ .

The potential distribution in a finite multilayer resistance network analog as given by eq. (73), is found to be accurately approximated by solutions of the form (39).

In the limiting case, as the value of  $M$  is extended to infinity, the expression for the potential becomes

$$V_j = (R_1 I / 2\pi) \int_0^{2\pi} [\cos \beta(M+m) \cos \beta(M+m_0) K_j(\varphi) d\beta / \sinh \varphi]. \quad (76)$$

Proceeding similarly as in the case of derivation of eq. (25), the potential field  $V^0$ , due to a current point source located at  $(-m_0, 0)$  and a sink located at  $(m_0, 0)$  on the upper boundary of a homogeneous network analog, is obtained as below

$$V^0 = (R_1 I / 2\pi) \int_0^{2\pi} \{[\cos \beta(m_0+m) - \cos \beta(m_0-m)] \exp(-\varphi n) d\beta / \sinh \varphi\}. \quad (77)$$

According to JELITTO-BORM [1970b] the very simple logarithmic formula (26) is an excellent approximation of the above integral. With the help of a second orthogonal transformation, the theory of the potential distribution in a two-dimensional multilayer network can directly be extended to three-dimensional resistance multilayer analogs [BORM-JELITTO 1972].

In a three-dimensional rectangular multilayer resistance network, the potential field  $V_j$ , due to a current source  $(l_0, m_0, 0)$  located on the upper surface of the analog, is found to be

$$V_j = \frac{R_1 I}{4(\delta_{k,0} + 1)(\delta_{l,0} + 1) LM} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{i=0}^{2L-1} [\cos \beta(M+m) \cos \beta(M+m_0) \times \cos \gamma(L+l) \cos \gamma(L+l_0) K_j(\psi) / \sinh \psi] \quad (78)$$

where

$$\beta = k\pi / (2M) \quad (79)$$

$$\gamma = i\pi / (2L) \quad (80)$$

$$\psi = \text{arcosh}(3 - \cos \beta - \cos \gamma) \quad (81)$$

$$\delta_{k,0} = \begin{cases} 1; & k=0 \\ 0; & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{Kronecker's } \delta\text{-symbol.} \quad (82)$$



The potential distribution in the three-dimensional multilayer network analog is approximately the same as the potential distribution in a rectangular, continuous solid conductive multilayer analog. This potential can easily be derived from the theory discussed in the preceding sections by means of a second Fourier transformation as will be shown in the following final section.

### 7. Green's Function of a Three-Dimensional Rectangular Conductive Bar Consisting of a Number of Horizontally Bounded Domains Each of them Having Different Conductivity

For the purpose of investigating the potential distribution in a three-dimensional rectangular conductive bar consisting of a number of horizontally bounded domains each of which has different conductivity, let the current  $I$  enter the analog on the upper surface at the source point  $(x^+, y^+, 0)$  and leave it at the sink point  $(x^-, y^-, 0)$ , as indicated in Fig. 21.

After all what has been thoroughly discussed in the foregoing sections, it is not very difficult to prove that general solutions of the following three-dimensional Poisson's equation

$$\nabla^2 V_j = \sigma^{-1} I [\delta(x-x^+) \delta(y-y^+) \delta(z-z^+) - \delta(x-x^-) \delta(y-y^-) \delta(z-z^-)] \quad (83)$$

where  $z^+ = z^- = 0$ , are given by a double sum of eigenfunctions of the sort

$$V_j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \cos \lambda(x+B) \cos \mu(y+C) \times [a_j \exp(-vz) + b_j \exp(vz)] \} \quad (84)$$

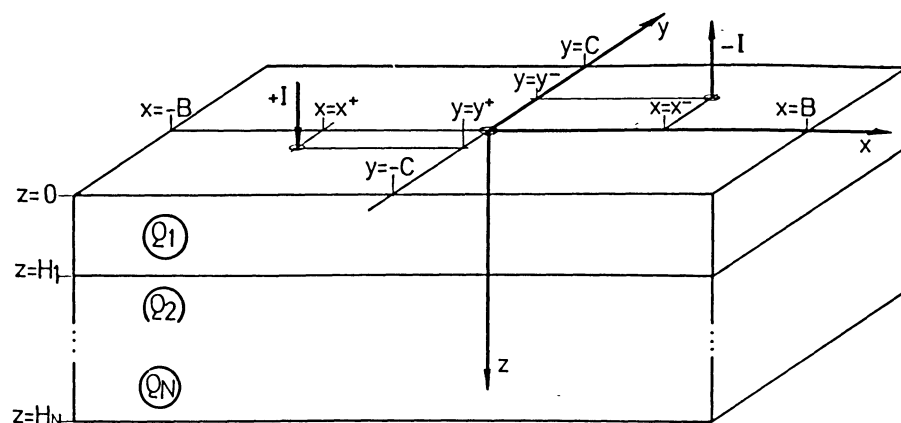


Fig. 21: Illustration of geometry and notations

where

$$\lambda = k\pi/(2B) \quad (85)$$

$$\mu = i\pi/(2C) \quad (86)$$

$$v = (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}. \quad (87)$$

In a like manner as has been shown in Section 4, the coefficients  $a_j$  and  $b_j$  are to adjust so that the potential distribution satisfies the boundary- and transition conditions (40) and (42) as well as the GAUSS-GREEN'S current divergence equation which for this special case is given by

$$\begin{aligned} &(-\partial V_1/\partial z = \\ &\sigma^{-1} I [\delta(x-x^+) \delta(y-y^+) - \delta(x-x^-) \delta(y-y^-)])|_{z=z^+ = z^- = 0}. \end{aligned} \quad (88)$$

Proceeding quite analogously as in the case of derivation of eq. (18), both sides of eq. (88) are to be multiplied by  $\cos \lambda'(x+B) \cos \mu'(y+C)$ , where  $\lambda' = \kappa \pi/(2B)$ ,  $\mu' = \kappa' \pi/(2C)$ , and  $\kappa, \kappa' = 0, 1, 2, \dots$ , and to be integrated over the  $x$ - $y$ -plane of the model.

Hence, for example, the potential distribution  $V_j$  in a three-dimensional conductive analog, consisting of a layer of conductivity  $\sigma_1$  and thickness  $H_1$ , overlying a second layer with conductivity  $\sigma_2$  and thickness  $(H_2 - H_1)$ , underlain by a third layer of conductivity  $\sigma_3$  and infinite depth, is obtained as below

$$V_j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \cos \lambda(x+B) \cos \mu(y+C) [a_j \exp(-vz) + b_j \exp(vz)] \}$$

where

$$j = 1, 2, 3$$

$$a_1 = b_1 + Q = Q[K_0(v) + 1] \quad (88)$$

$$b_1 = QK_0(v) \quad (89)$$

$$a_2 = b_2 \exp(2vH_2)/k_2 \quad (90)$$

$$b_2 = (b_1 [\exp(2\lambda H_1) + 1] + Q) / (\exp(2\lambda H_1) + \exp(-2\lambda H_2)/k_2) \quad (91)$$

$$a_3 = 2a_2 \sigma_2 / (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$b_3 = 0$$

$$Q = I [\cos \lambda(x^+ + B) \cos \mu(y^+ + C) - \cos \lambda(x^- + B) \cos \mu(y^- + C)] / [4(1 + \delta_{k,0})(1 + \delta_{i,0})\sigma_1 BC v] \quad (92)$$

$$\delta_{k,k'} = \begin{cases} 1; & k = k' \\ 0; & k \neq k' \end{cases} \text{ KRONECKER'S } \delta\text{-symbol} \quad (93)$$

$$K_0(v) = [k_1 \exp(-2vH_1) + k_2 \exp(-2vH_2)] / [1 - k_1 \exp(-2vH_1) - k_2 \exp(-2vH_2) + k_1 k_2 \exp(-2v(H_2 - H_1))] \quad (94)$$

and where  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ , and  $v$  are given by eqs. (56), (57), (85), (86), and (87).

In practice in model geoelectrics and model hydrology, one is often concerned with the special case when  $\sigma_3$  equals zero or tends to infinity, so that  $k_2$  can be set equal to  $+1$  or  $-1$ , respectively.

*Asymptotic Behaviour of the Potential Distribution due to Relatively Large Lateral Extensions of the Analog*

Before going over to the limiting case of laterally infinite extensions of the analog, it is interesting to consider the potential distribution along the  $x$ -axis due to a symmetrical arrangement of electrodes with source at  $(-x_0, 0, 0)$  and sink at  $(x_0, 0, 0)$  on the upper surface. In this case the general form of eq. (84) converts to

$$V_j = \frac{I}{4(1 + \delta_{i,0})\sigma_1 BC} \times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ i, \text{ even} \\ k, \text{ odd}}}^{\infty} \{[\cos \lambda(x_0 + x) - \cos \lambda(x_0 - x)] K_j(v, z)/v\} \quad (95)$$

where

$$j = 1, 2, 3$$

$$K_1(v, z) = \exp(-vz) + 2K_0(v) \cosh vz \quad (96)$$

$$K_2(v, z) = a'_2 \exp(-vz) + b'_2 \exp(vz) \quad (97)$$

$$K_3(v, z) = a'_3 \exp(-vz) \quad (98)$$

$$a'_2 = b'_2 \exp(2vH_2)/k_2 \quad (99)$$

$$b'_2 = [K_0(v) \exp(2v H_1) + K_0(v) + 1] / [\exp(2v H_1) + \exp(-2v H_2) / k_2] \quad (100)$$

$$a'_3 = 2 a'_2 \sigma_2 / (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (101)$$

and where  $K_0(v)$  and  $k_2$  are determined by eqs. (94) and (56).

Within the limit of relatively large lateral extensions of the three-dimensional analog, GREEN'S function changes from the double sum of eq. (95) to the double integral

$$\lim_{B, C \rightarrow \infty} V_j = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I}{\sigma_1 \pi^2 (1 + \delta_{\mu, 0})} \times \int_0^\infty \left( \int_\epsilon^\infty [\cos \lambda(x_0 + x) - \cos \lambda(x_0 - x)] K_j(v, z) d\lambda / v \right) d\mu. \quad (102)$$

Substituting

$$\lambda = v \sin \vartheta$$

$$\mu = v \cos \vartheta$$

$$v^2 = \lambda^2 + \mu^2$$

$$d\lambda / d\vartheta = \mu$$

$$d\mu / d\vartheta = \lambda$$

$$dv / d\mu = \mu / v$$

in eq. (102) yields

$$\lim_{B, C \rightarrow \infty} V_j = \frac{I}{\sigma_1 \pi^2} \int_0^\infty \left( \int_0^\pi [\cos(v(x_0 + x) \sin \vartheta) - \cos(v(x_0 - x) \sin \vartheta)] d\vartheta \right) \times K_j(v, z) dv. \quad (103)$$

According to GRÖBNER-HOFREITER [1966] the interior integral can exactly be evaluated so that eq. (102) is finally left in the form

$$\lim_{B, C \rightarrow \infty} V_j = \frac{I}{\sigma_1 \pi} \int_0^\infty [J_0(v(x_0 + x)) - J_0(v(x_0 - x))] K_j(v, z) dv \quad (104)$$

where  $J_0$  is the BESSEL function of zero order.

Eq. (104) represents the general solution for the potential distribution in a laterally unbounded conductive multilayer earth model with a symmetrical arrangement of current source and sink on the upper surface of the model.

For example, the potential in the first layer of the three-layer earth is given by

$$\lim_{B, C \rightarrow \infty} V_1 = \frac{I}{\sigma_1 \pi} \int_0^{\infty} \{J_0(v(x_0+x)) - J_0(v(x_0-x))\} \times \quad (105)$$

$$\times [\exp(-vz) + 2K_0(v) \cosh(vz)] dv.$$

Introducing the WEBER-LIPSCHITZ's integral transformation

$$(x^2 + z^2)^{-1/2} = \int_0^{\infty} J_0(vx) \exp(-vz) dv \quad (106)$$

eq. (105) can be rewritten as

$$\lim_{B, C \rightarrow \infty} V_1 = \frac{I}{\sigma_1 \pi} \left\{ [(x_0+x)^2 + z^2]^{-1/2} - [(x_0-x)^2 + z^2]^{-1/2} + \right. \quad (107)$$

$$\left. + 2 \int_0^{\infty} [J_0(v(x_0+x)) - J_0(v(x_0-x))] K_0(v) \cosh(vz) dv \right\}$$

where the difference of the reciprocal radii represents the "homogeneous part"  $V^0$ , and the integral represents the "anomalous part"  $\hat{V}_1$  of the potential. The anomaly  $\hat{V}_1$  vanishes entirely in the case of a homogeneous semi-infinite ground as required by its definition.

#### *Computation of the Apparent Resistivity of a Laterally Unbounded Conductive Three-Layer Model*

According to the definition as given by eq. (62), the apparent resistivity  $\rho_s$  of the commonly used SCHLUMBERGER electrode-probe-arrangement is governed by

$$\rho_s = \rho_1 \left[ 1 + 2x_0^2 \int_0^{\infty} J_1(vx_0) K_0(v) v dv \right] \quad (108)$$

where  $J_1$  is the BESSEL function of first order, where  $K_0(v)$  is as before determined by eq. (94), and where  $\rho_1$  is the reciprocal value of the conductivity  $\sigma_1$ .

Eq. (108) enables the determination of the apparent resistivity  $\rho_s$  when the kernel function, denoted as STEFANESCU's function  $K_0(v)$ , is known. This may be done either

by expanding the integral into an infinite series, or by numerical integration, or by decomposition methods.

An extensive collection of theoretical standard apparent resistivity curves for a three-layer case, with the bottom layer extending to infinite depth, has been published by the Compagnie Générale de Géophysique [1955], and has been completed by a great number of additional standard curves presented recently by Rijkswaterstraat [1969].

It is of interest to note that the apparent resistivity, as given by eq. (108), exactly agrees with that expression, which, in a quite different way, could have been derived from the solution of the more complicated POISSON'S equation in polar coordinates, as was first shown by STEFANESCU [1930] in his fundamental theoretical work.

With these reflections, the extensive discussion on the solution of boundary value problems of either finite or infinite, either two- or three-dimensional, either continuous or discrete rectangular solid conductive multilayer analogs, is concluded. Of course, a great number of additional interesting and essential problems concerning geoelectrical or hydrological analogs might be found. In any case, most of them can be solved in a quite similar manner as has been discussed in the present paper.

### Acknowledgement

This study is a continuation of my thesis for doctorate, which was written under the guidance of Prof. Dr. Dr. h.c. K. JUNG at the Institute of Geophysics of Kiel University. I am primarily indebted to him and to Prof. Dr. R. J. JELITTO, now at the Institute of Theoretical Physics of Frankfurt University, for many helpful physical insights.

The investigation was carried out the Institute of Geophysics of Ruhr University Bochum. I am very grateful to its director, Prof. Dr. H. BAULE, for his advice and support. Thanks are also due to my colleagues of this institute, especially to T. N. GOWD, M.Sc., for critically reading the translation of the manuscript, and to Dr. P. OBERMANN of the Institute of Geology of Ruhr University for stimulating discussions concerning hydrological analog problems.

The numerical calculations were performed with the aid of a TR440 computer of the Rechenzentrum of Ruhr University Bochum.

### References

- BORM, G.: Untersuchungen an geoelektrischen Modellen. Diplomarbeit, Universität Kiel 1968
- BORM, G.: Ohmsche Netzwerke als Mehrschicht-Modelle für geoelektrische Widerstandsmessungen. Dissertation, Universität Kiel 1970

- BORM, G.: Zur Theorie eines Netzwerkmodelles für geoelektrische Analogmessungen. *Z. Geophys.* 38, 791—810, 1972
- BORM, G., and R. J. JELITTO: Zur Theorie dreidimensionaler ohmscher Netzwerke. *Arch. Elektrotechn.* 55, 296—300, 1972
- Compagnie Générale de Géophysique: Abaques de sondage électrique. *Geophys. Prosp.* 3, suppl. 3, 1955
- COWAN, E.: *Basic Electromagnetism*. Academic Press, New York 1968
- DE WIEST, R. J. M.: *Geohydrology*. Wiley Inc., New York 1965
- GRÖBNER, W., and N. HOFREITER: *Integraltafel, 2. Teil: Bestimmte Integrale*. Springer-Verlag, Wien 1966
- HELE-SHAW, H. S.: Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream-line motion under certain experimental conditions. *Trans. Inst. Nav. Arch.* 40, 21—46, 1898
- JELITTO, R. J.: Zur Theorie zweidimensionaler ohmscher Netzwerke. *Arch. Elektrotechn.* 53, 175—183, 1969
- JELITTO, R. J., and G. BORM: Die Potentialverteilung in einfachen ohmschen Netzwerken. *Arch. Elektrotechn.* 53, 246—256, 1970a
- JELITTO, R. J., and G. BORM: Zur Approximation der Potentialverteilung in leitenden Platten durch ohmsche Netzwerke. *Z. Angew. Phys.* 30, 189—193, 1970b
- JOHNSON, A. I.: Selected references on analog models for hydrologic studies, appendix F. *Proc. Symp. Transient Ground-Water Hydraulics*, Colorado State University, 1963
- KARPLUS, W. J.: *Analog simulation*. McGraw-Hill, New York 1958
- KOFOED, O.: The application of the kernel function in interpreting geoelectrical resistivity measurements. *Gebr. Bornträger*, Berlin 1968
- KUNETZ, G.: *Principles of direct current resistivity prospecting*. Gebr. Bornträger, Berlin 1966
- LIEBMANN, G.: Solution of partial differential equations with a resistance network analog. *Brit. J. Appl. Phys.* 1, 92—103, 1950
- LIEBMANN, G.: Resistance network analogues with unequal meshes or subdivided meshes. *Brit. J. Appl. Phys.* 5, 362—366, 1954
- MORSE, P. M., and H. FESHBACH: *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill Book Co., New York 1953
- POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y.: *Theory of ground water movement*. Princeton University Press, Princeton 1962

REBER, J. M.: Potential distribution in a rectangular semi-conductor bar for use with four point probe measurements. *Solid State Electronics* 7, 525—529, 1964

Rijkswaterstraat, The Netherlands: Standard graphs for resistivity prospecting. European Association of Exploration Geophysicists, The Hague 1969

STEFANESOU, S., and C. & M. SCHLUMBERGER: Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain a couches horizontales homogènes et isotropes. *J. Phys. et Rad.* 7, 132—140, 1930

Utzmann, R.: Die Anwendung von Modellen in der elektrischen Prospektion. *Freiberger Forschungshefte C60*, 86—101, 1959



## **Isostasie und Dichteverteilung in Kruste und oberem Mantel**

### **Isostasy and Density Distribution in the Crust and Upper Mantle**

Gewidmet Prof. Dr. Dr. h. c. KARL JUNG, verst. 28. 4. 1972

W. R. JACOBY, Frankfurt/Main<sup>1)</sup>

Eingegangen am 29. Dezember 1972

*Zusammenfassung:* Die Dichteverteilung in Kruste und oberem Mantel kann aus dem gemessenen Schwerfeld und aus der Annahme des isostatischen Druckausgleichs berechnet werden. Im rheologischen Modell von elastischer Lithosphäre und darunterliegender fließfähiger Asthenosphäre stehen die vertikalen Massensäulen nicht unabhängig voneinander im Gleichgewicht; wir schalten den wechselseitigen Einfluß aber weitgehend dadurch aus, daß wir viele und ausgedehnte Säulen betrachten. Um generalisierende Hypothesen über die Dichteverteilung zu vermeiden, berücksichtigen wir seismische Ergebnisse und nehmen an, daß Körper, die sich durch konstante seismische Geschwindigkeiten auszeichnen, auch konstante Dichten haben, nehmen aber keine bestimmte numerische Beziehung zwischen Dichte und Geschwindigkeit an. Die Dichteverteilung erhalten wir mit Hilfe der Ausgleichsrechnung durch Anpassung des Modellschwerfeldes an das gemessene, bzw. durch Druckausgleich in einer angenommenen Tiefe.

Die Anwendung beider Methoden der Dichteberechnung auf einen Querschnitt durch Nordamerika ergibt sehr ähnliche Dichten, wenn die Druckausgleichsfläche in der Asthenosphäre liegt. Innerhalb der Fehlergrenzen herrscht dort fast hydrostatischer Druck mit lateralen Abweichungen von nicht mehr als einigen 100 bar. Die Kruste allein ist nicht isostatisch ausgeglichen; die Tiefenvariationen der Asthenosphärenoberkante beeinflussen den Ausgleichszustand. Die deutlichsten Druckvariationen finden wir dort, wo auch die Dichte im oberen Mantel am stärksten variiert, ein Ergebnis, das für die Dynamik der Plattenbewegungen besonders wichtig ist.

*Abstract:* The density distribution in the crust and upper mantle can be calculated on the basis of the observed gravity field and by assuming isostatic equilibrium. Accepting the rheological model of an elastic lithosphere and a fluid asthenosphere below, we cannot regard the vertical columns of mass to be in equilibrium independently, however, we can greatly reduce their mutual influence by considering many columns of large horizontal extent. To avoid generalizing hypotheses about the density distribution, we make use of seismic results and assume bodies characterized by constant velocities to have constant

<sup>1)</sup> Prof. Dr. WOLFGANG R. JACOBY, Institut für Meteorologie und Geophysik der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, 6 Frankfurt/M., Feldbergstr. 47.

densities, too. However, we do not assume a specific velocity-density relation a priori. The density distribution is calculated by fitting the model gravity field to the observed one or by balancing the pressure at an assumed depth. The least-squares technique is applied.

Both methods, applied to a cross-section through North America, render very similar density distributions, if the depth of pressure compensation is assumed to be in the asthenosphere. We find within the error limits that the pressure at this depth is nearly hydrostatic; the lateral variations do not exceed a few 100 bars. Isostatic compensation is not complete at the bottom of the crust; the depth variations of the top of the asthenosphere do influence the state of equilibrium. The most prominent pressure variations occur together with the strongest density variations in the upper mantle, suggesting that the density contrast between the lithosphere and the asthenosphere is important for the dynamics of the plate movements.

### Einleitung: Das Problem der Isostasie

Die Massenverteilung in Kruste und oberem Mantel kann mit Hilfe der Annahme des isostatischen Ausgleichs berechnet werden. Dies hat man in der Vergangenheit unter Voraussetzung bestimmter Gesetzmäßigkeiten in der Dichteverteilung getan. Um generalisierende Hypothesen zu vermeiden, wird in diesem Aufsatz die seismisch bestimmte Struktur von Kruste und oberem Mantel in die Rechnung einbezogen. Ein Vergleich mit dem Schwerfeld kann dann etwas über die Natur des isostatischen Ausgleichszustandes aussagen. Zuvor aber muß der Begriff der Isostasie etwas näher betrachtet werden.

Es gibt in der Geophysik kaum einen verwirrenderen Begriff als den der Isostasie. Grob ausgedrückt, ist der Sachverhalt einfach: die sichtbaren topographischen Massen der Hochländer sind durch darunterliegende Massendefizite, die fehlenden Massen der Meere durch tiefere Massenüberschüsse ungefähr kompensiert; darauf weisen vor allem die Schweredaten hin. Diese Beschreibung ist aber keine genaue Definition der Isostasie. Physikalisch sinnvoller erscheint die Darstellung als Gleichgewichtsfigur eines Planeten in seinem eigenen Schwerfeld; dieser Gedanke geht auf AIRY [1855] zurück. Die Bezeichnung „Isostasie“ für den Gleichgewichtszustand hat DUTTON 1889 eingeführt:

“For this condition of equilibrium of figure, to which gravitation tends to reduce a planetary body, irrespective of whether it be homogeneous or not, I propose the name isostasy ... An isostatic earth, composed of homogeneous matter and without rotation, would be truly spherical ... But if the earth be not homogeneous—if some portions near the surface are lighter than others—then the isostatic figure is no longer a sphere or spheroid of revolution, but a deformed figure, bulged where the matter is light and depressed where it is heavy. The question which I propose is: How nearly does the earth’s figure approach to isostasy?”.

Allerdings reicht diese Definition der Isostasie nicht aus, die gestellte Frage zu klären; denn die Gleichgewichtsfigur im eigenen Schwerfeld kann nur definiert werden, wenn neben der Dichteverteilung im Erdinnern auch das rheologische Verhalten bekannt ist. Nehmen wir z.B. den Extremfall eines durch und durch viskosen Körpers an. Wirkt die Schwere allein, wird dieser Körper sein Gleichgewicht erst

erreichen, wenn er ein Rotationsphäroid ohne laterale Dichteinhomogenitäten wird. Alle Abweichungen von der Sphäroidform wären mit nichthydrostatischen Spannungen verbunden, also dynamisch, d. h. von Bewegungen begleitet, und würden demnach Störungen der Isostasie darstellen. Es ist klar, daß DUTTON nicht dieses rheologische Modell im Sinne hatte, denn er ließ im Gleichgewicht befindliche Dichteinhomogenitäten zu. Das andere rheologische Extrem ist der elastisch-feste Körper, bei dem Dichteinhomogenitäten und Abweichungen von der Sphäroidform von elastischen Spannungen getragen werden, begleitet von zeitlich unveränderlichen Deformationen. Die Figur dieses Körpers und die Dichteverteilung stehen nicht miteinander in Beziehung. Obwohl es sich um eine Gleichgewichtsfigur handelt, hat man den Begriff Isostasie jedoch nicht auf diesen Fall bezogen, sondern an eine Art Schwimmgleichgewicht gedacht.

Man sollte nicht einfach fragen, wie nahe die Erdfigur der Isostasie kommt, sondern welches rheologische Modell die tatsächliche Erdfigur in ihrer Beziehung zur Dichteverteilung erklärt. Dann erst kann man das Problem der nichtstatischen oder nichtisostatischen Abweichungen untersuchen.

Zur Verwirrung trägt bei, daß zur Durchführung isostatischer Reduktionen des Schwerefeldes verschiedene vereinfachende Hypothesen über die Dichteverteilung aufgestellt wurden. Die sich daraus ergebenden isostatischen Anomalien des Schwerefeldes deuten dann aber nicht nur auf Abweichungen von der Gleichgewichtsfigur hin, sondern auch auf Abweichungen der Rheologie und der Dichteverteilung von den angenommenen Modellen.

Die bekanntesten isostatischen Hypothesen sind in Abb. 1 schematisch dargestellt. Die ersten drei beruhen auf dem rheologischen Modell von festen frei verschiebbaren Säulen, die in einer flüssigen schwereren homogenen Masse schwimmen. Nur die angenommenen Dichteverteilungen sind verschieden. PRATT [1855] nimmt eine horizontale Grenzfläche an; unterhalb dieser Ausgleichsfläche ist die Masse homogen, oberhalb haben sich vertikale Säulen verschieden stark ausgedehnt, z. B. thermisch, und enthalten alle dieselbe Masse über der Flächeneinheit. AIRY [1855] nimmt vertikale Säulen etwa gleicher Dichte an, die verschieden tief in das Substratum eintauchen; die Fläche der Dichtediskontinuität ist das verstärkte Spiegelbild der Topographie; Berge haben „Wurzeln“. Dabei hat AIRY — so auch später PUTMAN [1895] und HEISKANEN [1931] — angenommen, daß nicht beliebig kleine Details der Topographie voneinander unabhängig im Gleichgewicht stehen und sich lokal in der Fläche der Dichtediskontinuität abbilden, sondern hat größere Säulen mit gemittelten Höhen betrachtet. HEISKANEN [1932] hat auch eine Kombination der Prattschen und der Airyschen Dichteverteilung vorgeschlagen. Zusätzlich hat DALY [1940] eine Dichteinversion in der Tiefe angenommen, die an der Kompensation der vertikalen Säulen in der Form von „Antiwurzeln“ teilnimmt.

Ein wesentlich anderes rheologisches Modell liegt der Hypothese der regionalen Isostasie von VENING-MEINESZ [1931] zugrunde. Hier schwimmt eine elastische ungebrochene Platte beliebiger Festigkeit auf einer dichteren Flüssigkeit; die Topo-

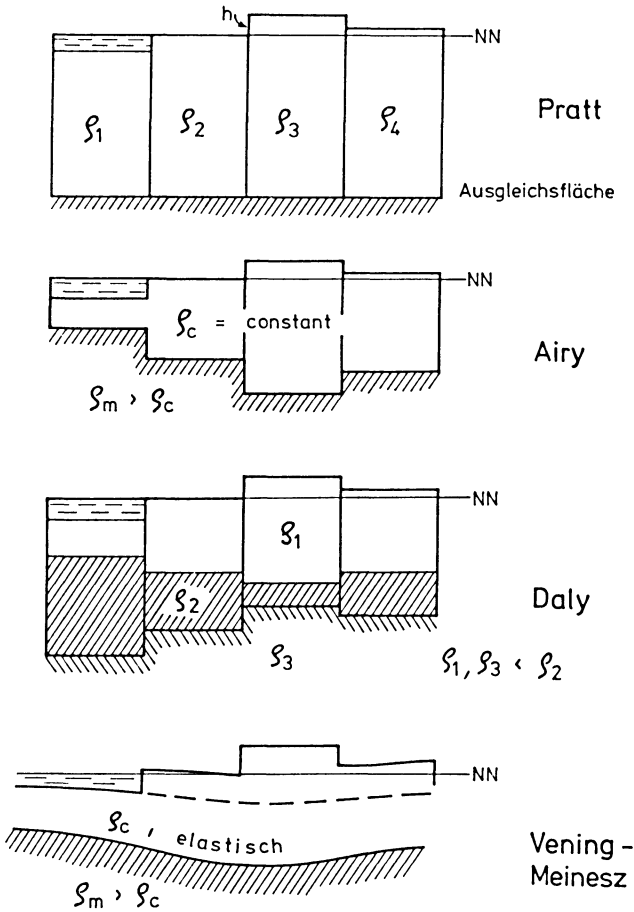


Abb. 1: Schematische Darstellung der wichtigsten isostatischen Hypothesen  
Schematic presentation of the most important isostatic hypotheses

graphie stellt aufgesetzte Lasten dar. Die von Scherspannungen getragene Durchbiegung der Platte verteilt die Kompensations- oder Auftriebsmassen seitlich. Die Dichteverteilung ist der Airyschen verwandt, nur gibt es keine frei verschiebbaren Säulen, die voneinander unabhängig im Gleichgewicht stehen.

Auf prinzipielle Ungenauigkeiten der isostatischen Reduktionen hat K. JUNG wiederholt hingewiesen [1932, 1938, 1939, 1971]. Die Reduktionen vernachlässigen nicht nur die Erdkrümmung, die Schwereunterschiede in der Erde und den Einfluß der Geoidundulationen, sondern sie verletzen auch die Grundannahme des Schwimmgleichgewichts, weil dabei die Potentialfläche, auf der hydrostatischer Druck herr-

schen sollte, ihre Lage und Form ändert. Schon 1939 hat K. JUNG außerdem vorgeschlagen, seismische Ergebnisse in die Überlegungen mit einzubeziehen: „Schon wegen der bekannten Vieldeutigkeit der Massenbestimmung ... können die Schwere-messungen allein nicht dazu ausreichen, Ausgleichstiefen und Dichteunterschiede zu bestimmen ... Nur HEISKANEN ... greift bei einer seiner Reduktionen auf Ergebnisse der Erbebenkunde zurück ... Auf diesem Weg wird man am ehesten weiterkommen, aber auch nur dann, wenn es gelingt, Angaben über die ... wahrscheinlichen Dichteunterschiede zu erhalten ...“ [JUNG 1939].

Im folgenden werden die gegenwärtigen Vorstellungen über die Rheologie von Kruste und oberem Mantel kurz dargestellt. Die Berechnung der Massenverteilung unter Berücksichtigung seismischer Ergebnisse ist der Gegenstand des darauffolgenden Abschnittes.

### Rheologie von Kruste und oberem Mantel

Seit der Entdeckung der Plattentektonik [MCKENZIE und PARKER 1967] hat sich das Modell von etwa 100 km dicken Lithosphärenplatten weitgehend durchgesetzt, die aus Kruste und oberem Mantel bestehen und über der fließfähigen wenige hundert Kilometer dicken Astenosphäre liegen (Abb. 2). Newtonsche Viskosität von  $10^{19-20}$  Ns/m<sup>2</sup> (bei 200 km Dicke) beschreibt das Verhalten der Astenosphäre zufriedenstellend [ARTYUSHKOV 1971, WALCOTT 1972], während die Lithosphäre auf kurzzeitig aufgesetzte Lastenänderungen (<10<sup>6</sup> Jahre) fast ideal elastisch reagiert [WALCOTT 1970].

Es treten aber beträchtliche Abweichungen vom generalisierenden Vening-Meinesz-schen Modell auf. 1. An den Plattenrändern ist das mechanische Verhalten anders als mitten auf einer intakten Platte, und an manchen der Ränder, vor allem entlang der Tiefseegräben und der ozeanischen Rücken, sind schon von der Natur der Plattentektonik her dynamische Prozesse zu erwarten. 2. Die Platten sind uneinheitlich dick und steif, sind an verschiedenen Stellen von tiefen Störungen verminderter Scherfestigkeit durchzogen und haben überall nur eine begrenzte Festigkeit, die unter größeren Lasten überschritten werden kann. 3. Die Platten haben eine Geschichte mechanischer, thermischer und mineralogischer Veränderungen, die zum heutigen Zustand geführt hat; d.h., der vertikale Massenausgleich innerhalb der elastischen Platten erklärt sich z.T. statt aus dem gegenwärtigen aus einem früheren Zustand. 4. Über lange Zeiträume reagieren die Platten eher visko-elastisch als elastisch mit einer viskosen Komponente von etwa  $10^{24\pm}$  Ns/m<sup>2</sup> [WALCOTT 1970]; d.h., die Biegefestigkeit nimmt mit der Zeit scheinbar ab.

Ob die lateralen Dichteinhomogenitäten, die innerhalb der Lithosphäre existieren, von elastischen Spannungen unterhalb der Festigkeitsgrenze dauernd getragen werden oder ob sie dort zu langsamen Ausgleichsbewegungen führen, ist schwer, und dann nur aus der Erdgeschichte zu ersehen. Es existieren jedenfalls auch in den ältesten präkambrischen Teilen beträchtliche Inhomogenitäten, die sich nach mehreren

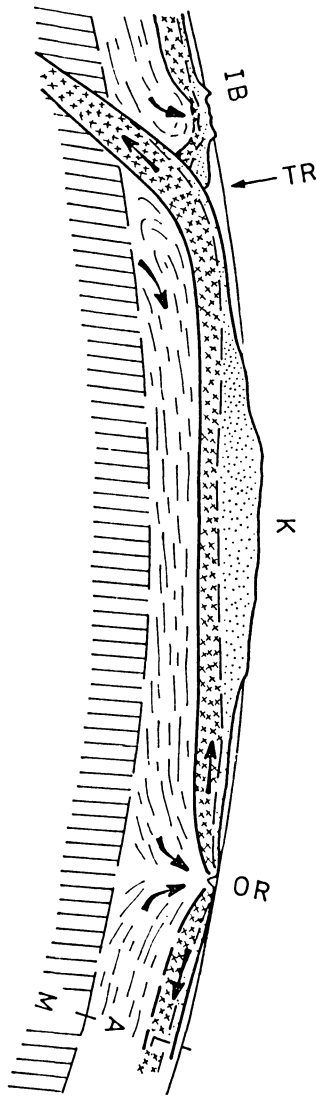


Abb. 2: Das Modell von elastisch-festen Lithosphärenplatten *L* und fließfähiger Asthenosphäre *A* über der festeren Mesosphäre *M*. Die Platten entstehen an den ozeanischen Rücken *OR* durch Abkühlen und Erstarren aufsteigenden Asthenosphärenmaterials und bewegen sich auf die Tiefseerinnen *TR* zu, wo sie unter den Inselbögen *IB* abtauchen und sich unter Erwärmung auflösen. Die Kontinente sind Bestandteile der Platten und driften mit ihnen, können aber nicht abtauchen. Darstellung nicht maßstäblich

The model of elastic-solid lithospheric plates *L* and fluid asthenosphere *A* above the more solid mesosphere *M*. The plates are generated at the oceanic ridges *OR* by cooling and solidification of rising asthenospheric material and move toward the trenches *TR* where they sink below the island arcs *IB* and are digested by heating. The continents are part of the plates and drift with them but cannot sink. Figure not in scale

$10^9$  Jahren noch nicht ausgeglichen haben. Der grundsätzliche Weg, den Ausgleichszustand zu untersuchen, ist, das Spektrum der Spannungen in Beziehung zum Alter verschiedener Teile der Lithosphäre zu setzen. Das ist heute und hier nicht möglich. Es soll im folgenden aber die Massenverteilung betrachtet werden, deren Kenntnis die Voraussetzung zur Berechnung der Spannungsverteilung ist.

### Massenverteilung in Kruste und oberem Mantel

Die Massenverteilung in Kruste und Mantel drückt sich in Schwerefeld und Topographie und indirekt auch in der seismischen Geschwindigkeitsverteilung aus. Aus bekannten potentialtheoretischen Gründen folgt aber umgekehrt die Massenverteilung weder eindeutig aus dem Schwerefeld noch aus der Topographie. Hinzu kommt bei der Topographie die Ungewißheit über Grad und Natur des Ausgleichszustandes. Die Massenverteilung folgt auch nicht eindeutig aus der seismischen Geschwindigkeitsverteilung, da im Einzelfall große Abweichungen von der positiven Korrelation vorkommen, die zwischen Dichten und Geschwindigkeiten besteht [BIRCH 1961, WOOLLARD 1962, NAFE und DRAKE 1963]. Wie K. JUNG vorgeschlagen hat, kombinieren wir daher die verschiedenen Daten miteinander, um zu einer möglichst realistischen Vorstellung von der Massenverteilung zu gelangen.

Wir schlagen dabei den folgenden Weg ein. Von den seismisch erschlossenen Daten über Kruste und Mantel übernehmen wir zunächst nur das geometrische Modell der Geschwindigkeitsverteilung, da die Seismik den direktesten Aufschluß über die Geometrie der Strukturen, nicht aber über die Dichten selbst gibt. Wir gehen von der Grundannahme aus, daß Körper etwa konstanter Geschwindigkeit auch etwa konstante Dichte haben, nehmen aber keine bestimmte numerische Beziehung zwischen Dichten und Geschwindigkeiten an. Dann berechnen wir bei dem gegebenen Modell für die einzelnen Körper die Dichten, die im Sinne der Ausgleichsrechnung zu einer optimalen Anpassung des Modellschwerefeldes an das gemessene Schwerefeld führen — oder entsprechend zu einer optimalen Anpassung der Modelltopographie an die gegebene. Schließlich vergleichen wir die auf beiden Wegen gefundenen Dichteverteilungen miteinander.

Mit den in Abb. 3a eingeführten Koordinaten  $\vec{x}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$  der Aufpunkte  $P_i$  und  $\vec{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$  der Volumenelemente  $dr = dr_1 \cdot dr_2 \cdot dr_3$  ist die Schwerewirkung  $\Delta g_i = \Delta g(\vec{x}_i)$  des Modells  $V_0$

$$\Delta g_i = G \iiint_{V_0} \Delta \rho(\vec{r}) \frac{x_{i3} - r_3}{|\vec{x}_i - \vec{r}|^3} dr, \quad (1)$$

wenn die  $-r_3$ -Richtung im ganzen Untersuchungsgebiet hinreichend genau mit der Lotrichtung zusammenfällt.  $\Delta \rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) - \rho_0(\vec{r})$  ist die Abweichung der Modell-dichteverteilung  $\rho(\vec{r})$  von einer Konstanten  $\rho_0(\vec{r}) = \rho_0$  oder von einer nur in  $r_3$ -Richtung veränderlichen Bezugsdichte  $\rho_0(\vec{r}) = \rho_0(r_3)$ . Wenn das seismisch bestimmte Modell  $V_0$  aus  $m$  Körpern  $V_k$  konstanter Dichteabweichung  $\Delta \rho_k(\vec{r}) = c_k$  besteht, ist

$$\Delta g_i = G \sum_k \left( c_k \iiint_{V_k} \frac{x_{i3} - r_3}{|\vec{x}_i - \vec{r}|^3} dr \right) = \sum_k c_k s_{ik} \quad (2)$$

mit

$$s_{ik} = G \iiint_{V_k} \frac{x_{i3} - r_3}{|\vec{x}_i - \vec{r}|^3} dr,$$

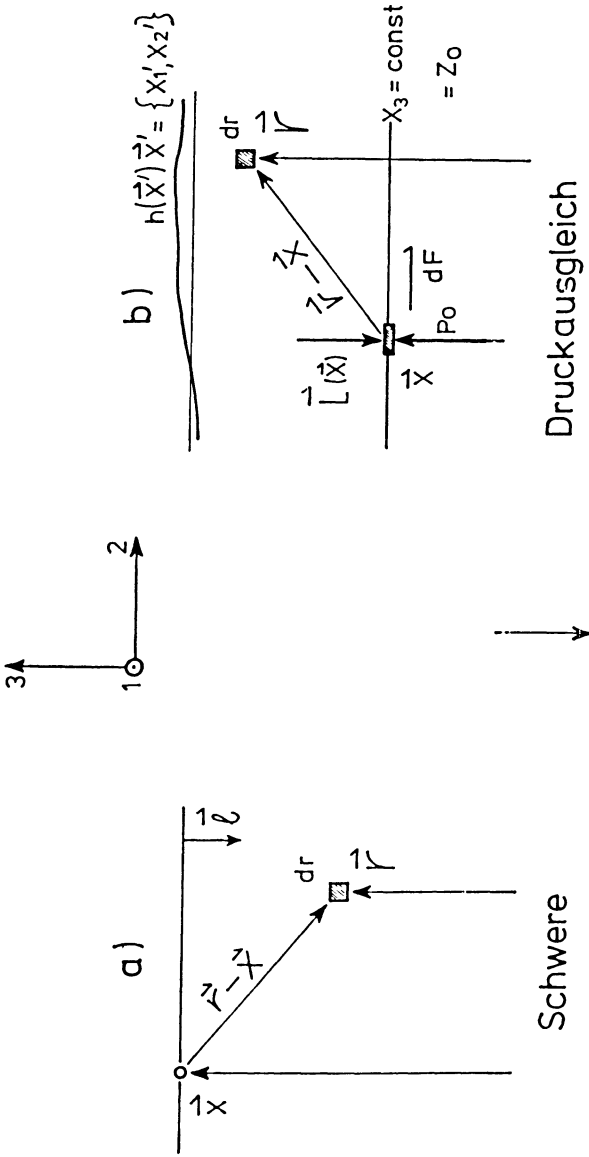


Abb. 3: Koordinaten zur Berechnung der Modellschwere und des Modelldruckausgleichs  
 Coordinates used to compute the model gravity field and the pressure compensation of the model



der Schwerewirkung des Körpers  $V_k$  auf  $P_i$ , berechnet mit der Dichte 1. Zum Vergleich der Modellschwere  $\Delta g_i$  mit den Meßwerten  $\Delta g'_i$  müssen wir eine Konstante  $\Delta g_0$  einführen, da  $\Delta g_i$  und  $\Delta g'_i$  unterschiedliches Niveau haben können. Die Dichtekontraste  $c_k$  werden nun so bestimmt, daß sich die Modellschwereverteilung  $\Delta g_i$  möglichst gut an die gemessene Verteilung  $\Delta g'_i$  anpaßt:

$$\Delta g'_i = \Delta g_0 + \sum_k c_k s_{ik} - v_i, \quad (3)$$

d.h. die Abweichungen  $v_i$  sollen verschwinden oder möglichst klein werden. Eine Methode der Schwereinterpretation, die auf diesem Gedanken beruht, ist an anderer Stelle ausführlicher beschrieben worden [JACOBY 1966, 1973].

Zur Dichteberechnung mittels Anpassung der Modelltopographie an die gegebene gehen wir von der Annahme aus, daß hydrostatischer, also konstanter Druck  $P_0$  auf einer Niveauläche herrscht, die wir ganz innerhalb der fließfähigen Astenosphäre vermuten. Wir benutzen die Koordinaten  $\vec{x}$  und  $\vec{r}$  der Abb. 3b. Bei Gleichgewicht ist die Kraft  $P_0 \cdot dF$ , die der Druck  $P_0$  am Element  $dF$  der Ausgleichsfläche ausübt, gleich der Last der darüber liegenden Massen. Bei einer elastischen Lithosphäre ist diese Last nicht einfach das Gewicht der Massen senkrecht über  $dF$ , sondern es haben die Gewichte  $g(\vec{r}) \cdot dm$  aller Massenelemente  $dm = \rho(\vec{r}) dr$  im ganzen Volumen  $V_0$  oberhalb der Ausgleichsfläche einen Einfluß, der sich nach einer Funktion  $\varphi(\vec{r} - \vec{x})$  verteilt:

$$P_0 dF = dL(\vec{x}) = \iiint_{V_0} g(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r} - \vec{x}) dr.$$

Da wir uns nicht für den Betrag, sondern nur für die Konstanz von  $P_0$  interessieren, können wir von  $\rho(\vec{r})$  wieder eine Konstante  $\rho_0$  oder eine nur vertikal veränderliche Bezugsdichte  $\rho_0(r_3)$  abziehen:

$$P_0 dF = dl(\vec{x}) = \iiint_{V_0} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r} - \vec{x}) dr. \quad (6)$$

Die Verteilungsfunktion  $\varphi(\vec{r} - \vec{x})$  kann zwar für einfache Modelle angegeben werden, wir wollen aber versuchen, ihren Einfluß mit der folgenden Überlegung auszuschalten. Im allgemeinen wird  $\varphi(\vec{r} - \vec{x})$  nahe dem betrachteten Orte  $\vec{x}$  am größten sein und für große horizontale Entfernung  $|\vec{r} - \vec{x}|$  verschwinden. Es soll ferner gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{z_0}^{h(\vec{x}')} \varphi(\vec{r} - \vec{x}) dr_1 dr_2 dr_3 = 1.$$

Wir betrachten nun die Last  $l_i$  über der ausgedehnten Fläche  $F_i$  und spalten das Integrationsvolumen  $V_0$  in  $V_i$  oberhalb der Fläche  $F_i$  und den Rest  $V_j$  auf:

$$\begin{aligned} l_i &= \iint_{F_i} [\iiint_{V_i} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}-\vec{x}) dr + \iiint_{V_j} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}-\vec{x}) dr] dx = \\ &= \iiint_{V_i} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) \iiint_{F_i} \varphi(\vec{r}-\vec{x}) dx dr + \iiint_{V_j} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) \iiint_{F_i} \varphi(\vec{r}-\vec{x}) dx dr. \end{aligned}$$

Der erste Mittelwertsatz, auf die Flächenintegrale angewandt, ergibt

$$l_i = a_{ii} \iiint_{V_i} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) dr + a_{ij} \iiint_{V_j} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) dr = a_{ii} G_i + a_{ij} G_j \quad (7)$$

mit  $G_i = \iiint_{V_i} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) dr$ , dem Gewicht der Säule  $V_i$ .  $a_{ii}$  bzw.  $a_{ij}$  ist das mit  $F_i$  multiplizierte Mittel der Werte, die  $\varphi(\vec{r}-\vec{x})$  während der Integration über  $V_i$  bzw.  $V_j$  für alle Punkte  $\vec{x}$  der Fläche  $F_i$  einnimmt;  $a_{ii}$  strebt mit wachsendem  $F_i$  gegen 1, und  $a_{ij}$  wird immer unbedeutender. Werden  $F_0$  und  $V_0$  groß genug gewählt, verschwindet der Einfluß der Massen außerhalb  $V_0$ , und die Gesamtlast  $l_0$  geht gegen das Gewicht  $G_0$  von  $V_0$ . Teilen wir  $V_0$  in  $n$  Teilsäulen  $V_i$  ein, so geht also die Summe der Teillasten gegen  $G_0 = \sum_i G_i$ :

$$\sum_i (a_{ii} G_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} G_j) = \sum_i \sum_j a_{ij} G_j \rightarrow \sum_i G_i.$$

Der Einfluß der gemischten Glieder  $a_{ij} G_j$ ,  $i \neq j$ , mittelt sich heraus, wenn  $a_{ii} = 1$  gesetzt wird. Der Druck  $p = \text{const.}$  auf der Ausgleichsfläche ist also genau genug

$$p_0 = \frac{\sum_i G_i}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i F_i (G_i/F_i)}{\sum_i F_i}$$

und mit

$$F_i = F: p_0 = \frac{1}{n} \sum \frac{G_i}{F}.$$

Für die Dichteberechnung können wir den gegenseitigen Einfluß der Säulen  $V_i$  und  $V_j$  vernachlässigen und die Lasten durch ihre Gewichte ersetzen, so als ob die Säulen frei verschiebbar wären, wie im Airyschen Modell angenommen. Für jede Säule machen wir also den Ansatz

$$\frac{G_i}{F_i} = \frac{1}{F_i} \iiint_{V_i} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) dr = p_0 + v_i, \quad (8)$$

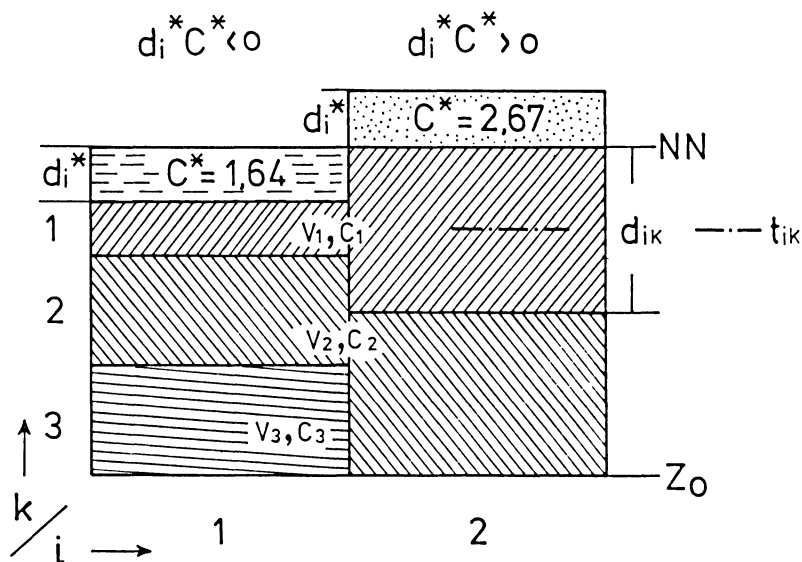


Abb. 4: Die vertikalen Säulen, für welche die Dichten der seismisch bestimmten Schichten so berechnet werden, daß am Boden konstanter Druck herrscht

The vertical columns are divided into layers determined by seismic data. The densities of all layers are computed to render constant pressure at the bottom

wobei der kleine Fehler  $v_i$  sich für alle Säulen herausmitteln soll. Führen wir den Mittelwert

$$\bar{g}(r_3) \bar{\Delta \rho}(r_3) = \frac{1}{F_i} \int_{r_1} \int_{r_2(V_i)} g(\vec{r}) \Delta \rho(\vec{r}) dr_1 dr_2 |_{r_3}$$

auf allen Flächen  $\vec{r} = r_3 = \text{const.}$  in der Säule  $V_i$  ein, so folgt:

$$\int_{r_3=Z_0(V_i)}^{h(\vec{x}^*)} \bar{g}(r_3) \bar{\Delta \rho}(r_3) dr_3 = p_0 + v_i. \tag{9}$$

Denken wir uns nun jede Säule  $V_i$  aufgebaut aus  $m$  Schichten  $k$ , die sich durch etwa konstante seismische Geschwindigkeiten auszeichnen und für die wir konstante Dichtekontraste annehmen (Abb. 4). Die mittlere Dicke der Schicht  $k$  in der Säule  $i$  sei  $d_{ik}$ , die mittlere Tiefe sei  $t_{ik}$ . Die Schwere, gemittelt im Intervall  $d_{ik}$ , sei  $g_{ik} \approx g(t_{ik})$ . Die topographische Masse der Säule  $i$  betrachten wir gesondert; ihr Gewicht pro Grundfläche ist  $C^* d_i^*$ ; auf Land ist  $d_i^*$  die mittlere Geländehöhe über NN, und die Dichte  $C^*$  ist zu  $2,67 \text{ g/cm}^3$  angenommen; auf See ist  $C^* d_i^*$  negativ;  $d_i^*$  ist die mittlere Meerestiefe und  $C^* = 2,67 - 1,03 \text{ g/cm}^3$ .

Aus (9) folgt somit

$$\sum_k c_k g_{ik} d_{ik} + C^* g^* d_i^* = p_0 + v_i$$

oder

$$-C^* g^* d_i^* = -p_0 + \sum_k c_k g_{ik} d_{ik} - v_i. \quad (10)$$

Gl. (10) für den Druckausgleich auf der Niveaulfläche  $Z_0$  hat dieselbe lineare Form wie Gl. (3) für die Schwerewirkung:

$$f'_i = f_0 + c_k s_{ik} - v_i. \quad (11)$$

Hier wie im folgenden gilt die Summenkonvention  $c_k s_{ik} = \sum_{k=1}^m c_k s_{ik}$ . Links steht ein Beobachtungswert  $f'_i$  im Punkt  $i$  (die Schwereanomalie  $\Delta g'_i$  oder das Produkt aus Dichte, Schwere und negativer Geländehöhe:  $-C^* g^* d_i^*$ ). Rechts steht die Summe der unbekanntenen Konstante  $f_0$  ( $\Delta g_0$  oder  $-p_0$ ) und aller Produkte der unbekanntenen Dichtekontraste  $c_k$  und der berechenbaren Funktionen  $s_{ik}$  ( $G \iiint_{V_k} \frac{x_{i3} - r_3}{|x_i - r|^3} dr$  oder  $g_{ik} d_{ik}$ ) der Körper  $k=1$  bis  $m$  in den Punkten  $i$ . Mit  $n$ -Beobachtungen können die  $m+1$  Unbekannten  $f_0$  und  $c_k$  so bestimmt werden, daß alle  $v_i=0$ , wenn  $n=m+1$ . Wenn  $n>m+1$ , sind die Unbekannten überstimmt; die  $v_i \neq 0$  sind die Abweichungen  $f_0 + c_k s_{ik} - f'_i$ . Die Anpassung von  $f_0 + c_k s_{ik}$  an die Beobachtungen  $f'_i$  wird optimiert, indem die Fehlerquadratsumme

$$Q = v_i v_i$$

für alle Unbekannten zum Minimum gemacht wird. Dies führt zu dem linearen Normalgleichungssystem

$$N_{jk} c_j = r_k, \quad (12)$$

wobei  $j$  und  $k$  von 0 bis  $m$  laufen und das Symbol  $c_0$  für  $f_0$  steht. Die Matrixelemente  $N_{jk}$  und die rechten Seiten  $r_k$  sind die Summen über alle Meßpunkte  $i=1$  bis  $n$ :

$$\begin{aligned} N_{00} &= n; & N_{0k} &= N_{k0} = \sum_i s_{ik}; & N_{jk} &= N_{kj} = s_{ik} s_{ij}; \\ r_0 &= \sum_i f'_i; & r_k &= s_{ik} f'_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Konstante  $f_0$  und die vor allem gesuchten Dichtekontraste  $c_k$  folgen aus der Lösung des Gleichungssystems (12). Wenn zur Matrix  $N_{jk}$  die Inverse  $N_{jk}^{-1}$  gebildet wird, ergeben sich  $c_0=f_0$  und  $c_k$  ( $k=1$  bis  $m$ ) aus den skalaren Produkten

$$c_k = N_{jk}^{-1} r_j \quad (14)$$

und die mittleren Fehler  $q_k$  der Ergebnisse  $c_k$  aus

$$q_k = q(N_{kk}^{-1})^{1/2} \quad \text{mit} \quad q = (Q/(n-m-1))^{1/2}. \quad (15)$$

Computer ermöglichen heute die Dichteberechnung auch für sehr komplizierte Modelle. Beim Programmieren kann man auf Standardroutinen für die Summenbildung, skalare Produkte und Matrixinversionen zurückgreifen. Da die Ausgleichung sowohl für die Schwere als auch für den Druckausgleich dieselbe Form hat, kann sie mit demselben Programm durchgeführt werden; nur die Funktionen  $s_{ik}$  werden mit verschiedenen Unterprogrammen berechnet.

Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung der Ausgleichsrechnung ist, daß sich die Abweichungen wie kleine zufällige und unabhängige Fehler verhalten. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, „paßt“ das Modell nicht und muß abgewandelt werden. Eine weitere wesentliche Voraussetzung ist, daß alle Funktionen  $s_{ik}$  in  $k$  linear voneinander unabhängig sind. Andernfalls ist die Matrixinversion, also auch die Ausgleichung, unmöglich; nur eine Vereinigung von Modellkörpern mit linear abhängigen Funktionen  $s_{ik}$  oder eine ähnliche Vereinfachung des Modells führt dann zum Erfolg.

### Ein Profil durch Nordamerika

Beide Methoden der Dichtebestimmung wurden auf ein Profil angewandt, das sich vom Pazifik bis zur Hudson Bay über einen großen Teil Kanadas erstreckt. Abb. 5 zeigt den Querschnitt durch die Kruste und den oberen Mantel bis über 100 km Tiefe, die Bougueranomalie (B.A.), beobachtet und geglättet, außerdem die berechneten Modellschwerewerte, über dem Meer auch die Freiluftanomalie (F.A.), weiter die geglätteten Meerestiefen bzw. Landhöhen und schließlich die Dichten: links berechnet durch Schwereanpassung, rechts durch Druckausgleich.

Das Schichtenmodell der Kruste beruht auf Ergebnissen der Refraktionsseismik [TSENG 1968, JACOBY 1970b, WICKENS 1971, BERRY 1973]. Für den Kanadischen Schild, die Great Plains und die Kordillere hat WICKENS [1971] die mittleren Tiefen der Geschwindigkeitsinversion im oberen Mantel aus der Rayleighwellendispersion bestimmt. Unter dem Pazifik in einer Entfernung vom Juan de Fuca Rise (JFR) ist hier 70 km Tiefe für die Inversion angenommen [KANAMORI und PRESS 1970]. Die Kruste und den Teil des oberen Mantels mit hoher seismischer Geschwindigkeit betrachten wir hier als die Lithosphäre, den Teil des Mantels mit niedrigerer Geschwindigkeit als die Astenosphäre.

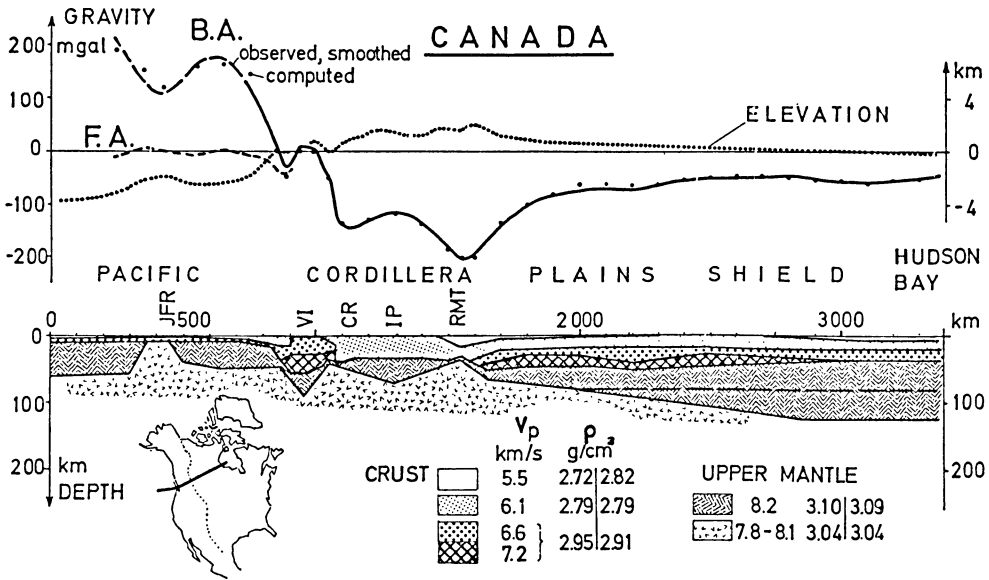


Abb. 5: Ein Profil durch Kanada vom Pazifik bis zur Hudson Bay.

JFR: Juan de Fuca Rise; VI: Vancouver Island; CR: Coast Range; IP: Interior Plateau; RMT: Rocky Mountain Trench.

B.A.: gemessene und geglättete Bouguer Anomalie und berechnete Modellschwere; F.A.: Freiluftanomalie;  $V_p$ : P-Wellengeschwindigkeiten, aus der Refraktionsseismik und der Rayleighwellendispersion bestimmt;  $\rho$ : Dichten, links: berechnet mit Schwereausgleich, rechts: berechnet mit Druckausgleich in 120 km Tiefe

A profile through Canada from the Pacific to Hudson Bay.

JFR: Juan de Fuca Rise; VI: Vancouver Island; CR: Coast Range; IP: Interior Plateau; RMT: Rocky Mountain Trench.

B.A.: Bouguer anomaly, observed and smoothed, also computed model anomaly; F.A.: free air anomaly;  $V_p$ : P-wave velocities determined by refraction and by dispersion of Rayleigh waves;  $\rho$ : densities, left: computed by the fit of gravity, right: computed by pressure compensation at 120 km depth

Zunächst war es notwendig, die mittleren Tiefenstrukturen der verschiedenen großtektonischen Einheiten glatt miteinander zu verbinden, um Randeffekte im Modellschwerefeld zu vermeiden. Zur Schwereanpassung sind dann nur noch Einzelheiten des Modells verändert worden, vor allem die Form der Oberkante der Astenosphäre. Das lokale Aufsteigen der Astenosphäre unter dem Juan de Fuca Rise (JFR), zwischen Vancouver Island (VI) und dem Coast Range (CR), und unter dem Rocky Mountain Trench (RMT) sind Ergebnisse der Schwereanpassung, ebenso die Verdickung der Lithosphäre unter Vancouver Island (VI) und dem Interior Plateau (IP). Jedoch blieben bei diesen Modelländerungen die mittleren Tiefen der Astenosphärenoberkante in den verschiedenen tektonischen Einheiten unverändert. Die Schwerewirkung des Modells nähert die gemessene und geglättete Schwere gut an; die Stan-

andardabweichung beträgt etwa  $\pm 20$  mgal und hätte mit weiteren geringfügigen Modelländerungen leicht noch verkleinert werden können.

Für den Druckausgleich wurde dasselbe Modell in 13 vertikale Säulen aufgeteilt. Jede Säule umfaßt einen Bereich, der in sich möglichst gleichartig ist. Aus den für jede Säule gemittelten Tiefen der Geschwindigkeitsgrenzen berechnet das Programm dann die Funktionen  $s_{ik} = g_{ik} d_{ik}$  der einzelnen Schichten. Für den Druckausgleich war eine weitere Abänderung des Modells nicht notwendig; schon beim ersten Versuch war die Standardabweichung der Modelltopographie nur etwa  $\pm 300$  m. Das entspricht einer Streuung von  $\pm 100$  bar auf der Ausgleichsfläche in 120 km Tiefe, in der ein Druck von etwa 40 kbar herrscht.

Abb. 5 zeigt, daß die auf beiden Wegen gefundenen Dichten sehr ähnlich sind. Die größte Abweichung von  $0,1 \text{ g/cm}^3$  tritt bei den im ganzen Modell volumenmäßig unbedeutenden Sedimenten östlich des Rocky Mountain Trench (RMT) auf, und zwar ist für den Druckausgleich die höhere Dichte erforderlich. Dafür erfordert die Schwere von mittlerer und unterer Kruste und vom obersten Mantel eine etwas höhere Dichte, als für den Druckausgleich notwendig ist. Bedenkt man, daß die Schwere tatsächlich gemessen ist, während der Druckausgleich bloß eine Annahme darstellt, so erkennt man, daß die Unterschiede auf Abweichungen vom Druckausgleich hinweisen. Unter den Gegenden, in denen die Schichten überwiegen, für die die Schwere höhere Dichten erfordert, sollte also ein relativer Drucküberschuß bestehen, wenn die Lasten nicht durch Scherspannungen in der Lithosphäre getragen werden. Auch Unvollständigkeit des Modells kann zu den unterschiedlichen Ergebnissen führen; unterhalb 120 km Tiefe ist das Modell homogen; wenn dort aber laterale Dichteinhomogenitäten vorkommen, führen ihre Wirkungen in der Schwereanpassung zu Fehlern in der Modelldichteverteilung. Allerdings sind die Last- oder Druckvariationen, die aus der Schwereanpassung folgen, von derselben Größenordnung wie die Standardabweichung des Druckausgleichs. Innerhalb der Fehlergrenzen können wir also die berechnete Massenverteilung in einer Tiefe von 120 km als isostatisch ausgeglichen betrachten. Auf einem höheren Niveau, z. B. direkt unterhalb der Kruste, herrscht aber noch keineswegs Druckausgleich.

Die für den Mantel berechneten Dichten erscheinen zu niedrig, da dort mindestens  $3,3 \text{ g/cm}^3$  zu erwarten sind. Die hier berechneten Dichten sind aber nur die Kontraste gegen die Dichte der Astenosphäre, zu denen dann ein konstanter Betrag hinzugezählt wurde. Offenbar muß man unterhalb etwa 30 km Tiefe noch eine vertikale Dichtezunahme oder einen Gradienten hinzuzählen, und zwar gleichermaßen in der Kruste und im oberen Mantel. Dies stimmt mit dem seismischen Ergebnis überein, daß in der unteren Kruste und im oberen Mantel oft ein Geschwindigkeitsgradient vorkommt [BERRY 1973].

Bisher blieb die horizontale Grenze in 80 km Tiefe unter dem Kanadischen Schild (Abb. 5) unerwähnt. Der in Abb. 5 gezeigte laterale Dichtekontrast gegen die Astenosphäre ist nur für den Teil der Lithosphäre berechnet worden, der oberhalb 80 km liegt, unterhalb wird er verschwindend klein, obwohl der Geschwindigkeitskontrast

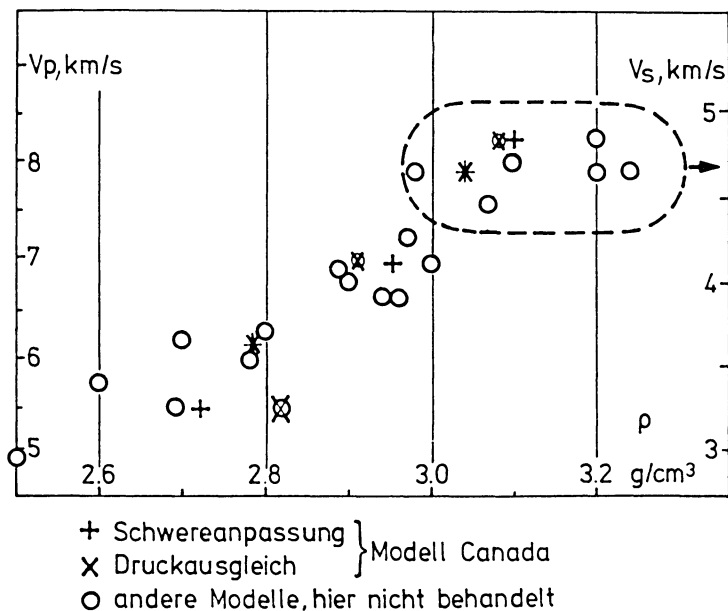


Abb. 6: Die Geschwindigkeits-Dichte-Beziehung aus den Ergebnissen der Dichteberechnung für seismisch bestimmte Modelle. Neben den Ergebnissen von Abb. 5 sind auch andere eingetragen [JACOBY 1972b]

The velocity-density function from the results of the density calculation for seismically determined models. Beside the present results others are plotted, too [JACOBY 1972b]

bis 120 km Tiefe reicht. Dieses Ergebnis kann man auf zwei Arten interpretieren: entweder steigt die Dichte in der Astenosphäre zwischen 80 und 120 km viel stärker an als in der Lithosphäre, oder die Schicht des oberen Mantels, in der man hohe seismische Geschwindigkeiten mißt, hat unter dem alten Schild eine etwas geringere Dichte als unter jüngerer Kruste. Die zweite Deutung könnte auf eine langsame Verdichtung von Astenosphäre und jüngerer Lithosphäre als Konsequenz der Erdentwicklung hinweisen [JACOBY 1972a].

Bei der Dichteberechnung hatten wir keine bestimmte numerische Beziehung zwischen den Dichten und den seismischen Geschwindigkeiten angenommen. Wenn wir nun nachträglich Dichten und Geschwindigkeiten gegeneinander auftragen, so finden wir eine etwa lineare Beziehung mit beträchtlicher Streuung (Abb. 6). Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Dichten der unteren Kruste und des oberen Mantels zu niedrig herausgekommen sind, ist die Steigung der linearen Beziehung etwa  $3,7 \text{ km/s pro g/cm}^3$ , in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen von BIRCH [1961], WOOLLARD [1962] und NAFE und DRAKE [1963]. Dagegen ist der absolute Betrag der Dichten in Abb. 6 nicht eindeutig bestimmt.



## Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Die Dichteberechnungen durch Schwereanpassung und durch Druckausgleich führen zu sehr ähnlichen Ergebnissen, wenn die Druckausgleichsfläche in der Tiefe der Astenosphäre liegt. Innerhalb der Fehlergrenzen herrscht in dieser Tiefe fast hydrostatischer Druck, es sind nur laterale Druckschwankungen von der Größenordnung von 100 bar zu erwarten. Die Kruste allein ist nicht isostatisch ausgeglichen, die Tiefenschwankungen der Astenosphärenoberkante beeinflussen den Ausgleichszustand. Ebenso muß bei großräumigen Schwerebetrachtungen der Einfluß der Astenosphäre berücksichtigt werden.

Die lateralen Dichteschwankungen in der Kruste und dem oberen Mantel sind nur dann im strengen Sinne isostatisch ausgeglichen, wenn sie von elastischen Spannungen dauernd getragen werden. Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang die Dichteinversion am Boden der Lithosphäre. Die bedeutendsten lateralen Dichteschwankungen im Modell (Abb. 5) kommen zusammen mit den stärksten Druckschwankungen in 120 km Tiefe vor: am Juan de Fuca Rise (JFR) und zwischen Vancouver Island (VI) und dem Rocky Mountain Trench (RMT). In diesen Gegenden geschehen häufig Erdbeben. Dies deutet auf dynamische Ausgleichsvorgänge hin, die man sich als diapirisches Aufsteigen der leichten fließfähigen Astenosphäre und als Absinken der schweren ozeanischen Lithosphärenplatten vorstellen kann. Vom Standpunkt der gravitativen Instabilität aus [JACOBY 1970a] kann man die Massenkkräfte, die im System Lithosphäre-Astenosphäre wirken, abschätzen, und es zeigt sich, daß sie zum Antrieb der Plattenbewegungen ausreichen. Die Erde ist nach unserer heutigen Erkenntnis dynamisch; die Bewegungen sind aber nur von relativ kleinen lateralen Druckschwankungen in der Astenosphäre begleitet.

Diese Arbeit und insbesondere die Rechnungen habe ich in der Seismology Division, Earth Physics Branch, Department of Energy, Mines and Resources, Ottawa, Canada, ausgeführt. Ich bin meinem verehrten Lehrer, Prof. Dr. Dr. h.c. KARL JUNG, der am 28. April 1972 verstarb, zu tiefem Dank dafür verpflichtet, daß er mich in die Wissenschaft der Geophysik eingeführt hat.

## Literatur

- AIRY, G. B.: On the computations of the effect of the attraction of the mountain masses as disturbing the apparent astronomical latitude of stations in geodetic surveys. *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. B, 145, 1855
- ARTYUSHKOV, E. V.: Rheological properties of the crust and upper mantle according to data on isostatic movements. *J. Geophys. Res.* 76, 1376—1390, 1971
- BERRY, M. J.: Structure of the crust and upper mantle in Canada. *Tectonophysics*, 1973
- BIRCH, F.: The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars, part 2, *J. Geophys. Res.* 66, 2199—2224, 1961
- DALY, R. A.: *Strength and Structure of the earth*. New York, Prentice-Hall, 1940
- DUTTON, C. E.: On some of the greater problems of physical geology. *Bull. Wash. Phil. Soc.*, ser. B, 11, 51—64, 1889

- HEISKANEN, W. A.: Tables isostatiques pour la réduction dans l'hypothèse de Airy des intensités de la pesanteur observées. *Bull. geod.*, no. 30, 1931
- HEISKANEN, W. A.: Die Erdkrustendicke und die Schwereanomalien in den Vereinigten Staaten. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, ser. A, no. 35, 1932
- JACOBY, W. R.: Die Schwereverteilung auf Helgoland und ihre Auswertung mit Ausgleichsverfahren. *Diss. Kiel*, 1966
- JACOBY, W. R.: Instability in the upper mantle and global plate movements. *J. Geophys. Res.* 75, 5671—5680, 1970a
- JACOBY, W. R.: A refraction profile across the southern Canadian Cordillera (abstract). *Trans. Am. Geophys. Un.* 51, 365, 1970b
- JACOBY, W. R.: Plate theory, epeirogenesis and eustatic sea level changes. *Tectonophysics* 15, 187—196, 1972a
- JACOBY, W. R.: Models of the upper mantle based on gravity and seismic data (abstract). *Trans. Am. Geophys. Un.* 53, 894, 1972b
- JACOBY, W. R.: A practical interpretation method for potential field data. *Geophysics*, 1973
- JUNG, K.: Schwere und Geoid bei Isostasie. *Z. f. Geophysik* 8, 40—52, 1932
- JUNG, K.: Über vollständig isostatische Reduktion. *Z. f. Geophysik* 14, 27—44, 1938
- JUNG, K.: Zur Isostasiefrage. *Z. f. Geophysik* 15, 47—49, 1939
- JUNG, K.: Einleitung zu: G. BORM: Über den Schwimmzustand bei sehr großen Massen. *Z. f. Geophysik* 37, 707—717, 1971
- KANAMORI, H., and F. PRESS: How thick is the lithosphere? *Nature* 226, 330—331, 1970
- MCKENZIE, D. P., and R. L. PARKER: The North Pacific: an example of tectonics on a sphere. *Nature* 216, 1276—1280, 1967
- NAFE, J. F., and C. L. DRAKE: Physical properties of marine sediments. *The sea*. Interscience Publishers 3, 794—815, 1963
- PRATT, J. H.: On the attraction of the Himalaya Mountains and of the elevated regions beyond upon the plumbline in India. *Trans. Roy. Soc. (London)*, ser. B, 145, 1855
- PUTMAN, G. R.: Results of transcontinental series of gravity measurements. *Bull. Wash. Phil. Soc.* 13, no. 61, 1895
- TSENG, K. H.: A new model for the crust in the vicinity of Vancouver Island. *M. Sc. thesis, Univ. of British Columbia*, 1968
- VENING-MEINESZ, F. A.: Une nouvelle méthode pour la réduction isostatique régionale de l'intensité de la pesanteur. *Bull. géod.*, no. 29, 1931
- WALCOTT, R. I.: Flexural rigidity, thickness, and viscosity of the lithosphere. *J. Geophys. Res.* 75, 3941—3954, 1970
- WALCOTT, R. I.: Inferences of upper-mantle rheology from Quarternary crustal deformation. *Symposium on recent crustal movements, IUGG, Moskau*, 1972
- WICKENS, A. J.: Variations in lithospheric thickness in Canada. *Can. J. Earth Sc.* 8, 1154—1162, 1971
- WOOLLARD, G. P.: The relation of gravity anomalies to surface elevation, crustal structure and geology. *Res. Rep. Ser. No. 62—9, U.S.A.F. aeronautical Chart and Information Centre, St. Louis, Missouri*, 1962

# Modellberechnungen zur Temperatur-Tiefen-Verteilung im Bereich der Alpen und des Alpenvorlandes<sup>1)</sup>

## Model Calculations on Temperature-Depth-Distribution in the Area of the Alps and the Foreland<sup>1)</sup>

Prof. Dr. Dr. h.c. KARL JUNG zum Gedächtnis

G. BUNTEBARTH, Clausthal-Zellerfeld<sup>2)</sup>

Eingegangen am 11. Januar 1973

*Zusammenfassung:* Es wird eine Temperatur-Tiefen-Verteilung für das Profil Lago Lagorai-Eschenlohe aus der Poissonschen Gleichung errechnet, die numerisch nach dem Relaxationsverfahren bis zu einer Tiefe von  $z=150$  km gelöst wird.

Den Berechnungen wird ein Modell der Wärmeleitfähigkeit unter Berücksichtigung ihrer Druck- und Temperaturabhängigkeit und ein Modell der Wärmeproduktion mit exponentieller Verteilung der Wärmequellen in der Kruste und im oberen Mantel zugrunde gelegt. Aus dem Modell der Wärmeproduktion ergibt sich eine lateral konstante Wärmeflußdichte im oberen Mantel bei  $z=150$  km von  $Q=0,69 \mu\text{cal cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ .

Für die Temperatur von  $T=1000$  °C wird, ausgehend von der Erdoberfläche, eine Tiefe von  $z=50$  km sowohl im Alpenvorland als auch in den Zentralalpen errechnet. In der Tiefe  $z=150$  km ergibt die Modellrechnung eine Temperatur von  $T=1570$  °C.

*Abstract:* A temperature-depth-distribution for the profile Lago Lagorai-Eschenlohe is calculated by solving Poisson's equation numerically by relaxation up to a depth of  $z=150$  km.

The calculations are based on a model of heat conductivity with regard to its dependence on pressure and temperature and a model of heat production with exponential distribution of the heat sources in the crust and the upper mantle. This model of heat production gives as a result a lateral constant heat flow in the upper mantle ( $z=150$  km) of  $Q=0,69$  HFU.

For the temperature of  $T=1000$  °C a depth of  $z=50$  km beneath the surface is calculated in the foreland as well as in the Alps. In the depth of  $z=150$  km the model calculation shows a temperature of  $T=1570$  °C.

### 1. Einleitung

Das Temperaturfeld in der Kruste und im oberen Mantel im Bereich der Alpen und des Alpenvorlandes soll den Voraussetzungen der Poissonschen Gleichung ge-

<sup>1)</sup> Auszug aus einer Diplom-Arbeit am Institut für Geophysik der TU Clausthal; s. Lit.-Verz.: BUNTEBARTH [1972].

<sup>2)</sup> Dipl.-Geophys. GÜNTER BUNTEBARTH, Institut für Geophysik der TU Clausthal, 3392 Clausthal-Zellerfeld, Adolf-Römer-Str. 2A.

nügen, d.h., daß die Gleichung

$$A + \nabla(\lambda \nabla T) = 0 \quad (1)$$

gilt, aus der man nach Umformung die Gleichung:

$$2A + \Delta(\lambda T) + \lambda \Delta T - T \Delta \lambda = 0 \quad (2)$$

erhält, in der  $A$  die Wärmeproduktion,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $T$  die Temperatur bedeuten.

Die Gln. (1) bzw. (2) beschreiben den stationären Temperaturverlauf in einem isotropen Medium mit einer ortsabhängigen Wärmeleitfähigkeit.

Zur Lösung der Gleichung müssen die Wärmeproduktion  $A$  und die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  als Ortsfunktionen bekannt sein. Es werden für die Wärmeproduktion und für die Wärmeleitfähigkeit je ein Modell aufgestellt, das die geographischen, geologischen und petrophysikalischen Besonderheiten in den Alpen und speziell im Profil Lago Lagorai – Eschenlohe berücksichtigt.

Die Wärmeleitungsgleichung (2) wird numerisch nach dem Relaxationsverfahren für ein Gebiet gelöst, das sich senkrecht zur Streichrichtung der Alpen über  $x=190$  km und vertikal bis zu einer Tiefe von  $z=150$  km erstreckt.

Die Tiefe  $z=150$  km ist für eine stationäre Temperaturverteilung noch vertretbar, weil sich ein angenähert stationäres Temperaturfeld für solche Schichtmächtigkeiten innerhalb geologisch sinnvoller Zeiträume aufbauen kann [STEGENA 1970].

Zur genaueren Berechnung der thermodynamischen Verhältnisse ist eine Berücksichtigung der Krustenbewegungen – vor allem der vertikalen – unumgänglich. Weil die Wärmeausbreitung durch tektonisch bedingten Massentransport neben der Wärmeleitung sehr bedeutend sein kann [LAUBSCHER 1971], ist eine Modellrechnung für den stationären Fall nur eine grobe Annäherung an die tatsächlichen Temperaturverteilungen in der Kruste. Sie hat jedoch den Vorteil, daß sie mathematisch leicht erfaßbar ist.

## 2. Voraussetzungen zur Wärmeleitfähigkeit in den Alpen

### 2.1. Druckabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit kann in den großen Druck- und Temperaturintervallen von  $p=0$  bis 50 kbar und  $T=20$  bis 1600 °C nicht mehr als Materialkonstante behandelt werden, sondern muß als Funktion  $\lambda = \lambda(p, T)$  ermittelt werden.

Unter niedrigen Drucken ( $p=0$  bis 1 kbar) erhöht sich die Wärmeleitfähigkeit von Gesteinen mit kleiner Porosität, wie magmatischen Gesteinen, um ca. 10% [WALSH und DECKER 1966, HURTIG und BRUGGER 1970] wegen der Verkleinerung der Porosität.

Bei Anwendung höherer Drucke beeinflussen die elastischen Eigenschaften der einzelnen Kristallite das Wärmeleitvermögen. Es ist daher zu erwarten, daß mit zunehmender Kompression auch die Wärmeleitfähigkeit zunimmt, und zwar innerhalb der Elastizitätsgrenze linear mit dem Druck  $p$ , so daß gilt:

$$\lambda = \lambda_0(1 + c p). \quad (3)$$

## 2.2. Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitzahl

Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit wird im betrachteten Temperaturintervall (ca. 20 bis 1600 °C) von zwei Mechanismen bestimmt: der Phononenleitfähigkeit und der Leitfähigkeit durch Strahlung.

Der Anteil beider Komponenten an der Gesamtleitfähigkeit ist abhängig von der Temperatur. Von Zimmertemperatur an bis zu einigen hundert Grad Celsius dominiert in einem elektrisch nichtleitenden Kristallverband die Ausbreitung der thermischen Energie durch anharmonische Gitterwechselwirkungen, die die Phononenleitfähigkeit darstellen. Von DEBYE [1914, in: KITTEL 1966] wird die Proportionalität angegeben:

$$\lambda_{\text{Ph}} \sim T^{-1}.$$

Wie Experimente z.B. von CLARK [1966] und KAWADA [1966] bestätigen, läßt sich die Wärmeleitfähigkeit der untersuchten Substanzen unterhalb von 1000 °K durch die Funktion:

$$\lambda = a + bT^{-1} \quad (4)$$

gut beschreiben. Die Auswertung von Meßreihen verschiedener Autoren [BIRCH und CLARK 1940, CLARK 1966, KAWADA 1966, WENK und WENK 1969] nach Gl. (4) ergibt Mittelwerte für die Konstanten  $a$  und  $b$ , die den Temperaturberechnungen in der Erdkruste zugrunde gelegt werden (s. Tabelle 1).

Tabelle 1: Abhängigkeit der Wärmeleitzahl von der absoluten Temperatur  
Dependence of heat conductivity upon the absolute temperature

Gestein	$\lambda = \lambda(T) \left[ 10^{-3} \frac{\text{cal}}{\text{cm s } ^\circ\text{K}} \right]$
Granit	$3,45 + 600/T_{\text{abs}}$
Gabbro	$5,2 + 140/T_{\text{abs}}$
Olivin-Gabbro (30% Olivin)	$7,1 + 110/T_{\text{abs}}$
Forsterit	11,5

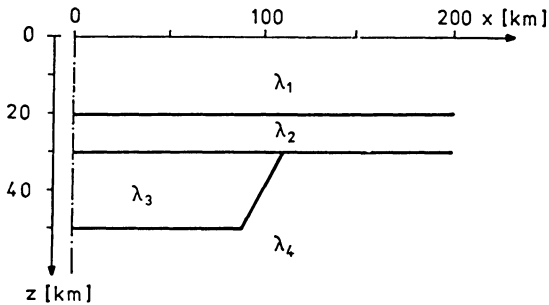


Abb. 1: Modell der Wärmeleitfähigkeit in den Alpen  
Model of the heat conductivity in the Alps

### 2.3. Modell der Wärmeleitfähigkeit in den Alpen

Für die Kruste wird ein Zwei-Schichten-Modell angenommen (s. Abb. 1), das sich im wesentlichen an dem Modell der Krustenstruktur unterhalb der Alpen orientiert, das aus seismischen und gravimetrischen Daten berechnet wurde [MÜLLER und TALWANI 1971].

Nach diesem Modell werden  $\text{SiO}_2$ -reiche Gesteine (Granit, Glimmer-Schiefer, Gneis) für die Tiefen von  $z=0$  bis 20 km und gabbroide Gesteine von  $z=20$  bis 30 km Tiefe angenommen. Das Gestein, das in den Zentralalpen bis zu Tiefen von 50 km hinabreicht und die Gebirgswurzel bildet, wird als Olivin-Gabbro interpretiert. Für größere Tiefen wird ein Material vorausgesetzt, das die petrophysikalischen Eigenschaften von Olivin ( $\text{Fo}_{90}\text{Fa}_{10}$ ) besitzt, obwohl der Chemismus unterhalb der Mohorovičić-Diskontinuität nicht dem des reinen Olivins entspricht [BORCHERT 1967, DAWSON 1971].

Der Anteil der Strahlungskomponente an der Wärmeleitfähigkeit wurde experimentell an Olivinkristallen bestimmt [FUKAO, MIZUTANI und UYEDA 1968]. Danach trägt die Strahlungsleitfähigkeit bei ca. 1000 °K annähernd 50% zur Gesamtwärmeleitfähigkeit bei. FUKAO et al. [1968] haben die Wärmeleitfähigkeit im Temperaturintervall von 300 bis 1300 °K bestimmt und oberhalb von 1000 °K eine nahezu konstante Größe von  $\lambda=0,0115 \text{ cal/cm s } ^\circ\text{K}$  gemessen.

Die graphisch ermittelten Wärmeleitfähigkeitsfunktionen  $\lambda_i(T)$  mit  $i=1, 2, 3$  und die Wärmeleitfähigkeit von Olivin zeigt das Wärmeleitfähigkeitsmodell in Abb. 1 im Bereich der Alpen und des Alpenvorlandes für das Profil Lago Lagorai – Eschenlohe.

## 3. Voraussetzungen zur Wärmeproduktion in den Alpen

### 3.1. Verteilung der wärmeproduzierenden Elemente in Gesteinen

Nach dem Wärmeleitfähigkeitsmodell in Abb. 1 werden die Kruste und der obere Mantel aus den Gesteinen Granit, Gabbro, Olivin-Gabbro und Olivin aufgebaut.

Zur Bestimmung der Wärmeproduktion in Granit wird von Wärmeproduktionszahlen ausgegangen, die von RYBACH (persönl. Mitt.) an den gleichen alpinen Gesteinsproben gemessen wurden, an denen auch die Wärmeleitfähigkeiten von WENK und WENK [1969] gemessen wurden.

Für Gabbro und Olivin werden globale mittlere U-, Th- und K-Gehalte vorausgesetzt. Die Wärmeproduktion von Olivin-Gabbro und Olivin wird als gleich angenommen.

### 3.2. Modell der Wärmeproduktion in den Alpen

An der Erdoberfläche wird von den von RYBACH (persönl. Mitt.) bestimmten Wärmeproduktionszahlen granitischer alpiner Gesteine ausgegangen. Für die Mitte der Gabbro-Schicht und ebenso für die Schicht der Ultrabasite werden Durchschnittswerte errechnet, die sich aus den globalen mittleren U-, Th- und K-Gehalten ergeben. Unterhalb der Moho wird nach BORCHERT [1967] eine 20 km mächtige Olivin-Schicht angenommen, und darunter werden die Randwerte von CLARK und RINGWOOD [1964] vorausgesetzt.

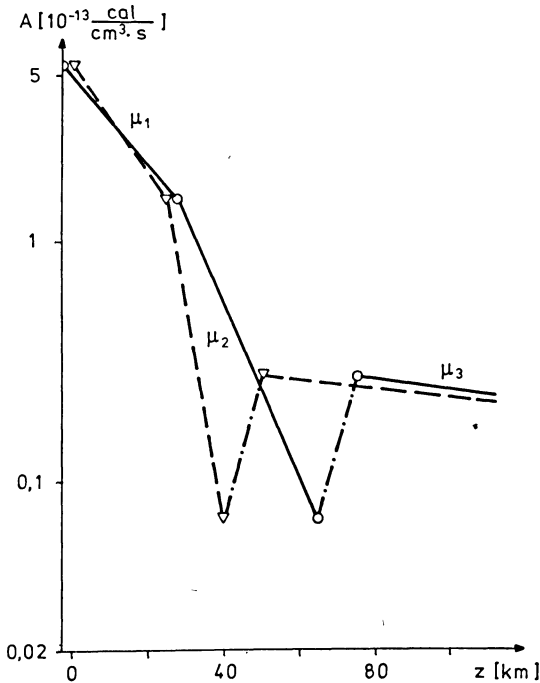


Abb. 2: Die Wärmeproduktion in der Erdkruste und im oberen Mantel unterhalb der Alpen: —, des Vorlandes: ----

Heat production in the Earth's crust and the upper mantle beneath: the Alps: —, the foreland: ----

Zwischen den jeweiligen Durchschnittswerten wird eine exponentielle Verteilung der Wärmeproduktion, gemäß LACHENBRUCH [1971], mit:

$$A = A_0 \exp(-\mu_i z)$$

angenommen.

Abb. 2 stellt das Modell der Wärmeproduktion in den Alpen dar. Aufgrund dieses Modells und der Wärmeflußdaten an der Erdoberfläche [CLARK 1962, HÄNEL 1971] errechnet sich z.B. für die Tiefe  $z=150$  km eine lateral konstante Wärmeflußdichte von  $Q=0,69 \mu\text{cal cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ .

## 4. Numerische Behandlung der Wärmeleitungsgleichung

### 4.1. Randbedingungen

Zur Berechnung der Temperaturen in der Kruste und im oberen Mantel wird die Gl. (2) nicht als dreidimensionale Randwertaufgabe behandelt, sondern das Gebirge soll in einer Richtung, der Richtung des Streichens der Alpen, mathematisch wie ein unendlich ausgedehnter Körper behandelt werden, so daß sich die Differentialgleichung auf die Lösung eines zweidimensionalen Problems reduziert.

Als Randwerte dienen die mittlere Jahrestemperatur in Meereshöhe  $T=8,5^\circ\text{C}$  und im Vorland die Voraussetzung, daß der horizontale Temperaturgradient  $\partial T/\partial x$  für alle Tiefen  $z$  gleich Null ist. Den Randwert in  $z=150$  km Tiefe bildet die Wärmeflußdichte, die aus den Oberflächen-Wärmeflußdichten [CLARK 1962, HÄNEL 1971] und einem Modell der Wärmeproduktion in der Kruste berechnet wird.

Bei der Temperaturberechnung im Gebirge wird berücksichtigt, daß die Oberflächen-Bodentemperaturen mit der Höhe  $h$  um  $\partial T/\partial h=3 [^\circ\text{C km}^{-1}]$  abnehmen.

### 4.2. Lösung nach dem Relaxationsverfahren

Die Lösung der Aufgabe soll numerisch nach dem Relaxationsverfahren gefunden werden [ALLEN 1954, COLLATZ 1966]. Zu diesem Zweck überdeckt man in der zu betrachtenden  $x, z$ -Ebene das Gebiet, für das eine Lösung existieren soll, mit einem zweckmäßigerweise orthogonalen Maschennetz. Die partiellen Ableitungen werden durch Differenzenquotienten angenähert.

Für den Fall, daß die vertikale und die horizontale Maschenweite gleich groß sind, geht die Gl. (2) über in die Gleichung:

$$\frac{A_{i,k}}{\lambda_{i,k}} + \frac{\sum_{i,k} T_u (\lambda_u + \lambda_{i,k})}{2\lambda_{i,k}} - \frac{\sum_{i,k} \lambda_u + 4\lambda_{i,k}}{2\lambda_{i,k}} T_{i,k} = 0, \quad (5)$$

wobei der Ausdruck  $\sum_{i,k} T_u$  bzw.  $\sum_{i,k} \lambda_u$  die Summe der Werte von  $T$  bzw.  $\lambda$  der umgebenden Punkte von  $T_{i,k}$  beinhaltet.



Das Verhältnis der Erhebung der Alpen über Meeresniveau zur Breite (N-S) ist etwa 1:100; sieht man das Gebirge als spiegelsymmetrisch nach Norden und Süden an, so ist das Verhältnis von Höhe zu halber Gebirgsbreite, also vom Vorland bis zur Symmetrie-Ebene, 1:50. Zur Temperaturberechnung innerhalb eines Rechteckes mit derart unterschiedlichen Seitenlängen wählt man kein Gitter mit quadratischen Elementarzellen, sondern mit rechteckigen, die ein Seitenverhältnis von z.B. 1:20 haben. Aus Gl. (2) wird dann folgende Differenzgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{i,k}}{\lambda_{i,k}} + T_{i+1,k} \left( \frac{\lambda_{i+1,k} + \lambda_{i,k}}{800 \lambda_{i,k}} \right) + T_{i-1,k} \left( \frac{\lambda_{i-1,k} + \lambda_{i,k}}{800 \lambda_{i,k}} \right) \\ & + T_{i,k-1} \left( \frac{\lambda_{i,k-1} + \lambda_{i,k}}{2 \lambda_{i,k}} \right) + T_{i,k+1} \left( \frac{\lambda_{i,k+1} + \lambda_{i,k}}{2 \lambda_{i,k}} \right) \\ & - T_{i,k} \left( 1,0025 + \frac{\lambda_{i+1,k} + \lambda_{i-1,k}}{800 \lambda_{i,k}} + \frac{\lambda_{i,k-1} + \lambda_{i,k+1}}{2 \lambda_{i,k}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Werden nun bei einem gegebenen Wärmeleitfähigkeitsfeld  $\lambda_{i,k}$  ( $i=0, 1, \dots, m$ ;  $k=0, 1, \dots, n$ ) und einem Feld der Wärmeproduktionszahlen  $A_{i,k}$  genäherte Temperaturen  $T_{i,k}$  eingesetzt, so werden i. allg. die Gln. (5) und (6) nicht erfüllt sein, sondern man erhält ein Residuum, einen von Null abweichenden Wert  $F$  an der Stelle  $(i, k)$ . Im gesamten Integrationsgebiet erhält man also eine Funktion  $F=F(i, k)$ , die möglichst im ganzen Intervall identisch verschwinden soll. Die Lösung der Minimumaufgabe erfolgt nach einem Iterationsverfahren, das z.B. von ALLEN [1954] angegeben wird.

Die Konvergenz wird nach jeder Iteration geprüft, indem die Größe des Extremalwertes der  $v$ -ten Näherung mit der Größe der  $(v-1)$ -ten Näherung verglichen wird.

Das Iterationsverfahren wird nach einer vorgegebenen Genauigkeit abgebrochen, wenn z.B. die Korrektur im Punkt  $(i, k)$  kleiner als  $1^\circ\text{C}$  ist.

## 5. Ergebnisse

### 5.1. Die Temperatur-Tiefen-Funktion

Die Temperaturwerte in Meereshöhe werden bei 2 km Erhebung des Gebirges zu  $T=72^\circ\text{C}$  errechnet; dabei beträgt der durchschnittliche Temperaturgradient  $\partial T/\partial z=34 [^\circ\text{C km}^{-1}]$ . Die Wärmeflußdichte in den Zentralalpen beträgt in Meereshöhe  $Q=1,84 \mu\text{cal cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ , wenn an der Erdoberfläche der Wert  $Q=1,95 \mu\text{cal cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  angenommen wird.

Abb. 3 zeigt den Temperaturverlauf in der Kruste und im oberen Mantel für das Alpenvorland. Im Vergleich dazu sind weitere Temperatur-Tiefen-Funktionen [BORCHERT 1967, LJUBIMOVA 1967] angegeben. Innerhalb der Oberkruste sind die Abweichungen der Temperaturverteilungen gering. Mit der von BORCHERT [1967] gegebenen

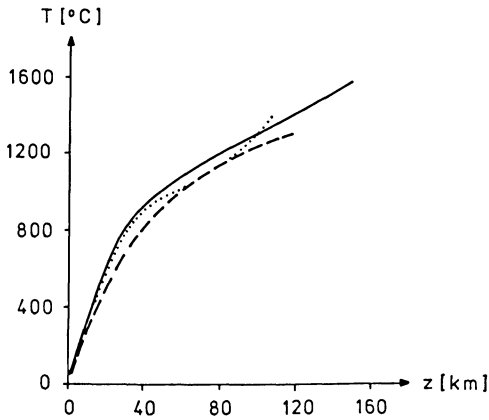


Abb. 3: Temperatur-Tiefen-Funktion  
 — im Alpenvorland nach Gl. (2)  
 ..... nach BORCHERT [1967]  
 ---- nach LJUBIMOVA [1967]

Temperature-depth-function  
 — outside the Alps by equation (2)  
 ..... after BORCHERT [1967]  
 ---- after LJUBIMOVA [1967]

Temperaturverteilung besteht für den oberen Krustenbereich nahezu Identität, während in größeren Tiefen, vor allem im oberen Mantel, die in dieser Arbeit berechneten Temperaturen durchschnittlich  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$  höher liegen.

Die Temperaturangaben von LJUBIMOVA [1967] liegen schon im Bereich der Kruste weit unterhalb der Neuberechneten Temperaturen. An der Moho beträgt die Differenz etwa  $130\text{ }^{\circ}\text{C}$  und im oberen Mantel durchschnittlich  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Die Temperaturdifferenzen zwischen den Zentralalpen und dem Alpenvorland in Abhängigkeit von der Tiefe sind in Abb. 4 dargestellt.

### 5.2. Der Bezug der Temperatur-Tiefen-Funktion zum Kanal der erniedrigten Kompressionswellengeschwindigkeit

Nach den seismischen Ergebnissen für das Profil Lago Lagorai – Eschenlohe reicht die Schicht  $\text{SiO}_2$ -reicher Gesteine bis zu Tiefen von  $z=22\text{ km}$  [CHOU DHURY, GIESE und DE VISINTINI 1971, GIESE 1970; MÜLLER und TALWANI 1971].

Wegen des Quarzgehaltes, z.B. 30% im Granit, wird die Kompressionswellengeschwindigkeit im Bereich der Quarzumwandlungstemperatur vermindert [FIELITZ 1971].

Die von FIELITZ [1971] berechnete Geschwindigkeitserniedrigung bei Temperaturverteilungen nach BORCHERT [1960] und LJUBIMOVA [1967] erklären die seismischen

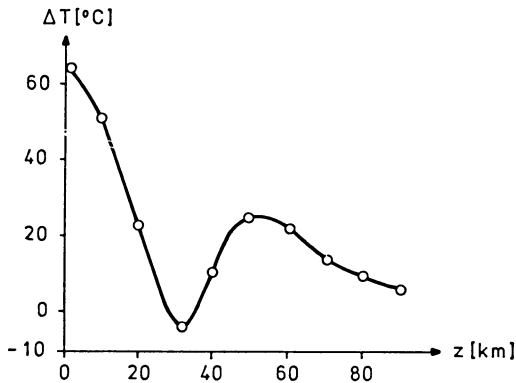


Abb. 4: Temperaturdifferenzen zwischen Zentralalpen und Alpenvorland  
Differences in temperature between the Alps and the foreland

Ergebnisse nicht vollkommen. Für die Annäherung an diese Ergebnisse hat FIELITZ [1971] zwei Möglichkeiten aufgezeigt, nämlich:

- 1) ein höherer Quarzgehalt als der angenommene mit 30% oder/und
- 2) höhere Temperaturen als die von BORCHERT [1960] angegebenen.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen eine bessere Annäherung an die seismischen Resultate durch die Annahme höherer Temperaturen. Sie liegen zwischen 10 und 20 km Tiefe um durchschnittlich 50 °C höher als in den vergleichbaren Tiefen des Vorlandes (s. Abb. 4).

Mit der Annahme, daß die quarzführende Schicht in der Tiefe  $z=22$  km aufhört, errechnet sich nach der vorliegenden Temperaturverteilung eine Geschwindigkeitserniedrigung von etwa 5% zwischen 10 und 22 km Tiefe.

Da der Effekt der Quarzumwandlung bei der in dieser Arbeit vorgenommenen Wärmeleitfähigkeitsberechnung nicht berücksichtigt wird, die Wärmeleitfähigkeit im Bereich der Umwandlung von  $\beta$ - in  $\alpha$ -Quarz aber stark vermindert wird [KAWADA 1966], muß sich bei konstantem Wärmefluß ein größerer Temperaturgradient in diesem Bereich ausbilden, so daß die Kompressionswellengeschwindigkeit wahrscheinlich um mehr als 5% erniedrigt wird.

### Danksagung

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Diskussionen während ihrer Fertigstellung danke ich Herrn Prof. Dr. O. ROSENBACH sehr.

Für die Überlassung von bisher unveröffentlichten Daten zur Wärmeproduktion alpiner Gesteine danke ich Herrn Dr. L. RYBACH.

Dem Rechenzentrum der TU Clausthal sei für die Durchführung der Rechnungen gedankt.

**Literatur**

- ALLEN, D. N. DE G.: *Relaxation methods*. New York 1954
- BIRCH, F., and H. CLARK: The thermal conductivity of rocks and its dependence upon temperature and composition. *Am. Journ. Sci.* 238, 529—558 und 613—635, 1940
- BORCHERT, H.: *Geosynklinale Lagerstätten, was dazu gehört und was nicht dazu gehört, sowie deren Beziehungen zu Geotektonik und Magmatismus*. Freib. Forsch.-Hefte C 79, 7—61, 1960
- BORCHERT, H.: Zur Petrologie der Lithosphäre in ihrer Beziehung zu geophysikalischen Diskontinuitäten, auch der Gesamterde. *Gerl. Beitr. Geophys.* 76, 257—277, 1967
- BUNTEBARTH, G.: *Modellberechnungen zur Temperaturverteilung in der Erdkruste und im oberen Mantel im Bereich der Alpen und des Alpenvorlandes sowie deren Einfluß auf die Schwere*. Dipl.-Arbeit, TU Clausthal, Clausthal-Zellerfeld, 1972
- CHOUDHURY, M., P. GIESE and G. DE VISINTINI: Crustal structure of the Alps; some general features from explosion seismology. *Boll. de Geofis. Teor. et Appl.* 13, 211—240, 1971
- CLARK, S. P.: Heat flow in Austrian Alps. *Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc.* 6, 54—63, 1962
- CLARK, S. P., and A. E. RINGWOOD: Density distribution and constitution of the mantle. *Rev. Geophys.* 2, 35—88, 1964
- CLARK, S. P.: Thermal conductivity, in: S. P. CLARK (Ed.), *Handbook of physical constants*. Geol. Soc. Am., *Memoir* 97, 459—482, New York 1966
- COLLATZ, L.: *The numerical treatment of differential equations*, 3rd. Ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1966
- DAWSON, J. B.: Advances in kimberlite geology. *Earth-Sci. Rev.* 7, 187—214, 1971
- FIELTIZ, K.: *Untersuchungen zur Temperaturabhängigkeit von Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten in Gesteinen unter erhöhtem Druck*. Diss., TU Clausthal, Clausthal-Zellerfeld 1971
- FIELTIZ, K.: Elastische Wellengeschwindigkeiten in verschiedenen Gesteinen unter hohem Druck und bei Temperaturen bis 750 °C. *Z. Geophys.* 37, 943—956, 1971
- FUKAO, Y., H. MIZUTANI and S. UYEDA: Optical absorption spectra at high temperatures and radiative thermal conductivity of olivines. *Phys. Earth Planet. Int.* 1, 57—62, 1968
- GIESE, P.: Die Temperaturverteilung in der Erdkruste des Alpenvorlandes und der Alpen, abgeschätzt aus tiefenseismischen Beobachtungen. *Schweiz. Min. Petr. Mitt.* 50, 597—610, 1970
- HÄNEL, R.: Bestimmungen der terrestrischen Wärmestromdichte in Deutschland. *Z. Geophys.* 37, 119—134, 1971
- HURTIG, E., und H. BRUGGER: Wärmeleitfähigkeitsmessungen unter einaxialem Druck. *Tectonophys.* 10, 67—77, 1970
- KAWADA, K.: Studies on the thermal state of the Earth. The 15th paper: variation of thermal conductivity of rocks. *Bull. Earthqu. Res. Inst.* 42, 631—647, 1964

- KAWADA, K.: Studies on the thermal state of the Earth. The 17th paper: variation of thermal conductivity of rocks, part 2. Bull. Earthqu. Res. Inst. 44, 1071—1091, 1966
- KITTEL, C.: Einführung in die Festkörperphysik. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien 1966
- LACHENBRUCH, A.: Vertical gradients of heat production in the continental crust; 1. theoretical detectability from near-surface measurements. Journ. Geophys. Res. 76, 3842—3851, 1971
- LAUBSCHER, H. P.: Bewegung und Wärme in der alpinen Orogenese. Schweiz. Min. Petr. Mitt. 50, 565—596, 1970
- LJUBIMOVA, E. A.: Theory of the thermal state of the earth's mantle, in: T. F. GASKELL (Ed.), The earth's mantle, 231—323. Academic Press, London, New York 1967
- MÜLLER, St., and M. TALWANI: A crustal section across the eastern Alps based on gravity and seismic refraction data. Pure and Appl. Geophys. 85, 226—239, 1971
- STEGENA, L.: Glubinoe stroenie i geotermitscheskie uslowia w Wengrii. Ann. Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös Nominatae, Sect. Geol., Tom. XIV, 153—159, 1970
- WALSH, J. B., and E. R. DECKER: Effect of pressure and saturating fluid on the thermal conductivity of compact rock. Journ. Geophys. Res. 71, 3053—3061, 1966
- WENK, H. R., and E. WENK: Physical constants of alpine rocks (density, porosity, specific heat, thermal diffusivity and conductivity). Schweiz. Min. Petr. Mitt. 49, 343—357, 1969



# Über die Größe der thermisch bedingten Bouguer-Anomalie in den Alpen<sup>1)</sup>

## About the Quantity of the Thermally Caused Bouguer-Anomaly in the Alps<sup>1)</sup>

Prof. Dr. Dr. h.c. KARL JUNG zum Gedächtnis

G. BUNTEBARTH, Clausthal-Zellerfeld<sup>2)</sup>

Eingegangen am 11. Januar 1973

*Zusammenfassung:* Von der Modellrechnung einer Temperatur-Tiefen-Verteilung in den Alpen ausgehend, werden Temperaturdifferenzen zwischen Zentralalpen und Alpenvorland für jeweils gleiche Krustentiefen errechnet, die infolge der thermischen Ausdehnung eine Schwereanomalie hervorrufen, die als regionale Komponente im Bouguer-Schwereprofil enthalten ist.

Unter Berücksichtigung eines druck- und temperaturabhängigen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha(T, p)$  beträgt der thermisch bedingte Anteil an der Bouguer-Schwereanomalie etwa 5%, sowohl in den Zentralalpen als auch im Alpenvorland.

*Abstract:* Starting from a model calculation of a temperature-depth-distribution in the Alps differences in temperature between the Alps and the foreland are calculated by comparison of the temperatures for equal depths of crust. As a result of the thermal expansion these differences cause an anomaly in gravity which is, as a regional component, a part of the Bouguer-anomaly.

In consideration of the thermal expansion  $\alpha(T, p)$  which depends on pressure and temperature this part in the Bouguer-anomaly, deriving from differences in temperature, is about 5% in the Alps as well as in the foreland.

### 1. Einleitung

Die Bouguer-Schwereanomalie nimmt im Bereich der Alpen einen minimalen Wert von  $\Delta g \approx -150$  mgal [MAKRIS 1971] an. Zur Deutung dieser Anomalie berechnet man Dichteverteilungen in Krustenmodellen, die aus refraktionsseismischen Messungen berechnet werden [EHRISMANN 1972].

---

<sup>1)</sup> Auszug aus einer Diplom-Arbeit am Institut für Geophysik der TU Clausthal; s. Lit.-Verz.: BUNTEBARTH [1972].

<sup>2)</sup> Dipl.-Geophys. GÜNTER BUNTEBARTH, Institut für Geophysik der TU Clausthal, 3392 Clausthal-Zellerfeld, Adolf-Römer-Str. 2A.

Es wird dabei nicht berücksichtigt, daß infolge der Erhebung des Gebirges die Isothermen unter dem Gebirge höher liegen als im Vorland und daß damit infolge der thermischen Ausdehnung eine Dichteveränderung verursacht wird, die ihrerseits eine Schwerewirkung hervorruft, die in der gemessenen Bouguer-Schwere als eine regionale Komponente enthalten ist.

Zur Berechnung des Anteils dieser Komponente an der Gesamtschwereanomalie wird von einer Temperatur-Tiefen-Verteilung ausgegangen, die aus einer Modellrechnung für das Profil Lago Lagorai-Eschenlohe bestimmt wurde [BUNTEBARTH 1973]. Die Temperaturen wurden punktweise für ein Maschennetz mit äquidistanten Schrittlängen von 10 km, einer Profillänge von  $x=190$  km (Zentralalpen-Vorland) sowie einer Tiefe bis  $z=150$  km berechnet und in einer Matrix  $(T_{i,k})$  mit  $i=0, 1, \dots, 19$  und  $k=0, 1, \dots, 15$  zusammengefaßt. Nach dieser Modellrechnung soll die Schwerewirkung bestimmt werden, die durch die Dichteänderung hervorgerufen wird, wenn z.B. das Temperaturfeld unterhalb der Alpen mit dem Temperaturfeld der Kruste des Vorlandes verglichen wird.

## 2. Vergleich von Temperaturfeldern in den Alpen mit denen des Vorlandes

Bei einer Parallelschichtung der Kruste, wie sie im Gebirgsvorland angenommen wird, sind die Temperaturen  $(T_{i,k})$  gleich den Temperaturen  $(T_{i-1,k})$  für  $i=0, 1, \dots, 19$  und  $k=0, 1, \dots, 15$ .

Bildet man die Differenzen aus dem Temperaturfeld  $(T_{i,k}^*)$ , das die Temperaturverteilung im Gebirge darstellt, und dem Temperaturfeld  $(T_{i,k})$ , so erhält man

$$(T_{i,k}^*) - (T_{i,k}) = (\Delta T_{i,k}^*).$$

Dieses Differenzenfeld  $(\Delta T_{i,k}^*)$  beschreibt die Störung der im Vorland parallelen Isothermen im Gebirge, sowohl die Auswirkung der Erhebung der Alpen als auch die der Gebirgswurzel, so daß daraus die gesamte thermisch bedingte Anomalie  $\Delta g_{th}$  berechnet werden kann. Diese Anomalie  $\Delta g_{th}$  läßt sich demnach in zwei Anteile aufgliedern, und zwar einmal in die Komponente  $\Delta g_1$ , die ihre Ursache in der Erhebung des Gebirges hat, und zum anderen in den Anteil  $\Delta g_2$ , der durch die Gebirgswurzel erzeugt wird:

$$\Delta g_{th} = \Delta g_1 + \Delta g_2.$$

Die Anomalie  $\Delta g_1$  errechnet man mit Hilfe der Temperaturdifferenzen

$$(\tilde{T}_{i,k}) - (T_{i,k}) = (\Delta \tilde{T}_{i,k})$$

( $i=0, 1, \dots, 19$  und  $k=0, 1, \dots, 15$ ), wobei  $(\tilde{T}_{i,k})$  das Temperaturfeld mit dem gleichen Krustenmodell wie bei  $(T_{i,k}^*)$  darstellt, aber in Meeresniveau mit der Randbedingung  $T_{i,0} = 8,5$  °C für  $i=0, 1, \dots, 19$ , der Jahresmitteltemperatur.



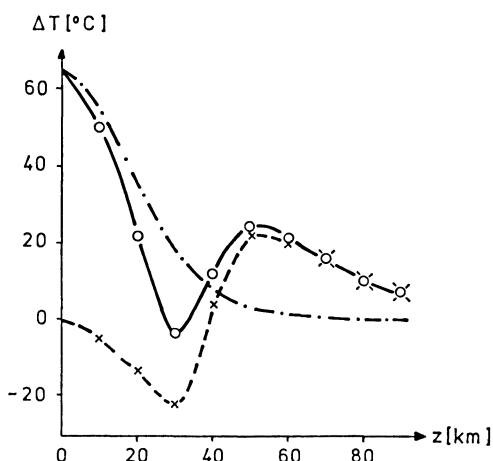


Abb. 1: Temperaturdifferenzen zwischen Zentralalpen und Alpenvorland

·-·-·-· verursacht durch die Erhebung des Gebirges

×-×-× verursacht durch die Gebirgswurzel

○-○ Gesamtwirkung des Gebirges

Differences in temperature between the Alps and the foreland

·-·-·-· caused by the elevation of the Alps

×-×-× caused by the root of the Alps

○-○ general effect of the Alps

Abb. 1 zeigt die oben bestimmten Temperaturdifferenzen ( $\Delta T_{i,k}^*$ ) und ( $\Delta \tilde{T}_{i,k}$ ) in den Zentralalpen, d.h.  $\Delta T_{0,k}^*$  und  $\Delta \tilde{T}_{0,k}$  für  $k=0, 1, \dots, 15$ .

Da das Temperaturfeld für das Maschennetz mit quadratischen Rastern von 10 km Seitenlänge angegeben ist, soll die Schwerwirkung jeder einzelnen Elementarzelle ausgerechnet und über das gesamte Netz aufsummiert werden.

Die Genauigkeit der Schwereanomalie wird vor allem durch die Dichteänderung bestimmt, die im wesentlichen vom Ausdehnungskoeffizienten abhängt.

### 3. Temperatur- und Druckabhängigkeit des Ausdehnungskoeffizienten

Bei kleinen Temperaturdifferenzen kann der Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  als konstant angesehen werden, und man erhält per definitionem aus der harmonischen Näherung der potentiellen Energie des Kristallgitters eine Ausdehnung des Ausgangsvolumens  $V_0$  bei konstantem Druck  $p=p_0$  von:

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p_0}.$$

Für größere Temperaturintervalle reicht die harmonische Näherung nicht aus, sondern die Änderung der Gleichgewichtsabstände der Gitterbausteine muß berücksich-

Tabelle 1: Volumenausdehnung und Kompressibilität von Gesteinen  
 Thermal expansion and compressibility of rocks

Gestein	Volumenausdehnung $\alpha = \alpha(T)$ [ $10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ]	Kompressibilität $\beta$ [ $\text{mb}^{-1}$ ]
Granit (30 Qu, 70 Plag)	27 + 0,035 T	1,4
Gabbro (60 Labr, 40 Aug)	16 + 0,0125 T	1,1
Olivin-Gabbro (30 Olivin, 70 Gabbro)	18 + 0,013 T	1,0
Forsterit	24 + 0,015 T	0,8

tigt werden, so daß man den temperaturabhängigen Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha(T) = \alpha_0 + aT \text{ [}^\circ\text{C}^{-1}\text{]}$$

erhält [HAUG 1964].

Die Ausdehnungskoeffizienten der Gesteine, wie Granit und Gabbro, werden aus monokristallinen Substanzen [BIRCH 1966, SKINNER 1966] synthetisiert (s. Tabelle 1).

Die isobare Temperaturerhöhung bewirkt eine Volumenvergrößerung. Ein Volumen  $V_0$  wird sich jedoch nicht um  $\Delta V$  ausdehnen, sondern um einen Betrag  $\Delta V'$ , der wegen Kompression kleiner als  $\Delta V$  ist. Die Verminderung der Ausdehnung beim Druck  $p$  ist:

$$\frac{\Delta V - \Delta V'}{\Delta V} = \beta p.$$

Superponiert man den Effekt der isobaren thermischen Ausdehnung mit dem der isothermen Kompression, erhält man die genäherte Dichteänderung:

$$\Delta \rho = \rho_0 \alpha(T, p) \Delta T.$$

Mit  $\rho_0$  wird die Dichte beim Druck  $p$  bezeichnet, und  $\alpha(T, p)$  ist der temperatur- und druckabhängige Volumenausdehnungskoeffizient:

$$\alpha(T, p) = (\alpha_0 + aT)(1 - \beta p).$$

#### 4. Die Schwereanomalie aus den thermisch bedingten Dichtedifferenzen

Je größer die Krustentiefe, desto unsicherer werden die Angaben über die thermische Ausdehnung, weil nicht nur die physikalischen Parameter unzuverlässiger werden, sondern auch die Angaben über das Material selbst nicht hinreichend genau sind.

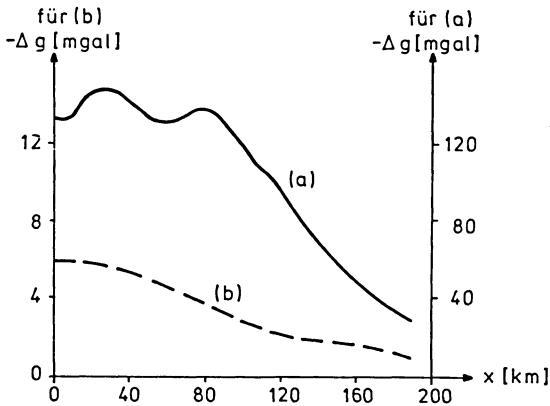


Abb. 2: — Bouguer-Anomalie der Richtung Lago Lagorai–Eschenlohe nördl.  $46^{\circ}42'$  geograph. Breite nach EHRISMANN [1972]  
 --- Schwerewirkung in den Alpen aufgrund der Temperaturdifferenzen in der Kruste zwischen Zentralalpen und Vorland  
 — Bouguer-anomaly of the direction Lago-Lagorai–Eschenlohe in  $46^{\circ}42'$  of north latitude after EHRISMANN [1972]  
 --- effect of gravity in the Alps caused by differences in temperature within the crust between the Alps and the foreland

Der Anteil  $\Delta g_1$  der Schwerewirkung  $\Delta g_{th}$ , der aus der oberen Kruste berechnet wird, ist sicher genauer als der Anteil  $\Delta g_2$ , der sich aus der Gebirgswurzel ergibt.

Abb. 2 zeigt das Bouguer-Schwereprofil für ein Krustenmodell des Profils Lago Lagorai–Eschenlohe [EHRISMANN 1972] und im Vergleich dazu für das gleiche Profil den thermischen Anteil, der als regionale Komponente im Bouguer-Schwereprofil enthalten ist. Der Anteil dieser Komponente  $\Delta g_{th}$  beträgt etwa 5% sowohl in den Zentralalpen als auch im Vorland.

Unberücksichtigt blieb dabei noch die Dichteänderung der granitischen Gesteine, die durch die Umwandlung von  $\alpha$ - in  $\beta$ -Quarz verursacht wird.

Herrn Prof. Dr. O. ROSENBACH danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Diskussionen während ihrer Anfertigung.

## Literatur

- BIRCH, F.: Compressibility; elastic constants, in: S. P. CLARK (Ed.), Handbook of physical constants. Geol. Soc. Am., Memoir 97, 97–173, New York 1966
- BUNTEBARTH, G.: Modellberechnungen zur Temperaturverteilung in der Erdkruste und im oberen Mantel im Bereich der Alpen und des Alpenvorlandes sowie deren Einfluß auf die Schwere. Dipl.-Arbeit, TU Clausthal, Clausthal-Zellerfeld 1972

BUNTEBARTH, G.: Modellberechnungen zur Temperatur-Tiefen-Verteilung im Bereich der Alpen und des Alpenvorlandes. *Z. Geophys.* 39, 97—107, 1973

CLOSS, H., A. HAHN und A. SCHLEUSENER: Bemerkungen zur Karte der Schwerestörungen des deutschen Alpenvorlandes. *Geol. Jb.* 72, 503—528, 1957

EHRISMANN, W.: Ein rationelles Verfahren zur numerischen Berechnung der Schwerewirkung von großräumigen digital simulierten Modellkörpern. Diss., TU Clausthal, Clausthal-Zellerfeld 1972

HAUG, A.: Theoretische Festkörperphysik, Bd. 1. Verlag Franz Deuticke, Wien 1964

MAKRIS, J.: Aufbau der Kruste in den Ostalpen aus Schweremessungen und die Ergebnisse der Refraktionsseismik. Diss., Universität Hamburg, Hamburg 1971

NIETHAMMER, TH.: Zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung. *Verh. Naturf. Ges. Basel* 28, 206—235, 1917

SKINNER, B. J.: Thermal expansion, in: S. P. CLARK (Ed.), *Handbook of physical constants*. *Geol. Soc. Am., Memoir* 97, 75—96, New York 1966

## **Gravimetrische Detail-Untersuchungen in den westlichen Hohen Tauern<sup>1)</sup>**

### **Detailed Gravimetric Investigations in the Western Hohe Tauern**

Prof. Dr. Dr. h. c. KARL JUNG zum Gedächtnis

W. EHRISMANN, Hannover<sup>2)</sup>, W. LEPPICH, O. LETTAU,  
O. ROSENBACH, Clausthal-Zellerfeld<sup>3)</sup>, und P. STEINHAUSER, Wien<sup>4)</sup>

Eingegangen am 11. Januar 1973

*Zusammenfassung:* Es wird über gravimetrische Messungen in den Ostalpen (westliche Hohe Tauern) berichtet.

Die Ergebnisse der Feldmessungen werden in folgender Form mitgeteilt:

1. Profile der Freiluft- und Bouguer-Anomalien;
2. Berechnungen zur Regional- und Restanomalie.

Die Bearbeitungsmethoden sowie die erzielten Genauigkeiten werden skizziert.

*Abstract:* Gravity measurements in the Eastern Alps have been carried out in the area of the western Hohe Tauern.

The results of the measurements are presented as follows:

1. Profiles of Free-air and Bouguer anomalies along three traverses;
2. Calculations concerning the regional and residual anomalies.

A sketch of the methods of evaluation and of the accuracy of data is given.

---

<sup>1)</sup> Einen Kurzbericht über das Thema gab O. ROSENBACH anlässlich des Kolloquiums zum DFG-Schwerpunktprogramm „Geodynamik des mediterranen Raumes, Geotraverse IA“, Freilassing, 28. 2. 1972.

<sup>2)</sup> Dr. WOLFGANG EHRISMANN, PREUSSAG AG, D-3000 Hannover 1, Postfach 4829; früher wie <sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Dipl.-Geophys. WOLFGANG LEPPICH, Dipl.-Geophys. OLAF LETTAU, Prof. Dr.-Ing. OTTO ROSENBACH, Institut für Geophysik der Technischen Universität Clausthal, D-3392 Clausthal-Zellerfeld, Adolf-Römer-Straße 2A.

<sup>4)</sup> Univ. Doz. Dr. PETER STEINHAUSER, Lehrkanzel für Geophysik der Universität Wien, A-1190 Wien XIX, Hohe Warte 38.

## 1. Einleitung

In den westlichen Hohen Tauern sind gravimetrische Feldmessungen vom Institut für Geophysik der TU Clausthal in Zusammenarbeit mit der Lehrkanzel für Geophysik der Universität Wien in den Jahren 1968 bis 1971 durchgeführt worden.

Die Planung der Messungen erfolgte in engem Kontakt mit Herrn Prof. Dr. F. KARL, Mineralogisch-Petrographisches Institut der Universität Kiel. Zu der vorgesehenen gemeinsamen geologisch/geophysikalischen Interpretation der Meßergebnisse ist es auf Grund des frühen Ablebens von Herrn Prof. KARL im August 1972 leider nicht mehr gekommen.

### 1.1. Meßgebiet

Das Meßgebiet (Abb. 1) umfaßt die nördlich des Alpenhauptkamms gelegenen Täler Zillergund, Krimmler Achental und Obersulzbachtal sowie das am Südhang der Großvenedigergruppe liegende Dorfer Tal.

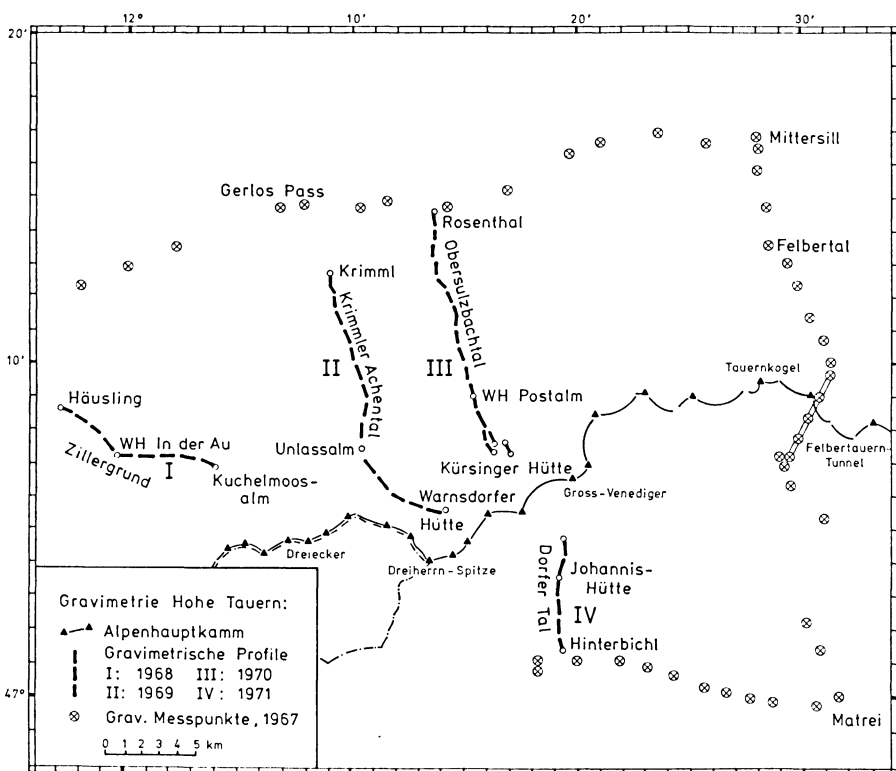


Abb. 1: Lageplan  
Location map

Wie aus Abb. 1 ersichtlich, werden die Täler eingeschlossen von den 1967 vermessenen Linien Gerlos-Paß–Rosenthal–Mittersill–Felbertauerntunnel–Matrei–Hinterbichl (s. Abb. 1 in BEHLE, EHRISMANN, MAKRIS, MENZEL, ROSENBAACH, STEINHAUSER [1972 b]).

### 1.2. Geologische Situation

Übergeordnete tektonisch-geologische Einheit der Hohen Tauern ist das Tauernfenster, welches aus penninischem Fensterinhalt und unterostalpinem Fensterrahmen besteht. Der Fensterinhalt wird in granitische Zentralkerne und umgebende Schieferhülle getrennt. Abb. 2 gibt stark schematisiert einen Ausschnitt aus dem westlichen Teil des Tauernfensters wieder.

Die Grundfrage der geologisch/petrographischen Forschung ist die Ursache der allen Gesteinen der Hohen Tauern gemeinsamen Metamorphose, der sogenannten Tauernkristallisation. Bis in die 50er Jahre war es eine allgemeine Ansicht, daß es sich hierbei um eine durch große Versenkung der zentralen Teile der Alpen hervorgerufene Regionalmetamorphose handelt.

Demgegenüber konnte jedoch KARL [1959] in den westlichen Hohen Tauern die Zentralgneise in zwei verschiedene Gruppen gliedern:

- (a) ältere prätektonische Para- und Orthogesteine,
- (b) jüngere syn- bis posttektonische Orthogesteine.

Für die jüngeren Metagranodiorit- bis Metagranitmagmen fordert KARL eine Intrusion zu alpidischer Zeit und vermutet, daß die aufgeschlossenen Metagranodiorit- und Metagranitkerne sich in größeren Tiefen zu einem Großpluton unter der Tauernhauptachse zusammenschließen. Die Existenz eines derart großen Magmenkörpers würde die alpidische Metamorphose im Raume der Hohen Tauern im Gegensatz zu den bisherigen Deutungen als Metamorphose durch Überlagerung, d.h. als großräumige Thermometamorphose erklären.

FRASL und FRANK [1966] widersprechen dieser Auffassung; sie schließen aus der Überprägung der Metagranodiorite-Metagranite durch die Tauernkristallisation, daß diese „nicht von einem der heute aufgeschlossenen Zentralgneise verursacht sein könne, da alle diese Körper bei der alpidischen Regionalmetamorphose eine sichtlich passive Rolle spielten“.

### 1.3. Bisherige gravimetrische Untersuchungen im Meßgebiet

Eine Übersicht über das Bouguer-Schwerefeld der Hohen Tauern gibt die Schwerekarte von Österreich im Maßstab 1:1000000 des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen [SENFIL 1965].

Neuere gravimetrische Vermessungen im Bereich der Hohen Tauern führten im Rahmen der Erforschung des tieferen Untergrundes Mitteleuropas BEHLE et al. [1972 b] durch.

MAKRIS [1971] benutzt diese und weitere Meßergebnisse unter anderem zur Berechnung eines Modells für den Krustenaufbau der Ostalpen und vergleicht seine

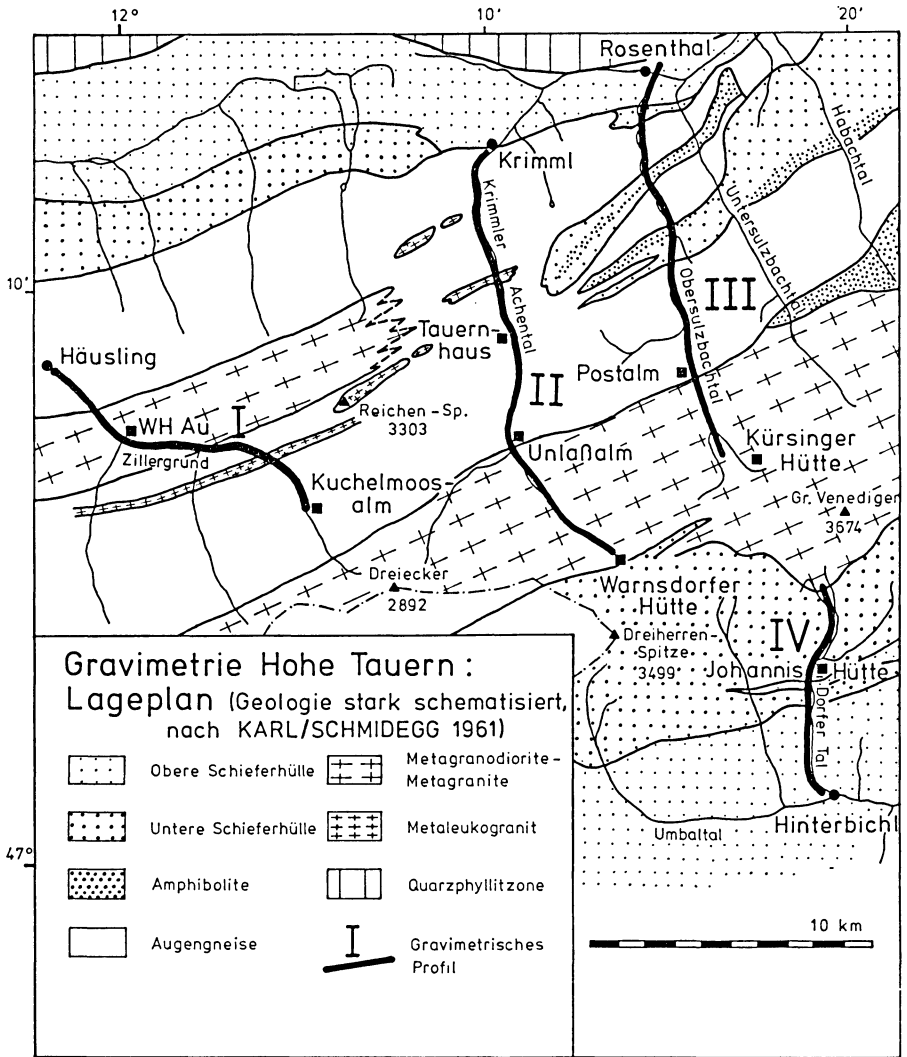


Abb. 2: Geologische Übersichtskarte  
Schematic geological map

Ergebnisse mit denen aus der Refraktionsseismik. Eine Ausschnittvergrößerung der von MAKRIŠ erstellten Bouguerschwerekarte ist in Abb. 3 wiedergegeben.

Das Verhalten des Vertikalgradienten der Schwere über bestimmten geologischen Strukturen untersuchten JANLE, MAKRIŠ und MENZEL [1971] auf dem ca. 40 km lan-



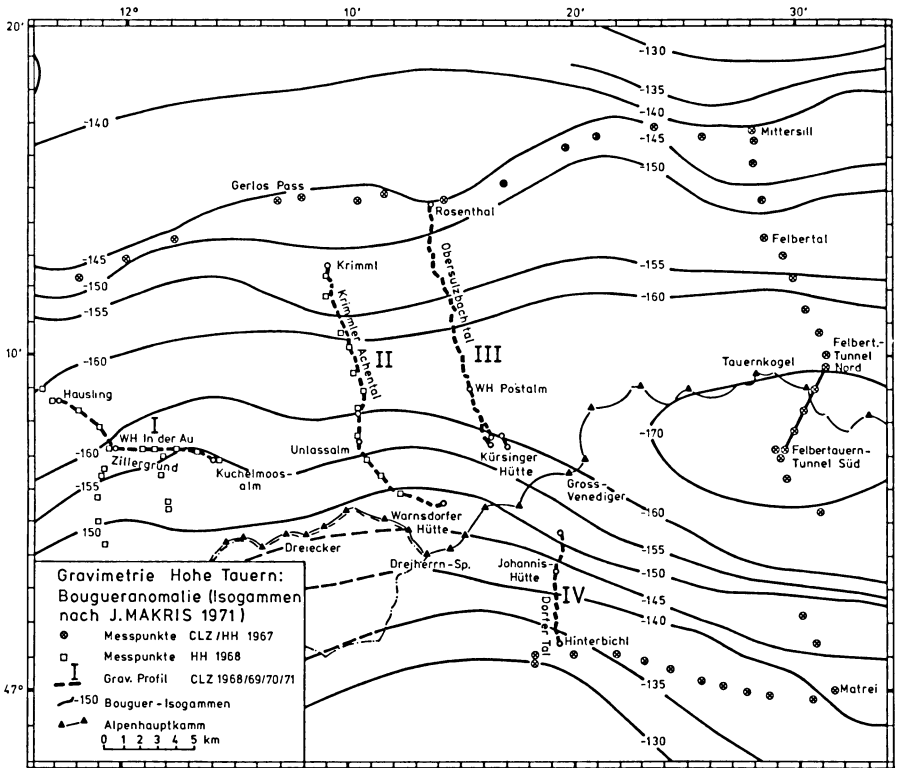


Abb. 3: Regionale Bougueranomalie  
Regional Bouguer anomaly

gen Profil Tuxer Tal–Zillergrund. Eine befriedigende Auflösung des geologischen Profils konnte wegen der gerätemäßig bedingten Meß- und Reduktionsungenauigkeiten nicht erzielt werden.

1.4. Ziel der gravimetrischen Detail-Untersuchung

Bei der vorliegenden Untersuchung handelt es sich nach Abschn. 2.1 um eine gravimetrische Vermessung mit sehr engem Stationsabstand im Hochgebirge. Für die Bearbeitung der Meßergebnisse sind hauptsächlich folgende Ziele gesetzt:

(a) Geophysikalische Gesichtspunkte:

Genauigkeit der Reduktionen,

Genauigkeit der Anomalien,

vorbereitende rechnerische Bearbeitung der Anomalien für die Interpretation (Glättung, Fehlereinflüsse).

(b) Geologische Gesichtspunkte:

regionale und lokale Anteile des Schwerefeldes,

geologische Interpretation der gravimetrischen Anomalien, im Zusammenhang mit (a),

Modellrechnungen auf der Basis der geologischen Situation gem. Abschn. 1.2.

Der vorstehende Aufgabenkatalog ist recht umfangreich, so daß er in dieser Publikation nicht vollständig erledigt werden kann (s. auch Abschn. 4).

Im folgenden wird als 1. Mitteilung über die gravimetrische Untersuchung der Hohen Tauern eine übersichtsmäßige Darstellung der bisherigen Meßergebnisse vorgelegt.

## 2. Feldmessungen

### 2.1. Anlage der Gravimetermessungen

Die Meßstationen auf den Profilen I–IV liegen in Abständen von ca. 50 m bis 200 m entlang von Karren- oder Fußwegen.

Diese geringen Punktabstände wurden gewählt, um einerseits kleinere geologische Strukturen in den Anomalien besser erkennen zu können und um andererseits die aus der Ungenauigkeit der topographischen Reduktion resultierende Streuung der Anomalien zu kontrollieren.

Die Länge der Meßlinien zum Alpenhauptkamm hin wurde bestimmt durch die Zugänglichkeit des Geländes; so verhinderten Gletscher eine Verbindung der Profile III (Obersulzbachtal) und IV (Dorfer Tal) (s. Abb. 1–3).

### 2.2. Durchführung der Messungen

#### (1) Kartierung der Meßstationen:

Im Zillergrund, Krimmler Achental sowie den unteren Teilen des Obersulzbachtals und des Dorfer Tals konnten die Meßpunkte direkt nach den österreichischen Karten 1:25000 und 1:50000 kartiert werden. Im oberen Obersulzbachtal wurden die Stationslagen durch Polygonzüge ermittelt. Für den mittleren und oberen Abschnitt des Dorfer Tals erfolgte die Kartierung über ein besonders angelegtes System von höhen- und lagemäßig erfaßten Fixpunkten.

#### (2) Höhenmessungen:

Höhenpunkte der Tauernkraftwerke AG im Zillergrund erlaubten es, die Anschlußnivellements ohne großen Aufwand durchzuführen. Dagegen mußten im Krimmler Achental, Obersulzbachtal und Dorfer Tal eigene Nivellements aufgenommen werden.

Angeschlossen wurde das Nivellement des Krimmler Achentals an einen Höhenpunkt der Großglockner-Hochalpenstraßen AG, die des Obersulzbachtals und des Dorfer Tals an das österreichische Präzisionsnivellement.

Alle Höhenmessungen wurden mit Nivellieren Zeiss Ni-2 ausgeführt.

**(3) Topographische Nahaufnahme:**

Auf eine geeignete Stationsposition bezüglich der topographischen Nahaufnahme ließ sich in allen Tälern selten Rücksicht nehmen. So wurde die Topographie für jede Station bis zu 200 m im Umkreis mit einem Koinzidenztelemeter, Wild TM 10, aufgenommen.

**(4) Gravimetermessungen:**

Zur Anlage von gravimetrischen Basisnetzen sowie zur Durchführung von Step-Verfahren bei der Vermessung von Feldpunkten stand für die Profile I–III ein Geländewagen „Haflinger“, Fabrikat Steyr-Daimler-Puch AG, zur Verfügung. – Im Dorfer Tal und desgleichen in nicht befahrbaren Teilen der anderen Täler mußten die Schweremessungen zu Fuß durchgeführt werden.

Alle Schwereprofile konnten über die von BEHLE et al. [1972b] vermessenen Punkte (s. Abb. 1 und 3) in das Österreichische Schwerenetzt eingehängt werden.

Als Meßgerät diente das Worden-Gravimeter, Typ Master, Nr. 614.

**3. Meßergebnisse****3.1. Anomalien**

Zur Auswertung gelangten folgende Schwereanomalien:

$$\Delta g' = g + \delta g_{N_i} - \gamma \quad (\text{Freiluftanomalie}),$$

$$\Delta g'' = \Delta g' + \delta g_{T_{op}} + \delta g_B \quad (\text{Bougueranomalie}).$$

Die Größen haben folgende Bedeutung:

$g$	gemessene Schwere bezogen auf den Eichpunkt Innsbruck Nr. 20344 $G_{neu}$ der europäischen Gravimetereichlinie: $g_{Innsbruck} = 980569,73$ mgal
$\gamma$	Normalschwere, internationale Schwereformel, Stockholm 1930
$\delta g_{N_i}$	Freiluftreduktion, d.i. die Niveaue Wirkung mit dem normalen Vertikalgradienten der Schwere von 0.3086 mgal/m
$\delta g_{T_{op}}$	Geländereduktion, d.i. die Geländewirkung bis zur Hayford-Zone O <sub>2</sub> (167 km)
$\delta g_B$	Sphärische Bouguerreduktion, d.i. die Wirkung der Kugelkalotte zwischen Stations- und Bezugsniveau bis zur Hayford-Zone O <sub>2</sub> .

**(1) Bemerkungen zu den Reduktionen**

Eine ausführliche Diskussion der Reduktionen wurde in den Arbeiten von BEHLE et al. [1972a, b] gegeben, somit seien hier nur Abänderungen bei der Berechnung der Gelände- und der Plattenreduktion kurz erwähnt.

Die Geländereduktion wird auch weiterhin für jede Station in drei Schritten durchgeführt, doch sind die Grenzen der einzelnen Bereiche und das Verfahren für den Mittelbereich geändert worden:

- (a) Fernbereich, 167 km (Hayford-Zone O<sub>2</sub>) bis ca. 600 m,
- (b) Mittelbereich, ca. 600 m bis 170 m,
- (c) Nahbereich, 170 m bis 0 m.

Als Grundlage des Reduktionsverfahrens für den Fernbereich dient auch hier das Verfahren von EHRISMANN, MÜLLER, ROSENBAACH und SPERLICH [1966]. — Für den Mittelbereich wurde ein neu erarbeitetes Verfahren angewandt [EHRISMANN und LETTAU 1971]. Es liefert einen nahtlosen Übergang von einer Einteilung des Geländes in Parallelepipede bei der Fernreduktion zu einer Einteilung in Zylinderringausschnitte für den Nahbereich nach SCHLEUSENER [1940]. Die Wirkung der Kugelkalotte zwischen dem Stations- und dem Bezugsniveau wird bis zur Hayford-Zone O<sub>2</sub> mit Hilfe der von BAESCHLIN [1948] angegebenen Formel exakt bestimmt.

Als Bezugshöhe gilt für die Freiluft- und Bouguerreduktion das Niveau der Adria.

## (2) Genauigkeit

Für die Genauigkeit der Schwereanomalie ergibt sich aufgrund der über große Höhenbereiche selbst erstellten Nivellements und der schwer zu erfassenden topographischen Nahreduktion nach vorsichtiger Schätzung:

Freiluftanomalie: ca.  $\pm 0.1$  mgal,

Bougueranomalie: ca.  $\pm 0.2$  mgal.

Als Reduktionsdichte wurde der übliche Wert  $2,67 \text{ g/cm}^3$  benutzt und als fehlerfrei angesehen. Abweichungen der wahren Dichte vom angenommenen Wert kommen in den Schwereanomalien mit zum Ausdruck.

## 3.2. Schwereprofile

Die Meßergebnisse sind übersichtsmäßig nach dem derzeitigen Stand der Bearbeitung in den Abb. 4–6 wiedergegeben.

Im oberen Teil der Abbildungen ist eine starke lineare Abhängigkeit der Freiluftanomalien von der Stationshöhe zu erkennen. Die diesbezüglichen Korrelationskoeffizienten für alle Profile liegen bei 0,99.

Im mittleren Teil der Abb. 4–6 sind die gemessene Bougueranomalie und zum Vergleich die Regionalanomalie nach MAKRIIS von Abb. 3 eingetragen.

Der untere Teil der Abb. 4–6 gibt das geologische Profil nach Abb. 2 wieder. Die eingetragenen Dichtewerte beruhen auf Messungen an Handstücken (Ausführung:

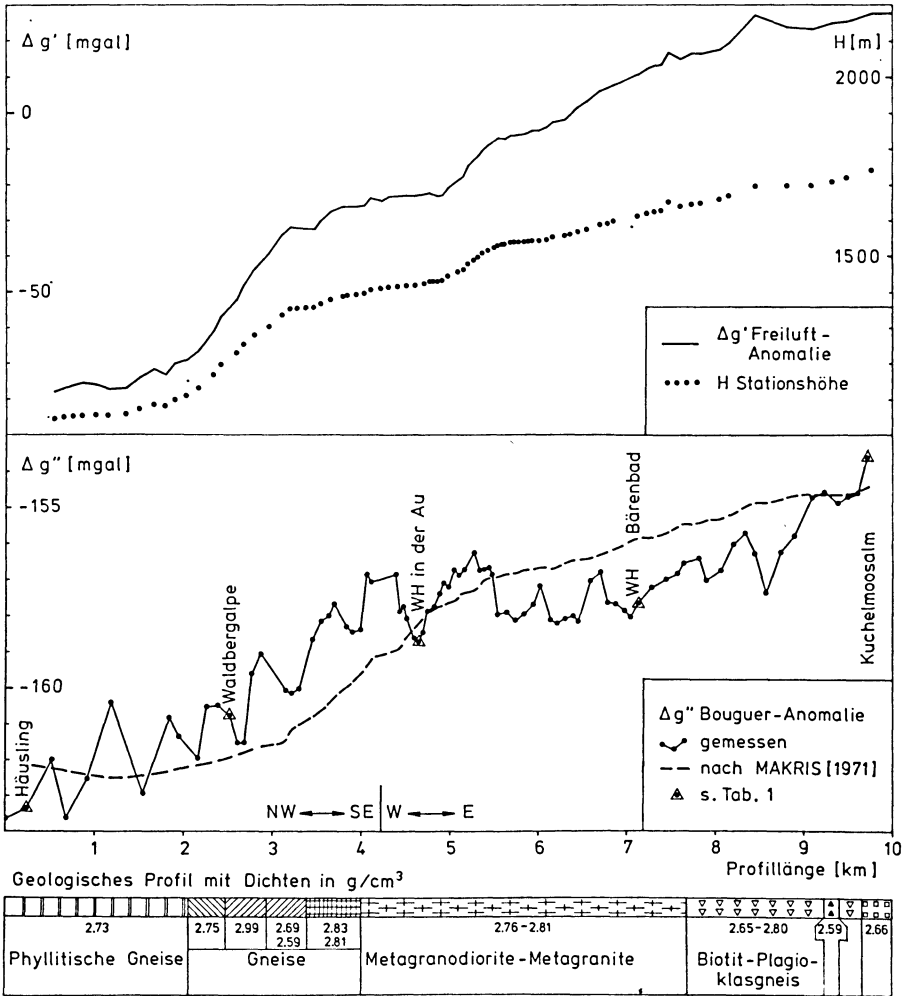


Abb. 4: Profil I: Zillergrund

Profile I: Zillergrund

*H*: Höhe der Gravimeterstation  
Elevation of gravity station

$\Delta g'$ : Freiluftanomalie  
Free air anomaly

$\Delta g''$ : Bougueranomalie  
Bouguer anomaly

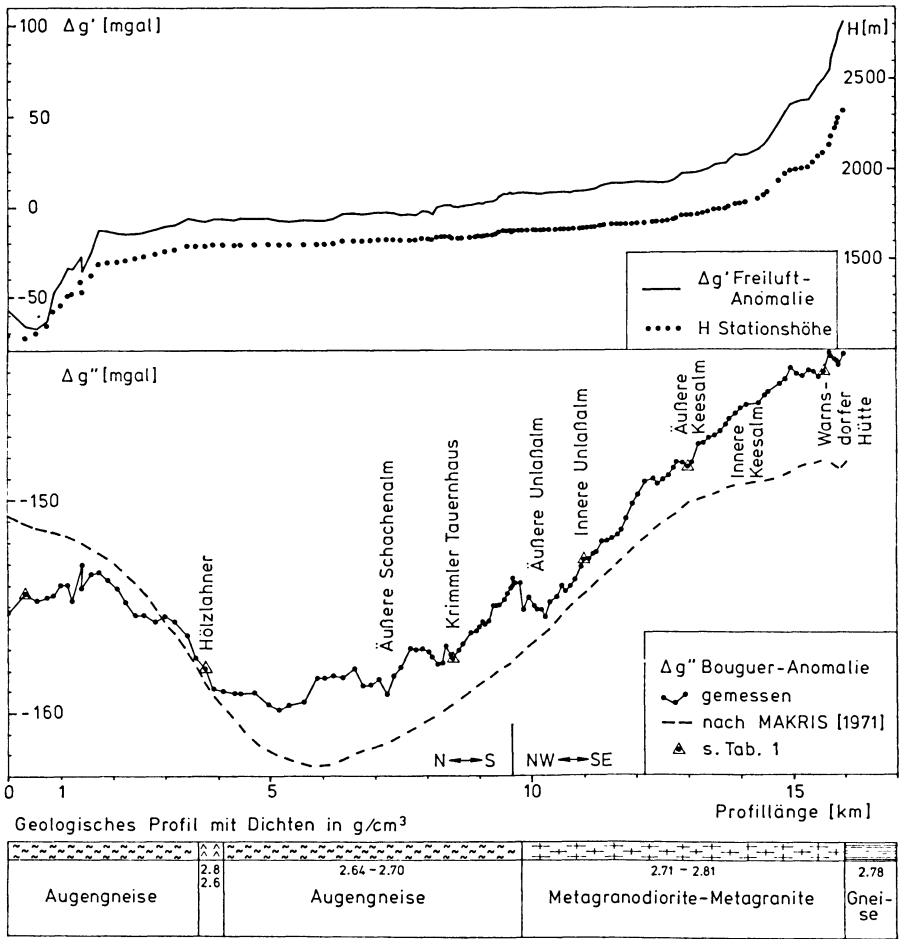


Abb. 5: Profil II: Krimmler Achental  
 Profile II: Krimmler Achental  
*H, Δg', Δg''*: s. Abb. 4

Bundesanstalt für Bodenforschung Hannover und Mineralogisch-Petrographisches Institut der Universität Kiel).

Eine direkte Auswertung der gemessenen Anomalienkurve im Zusammenhang mit den Dichtefeldern des geologischen Profils ist nicht möglich, da die gemessene Anomalie außer dem Regionalfeld noch Wirkungen von kleinräumigen Dichteunterschieden, z.B. von Talschottern, enthält.

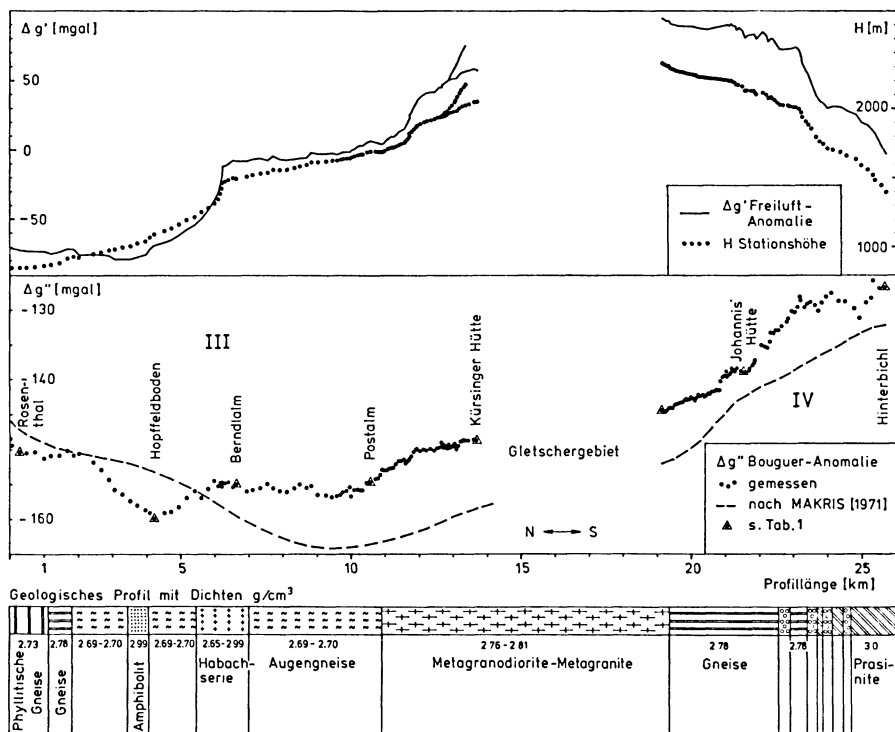


Abb. 6: Profile III, IV: Obersulzbachtal; Dorfer Tal  
 Profiles III, IV: Obersulzbachtal; Dorfer Tal  
 H,  $\Delta g'$ ,  $\Delta g''$ : s. Abb. 4

### 3.3. Regionale und lokale Schwereanteile

Aus großräumigen gravimetrischen Vermessungen ist bekannt, daß im Bereich des Alpenhauptkamms das Bouguerschwerefeld ein Minimum besitzt. Die Profile I bis IV fallen in den Bereich des Schwereminimums der Hohen Tauern, s. Abb. 3. Es ist daher unerlässlich, das lokale Schwerefeld, hervorgerufen durch die hier interessierenden Gesteinspakete unterschiedlicher Dichte in der oberen Erdkruste, von dem regionalen Schwerefeld, bedingt durch den Aufbau der Alpen in der Tiefe, zu trennen.

#### (1) Das Regionalfeld

Als Grundlage für eine erste Untersuchung zum Verhalten der regionalen Bouguer-anomalie diente eine Ausschnittvergrößerung des Isogammenplans nach MAKRIS [1971], s. Abb. 3.

Aus weiteren gezielten Ausschnittvergrößerungen und nach Auffächerung der Isolinien bis zu einem Abstand von 1 mgal wurden mittels linearer Interpolation für alle Meßpunkte regionale Bouguerwerte bestimmt und in die Abb. 4–6 eingezeichnet.

Die Abbildungen zeigen klar, daß die Übernahme des Regionalfeldes aus Abb. 3 für Interpretationszwecke nicht ausreicht; das ist nicht verwunderlich, da das Übersichtsbild der Abb. 3 das Ergebnis einer recht weitmaschigen Schweremessung darstellt.

Einen gangbaren Weg, um dennoch befriedigende Aussagen über das Verhalten des Regionalfeldes machen zu können, bietet die statistische Analyse der gemessenen Bougueranomalien. Da bei dem vorliegenden Datenmaterial ungleichabständige Wertereihen bei nicht gleichmäßiger Punktdichte auftreten, mußten die bekannten Verfahren der Glättung und Regressionsanalyse modifiziert werden [LEPPICH 1972].

In Abb. 7 oben ist das Ergebnis einer Regressionsanalyse der Bougueranomalien auf den Profilen III und IV dargestellt. Die einzelnen Punkte zeigen die gemessene Bougueranomalie, die gestrichelte Linie ist die regionale Anomalie nach MAKRIŠ, vgl. auch Abb. 6, und die durchgezogene Kurve gibt das Regressionspolynom 3. Grades wieder.

Um zu vermeiden, daß Schwerewerte, die stark dem Einfluß lokaler Dichteinhomogenitäten unterliegen, den Verlauf des Polynoms mit unangemessen hohem Gewicht mitbestimmen, wurden nur Stationen aus folgenden Profilbereichen zur Analyse herangezogen:

Bereich 1: 0–5 km; Bereich 2: 20,5–22,5 km; Bereich 3: 24,5–25,7 km.

Wie aus Abb. 7 ersichtlich ist, kommt das durch ein Polynom 3. Grades angepaßte Regionalfeld dem Vergleichsregionalfeld nach MAKRIŠ sehr nahe.

## (2) Das Restfeld

Das Restfeld, gegeben durch die Differenz der gemessenen Bougueranomalie und dem berechneten Regionalfeld, ist im unteren Teil der Abb. 7 durch Punkte dargestellt. Durch eine exponentiale Glättung wurden die Anomalien kleinster geologischer Strukturen unterdrückt; das Ergebnis zeigt die durchgezogene Kurve.

Aus der Gegenüberstellung der Restanomalie in Abb. 7 mit dem geologischen Profil in Abb. 6 läßt sich eine erste vorsichtige Interpretation herleiten. Der zu erwartende Anstieg der Anomalie an der Grenze Augengneise/Metagranodiorite-Metagranite mit dem Dichteunterschied  $2,69 - 2,70/2,76 - 2,81 \text{ g/cm}^3$  tritt bei 11 km deutlich hervor. — Ein Übergang an der südlichen Grenze der Metagranodiorite-Metagranite zu den Gneisen der unteren Schieferhülle ist zwischen den Profilkilometern 20 und 19 ebenfalls zu erkennen.

Weitergehende Untersuchungen zur Berechnung und Interpretation von Regionalfeld und Restfeld fallen außerhalb des Rahmens dieser Publikation; s. hierzu auch Abschn. 4.



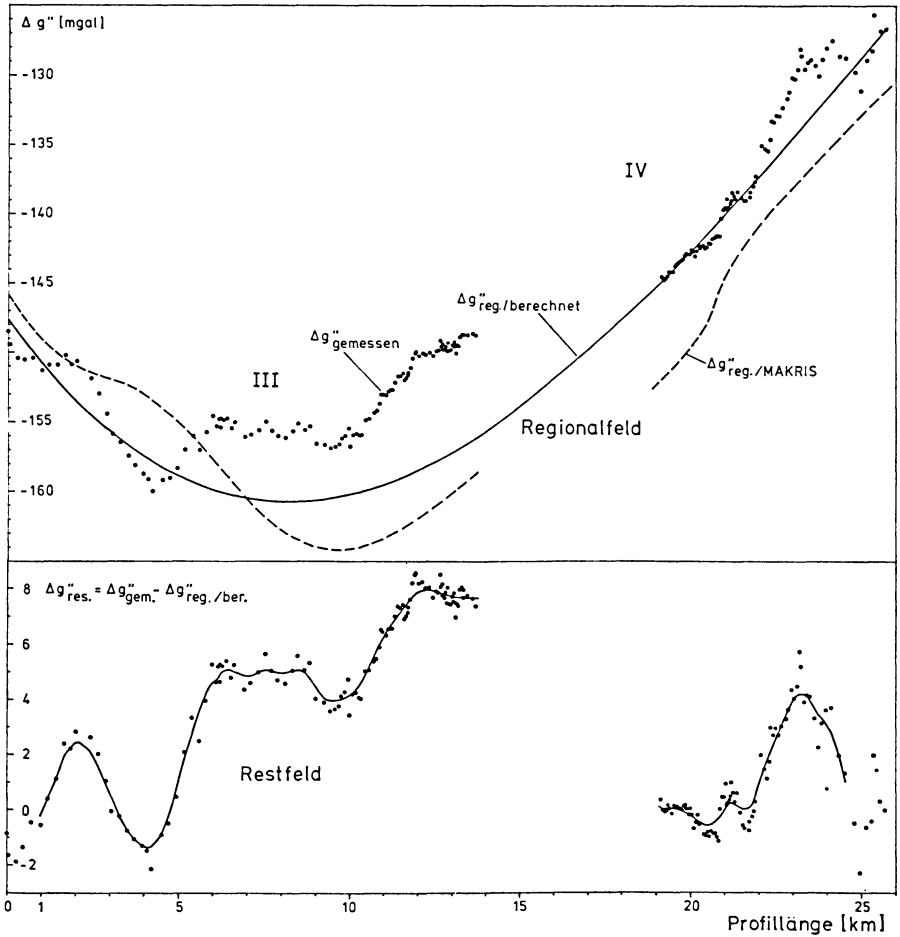


Abb. 7: Profile III, IV: Regional- und Restfeld

Profiles III, IV: Regional and residual anomalies

### 3.4. Stationsliste (Auszug)

Zur Ergänzung der übersichtsmäßigen Schwereprofile in Abschn. 3.2 wird in Tabelle 1 ein Auszug aus der Stationsliste zusammengestellt. Die wiedergegebenen Stationen wurden so ausgewählt, daß die Punktdichte der von BEHLE et al. [1972a, b] entspricht.

In den Abb. 4–6 sind die zugehörigen Bougueranomalien mit einem Dreieck gekennzeichnet.

Tabelle 1: Verzeichnis der gravimetrischen Stationen (Auszug)  
List of gravity stations (extract)

Station Nr.	Länge		Breite		Höhe über der Adria		Schwere G	Geländereduktion			Frei- anomalie $\Delta g'$	$\delta g_{\text{Top}}$ + $\Delta g'$	Bouguer- anomalie $\Delta g'$
	L	L	B	B	H	H		nah GR 1	mittel GR 2	fern GR 3			
	grd	min	grd	min	m	m	mgal	mgal	mgal	mgal	mgal	mgal	mgal
68002	11	58,13	47	8,77	1058,64	980408,80	0,23	1,02	42,49	43,75	-87,49	-43,74	-163,35
68013	11	59,68	47	8,69	1147,46	980391,19	0,21	1,89	43,40	45,51	-76,67	-31,16	-160,77
68034	12	0,67	47	7,34	1266,20	980377,33	0,15	1,35	35,62	37,11	-52,76	-15,64	-158,61
68066	12	2,62	47	7,30	1447,65	980346,02	0,22	1,86	31,26	33,33	-28,01	5,32	-158,05
68086	12	4,72	47	7,10	1753,86	980297,25	0,14	1,23	24,74	26,11	18,01	44,12	-153,61
69002	12	10,13	47	12,68	1069,49	980432,29	0,16	1,54	31,28	32,98	-66,52	-33,53	-154,37
69024	12	10,94	47	10,82	1587,01	980329,74	0,10	1,46	25,13	26,69	-6,57	20,12	-158,89
69053	12	11,47	47	8,37	1621,08	980322,66	0,03	0,50	24,29	24,82	0,54	25,36	-157,48
69085	12	11,77	47	7,03	1676,54	980312,23	0,06	0,81	26,12	26,99	9,24	36,23	-152,83
69107	12	12,98	47	6,16	1750,82	980298,02	0,22	2,05	28,38	30,64	19,26	49,90	-147,49
69128	12	14,71	47	5,58	2090,35	980243,00	0,65	1,38	19,43	21,46	69,89	91,34	-144,08
70003	12	14,73	47	14,55	851,88	980496,33	0,02	0,08	18,24	18,33	-72,44	-54,10	-150,42
70021	12	15,16	47	12,39	1093,94	980421,74	0,25	0,97	31,48	32,71	-69,09	-36,38	-159,97
70037	12	15,65	47	11,13	1499,24	980356,25	0,25	1,40	20,12	21,76	-7,61	14,15	-155,01
70063	12	16,44	47	9,06	1693,55	980307,11	0,24	2,25	27,43	29,92	6,32	36,24	-154,73
70116	12	17,29	47	7,47	2052,31	980245,22	0,32	1,73	22,82	24,87	57,53	82,40	-148,76
71001	12	20,09	47	5,05	2328,31	980193,17	0,66	2,57	20,02	23,25	94,29	117,54	-144,49
71047	12	20,07	47	3,62	2131,23	980239,59	0,22	0,24	18,51	18,97	82,03	101,01	-138,99
71085	12	20,28	47	1,32	1398,54	980377,55	0,90	2,53	30,40	33,83	-2,66	31,17	-126,68

#### 4. Fortführung der Arbeit

In Abschn. 3 wurde lediglich eine übersichtsmäßige Darstellung der Meßergebnisse vorgelegt. Eine weitergehende Bearbeitung entsprechend dem Aufgabenkatalog von Abschn. 1–4 ist im Gange; über die Ergebnisse wird zu gegebener Zeit berichtet werden.

#### 5. Referenzen

Wir danken für die wohlwollende Unterstützung und Förderung der gravimetrischen Feldmessungen folgenden Institutionen:

- (1) Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien;
- (2) Bundesministerium für Landesverteidigung der Republik Österreich;
- (3) Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien;
- (4) Felbertauernstraßen AG;

Tabelle 2: Verzeichnis der Mitarbeiter

List of participants

---

Leiter der Forschungsarbeit:	1968/69/70/71: O. ROSENBACH	
Verantwortlicher Sachbearbeiter:	1968/69: W. EHRISMANN 1970/71: O. LETTAU	
Mitarbeiter bei den Feldmessungen:		
1968:	E. BRÜCKL *) W. EHRISMANN V. JENTSCH O. LETTAU W. Schoell P. STEINHAUSER *)	1969: W. EHRISMANN G. JENTZSCH W. LEPPICH O. LETTAU J. PIRUS W. SCHÖLER P. STEINHAUSER *)
1970:	W. EHRISMANN G. GANGL *) H.-J. GÖTZE H. HEMSCHMEIER W. LEPPICH O. LETTAU W. SCHÖLER P. STEINHAUSER *)	1971: H. EDLINGER **) W. EHRISMANN H.-J. GÖTZE H. HÄSEKER W. LEPPICH O. LETTAU H. LICHTENEGGER **) G. MÜLLER W. SCHÖLER P. STEINHAUSER *) F. WALLNER *)

---

\*) Lehrkanzel für Geophysik der Universität Wien

\*\*) II. Lehrkanzel für Geodäsie der TU Graz

Mitarbeiter ohne Kennzeichnung: Institut für Geophysik der TU Clausthal.

- (5) Großglockner-Hochalpenstraßen AG;
- (6) Steyr-Daimler-Puch AG;
- (7) Tauernkraftwerke AG;
- (8) II. Lehrkanzel für Geodäsie der Technischen Hochschule Graz;
- (9) Mineralogisch-Petrographisches Institut der Universität Kiel.

Die Teilnehmer an der Gemeinschaftsarbeit sind in Tabelle 2 namentlich aufgeführt.

Die vorliegende Arbeit stellt ein Teilergebnis von gravimetrischen Untersuchungen im Alpenraum dar, die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt werden, wofür wir sehr zu Dank verpflichtet sind.

### Literatur

- BAESCHLIN, C. F.: Lehrbuch der Geodäsie. Orell Füssli Verlag, Zürich, 1948
- BEHLE, A., W. EHRISMANN, J. MAKRIS, H. MENZEL, C. MORELLI und O. ROSENBACH: Gravimetrische Untersuchungen in den Ostalpen I (Meßgebiet Mittenwald–Innsbruck–Verona). Z. Geophys. 38, 45–74, 1972a
- BEHLE, A., W. EHRISMANN, J. MAKRIS, H. MENZEL, O. ROSENBACH und P. STEINHAUSER: Gravimetrische Untersuchungen in den Ostalpen II (Meßgebiet Salzburg–Kärnten–Tirol). Z. Geophys. 38, 221–242, 1972b
- EHRISMANN, W., G. MÜLLER, O. ROSENBACH und N. SPERLICH: Topographic reduction of gravity measurements by the aid of digital computers. Boll. geofis. teor. ed appl. 8 (29), 3–20, 1966
- EHRISMANN, W., und O. LETTAU: Topographische Reduktion von Schweremessungen in der näheren und weiteren Stationsumgebung mit Digitalrechnern. Arch. Meteor. Geophys. Bioklim., Ser. A, 20, 383–396, 1971
- FRASL, G., und W. FRANK: Einführung in die Geologie und Petrographie des Penninikums im Tauernfenster mit besonderer Berücksichtigung des Mittelabschnittes im Oberpinzgau, Land Salzburg. Der Aufschluß, Sonderheft 15, 30–58, 1966
- JANLE, P., J. MAKRIS und H. MENZEL: Experimental Investigations of the vertical gradient of gravity. Boll. Geofis. teor. ed Appl. 13 (51–52), 254–263, 1971
- KARL, F.: Vergleichende petrographische Studien an den Tonalitgraniten der Hohen Tauern und den Tonalitgraniten einiger periadriatischer Intrusivmassive. Jb. Geol. B.-A. Wien 102, 1–192, 1959
- LEPPICH, W.: Numerische Verfahren zur Berechnung lokaler und regionaler Anteile aus gravimetrischen Wertereihen. Diplomarbeit am Institut für Geophysik der TU Clausthal, 1972
- MAKRIS, J.: Aufbau der Kruste in den Ostalpen aus Schweremessungen und die Ergebnisse der Refraktionsseismik, Hamburger Geophysikalische Einzelschriften 15, 1–65, 1971
- SCHLEUSENER, A.: Nomogramme für Geländeverbesserung von Gravimetermessungen der angewandten Geophysik. Beitr. angew. Geophys. 8 (4), 415–430, 1940
- SCHMIDEGG, O.: Geologische Übersicht der Venedigergruppe. Verh. Geol. B.-A. Wien, 35–54, 1961
- SENFIL, E.: Schwerekarte von Österreich: Bouguer-Isanomalen. Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien, 1965

# **Ein allgemeines Verfahren zur digitalen Berechnung der Schwerewirkung von Modellkörpern<sup>1)</sup>**

## **A Generally Applicable Method to Calculate Gravity Attraction of Model Bodies**

Prof. Dr. Dr. h. c. KARL JUNG zum Gedächtnis

W. EHRISMANN, Hannover<sup>2)</sup>

Eingegangen am 11. Januar 1973

*Zusammenfassung:* Es wird eine allgemein anwendbare Methodik zur Berechnung von Schwerfeldern globaler und lokaler Erdkrustenmodelle mittels Digitalrechnern angegeben.

Aufgrund einer Einteilung in prismenförmige Teilkörper sind für die Berechnung der Attraktion zwei Schritte maßgebend:

Die Diskretisierung von gravitierenden Körpern mit Hilfe von Quadern und Massenlinien und

Genauigkeitsbetrachtungen darüber, inwieweit diese Ersetzbarkeit erlaubt ist.

Es wird die Grenze der Verwendbarkeit von Digitalrechnern aufgrund ihrer internen Arbeitsweise und den dabei auftretenden Approximationsfehlern untersucht.

Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen hinsichtlich der Verwendung von Teilkörpern, deren Schwerewirkungen aufsummiert werden, sind dargestellt.

Rechenanlagen mit monolithischen Hauptspeichern und Betriebssysteme nach dem Konzept des virtuellen Speichers erlauben in naher Zukunft ein rationelles Arbeiten mit dem vorgeschlagenen Verfahren.

Testrechnungen mit synthetischen Modellen und Literaturbeispiele aus der Praxis beschließen die Arbeit.

*Abstract:* A generally applicable method to calculate gravity fields of global and local earth's crust models by means of digital computers is given.

In calculating gravity attraction by the prism method two steps are decisive:

The sectioning of gravitating bodies by means of prismatic blocks and mass lines and precision considerations as to the permissiveness of such replaceability.

The limits of the useability of digital computers owing to the errors of approximation caused by their internal working method are investigated.

---

<sup>1)</sup> Auszug aus einer Dissertation, angefertigt am Institut für Geophysik der TU Clausthal, 1972; s. Literaturverzeichnis, EHRISMANN [1972].

<sup>2)</sup> Dr. WOLFGANG EHRISMANN, Preussag AG, Erdöl und Erdgas, 3 Hannover, Postfach 4829.

The applicabilities and limits as to the use of "sectional bodies" with their accumulated gravitational attractions are described.

Computers with monolithic main storages and operating systems functioning according to the principle of the virtual storage will permit in the near future a rational use of the proposed process.

Test calculations with synthetic models and practical examples taken from technical literature are indicated at the end of this paper.

## **1. Einleitung**

### **1.1. Allgemeine Bemerkungen**

Die numerische Bearbeitung von Schweremessungen findet in der Gravimetrie und der physikalischen Geodäsie Anwendung bei der Lösung der potentialtheoretisch direkten Aufgabe. Als direkte Aufgabe wird die Bestimmung des äußeren Gravitationsfeldes eines vorgegebenen gravitierenden Körpers bezeichnet. Eine solche Aufgabe hat stets eine eindeutige Lösung. Ihre Ermittlung ist in den meisten Fällen prinzipiell ohne Schwierigkeiten möglich, jedoch oft nicht in geschlossener Form.

Man wendet daher bei der Lösung der direkten Aufgabe meistens die Methoden der numerischen Integration an. Hierzu werden die realen geologischen Körper schrittweise durch einfache geometrische Körper approximiert.

Die vorgelegte Arbeit befaßt sich mit folgenden Aufgaben:

Darstellung, Diskussion und Einordnung eines neu entwickelten, allgemein gültigen Verfahrens zur numerischen Bearbeitung von Schweremessungen und die Demonstration seiner Anwendung bei Analysen von geologischen Modellen mittels Digitalrechnern.

Die Ergebnisse finden Anwendung einerseits in der Gravimetrie bei der quantitativen Interpretation sowohl globaler als auch lokaler Schwereanomalien, andererseits in der physikalischen Geodäsie bei der Bearbeitung des Problems der Isostasie, der Normalschwere und bei synthetischen Untersuchungen.

Folgende Einschränkungen werden für die vorgelegte Abhandlung in Kauf genommen:

Vernachlässigung der Rotation der Erde und damit der Abplattung; Ausgangspunkt für alle Betrachtungen ist eine ruhende Kugel mit dem Radius  $R=6371$  km.

Unter dem Begriff „Schwereanomalie“ wird nur die Änderung des Betrages des Beschleunigungsvektors verstanden.

### **1.2. Derzeitiger Kenntnisstand**

Die numerischen Verfahren finden Anwendung bei der topographischen Reduktion und bei der Interpretation von Schweremessungen mittels Modellrechnungen.

Bei der *topographischen Reduktion* wird die Wirkung der topographischen Massen, die zwischen Stationsniveau und Geländeoberfläche liegen bzw. fehlen, auf die Schwereintensität in einem Beobachtungspunkt bestimmt. Einen ausführlichen Überblick über die hierzu entwickelten Verfahren gibt JUNG [1961].

Für isostatische Reduktionen legt TOLSTOY [1947] ein erstes umfangreiches Konzept zu einer stationsunabhängigen Gebietsaufteilung vor. HEISKANEN [1953] greift die hierbei entstehende Problematik auf; er benutzt Gradabteilungselemente zur Topographieaufteilung und ersetzt die entstehenden Parallelepipede durch Masselinien. Die Herleitung der hierzu notwendigen Formeln zeigt KUKKAMÄKI [1955].

Mit Reduktionen für gravimetrische Prospektionsmessungen befassen sich SANDBERG [1958], BOTT [1959], KANE [1962] und PICK [1963].

Allen Reduktionsverfahren ist die Benutzung von Näherungsformeln für die Attraktionsberechnung der bei der Topographieapproximation entstehenden Elemente gemeinsam, da umfangreiche numerische Rechnungen mit den damals zur Verfügung stehenden Digitalrechnern kaum möglich waren. Mitte der sechziger Jahre finden für prismatische Körper die Potentiale und ihre Ableitungen in geschlossener Form (MADER [1951]) Eingang in die Reduktions- und Modellrechnungen. Die Arbeiten von NAGY [1966a, 1966b], CARROZZO [1966], EHRISMANN, MÜLLER, ROSENBACH und SPERLICH [1966] sowie EHRISMANN und LETTAU [1971] führen Möglichkeiten zu Reduktionsrechnungen mit Hilfe leistungsfähiger Computer vor.

Bei *Modellrechnungen* kristallisieren sich zwei- und dreidimensionale Betrachtungsweisen heraus, bei welchen die wirklichen Störmassen durch Polygonquerschnitte, Schichten von Polygonquerschnitten oder durch Konfigurationen einfacher geometrischer Körper ersetzt werden.

Computerorientierte Lösungswege für den zweidimensionalen Fall beschreiben für Polygonquerschnitte TALWANI, WORZEL und LANDISMAN [1959] sowie TAKIN und TALWANI [1966]. Einen Sonderfall der Polygonquerschnitte stellen zweidimensionale Querschnitte dar. BOTT [1960], TANNER [1967] und NEGI und GARDE [1969] benutzen sie als Grundlage zur Auswertung.

Den Aufbau dreidimensionaler Körper durch Stapelung horizontal liegender und mit homogener Dichte belegter Polygonquerschnitte zeigen TALWANI und EWING [1960]. KOLBENHEYER [1967a] ergänzt diese Untersuchung durch die Berechnung der horizontalen Komponenten der Schwere sowie der ersten vertikalen Ableitung. Sonderfälle hierzu sind die Herleitungen für die Wirkung eines horizontalen, rechteckigen Polygons (KOLBENHEYER [1968]) bzw. eines vertikalen Prismas mit beliebigem rechtwinkligen Querschnitt (KOLBENHEYER [1967b]). Als Alternative zu den Polygonverfahren bietet sich eine Modellapproximation durch Quader an. Für den ebenen Fall zeigen hierzu CORDELL und HENDERSON [1968] Lösungsansätze.

## 2. Grundlagen der Methodik

Unter der Anwendung geeignet konzipierter und dynamisch untereinander verbundener Komponenten eines numerischen Verfahrens wird eine Möglichkeit angegeben, das Verhalten der Schwereverteilung digital simulierter Erdkrustenmodelle zu untersuchen.

### 2.1. Diskretisierung von gravitierenden Körpern mit Hilfe von Elementarkörpern

Die räumliche Verteilung geologischer Strukturen ist derart komplex, daß es mathematisch nicht möglich ist, sie geschlossen darzustellen. Zur Berechnung ihrer Schwerkraftwirkung sind sie in solche Elementarkörper zu zerlegen, deren Attraktionen sich exakt oder näherungsweise berechnen lassen. Beruht die Behandlung allgemeiner geologischer und geophysikalischer Fragen auf der Basis von Schweredifferenzen, so darf man als Vernachlässigung die Erde als eine Kugel annehmen. Bezieht man den Raum  $R$  der Kugel auf Kugelkoordinaten, so entstehen Raumelemente  $\Delta R$  gemäß Abb. 1. Mit einer geeigneten Konfiguration hinreichend kleiner Raumelemente – im folgenden Elementarkörper genannt – lassen sich geologische Strukturen approximieren; ein schematisches Beispiel hierfür zeigt Abb. 2. Das Volumen der Raumelemente ist festgelegt durch die Größe von Gradabteilungsflächen und die Mittelwerte der Höhen und Dichten der zu approximierenden geologischen Strukturen über diesen. Die Grundflächen der Elementarkörper ändern sich parallel und senkrecht zur Kugelfläche. Zum Tragen kommt einmal die Konvergenz der Meridiane zu den Polen hin und zum anderen diejenige der Radien durch die Ecken der Gradabteilungsflächen zum Kugelmittelpunkt hin.

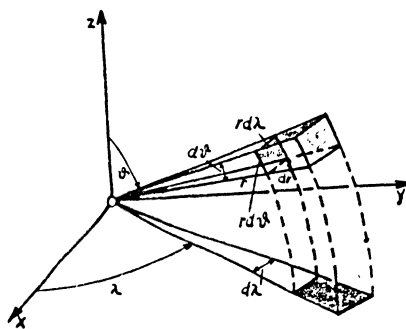


Abb. 1: Raumelement in Kugelkoordinaten

$\lambda$ : geographische Länge,  $\vartheta$ : Poldistanz,  $\varphi = 90^\circ - \vartheta$ : geographische Breite,  $r$ : Radius

Element of space in spherical coordinates

$\lambda$ : geographical longitude,  $\vartheta$ : angular distance from the pole,  $\varphi = 90^\circ - \vartheta$ : geographical latitude,  $r$ : radius



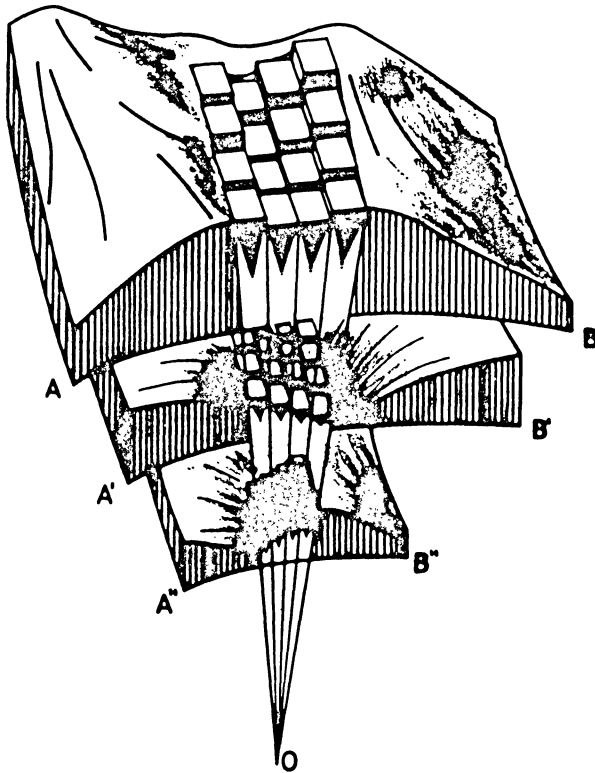


Abb. 2: Zerlegung eines geologischen Modells in Elementarkörper  
(schematische Darstellung)

Configuration of a geological model in elementary bodies (schematic)

Bedingt durch eine derart schematisierte Aufteilung lassen sich die Höhen und Dichten der einzelnen Elementarkörper in Zahlenreihen darstellen und diese in einer Serie zweidimensionaler Arrays anordnen. Erfolgt die Indizierung der Arrayelemente derart, daß sie die geographische Position der Elementarkörper wiedergeben kann, so liegen alle für die digitale Bearbeitung eines geologischen Modells notwendigen Informationen vor.

## 2.2. Das Schwerfeld der Elementarkörper

Die allgemeine Gültigkeit des abzuleitenden Formelapparates hängt von den in den Ausdrücken für die Attraktion der Elementarkörper auftretenden veränderlichen Größen und ihren Lagen relativ zum Aufpunkt ab. Diese Parameter sind so zu wählen, daß sie aus einer minimalen Zahl von Ausgangsdaten, die ein Modell simulieren, auf einfache Weise numerisch bestimmt werden können.

Die Schwerewirkung eines Raumelementes aus dem Vollraum einer Kugel bez. eines beliebig auf der Kugelfläche gelegenen Aufpunktes läßt sich nicht elementar bestimmen. Entstehen jedoch bei der Diskretisierung hinreichend kleine Elementarkörper, so darf man sie durch Quader approximieren. Die Gültigkeit dieser Annahme wird in Abschnitt 2.4 gezeigt.

a) Die Schwerewirkung eines Prismas mit rechteckiger Grundfläche

Abb. 3 zeigt die zur Berechnung der Attraktion eines Prismas über einer Gradabteilungsfläche bez. eines außerhalb gelegenen Aufpunktes verwendeten Koordinatensysteme. Der Aufpunkt  $S$  habe die Länge  $\lambda_S$ , den Polabstand  $\vartheta_S$  und die Entfernung  $R = R_0 + H_S$  vom Erdmittelpunkt mit  $R_0 = \sqrt[3]{a^2 c}$ , wobei  $a$  der Äquatorradius und  $c$  der Polradius ist;  $H_S$  ist die Höhe des Aufpunktes über NN. Die Grundfläche des Prismas, eine Gradabteilungsfläche, ist durch den Abstand  $\Delta\lambda$  zweier Meridiane und  $\Delta\vartheta$  zweier Breitenkreise gegeben.

Stellt  $\bar{H}$  die mittlere Höhe des zu approximierenden Modellteiles über der Basis dar, so ist die Höhe des Prismas bez. des Niveaus durch  $S$  gegeben zu  $h = \bar{H} - H_S$ . Nähert

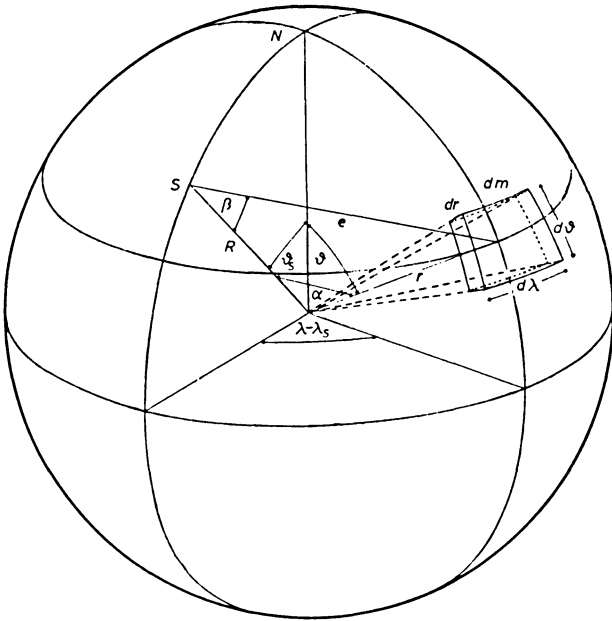


Abb. 3: Koordinatensysteme zur Berechnung der Schwerewirkung eines Prismas in  $M$  bez. eines Aufpunktes  $S$

Notations used in the computation of the gravitational attraction of a prism located at  $M$  relative to  $S$

man die trapezförmige, sphärische Gradabteilungsfläche durch ein ebenes Rechteck an, so entsteht ein Quader mit folgenden Dimensionen:

$$(1) \text{ Kantenlänge in } N, S\text{-Richtung: } a = R \Delta \vartheta$$

(2) Kantenlänge in  $E, W$ -Richtung:  $b = R \sin \vartheta_m \Delta \lambda$ , wenn  $\vartheta_m$  der Polabstand von  $M$  ist und

$$(3) \text{ Höhe: } h = \bar{H} - H_S.$$

Die Schwerewirkung des Quaders im Aufpunkt  $S$  wird in einem  $(x, y, z)$ -System erfaßt, das parallel zu einem kartesischen  $(x', y', z')$ -System in  $M$  liegt. Die  $x'$ -Achse ist in Nord, Süd-, die  $y'$ -Achse in West, Ost- und die  $z'$ -Achse in vertikaler Richtung orientiert (s. Abb. 3).

Die Herleitung der Beziehungen zwischen den  $x, y, z$ -Koordinaten von  $M$  und den geographischen Koordinaten der Punkte  $S$  und  $M$  findet man bei EHRISMANN und LETTAU [1971].

Für die erste Ableitung des Gravitationspotentials  $V$  nach  $x$  eines Quaders gilt nach JUNG [1961] der Ansatz:

$$V_x = f \rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} x F(y, z) dx, dy, dz$$

mit:

$$F(y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

$f$ : Attraktionskonstante,  $\rho$ : Dichte.

Die Integration kann nach NAGY [1966 b] erfolgen, sie bereitet keine Schwierigkeiten.

Um die Vertikalkomponente  $G$  der Attraktion in  $S$  zu erhalten, muß der Vektor  $\vec{g} = (V_x, V_y, V_z)$  mit dem Einheitsvektor  $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$  skalar multipliziert werden:

$$G = e_x V_x + e_y V_y + e_z V_z.$$

Die Komponenten des Vektors  $\vec{e}$  sind Funktionen der Koordinaten des Punktes  $M$ :

$$e_x = -\frac{x}{R}, \quad e_y = -\frac{y}{R} \quad \text{und} \quad e_z = 1 - \frac{z}{R}.$$

### b) Die Schwerewirkung einer Masselinie

Auch für die heute verwendeten Digitalrechner bedeutet die unhandliche Quaderformel einen großen Rechenzeitaufwand. Es ist daher die Ersetzung des exakten Ausdrucks durch eine Näherungsformel anzustreben.

Ohne nennenswerte Einbuße in der Genauigkeit (vgl. Abschnitt 2.3.1) kann ein Quader für bestimmte Bereiche durch eine Massenlinie, die in seiner Mittelachse liegt, angenähert werden. Zur Berechnung der Vertikalkomponente der Schwere einer Massenlinie sei auf den Lösungsvorschlag von KUKKAMÄKI [1955] verwiesen.

### 2.3. Numerische Berechnung der Schwereverteilung mit Digitalrechnern

Abb. 4 zeigt die Skizze des Meridianschnitts einer Kugelkalotte  $ABCD$ . Ersichtlich liefert die Radialprojektion der Gradabteilungsflächen in NN auf tiefer liegende Niveaulflächen Flächen mit abnehmenden Kantenlängen. Die konischen Körper werden durch Quader ersetzt.

Die in der überhöhten Darstellung auftretenden Überlappungen und Spalten zwischen den einzelnen Elementen spielen keine Rolle, wenn die Quaderdimensionen hinreichend klein sind. Bei den in Abschnitt 2.4 beschriebenen Testrechnungen ist z. B.  $\Delta \vartheta = \Delta \lambda = 7,5'$  und die Tiefe  $h \approx -45$  km.

Diese Einteilung klappt stets, wenn der Aufpunkt im Inneren einer Gradabteilungsfläche liegt. Fällt er jedoch auf eine Rasterlinie, bleibt bei einer automatischen An-

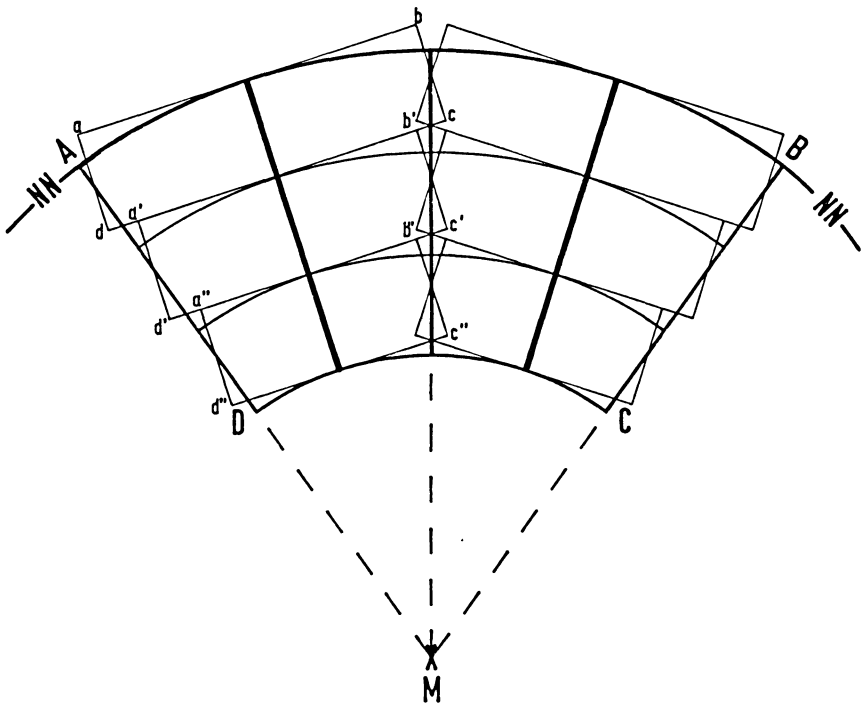


Abb. 4: Meridianschnitt einer Kugelkalotte und ihre Approximation durch Elementarkörper  
Spherical shell sector and the approximation with elementary bodies

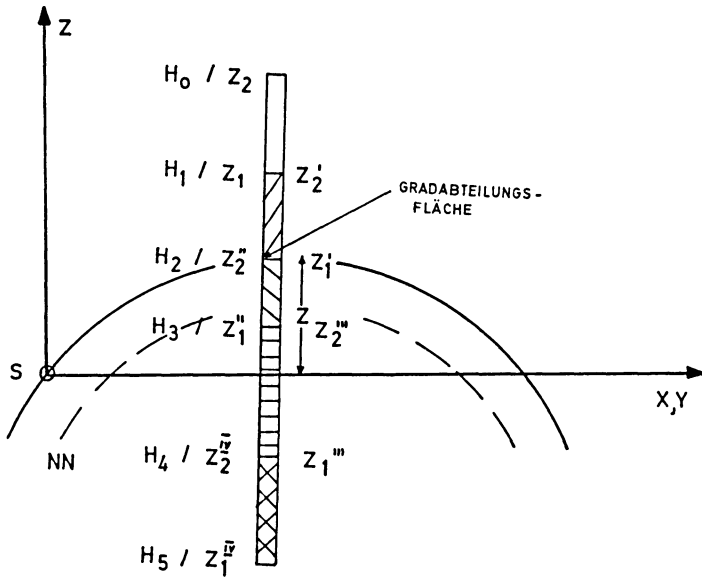


Abb. 5: Vertikale Erstreckung von Elementarkörpern (Skizze)  $H_i$ -Werte bezogen auf NN  $Z_i$ -Werte im stationsbezogenen  $x, y, z$ -System

Vertical elongation of elementary bodies (draft)  $H_i$ -values referred to msl  $Z_i$ -values in the station oriented  $x, y, z$ -system

wendung des Verfahrens eine Lücke. In diesem Fall werden die in der Nachbarschaft des Aufpunktes liegenden Elementarkörper eben erfaßt.

Elementarkörper an den Polen müssen entsprechend ihrer Konfiguration gesondert behandelt werden.

Abb. 5 zeigt eine mögliche vertikale Erstreckung von Elementarkörpern über einer Gradabteilungsfläche.

### 2.3.1. Maschinenbedingte Probleme bezüglich der Genauigkeit digitaler Rechanlagen

In den umfangreichen Ausdrücken für die Attraktion der Elementarkörper treten die verschiedenartigsten transzendenten Funktionen auf. Diese Funktionen liegen „out of line“ vor (geschlossene Unterprogramme), sie werden hierbei polynomial approximiert. Es ist nun zunächst zu überprüfen, inwieweit sich die in den out-of-line-Funktionen entstehenden arithmetischen Rundungsfehler akkumulieren und wie groß ihr Einfluß auf die Ergebnisse der Schwerewerte der Elementarkörper ist.

Eine ins Einzelne gehende Untersuchung würde ein eingehendes Studium des Einflusses vieler miteinander konkurrierender Faktoren und ihre sorgfältige Ausbalancierung erfordern. Deshalb erfolgt hier keine Detailanalyse der Rechenoperationen, es wird nur das Gesamtergebnis mitgeteilt. Dazu reicht die Feststellung, wie klein der

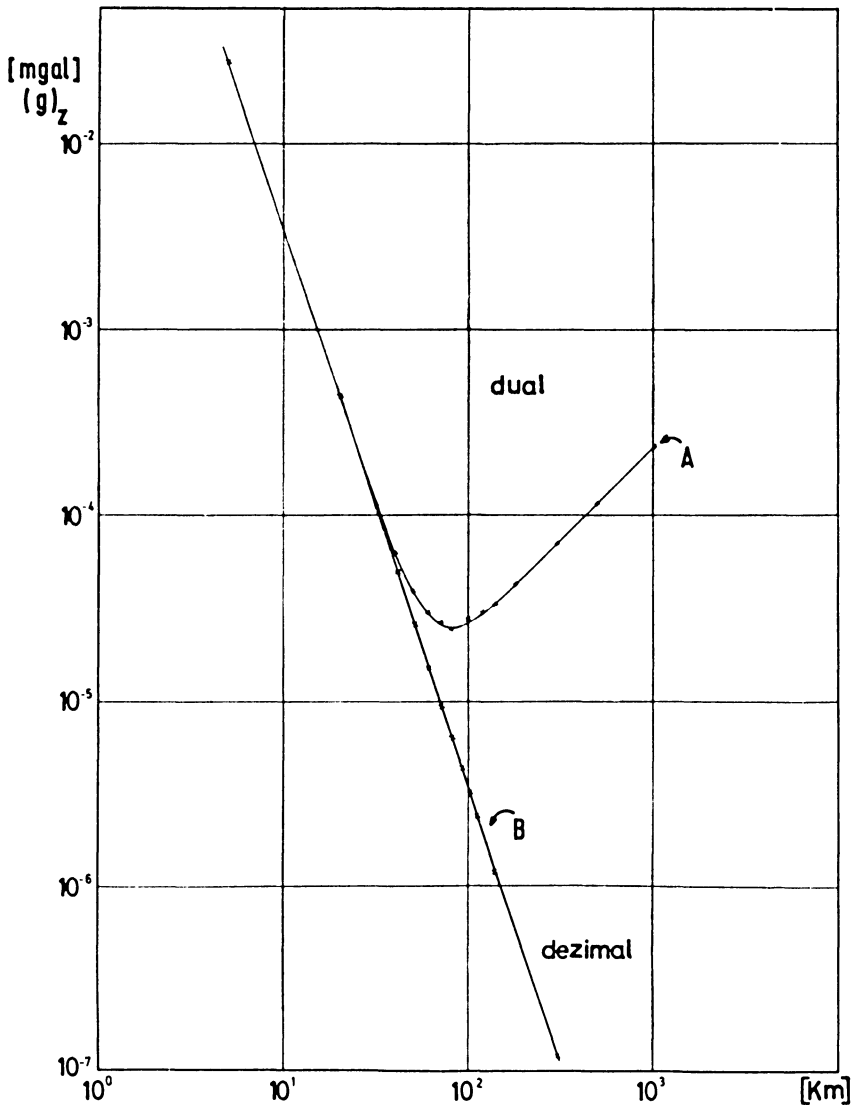
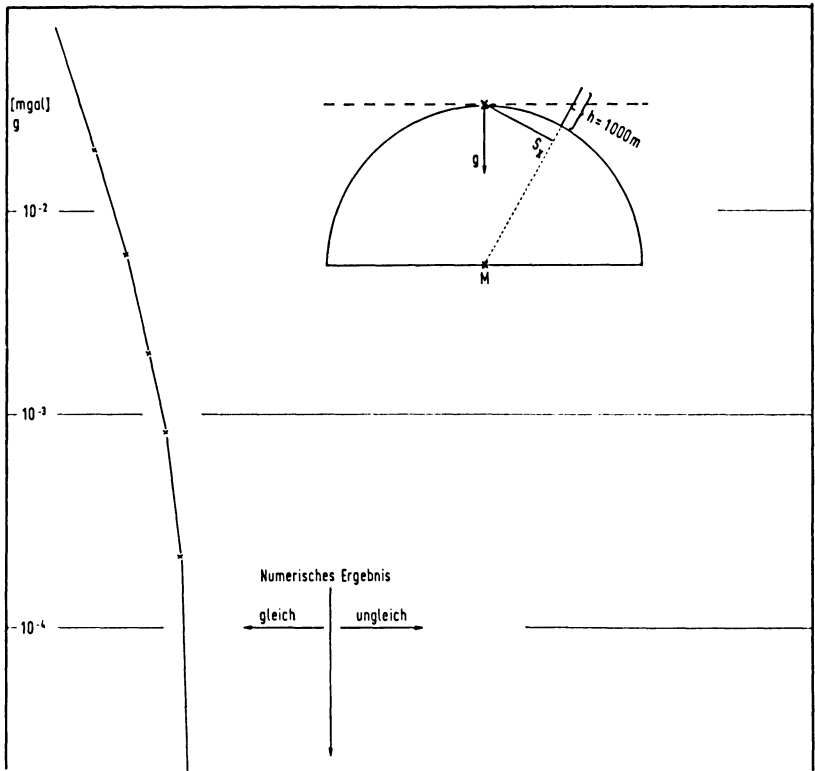


Abb. 6: Vertikalkomponente der Schwere eines Quaders mit den Kantenlängen  $h=a=b=1$  km in Abhängigkeit seiner Entfernung vom Aufpunkt bei ebener Erde – berechnet mit einer Dualmaschine (A) bzw. einer Dezimalmaschine (B)

Vertical component of the gravitational attraction of a prism ( $h=a=b=1$  km) as function of the distance from the attracted point, flat earth—calculated with a dual computer (A) and a decimal computer (B) respectively

Abb. 7: Schwere eines Massenelements, approximiert durch einen Quader bzw. eine Masselinie, in Abhängigkeit seiner Entfernung vom Aufpunkt

Gravitational attraction of an elementary body, approximated by a prism and a mass line respectively, as function of the distance from the attracted point



0       $10^2$        $10^3$        $10^4$        $S_x$  [km]

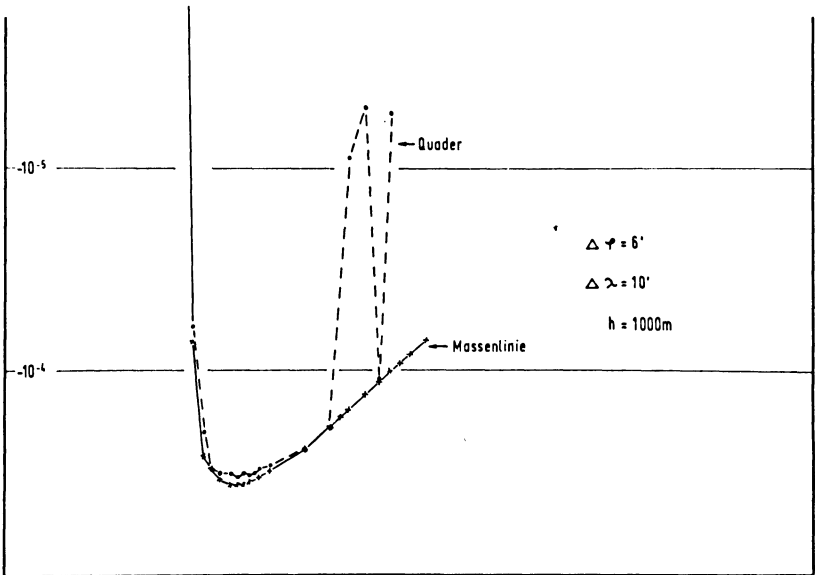


Abb. 7

Schwerewert eines Quaders werden darf, um noch hinreichend genau wiedergegeben zu werden. Zu diesem Zweck wurde die Schwerewirkung von Quadern verschiedener Dimensionen in Abhängigkeit von der Entfernung vom Aufpunkt berechnet. Abb. 6, Kurve *A*, zeigt die Ergebnisse für die Komponente  $(g)_z$  bei ebener Rechnung. Die Rechnungen wurden mit einem FORTRAN IV-Programm auf einer IBM 1130 (Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien) durchgeführt. An der Stelle  $x \approx 100$  km setzt deutlich eine theoretisch nicht begründete Schwerezunahme ein. Da für die ebene Rechnung nur die  $(g)_z$ -Komponente berechnet wird, kann man vermuten, daß sich die Fehler bei der Approximation der transzendenten Funktionen akkumulieren.

Im Gegensatz hierzu treten bei der sphärischen Rechnung, vgl. Abb. 7 und 8, bei der alle 3 Schwerekomponenten berechnet werden müssen, ab unterschiedlichen Entfernungen vom Aufpunkt statistisch verteilte Schwereänderungen auf; man kann das als numerisches Rauschen bezeichnen. Diese Rechnungen wurden mit einem ALGOL-Programm auf einer TR4 (Rechenzentrum der TU Clausthal) durchgeführt.

Das Auftreten des numerischen Rauschens ist unabhängig von der benutzten Programmiersprache. Entscheidend ist vielmehr, welche Datenformate das benutzte Rechensystem bereitstellt und welche Darstellungsformen bei Gleitkommazahlen und Dezimalzahlen es wählt. Da es in ALGOL äußerst kompliziert ist, explizite Typenvereinbarungen von Daten vorzunehmen, die es ermöglichen, den Umfang des Speicherplatzes anzugeben, der den betreffenden Variablen zugeordnet werden soll, wurden einige Untersuchungen mit Hilfe von FORTRAN IV-Programmen durchgeführt. Ausschlaggebend für die Benutzung der ALGOL-Terminologie in dem unter 2.3.2 beschriebenen Programm waren jedoch einige leistungsfähige Besonderheiten gegenüber FORTRAN IV, wie Blockstrukturen, dynamische Felder und Verteilervereinbarungen.

Umfangreiche numerische Rechnungen mit Quadern verschiedener Dimensionen zeigten, daß der Abbruchfehler — Beginn des Rauschens — prinzipiell bei kleiner werdenden Schwerewirkungen auftritt. Es ist nicht gelungen, aus den Quaderdaten Grundfläche, Höhe und Entfernung zum Aufpunkt zu einer eindeutigen Aussage bezüglich der Lage der Abbruchfehler zu kommen. Es läßt sich somit ein allgemeiner Gültigkeitsbereich der Formeln für die Attraktion eines Quaders nicht angeben. Allein gezielt angesetzte Rechnungen erlauben einen Überblick über die auftretenden Fehler und ermöglichen den Aufbau von empirischen Entscheidungsoperatoren für den Gültigkeitsbereich der Quaderformel.

Zur Überprüfung obiger Aussage wurden einige Rechnungen auf einer IBM 1620 (Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien) in dezimaler Zahlendarstellung durchgeführt. Abb. 6, Kurve *B*, zeigt, daß hier kein numerisches Rauschen bei der Schwereabnahme mit zunehmender Entfernung vom Aufpunkt auftritt. Umfangreiche Modellrechnungen kommen jedoch wegen des hohen Zeitaufwandes bei der numerischen Rechnung in dezimaler Zahlendarstellung nicht in Betracht. Attraktionsberechnungen im Bereich des numerischen Rauschens sind somit nur über den



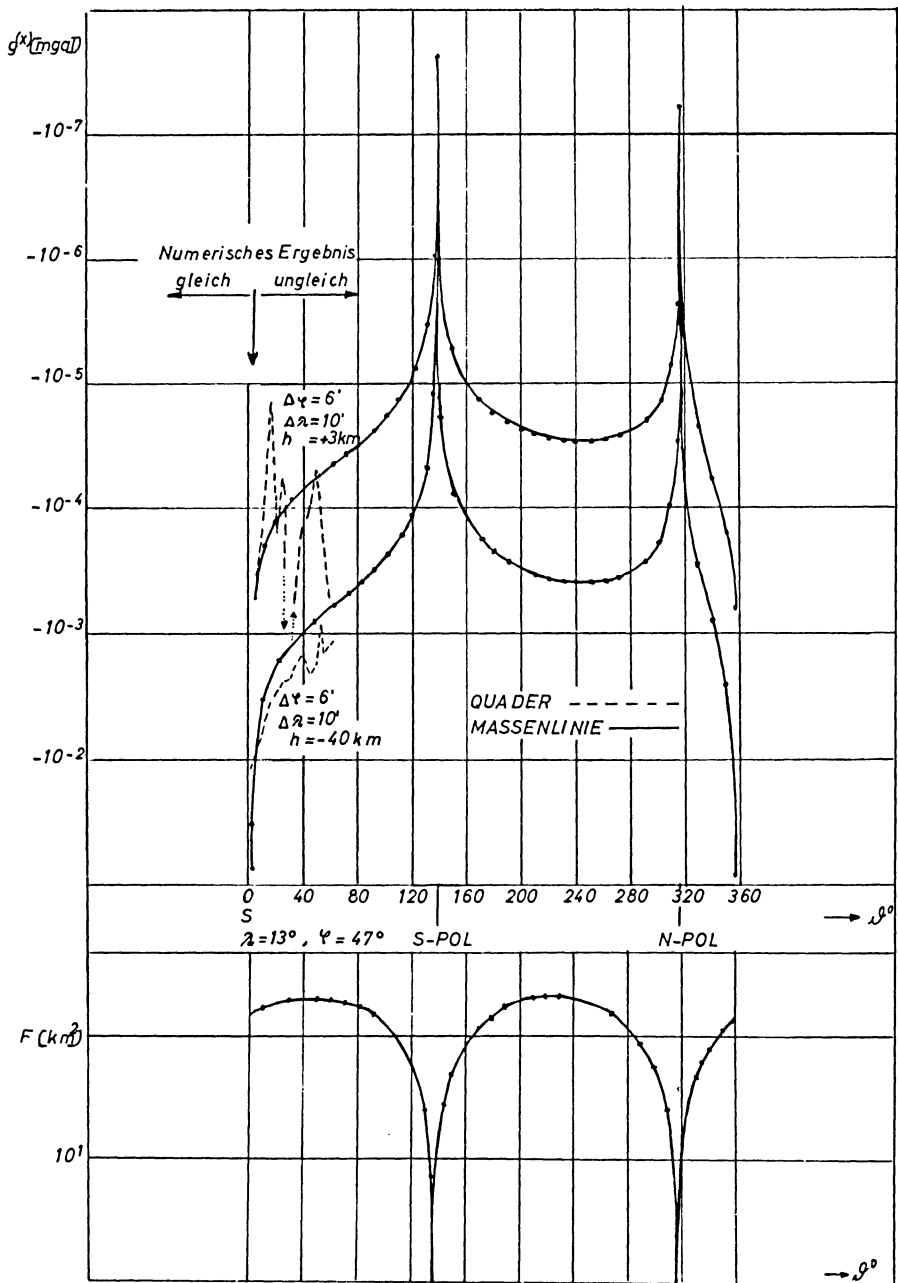


Abb. 8: Schwere zweier vom Aufpunkt weg um die Erde geschobenen Elementarkörper ( $\Delta \varphi, \Delta \lambda, h$ ), jeweils approximiert durch eine Massenlinie bzw. einen Quader (oben); die auftretende Änderung der Grundfläche ist unten dargestellt

Change of the gravitational attraction of two bodies ( $\Delta \varphi, \Delta \lambda, h$ ) shifted around the earth and approximated by a mass line and a prism respectively (top); bottom: change of base

Umweg der mathematischen Approximation des Quaders durch eine geeignete Massenbelegung möglich.

Als günstigste Approximation erweist sich eine in die Mittelachse des Quaders gelegte Massenlinie. Abb. 7 zeigt die Änderung der Schwerewirkung eines Quaders ( $g_{\text{Quad}}$ ) und einer Massenlinie ( $g_{\text{Mali}}$ ) in Abhängigkeit ihrer Entfernung vom Aufpunkt. Es sind für  $y=0$  die  $x$ -Werte des stationsbezogenen Koordinatensystems aufgetragen.

Hierbei zeigt sich, daß ab größer werdenden Entfernungen  $s_x$  die Abweichungen  $g_{\text{Quad}} - g_{\text{Mali}}$  vernachlässigbar klein werden. Die Entfernungen  $s_x$ , ab denen Quader durch Massenlinien ersetzt werden dürfen, hängen von den Dimensionen der Elementarkörper ab und lassen sich nur empirisch ermitteln. Absolute Genauigkeitsbetrachtungen findet man in Abschnitt 2.4.1.

Zur Überprüfung der allgemeinen Gültigkeit der Formel für die Attraktion einer Massenlinie wird ein durch eine Massenlinie ersetztes Prisma vom Aufpunkt weg entlang eines Meridians um die Erde geschoben. Abb. 8 zeigt neben der Schwereänderung im Aufpunkt auch die Änderung der Grundfläche des zugrunde gelegten Elementarkörpers entlang des Verschiebungsweges. Der Aufpunkt liegt in der Position  $\lambda=13^\circ$ ,  $\varphi=47'$  und  $h=0$  m.  $g$  nimmt zum N-Pol hin entsprechend der größer werdenden Entfernung  $\vartheta$  und des gleichzeitig kleiner werdenden Elementarkörpers gegen Null hin ab. Die anschließende Zunahme von  $g$  bei weiter wachsendem  $\vartheta$  beruht auf dem Anwachsen des Elementarkörpers zum Äquator hin. Der weitere Verlauf der Schwereverteilung ist aus der Abbildung heraus verständlich.

In Verbindung mit den in Abschnitt 2.4.1 folgenden Untersuchungen zeigen die vorhergehenden Rechnungen, daß ab einer geeigneten Entfernung des Aufpunktes vom Elementarkörper die Approximation eines Quaders durch eine Massenlinie ohne Einschränkungen möglich ist.

### 2.3.2. Konzeption eines ALGOL-Programms für die numerische Berechnung

Geht man gemäß 2.1 von der Idee der Modellapproximation durch ein System horizontaler und vertikaler Arrays aus, so ist ersichtlich, daß dieses System bereits von seiner Datenbank her eine Größenordnung für die zu speichernden Datenelemente impliziert, die man, auch vom Standpunkt der Verträglichkeit aus, nur als hyperkomplex bezeichnen kann.

#### 2.3.2.1. Maschinenbedingte Einschränkungen

Die in diesem Abschnitt beschriebenen komplexen Aufgaben werden sich in naher Zukunft mit virtuellen Speichern wesentlich eleganter und schneller lösen lassen als heute, da dann Adreßräume von mehreren Megabytes zur Verfügung stehen werden.

Unter einigermaßen realistischen Annahmen besteht für die digital simulierten Modelle derzeit jedoch kaum eine Chance, mit umfangreichen Datenmanipulationen im

Kernspeicher eines Digitalrechners zu arbeiten. Man muß, um diese Größenordnungen zu meistern, andere Wege gehen. Dazu bieten sich zwei Ansatzpunkte an:

Einführung von überschaubaren Subsystemen,  
gezielte Bereitstellung nur derjenigen Daten im Kernspeicher, die für einen bestimmten Prozeß unbedingt erforderlich sind.

Derartige extreme Anforderungen wirken sich hemmend auf eine großzügige Programmierung aus. So mußte weitgehend auf Prozeduren verzichtet werden, um genügend Kapazität für Indexspeicherplätze zur Verfügung zu haben. Dies gilt auch bei Großrechenanlagen, die mit multiprogramming arbeiten. Die einzelnen Kernspeicherpartitions haben hier im Routinebetrieb nur Größen bis zu 100 und maximal bis zu 200 Kilobytes.

Eine weitere wesentliche Einschränkung ist bedingt durch die höheren Programmiersprachen. Hier gibt es nur einfache Variable und Felder, wobei die Grenzen über den gesamten Indexbereich konstant sein müssen. Somit unterliegt die Strukturierung der Modelle einer strengen Beschränkung, da es nicht möglich ist, beispielsweise dreieckige Felder zu vereinbaren, von komplizierten Strukturen, wie allgemeine Baumstrukturen, ganz abgesehen. Da somit die Möglichkeit der vollständigen dynamischen Manipulation fehlt, sind alle computerorientierten Lösungsmethoden stark eingeeengt.

Es gilt nun, im Rahmen der durch die Rechenanlage und die problemorientierten Programmiersprachen vorgegebenen Grenzen, Lösungswege zu finden, die unter optimaler Ausnutzung von Sekundärspeichern und mit minimalem Rechenzeitaufwand die Berechnung der Schwereverteilung von digital simulierten Modellen gestatten.

### 2.3.2.2. Programmkonzeption

Die Durchführung der Diskretisierung beruht, wie im Abschnitt 2.1 skizziert, auf einer Unterteilung der durch NN laufenden Niveauläche in elementare Felder. Es genügt daher, den Aufbau des Verfahrens anhand der Elementarflächen zu klären.

#### a) Lage der Raster, horizontale und vertikale Diskretisierung

Das Modell wird mit  $n$  Rastern  $R_1, R_2, \dots, R_n$  derart überdeckt, daß Meridiane und Breitenkreise die Rasterlinien bilden. Die Größe eines Rasterelementes aus  $R_k$  ist gegeben durch den Abstand  $\Delta \vartheta_k$  zweier Breitenkreise und  $\Delta \lambda_k$  zweier Meridiane ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Durch Viertelung der Elemente aus  $R_k$  geht das nächstkleinere Raster hervor, d. h., es bestehen die Beziehungen  $\Delta \vartheta_{k-1} = \frac{1}{2} \Delta \vartheta_k$  und  $\Delta \lambda_{k-1} = \frac{1}{2} \Delta \lambda_k$ .

Für alle  $n$  Raster wird ein gemeinsamer Ursprung gewählt, von dem aus die Zeilen und Spalten gezählt werden. Dabei läuft der Zeilenindex  $j_k$  von Nord nach Süd und der Spaltenindex  $i_k$  von West nach Ost (s. Abb. 9). Für die Breite und Länge des Mittelpunktes  $M$  eines Elementes gilt dann:

$$\vartheta_M = (j_k + 0,5) \Delta \vartheta_k + \vartheta_0$$

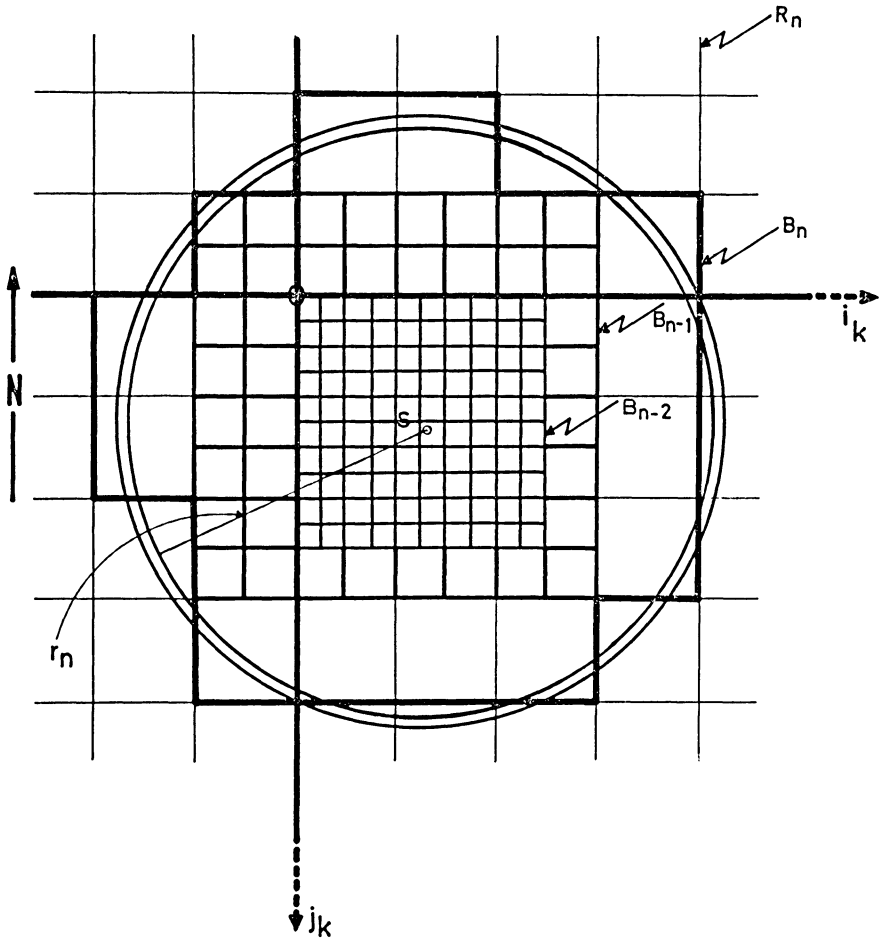


Abb. 9: Lage von 3 Rastern und des Erfassungsbereichs, Ausschnitt einer Modellaufsicht  
3 grids and the hold area, cutout of a top view

und

$$\lambda_M = (i_k + 0,5) \Delta \lambda_k + \lambda_0, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

mit:

$$\vartheta_0 \text{ Polabstand des Rasterursprungs, } \lambda_0 \text{ Länge des Rasterursprungs.}$$

Die Lage einer Fläche im stationsbezogenen  $(x, y, z)$ -System kann nun mit Hilfe der in 2.2.1 skizzierten Beziehungen leicht errechnet werden. Gemäß den zu erfassenden Grenzen der vertikalen Dichteänderungen sind somit auch — wie in Abb. 5 skizziert — die Höhen der einzelnen Elementarkörper über die Dateneingabe gegeben.

b) Methodik zur Speicherung digital simulierter Modelle

Die Entscheidung über die Dimensionierung des Rastersystems und die Maschenweiten in den einzelnen Rastern sind die kritischen Faktoren bei der Konstruktion digital simulierter Modelle. Sie entscheiden über die zu benutzende Speicherkapazität und den notwendigen Rechenzeitaufwand zur Bestimmung der Schwereverteilung.

Liegt die Möglichkeit einer automatischen Digitalisierung der mittleren Höhen  $\bar{H}$  und Dichten  $\bar{\rho}$  über den Gradabteilungsflächen vor, so wird man für die  $\bar{H}$  und  $\bar{\rho}$  getrennte Dateien erstellen. Ist eine Abschätzung der  $\bar{H}$  und  $\bar{\rho}$  notwendig, ist es angebracht, nur eine Datei aufzubauen. Die über einer Gradabteilungsfläche liegenden  $\bar{H}$ - und  $\bar{\rho}$ -Werte werden zu einem Datenelement zusammengefaßt. Eine geeignete zeilen- und spaltenweise Anordnung erlaubt dann den Aufbau einer einzigen Datei aller ein Modell beschreibenden  $\bar{H}$ ,  $\bar{\rho}$ -Werte.

Es entsteht auf diese Weise allerdings eine Datenbank, deren Auskunftsbereitschaft nicht sehr hoch ist, d.h. Antworten auf Direktanfragen — z.B. nach der Struktur eines Modells an einer bestimmten geographischen Position — sind nur bedingt möglich. Es ist dies für die vorliegende Problemstellung auch nicht notwendig, da zur Berechnung der Schwereverteilung bei einer geeigneten Programmkonzeption der Zugriff zu den einzelnen Datenelementen durch mathematische sowie die Auswertung bestimmende Ordnungskriterien gesteuert werden kann. Diese sind festgelegt durch die geographische Positionierung des Rastersystems. Somit residiert virtuell in jedem Datenelement neben den Höhen und Dichten eines Elementarkörpers seine geographische Position (s. Abb. 10).

Zur Veranschaulichung der vorangegangenen Schritte dient ein Rasterausschnitt zur schematisierten Darstellung eines digital simulierten Modells. Abb. 11 zeigt einen Dreischichtenfall und seine Aufgliederung in Datenelemente. Pro Gradabteilungsfläche stehen in einem Datenelement von links nach rechts die  $\bar{H}$ -Werte der Schichtgrenzen von oben nach unten und anschließend die dazugehörigen  $\bar{\rho}$ -Werte. Die Positionierung des  $\bar{H}$ ,  $\bar{\rho}$ -Datenelementes erfolgt automatisch durch die Rasterlage im geographischen Bezugssystem.

Die Praxis hat gezeigt, daß bei Rasterelementen der Grundfläche  $\Delta \vartheta = \Delta \lambda = 7,5'$  und kleiner, die zu einer hinreichend genauen Erfassung von geologischen Grenz-

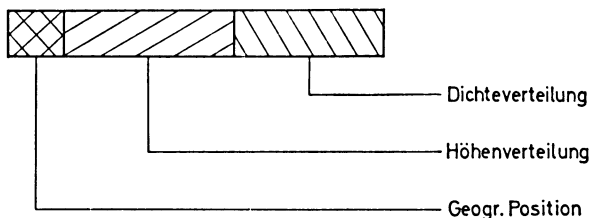


Abb. 10: Aufbau eines  $\bar{H}$ ,  $\bar{\rho}$ -Datenelements  
Structure of a  $\bar{H}$ ,  $\bar{\rho}$ -data element

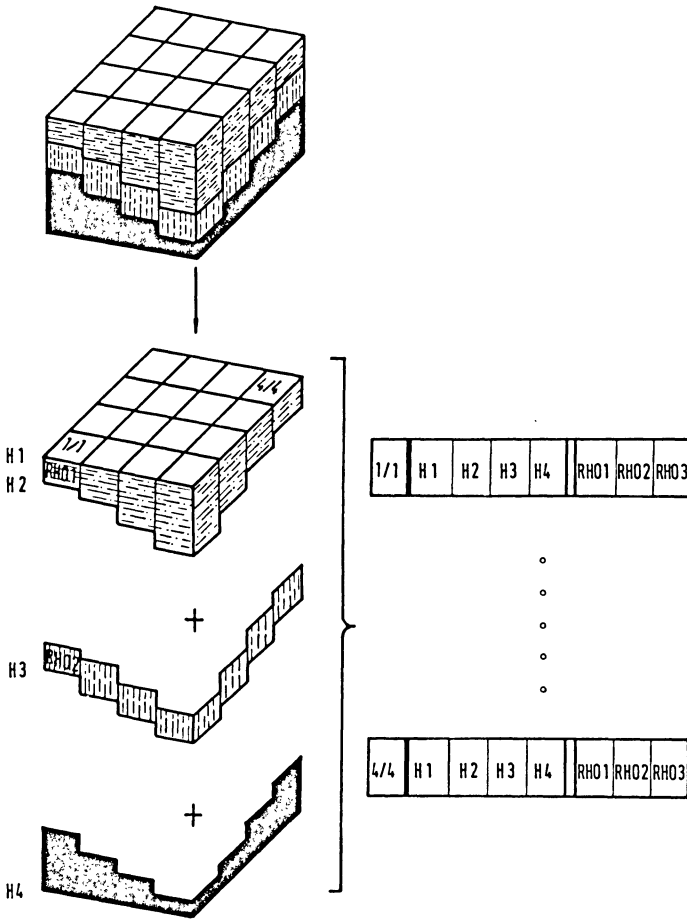


Abb. 11: Skizze zur digitalen Simulation eines Dreischichtenfalls  
 Draft for a digital simulation of a 3 layer body

flächen oft notwendig sind, über größere Gebiete hinweg die Datenelemente identisch aufgebaut sind. Um hier bezüglich der Datenaufbereitung eine technische Vereinfachung zu erreichen, ist die Möglichkeit vorgesehen worden, gleichartig strukturierte Gebiete zusammenzufassen – im folgenden Segmente genannt – und diesen jeweils ein einziges  $\bar{H}$ ,  $\bar{\rho}$ -Datenelement zuzuordnen. Für einen Bereich der Abb. 12 wären somit anstelle von 66 einzelnen Datenelementen durch geeignete Rastersegmentierung nur 8 Datenelemente zu erstellen.

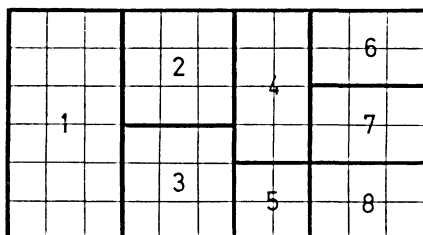


Abb. 12: Beispiel zu einer Rastersegmentierung

Example of a grid segmentation

### c) Berechnung der Modellschwere

Entsprechend der Modellausdehnung werden alle Elemente aus dem Raster  $R_n$  systematisch zur Berechnung herangezogen. Bedingt durch die Lage der Station reichen die Massen bis an  $S$  heran. Da aber bei der Annäherung einer Masse an den Aufpunkt die Schwere mit dem Quadrat des reziproken Abstandes wächst, muß für die Bestimmung des Volumens und der Entfernung eine immer größere Genauigkeit gefordert werden. In dem hier beschriebenen Verfahren tritt bei der Erfassung des Volumens über die mittlere Höhe die größte Ungenauigkeit ein. Um diesen Fehler möglichst klein zu halten, werden in bestimmten Bereichen um  $S$  die Grundflächen der Prismen verkleinert. Damit wird zweierlei erreicht: zum ersten lassen sich für eine kleinere Basis die mittleren Höhen bzw. Tiefen genauer erfassen, zum anderen erzielt man eine bessere Wiedergabe der geologischen Grenzflächen.

Die Elemente des Rasters  $R_n$  kommen damit nur innerhalb eines Bereichs, der von der äußeren Modellgrenze bis  $B_{n-1}$  reicht, zum Tragen (s. Abb. 9). Die Begrenzung  $B_{n-1}$  hängt ab von den Rasterdaten  $\Delta \vartheta_n$ ,  $\Delta \lambda_n$  und  $c_n$ . Der Wert  $c_n$  ist ein Maß für die Anzahl der von der Rechnung ausgenommenen Elemente aus  $R_n$  bezüglich  $S$  in West-, Ost-, Nord- und Süd-Richtung. Das heißt, es werden die Elemente aus  $R_n$  ausgespart, für die folgende Ungleichungen gelten:

$$|\vartheta_M - \vartheta_S| \leq c_n \Delta \vartheta_n \quad \text{und} \quad |\lambda_M - \lambda_S| \leq c_n \Delta \lambda_n.$$

Für das Raster  $R_{n-1}$  heißt die äußere Begrenzung  $B_{n-1}$ . Innerhalb  $B_{n-1}$  gelten die neuen Rasterdaten  $\Delta \vartheta_{n-1}$ ,  $\Delta \lambda_{n-1}$  und  $c_{n-1}$ . Zur Berechnung werden jetzt Elemente aus  $R_{n-1}$  verwendet, die zwischen  $B_{n-1}$  und  $B_{n-2}$  liegen. Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis in dem Raster mit den kleinsten Elementgrundflächen ( $R_1$ ) alle Elemente erfaßt worden sind.

Der beschriebene Ablauf zur Berechnung der Modellschwere erfordert sehr lange Rechenzeiten. Als Beispiel diene ein Zweischichtenfall mit einer Ausdehnung von  $32^\circ$  in Ost-West- und  $20^\circ$  in Nord-Süd-Richtung. Das Modell werde approximiert mittels Elementarkörper über zwei Raster  $R_2$  mit  $\Delta \vartheta = \Delta \lambda = 30'$  und  $R_1$  mit  $\Delta \vartheta = \Delta \lambda = 15'$ .

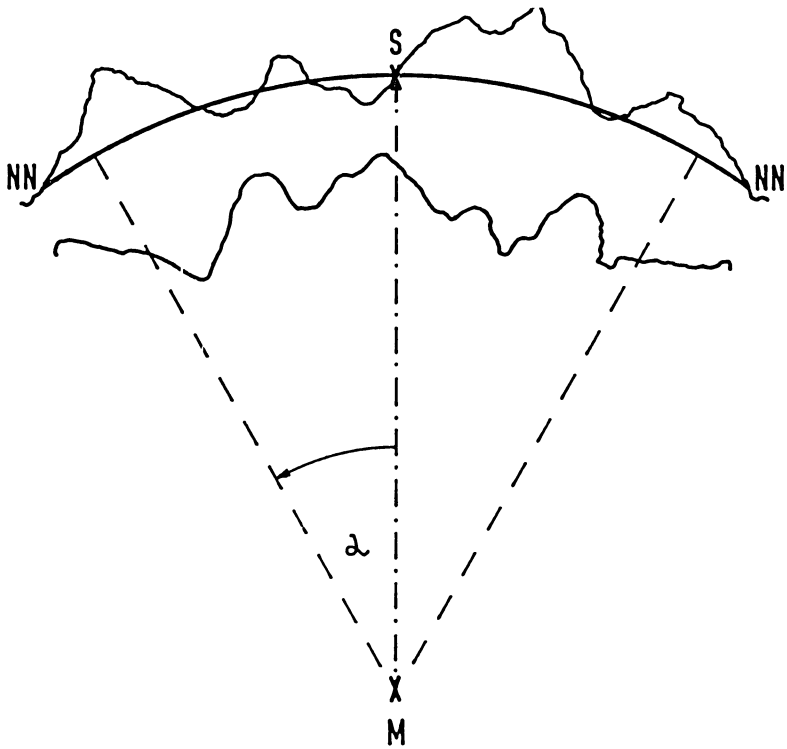


Abb. 13: Erfassungsbereich zu einem Winkel  $\alpha$  im Erdmittelpunkt  $M$   
 Hold area for an angle  $\alpha$  in the earth's center

Mit dem unter 2.3.2.3 beschriebenen Programm benötigt eine TR4 für einen Rechenpunkt ca. 10 min.

Tests haben gezeigt, daß es bei Untersuchungen, für die nicht der absolute Schwerewert in einem Rechenpunkt notwendig ist, in Analogie zu den gravimetrisch topographischen Reduktionsverfahren genügt, für jede Station nur einen bestimmten Bereich zur Rechnung heranzuziehen. Dieser Bereich ist für die vorliegende Betrachtung dann geeignet, wenn alle außerhalb von ihm liegenden Massen für jeden Rechenpunkt den gleichen Beitrag zur Schwerewirkung liefern; er wird im folgenden „Erfassungsbereich“ genannt.

Es werden zur Berechnung der Schwereänderung somit nur die Elementarkörper benutzt, die über den Gradabteilungsflächen innerhalb eines Kreises mit dem Radius  $r_n$  um  $S$  liegen, s. Abb. 9. In Ergänzung hierzu zeigt Abb. 13 einen Meridianschnitt der Erde zur Veranschaulichung der Bestimmung des Erfassungsbereichs um  $S$  mit Hilfe des Mittelpunktswinkels  $\alpha$ . In praxi beträgt  $\alpha$  bei Krustenmodellen ca.  $3^\circ$  bis  $4^\circ$ . Untersuchungen über Probleme, die bei der Anwendung eines Erfassungsbereichs



auftreten, und den optimalen Betrag des Winkels  $\alpha$  betreffen, folgen im Abschnitt 2.4.2. Hier sei zunächst erwähnt, daß für Modelluntersuchungen auf diese Weise bei gleichem Aussagewert bezüglich des zuvor angegebenen Gesamtmodells die Rechenzeit um den Faktor 4–5 sinkt.

### 2.3.2.3. Programmierungsgrundsätze

Das Programm ist in ALGOL geschrieben und auf der TR4 des Rechenzentrums der TU Clausthal mit der im Frühjahr/Sommer 1970 installierten Maschinenkonfiguration ausgetestet worden. Der damalige Kapazitätsrahmen der Anlage erlaubte keinen übersichtlichen Programmaufbau in Form von allgemein anwendbaren Subroutinen; dies zwang zur Anlage einer z. T. sehr verschachtelten Blockstruktur.

Die Blockstruktur des Programms ist in Abb. 14 grob skizziert. Der Haupt- sowie der erste Unterblock (SUB 1) dienen allgemeinen Vereinbarungen und definieren die globalen Größen. Die übergeordnete Rasterschleife  $F$  enthält einen Block (ASAY) zur Definition von Subarrays für die Gliederung des vorliegenden Rasters  $R_n$ , das zeilen- und spaltenweise abgebaut wird. Für alle diejenigen Stationen, für die das

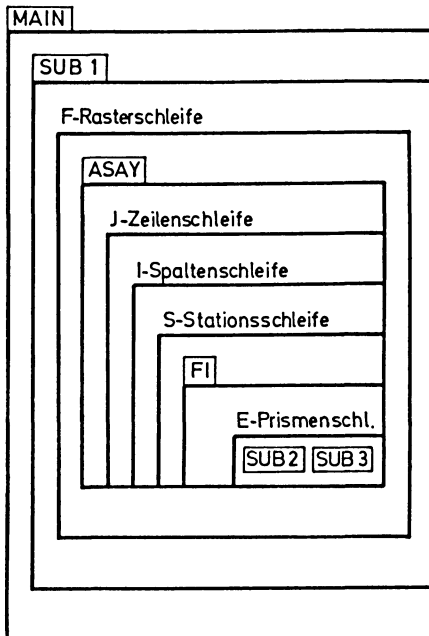


Abb. 14: Blockstruktur des ALGOL-Programms zur numerischen Bearbeitung von Schweremessungen

Block structure of the ALGOL-program for the numerical processing of gravity measurements

Rasterelement an der Stelle  $J, I$  in den Erfassungs- bzw. Rechenbereich fällt, wird der gesamte Prismenblock, das ist ein  $\bar{H}, \rho$ -Datenelement, durchlaufen (Fi, E) und die Schwerewirkungen der Elementarkörper auf die einzelnen Stationen mittels SUB 2 (Massenlinie) oder SUB 3 (Quader) berechnet und zwischengespeichert. Nach dem Abbau des Rasters  $R_n$  erfolgt einzeln die Übernahme der Prismenblöcke des Rasters  $R_{n-1}$  vom Sekundärspeicher in den Kernspeicher der Rechananlage; innerhalb SUB 1 wiederholt sich der beschriebene Vorgang. Das Programm endet, wenn alle Raster  $R_n, n=k, k-1, \dots, 1$ , abgebaut sind, mit der Ausgabe der Schwereverteilung über den Programmteil MAIN.

## 2.4. Genauigkeitsbetrachtungen

Zur Überprüfung der Genauigkeit des beschriebenen Verfahrens wurden diverse Testrechnungen durchgeführt. Den Primärtests lagen einfache geometrische Formen zugrunde, wie beispielsweise Kugeln oder Kugelschichtauschnitte. Die Differenz zwischen den exakten und den numerisch bestimmten Schwerewirkungen dieser Körper ist ein Maß für die Güte der vorgelegten Methodik zur numerischen Bearbeitung von Schweremessungen.

### 2.4.1. Geometrische Modelle

#### a) Kugelkalotte

Abb. 15 zeigt die Dimensionen der Testkalotte; sie wird mit einem System von 8 Rastern  $R_1$  bis  $R_8$  überdeckt. Der Koordinatensprung liegt in  $\varphi=49^\circ 24', \lambda=9^\circ 0'$ , die Station hat die Koordinaten  $\varphi_S=47^\circ 7,99', \lambda_S=12^\circ 17,11'$  mit der Höhe  $H_S=0$  m. Die Größe eines Elements aus  $R_8$  beträgt in N,S-Richtung  $\Delta \vartheta_8=24'$  und in W,E-

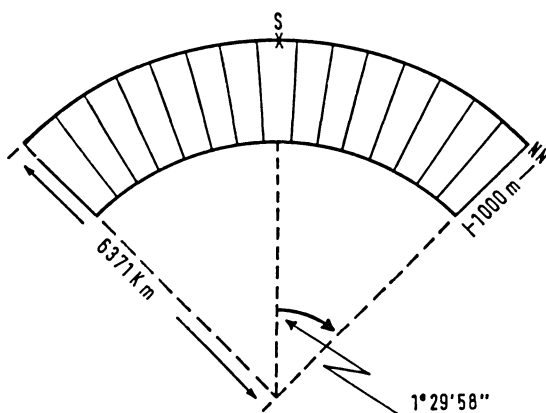


Abb. 15: Kugelkalotte als Testmodell

Spherical shell sector as a test model

Richtung  $\Delta\lambda=40'$ . Zur Aussparung in den einzelnen Rastern kamen folgende Faktoren zur Anwendung:

$$c_1=1,0, c_2=2,5, c_3=2,0, c_4=1,7, c_5=1,7, c_6=1,8, c_7=1,6 \text{ und } c_8=2,1.$$

Der Schwerewert ergibt bei der Dichte  $\rho=1 \text{ cgs}$  und  $H=-1000 \text{ m}$  mit dem beschriebenen Programm  $\Delta g_{\text{mod}}=42,31 \text{ mgal}$ .

Die Wirkung des Kugelschichtausschnitts auf einen Punkt seiner Symmetrieachse kann durch Quadratur berechnet werden, siehe z.B. BAESCHLIN [1948]. Mit einem mittleren Erdradius von  $R=6371 \text{ km}$  und einem halben Öffnungswinkel der Schale von  $1^\circ 29' 58''$  erhält man  $\Delta g_{\text{ex}}=42,32 \text{ mgal}$ . Das bedeutet, daß der Unterschied zwischen der exakten und der numerischen Rechnung vernachlässigbar klein ist.

### b) Zylindrische Gürtel

Zur Prüfung des Programms bezüglich großräumig angelegter Modellstrukturen dienen um die Erde gelegte zylindrische Gürtel; sie entstehen, wenn man zwei Kugelschichtausschnitte voneinander subtrahiert. In Abb. 16 ist ihre Zerlegung in Elemen-

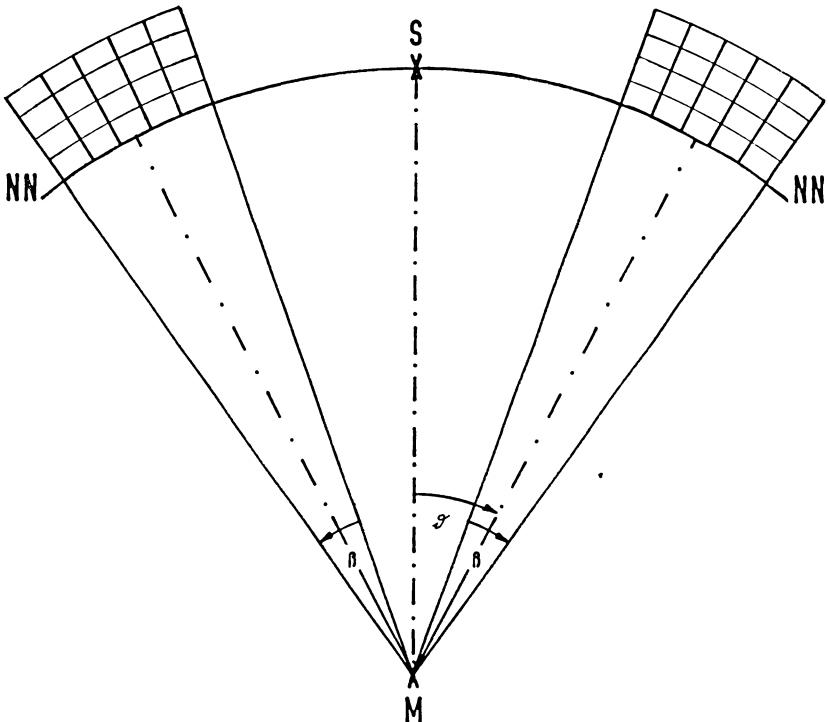


Abb. 16: Meridianschnitt eines zylindrischen Gürtels  
Meridian section of a cylinder belt

tarkörper angedeutet. Die Elementarkörper erreichen in den folgenden Testrechnungen Grundflächen von bis zu  $1^\circ \times 1^\circ$  und Höhen bzw. Tiefen bis zu 10 km; der Öffnungswinkel  $\beta$  der zylindrischen Gürtel beträgt  $20^\circ$ . Die Angaben erscheinen übertrieben groß gewählt zu sein, sie demonstrieren jedoch den Anwendungsbereich des Verfahrens. Die numerisch berechneten Schwerewerte sind entsprechend der Approximation der Elementarkörper entweder als  $\Delta g_{\text{Quad}}$  (Approximation durch Quader) oder  $\Delta g_{\text{Mali}}$  (Approximation durch Massenlinien) bezeichnet. Als Vergleichswerte dienen die nach CASSINIS, DORE und BALLARIN [1937] erhaltenen Schwerewerte, im folgenden  $\Delta g_{\text{Cass}}$  genannt.

Abb. 17 zeigt in einfach logarithmischem Maßstab die Differenz  $\Delta_M = \Delta g_{\text{Cass}} - \Delta g_{\text{Mali}}$  bzw.  $\Delta_Q = \Delta g_{\text{Cass}} - \Delta g_{\text{Quad}}$  als Funktion der Gürtelentfernung  $\vartheta$  vom Aufpunkt  $S$ . Da sowohl positive als auch negative  $\Delta$ -Werte vorkommen, wurde die Ordinate bei den positiven und negativen Werten von  $\Delta = 10^{-5}$  mgal unterbrochen.

Die  $\Delta_M$ -Werte sind durchweg sehr klein, so daß sich zylindrische Gürtel ab einer Entfernung von  $\vartheta \approx 10^\circ$  vom Aufpunkt ohne Einschränkungen durch geeignet angeordnete Massenlinien über hinreichend kleinen, maximal ca.  $1^\circ \times 1^\circ$  großen Gradabteilungsflächen approximieren lassen. Teilweise erfolgte eine Unterteilung der Massenlinien in der Vertikalen so, daß ihre minimale Höhe 2 km betrug. Die Vorzeichen der  $\Delta_M$ -Werte sind positiv und negativ in mehrfachem Wechsel über den gesamten Argumentbereich. Systematische „Züge“ in der Verteilung der  $\Delta_M$ -Werte und ihrer Vorzeichen sind nicht erkennbar.

Eine entsprechende Aussage gilt annähernd für  $\Delta_Q$ . Für  $H \approx 20$  km erreichen die Abweichungen jedoch  $\Delta$ -Werte von  $\pm 1$  mgal; dies läßt sich durch die in Abschnitt 2.3.1 angegebenen Untersuchungen erklären. Die  $\Delta_Q$ -Werte wachsen außerdem, wenn die Quaderdimensionen zu klein werden. In jedem Fall würden jedoch in dem in Abschnitt 2.3.2.3 skizzierten Programm Separatoren in Kraft treten, die zur Folge haben, daß die Elementarkörper für die Attraktionsrechnungen durch Massenlinien ersetzt werden.

### c) Kugel

Zur Demonstration der allgemeinen Gültigkeit des Verfahrens wird die Schwere für eine Kugel mit Erddimensionen bei konstanter Dichte berechnet.

Für diese Betrachtung genügt eine nichtrotierende Erdkugel mit der Masse  $m_E$  und dem Radius  $R$ . Man erhält die theoretische Schwere zu:

$$\gamma = f \frac{m_E}{R^2}.$$

Mit  $f m_E = 3,9863 \times 10^{20} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ , wobei  $\rho = 5,517 \text{ gr cm}^{-3}$  ist.

Mit  $R = 6371 \text{ km}$  wird  $\gamma = 982,04 \text{ Gal}$ .

Approximiert man die Erde durch Elementarkörper über Gradabteilungsflächen von  $\Delta \vartheta = \Delta \lambda = 1^\circ$  und ersetzt man diese für die Attraktionsberechnung durch Massen-

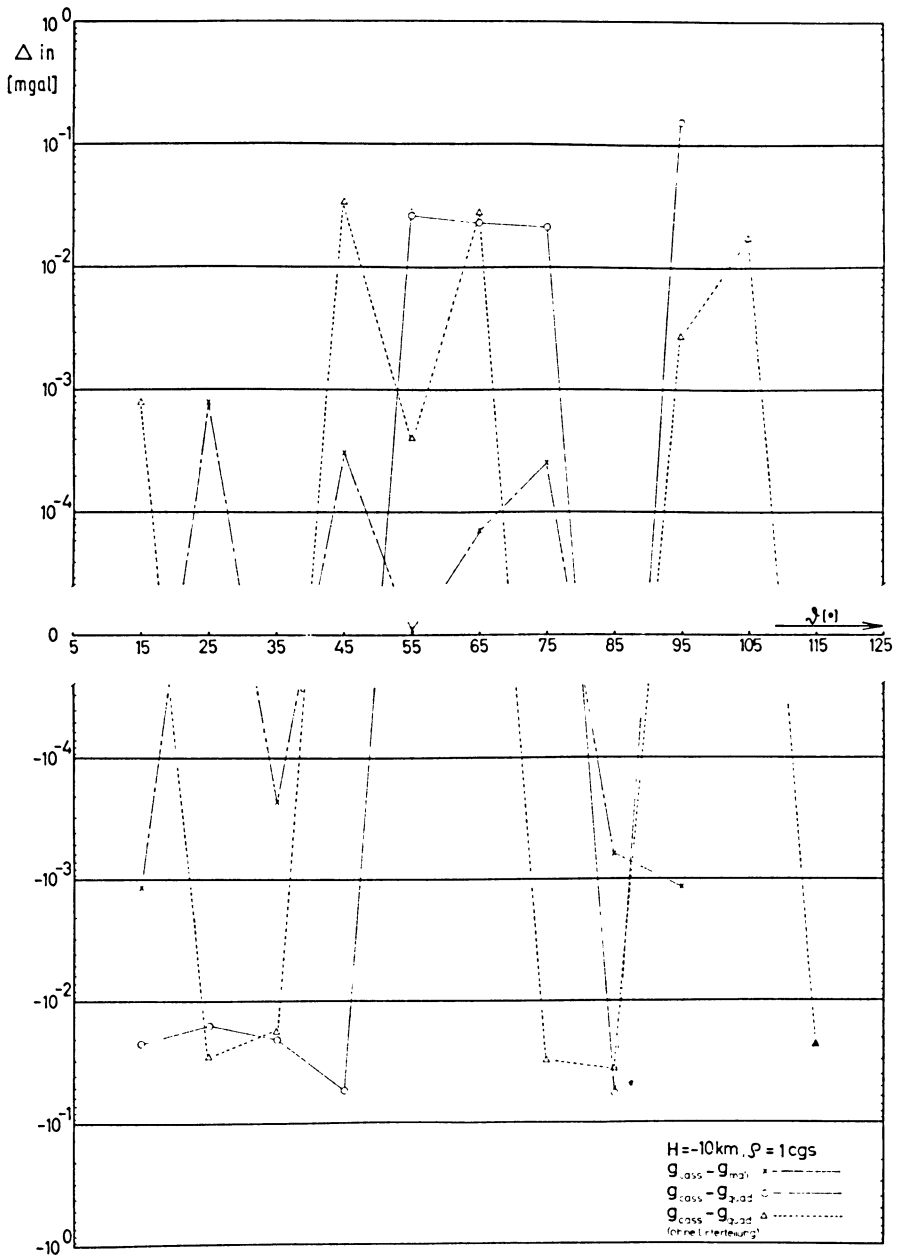


Abb. 17:  $\Delta_{M/Q} = \Delta g_{\text{cass}} - \Delta g_{\text{mali/quad}}$  in Abhängigkeit von der Gürtelentfernung  $\vartheta$  ( $\beta = 10'$ , s. Abb. 16)

$\Delta_{M/Q} = \Delta g_{\text{cass}} - \Delta g_{\text{mali/quad}}$  as function of the belt distance  $\vartheta$  ( $\beta = 10'$ , s. Fig. 16)

linien, so erhält man mit dem unter 2.3.2.3 vorgelegten Programm für  $\gamma=981,86$  Gal; bei einer Approximation mit  $\Delta\vartheta=\Delta\lambda=0,5^\circ$  wird  $\gamma=981,98$  Gal. Die Abweichung von nur 60 mgal ist außerordentlich gering, wenn man bedenkt, daß in praxi ein Modell in Stationsnähe nicht derart grob angenähert wird.

Der Versuch ist als eine notwendige Ergänzung zu den von HEISKANEN [1953] und KUKKAMÄKI [1955] beschriebenen topographisch-isostatischen Reduktionsverfahren der „mass line method“ anzusehen, da hier bisher allgemeine Genauigkeitsbetrachtungen nicht publiziert sind.

#### 2.4.2. Einfaches Krustenmodell

Nach den grundlegenden Untersuchungen über die Funktionsweise der vorgelegten Methode zur numerischen Bearbeitung von Schweremessungen folgt in diesem Abschnitt die Bestimmung der Schwereverteilung über einem großräumig angelegten und einfach aufgebauten Erdkrustenmodell wie es in der Geodäsie für synthetische Untersuchungen zur Anwendung kommen könnte.

Abb. 18 zeigt das Modell in Aufsicht und Schnitt sowie die dazu berechnete Schwereverteilung; der Schnitt ist verzerrt gezeichnet und müßte streng genommen einen strukturierten Kugelschnitt darstellen. Der Modellaufbau erfolgte mit Elementen der Grundfläche  $\Delta\vartheta=\Delta\lambda=30'$  für das Raster R2 und  $\Delta\vartheta=\Delta\lambda=15'$  für das Raster R1. Beide Raster erstrecken sich über  $20^\circ$  in E,W-Richtung und  $10^\circ$  in N,S-Richtung. Das Schwereprofil verläuft entlang  $\varphi=44^\circ 30'$ . Unter Benutzung von segmentierten Rastern sind für den gesamten Modellaufbau nur  $6\bar{H}, \bar{\rho}$ -Datenelemente notwendig. Dichte- und Tiefenangaben gehen aus Abb. 18 hervor.

Die Berechnung der Schwereverteilung geschah mittels der Erfassungsbereiche  $\alpha=3,5^\circ$  und  $4^\circ$ . Die Anomalien unterscheiden sich lediglich durch eine Niveaushiftung. Bei einer Berechnung der Attraktion des Gesamtmodells ohne Erfassungsbereich überlagert sich ein regionales Feld der lokalen Anomalie der Krustenabsenkung im Bereich der Stelle  $0^\circ 0'$ . Das Regionalfeld beeinflusst das Lokalfeld um so mehr, je kleiner das Gesamtmodell aufgebaut ist, vgl. Abb. 19. Bei Untersuchungen für geophysikalische Zwecke umgeht man diese Problematik üblicherweise durch die Annahme hinreichend großer Modelle. Die Einführung des Erfassungsbereiches bietet somit eine wirksame Abhilfe zur Unterdrückung von Regionaleffekten und spart gleichzeitig Rechenzeit.

Folgende Nachteile können jedoch bei der numerischen Rechnung mit Erfassungsbereichen eintreten.

Bei großen Rasterelementgrundflächen ( $\Delta\vartheta=\Delta\lambda>30'$ ) ist nicht gewährleistet, daß der Erfassungsbereich für beliebige Stationslagen die gleiche Fläche im Stationsniveau überdeckt. Ins Gewicht fällt vor allem bei N,S-Profilen, daß die Gradabteilungsflächen zum Äquator hin anwachsen. Berechnet man die Schwereverteilung einer homogenen, ca. 40 km mächtigen Kugelschale in Äquatornähe, so können zwischen zwei um  $1^\circ$  in N,S-Richtung auseinanderliegenden Stationen Schweredifferenzen von ca.  $1 \times 10^{-1}$  mgal auftreten.

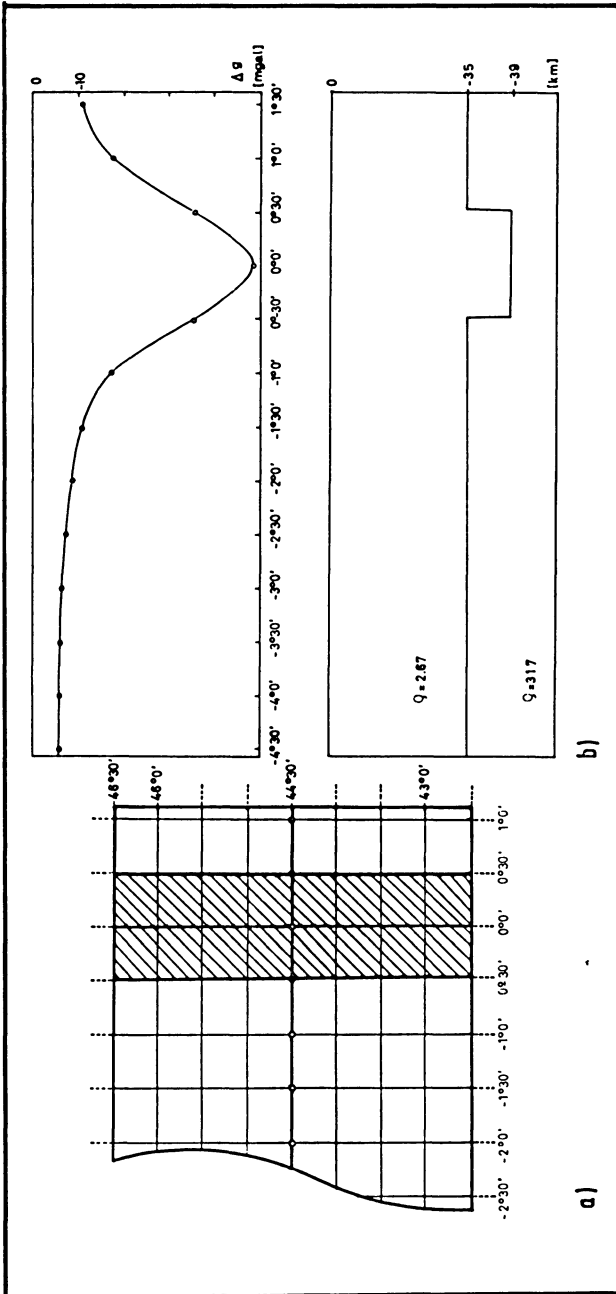


Abb. 18: Krustenmodell

a) Aufsicht  
 b) unten: Schnitt  
 oben: berechnete Schwereverteilung

Crustal structure

a) top view  
 b) bottom: cross-section  
 top: calculated gravity anomaly

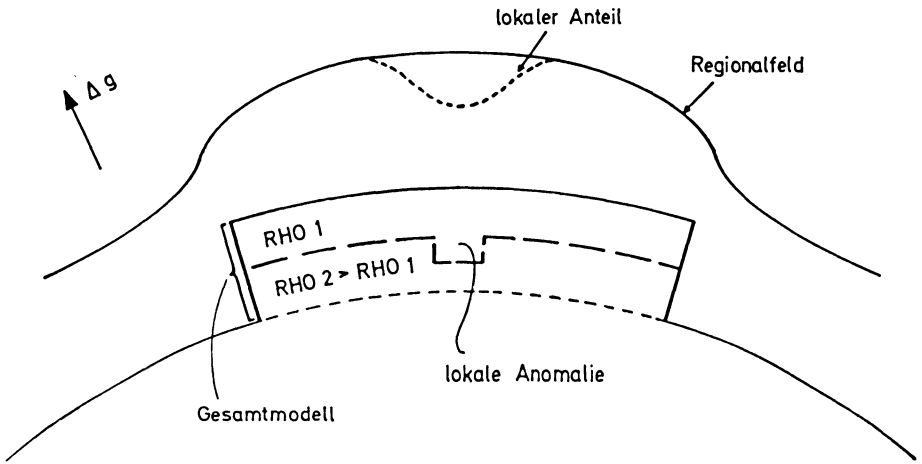


Abb. 19: Lokale Schwerestörung im Regionalfeld, qualitativ  
Local gravity anomaly in a regional field, qualitative

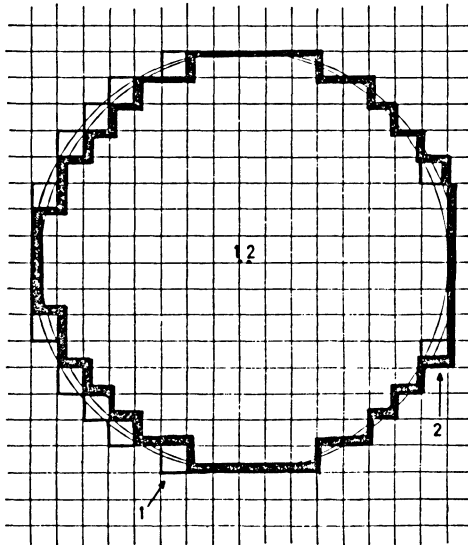


Abb. 20: Beispiel für die Auswahl von Erfassungsbereichen bei gleichem Winkel  $\alpha$  und einer Stationsverschiebung von  $10'$ ,  $\Delta\vartheta = \Delta\lambda = 30'$ . Grenze des Erfassungsbereichs zu Station 1 (—) und zu Station 2 (■)

Example of the selection of hold areas with equal angle and a stationshifting of  $10'$ ,  $\Delta\vartheta = \Delta\lambda = 30'$ . Boundary of the hold area to station 1 (—) and to station 2 (■)



Bei E,W-Profilen dagegen muß für alle Stationen der Erfassungsbereich gleich groß sein, d.h., es muß für alle Stationen die gleiche Anzahl von Rasterelementen zur Rechnung herangezogen werden. Bedingt durch die Entfernungsabfrage „Station-Mittelpunkt einer Gradabteilungsfläche“ für die zur Rechnung herangezogenen Elemente kann es jedoch vorkommen, daß für eng benachbart liegende Stationen nicht die gleiche Anzahl von Elementen erfaßt wird. Abb. 20 stellt dies schematisch dar. Bezüglich der Schwereverteilung treten die gleichen Effekte wie zuvor auf.

Für beide Fälle erreicht man Abhilfe durch eine geeignete Auswahl der  $\Delta\vartheta$  und  $\Delta\lambda$  der Rasterelemente und im zweiten Fall auch durch gleichartige Stationslagen, z.B. immer in Schnittpunkten von Rasterlinien. Erfahrungen haben gezeigt, daß Werte für  $\Delta\vartheta = \Delta\lambda = 15'$  und kleiner für detaillierte Untersuchungen an Erdkrustenmodellen günstig sind und die beschriebenen Nachteile ausschalten.

Eine allgemeine Prüfung des Programmsystems bezüglich seiner Anwendung auf einer Kugel erfolgte mit dem gleichen Modell, es lag jedoch symmetrisch zum Äquator und Nullmeridian. Gemäß den theoretischen Voraussetzungen waren die Schwereanomalien entlang dem Äquator und Nullmeridian identisch.

### 3. Praktische Anwendung

Während die Rechnungen des vorangegangenen Abschnitts für globale synthetische Untersuchungen in der Gravimetrie und physikalischen Geodäsie von Interesse sein dürften, seien abschließend zwei ausgewählte Beispiele bearbeitet, die für regionale Untersuchungen die Wirkungsweise des Programms 2.3.2 demonstrieren sollen.

Die folgenden Erdkrustenmodelle sind ohne Änderungen und so gut wie möglich aus zwei Publikationen übernommen worden. Eine geologische Beschreibung der Modelle geschieht nicht.

#### 3.1. Modell Peru-Chile-Trench

Das Objekt stammt aus der Arbeit „A geophysical investigation of the Peru-Chile-Trench“ von HAYES [1966] und stellt ein ozeanisches Beispiel dar (Abb. 21). Der Peru-Chile-Trench liegt vor der Westküste S-Amerikas, das betrachtete Profil kreuzt ihn entlang dem südlichen Breitenkreis von  $53^\circ$ . Im oberen Teil der Abbildung ist die gemessene Freiluftanomalie aufgetragen und der, mittels Polygonquerschnitten berechneten, gegenübergestellt. Das in einem sehr kleinen Maßstab vorgegebene Modell erschwert eine Aufteilung in Elementarkörper derart, daß ein Vergleich der von HAYES angegebenen Schwereanomalie mit der nach 2.3.2 berechneten nur bedingt möglich ist.

Das übertragene Modell liegt zwischen den Längengraden  $84^\circ\text{W}$  und  $68^\circ\text{W}$  und zwischen den Breitengraden  $48^\circ\text{S}$  und  $57^\circ\text{S}$ . Da sein geologischer Aufbau wegen der vorgegebenen Daten nur zweidimensional erfolgen kann und in den Randgebieten überdies nicht bekannt ist, genügen zur Diskretisierung  $50\bar{H}$ ,  $\bar{\rho}$ -Datenelemente, die jeweils maximal fünfmal gegliedert sind. Die Kantenlängen in den zwei zum Modell-aufbau benutzten Rastern betragen für  $R2$ :  $\Delta\vartheta = \Delta\lambda = 15'$  und für  $R1$ :  $\Delta\vartheta = \Delta\lambda = 7,5'$ .

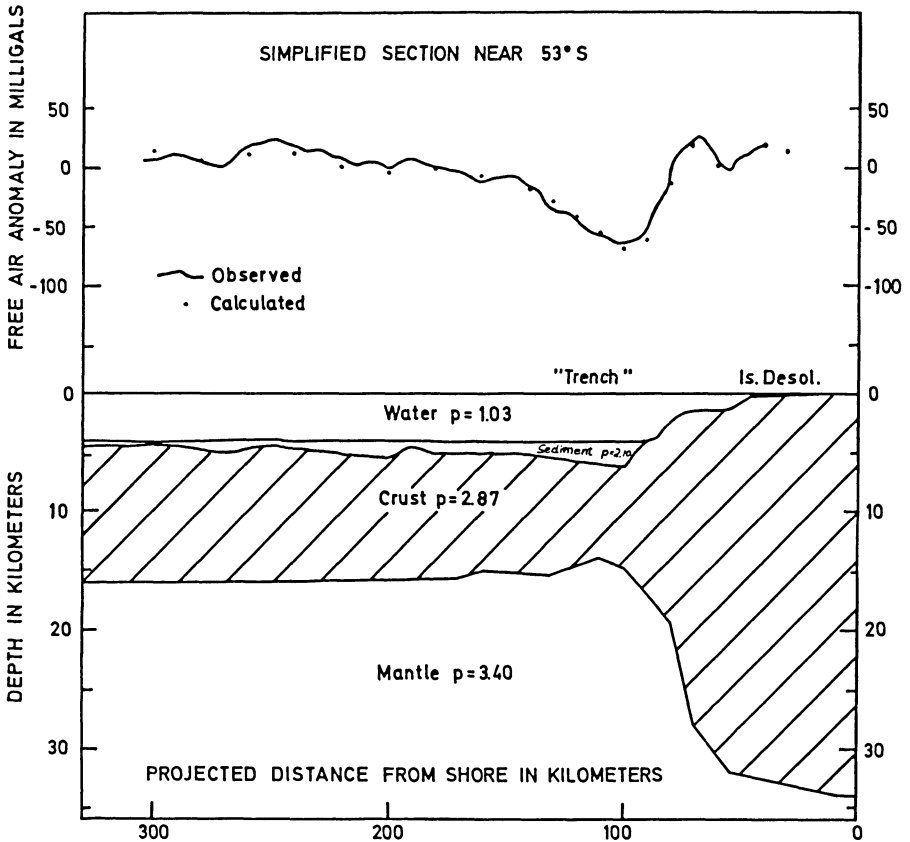


Abb. 21: Krustenmodell Peru-Chile-Trench mit Schwereverteilung, HAYES [1966]  
 Crustal structure Peru-Chile-Trench with gravity anomaly, HAYES [1966]

Abb. 22: Krustenmodell Peru-Chile-Trench  
 oben: berechnete Schwereverteilung nach 2.3.2 -o-o-...  
 berechnete Schwerewerte von HAYES, gem. Abb. 21 ...  
 unten: Modellkonfiguration  
 Crustal structure Peru-Chile-Trench  
 top: calculated gravity anomaly according to 2.3.2 -o-o-...  
 calculated gravity values after HAYES, s. Fig. 21 ...  
 bottom: model configuration

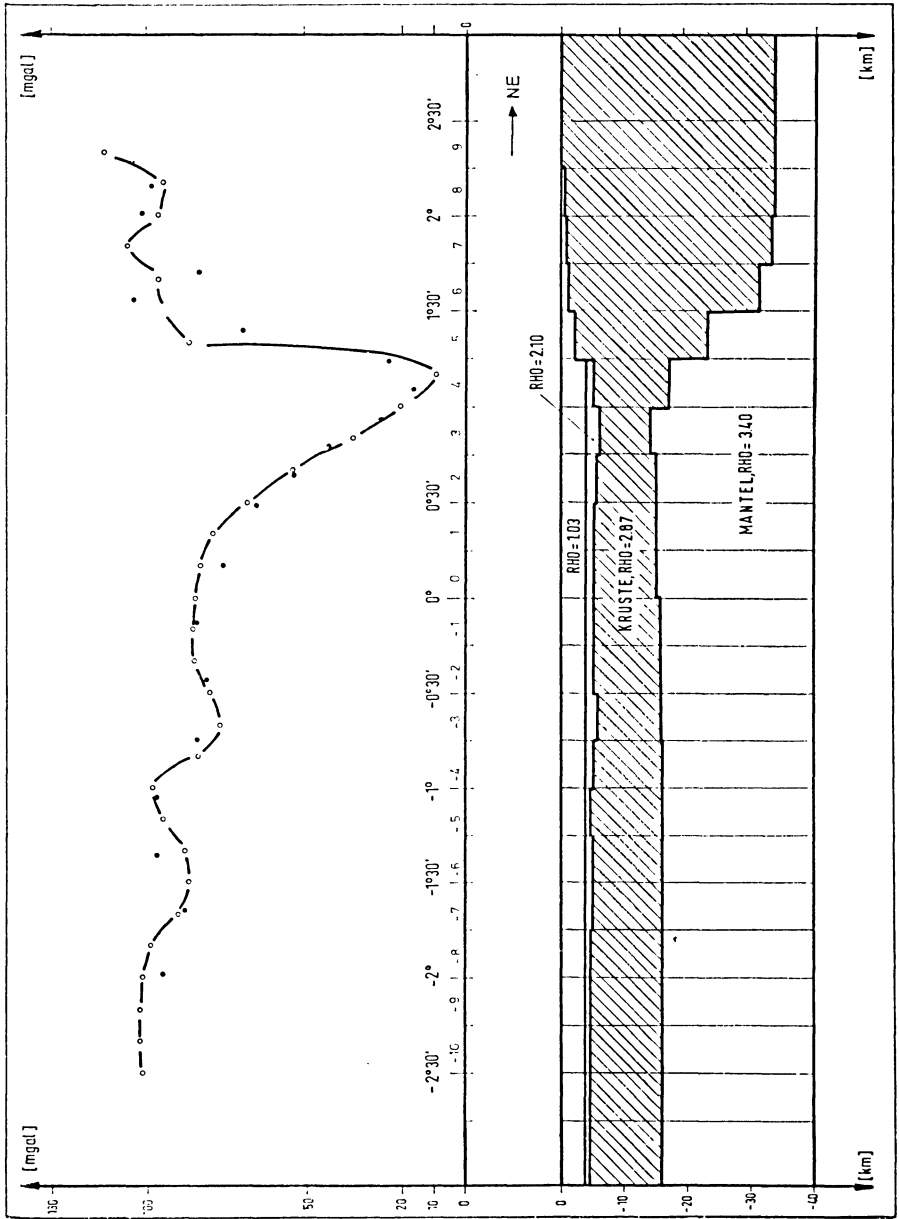


Abb. 22

Abb. 22 zeigt das für die Berechnung von  $\Delta g_M$  zugrunde gelegte Modell im Raster R2.  $\Delta g_M$  ist als durchgezogene Linie zwischen den Rechenpunkten gekennzeichnet, während die schwarz ausgefüllten Kreise die theoretische Anomalie von HAYES ( $\Delta g_H$ ) bestmöglichst wiedergeben. Die Abweichungen zwischen  $\Delta g_M$  und  $\Delta g_H$  sind einmal durch Unsicherheiten bei der Übertragung der  $\Delta g_H$ -Werte bedingt, zum anderen kann man die Schwereverteilung eines ebenen Modells nicht direkt mit derjenigen eines sphärischen vergleichen. Die Abb. 22 veranschaulicht jedoch, wie ausgeprägt sich die einzelnen Elementarkörper in der Schwereverteilung widerspiegeln; d.h. letztlich, wie detailliert sich ein Modell aufbauen läßt. Zum Beispiel ist die Tiefenänderung der Oberkante der 2,87-cgs-Schicht über das gesamte Modell hinweg deutlich in der Schwereverteilung zu erkennen, vor allem zwischen  $-1^\circ 45'$  und  $-0^\circ 30'$ , bezogen auf einen willkürlichen Nullpunkt in der Breitenstreckung des Modells. Das Aufsteigen der Kruste zwischen  $1^\circ 15'$  und  $1^\circ 45'$  bedingt den steilen Anstieg der Schwereanomalie, die hier von den  $\Delta g_H$ -Werten abweicht, was durch den etwas unterschiedlichen Aufbau zwischen den beiden Modellen bedingt sein dürfte.

### 3.2. Modell Po-Ebene-Alpen

Das Modell stammt aus der Arbeit „Explosion seismic studies in Western Europe“ von CLOSS [1969] und erfaßt einen Hochgebirgsausschnitt. In der bayerischen Molasse beginnend, quert es die Zentralalpen beim Brenner und endet in N-Italien bei Firenze südlich des Apennin. Es ist in Abb. 23 neben einem seismischen Krustenprofil, der Bougueranomalie sowie der dazugehörigen Modellschwere, im folgenden  $\Delta g_C$  genannt, dargestellt. Das vorliegende geologische Modell wurde in seinem Hauptteil ohne Änderung übernommen, lediglich nördlich von Eschenlohe erfolgte eine Ergänzung.

Die diskretisierte Modellkonfiguration liegt zwischen den nördlichen Breitenkreisen  $58^\circ$  und  $34^\circ$  sowie den Meridianen  $5^\circ$  und  $17^\circ$ . Gemäß der Vorlage ist das Modell jedoch auf einen zweidimensionalen Aufbau beschränkt. Abb. 24 zeigt eine Profildarstellung für das Raster R2 und die berechnete Schwereverteilung  $\Delta g_M$ . Die schwarz ausgefüllten Kreise geben für ausgewählte Stellen die Modellschwere  $\Delta g_C$  zum Vergleich wieder. Die Berechnungsgrundlagen für diese Werte sind nicht bekannt, was für die vorliegende Betrachtung nicht wichtig ist, da auch hier lediglich die Arbeitsweise des Programms 2.3.2 vorgeführt werden soll.

Die Trennung einzelner geologischer Strukturen im Mittelteil der  $\Delta g_M$ -Verteilung bei ca.  $47^\circ$  verdient besondere Beachtung. Hier erkennt man einerseits deutlich die in die 2,75-cgs-Schicht eingelagerten Körper mit den Dichtewerten 2,50 cgs sowie 2,60 cgs und andererseits das Abtauchen der 3,30-cgs-Schicht, die der Grenze Kruste-Mantel entspricht.

Die Übernahme der Modellausgangsdaten aus den Literaturabbildungen hat mit Sicherheit Ungenauigkeiten zur Folge. Es darf jedoch angenommen werden, daß die auftretenden Abweichungen zwischen den Literaturwerten und den  $\Delta g_M$ -Werten nicht nur auf diese Unsicherheit zurückzuführen sind.

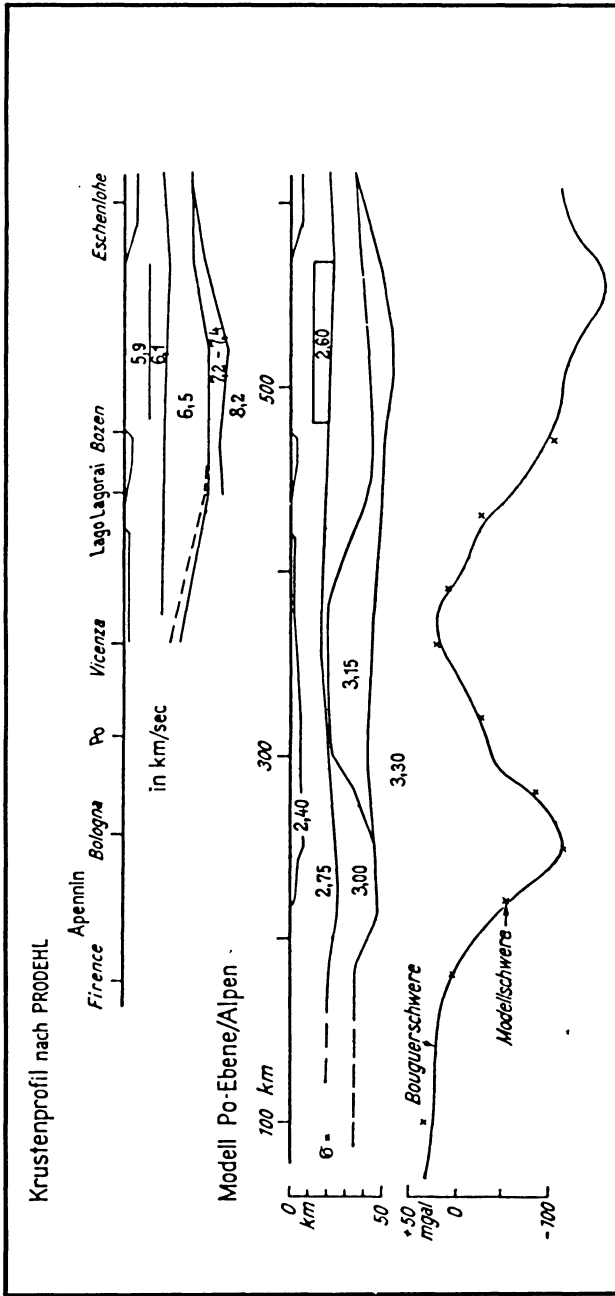


Abb. 23: Krustenmodell Po-Ebene-Alpen, Closs [1969]      Crustal structure Po-Ebene-Alpen, Closs [1969]

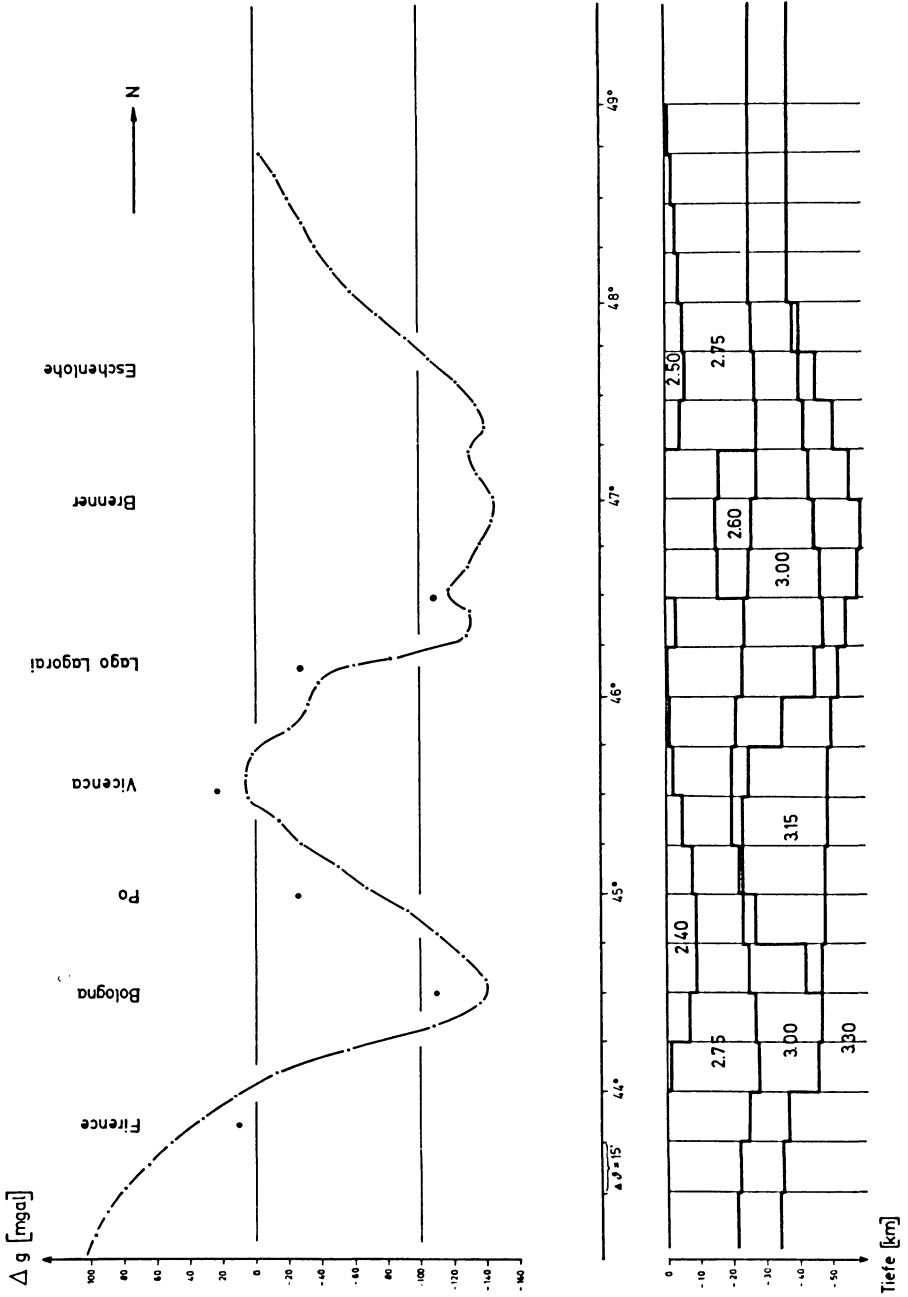


Abb. 24

#### 4. Danksagung

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. ROSENBACH danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie zahlreichen Diskussionen während ihrer Anfertigung. Mein Dank gilt ferner Herrn Prof. Dr. J. BEHRENS, Herrn Dipl.-Geophys. O. LETTAU sowie den Mitarbeitern der Abteilung Geophysik innerhalb Erdöl und Erdgas der Preussag AG.

#### Literatur

- BAESCHLIN, C. F.: Lehrbuch der Geodäsie. Orell Füssli Verlag, Zürich 1948
- BOTT, M. H. P.: The use of electronic digital computers for the evaluation of gravimetric terrain corrections. *Geophysics* 7, 45—54, 1959
- BOTT, M. H. P.: The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins. *Geophys. Journ. of the Roy. Astr. Sc.* 3, 63—67, 1960
- CARROZZO, M. T.: A general formula for the computation of the terrain correction to the gravity measurements by electronic computers. *Bollettino di Geofisica teorica ed applicata* 8, 256—263, 1966
- CASSINIS, G., P. DORE und S. BALLARIN: Tavole fondamentali per la riduzione dei valori osservati della gravità. *Comm. Geod. Ital. N.S.* 13, 1937
- CLOSS, H.: Explosion seismic studies in Western Europe, in *Geophysical Monograph* Nr. 13, Washington, 1969
- CORDELL, L., and R. G. HENDERSON: Iterative three dimensional solution of gravity anomaly data using a digital computer. *Geophysics* 33, 596—601, 1968
- EHRISMANN, W., G. MÜLLER, O. ROSENBACH und N. SPERLICH: Topographic reduction of gravity measurements by the aid of digital computers. *Bollettino di Geofisica teorica ed applicata* 8, 1966
- EHRISMANN, W., und O. LETTAU: Eine Möglichkeit der topographischen Reduktion von Schweremessungen in der näheren und weiteren Stationsumgebung unter Benutzung von Digitalrechnern. *Arch. f. Met., Geophys. u. Biokl., Ser. A.* 20, 383—396, 1971
- EHRISMANN, W.: Ein rationelles Verfahren zur numerischen Berechnung der Schwerewirkung von großräumigen digital simulierten Modellkörpern. Dissertation, TU Clausthal, Institut für Geophysik, 1972

Abb. 24: Modell nach CLOSS [1969], vgl. Abb. 23

oben: berechnete Schwererverteilung nach 2.3.2 - - - - -  
berechnete Schwerewerte von CLOSS, gem. Abb. 23 ....

unten: Modell

Model after CLOSS [1969], s. Fig. 23

top: calculated gravity anomaly according to 2.3.2 - - - - -  
calculated gravity values after CLOSS, s. Fig. 23 ....

bottom: model

- HAYES, D. E.: A geophysical investigation of the Peru–Chile Trench. *Marine Geology* 4, 309–351, 1966
- HEISKANEN, W. A.: Isostatic reductions of the gravity anomalies by the aid of high-speed computing machines. Mapping and Charting Research Laboratory of the Ohio State University Research Foundation, Technical paper No. 175, 1953
- JUNG, K.: *Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik*, Geest u. Portig, Leipzig 1961
- KANE, M. F.: A comprehensive system of terrain correction using a digital computer. *Geophysics* 27, 455–462, 1962
- KOLBENHEYER, T.: Das Gravitationsfeld eines homogenen Vielecks. *Geofysikální Sborník* 267, 91–105, 1967 a
- KOLBENHEYER, T.: Die Schwerewirkungen eines geraden Prismas mit rechtwinkligem Querschnitt. *Studia geoph. et geod. Československá akad. věd.* 11, 262–270, 1967 b
- KOLBENHEYER, T.: Die Schwereanomalien eines horizontalen rechtwinkligen Vielecks. *Geoexploration* 6, 9–18, 1968
- KUKKAMÄKI, T. J.: Gravimetric reductions with electronic computers. *Publ. of the Inst. of Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ann. Acad. Scient. Fennicae* III, 42, 1955
- MADER, K.: Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft* 11, 1951
- NAGY, D.: The prism method for terrain corrections using digital computers. *Pageoph.* 63, 31–39, 1966 a
- NAGY, D.: The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics* 31, 362–371, 1966 b
- NEGI, J. G., and S. C. GARDE: Symmetric matrix method for rapid gravity interpretation. *Journ. Geophys. Res.* 74, 3804–3807, 1969
- PICK, M.: Einfluß der nächsten Umgebung eines Schwerepunktes auf den Wert der topographischen Schwerekorrektion. *Studia geoph. et geod., Československá akad. věd.* 7, 146–154, 1963
- SANDBERG, C. H.: Terrain corrections for an inclined plane in gravity computations. *Geophysics* 23, 701–711, 1958
- TAKIN, M., and M. TALWANI: Rapid computation of the gravitation attraction of topography on a spherical earth. *Geophys. Prosp.* 14, 119–142, 1966
- TALWANI, M., J. L. WORZEL and M. LANDISMAN: Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone. *Journ. Geophys. Res.* 64, 49–59, 1959
- TALWANI, M., and M. EWING: Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophysics* 25, 203–225, 1960
- TANNER, J. G.: An automated method of gravity interpretation. *Geophys. Journ. of the Roy. Astr. Sc.* 13, 339–347, 1967
- TOLSTOY, I.: Punched-card computation of isostatic and topographic reductions. *Trans. Am. Geophys. Union* 28, 823–830, 1947



## Gravimetric Indian Ocean Geoid<sup>1)</sup>

In memory of Prof. Dr. Dr. h.c. KARL JUNG

H.-G. KAHLE and M. TALWANI, Palisades, N.Y.<sup>2)</sup>

Eingegangen am 4. Januar 1973

*Zusammenfassung:* Basierend auf den Isogammenkarten des Indischen Ozeans [TALWANI und KAHLE 1973] werden die  $1^\circ \times 1^\circ$ -Durchschnittswerte der Freiluft-Schwereanomalien ermittelt und anschließend das entsprechende gravimetrische  $1^\circ \times 1^\circ$ -Geoid im Indischen Ozean berechnet. Wie erwartet, gibt das gravimetrische  $1^\circ \times 1^\circ$ -Geoid wesentlich mehr Informationen über den kurzwelligen Verlauf der Undulationen wieder als das auf der Grundlage von Satellitenbahnstörungen berechnete Geoid. Die größten Abweichungen treten über dem Madagascar-Rücken (+23 m) und über dem Indonesischen Tiefseegraben (−25 m) auf. Die aufgezeigte Korrelation des gravimetrischen  $1^\circ \times 1^\circ$ -Geoids mit den geologischen Strukturen im Indischen Ozean spiegelt den Effekt dieser Strukturen auf die Undulationen des Schwerepotentials wider.

*Abstract:* The Free Air Gravity maps of the Indian Ocean [TALWANI and KAHLE 1973] are used to obtain average free-air gravity values over  $1^\circ \times 1^\circ$  squares. These values are then used to compute the gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid over the Indian Ocean. As expected substantially more information is present in the shorter wavelength in this geoid than in the GAPOSCHKIN and LAMBECK [1970, 1971] geoid obtained primarily from data based on satellite observations. The largest differences between the two geoids are observed over the Madagascar Ridge (+23 m) and over the deep sea trenches of the Indonesian Island Arc (−25 m). The additional short wavelength information can be associated with physiographic features in the Indian Ocean.

### A. Introduction

In the past, interpretations of the regional gravity field in the Indian Ocean were based almost entirely on satellite derived geoid maps. In their recent combination solution of the earth's gravity field GAPOSCHKIN and LAMBECK [1970, 1971] used spherical harmonic coefficients of the geopotential up to the sixteenth order and degree from satellite and terrestrial data. We term the corresponding geoid the "G and L" geoid for the purpose of this paper. The shortest wavelength represented in this solution is about 2500 km. Since the geoid represents the geopotential at the earth's surface it is important to test independently whether its shape and size can make any significant contribution to our knowledge about the mass inhomogeneities

<sup>1)</sup> Lamont-Doherty Geological Observatory Contribution No. 1959.

<sup>2)</sup> Dr. MANIK TALWANI and Dr. HANS-GERT KAHLE, Lamont-Doherty Geological Observatory of Columbia University, Palisades, N.Y. 10964.

in the earth's crust and upper mantle. While there is no systematic correlation between the undulations of the geoid and the distribution of oceans and continents, the recently published global gravity charts [e.g. KAULA 1972] give increasing evidence that it is, with exceptions, possible to correlate the gravity field based on harmonic coefficients with major physiographic features of the plate tectonic system, such as mid-oceanic ridges, island arcs, trenches and ocean basins. Consequently it is of importance to study to what extent the surface gravity measurements can give additional information about the earth's gravitational field and its correlation to major topographic features.

The first comparison of surface ship gravity data with a gravity map in the Indian Ocean based on spherical harmonic coefficients obtained from satellite data was presented by LE PICHON and TALWANI [1969]. They used zonal harmonic coefficients up to degree seven as given by KAULA [1966] and tesseral harmonic coefficients up to degree twelve obtained by GAPOSCHKIN [G8 solution in KAULA 1966]. It was shown that there is good agreement between the satellite derived free-air anomalies and the gravity field averaged over  $20^\circ$  squares of latitude and longitude. However, more details are present in the free-air gravity map based on  $5^\circ$  squares averages. Since the publication of LE PICHON and TALWANI's results the amount of gravity data in the Indian Ocean has accumulated to about 75,000 points [TALWANI and KAHLE 1973].

The objective of this paper is to obtain the free-air gravity field of the Indian Ocean averaged over  $1^\circ \times 1^\circ$  squares, to calculate the corresponding gravimetric geoid and to compare it with GAPOSCHKIN and LAMBECK's geoid. We will further attempt to relate the gravimetrically determined geoid with major physiographic features that are not reflected in the GAPOSCHKIN and LAMBECK geoid.

## **B. Terrestrial gravity in the Indian Ocean**

### *1. Submarine Pendulum Measurements*

The first gravity studies in the Indian Ocean were based on pendulum observations aboard submarines [VENING MEINESZ 1948, GIRDLER and HARRISON 1957, and TALWANI 1962]. A Vening Meinesz pendulum measurement represents the average gravity over a distance of about 1 km. The uncertainty in a typical pendulum measurement is estimated as  $\pm 3.6$  mgal [EWING, WORZEL and SHURBET 1957]. The locations of the utilized 214 pendulum stations are shown in Fig. 1.

### *2. Surface Ship Gravimeter Measurements*

In the past 10 years the gravity coverage in the Indian Ocean has been considerably increased by continuous measurements made with surface ship gravimeters. The resulting gravity charts will be published as a part of the International Indian Ocean Expedition Atlas of Geology and Geophysics [TALWANI and KAHLE 1973, chief editor: G. UDINTSEV]. In addition to the data used in the Atlas utilize in this study surface ship gravity data obtained during the recent VEMA cruise 29 (1971–1972)

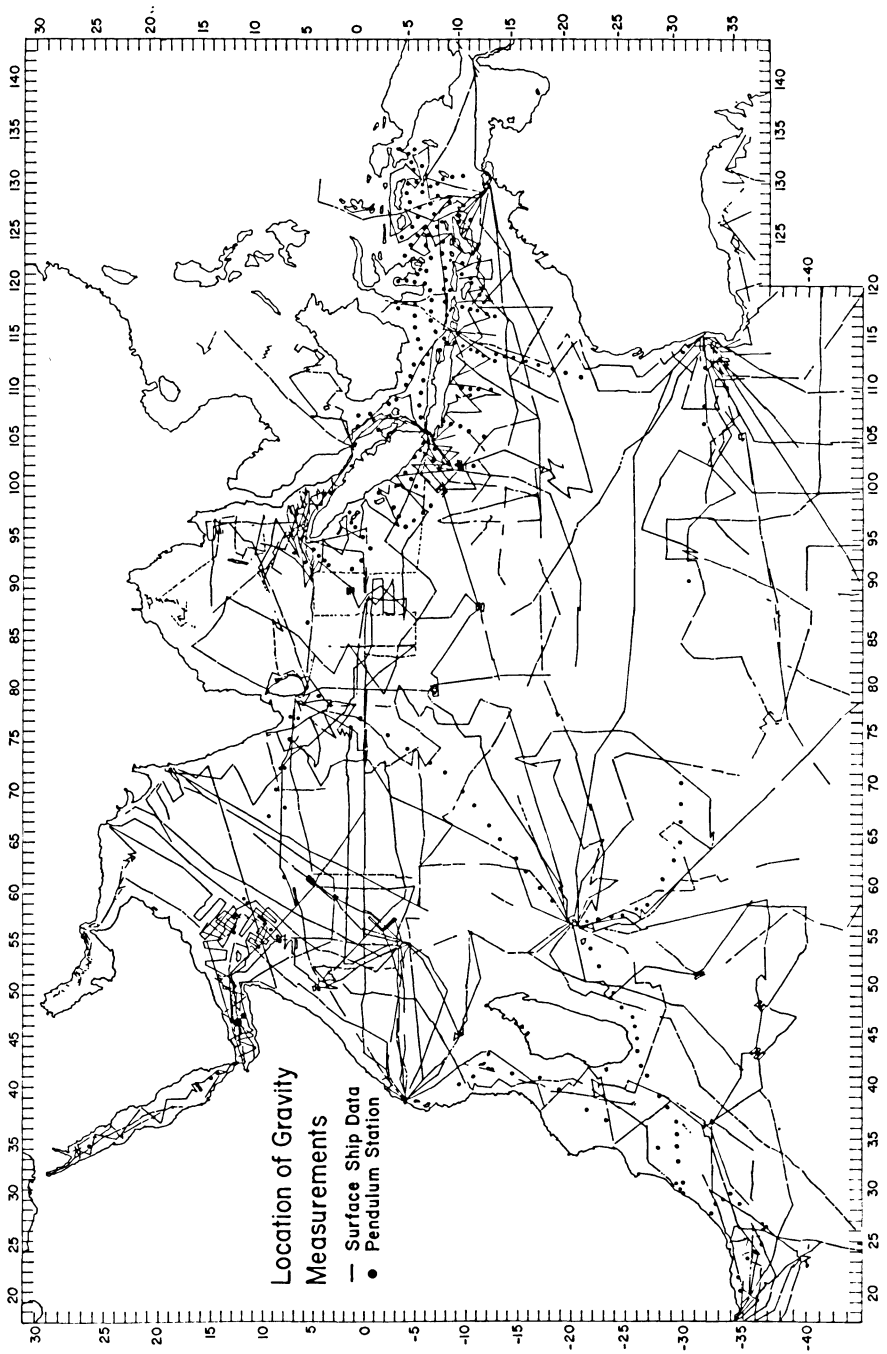


Fig. 1: Location of gravity measurements in the Indian Ocean. ... Pendulum measurements, — surface ship measurements

in the Indian Ocean. The ship's tracks along which the data were obtained are given in Fig. 1.

The data were obtained by:

a) Lamont-Doherty Geological Observatory of Columbia University, during VEMA cruises 18, 19, 20, 22, 24 and 29, CONRAD cruises 8, 9, 11, 12 and 14.

b) Institute of Geophysics and Planetary Physics of University of California at Los Angeles and Scripps Institution of Oceanography, San Diego, during ARGO cruises "MONSOON" 3 through 6 and "LUSIAD" 3 through 10, 13, 14, and 16 [M. D. HELFER, M. CAPUTO and J. C. HARRISON 1963, and M. CAPUTO, R. MASADA, M. D. HELFER, and C. L. HAGER 1964].

c) Department of Geodesy and Geophysics, Cambridge, England, during OWEN cruises 611 through 619, 110, 111, 621 through 626 and during DISCOVERY cruises 671, 672 [Hydrographic Dept. 1963, 1966, and C. WILLIAMS 1968].

d) Environmental Science Services Administration (ESSA now NOAA) during PIONEER cruises C through G and during OCEANOGRAPHER cruises D through J (U.S. Department of Commerce, 1964 and 1970).

e) Bundesanstalt für Bodenforschung, Hannover, Germany [S. PLAUMANN, unpublished] during METEOR cruise Karachi-Djibouti [1965].

f) Woods Hole Oceanographic Institution, U.S.A. [C. BOWIN, unpublished] during CHAIN cruises 100 leg 4, 5, and 6 [1971].

The sources of the surface ship gravity data, their accuracy, the utilized instruments and auxiliary equipment are summarized in detail in the Atlas.

Existing free-air gravity contour maps in the following area were also utilized and, where necessary, recontoured:

- 1) Red Sea [PLAUMANN 1963].
- 2) Indonesian Island Arc Area [SLICHTER, unpublished].
- 3) Continental Shelf of Australia [WHITWORTH 1969].
- 4) Continental Shelf of South Africa [GRAHAM and HALES 1965].
- 5) Gulf of Aquaba [ALLAN and MORELLI 1971].

The gravity values obtained aboard PIONEER in the Andaman Sea and across the Andaman-Nicobar Island Arc have been contoured by PETER, WEEKS and BURNS, 1966. In this area we have utilized their individual values and recontoured with the help of additional data.

### 3. Land Gravity Data

The areas in which we have incorporated land gravity data include India and Madagascar. Values in India were averaged over  $1^\circ \times 1^\circ$  squares of latitude and longitude by WOOLLARD [1970] and the free-air values in Madagascar were obtained from the Bureau Gravimétrique International, Paris.

### C. Gravimetric Method for Determining the Geoid

The gravimetric method for determining the geoid in this paper is based on Stokes' theorem relating the free-air gravity anomaly  $\Delta g$  of an element of surface area  $da$  to the geoidal height  $N$  [HEISKANEN and VENING MEINESZ 1958, p. 65, formula 3-806]:

$$N = \frac{1}{4\pi gR_0} \int^A S(\Psi) \Delta g da \quad (1)$$

where  $R$  = mean earth radius over the geoid,

$g$  = mean value of normal gravity over the geoid,

$\Psi$  = angular distance of  $da$  from the point at which  $N$  is to be calculated,

$A$  = surface area of sphere with the mean radius  $R$  of the geoid and Stokes' function  $S(\Psi)$  is given by:

$$S(\Psi) = \frac{2}{\sin \Psi} F(\Psi)$$

where

$$F(\Psi) = \cos \frac{\Psi}{2} + \frac{1}{2} \sin \Psi \left( 1 - 5 \cos \Psi - 6 \sin \frac{\Psi}{2} - 3 \cos \Psi \times \right. \\ \left. \times \ln \left( \sin \frac{\Psi}{2} + \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right) \right).$$

The surface integral (1) is to be extended over the whole surface of the earth. For this purpose we utilize free-air anomalies averaged over  $1^\circ \times 1^\circ$  squares in the Indian Ocean area. For the outer area in which free-air anomalies are not available we use the gravity field determined from GAPOSCHKIN and LAMBECK's combination solution that utilizes spherical harmonic coefficients up to the sixteenth order and degree.

Following basically the procedure as proposed by TALWANI et al. [1972] the construction of the gravimetric geoid is made in six steps:

1. Determination of the  $1^\circ \times 1^\circ$  square free-air averages based on the Indian Ocean gravity charts [TALWANI and KAHLE 1973] (Fig. 2).

2. Calculation of the free-air anomalies based on GAPOSCHKIN and LAMBECK's spherical harmonic coefficients [1971]: "G and L" gravity anomalies (Fig. 3).

3. Subtraction of the GAPOSCHKIN and LAMBECK free-air anomalies from the  $1^\circ \times 1^\circ$  square free-air averages: "Difference anomalies" (Fig. 4).

4. Computation of the corresponding difference geoid based on the difference anomalies of 3 (Fig. 6).

5. Computation of the geoid based on GAPOSCHKIN and LAMBECK's combination solution: "G and L" geoid (Fig. 7).

6. Calculating the total sum of the GAPOSCHKIN and LAMBECK geoid and the difference geoid of 4: "Total geoid" (Fig. 8).

The results of these calculations are contoured and shown in Figs. 2, 3, 4, 6, 7 and 8 respectively.

#### D. Description of the Gravimetric Geoid in the Indian Ocean

##### 1. $1^\circ \times 1^\circ$ Square Free-Air Average Anomalies (Fig. 2)

The names of the major physiographic features in the Indian Ocean we are using in the following descriptions are the same as proposed for the nomenclature in the IIOE Atlas [compare also LAUGHTON, MATTHEWS and FISHER 1971]. The seismically active Mid-Indian Ocean Ridge forms a part of the continuous global Mid-Ocean Ridge system. It comprises the Sheba and Carlsberg Ridge in the north, the Central-Indian Ridge in the center, and the Southwest and the Southeast Ridge branches in the Southwest and Southeast Indian Ocean respectively.

Over the Sheba Ridge in the Gulf of Aden the gravity values are about +10 mgal on average. Following the Carlsberg Ridge southeastwards towards the Central Indian Ridge the free-air gravity field decreases gradually to negative values at about -25 mgal. However this section of the Mid-Indian Ocean Ridge is still more positive by about 15 to 20 mgal than the basins on either side.

At about  $10^\circ\text{C}$  the gravity field over the Central Indian Ridge starts to increase again exceeding +50 mgal at the triple junction of the Central Indian, the Southwest and Southeast Indian Ridge at about  $25^\circ\text{S}$ ,  $70^\circ\text{E}$ . The seismically active Southwest and Southeast Indian Ridges are characterized by anomalously high average values in the range 10 to 50 mgal. The gravity high over the Southwest branch appears to connect with the North-South trending gravity high of the aseismic Madagascar Ridge at about  $45^\circ\text{E}$ .

The high over the Madagascar Ridge runs northwards and continues into Madagascar with maximum average values exceeding +60 mgal. This belt of high free-air gravity diminishes a few degrees north of Madagascar attaining positive values closer to zero. However, it is still noticeably higher than the gravity Lows over the Somali and Mascarene Basin on either side. The Madagascar High swings eastward at  $5^\circ\text{S}$ ,  $55^\circ\text{E}$  extending to the gravity High over the aseismic microcontinent of the Seychelles Bank. The southward continuation of this positive belt is observed from the aseismic Mascarene Plateau down to the volcanic islands Mauritius and Réunion with maximum  $1^\circ$  average values of +80 mgal. The other aseismic ridges in the Indian Ocean are the North-South trending Chagos-Laccadive, the Ninetyeast Ridge, the Broken Ridge and the Naturaliste Plateau. Gravity Highs are associated with the Broken Ridge and the Naturaliste Plateau. The values over the Chagos-Laccadive Ridge are negative but these negative values are similar to those over the Central Indian Ridge and are higher by about 25 mgal than the surrounding Arabian and Central Indian Basin. The free-air anomalies over the Ninetyeast Ridge are close to zero with positive

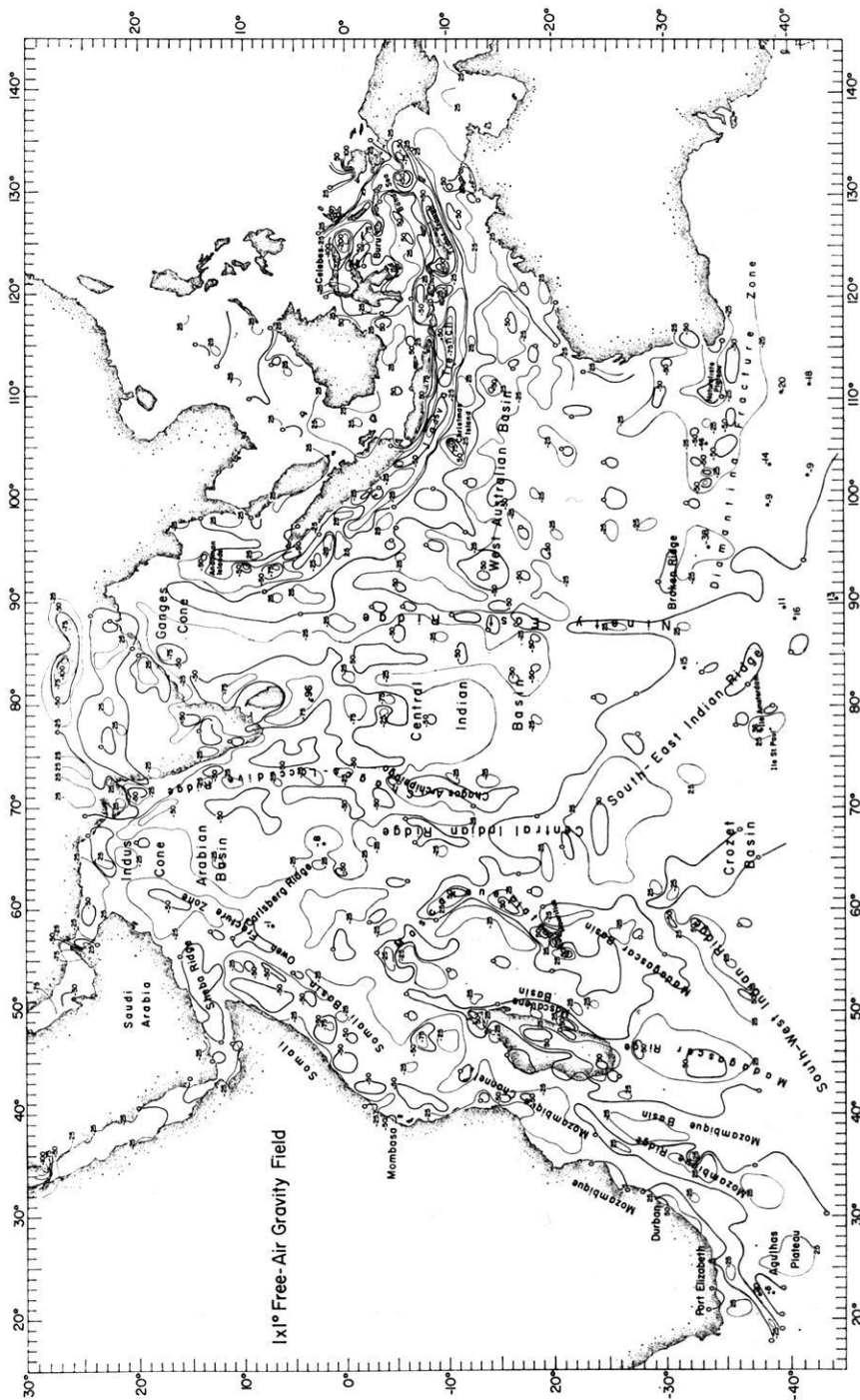


Fig. 2: 1° x 1° square average free-air anomalies contoured at an interval of 25 mgal

values in some places over the crest. As in the case of the Chagos-Laccadive Ridge, the Ninetyeast Ridge also stands out as a feature with higher gravity values than the basins on either side.

The Ninetyeast Ridge High connects just north of the equator with the Outer Gravity High of the seismically active Indonesian Island Arc. The Outer Gravity High associated with the Indonesian Island Arc runs parallel to the arc from the continental margin off Burma to the continental margin off Northwest Australia. The axis of this High passes about 300 km west of the Andaman-Nicobar Islands and passes through the Christmas Island where the  $1^\circ \times 1^\circ$  average anomalies have a value of about 100 mgal.

The other continental margins of the Indian Ocean are characterized in general by gravity Lows: Values of gravity are more negative than  $-75$  mgal over the Ganges Cone and south of Ceylon, about  $-25$  to  $-50$  mgal along the margin off West India, in the Gulf of Oman and along the eastern margin of Saudi Arabia. The marginal Low continues southward along the Somali Peninsula into the Mozambique Channel and off the coast of South Africa.

We give next a short summary of the gravity pattern over the basins of the Indian Ocean. In general the basins are characterized by gravity Lows varying in amplitude from  $-25$  to  $-75$  mgal. The most significant Low with average values around  $-75$  mgal is centered in the Central Indian Basin between the Chagos-Laccadive Ridge and the Ninetyeast Ridge extending from Ceylon southwards to the Southeast Indian Ridge. The Somali Basin displays negative values down to  $-80$  mgal and average values of  $-40$  mgal are common in the Arabian and West Australian Basin.

In summary we note that all ridges and plateaus have absolute or at least relative gravity Highs over them. In the following list we group the ridges in the order of increasing gravity:

Over the northern and central part of the Central Indian Ridge and Chagos-Laccadive Ridge the anomalies tend to be negative with average values of  $-25$  mgal. Values closer to zero are associated with the Ninetyeast Ridge. The southern section of the Central Indian Ridge, the Chagos Archipelago, the Sheba Ridge and the Carlsberg Ridge are characterized by slightly positive gravity anomalies of about  $+10$  mgal. The largest positive anomalies are present over the ridges of the Southwest Indian Ocean with values up to  $+80$  mgal associated with the Mozambique and Madagascar Ridge, as well as over the Mascarene Plateau and over the Southwest and Southeast Indian Ridges.

In general gravity Lows are observed over the continental margin from South Africa along Mozambique, Somalia and Saudi Arabia to India. However, over the continental margin of the Indonesian Island Arc a prominent Outer Gravity High exists. Such Highs are associated with the seaward margins of many island arcs [WATTS and TALWANI 1972, in preparation].

All basins in the Indian Ocean are characterized by gravity Lows with values between  $-25$  and  $-80$  mgal.



*2. Comparison between Gaposchkin and Lambeck's Combination Solution gravity Anomalies and the  $1^\circ \times 1^\circ$  Square average Surface Gravity: the  $1^\circ \times 1^\circ$  Difference Anomaly*

The free-air gravity map in Fig. 3 is derived from the combination solution for the geopotential given by GAPOSCHKIN and LAMBECK [1970, 1971]. We have retained terms up to degree and order 16 and have referred their solution to an ellipsoid of flattening 1/297.0 in order to be able to compare the values with observed surface values referred to the International Gravity Formula.

As might be expected from the fact that the combination solution of GAPOSCHKIN and LAMBECK only extends to wavelengths larger than about 2500 km, the broad gravity features are well represented in this map whereas differences with the  $1^\circ \times 1^\circ$  square average map are largest over narrow physiographic features. Thus we note in the "G and L" map (Fig. 3) that gravity Highs exist over the Madagascar Ridge, over the Southeast Indian Ridge including the Crozet Basin and over the East Indies. Gravity Lows are present north of Madagascar, over the Arabian Peninsula and the West Australian Basin. The most prominent gravity Low is observed south of India with values down to  $-80$  mgal centered in the Central Indian Basin.

The  $1^\circ \times 1^\circ$  square Difference map (Fig. 4) shows the differences between the  $1^\circ \times 1^\circ$  average gravity map in Fig. 2 and the "G and L" gravity map in Fig. 3. Physiographic features of small extent such as the Sheba Ridge, Mascarene Plateau, Madagascar Ridge the crestral areas of the Southwest Indian Ridge, Chagos-Laccadive Ridge, Ninetyeast Ridge and the Naturaliste Plateau and Broken Ridge—all have positive difference gravity values with ranges up to  $+50$  mgal or even higher.

The areas with much lower surface gravity include basins such as the Mozambique Basin and Channel, the Somali and West Australian Basin, the areas over the Indus and Ganges Cone and the Indonesian deep sea trenches.

In order to illustrate the difference between the free-air anomalies measured aboard surface ships and the "G and L" gravity anomalies in more detail we have selected profiles over the prominent Indian Ocean gravity Low between the Chagos-Laccadive Ridge and the Indonesian Island Arc as shown in Fig. 5. The surface free-air gravity profiles are taken from the gravity maps of the Indian Ocean Atlas [TALWANI and KAHLE 1973]. In between ship's tracks the surface gravity values have been obtained by interpolation on the basis of correlation with topography. We observe North-South trending surface gravity Highs dividing the Indian Ocean gravity Low into several sections that are not reflected in the "G and L" gravity field:

The most prominent Highs are coincident with the Chagos-Laccadive and Ninety-east Ridge. In the area between these ridges there are two other linear gravity Highs: One of them is observed between  $82^\circ$  and  $84^\circ$ E running North-South along the Afanasy Nikitin Seamounts and the second High appears to continue as an extension of the west coast of India. In a different study we shall attempt to resolve the regional

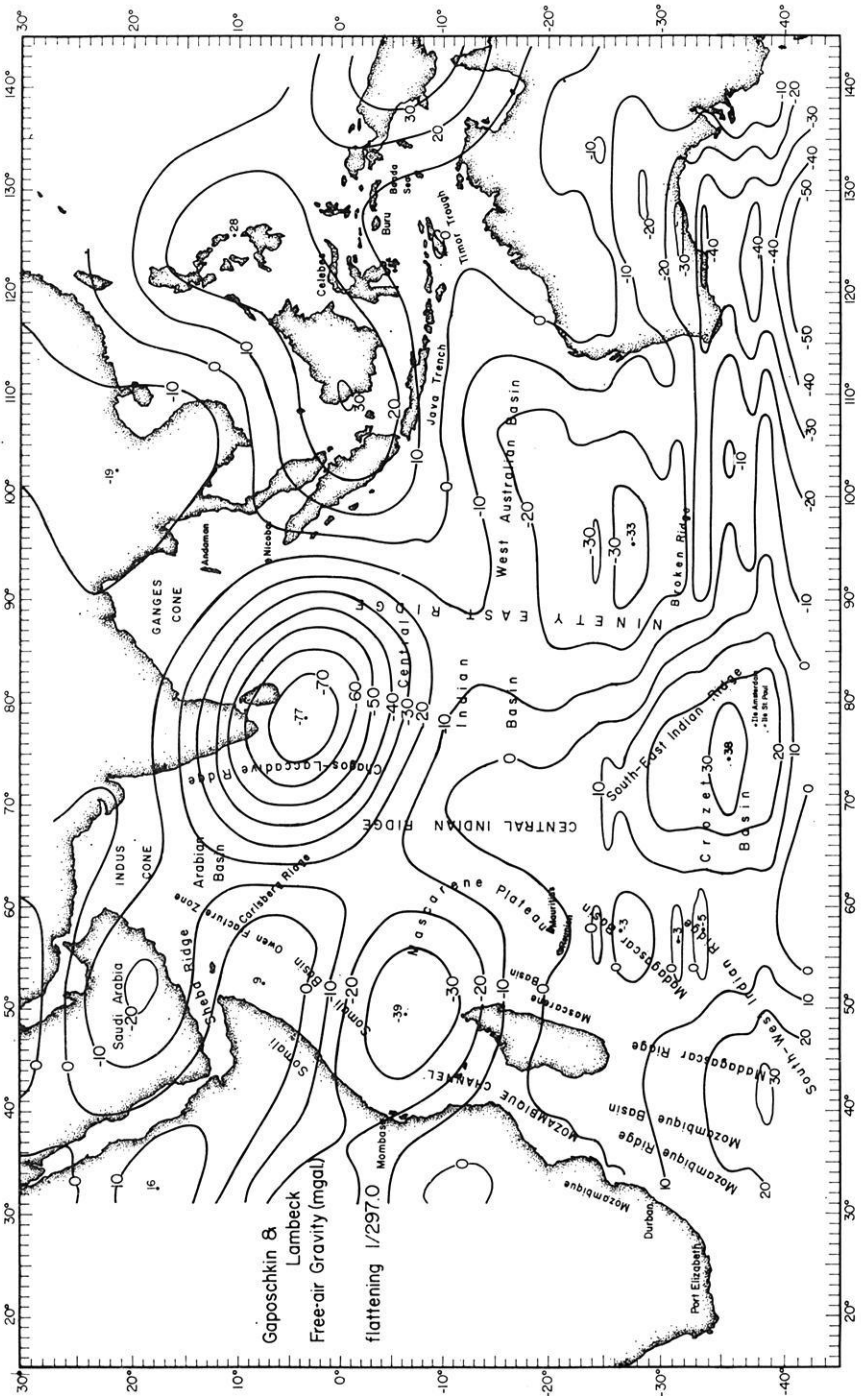


Fig. 3: "G and L" gravity anomalies obtained from the combination solution given by Gaposchkin and Lambeck [1971] using spherical harmonic coefficients up to degree and order 16 referred to an ellipsoid of flattening 1/297.0. Contour interval: 10 mgal

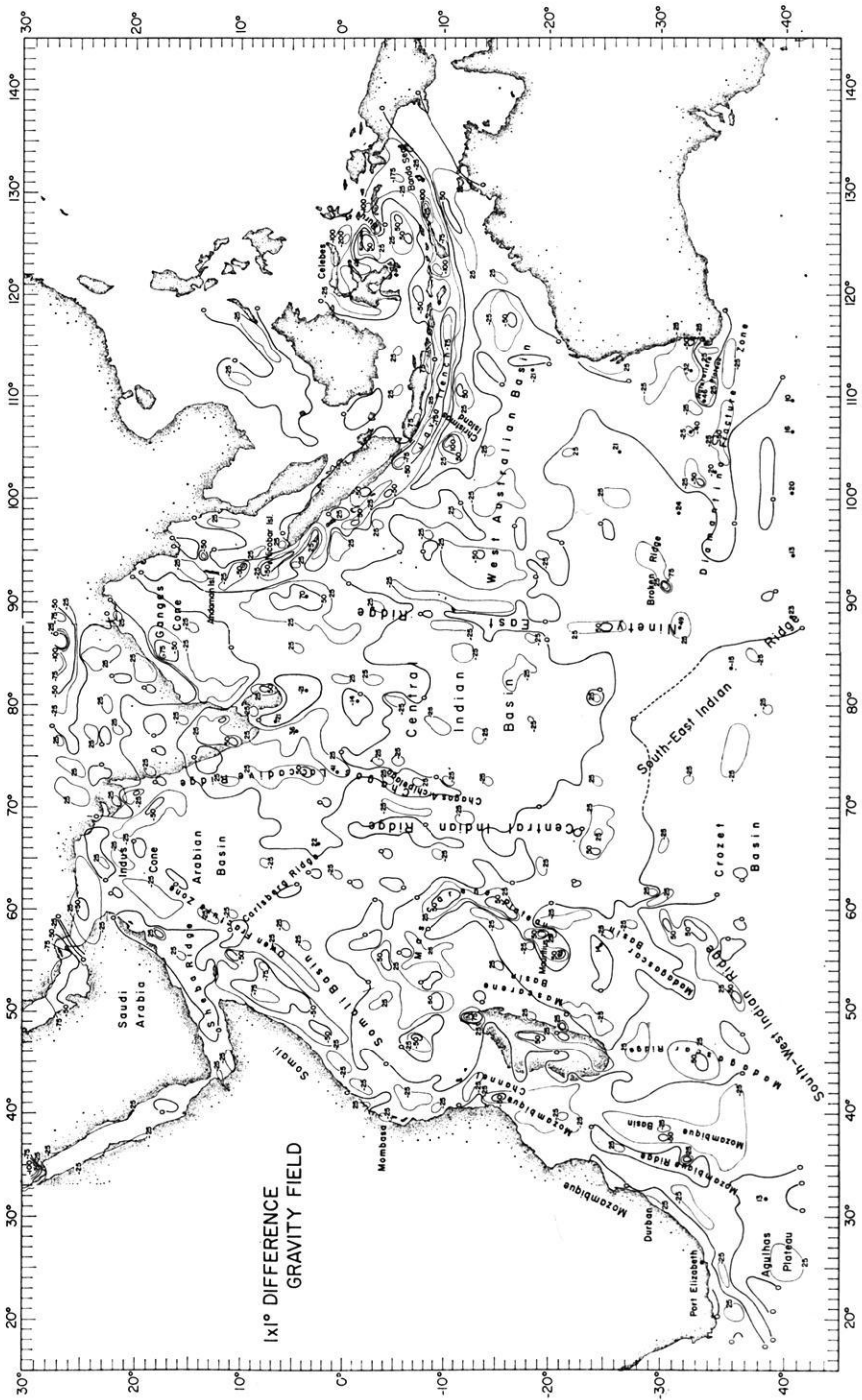


Fig. 4: Difference gravity anomalies between the 1° X 1° square surface gravity values of Fig. 2 and the "G and L" gravity anomalies of Fig. 3. Contour interval: 25 mgal

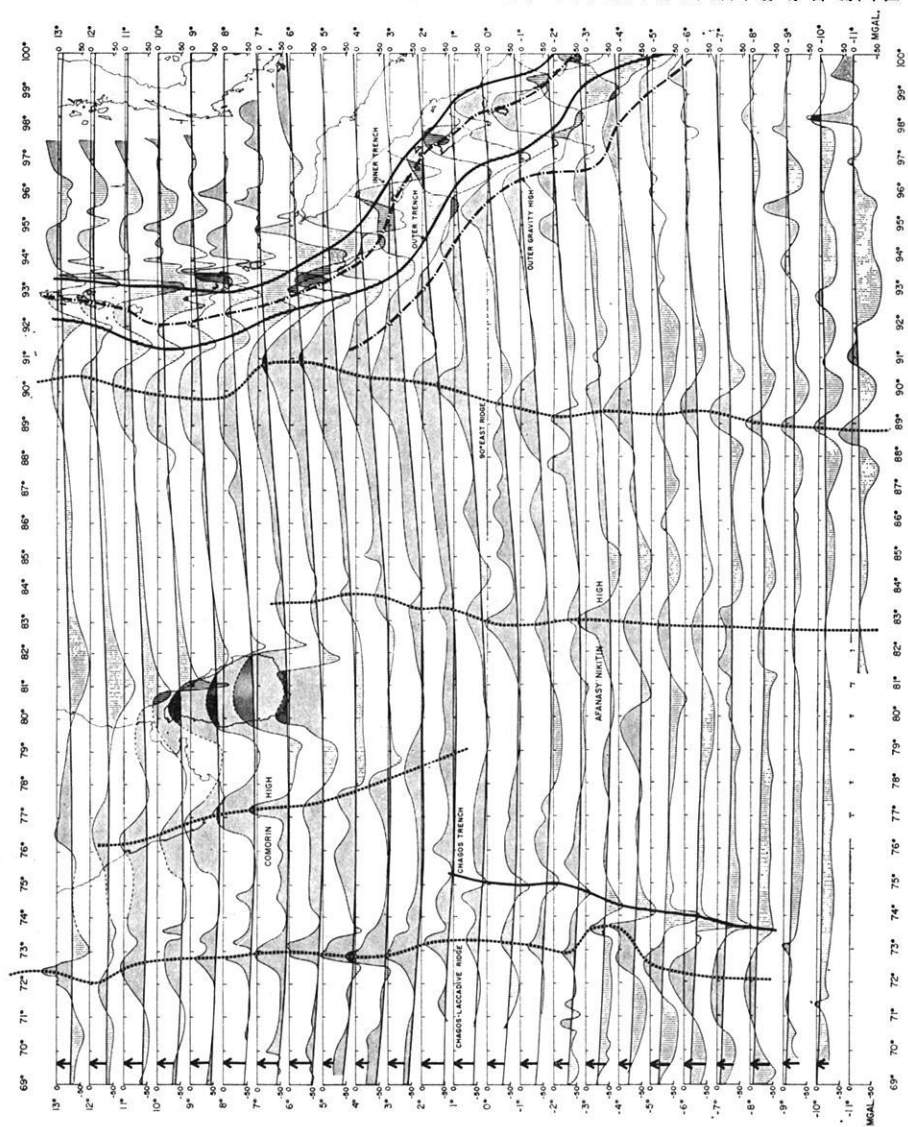


Fig. 5: Profiles of the surface gravity obtained from the gravity map of the Indian Ocean [TALWANI and KAHLE 1973] and of the "G and L" gravity obtained from GAPOSCHKIN and LAMBECK's combination solution of Fig. 3. Areas associated with more positive surface gravity than "G and L" gravity are stippled and areas associated with more negative surface gravity than "G and L" gravity are shaded by vertical lines

structure of this area and possibly shed some light on the nature and origin of the Indian Ocean gravity Low.

### *3. Comparison between the Satellite and Gravimetric Geoid: The Difference Geoid*

As described above the difference between GAPOSCHKIN and LAMBECK's gravity and the  $1^\circ \times 1^\circ$  square average gravity anomalies amount to about  $\pm 50$  mgal over narrow topographic features of a few hundred kilometers in width. We now apply STOKES' formula to calculate the difference geoidal undulations that are caused by these difference anomalies. The aerial average of the difference gravity anomalies is  $-1.8$  mgal whereas the aerial average of the difference geoid attains  $-4.3$  m. We attribute this deviation to the fact that we have not utilized the averages over the entire surface of the earth. For the purpose of this paper we have added the constant value of  $4.3$  m to the difference geoid values in the Indian Ocean. The results are contoured in Fig. 6.

The most positive difference undulations with values up to  $23$  m are present over the Madagascar Ridge. Highs are also observed over Madagascar, the Mascarene Plateau and the Southwest Indian Ridge. The regional High of the Southwest Indian Ocean decreases slightly along the Central Indian Ridge, but it is still higher than the Central Indian, Somali and Arabian Basins. Highs also exist over the northern portion of the Chagos-Laccadive and Ninetyeast Ridge with values up to  $16$  m.

The difference geoid is negative over the Somali Basin, the Indus and Ganges Cone, the Central Indian and West Australian Basin and along the Sumatra and Java Trench, Timor Trough and Banda Sea where the undulations range between  $-15$  and  $-25$  m. In between the Java Trench and the West Australian Basin Low the difference geoid is significantly less negative. This relative High is associated with the seaward Outer Gravity High paralleling the Indonesian Island Arc. In some places the relative outer difference geoid High is expressed in closed contours, e.g.  $-5$  m in the Christmas Island area. In other areas the Outer High can be identified by characteristic bending of the geoid contours, e.g. in the East Cocos Basin area. The Outer Gravity High seaward of the trenches is associated with a corresponding geoidal undulation of about  $5$  to  $10$  m.

Similar characteristic bends in the difference geoid are observed between the Central Indian and the West Australian Basin as the Ninetyeast Ridge is approached from either side. Further south between  $27^\circ$  and  $33^\circ$  the Ninetyeast Ridge and the Broken Ridge stand out as features with positive difference geoidal undulations up to  $6$  m. It is interesting that even though the Ninetyeast Ridge is a narrow feature, only a few hundred kilometers in width, the geoidal heights increase by a few meters over it. The difference geoid over the Naturaliste Plateau, a similarly narrow feature, is higher by about  $3$  m than the basin off West Australia.

The difference geoid appears to be smooth over the Southeast Indian Ridge. However, we attribute this appearance to the poor coverage of gravity data in this area.

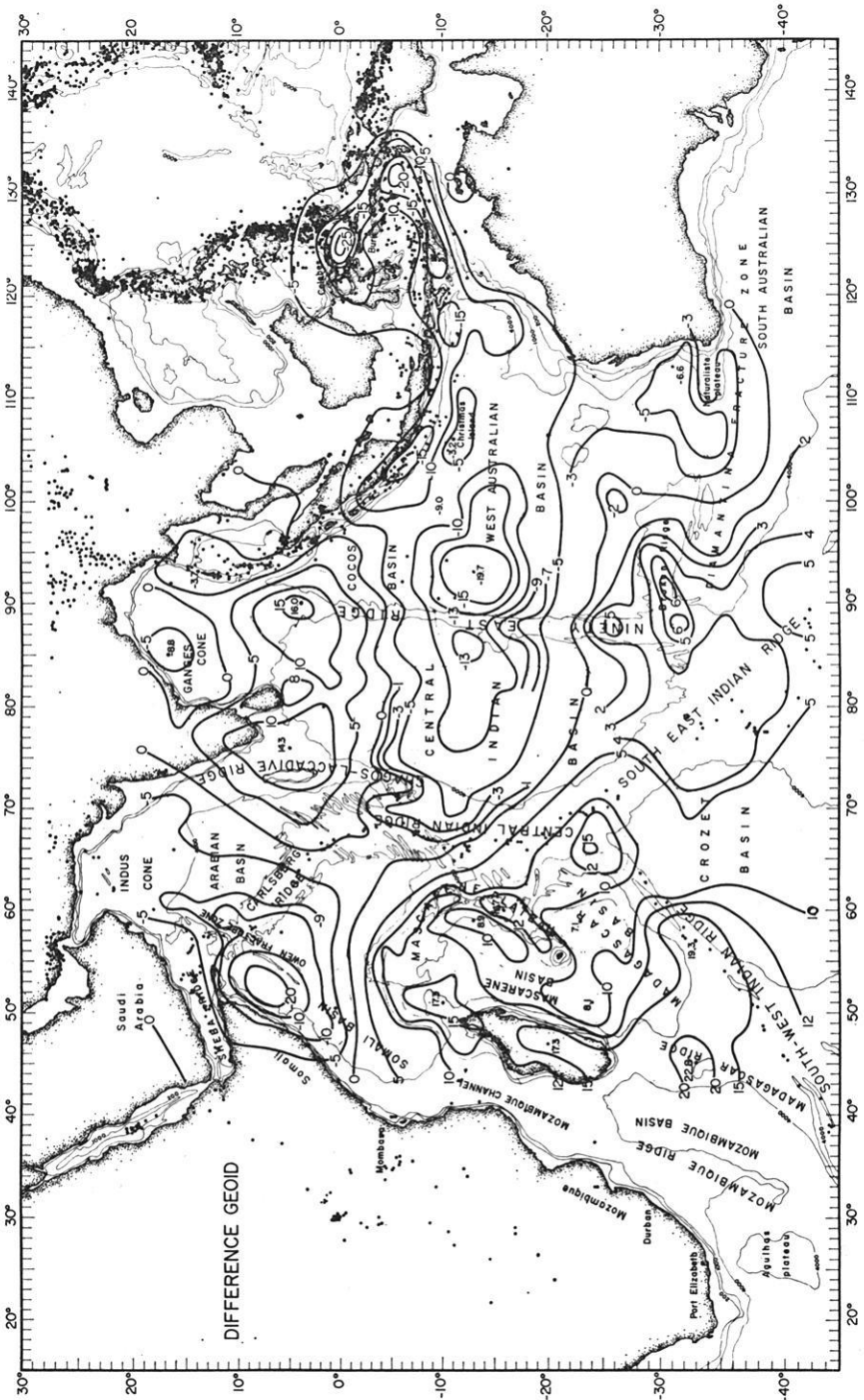


Fig. 6: The  $1^\circ \times 1^\circ$  difference geoid obtained from the difference anomalies of Fig. 4 by using the Stokes' integration. Values in meters. Dots indicate earthquake epicenters. Finer lines are topography in meters

### E. Significance of the $1^\circ \times 1^\circ$ Geoid, the Total Geoid (Fig. 8)

By adding the values of the difference geoid (Fig. 6) to the "G and L" geoidal heights (Fig. 7) we obtain the  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid, (Fig. 8) which thus contains additional information provided by the  $1^\circ \times 1^\circ$  square surface gravity data. In order to show the differences between the gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid and the "G and L" geoid in more detail we have selected  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid and "G and L" geoid profiles over important geological features of the Indian Ocean. Areas with positive or negative difference geoidal undulations are shaded differently as shown in Fig. 9.

Of particular interest is the prominent Indian Ocean Low centered south of Ceylon with its North-South trending minimum axis between the narrow Chagos-Laccadive and Ninetyeast Ridge. It is shown that the contours of the total geoid tend to be more parallel to these ridges than the "G and L" geoid contours and the center of the Low is shifted to the east just south of Ceylon (Fig. 9). The Low extends beyond the Chagos-Laccadive and Ninetyeast Ridge as far as to the Somali Basin and West Australia, however it appears that the North-South trend of the minimum changes into a Northwest-Southeast direction in the basins. The shape of the southern boundary of the Indian Ocean Low appears to be influenced by positive gravitational effect of the Southeast Indian Ridge.

We observe that the overall Low is primarily confined to the Indian plate with its boundaries formed by the Mid-Indian and Southeast Indian Ridge and the Indonesian Island Arc. We further observe that the central North-South trending minimum is restricted within this plate to the area between the Chagos-Laccadive and the Ninetyeast Ridge.

A feature of great tectonic importance is the Outer Geoid High which is located seaward of the deep Indonesian trenches. As the "G and L" geoid only reveals the overall gravity High over island arcs we can follow the characteristic sequence of the island arc gravity pattern by bends in the gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid: The Outer High seaward of the trenches—the Low along the deep trenches—the high over the marginal seas behind the arc (compare also Fig. 8).

Since TALWANI and ELDHOLM [in press, 1972], have suggested that an isostatic gravity Low on the continental margin is associated with subsided continental crust it is consequently of great importance to check if similar Lows are expressed in the gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid: We observe marginal Lows e.g. between the northern portion of the Chagos-Laccadive Ridge and Ceylon and over the margin off Northeast India in the Ganges Cone (Fig. 8). It is important to determine whether these  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid lows reflect the gravitational effect of subsided continental crust.

Apart from the characteristic bending of the  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid along the Ninetyeast Ridge, similar bends are present along the Madagascar Ridge, Madagascar, the Mascarene Plateau, the Southwest Indian Ridge and—somewhat less obvious—over the Central Indian Ridge, the Chagos-Laccadive Ridge and a ridge-type feature along  $88^\circ\text{E}$  between  $10^\circ$  and  $5^\circ\text{N}$  which runs along the Afanasy Nikitin Seamounts (Fig. 8).

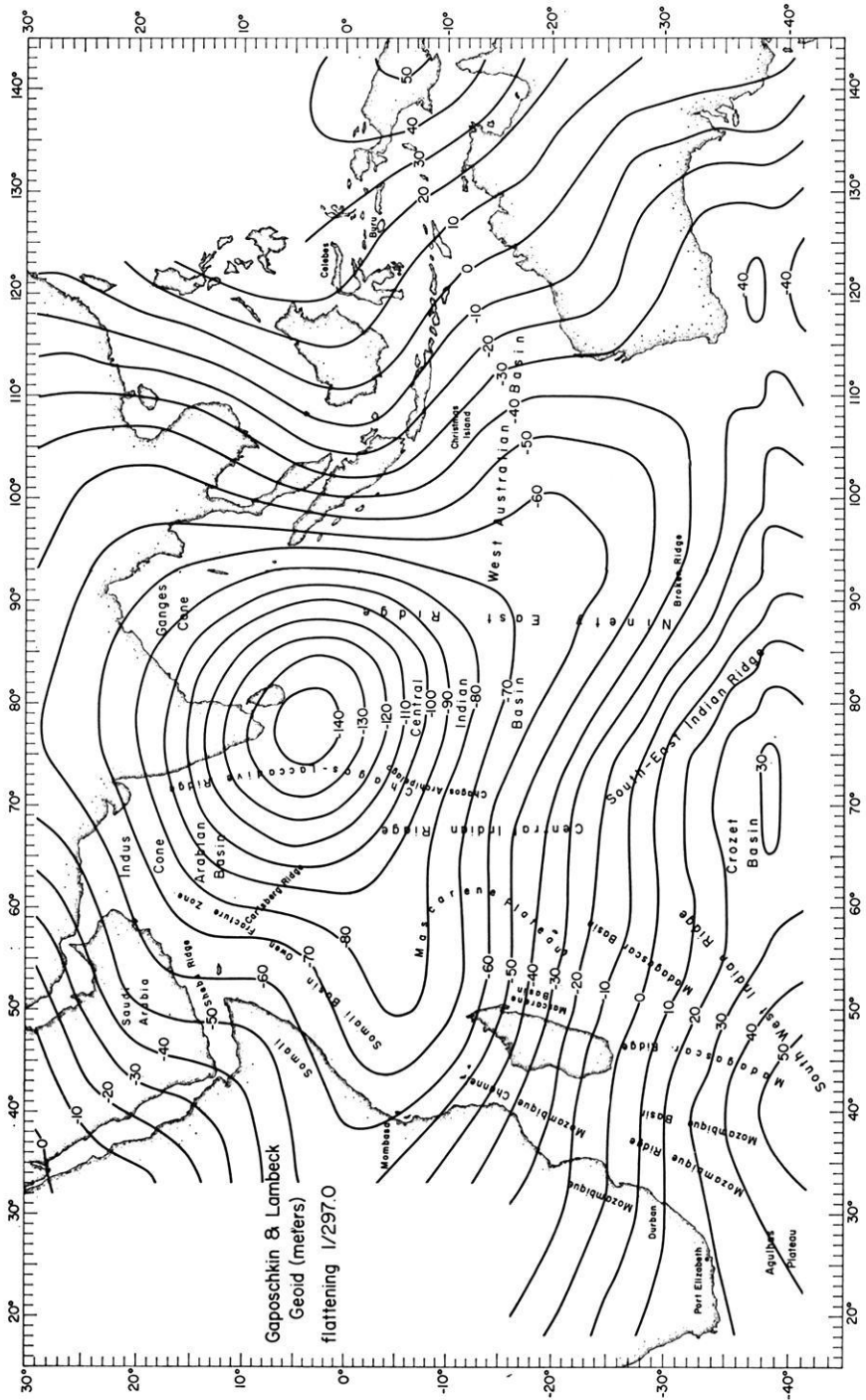


Fig. 7: The "G and L" geoid obtained from the spherical harmonic coefficients up to degree and order 16 referred to an ellipsoid of flattening 1/297.0 [GAPOSCHKIN and LAMBECK 1971]. Contour interval: 10 m



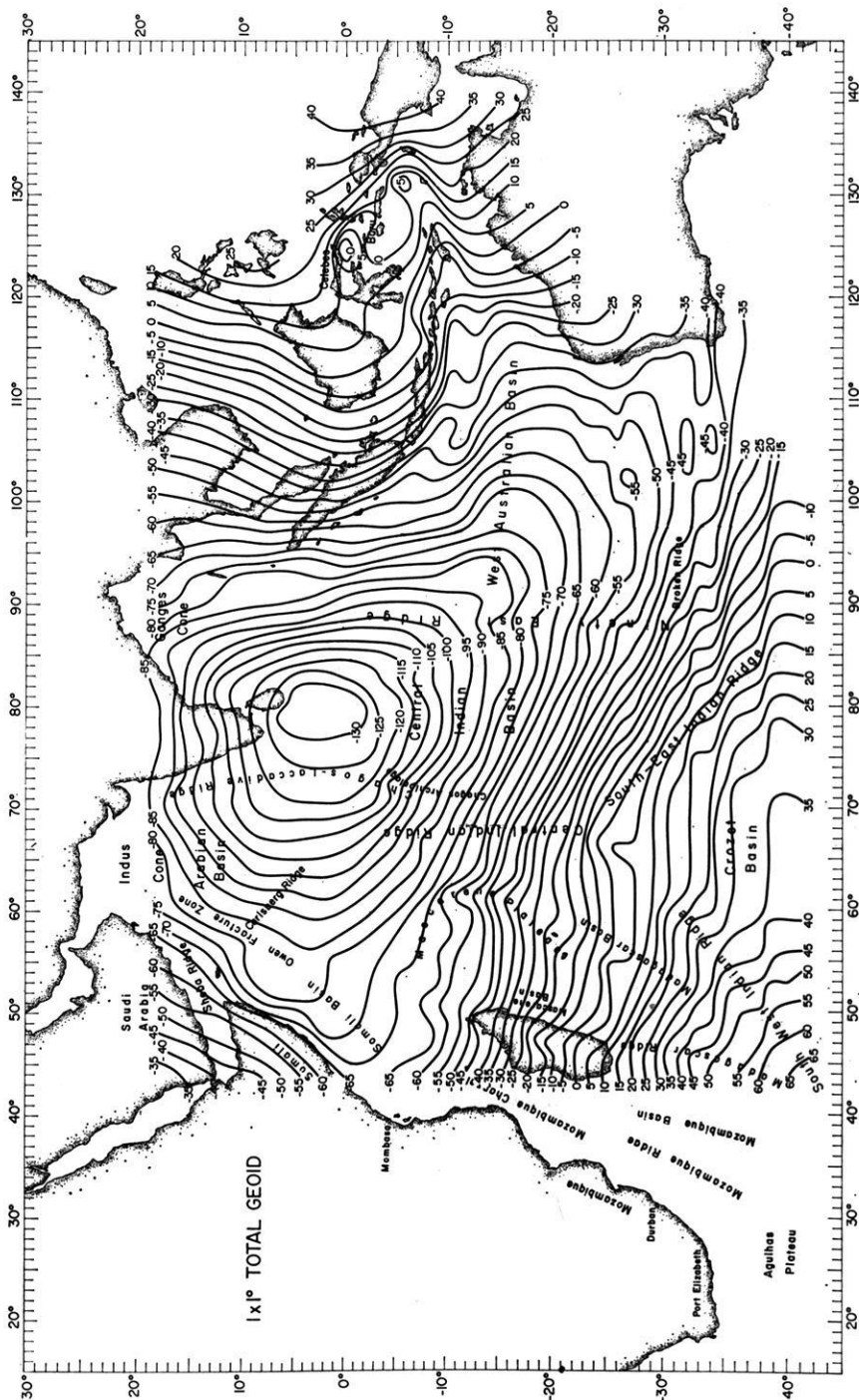


Fig. 8: The gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  total geoid obtained by adding the  $1^\circ \times 1^\circ$  difference geoid of Fig. 6 to the "G and L" geoid of Fig. 7. These undulations are based on the  $1^\circ \times 1^\circ$  square average free-air values of Fig. 2 within the area of Fig. 8 and on gravity values obtained from GAPOCHKIN and LAMBECK's spherical harmonic coefficients to order and degree 16 outside this area. Referred to an ellipsoid of flattening  $1/297.0$ . Contour interval: 5 m.

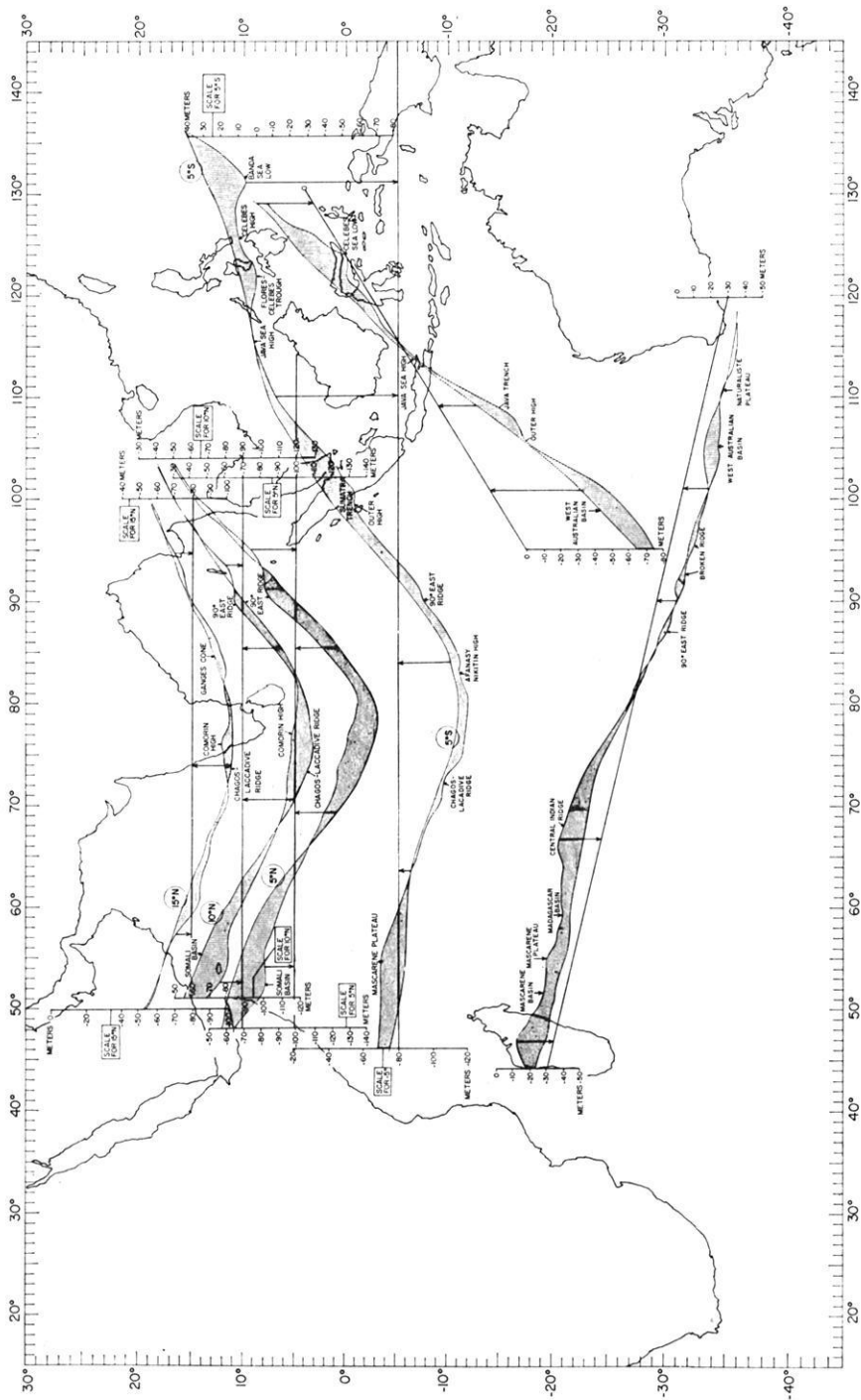


Fig. 9: Profiles of the gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  geoid of Fig. 8 and of the "G and L" geoid of Fig. 7 across the Indian Ocean. Areas associated with more positive gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  geoidal undulations than the "G and L" geoidal undulations are stippled and areas associated with more negative gravimetric  $1^\circ \times 1^\circ$  geoidal undulations than the "G and L" geoidal undulations are shaded by vertical lines

As concluded from this study and the  $1^\circ \times 1^\circ$  gravimetric geoid calculations by TALWANI et al. [1972] in the western North Atlantic intermediate wavelength surface gravity can make significant contributions to the shape of the geoid. We have shown that narrow physiographic and geological features between a few tens and a few hundreds of kilometers in width are significant in the  $1^\circ \times 1^\circ$  gravimetric geoid. Distributions with these wavelengths are the kinds of features needed to be defined to resolve density inhomogeneities e.g. in the upper mantle. The understanding of the nature, location and magnitude of these mass anomalies could help in resolving the cause of the plate motions. It is also important to note that differences between the gravimetrically determined geoid and the radar altimeter deduced geoid may be attributed to ocean currents, tides and other oceanographic phenomena.

## F. Conclusions

The results of this study indicate that the  $1^\circ \times 1^\circ$  difference geoid obtained from the gravity differences between the  $1^\circ \times 1^\circ$  average surface gravity and the "G and L" gravity in the Indian Ocean reveals large differences from the "G and L" geoid based on spherical harmonic coefficients up to degree and order 16 referred to an ellipsoid of flattening  $1/297.0$ . The geoidal height differences exceed  $+20$  m in the Southwest Indian Ocean and over the northern portion of the Ninetyeast Ridge where it connects with the Outer Gravity High seaward of the Indonesian Island Arc. The Outer Gravity High is associated with a geoidal height difference of about  $+5$  to  $+10$  m. Topographic features of a few tens to a few hundreds km of width contribute significantly to the short wavelength undulations ranging between  $5$  and  $10$  m. Extremely large differences are present over the Madagascar Ridge ( $+22.8$  m), over the Somali and West Australian Basin ( $-20$  m), and over the deep sea trenches of the Indonesian Island Arc ( $-25$  m). Since mass distributions of these wavelengths reflect in part density inhomogeneities e.g. in the upper mantle, we point out the importance of mapping the geoid in oceanic areas in great detail as is planned by means of radar altimeters.

## Acknowledgements

We thank Dr. G. BRYAN of the Lamont-Doherty Geological Observatory for critically reading the manuscript.

This work was supported by the Office of Naval Research through contract N00014-67-A-0108-0004 and by grants from the National Science Foundation, including grant GA-27281.

## References

- ALLAN, T. D., and C. MORELLI: The Red Sea, in: *The Sea*, Vol. IV, part 2, A. MAXWELL, Ed., 530, John Wiley & Sons, N.Y., 1971
- CAPUTO, M., R. MASADA, M. D. HELFER and C. L. HAGER: Gravity measurements in the Atlantic, Pacific and Indian Oceans, May 1961—August 1963 (R. V. ARGO), Interim

- Report, University of California, Institute of Geophysics and Planetary Physics (unpublished manuscript), 1964
- EWING, M., J. L. WORZEL and G. L. SHURBET: Gravity observations at sea in U.S. submarines BARRACUDA, TUSK, CONGER, ARGONAUT and MEDREGAL, Verhandel. Ned. Geol. Mijnbouwk, Genoot., Geol. Series 18, 49—69, 1957
- GAPOSCHKIN, E. M., and K. LAMBECK: Earth's gravity field to the sixteenth degree and station coordinates from satellite and terrestrial data, *J. Geophys. Res.* 76, 4855—4883, 1971
- GAPOSCHKIN, E. M., and K. LAMBECK: 1969 Smithsonian Standard Earth (II), Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report 315, 1970
- GIRDLER, R. W., and J. C. HARRISON: Submarine gravity measurements in the Atlantic Ocean, Indian Ocean, Red Sea and Mediterranean Sea, *Proc. Roy. Soc. A* 239, 202—213, 1957
- GRAHAM, K. W. T., and A. L. HALES: Surface-ship gravity measurements in the Agulhas Bank Area, South of South Africa, *J. Geophys. Res.* 70, 4005—4011, 1965
- HEISKANEN, W. A., and F. A. VENING MEINESZ: The earth and its gravity field, McGraw-Hill, 1958
- HELPER, M. D., M. CAPUTO and J. C. HARRISON: Gravity measurements in the Pacific and Indian Oceans, Monsoon Expedition 1960—61, Interim Report, University of California, Institute of Geophysics and Planetary Physics (unpublished manuscript), 1962
- Hydrographic Dept., Admiralty, Bathymetric and gravity investigations H.M.S. OWEN 1961—1962, Admiralty Marine Science Publ., No. 4, Parts 1 and 2, 1963
- Hydrographic Dept.: Admiralty, Bathymetric magnetic and gravity investigations H.M.S. OWEN 1962—1963, Admiralty Marine Science Publ., No. 9, Parts 1 and 2, 1966
- KAULA, W. M.: Global gravity and mantle convection, *Tectonophysics* 13, 341—359, 1972
- KAULA, W. M.: Tests and combinations of satellite determination of the gravity field with gravimetry, *Jour. Geophys. Res.* 71, 5303—5314, 1966
- LAUGHTON, A. S., D. H. MATTHEWS and R. L. FISHER: The structure of the Indian Ocean, in: *The Sea* 4, part 2, 543—586, 1970
- LEPICHON, S., and M. TALWANI: Regional gravity anomalies in the Indian Ocean, *Deep-Sea Research* 16, 263—274, 1969
- PETER, G., L. A. WEEKS and R. E. BURNS: A reconnaissance geophysical survey in the Andaman Sea and across the Andaman-Nicobar Island Arc, *J. Geophys. Res.* 71, No. 2, 495—509, 1966
- PLAUMANN, S.: Kontinuierliche Schweremessungen im Roten Meer mit einem Askania-Seegravimeter vom Typ Gss2 nach GRAF, *Zeitschrift für Geophysik* 29, 233—256, 1963
- TALWANI, M.: Gravity measurements on the H.M.S. ACHERON in South Atlantic and Indian Oceans, *Geol. Soc. Am. Bull.* 73, 1171—1182, 1962
- TALWANI, M., and H.-G. KAHLE: Free-air gravity maps in the Indian Ocean, in the International Indian Ocean Expedition Atlas of Geology and Geophysics (chief editor: G. UDINTSEV), in press, 1973

- TALWANI, M., H. R. POPPE and P. D. RABINOWITZ: Gravimetrically determined geoid in the Western North Atlantic, Sea Surface Topography from Space 2, NOAA Tech. Rept. ERL-228-AOML 7-2, 1-34, 1972
- U.S. Dept. of Commerce Environmental Science Services Admin., Internal Indian Ocean Expedition USC & GS Ship PIONEER, 1964, Vol. 1 and 3, Washington, 1969
- U.S. Dept. of Commerce Environmental Science Services Admin., Technical Rept. ERL 152-OD4, Global Expedition USC & GS Ship OCEANOGRAPHER—1967 Cruise Narrative and Scientific program, Boulder, 1970
- VENING MEINESZ, F. A.: Gravity Expeditions at Sea 1923—1938, Vol. IV, Publ. Neth. Geod. Commission, Delft, 1948
- WATTS, A. B., and M. TALWANI: Gravity anomalies seaward of deep-sea trenches and their tectonic implications, in preparation, 1972
- WHITWORTH, R.: Marine geophysical survey of the north-west continental shelf, 1968, Record No. 1969/99, Dept. of National Development, Bureau of Mineral Resources, Geology and Geophysics, Australia, 1969
- WILLIAMS, C.: R.R.C. DISCOVERY Cruise 16 Indian Ocean 1967, Bathymetric, Gravity and Magnetic Data Report, 1968
- WOOLLARD:  $1^{\circ} \times 1^{\circ}$  square free-air gravity averages in India, Publ. Hawaii Institute of Geophysics, 1970







SIEMENS

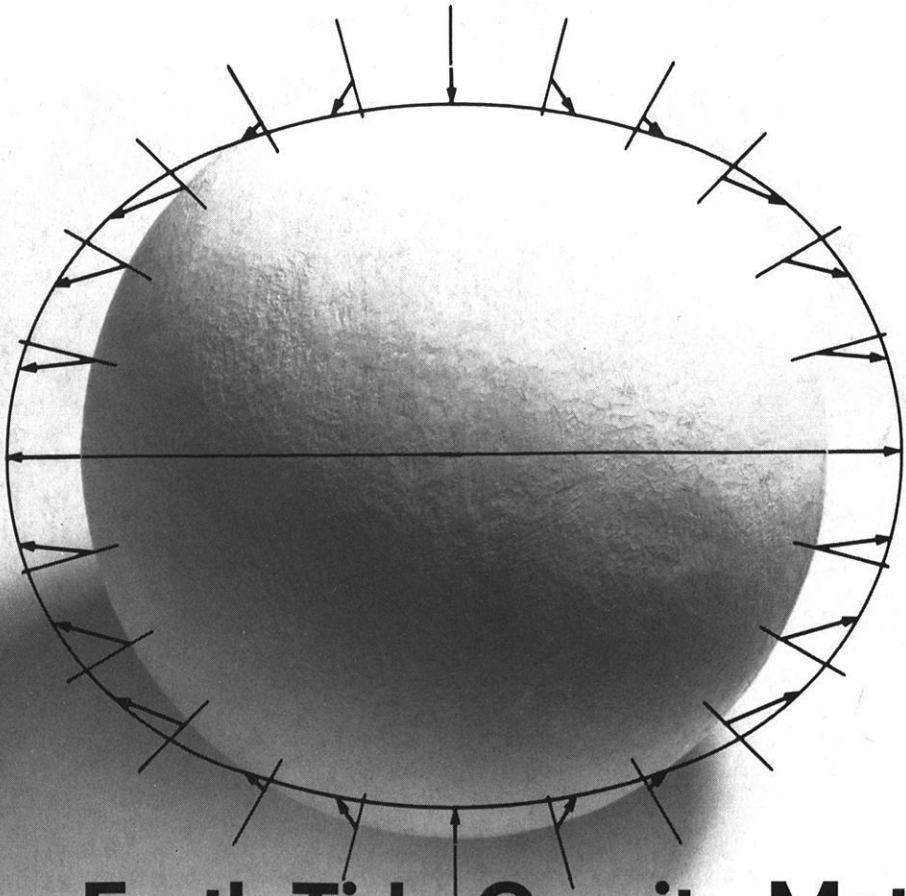
# Reliable and precise

The new gravity meter Gs 15 represents the state of the art in measurement technology. As transducer a capacitive distance translator is now employed which eliminates the photocells providing an essential convenience of operation. The measurement signal at the gravity meter output reacts with a sensitivity of larger than 20 mV/0.1 mgal. By that means, a DC amplifier is no longer necessary.

Technical data: Accuracy 0.001 mgal. Pointer-instrument. Direct connection to recording

system in 19" slide-in unit with power supply for gravity meter, active filter, BCD-output for computer, potentiometer-type line recorder with a sensitivity of approximately 1 mm/0.002 mgal.

Further information can be obtained from Siemens Aktiengesellschaft, ZVW, 7500 Karlsruhe 21, Postfach 211080, Telefon (0721) 5954426 or from your nearest Siemens-representative.



## The Earth-Tide Gravity Meter System Askania by Siemens