

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Veröffentlichungen des Institutes
für Bodendynamik und Erdbebenforschung in Jena

Herausgegeben vom Direktor i. V. Dr. habil. W. Sponheuer

Heft 76

Der neue Jenaer Horizontalseismograph HSJ-I

Von

Christian Teupser und Wolfgang Ullmann

Mit 24 Abbildungen und 10 Tabellen



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1964



Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3-4

Copyright 1964 by Akademie-Verlag GmbH

Lizenznummer: 202 · 100/562/64

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza

Bestellnummer: 2004/76 · ES Nr. 18 E 2 · Preis: DM 30. -

2 1964 3 253 2

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie des mechanischen Empfängers eines Horizontalseismographen

	Seite
1. Grundbegriffe und Aufgabe	5
2. Die Gestellbewegung	8
3. Der Gehängeschwerpunkt	10
4. Der Schwerpunktsatz	11
5. Der Drehimpulssatz	12
6. Die ebene Gehängebewegung	15
7. Zur Geometrie der Aufhängung	16
8. Die Dämpfungsvorrichtung	18
9. Die äußeren Kräfte	19
10. Die Deformation der Blattfeder	23
11. Die Differentialgleichung für die neutrale Faser	23
12. Die Gleichung der neutralen Faser	26
13. Die Funktionen $V(v_\lambda, v'_\lambda)$ und $W(v_\lambda, v'_\lambda)$	27
14. Die Aufhängung (Ergänzung)	28
15. Die Funktionen $Y_j(y_*, \Theta)$ und $\Delta_j(y_*, \Theta)$	30
16. Die Hilfsfunktion $F(p)$	32
17. Die Bedingung $c_1 = -c_2$	33
18. Formel $\frac{f}{\lambda} = q_0$	35
19. Die Bewegungsgleichungen	37
20. Das Gehänge als „Drehmasse“	39
21. Entkoppeln der Bewegungsgleichungen	43
22. Die Indikatorgleichung	45
23. Die Frequenz ω für $\nu = 0$	50
24. Die Funktion $w(\nu)$	53
25. Eine Darstellung von ω für kleine $ \nu $ -Werte	54
26. Der Grenzwinkel ν	57
27. Die Biegesteifigkeit der Blattfedern	57
28. Darstellung der Funktion $p_j(\nu)$	69
29. Zusammenfassung	69

II. Die Theorie der elektrodynamischen Registrierung

30. Wahl der Registrierermethode	80
31. Die Bewegungsgleichungen des elektrodynamischen Seismographen	81
32. Die Integration der Bewegungsgleichungen für stationäre Gestellbewegungen	86
33. Die Abstimmung des Seismographen	88
34. Die Vergrößerung	92
35. Der Empfindlichkeitsregler	94
36. Die Parameter des Galvanometers	96
37. Die Neigungsempfindlichkeit	98
38. Der Einschwingvorgang	102

III. Die Konstruktion und Eichung von HSJ-I

39. Die Berechnung der Bauelemente des mechanischen Empfängers	108
40. Die Konstruktion des mechanischen Empfängers	113
41. Die Justierung des mechanischen Empfängers	116
42. Der Spezialfall $\nu = 90^\circ$	118
43. Die Bestimmung der Parameter des Gehänges	123
44. Die Abhängigkeit der Eigenperiode des mechanischen Empfängers vom Ausschlag und von der Gleichgewichtslage	128
45. Die Tauchspulen	133
46. Die Eichung des elektrodynamischen Wändlers und die Dämpfungsbestimmung	135
47. Schütteltischversuche	141
Literatur	146
Vorwort (nach Drucklegung eingegangen)	148

BERICHTIGUNG

- S. 3 Zeile 4 von unten: lies $\underline{\nu}$ statt ν
- S. 7 Zeile 10 von unten: lies hiervon statt hierzu
- S. 8 Zeile 9 und 8 von unten: lies ... ist ein Vektor, also etwa \mathfrak{k}_0 , (in bezug auf 0) vertikal nach oben gerichtet.
- S. 11 in (4.2): lies \ddot{x}_* statt x_*
- S. 14 obere Formel, untere Determinante: $a \ddot{\Theta} - c \ddot{\vartheta}$ statt $a \ddot{\Theta} - c \vartheta$
- S. 19 in (9.2): lies $M (\ddot{y}_* + \ddot{\eta})$ statt $(M y_* + \ddot{\eta})$
- S. 21 in (9.14): lies $-D_j \dot{y}_{3j}$ statt $-D_j y_{3j}$
- S. 24 Zeile 1 von unten: lies $Q = \int \bar{N} (\bar{\varrho} - \varrho) d\bar{f}$
 statt $Q = \int N (\varrho - \varrho) d\bar{f}$
- S. 28 Zeile 13 von unten: lies $x_1 - \lambda, 0, c_1$ statt $x_1 - \lambda, O, c_1$
 Zeile 12 von unten: lies $x_2 + \lambda, 0, c_2$ statt $x_2 + \lambda, O, c_2$
- S. 29 in (14.6) lies $\frac{d\Delta_0}{d\Theta}$ statt $\frac{\partial\Delta_0}{\partial\Theta}$
- S. 38 Zeile 3 von unten: lies $|a_1 + a_2| > \lambda$ statt $a_1 + a_2 > \lambda$
- S. 39 Zeile 13 von unten: lies $\dot{\eta} \equiv 0$ statt $\eta \equiv 0$
- S. 44 in (21.4): lies $\frac{H s^2 - K}{I}$ statt $\frac{H s^2 - K}{s^2}$
- S. 50 Zeile 13 von oben: lies $|\nu|$ statt ν
- S. 59 Zeile 13 von unten: lies beachtenswert statt betrachtenswert
 Zeile 12 von unten: lies $\tan |\nu| < 0,02$ statt $\tan |\nu| > 0,02$
- S. 60 Zeile 7 und 8 von oben: lies ... erfolgt, indem ...
 statt ... erfolgt indem ...
- S. 67 Zeile 7 von unten: lies für \tilde{p} statt für p
 in (28.9): lies $\tilde{p} \Im \tan \tilde{p} - \frac{\Im \sin 2 \tilde{p}}{2 \tilde{p}} + 1 = 0$
 statt $p \Im \tan \tilde{p} - \frac{\Im \sin 2 \tilde{p}}{2 p} + 1 = 0$
- Zeile 3 von unten: lies $\tilde{p} 0,9199$ statt $p \approx 0,9199$
- Zeile 1 von unten: lies $p_0 \leq \tilde{p}$ statt $p_0 \leq p$

- S. 68 Zeile 11 von unten: lies $p_0 > \tilde{p}$ statt $p_0 > p$
 Zeile 5 von unten: lies $\mathfrak{S}in 2\tilde{p}$ statt $\mathfrak{S}in 2p$
 Zeile 3 von unten: lies $\mathfrak{L}(\tilde{p})$ statt $\mathfrak{L}(p)$
 Zeile 1 von unten: lies $\tilde{p} \mathfrak{T}an \tilde{p}$ statt $p \mathfrak{T}an p$
- S. 71 Zeile 3 von unten: lies $-M \ddot{\eta}$ statt $-M \eta$
- S. 73 Zeile 1 von unten: lies $\frac{1}{\lambda} y_*$ statt $\frac{1}{2} y^*$
- S. 74 Zeile 2 von oben: lies y_* statt y^*
 Zeile 4 von oben: lies $p_j = \sqrt{\frac{(-1)^j X_j}{J_j}}$
 statt $p_j = \sqrt{\frac{-(1)^j X_j}{J_j}}$
- S. 99 Zeile 11 von unten: Formelnummer (37.2)
- S. 104 in (38.2) 2. Zeile: lies U_g statt U_s
- S. 126 in (43.7) und (43.8): lies $m_z r_z l'$ statt $m_z r_z l$
- S. 134 Zeile 13 von unten: lies l statt L

I. Theorie des mechanischen Empfängers eines Horizontalseismographen

1. Grundbegriffe und Aufgabe

Der *mechanische Empfänger* eines Seismographen besteht im wesentlichen aus einem *Gestell* und dem daran aufgehängten sogenannten *Gehänge*. Bei HSJ-I ist nicht nur das Gestell, sondern auch das Gehänge ein starrer Körper.

Die Aufhängung erfolgt mittels elastischer Bindeglieder, deren Gesamtmasse vernachlässigbar klein ist. Bei HSJ-I werden hierzu zwei Blattfedern und ein Draht verwendet. Die Wirksamkeit der Aufhängung äußert sich in der Beweglichkeit des Gehänges. Die auf das Gestell bezogene Bewegung des Gehänges wird als *Gehängebewegung* bezeichnet.

Das Gestell nimmt an der Bodenbewegung teil, die am Ort des mechanischen Empfängers (infolge eines Erdbebens) stattfindet. Diese *Gestellbewegung* bezieht man auf ein (kartesisches) Koordinatensystem, das relativ zur „starrten Erde“ ruht und in der Seismometrie als *Inertialsystem* dient.

Die Theorie des mechanischen Empfängers befaßt sich mit der Herleitung und einer eingehenden Diskussion der *Bewegungsgleichungen*; das sind die Differentialgleichungen der Gehängebewegung. Wenn das Gehänge ein starrer Körper ist, kommen höchstens sechs derartige Gleichungen in Betracht.

Die folgenden Untersuchungen verlaufen im Rahmen einer linearen Theorie. Die Bewegungsgleichungen werden also linearisiert. Die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade des Gehänges ist sowohl durch die Aufhängung als auch durch die geometrische Struktur des Gehänges bedingt. Sie kann bei günstiger Anordnung der Bindeglieder und unter gewissen Symmetriebedingungen für das Gehänge verkleinert werden.

Wegen der Verwendung elastischer Bindeglieder ist es jedoch unmöglich, die Zahl der Freiheitsgrade auf Eins zu reduzieren [3, 9]. Demnach sind wenigstens zwei lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu diskutieren.

Man unterscheidet zwischen *heteronomen* und *autonomen* Gehängebewegungen, je nachdem in mindestens einer Bewegungsgleichung die Zeit explizite vorkommt oder nicht. Im allgemeinen wird jede heteronome Gehängebewegung durch eine Gestellbewegung verursacht. Bestimmte autonome Gehängebewegungen dienen der experimentellen Prüfung des mechanischen Empfängers. Seine Funktion läßt sich teilweise schon anhand der Differentialgleichungen der autonomen Gehängebewegungen erörtern.

Der *Indikator* ist eine bestimmte Stelle des Gehänges, deren Bewegung (relativ zum Gestell) registriert wird. Diese *Indikatorbewegung* resultiert aus der Gehängebewegung. Bei „direkter“ Registrierung (Ruß-, Tintenschreiber) ist der Indikator die Schreibspitze der Registriervorrichtung. Im Fall der „indirekten“ (optischen oder galvanometrischen) Registrierung hat man den vom mechanischen Empfänger herrührenden Bestandteil des (optisch- oder elektromechanischen) Wandler-Systems als Indikator anzusehen. Bei HSJ-I wird das elektrodynamische Verfahren [16] bevorzugt; hier ist die Wandler- spule der Indikator.

In der Theorie des mechanischen Empfängers repräsentiert ein spezieller gehängefester Punkt den Indikator. Die Berechtigung zu der vereinfachenden Darstellung ist im Fall der Schreibspitze evident. Sie besteht immer, wenn die Indikatorbewegung translatorisch oder wenigstens der Indikator genügend klein ist. Unter dieser Annahme kann man als „Lagenkoordinaten“ des Indikators die Koordinaten seines Schwerpunkts bezüglich eines vorgegebenen gestellfesten kartesischen Koordinatensystems wählen. Der Indikator besitzt sodann höchstens drei Freiheitsgrade.

Die Verwendung eines gestellfesten Dauermagneten mit einem Ringspalt (wie bei HSJ-I), in den die Wandler- spule

eintaucht, setzt voraus, daß die Indikatorbewegung nur translatorisch ist. Im Hinblick darauf ergeben sich konkrete Forderungen für eine geeignete Aufhängung und Gehängestruktur. Es läßt sich einrichten, daß die geradlinige Verrückung des Indikators durch genau eine seiner Koordinaten dargestellt wird. Sie bietet sich (evtl. erst nach passender Transformation) als Lagenkoordinate des Gehänges an.

Die (eigentliche) Dämpfungsvorrichtung besteht ebenfalls aus einem gestellfesten Dauermagneten und einer (über einen regelbaren Außenwiderstand geschlossenen) gehängefesten Spule. Darüber hinaus erweist sich eine möglichst weitgehende Übereinstimmung zwischen jener Vorrichtung und dem Wandler-system als zweckmäßig. Insbesondere wird die Identität der Spulen und Magnete angestrebt. In der Theorie des mechanischen Empfängers berücksichtigt man diese Tendenz durch eine gleichartige Anordnung der beiden identischen Tauchspulen bzw. der sie repräsentierenden gehängefesten Punkte, so daß eine Vertauschung der Funktionen der Spulen theoretisch belanglos ist. Die dämpfende Kraft darf als proportional zur Geschwindigkeit ihres Angriffspunkts (der Dämpfungsspule) angesetzt werden.

Im folgenden wird angenommen, daß alle Gestellbewegungen rein translatorisch sind. Man kann dann irgendeinen Gestellpunkt als *Referenzpunkt* auszeichnen. Er möge bei ruhendem Gestell den Koordinaten-Nullpunkt des Inertialsystems markieren. Eine Koordinatenachse hierzu sei vertikal nach oben gerichtet. Die dazu orthogonale Koordinatenebene stimmt also mit der Horizontalebene durch den Nullpunkt des Inertialsystems überein.

Der mechanische Empfänger eines *Horizontalseismographen* soll nur jene Beschleunigungskomponente des Referenzpunktes „empfangen“, die zu einer vorgegebenen Richtung in besagter Horizontalebene parallel ist. Die betreffende Richtung wird in der Regel durch eine der beiden horizontalen Koordinatenachsen des Inertialsystems angezeigt.

Diese Bedingung setzt voraus, daß die Gestellbewegung translatorisch ist. Sie wird insbesondere dann erfüllt, wenn eine der Bewegungsgleichungen neben gewissen Konstanten nur die variable Koordinate des Indikators und deren erste und zweite Ableitung nach der Zeit sowie die ausgewählte Beschleunigungskomponente (als Funktion der Zeit) enthält. Eine solche Gleichung kann als *Indikatorgleichung* bezeichnet werden. Die Existenz der Indikatorgleichung ist eine notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit der üblichen Theorie des sogenannten elektrodynamischen Seismographen [12].

Um bei HSJ-I die Indikatorgleichung zu erhalten, muß der mechanische Empfänger außer den bereits erwähnten Forderungen weiteren Vorschriften genügen, die vor allem die Freiheit in der Wahl eines gehängefesten Punktes als Repräsentant der Wandler- bzw. Dämpfungsspule stark einschränken.

Die Diskussion der Bewegungsgleichungen befaßt sich eingehend mit den Konstanten in den (linearen) Differentialgleichungen, die hinsichtlich ihrer eigentlichen Funktion richtiger als Parameter zu bezeichnen sind. Diese Parameter regeln z. B. das schwingungsmäßige Verhalten des Gehänges und die „Grenzlage“, bis zu der stabile (autonome) Gehängebewegungen möglich sind.

2. Die Gestellbewegung

Von den orthonormierten Basisvektoren i_0 , j_0 , k_0 des als Inertialsystem zugrunde gelegten kartesischen Koordinatensystems \mathfrak{S}_0 mit dem Nullpunkt θ ist ein Vektor, also etwa f_0 (in bezug auf θ), vertikal nach oben gerichtet. Das heißt $-f_0$ zeigt die unveränderliche Lotrichtung in θ an.

Wie bei allen entsprechenden seismometrischen Untersuchungen wird darüber hinaus angenommen, daß sich die Schwere in jedem Gehängepunkt durch denselben konstanten Vektor

$$g = -g f_0 \tag{2.1}$$

darstellen läßt. Der Skalar g ist die Schwereintensität;

$$g = |g| .$$

Ein zweites kartesisches Koordinatensystem \mathcal{S} mit dem Nullpunkt R und den orthonormierten Basisvektoren i, j, k repräsentiert das Gestell. Da voraussetzungsgemäß nur translatorische Gestellbewegungen in Betracht kommen, erscheinen i, j, k als konstante Vektoren.

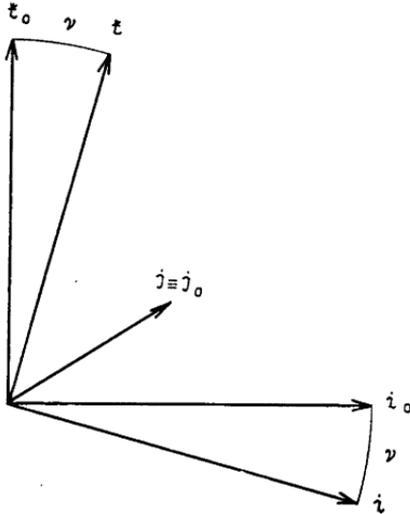


Abb. 1. Zur Definition der Neigung ν

In Abb. 1 sind die beiden Dreiebeine i, j, k und i_0, j_0, k_0 in demselben Punkt angetragen. Während j und j_0 übereinstimmen, schließen i und i_0 bzw. k und k_0 den Winkel ν ein. Die Zweckmäßigkeit dieser Orientierung der Koordinatenachsen von \mathcal{S} geht aus den weiteren Untersuchungen hervor. Man bezeichnet ν als *Neigung* (von k gegen die Vertikale) und verbindet damit die Vorstellung, daß das Gehänge eine „Drehmasse“ mit zum Vektor k paralleler gestellfester Drehachse ist. Die exakte Definition von ν ergibt sich mit den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= i \cos \nu + k \sin \nu, \\ j_0 &= j, \\ k_0 &= -i \sin \nu + k \cos \nu. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Die Neigung ν erweist sich im folgenden als wichtigster Parameter. Der Betrag des (positiven oder negativen) Werts von ν

ist jedenfalls kleiner als 0,02 (d. i. im Gradmaß ungefähr gleich 1°).

Der Ansatz (2.1) und die dritte Gleichung von (2.2) verhelfen insbesondere zu den skalaren Produkten

$$g \cdot i = g \sin \nu, \quad g \cdot j = 0, \quad g \cdot k = -g \cos \nu. \quad (2.3)$$

Jede (translatorische) Gestellbewegung läßt sich am einfachsten durch die \mathfrak{S}_0 -Koordinaten ξ, η, ζ des Referenzpunkts R als Funktionen der Zeit t beschreiben. Es gilt also

$$\overrightarrow{OR} = \xi i_0 + \eta j_0 + \zeta k_0 \quad (2.4)$$

mit

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t).$$

3. Der Gehängeschwerpunkt

Das Gehänge \mathfrak{G} ist ein starrer Körper. Einem beliebigen Massenpunkt P von \mathfrak{G} (Gehängepunkt, symbolisch: $P \in \mathfrak{G}$) sind die \mathfrak{S} -Koordinaten x, y, z zugeordnet;

$$\overrightarrow{RP} = x i + y j + z k. \quad (3.1)$$

Das Massenelement von \mathfrak{G} an der Stelle P wird mit μ bezeichnet. Die träge Masse M des Gehänges \mathfrak{G} kann sodann durch

$$M = \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu$$

ausgedrückt werden. Die Summation erstreckt sich „über alle (abzählbar viele) Gehängepunkte“. Diese Schreibweise wird auch weiterhin verwendet.

Die \mathfrak{S} -Koordinaten x_*, y_*, z_* des Schwerpunkts P_* von \mathfrak{G} ergeben sich per definitionem zu

$$x_* = \frac{1}{M} \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu x, \quad y_* = \frac{1}{M} \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu y, \quad z_* = \frac{1}{M} \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu z. \quad (3.2)$$

Aus

$$\overrightarrow{OP_*} = \overrightarrow{RP_*} + \overrightarrow{OR}$$

folgt im Hinblick auf (2.2) und (2.4)

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OP_*} \cdot i &= x_* + \xi \cos \nu - \zeta \sin \nu, \\ \overrightarrow{OP_*} \cdot j &= y_* + \eta, \\ \overrightarrow{OP_*} \cdot k &= z_* + \xi \sin \nu + \zeta \cos \nu. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

4. Der Schwerpunktsatz

Die skalaren Produkte

$$\mathfrak{F} \cdot \mathbf{i} = X, \quad \mathfrak{F} \cdot \mathbf{j} = Y, \quad \mathfrak{F} \cdot \mathbf{k} = Z \quad (4.1)$$

stellen die \mathfrak{S} -Koordinaten der Resultante \mathfrak{F} aller in $P \in \mathfrak{G}$ angreifenden äußeren Kräfte mit Ausnahme der Schwerkraft $-\mu \mathfrak{g}$ dar. Da das Gehänge \mathfrak{G} nicht frei beweglich ist, hat man hierbei neben den eingepprägten Kräften die Zwangskräfte zu berücksichtigen.

Nach dem Schwerpunktsatz gilt

$$\sum'_{P \in \mathfrak{G}} \mathfrak{F} = M \left(\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{\theta P_*} - \mathfrak{g} \right)$$

oder wegen (2.3), (3.3) und (4.1)

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} X = M [x_* - (g + \ddot{\zeta}) \sin \nu + \ddot{\xi} \cos \nu], \quad (4.2)$$

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} Y = M (\ddot{y}_* + \ddot{\eta}), \quad (4.3)$$

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} Z = M [\ddot{z}_* + (g + \ddot{\zeta}) \cos \nu + \ddot{\xi} \sin \nu]. \quad (4.4)$$

(Ein bzw. zwei Punkte über einer Größe zeigen die erste bzw. zweite zeitliche Ableitung der betreffenden Größe an.)

Aus (4.4) geht hervor, daß die Beziehung

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} Z = M [(g + \ddot{\zeta}) \cos \nu + \ddot{\xi} \sin \nu] \quad (4.5)$$

bestehen muß, damit der Schwerpunkt P_* bei jeder Gehängebewegung in der zu \mathbf{k} orthogonalen Koordinatenebene von \mathfrak{S} verbleibt. Diese Bedingung ist für

$$z_* = 0 \quad (4.6)$$

auch als hinreichend aufzufassen. Denn infolge der Aufhängung kommt als Integral von $\ddot{z}_* = 0$ bei geeigneter Wahl des Referenzpunkts R nur die triviale Lösung (4.6) in Betracht. Die Gleichungen (4.5) und (4.6) sind demnach äquivalent.

5. Der Drehimpulssatz

Nach dem Drehimpulssatz gilt

$$\sum_{P \in \mathcal{G}} \overrightarrow{P_* P} \times \widehat{\delta} = \sum_{P \in \mathcal{G}} \mu \overrightarrow{P_* P} \times \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{P_* P}. \quad (5.1)$$

Aus (3.1) und (3.2) ergibt sich für $\overrightarrow{P_* P}$ die Darstellung

$$\overrightarrow{P_* P} = (x - x_*) i + (y - y_*) j + (z - z_*) k. \quad (5.2)$$

Infolgedessen und wegen (4.1) kann man (5.1) in

$$\sum_{P \in \mathcal{G}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x - x_* & y - y_* & z - z_* \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \sum_{P \in \mathcal{G}} \mu \begin{vmatrix} i & j & k \\ x - x_* & y - y_* & z - z_* \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

umformen.

Die drei Hauptträgheitsachsen von \mathcal{G} im Schwerpunkt P_* bilden ein kartesisches Koordinatensystem \mathfrak{S}_* , dessen ortho-normierte Basisvektoren mit i_* , j_* , k_* bezeichnet werden. Dem Punkt $P \in \mathcal{G}$ sind die (konstanten) \mathfrak{S}_* -Koordinaten a , b , c zugeordnet, so daß neben (5.2) die Darstellung

$$\overrightarrow{P_* P} = a i_* + b j_* + c k_*$$

zur Verfügung steht. Ihre Gleichsetzung mit (5.2) und darauf-folgende skalare Multiplikation mit i , j , k liefert die Trans-

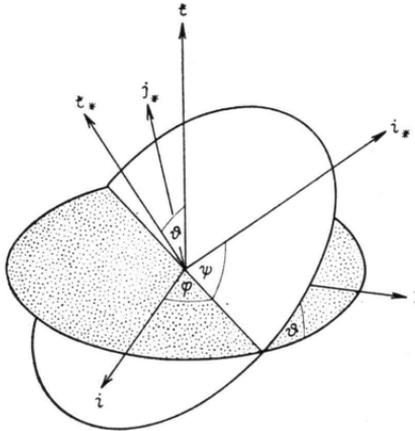


Abb. 2. Zur Definition der EULERSCHEN Winkel φ , ψ , ϑ

formationsformeln

$$\left. \begin{aligned} x - x_* &= a i_* \cdot i + b j_* \cdot i + c f_* \cdot i, \\ y - y_* &= a i_* \cdot j + b j_* \cdot j + c f_* \cdot j, \\ z - z_* &= a i_* \cdot f + b j_* \cdot f + c f_* \cdot f. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Alle neun Richtungskosinus $i_* \cdot i, \dots, f_* \cdot f$ der Koordinatenachsen von \mathfrak{S}_* in bezug auf \mathfrak{S} (oder umgekehrt) lassen sich als Funktionen derselben drei unabhängigen Veränderlichen darstellen. Hierfür eignen sich wegen ihrer anschaulichen Bedeutung am besten die EULERSchen Winkel φ, ψ, ϑ . Mit Hilfe von Abb. 2 bestätigt man, daß

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccc} i_* \cdot i & j_* \cdot i & f_* \cdot i \\ i_* \cdot j & j_* \cdot j & f_* \cdot j \\ i_* \cdot f & j_* \cdot f & f_* \cdot f \end{array} \right\| \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta & & \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta & & \\ \sin \psi \sin \vartheta & & \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta & \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \varphi \sin \vartheta & \\ \cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta & \end{array} \right\|. \quad (5.5) \end{aligned}$$

In den weiteren Untersuchungen werden nur solche Gehängebewegungen berücksichtigt, bei denen die EULERSchen Winkel so klein bleiben, daß man (5.5) durch die schiefsymmetrische Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & -\Theta & 0 \\ \Theta & 1 & -\vartheta \\ 0 & \vartheta & 1 \end{array} \right\|$$

mit

$$\Theta = \varphi + \psi \quad (5.6)$$

ersetzen darf. Infolgedessen gehen die Formeln (5.4) in

$$\left. \begin{aligned} x - x_* &= a - b \Theta, \\ y - y_* &= a \Theta + b - c \vartheta, \\ z - z_* &= b \vartheta + c \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

über. Mit diesen Gleichungen ist die zusätzliche Annahme verbunden, daß die EULERSCHEN Winkel insbesondere den Wert Null zugleich annehmen können. Im Fall $\vartheta = 0$ gilt stets $\varphi = 0$, also wegen (5.6) $\Theta = \varphi$.

Die Beschränkung auf „kleine Gehängebewegungen“ bewirkt offensichtlich eine starke Vereinfachung der Betrachtungen. Die Berücksichtigung nichtlinearer Glieder in (5.5) würde erhebliche Schwierigkeiten verursachen.

Unter Verwendung der linearisierten Transformationsformeln (5.7) reduziert sich die Beziehung (5.3) auf

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathfrak{G}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a - b \Theta & a \Theta + b - c \vartheta & b \vartheta + c \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \\ = \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu \begin{vmatrix} i & j & k \\ a - b \Theta & a \Theta + b - c \vartheta & b \vartheta + c \\ -b \ddot{\Theta} & a \ddot{\Theta} - c \vartheta & b \ddot{\vartheta} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung der darin enthaltenen drei skalaren Gleichungen kann man von vornherein alle mit $a b$, $c a$ und $b c$ behafteten Terme unbeachtet lassen, da die Deviationsmomente von \mathfrak{G} bezüglich \mathfrak{S}_* verschwinden, d. h.

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu a b = \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu c a = \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu b c = 0. \quad (5.8)$$

Man bekommt sodann

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \begin{vmatrix} a \Theta + b - c \vartheta & b \vartheta + c \\ Y & Z \end{vmatrix} = \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu (b^2 + c^2) \ddot{\vartheta}, \quad (5.9)$$

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \begin{vmatrix} b \vartheta + c & a - b \Theta \\ Z & X \end{vmatrix} = \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu b^2 (\Theta \ddot{\vartheta} - \ddot{\Theta} \vartheta), \quad (5.10)$$

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \begin{vmatrix} a - b \Theta & a \Theta + b - c \vartheta \\ X & Y \end{vmatrix} = \sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu (a^2 + b^2) \ddot{\Theta}. \quad (5.11)$$

6. Die ebene Gehängebewegung

Wenn die Bedingung (4.6) erfüllt ist und zugleich

$$\vartheta \equiv 0 \tag{6.1}$$

gilt, führt \mathfrak{G} ebene Bewegungen (relativ zu \mathfrak{S}) aus; denn $P \in \mathfrak{G}$ kann sich dann nur parallel zur (x, y) -Ebene bewegen. Die Aufhängung bewirkt, daß (6.1) gleichbedeutend ist mit $\ddot{\vartheta} \equiv 0$, d. h. sie läßt hierfür unter Beachtung der mit (5.7) verbundenen zusätzlichen Annahme nur die triviale Lösung (6.1) zu. Diese Bedingung impliziert

$$\psi \equiv 0,$$

so daß aus (5.6) die Identität

$$\Theta \equiv \varphi$$

hervorgeht. Demnach stellt Θ den Drehwinkel von \mathfrak{G} dar.

Wegen (5.9) trifft (6.1) genau dann zu, falls

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \begin{vmatrix} a \Theta + b & c \\ Y & Z \end{vmatrix} = 0. \tag{6.2}$$

Aus (6.1) und (5.10) folgt

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \begin{vmatrix} c & a - b \Theta \\ Z & X \end{vmatrix} = 0. \tag{6.3}$$

Schließlich soll auch die Gleichung (5.11) unter der Voraussetzung (6.1) hingeschrieben werden. Dabei ist es zweckmäßig, den durch

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu (a^2 + b^2) = M s^2$$

definierten Trägheitsradius s von \mathfrak{G} einzuführen. Man erhält somit

$$M s^2 \ddot{\Theta} - \sum_{P \in \mathfrak{G}} \begin{vmatrix} a - b \Theta & a \Theta + b \\ X & Y \end{vmatrix} = 0. \tag{6.4}$$

Als reine Bewegungsgleichungen für die ebenen (heteronomen) Gehängebewegungen kommen vorerst die drei Gleichungen (4.2), (4.3) und (6.4) in Betracht. Daneben hat man die „kinetostatischen Gleichungen“ (4.5), (6.2) und (6.3) zu berücksichtigen.

7. Zur Geometrie der Aufhängung

Die Aufhängung von \mathcal{G} erfolgt in den Gehängepunkten P_0 , P_1 , P_2 . In P_0 hängt \mathcal{G} an einer dünnen Stahlsaite, während an den Stellen P_1 , P_2 zwei Blattfedern festgeklemmt sind, die stets nur in einen ebenen Spannungszustand versetzt werden sollen. Der Draht muß daher die Komponente $-Mg \xi \cos \nu$ des Gehängegewichts auffangen (Abb. 3). Eine ähnliche Anordnung derselben elastischen Bindeglieder findet man beim Horizontalseismographen von KIRNOS vor [11].

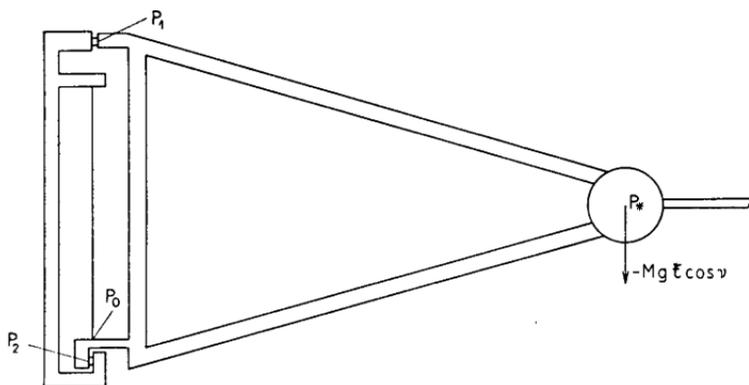


Abb. 3. Schema der Aufhängung

Dem Punkt P_i ($i = 0, 1, 2$) sind die \mathfrak{S}_* -Koordinaten a_i, b_i, c_i zugeordnet. Es ist evident, daß P_0, P_1, P_2 der zu j_* orthogonalen Koordinatenebene von \mathfrak{S}_* angehören (Abb. 3), was durch

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0 \quad (7.1)$$

ausgedrückt wird.

Im Zusammenhang damit sei darauf hingewiesen, daß sich die Bedingungen (5.8) am einfachsten durch eine Gehängestruktur realisieren lassen, die in bezug auf die zu j_* und f_* orthogonalen Koordinatenebenen von \mathfrak{S}_* symmetrisch ist. Dementsprechend wurde das Gehänge von HSJ-I konstruiert.

Eine weitere Bemerkung knüpft an die Bedingung (6.1) an, die dasselbe besagt wie

$$f_* = f.$$

Da außerdem (4.6) zutreffen soll, muß also die (a, b) -Ebene mit der (x, y) -Ebene übereinstimmen, was sich nach (5.7) auch durch

$$z = c$$

ausdrücken läßt.

Es wird vereinbart, daß P_1 oberhalb von P_2 angeordnet ist, d. h. es sei

$$c_1 > c_2 . \quad (7.2)$$

Die Vorgabe von c_0 genügt dem Zweck, einen möglichst langen Draht zu verwenden, um auch dadurch die Rückwirkung seines Torsionsmoments auf die Gehängebewegung abzuschwächen. Bei HSJ-I ist deshalb c_0 negativ.

Die Projektion von P_i auf die (x, y) -Ebene gehört dem negativen Teil der a -Achse an;

$$a_i < 0 . \quad (i = 0, 1, 2)$$

Die beiden Blattfedern müssen offensichtlich so angeordnet sein, daß

$$0 > a_1 > a_2$$

gilt. Vom Gehängepunkt P_0 wird erwartet, daß er entsprechend der Vorstellung, wonach die Stahlsaite die gestellfeste Drehachse von \mathcal{G} repräsentiert, möglichst unbeweglich ist. Hieraus schließt man auf

$$0 > a_1 > a_0 > a_2 . \quad (7.3)$$

Es ist zweckmäßig,

$$\frac{c_1}{a_0} = \tan \alpha_1 , \quad \frac{c_2}{a_0} = \tan \alpha_2 \quad (7.4)$$

zu setzen. Man darf von vornherein $|c_1| < -a_0$ und $|c_2| < -a_0$, also

$$|\alpha_1| < \frac{\pi}{4} , \quad |\alpha_2| < \frac{\pi}{4} , \quad (7.5)$$

annehmen.

Infolge der Beschränkung auf kleine Gehängebewegungen und des ausgeübten Zwangs durch die Aufhängung kommt eine Verschiebung der „Blattfederendpunkte“ P_1, P_2 parallel zur

x -Achse nicht in Betracht. Da nach (5.7) für jeden Punkt $P \in \mathcal{G}$ in der zu j_* orthogonalen Koordinatenebene von \mathcal{S}_* die Beziehung

$$x = x_* + a \quad (7.6)$$

besteht, ist also insbesondere

$$x_* = \text{const}$$

anzunehmen. Hieraus geht hervor, daß der Schwerpunkt P_* nur kleine Verschiebungen

$$y_* = y_*(t)$$

parallel zur y -Achse erfährt. Die Gleichung (4.2) reduziert sich somit auf

$$\sum_{P \in \mathcal{G}} X = -M [(g + \ddot{\zeta}) \sin \nu - \ddot{\xi} \cos \nu] \quad (7.7)$$

und verliert dabei den Charakter einer reinen Bewegungsgleichung.

8. Die Dämpfungsvorrichtung

An dem Gehänge sind zwei kleine leichte Spulen angebracht, wovon jede in den ringförmigen schmalen Luftspalt eines eigenen gestellfesten Dauermagneten eintauchen kann. Während die eine Tauchspule nur für die Dämpfung der Gehängebewegung vorgesehen ist, bildet die andere mit dem zugeordneten Dauermagneten den elektromechanischen Wandler, der die Gehängebewegung in elektrische Spannungsschwankungen überträgt.

In der Theorie des mechanischen Empfängers genügt es, jede Spule durch ihren Schwerpunkt zu markieren. Diese beiden (gehängefesten) Punkte hat man sich als Angriffspunkte von dämpfenden Kräften vorzustellen.

Die „eigentliche“ Dämpfungsspule wird durch den Punkt P_{31} repräsentiert. Der Punkt P_{32} stellt die Wandlerspule dar. Die \mathcal{S}_* -Koordinaten von P_{3j} ($j = 1, 2$) werden mit a_{3j} , b_{3j} , c_{3j} bezeichnet. Es empfiehlt sich, P_{3j} in die (a, b) -Ebene zu legen, so daß

$$c_{31} = c_{32} = 0 \quad (8.1)$$

gilt, und außerdem eine Anordnung zu wählen, wofür

$$a_{3j} = a_3 > 0 \quad (j = 1, 2) \quad (8.2)$$

und

$$b_{31} b_{32} < 0$$

zutrifft. Bei HSJ-I ist $b_{31} = -b_{32} > 0$.

9. Die äußeren Kräfte

Die neben der Schwerkraft an \mathcal{G} angreifenden äußeren Kräfte werden durch die Aufhängung von \mathcal{G} und die Dämpfungsvorrichtung verursacht. Zusätzliche Einwirkungen auf \mathcal{G} etwa infolge der Luftreibung, der Temperatur- und Luftdruckschwankungen können im Rahmen dieser Betrachtungen unberücksichtigt bleiben. Zunächst (d. h. in I) braucht auch die Reaktion des Galvanometers auf den mechanischen Empfänger nicht zu interessieren.

Der in den speziellen Punkten P_i ($i = 1, 2, 3$) und P_{3j} ($j = 1, 2$) angreifenden äußeren Kraft \mathfrak{F}_i bzw. \mathfrak{F}_{3j} sind die \mathfrak{C} -Koordinaten X_i, Y_i, Z_i bzw. X_{3j}, Y_{3j}, Z_{3j} zugeordnet. Bei voraussetzungsgemäßer Funktion der Aufhängung und der Dämpfungsvorrichtung gilt

$$X_0 \equiv 0, \quad X_{31} \equiv 0, \quad X_{32} \equiv 0,$$

$$Y_0 \equiv 0,$$

$$Z_1 \equiv 0, \quad Z_2 \equiv 0, \quad Z_{31} \equiv 0, \quad Z_{32} \equiv 0,$$

so daß sich die Beziehungen (7.7), (4.3), (4.5) zu

$$X_1 + X_2 = -M [(g + \ddot{\zeta}) \sin \nu - \ddot{\xi} \cos \nu], \quad (9.1)$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_{31} + Y_{32} = M (y_* + \ddot{\eta}), \quad (9.2)$$

$$Z_0 = M [(g + \ddot{\zeta}) \cos \nu + \ddot{\xi} \sin \nu] \quad (9.3)$$

vereinfachen und aus (6.2), (6.3), (6.4) unter Beachtung von (7.1), (7.4), (8.1), (8.2) die Gleichungen

$$Y_1 \tan \alpha_1 + Y_2 \tan \alpha_2 = Z_0 \Theta, \quad (9.4)$$

$$X_1 \tan \alpha_1 + X_2 \tan \alpha_2 = Z_0 \quad (9.5)$$

und

$$M s^2 \ddot{\Theta} - (a_3 - b_{31} \Theta) Y_{31} - (a_3 - b_{32} \Theta) Y_{32} + (a_1 X_1 + a_2 X_2) \Theta - (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) + \Delta = 0 \quad (9.6)$$

hervorgehen. Die Größe Δ rührt von dem Drehmoment $-\Delta f$ infolge der Einspannung der Blattfedern und der Torsion des Aufhänge drahts her.

Nach (7.2), (7.3) und (7.4) ist jedenfalls

$$\tan \alpha_1 < \tan \alpha_2. \quad (9.7)$$

Aus (9.1), (9.3) und (9.5) erhält man somit

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= M g \cos \nu \frac{1 + \tan \alpha_2 \tan \nu}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \left[1 + \frac{\ddot{\zeta}}{g} - \frac{\ddot{\xi}}{g} \tan (\alpha_2 - \nu) \right] \\ X_2 &= -M g \cos \nu \frac{1 + \tan \alpha_1 \tan \nu}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \left[1 + \frac{\ddot{\zeta}}{g} - \frac{\ddot{\xi}}{g} \tan (\alpha_1 - \nu) \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Die Beziehung (9.3) sei in der Form

$$Z_0 = M g \cos \nu \left(1 + \frac{\ddot{\zeta}}{g} + \frac{\ddot{\xi}}{g} \tan \nu \right) \quad (9.9)$$

hinzugefügt. Man kann nun (7.5) ohne weiteres durch die Bedingung

$$\alpha_1 - \nu < \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 - \nu < \frac{\pi}{4}$$

ersetzen. Bei HSJ-I sind die beiden (positiven) Winkel α_1, α_2 kleiner als 19° . Außerdem darf im allgemeinen

$$\ddot{\xi} + \ddot{\zeta} \ll g$$

angenommen werden, so daß sich die Gleichungen (9.8) und (9.9) auf

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= Z_0 \frac{1 + \tan \alpha_2 \tan \nu}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}, \quad X_2 = -Z_0 \frac{1 + \tan \alpha_1 \tan \nu}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \\ Z_0 &= M g \cos \nu \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

reduzieren.

Die Größen Y_1 , Y_2 , Δ hängen von y_* und Θ ab;

$$Y_1 = Y_1(y_*, \Theta), \quad Y_2 = Y_2(y_*, \Theta), \quad \Delta = \Delta(y_*, \Theta). \quad (9.11)$$

Ebenso wie Θ variiert auch y_* in einem kleinen Intervall, dem insbesondere der Wert Null angehört. Die Funktionen (9.11) sollen den Bedingungen

$$Y_1(y_*, \Theta) = -Y_1(-y_*, -\Theta), \quad Y_2(y_*, \Theta) = -Y_2(-y_*, -\Theta), \\ \Delta(y_*, \Theta) = -\Delta(-y_*, -\Theta)$$

genügen, wodurch die dynamische Symmetrie in bezug auf die zu j orthogonale Koordinatenebene von \mathfrak{S} ausgedrückt wird. Im Rahmen der linearen Theorie ist also

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{\partial Y_1}{\partial y_*} y_* + \frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} \Theta, \\ Y_2 &= \frac{\partial Y_2}{\partial y_*} y_* + \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} \Theta, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

$$\Delta = \frac{\partial \Delta}{\partial y_*} y_* + \frac{\partial \Delta}{\partial \Theta} \Theta \quad (9.13)$$

anzusetzen, wobei die partiellen Ableitungen von Y_1 , Y_2 , Δ an der Stelle $y_* = 0$, $\Theta = 0$ zu bilden sind.

Die dämpfende Kraft

$$\mathfrak{F}_{3j} = Y_{3j} j \quad (j = 1, 2)$$

wird hinreichend genau durch den Ansatz

$$Y_{3j} = -D_j y_{3j} \quad (9.14)$$

erfaßt. (Die \mathfrak{S} -Koordinaten von P_{3j} sind x_{3j} , y_{3j} , 0.) Die Koeffizienten D_1 , D_2 sind bestimmte nichtnegative Konstanten. Im Fall $D_1 + D_2 > 0$ spricht man schlechthin von „geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung“. Werden die beiden Dauermagneten (etwa zwecks Eichung des mechanischen Empfängers) vorübergehend entfernt, dann hat man selbstverständlich solange $D_1 = D_2 = 0$ zu setzen. Nach (5.7), (8.1) und (8.2) gilt

$$y_{3j} = y_* + a_3 \Theta + b_{3j},$$

so daß (9.14) in

$$Y_{3j} = -D_j (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) \quad (D_j \text{ nichtnegativ konstant}) \quad (9.15)$$

übergeht.

Aus (9.4) und (9.12) ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_*} \tan \alpha_1 + \frac{\partial Y_2}{\partial y_*} \tan \alpha_2 = 0, \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} \tan \alpha_1 + \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} \tan \alpha_2 = Z_0. \quad (9.17)$$

Die Berücksichtigung von (9.12), (9.13) und (9.15) in (9.2) und (9.6) führt zur Umformung dieser beiden Bewegungsgleichungen in

$$\begin{aligned} M \ddot{y}_* + D (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) - \left(\frac{\partial Y_1}{\partial y_*} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_*} \right) y_* \\ - \left(\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} \right) \Theta = -M \ddot{\eta}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned} M s^2 \ddot{\Theta} + D a_3 (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) - \left(a_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y_*} + a_2 \frac{\partial Y_2}{\partial y_*} - \frac{\partial \Delta}{\partial y_*} \right) y_* \\ + \left[a_1 \left(X_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} \right) + a_2 \left(X_2 - \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial \Delta}{\partial \Theta} \right] \Theta = 0 \end{aligned} \quad (9.19)$$

mit

$$D = D_1 + D_2. \quad (9.20)$$

Die Linearisierung von (9.19) bewirkt, daß von

$$\begin{aligned} -(a_3 - b_{31} \Theta) Y_{31} - (a_3 - b_{32} \Theta) Y_{32} \\ = D a_3 \left(1 - \frac{D_1 b_{31} + D_2 b_{32}}{D a_3} \Theta \right) (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) \end{aligned}$$

in (9.6) nur der Bestandteil $D a_3 (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta})$ erhalten bleibt. Im allgemeinen ist

$$\frac{|D_1 b_{31} + D_2 b_{32}|}{D a_3} |\Theta|$$

bedeutend kleiner als Eins, so daß schon deswegen die Vernachlässigung dieses Terms naheliegt. Im günstigsten Fall ist die Bedingung

$$\frac{D_1}{D_2} = -\frac{b_{32}}{b_{31}}$$

erfüllt.

10. Die Deformation der Blattfeder

Die homogene, im undeformierten Zustand quaderförmige Blattfeder \mathfrak{B} hat die (freie) Länge λ , die Breite β und die Dicke δ . Man darf voraussetzen, daß die kleine Deformation von \mathfrak{B} eine reine Biegung ist. Es wird ein beliebiger ebener Querschnitt \mathfrak{f} der undeformierten Feder \mathfrak{B} mit den Seitenlängen β und δ betrachtet. Von besonderem Interesse ist die neutrale Faser \bar{s} von \mathfrak{B} mit der unveränderlichen Länge λ . Nach der Annahme von BERNOULLI bleibt \mathfrak{f} bei der Biegung von \mathfrak{B} unverzerrt und orthogonal zu \bar{s} .

Der Schnittpunkt von \bar{s} und \mathfrak{f} wird mit S bezeichnet. Eine zu \bar{s} parallele, sonst beliebige Faser \bar{s} von \mathfrak{B} schneidet \mathfrak{f} in \bar{S} . Das Längenelement dl von \mathfrak{B} geht bei der Biegung von \mathfrak{B} in δl über. Die relative Längenänderung von dl wird durch

$$\varepsilon = \frac{\delta l - dl}{dl}$$

ausgedrückt.

Zwischen dem Krümmungsradius ϱ von \bar{s} an der Stelle S und dem Krümmungsradius $\bar{\varrho}$ von \bar{s} an der Stelle \bar{S} besteht die Beziehung

$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho} = \frac{\delta l}{dl}$$

(Abb. 4). Infolgedessen ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varrho} - \varrho}{\varrho}.$$

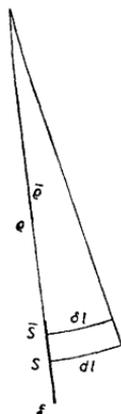


Abb. 4

Zur Herleitung der Beziehung

$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho} = \frac{\delta l}{dl}$$

11. Die Differentialgleichung für die neutrale Faser

Das Gewicht von \mathfrak{B} wird vernachlässigt. Nach dem HOOKEschen Gesetz ist die durch \bar{N} charakterisierte Normalspannung von \mathfrak{f} an der Stelle S zur relativen Längenänderung (10.1) pro-

portional; es gilt

$$\bar{N} = -E \varepsilon. \quad (11.1)$$

Der (positive) Proportionalitätsfaktor E ist der lineare Elastizitätsmodul von \mathfrak{B} .

Da die Querschnitte (\bar{f}) bei der vorausgesetzten reinen Bieungsbeanspruchung von \mathfrak{B} im ganzen nicht verschoben werden, erhält man als erste Gleichgewichtsbedingung

$$\int_{\bar{f}} \bar{N} d\bar{f} = 0,$$

wobei $d\bar{f}$ das Flächenelement von \bar{f} an der Stelle \bar{S} bezeichnet. Daraus folgt mit (10.1) und (11.1)

$$\int_{\bar{f}} (\bar{\varrho} - \varrho) d\bar{f} = 0.$$

Diese Bedingung ist offensichtlich erfüllt, wenn S mit dem Mittelpunkt von \bar{f} übereinstimmt.

Es wird nun ein ebenes kartesisches Koordinatensystem eingeführt. In bezug hierauf sind dem (laufenden) Punkt S von \bar{s} die Koordinaten u, v zugeordnet. Die Funktion

$$v = v(u), \quad 0 \leq u \leq \lambda$$

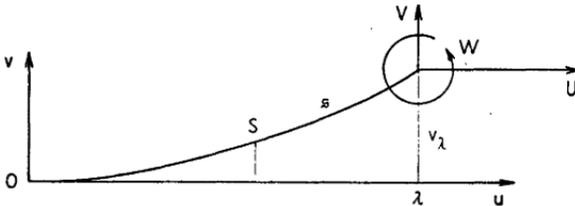


Abb. 5. Zur analytischen Darstellung der neutralen Faser \bar{s} und des Moments Q_*

ermöglicht eine einfache analytische Darstellung der neutralen Faser \bar{s} (Abb. 5). Die Randbedingungen lauten

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad (11.2)$$

$$v(\lambda) = v_\lambda, \quad v'(\lambda) = v'_\lambda. \quad (11.3)$$

Die Berechnung des Bieungsmoments

$$Q = \int_{\bar{f}} \bar{N} (\varrho - \varrho) d\bar{f}$$

gelingt mit Hilfe der Gleichungen (10.1) und (11.1). Da S der Mittelpunkt von $\bar{\Gamma}$ ist, bekommt man

$$Q = -\frac{E}{\varrho} \int_{\bar{\Gamma}} (\bar{\varrho} - \varrho)^2 d\bar{\Gamma} = -\frac{E}{\varrho} \beta \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\bar{\varrho} - \varrho)^2 d\bar{\varrho} = -E \frac{\beta \delta^3}{12} \frac{1}{\varrho}. \quad (11.4)$$

$$E \frac{\beta \delta^3}{12} = J \quad (11.5)$$

ist die *Biegesteifigkeit* von \mathfrak{B} . Die bekannte Formel für die Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]^{3/2}}$$

vereinfacht sich wegen

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \ll 1$$

zu

$$\frac{1}{\varrho} = v''(u),$$

so daß (11.4) in

$$Q = -J v''(u) \quad (11.6)$$

übergeht.

Die zweite Gleichgewichtsbedingung ist das „BERNOULLI-EULERSche Biegungstheorem“. Danach muß das Moment Q dem Moment

$$Q_* = Q_*(u)$$

der auf $\bar{\Gamma}$ einwirkenden äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten; d. h., es gilt

$$Q + Q_* = 0.$$

Aus (11.6) geht somit die Differentialgleichung für \bar{s}

$$v''(u) - \frac{1}{J} Q_*(u) = 0 \quad (11.7)$$

hervor.

12. Die Gleichung der neutralen Faser

In dem Endpunkt S_λ von \mathfrak{s} mit den Koordinaten λ, v_λ [s. (11.3)] greift die äußere Kraft mit den Koordinaten U, V an, wobei

$$U > 0 \tag{12.1}$$

anzunehmen ist (Abb. 5). Das durch die Einspannung von \mathfrak{B} hervorgerufene Drehmoment wird mit der Größe W berücksichtigt. Weil nur kleine Biegungen von \mathfrak{B} in Betracht kommen, genügt der einfache Ansatz

$$Q_* = \left| \begin{array}{cc} \lambda - u & v_\lambda - v \\ U & V \end{array} \right| + W.$$

Somit nimmt (11.7), wenn man noch die Substitutionen

$$k = \sqrt{\frac{U}{J}}, \tag{12.2}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = -\frac{V}{J}, \\ n = \frac{V\lambda - Uv_\lambda + W}{J} \end{array} \right\} \tag{12.3}$$

beachtet, die Gestalt

$$v''(u) - k^2 v(u) = m u + n$$

an.

Das allgemeine Integral dieser linearen Differentialgleichung für die Funktion $v(u)$ lautet

$$v(u) = C_1 e^{ku} + C_2 e^{-ku} - \frac{m u + n}{k^2}.$$

Auf Grund der Bedingung (11.2) bestimmen sich die beiden Integrationskonstanten C_1, C_2 zu

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{k n + m}{k^3}, \quad C_2 = \frac{1}{2} \frac{k n - m}{k^3},$$

so daß mit

$$v(u) = \frac{k n (\mathfrak{C}o\} k u - 1) + m (\mathfrak{S}in k u - k u)}{k^3} \tag{12.4}$$

die Gleichung der neutralen Faser \mathfrak{s} vorliegt.

13. Die Funktionen $V(v_\lambda, v'_\lambda)$ und $W(v_\lambda, v'_\lambda)$

Die Gleichung (12.4) interessiert hier nur insofern, als sie zusammen mit (11.3) die Darstellung von V und W als Funktionen von v_λ und v'_λ ermöglicht. Dabei wird angenommen, daß U (ebenso wie J und λ) konstant ist.

Aus (12.4) und (11.3) folgt nämlich

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{Cof} \lambda k - 1) k n + (\mathfrak{Sin} \lambda k - \lambda k) m &= k^3 v'_\lambda, \\ (\mathfrak{Sin} \lambda k) k n + (\mathfrak{Cof} \lambda k - 1) m &= k^2 v_\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

was sich zunächst als lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $k n$ und m auffassen läßt. Die Koeffizientendeterminante ist von Null verschieden:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{Cof} \lambda k - 1 & \mathfrak{Sin} \lambda k - \lambda k \\ \mathfrak{Sin} \lambda k & \mathfrak{Cof} \lambda k - 1 \end{vmatrix} = 2 \mathfrak{Sin} \lambda k \left(\frac{\lambda}{2} k - \mathfrak{Tan} \frac{\lambda}{2} k \right) > 0.$$

Es empfiehlt sich nun,

$$\frac{\mathfrak{Tan} \frac{\lambda}{2} k}{\frac{\lambda}{2} k} = q \quad (13.2)$$

zu setzen;

$$0 < q < 1.$$

Damit gehen aus (13.1) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} m &= -\frac{k^2}{1-q} \left(\frac{1}{\lambda} v_\lambda - \frac{q}{2} v'_\lambda \right), \\ n &= \frac{1}{1-q} \left\{ k^2 \frac{q}{2} v_\lambda + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{q} - 1 - \left(\frac{\lambda}{2} k \right)^2 q \right] v'_\lambda \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

hervor. Im Hinblick auf (12.2) und (12.3) bekommt man

$$m = -\frac{V}{U} k^2,$$

$$n = -m \lambda + k^2 \left(\frac{W}{U} - v_\lambda \right)$$

und braucht in diese Gleichungen nur noch die Ausdrücke

(13.3) für m und n einzuführen, um die benötigten Darstellungen

$$V = V(v_\lambda, v'_\lambda), \quad W = W(v_\lambda, v'_\lambda)$$

zu gewinnen. Man erhält schließlich

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{U}{1-q} \left(\frac{1}{\lambda} v_\lambda - \frac{q}{2} v'_\lambda \right), \\ W &= -\frac{1}{2} \frac{Uq}{1-q} \left(v_\lambda - \frac{\lambda}{2} v' \right) + \frac{J}{\lambda} \frac{1}{q} v'_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

14. Die Aufhängung (Ergänzung)

Die beiden Blattfedern $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ der Aufhängung von \mathfrak{G} sollen dieselbe (freie) Länge λ haben. Dem gehängefesten Endpunkt P_j der neutralen Faser \mathfrak{s}_j von \mathfrak{B}_j sind die \mathfrak{S} -Koordinaten x_j, y_j, c_j zugeordnet ($j = 1, 2$). Wegen (7.3) und (7.6) ist die Differenz

$$x_1 - x_2 = a_1 - a_2 = e \quad (14.1)$$

positiv;

$$e > 0.$$

Der gestellfeste Endpunkt von \mathfrak{s}_j wird mit O_j bezeichnet. Die \mathfrak{S} -Koordinaten von O_1 und O_2 bilden das Tripel $x_1 - \lambda, O, c_1$ bzw. $x_2 + \lambda, O, c_2$. Die Koordinatendifferenz

$$(x_2 + \lambda) - (x_1 - \lambda) = 2\lambda - e = f \quad (14.2)$$

muß ebenfalls positiv sein (Abb. 6):

$$f > 0.$$

Das Gehänge \mathfrak{G} ist in P_0 an der zylindrischen Stahlsaite \mathfrak{D} mit der Länge L , dem Durchmesser d und dem Torsionsmodul G aufgehängt. Das von \mathfrak{D} auf \mathfrak{G} ausgeübte Drehmoment wird durch $-\Delta_0 \mathfrak{k}$ mit

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{32} G \frac{d^4}{L} \Theta \quad (14.3)$$

dargestellt [5].

Der Vektor $-\Delta_j \mathfrak{k}$ repräsentiert das von \mathfrak{B}_j auf \mathfrak{G} rückwirkende „Einspannmoment“. Man hat Δ_j ebenso wie Δ in (9.13)

als lineare Funktion von y_* und Θ anzusetzen, wobei insbesondere $\Delta_j = 0$ für $y_* = \Theta = 0$ gelten soll; also

$$\Delta_j = \frac{\partial \Delta_j}{\partial y_*} y_* + \frac{\partial \Delta_j}{\partial \Theta} \Theta \quad (14.4)$$

mit

$$\frac{\partial \Delta_j}{\partial y_*} = \left(\frac{\partial \Delta_j}{\partial y_*} \right)_{y_* = \Theta = 0}, \quad \frac{\partial \Delta_j}{\partial \Theta} = \left(\frac{\partial \Delta_j}{\partial \Theta} \right)_{y_* = \Theta = 0} \quad (j = 1, 2)$$

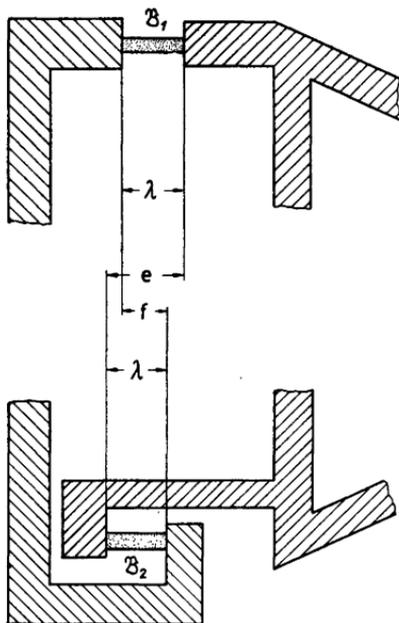


Abb. 6. Die Anordnung der Blattfedern $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$

Aus

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2$$

und (9.13), (14.3), (14.4) folgt

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_*} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial y_*} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial y_*}, \quad (14.5)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \Theta} = \frac{\partial \Delta_0}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Delta_1}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial \Theta}. \quad (14.6)$$

15. Die Funktionen $Y_j(\mathbf{y}_*, \Theta)$ und $\Delta_j(\mathbf{y}_*, \Theta)$

Die Blattfeder \mathfrak{B} wird einmal mit \mathfrak{B}_1 , das andere Mal mit \mathfrak{B}_2 identifiziert, um die den Formeln (13.4) entsprechenden analytischen Darstellungen der Funktionen $Y_j(\mathbf{y}_*, \Theta)$ und $\Delta_j(\mathbf{y}_*, \Theta)$ ($j = 1, 2$) zu gewinnen. Dabei ergeben sich zunächst die in der Tabelle 1 zusammengestellten Zuordnungen

TABELLE 1

\mathfrak{B}	S_λ	v_λ	v'_λ	U	J	k	q	V	W
\mathfrak{B}_1	P_1	y_1	$\frac{y_* - y_1}{x_* - x_1}$	$-X_1$	J_1	k_1	q_1	$-Y_1$	Δ_1
\mathfrak{B}_2	P_2	$-y_2$	$\frac{y_* - y_2}{x_* - x_2}$	X_2	J_2	k_2	q_2	Y_2	Δ_2

Nach (5.7) gilt wegen (6.1) und (7.1)

$$\left. \begin{aligned} y_j &= y_* + a_j \Theta, \\ \frac{y_* - y_j}{x_* - x_j} &= \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Aus (9.10) und (9.7) geht hervor, daß die mit (12.1) geforderte Positivität von $-X_1$ und X_2 gesichert ist;

$$X_1 < 0, \quad X_2 > 0. \quad (15.2)$$

Die Biegesteifigkeit von \mathfrak{B}_j wird mit J_j bezeichnet. Es soll also nicht von vornherein feststehen, daß die gleichlangen Blattfedern \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 dieselbe Biegesteifigkeit aufweisen bzw. sogar identisch sind. Im Hinblick auf (12.2) gilt

$$k_1 = \sqrt{\frac{-X_1}{J_1}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{X_2}{J_2}}. \quad (15.3)$$

Weiterhin enthält die Tabelle die entsprechend (13.2) definierten Größen q_1, q_2 ;

$$\frac{\Im \text{an} \frac{\lambda}{2} k_j}{\frac{\lambda}{2} k_j} = q_j, \quad (j = 1, 2) \quad (15.4)$$

$$0 < q_j < 1. \quad (15.5)$$

Unter Berücksichtigung der tabellarisierten Entsprechungen und der Formeln (15.1) erhält man die zu (13.4) analogen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{X_1}{1 - q_1} \left[\frac{1}{\lambda} y_* + \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{q_1}{2} \right) \Theta \right], \\ Y_2 &= - \frac{X_2}{1 - q_2} \left[\frac{1}{\lambda} y_* + \left(\frac{a_2}{\lambda} + \frac{q_2}{2} \right) \Theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2} \frac{X_1 q_1}{1 - q_1} \left[y_* + \left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right) \Theta \right] + \frac{1}{\lambda} \frac{J_1}{q_1} \Theta, \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2} \frac{X_2 q_2}{1 - q_2} \left[y_* + \left(a_2 + \frac{\lambda}{2} \right) \Theta \right] + \frac{1}{\lambda} \frac{J_2}{q_2} \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

Aus (15.6) folgt insbesondere

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_*} = \frac{1}{\lambda} \frac{X_1}{1 - q_1}, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_*} = - \frac{1}{\lambda} \frac{X_2}{1 - q_2}. \quad (15.8)$$

Nach (15.2) und (15.5) trifft

$$\frac{\partial Y_j}{\partial y_*} < 0 \quad (j = 1, 2) \quad (15.9)$$

zu, also wegen (9.16) und (9.7)

$$\tan \alpha_1 < 0, \quad \tan \alpha_2 > 0 \quad (15.10)$$

oder im Hinblick auf (7.4), (7.3)

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0. \quad (15.11)$$

Damit erfährt die Vereinbarung (7.2) eine erste Präzisierung.

Die Formeln (9.10) liefern

$$- \frac{X_1}{X_2} = \frac{1 + \tan \alpha_2 \tan \nu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \nu},$$

woraus auf Grund von (15.10)

$$- X_1 \gtrless X_2 \quad \text{für} \quad \nu \gtrless 0 \quad (15.12)$$

resultiert.

16. Die Hilfsfunktion $F(p)$

Die Funktion F der reellen Veränderlichen p lautet per definitionem

$$F = \frac{p - \Im \operatorname{an} p}{p^3}. \quad (16.1)$$

Es gilt

$$F(p) = F(-p) > 0, \quad (16.2)$$

insbesondere

$$F(0) = \frac{1}{3}.$$

Die logarithmische Ableitung von $F(p)$ verhilft zu

$$\frac{F'(p)}{F(p)} = \frac{1}{p} \left[\frac{\Im \operatorname{an} p}{\Im(p)} - 3 \right], \quad (16.3)$$

wobei die LANGEVINSche Funktion

$$\Im(p) = \mathfrak{C} \operatorname{ot} p - \frac{1}{p} \quad (16.4)$$

erscheint [2]. Wegen

$$\Im \operatorname{an} p < 3 \Im(p) \quad \text{für } p \neq 0$$

folgt aus (16.2) und (16.3) sofort

$$\operatorname{sgn} F'(p) = - \operatorname{sgn} p,$$

was auch für $p = 0$ zutrifft. Demnach ergibt sich insbesondere

$$F(p') > F(p'') \quad \text{für } 0 < p' < p''. \quad (16.5)$$

Abb. 7 zeigt die graphische Darstellung von $F(p)$ im Intervall $0 \leq p \leq 5$.

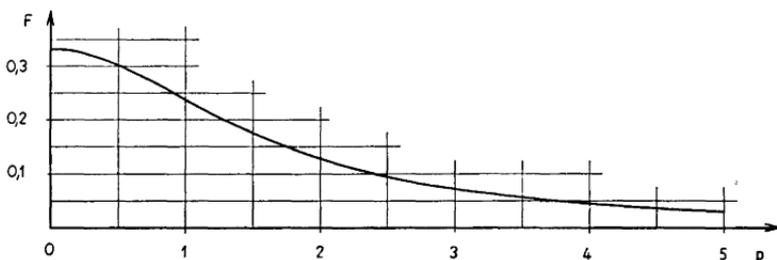


Abb. 7. Verlauf der Hilfsfunktion

$$F = \frac{p - \Im \operatorname{an} p}{p^3} \quad \text{im Intervall } 0 \leq p \leq 5$$

17. Die Bedingung $c_1 = -c_2$

Es wird

$$p_j = \frac{\lambda}{2} k_j \quad (j = 1, 2) \quad (17.1)$$

gesetzt. Nach (15.4) gilt

$$\frac{\Sigma^{\text{an}} p_j}{p_j} = q_j. \quad (17.2)$$

Infolgedessen kann man die Hilfsfunktion (16.1) für $p = p_j$ in der Form

$$F(p_j) = \frac{1 - q_j}{p_j^2} \quad (17.3)$$

darstellen. Die Definitionsgleichung (17.1) ergibt zusammen mit (15.3)

$$p_j^2 = \frac{\lambda^2}{4} (-1)^j \frac{X_j}{J_j}, \quad (17.4)$$

so daß die Gleichungen (15.8) unter Verwendung von (17.3) die Gestalt

$$\frac{\partial Y_j}{\partial y_*} = - \frac{4 J_j}{\lambda^3 F(p_j)}$$

annehmen.

Hieraus folgt

$$\frac{\frac{\partial Y_1}{\partial y_*}}{\frac{\partial Y_2}{\partial y_*}} = \frac{J_1 F(p_2)}{J_2 F(p_1)}.$$

Daneben liefern die Formeln (9.16) und (7.4)

$$\frac{\frac{\partial Y_1}{\partial y_*}}{\frac{\partial Y_2}{\partial y_*}} = - \frac{c_2}{c_1}. \quad (17.5)$$

Demnach besteht die Beziehung

$$- \frac{c_2}{c_1} = \frac{J_1 F(p_2)}{J_2 F(p_1)}. \quad (17.6)$$

Hätte man von vornherein $J_1 = J_2$ gefordert, so dürfte man aus (17.4) wegen (15.12) sofort auf

$$p_1 \cong p_2 \quad \text{für} \quad \nu \cong 0$$

schließen. Damit würde (17.6) im Hinblick auf (16.5)

$$-\frac{c_2}{c_1} = \frac{F(p_2)}{F(p_1)} \cong 1 \quad \text{für} \quad \nu \cong 0$$

ergeben. Folglich wäre wenigstens einer der Abstände der beiden „Aufhängepunkte“ P_1, P_2 von der (x, y) -Ebene als Funktion der Neigung ν anzusetzen. Eine solche Variabilität ist aber für die Konstruktion des mechanischen Empfängers sehr ungünstig.

Dieser Nachteil läßt sich am zweckmäßigsten beheben, indem man von (15.11) zu der Bedingung

$$c_1 = -c_2 = h \quad (17.7)$$

übergeht. Die bei jeder in Betracht kommenden Neigung ν gleichbleibende Länge h gibt also die Entfernung des Punktes P_j ($j = 1, 2$) von der (x, y) -Ebene an. Man kann auch (weniger exakt) sagen, daß nach (17.7) die Blattfedern $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ in gleichen Abständen von der erwähnten Symmetrieebene des Gehänges \mathfrak{G} anzubringen sind.

Aus (7.3), (7.4), (7.5) ergibt sich wegen (17.7)

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0. \quad (17.8)$$

Infolgedessen vereinfachen sich die ersten beiden Formeln (9.10) zu

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{Mg}{2 \sin \alpha} \cos (\alpha - \nu), \\ X_2 &= \frac{Mg}{2 \sin \alpha} \cos (\alpha + \nu). \end{aligned} \right\} \quad (17.9)$$

Die Biegesteifigkeit J_j ($j = 1, 2$) erscheint nun als Funktion von ν .

Die Annahme

$$(J_1)_{\nu=0} = (J_2)_{\nu=0} = J_0$$

entspricht dem Wunsch nach einer möglichst weitgehenden Übereinstimmung von \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 . Mit (17.9) und

$$p_0 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{M g \cot \alpha}{2 J_0}} \quad (17.10)$$

geht (17.4) in

$$p_j = p_0 \sqrt{\frac{J_0}{J_j}} [\cos \nu - (-1)^j \tan \alpha \sin \nu] \quad (17.11)$$

über.

18. Die Formel $\frac{f}{\lambda} = q_0$

Unter der Bedingung (17.7) drückt (17.5) die Gleichheit von $\frac{\partial Y_1}{\partial y_*}$ und $\frac{\partial Y_2}{\partial y_*}$ aus. Es wird

$$\frac{\partial Y_j}{\partial y_*} = -\frac{M}{2} H \quad (j = 1, 2) \quad (18.1)$$

gesetzt. Die Größe H ist ein Koeffizient in den Bewegungsgleichungen (19.9). Wegen (15.9) gilt

$$H > 0.$$

Die Gleichung (9.17) nimmt im Hinblick auf (17.8) die Gestalt

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} - \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} = -Z_0 \cot \alpha \quad (18.2)$$

an. Aus (15.6) folgt

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} = \frac{X_1}{1 - q_1} \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{q_1}{2} \right), \quad \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} = -\frac{X_2}{1 - q_2} \left(\frac{a_2}{\lambda} + \frac{q_2}{2} \right) \quad (18.3)$$

oder unter Berücksichtigung von (15.8) und (18.1)

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} = -\frac{M}{2} H \left(a_1 - \frac{\lambda}{2} q_1 \right), \quad \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} = -\frac{M}{2} H \left(a_2 + \frac{\lambda}{2} q_2 \right). \quad (18.4)$$

Diese Ausdrücke für $\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta}$, $\frac{\partial Y_2}{\partial \Theta}$ werden in (18.2) eingeführt. Man erhält mit (14.1) und der dritten Formel (9.10)

$$H = 2 g \cot \alpha \frac{\cos \nu}{e - \lambda \frac{q_1 + q_2}{2}}. \quad (18.5)$$

Die Beziehungen (18.3) lassen sich unter Beachtung von (15.8) und (18.1) auch in

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} = \frac{X_1}{2} - \frac{M}{2} H \left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right), \quad \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} = \frac{X_2}{2} - \frac{M}{2} H \left(a_2 + \frac{\lambda}{2} \right) \quad (18.6)$$

umformen, womit (18.2), indem man wiederum (14.1) und die dritte Formel (9.10) sowie (17.9) verwendet, zu

$$H = g \cot \alpha \frac{\cos \nu}{e - \lambda} \quad (18.7)$$

verhilft.

Der Vergleich von (18.5) und (18.7) liefert im Hinblick auf (14.2)

$$\frac{f}{\lambda} = \frac{q_1 + q_2}{2}. \quad (18.8)$$

Wegen (15.5) gilt also

$$f < \lambda.$$

Auch f soll eine bei jeder Neigung ν gleichbleibende Größe sein. Setzt man

$$\frac{\mathfrak{T} \operatorname{an} p_0}{p_0} = q_0, \quad (18.9)$$

so lautet (18.8) insbesondere für $\nu = 0$

$$\frac{f}{\lambda} = q_0. \quad (18.10)$$

Hierbei sind die Gleichungen (17.2), (17.10) und (17.11) zu beachten. Die Beziehung (18.5) oder (18.7) läßt sich demnach mit Hilfe von (14.2) in

$$H = \frac{g \cot \alpha}{\lambda (1 - q_0)} \cos \nu \quad (18.11)$$

umformen.

Die Beziehungen (15.8), (17.9), (18.1) und (18.11) ergeben

$$\frac{\cos(\alpha - \nu)}{1 - q_1} = \frac{\cos(\alpha + \nu)}{1 - q_2} = \frac{\cos \alpha \cos \nu}{1 - q_0},$$

also

$$q_j = q_0 + (-1)^j (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu. \quad (18.12)$$

19. Die Bewegungsgleichungen

Der Koeffizient I in den Bewegungsgleichungen (19.9) resultiert aus dem Ansatz

$$M I = \frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta}. \quad (19.1)$$

I ist positiv;

$$I > 0.$$

Den Gleichungen (7.3), (15.5) und (18.3) sowie der (selbstverständlichen) Bedingung

$$\frac{\lambda}{2} q_2 < -a_2$$

entnimmt man nämlich

$$\frac{\partial Y_j}{\partial \Theta} > 0. \quad (j = 1, 2)$$

Die Ausdrücke (18.4) für $\frac{\partial Y_1}{\partial \Theta}$, $\frac{\partial Y_2}{\partial \Theta}$ werden in (19.1) eingeführt.

Mit Hilfe von (18.11) bekommt man

$$I = -\frac{H}{2} [a_1 + a_2 + \lambda (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu]. \quad (19.2)$$

Nach (15.7) gilt

$$\frac{\partial \Delta_j}{\partial y_*} = \frac{1}{2} \frac{X_j q_j}{1 - q_j} \quad (j = 1, 2) \quad (19.3)$$

oder in Verbindung mit (15.8) und (18.3)

$$\frac{\partial \Delta_j}{\partial y_*} = a_j \frac{\partial Y_j}{\partial y_*} - \frac{\partial Y_j}{\partial \Theta}. \quad (19.4)$$

Wegen (14.5) und (19.1) ergibt sich hieraus

$$M I = a_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y_*} + a_2 \frac{\partial Y_2}{\partial y_*} - \frac{\partial \Delta}{\partial y_*}. \quad (19.5)$$

Der Koeffizient K in (19.9) wird durch

$$M K = a_1 \left(X_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} \right) + a_2 \left(X_2 - \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial \Delta}{\partial \Theta} \quad (19.6)$$

definiert. Die Formeln (15.7) liefern zusammen mit (19.3), (19.4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta_1}{\partial \Theta} &= \left(a_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y_*} - \frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} \right) \left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{J_1}{q_1}, \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial \Theta} &= \left(a_2 \frac{\partial Y_2}{\partial y_*} - \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} \right) \left(a_2 + \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{J_2}{q_2}.\end{aligned}$$

Hierin ersetzt man $\frac{\partial Y_j}{\partial y_*}$, $\frac{\partial Y_j}{\partial \Theta}$ gemäß (18.1), (18.6) und erhält

$$\begin{aligned}a_1 \left(X_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial \Delta_1}{\partial \Theta} &= \frac{M H}{2} \left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} X_1 + \frac{1}{\lambda} \frac{J_1}{q_1}, \\ a_2 \left(X_2 - \frac{\partial Y_2}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial \Delta_2}{\partial \Theta} &= \frac{M H}{2} \left(a_2 + \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} X_2 + \frac{1}{\lambda} \frac{J_2}{q_2}.\end{aligned}$$

Damit geht (19.6), wenn man außerdem (14.6) berücksichtigt, in

$$\begin{aligned}M K &= \frac{M H}{2} \left[\left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right)^2 + \left(a_2 + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} (X_1 - X_2) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{J_1}{q_1} + \frac{J_2}{q_2} \right) + \frac{d \Delta_0}{d \Theta} \quad (19.7)\end{aligned}$$

über.

Aus (17.9) und (18.11) folgt

$$X_1 - X_2 = -\lambda M H (1 - q_0),$$

während man unter Zuhilfenahme von (14.1), (14.2) und (18.10) die Umformung

$$\begin{aligned}2 \left[\left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \left(a_2 + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] \\ = (a_1 + a_2)^2 + (e - \lambda)^2 = (a_1 + a_2)^2 + \lambda^2 (1 - q_0)^2\end{aligned}$$

vornehmen kann, so daß sich (19.7) in

$$M K = \frac{M H}{4} [(a_1 + a_2)^2 - \lambda^2 q_0 (1 - q_0)] + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{J_1}{q_1} + \frac{J_2}{q_2} \right) + \frac{d \Delta_0}{d \Theta} \quad (19.8)$$

umwandeln läßt. Wegen $a_1 + a_2 > \lambda$ und $0 < q_0 < 1$ ist offensichtlich auch K positiv;

$$K > 0.$$

Die Gleichungen (9.18), (9.19) werden bedeutend übersichtlicher, wenn man die positiven Größen H , I , K einführt. Man hat hierbei (18.1), (19.1), (19.5) und (19.6) zu beachten. Die beiden Bewegungsgleichungen lauten sodann

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_* + \frac{D}{M} (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) + H y_* - I \Theta &= -\ddot{\eta}, \\ s^2 \ddot{\Theta} + \frac{D}{M} a_3 (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) - I y_* + K \Theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

20. Das Gehänge als „Drehmasse“

Es wird vorübergehend angenommen, daß sich \mathcal{G} wie eine „Drehmasse“ bewegt. Infolgedessen gilt

$$y_* = r \Theta, \quad (20.1)$$

wobei r den positiven Abstand des Gehängeschwerpunkts P_* von der gestellfesten Drehachse von \mathcal{G} bezeichnet. Die Analyse bleibt auf autonome Gehängebewegungen beschränkt, d. h., man hat außerdem in (19.9)

$$\eta \doteq 0$$

zu setzen.

Die Bestimmung des Abstands r erfolgt am einfachsten unter der Bedingung, daß die betrachteten Gehängebewegungen konservativ sind, also $D = 0$ zutrifft. Dann reduzieren sich die Bewegungsgleichungen (19.9) auf

$$\begin{aligned} \ddot{y}_* + H y_* - I \Theta &= 0, \\ s^2 \ddot{\Theta} - I y_* + K \Theta &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus resultieren, wenn man (20.1) einführt, die beiden Gleichungen

$$\ddot{\Theta} + \frac{H r - I}{r} \Theta = 0 \quad (20.2)$$

und

$$\ddot{\Theta} + \frac{K - I r}{s^2} \Theta = 0, \quad (20.3)$$

deren Identität durch

$$\frac{H r - I}{r} = \frac{K - I r}{s^2} \quad (20.4)$$

oder

$$r^2 + \frac{H s^2 - K}{I} r - s^2 = 0 \quad (20.5)$$

ausgedrückt wird. Damit liegt die Bestimmungsgleichung für r vor. Man erhält

$$r = -\frac{1}{2I} \left[H s^2 - K - \sqrt{(H s^2 - K)^2 + (2 I s)^2} \right], \quad (20.6)$$

denn r muß positiv sein.

Wie den Beziehungen (18.11), (19.2) und (19.8) zu entnehmen ist, ändern sich die Koeffizienten H , I , K mit der Neigung ν ;

$$H = H(\nu), \quad I = I(\nu), \quad K = K(\nu). \quad (20.7)$$

Nach (20.6) hängt auch r von ν ab;

$$r = r(\nu). \quad (20.8)$$

Wegen der offenbar nur schwachen Veränderlichkeit von r vermittelt die folgende Abschätzung für $\nu = 0$ bereits eine hinreichende Vorstellung von der Größe des Abstands $r(\nu)$.

Auf Grund von (20.2) und (20.3) darf man

$$\frac{I_0}{H_0} < r_0 < \frac{K_0}{I_0} \quad (20.9)$$

mit

$$H_0 = H(0), \quad I_0 = I(0), \quad K_0 = K(0), \quad r_0 = r(0) \quad (20.10)$$

voraussetzen. Nach (19.2) gilt

$$\frac{I_0}{H_0} = -\frac{a_1 + a_2}{2}. \quad (20.11)$$

Die Gleichungen (18.11), (19.2), (19.8) verhelfen zu

$$\begin{aligned} & \frac{K_0}{I_0} + \frac{a_1 + a_2}{2} \\ &= -\frac{1}{2(a_1 + a_2)} \left[\left(\frac{2 J_0}{\lambda q_0} + \frac{d\Delta_0}{d\Theta} \right) \frac{4 \lambda (1 - q_0)}{M g \cot \alpha} - \lambda^2 q_0 (1 - q_0) \right] \\ &= -\frac{\lambda (1 - q_0)}{2(a_1 + a_2)} \left[\left(\frac{1}{q_0} + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{J_0} \frac{d\Delta_0}{d\Theta} \right) \frac{8 J_0}{2 M g \cot \alpha} - \lambda q_0 \right] \end{aligned}$$

oder, indem man analog zu (17.3)

$$F_0 = \frac{1 - q_0}{p_0^2} \quad (20.12)$$

einführt und (17.11) berücksichtigt,

$$\frac{K_0}{I_0} + \frac{a_1 + a_2}{2} = - \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\frac{a_1 + a_2}{2}} F_0 \left(\frac{1}{q_0} - q_0 p_0^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{J_0} \frac{d\Delta_0}{d\Theta} \right). \quad (20.13)$$

Im Hinblick auf (18.9) errechnet man noch

$$\frac{1}{q_0} - q_0 p_0^2 = p_0 (\mathfrak{C}ot p_0 - \mathfrak{T}an p_0) = \frac{2 p_0}{\mathfrak{S}in 2 p_0}, \quad (20.14)$$

so daß (20.9) schließlich in die Form

$$0 < \frac{2 r_0 + (a_1 + a_2)}{-(a_1 + a_2)} < \left(\frac{\lambda}{a_1 + a_2}\right)^2 F_0 \left(\frac{2 p_0}{\mathfrak{S}in 2 p_0} + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{J_0} \frac{d\Delta_0}{d\Theta} \right)$$

gebracht werden kann.

Bei HSJ-I ist der Wert des als obere Schranke von $\frac{2 r_0 + (a_1 + a_2)}{-(a_1 + a_2)}$ dienenden Ausdrucks kleiner als 10^{-6} , so daß man wegen $-(a_1 + a_2) < 10^3$ [mm]

$$0 < r_0 + \frac{a_1 + a_2}{2} < 0,0005 \text{ [mm]}$$

erhält. Demnach darf

$$r_0 = - \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (20.15)$$

angenommen werden. Darüber hinaus erscheint es als zweckmäßig,

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (20.16)$$

zu setzen.

Die von (20.2) oder (20.3) dargestellten Gehängebewegungen sind genau dann harmonische Schwingungen, wenn

$$\text{sgn} (H r - I) = \text{sgn} (K - I r) = 1 .$$

In diesem Fall bedeutet

$$\sqrt{\frac{H r - I}{r}} = \frac{1}{s} \sqrt{K - I r} = \omega \quad (20.17)$$

die Kreisfrequenz der Schwingungen. Unter Beachtung von (20.6) ergibt sich

$$\omega^2 = \frac{H s^2 + K}{2 s^2} \left[1 - \sqrt{1 - 4 s^2 \frac{H K - I^2}{(H s^2 + K)^2}} \right]. \quad (20.18)$$

Dabei muß die Bedingung

$$H K - I^2 > 0 \quad (20.19)$$

erfüllt sein.

Wird (20.1) in die Differentialgleichungen für die gedämpften autonomen Gehängebewegungen eingeführt, so bekommt man die beiden Gleichungen

$$\ddot{\Theta} + \frac{D}{M} \left(1 + \frac{a_3}{r} \right) \dot{\Theta} + \frac{H r - I}{r} \Theta = 0$$

und

$$\ddot{\Theta} + \frac{D}{M} \frac{a_3 r}{s^2} \left(1 + \frac{a_3}{r} \right) \dot{\Theta} + \frac{K - I r}{s^2} \Theta = 0,$$

die nur dann identisch sind, wenn neben (20.4) oder (20.5)

$$a_3 r = s^2 \quad (20.20)$$

gilt.

Diese interessante Beziehung besagt in Verbindung mit (20.5), daß $-a_3$ mit der negativen Wurzel der quadratischen Gleichung (20.5) übereinstimmen muß, also

$$a_3 = \frac{1}{2 I} \left[H s^2 - K + \sqrt{(H s^2 - K)^2 + (2 I s)^2} \right]. \quad (20.21)$$

Die Positivität von a_3 wird bereits mit (8.2) vorausgesetzt. Daß jene Bedingung notwendig ist, war bisher nicht einzusehen.

Mit r ist auch

$$a_3 = \frac{s^2}{r(\nu)}$$

eine Funktion von ν ;

$$a_3 = a_3(\nu). \quad (20.22)$$

Man hat dafür zu sorgen, daß diese Abhängigkeit nicht wirksam wird; denn sonst müßten die beiden Tauchspulen und mit ihnen die zugehörigen Dauermagneten bei jeder Änderung der Neigung ν neu justiert werden, was sehr unbequem wäre.

21. Entkoppeln der Bewegungsgleichungen

Die im vorangehenden Abschnitt erzielten Resultate sind notabene unter der Voraussetzung (20.1) gewonnen worden, die offensichtlich bei heteronomen Gehängebewegungen ($\eta \neq 0$) versagt. Für die folgende Diskussion der Bewegungsgleichungen sind indessen jene Ergebnisse aufschlußreich. Es zeigt sich nämlich, daß sich die Gleichungen (19.9) bei vorhandener Dämpfung ($D > 0$) unter solchen Bedingungen entkoppeln lassen, wie sie die vorbereitende Untersuchung erbracht hat. Bekanntlich ergeben sich die sogenannten Haupt- und Normalkoordinaten, für die alle Kopplungen in den Bewegungsgleichungen wegfallen, als lineare Kombinationen der vorgegebenen Koordinaten. Im betrachteten Fall stellen sie die y -Koordinaten von zwei auf der a -Achse von \mathfrak{S}_* geeignet zu wählenden gehängefesten Punkten \bar{P}_1, \bar{P}_2 dar.

Dem Punkt \bar{P}_j ($j = 1, 2$) sind also die \mathfrak{S}_* -Koordinaten $\bar{a}_j, 0, 0$ mit

$$\bar{a}_j \neq 0$$

und die \mathfrak{S} -Koordinaten $\bar{x}_j, \bar{y}_j, 0$ zugeordnet. Im Hinblick auf (5.7) erhält man insbesondere

$$\bar{y}_j = y_* + \bar{a}_j \Theta. \quad (21.1)$$

Damit können die Gleichungen (19.9) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\left. \begin{aligned} y_* + \frac{D}{M} (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) + \left(H + \frac{I}{\bar{a}_j} \right) y_* - \frac{I}{\bar{a}_j} \bar{y}_j &= -\ddot{\eta}, \\ \bar{a}_j \ddot{\Theta} + \frac{D}{M} \frac{\bar{a}_j a_3}{s^2} (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) + \frac{K + I \bar{a}_j}{s^2} \bar{a}_j \Theta - \frac{I \bar{a}_j}{s^2} \bar{y}_j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Diese Schreibweise veranlaßt zu der Bedingung

$$H + \frac{I}{\bar{a}_j} = \frac{K + I \bar{a}_j}{s^2} \quad (21.3)$$

oder

$$\bar{a}_j^2 - \frac{H s^2 - K}{s^2} \bar{a}_j - s^2 = 0. \quad (21.4)$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für \bar{a}_1 und \bar{a}_2 .

Wegen

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = -s^2 \quad (21.5)$$

ist eine der Wurzeln \bar{a}_1, \bar{a}_2 der quadratischen Gleichung (21.4) positiv, die andere negativ. Es sei $\bar{a}_1 < 0$, also

$$-\bar{a}_1 = \overline{P_1 P_*}$$

und demnach

$$\bar{a}_2 = \overline{P_2 P_*}.$$

Infolgedessen ergibt sich aus (21.4)

$$\bar{a}_j = \frac{1}{2I} \left[H s^2 - K + (-1)^j \sqrt{(H s^2 - K)^2 + (2 I s)^2} \right]. \quad (j = 1, 2) \quad (21.6)$$

Der Vergleich mit (20.6) läßt die formale Übereinstimmung von r und $-\bar{a}_1$ erkennen. Wenn dementsprechend

$$-\bar{a}_1 = r \quad (21.7)$$

gesetzt wird, ist zu bedenken, daß r jetzt nur den Abstand zwischen den Punkten \bar{P}_1 und P_* bezeichnet, ohne zugleich dem Ansatz (20.1) genügen zu müssen, wonach \bar{P}_1 „der gestellten Drehachse von \mathcal{G} “ angehören würde.

Außerdem stellt man fest, daß der Ausdruck für a_3 in (20.21) mit jenem für \bar{a}_2 identisch ist, und es erweist sich sogleich die Bedingung

$$\bar{a}_2 = a_3 \quad (21.8)$$

als notwendig. Auf Grund von (21.1) und (21.3) oder (21.4) gehen nämlich die Gleichungen (21.2) durch Addition der ent-

sprechenden Terme in

$$\ddot{y}_j + \frac{D}{M} \left(1 + \frac{\bar{a}_j a_3}{s^2} \right) (\dot{y}_* + a_3 \dot{\theta}) + \left(H - \frac{I \bar{a}_j}{s^2} \right) \bar{y}_j = - \ddot{\eta} \quad (j = 1, 2) \quad (21.9)$$

über. Diese beiden Gleichungen sind aber offensichtlich nur im Fall (21.8) entkoppelt. Hieraus folgt nun unter Beachtung von (21.5), (21.7)

$$\ddot{y}_1 + \left(H + \frac{I}{a_3} \right) \bar{y}_1 = - \ddot{\eta}, \quad (21.10)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{D}{M} \left(1 + \frac{a_3}{r} \right) \dot{y}_2 + \left(H - \frac{I}{r} \right) \bar{y}_2 = - \ddot{\eta}. \quad (21.11)$$

Mit (21.5), (21.7), (21.8) gelangt man wiederum zur Beziehung (20.20), so daß die daran anschließenden Bemerkungen gültig bleiben. In diesem Zusammenhang interessiert auch das Ergebnis (20.15) der Abschätzung von r_0 . Der Ansatz (20.16) wird beibehalten.

22. Die Indikatorgleichung

Mit (21.10) und (21.11) verfügt man über zwei selbständige Bewegungsgleichungen für die gehängefesten Punkte \bar{P}_1 und \bar{P}_2 . Nach (21.1), (21.8) und (8.2) ist \bar{P}_2 die Projektion der Repräsentanten P_{31} , P_{32} beider Tauchspulen auf die a -Achse von \mathfrak{S}_* . Die Funktion $\bar{y}_2(t)$ beschreibt also die Verrückungen parallel zur y -Achse von \mathfrak{S} , die sowohl die „eigentliche“ Dämpfungsspule als auch die Wandler-spule während der Gehängebewegung ausführt.

Daß die gewählte Anordnung der Spulen, die insbesondere der Bedingung (8.2) genügt, sich sehr vorteilhaft auswirkt, ist im Hinblick auf die Bewegungsgleichung (21.11) evident, die sich als lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die interessierende Funktion $\bar{y}_2(t)$ darbietet und im Rahmen der Theorie des mechanischen Empfängers als *Indikatorgleichung* anzusehen ist.

Dagegen hat man der Gleichung (21.10) nur eine untergeordnete Bedeutung beizumessen. Sie liefert den Hinweis, inwieweit

die (nicht notwendige) Hypothese zutrifft, wonach die bevorzugte Aufhängung zu einer gestellfesten Drehachse für das Gehänge \mathcal{G} verhilft, so daß sich \mathcal{G} wie eine Drehmasse bewegt und der Punkt \bar{P}_1 gemäß der Annahme (20.1) auf der Drehachse liegt, also gestellfest ist. Zu diesem Zweck muß man die Differentialgleichung (21.10) integrieren.

Die Integration soll hier nur für die einfache stationäre Gestellbewegung

$$\xi \equiv 0, \quad \eta = \eta_0 \sin \Omega t, \quad \zeta \equiv 0 \quad (22.1)$$

erfolgen. Dabei mögen die Bodenamplitude η_0 und die Kreisfrequenz Ω der (harmonischen) Bodenbewegung solche Werte annehmen, die seismisch gerechtfertigt sind. Obwohl nach (21.10) der Punkt \bar{P}_1 stets ungedämpfte Schwingungen ausführt, braucht aus physikalischen Gründen nur jener Anteil der allgemeinen Lösung von (21.10) beachtet zu werden, der die eigentliche erzwungene Bewegung der betreffenden Stelle des Gehänges \mathcal{G} beschreibt.

Daß diese Erwägung in der linearen Theorie für autonome Gehängebewegungen auch formal bestätigt wird, ist schon anhand von (20.1) leicht einzusehen. Bei derartigen Gehängebewegungen trifft die Annahme (20.1) mit allen Folgerungen „tatsächlich“ zu; für (21.10) kommt also (im Fall $\bar{\eta} \equiv 0$) allein die triviale Lösung $\bar{y}_1 \equiv 0$ in Betracht. Die Ausführungen im 20. Abschnitt sind daher nicht nur im Sinne einer Analyse zu verstehen.

Aus (21.10) geht hervor, daß

$$\sqrt{H + \frac{I}{a_3}} = \omega_1 \quad (22.2)$$

die Eigenfrequenz der Schwingungen des Punktes \bar{P}_1 darstellt. Wegen (20.7) und (20.22) ist auch ω_1 eine Funktion von ν ;

$$\omega_1 = \omega_1(\nu).$$

Eine hinreichende Vorstellung von der Größe der Frequenz ω_1 vermittelt indessen schon eine überschlägige Berechnung des

Wertes von

$$\omega_{10} = \omega_1(0).$$

Den Gleichungen (18.11), (20.11) und (20.15) sind die Beziehungen

$$H_0 = \frac{g \cot \alpha}{\lambda(1 - q_0)}, \quad I_0 = H_0 r_0 \quad (22.3)$$

zu entnehmen. Zieht man außerdem (20.20) hinzu, so ergibt sich

$$H_0 + \frac{I_0}{a_3(0)} = H_0 \left[1 + \left(\frac{r_0}{s} \right)^2 \right],$$

folglich

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{g \cot \alpha}{\lambda(1 - q_0)} \left[1 + \left(\frac{r_0}{s} \right)^2 \right]}. \quad (22.4)$$

Bei HSJ-I ist $\cot \alpha \approx 3$ und $\left(\frac{r_0}{s} \right)^2 \approx 7,2$; mit $\lambda = 3$ [mm] und $p_0 = 3$, also $q_0 \approx 0,33$, liefert (22.4)

$$\omega_{10} \approx 346 \text{ [s}^{-1}\text{]}. \quad (22.5)$$

Unter Berücksichtigung von (22.1) und (22.2) schreibt sich die Differentialgleichung (21.10)

$$\ddot{\bar{y}}_1 + \omega_1^2 \bar{y}_1 = \eta_0 \Omega^2 \sin \Omega t. \quad (22.6)$$

Zu einem physikalisch plausiblen partikulären Integral \bar{y}_{1p} verhilft der Ansatz

$$\bar{y}_{1p} = \bar{\beta} \eta_0 \sin \Omega t, \quad \bar{\beta} = \text{const}. \quad (22.7)$$

Die Konstante $\bar{\beta}$ ist mit

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 = \beta$$

eindeutig bestimmt. Indem man \bar{y}_{1p} anstelle von \bar{y}_1 in (22.6) einführt, findet man

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{1 - \beta}. \quad (22.8)$$

In Anbetracht von (22.5) und der Beschränkung auf seismisch interpretierbare Werte für Ω ist die Annahme

$$\beta < 1$$

oder sogar

$$\beta \ll 1 \quad (22.9)$$

erlaubt, so daß aus (22.7) und (22.8) als Amplitude der eigentlichen erzwungenen Schwingungen des Punktes \bar{P}_1

$$(\bar{y}_{1p})_{\max} = \frac{\beta}{1 - \beta} \eta_0$$

oder im Fall (22.9)

$$(\bar{y}_{1p})_{\max} = \beta \eta_0$$

resultiert.

Demnach sind so lange keine Bewegungen des gehängefesten Punktes \bar{P}_1 festzustellen, wie das Produkt $\beta \eta_0$ unterhalb eines gewissen Betrages liegt, der sich aus Schütteltisch-Versuchen näherungsweise bestimmen läßt. Unter seismischen Bedingungen ist $\beta \eta_0$ hinreichend klein, so daß die Hypothese dann auch für heteronome Gehängebewegungen zutrifft. Auf Grund dieses Ergebnisses erwartet man vom mechanischen Empfänger, daß er auf alle normalen Gestellbewegungen entsprechend reagiert. Infolgedessen wird die Gleichung (21.10) im weiteren Verlauf der Untersuchungen ignoriert.

Ist man also zu der Annahme (20.1) berechtigt, so liegt es nahe, in der Indikatorgleichung (21.11) die Funktion $\bar{y}_2(t)$ gemäß (21.1) und (21.8) durch $(r + a_3)\Theta(t)$ zu ersetzen, woraus sich die Gleichung

$$\ddot{\Theta} + \frac{D}{M} \left(1 + \frac{a_3}{r}\right) \dot{\Theta} + \left(H - \frac{I}{r}\right) \Theta = - \frac{\ddot{\eta}}{r + a_3} \quad (22.10)$$

ergibt. Selbstverständlich kann $\bar{y}_2(t)$ ohne weiteres in dieser Weise substituiert werden. Die Ersatzfunktion $\Theta(t)$ behält aber nur dann ihre geometrische Bedeutung als Drehwinkel von \mathcal{G} , wenn $|\bar{y}_1|$ vernachlässigbar klein bleibt.

Im Hinblick auf die konventionelle Theorie der „direkt-registrierenden Pendel-Seismographen“ ist

$$r + a_3 = l \quad (22.11)$$

als Indikatorlänge zu bezeichnen. Sie hängt ebenso wie r und a_3 [s. (20.8), (20.22)] von der Neigung ν ab;

$$l = l(\nu). \quad (22.12)$$

Diese Abhängigkeit ist aber so schwach, daß man oft anstelle von (22.12) nur die Konstante

$$l_0 = l(0) \quad (22.13)$$

zu berücksichtigen braucht. Aus (20.20) und (22.11) folgt

$$\frac{dl}{d\nu} = \left(1 - \frac{a_3}{r}\right) \frac{dr}{d\nu}.$$

Demnach gilt $\left|\frac{dl}{d\nu}\right| < \left|\frac{dr}{d\nu}\right|$ für $\frac{a_3}{r} < 2$. Insbesondere ergibt sich $\frac{dl}{d\nu} \approx 0$ für $r \approx a_3$.

Die Positivität des Koeffizienten $H - \frac{I}{r}$ in (21.11), (22.10), also

$$r > \frac{I}{H}, \quad (22.14)$$

ist eine notwendige Bedingung für die Stabilität der Gehängebewegungen. Die (positive) Wurzel

$$\sqrt{H - \frac{I}{r}} = \omega \quad (22.15)$$

stellt die Eigenfrequenz der „Indikatorschwingungen“ dar [vgl. (20.17)].

Mit (22.11) und (22.15) läßt sich die modifizierte Indikatorgleichung (22.10) in

$$\ddot{\Theta} + \frac{D}{M} \frac{l}{r} \dot{\Theta} + \omega^2 \Theta = - \frac{\ddot{\eta}}{l} \quad (22.16)$$

umschreiben.

23. Die Frequenz ω für $\nu = 0$

In (21.9) erscheinen die beiden Kreisfrequenzen ω_1 und $\omega_2 \equiv \omega$ in der Gestalt

$$\omega_j = \sqrt{H - \frac{I a_j}{s^2}}, \quad (j = 1, 2)$$

woraus mit Hilfe von (21.6) die Formeln

$$\omega_j^2 = \frac{H s^2 + K}{2 s^2} \left[1 - (-1)^j \sqrt{1 - 4 s^2 \frac{H K - I^2}{(H s^2 + K)^2}} \right] \quad (23.1)$$

gewonnen werden. Für $j = 2$ ergibt sich natürlich wieder die Gleichung (20.18) mit der zu (22.14) äquivalenten Bedingung (20.19).

Die Frequenz

$$\omega = \omega(\nu)$$

ändert sich mit ν stärker als ω_1 , und zwar um so mehr, je kleiner ν ist. Daher erfordert die numerische Bestimmung von ω etwa im Vergleich zu der überschläglichen Berechnung von ω_{10} im 22. Abschnitt ein viel höheres Maß an Genauigkeit. Würde man beispielsweise für $\nu = 0$ mit der zweiten Beziehung (22.3), wozu die nur annähernd richtige Gleichung (20.15) beiträgt, in (22.15) eingehen, so bekäme man $\omega(0) = 0$. Dieses Resultat ist indessen nur geeignet, einen gewissen Ausnahmefall zu charakterisieren, der insbesondere bei extrem kleinen Werten von J_0 und $\frac{d\Delta_0}{d\Theta}$ eintritt.

Zu einer brauchbaren Näherungsformel für ω gelangt man folgendermaßen: Nach (23.1) gilt

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{H K - I^2}{s^2},$$

also unter Berücksichtigung von (22.2)

$$\omega^2 = \frac{H K - I^2}{s^2 \left(H + \frac{I}{a_3} \right)}. \quad (23.2)$$

Mittels (20.20) und (22.11) ergibt sich die Umformung

$$s^2 \left(H + \frac{I}{a_3} \right) = H r \left(a_3 + \frac{I}{H} \right) = H r l \left(1 - \frac{r - \frac{I}{H}}{l} \right),$$

so daß (23.2) in

$$\omega^2 = \frac{H K - I^2}{H r l} \frac{1}{1 - \frac{r - \frac{I}{H}}{l}} \quad (23.3)$$

übergeht. Wegen

$$r \approx r_0, \quad l \approx l_0, \quad \frac{r - \frac{I}{H}}{l} \ll 1$$

gilt in guter Näherung

$$\omega \approx \sqrt{\frac{1}{r_0 l_0} \left(K - \frac{I^2}{H} \right)}. \quad (23.4)$$

Speziell für $\nu = 0$ lautet die Gleichung (23.3), indem man (20.11) und (20.16) beachtet,

$$[\omega(0)]^2 = \frac{K_0 - H_0 a_0^2}{r_0 l_0} \frac{1}{1 - \frac{r_0 + a_0}{l_0}}$$

Aus (19.8) folgt

$$K_0 - H_0 a_0^2 = -H_0 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 q_0 (1 - q_0) + \frac{2 J_0}{M \lambda q_0} + \frac{1}{M} \frac{dA_0}{d\Theta}.$$

Die Gleichungen (17.10), (18.9), (18.11) verhelfen zu

$$\begin{aligned} K_0 - H_0 a_0^2 &= \frac{2 p_0 J_0}{M \lambda} \left(\mathfrak{C} \cot p_0 - M g \frac{\lambda^2 \cot \alpha}{8 J_0 p_0^2} \mathfrak{I} \tan \bar{p}_0 \right) + \frac{1}{M} \frac{dA_0}{d\Theta} \\ &= \frac{2 p_0 J_0}{M \lambda} (\mathfrak{C} \cot p_0 - \mathfrak{I} \tan p_0) + \frac{1}{M} \frac{dA_0}{d\Theta} \\ &= \frac{1}{M} \left(\frac{2 J_0}{\lambda} \frac{2 p_0}{\mathfrak{S} \sin 2 p_0} + \frac{dA_0}{d\Theta} \right). \end{aligned} \quad (23.5)$$

Übrigens läßt sich dieses Ergebnis auch anhand von (20.13), (20.14) herleiten. Man erhält somit

$$[\omega(0)]^2 = \frac{\frac{2 J_0}{\lambda} \frac{2 p_0}{\sin 2 p_0} + \frac{d\Delta_0}{d\Theta}}{M r_0 l_0} \frac{1}{1 - \frac{r_0 + a_0}{l_0}}.$$

Das Produkt

$$Q = M r l \quad (23.6)$$

liefert das Trägheitsmoment von \mathcal{G} in bezug auf eine zu \mathfrak{k} parallele (gehängefeste) Achse im Abstand r von P_* . Denn es gilt nach (20.20), (22.11)

$$r l = r^2 + s^2. \quad (23.7)$$

Für $\nu = 0$ ergibt sich das Trägheitsmoment

$$Q_0 = M r_0 l_0.$$

Da $\frac{r_0 + a_0}{l_0}$ vernachlässigbar klein gegen Eins ist, erhält man somit (unter Beibehaltung des Gleichheitszeichens)

$$\omega(0) = \sqrt{\frac{1}{Q_0} \left(\frac{2 J_0}{\lambda} \frac{2 p_0}{\sin 2 p_0} + \frac{d\Delta_0}{d\Theta} \right)}. \quad (23.8)$$

In Abb. 8 ist die Funktion $\frac{2 p}{\sin 2 p}$ im Intervall $0 \leq p \leq 4$ dargestellt.

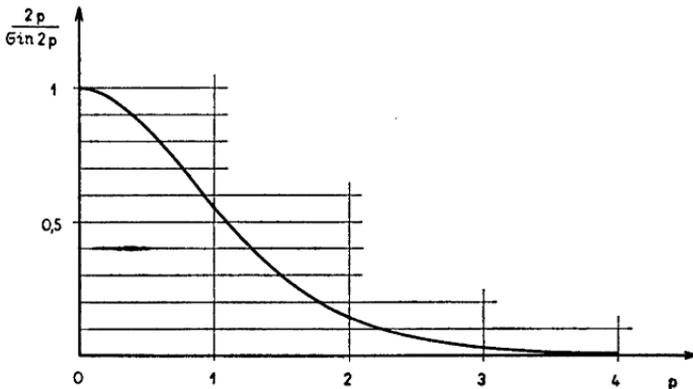


Abb. 8. Darstellung von $\frac{2 p}{\sin 2 p}$ im Intervall $0 \leq p \leq 4$

24. Die Funktion $w(v)$

Die Funktion

$$q(p) = \frac{\Im \operatorname{an} p}{p} \quad (24.1)$$

ist im Intervall $(0, \infty)$ streng monoton fallend. Abb. 9 zeigt ihren Verlauf für $0 \leq p \leq 5$. Es gilt

$$q(0) = 1, \quad q(\infty) = 0.$$

Infolgedessen ist die (Umkehr-) Funktion $p = p(q)$ im Intervall

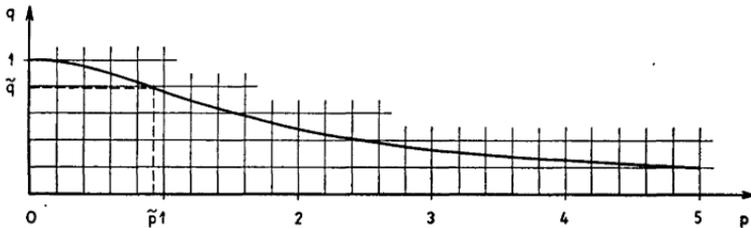


Abb. 9. Verlauf der Funktion $q = \frac{\Im \operatorname{an} p}{p}$ im Intervall $0 \leq p \leq 5$

$(0, 1)$ auch streng monoton fallend. Im Hinblick auf (17.2), (18.9) hat man

$$q(p_j) = q_j, \quad q(p_0) = q_0$$

zu setzen.

In (18.12) erscheint q_j bei fest vorgegebenen Werten für p_0 und α als (eindeutige) Funktion von v ;

$$q_j = q_j(v), \quad q_j(0) = q_0. \quad (j = 1, 2)$$

Es besteht die Beziehung

$$q_1(-v) = q_2(v). \quad (24.2)$$

Auf Grund der strengen Monotonie von (24.1) ergibt sich dementsprechend

$$p_j = p_j(v), \quad p_j(0) = p_0.$$

Wegen (24.2) erhält man

$$p_1(-v) = p[q_1(-v)] = p[q_2(v)] = p_2(v). \quad (24.3)$$

Die Überlegungen im 17. Abschnitt haben dazu geführt, daß auch die Biegegssteifigkeit J_j als Funktion von ν aufgefaßt werden muß;

$$J_j = J_j(\nu) . \quad (24.4)$$

Dabei wird angenommen, daß

$$J_j(0) = J_0$$

vorgegeben ist. Aus (17.11) und (24.3) folgt sodann

$$J_1(-\nu) = J_2(\nu) . \quad (24.5)$$

In der Gleichung (19.8) kommt der Ausdruck $\frac{J_1}{q_1} + \frac{J_2}{q_2}$ vor. Zu seiner Darstellung wird die Größe w herangezogen, die durch

$$\frac{J_1}{q_1} + \frac{J_2}{q_2} = 2 \frac{J_0}{q_0} (1 + w p_0 \operatorname{Tan} p_0) \quad (24.6)$$

eindeutig erklärt ist. Offenbar hängt auch w von ν ab;

$$w = w(\nu) , \quad w(0) = 0 .$$

Diese Funktion ist wegen (24.2) und (24.5) gerade, d. h. es gilt

$$w(-\nu) = w(\nu) .$$

Gemäß der MACLAURINSchen Form des TAYLORSchen Satzes existiert immer eine Zahl ϑ zwischen 0 und 1, so daß also

$$w(\nu) = w'(\vartheta \nu) \frac{\nu^2}{2} \quad (0 < \vartheta < 1) \quad (24.7)$$

gesetzt werden kann.

25. Eine Darstellung von ω für kleine $|\nu|$ -Werte

Die Gleichung (19.8) läßt sich mit Hilfe von (18.9), (18.11), (20.10), (20.16) und (24.6) in der Form

$$K = K_0 - 2 H_0 \left[a_0^2 - \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 q_0 (1 - q_0) \right] \sin^2 \frac{\nu}{2} + \frac{2 J_0}{M \lambda} p_0^2 w(\nu)$$

bringen, während die Beziehung (19.2) zu

$$\begin{aligned} \frac{I^2}{H} &= H \left[a_0 + \frac{\lambda}{2} (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu \right]^2 \\ &= g a_0 \sin \nu + H_0 a_0^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\nu}{2} \right) \\ &\quad + H_0 \lambda^2 (1 - q_0)^2 \tan^2 \alpha \frac{\sin^2 \frac{\nu}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\nu}{2}} \end{aligned}$$

verhilft. Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} K - \frac{I^2}{H} &= K_0 - H_0 a_0^2 - g a_0 \sin \nu \\ &+ \frac{H_0}{2} \lambda^2 (1 - q_0) \left[q_0 - 2 (1 - q_0) \frac{\tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \frac{\nu}{2}} \right] \sin^2 \frac{\nu}{2} + \frac{2 J_0}{M \lambda} p_0^2 w(\nu) \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung von (17.10), (18.9), (18.11) und (24.7)

$$\begin{aligned} K - \frac{I^2}{H} &= K_0 - H_0 a_0^2 - g a_0 \sin \nu \\ &+ g \frac{\lambda}{2} \cot \alpha \left[q_0 - 2 (1 - q_0) \frac{\tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \frac{\nu}{2}} \right. \\ &\quad \left. + w''(\vartheta \nu) \left(\frac{\frac{\nu}{2}}{\sin \frac{\nu}{2}} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{\nu}{2}. \end{aligned}$$

Zur weiteren Umformung wird die aus (7.4), (17.7), (17.8) hervorgehende Beziehung

$$\cot \alpha = - \frac{a_0}{h} \quad (25.1)$$

verwendet. Für hinreichend kleine Beträge von ν kann sodann

$$K - \frac{I^2}{H} = K_0 - H_0 a_0^2 - g a_0 \nu \left\{ 1 + \frac{\lambda \nu}{8 h} [q_0 - 2(1 - q_0) \tan^2 \alpha + w''(\vartheta \nu)] \right\} \quad (25.2)$$

geschrieben werden. Wenn man sich weiterhin auf solche ν -Werte beschränkt, daß außerdem

$$\frac{\lambda |\nu|}{8 h} |q_0 - 2(1 - q_0) \tan^2 \alpha + w''(\vartheta \nu)| \ll 1 \quad (25.3)$$

zutritt, vereinfacht sich (25.2) zu

$$K - \frac{I^2}{H} = K_0 - H_0 a_0^2 - g a_0 \nu. \quad (25.4)$$

Um feststellen zu können, ob die Bedingung (25.3) für alle in Betracht kommenden Neigungen ν erfüllt ist, muß die Funktion $\nu w''(\vartheta \nu)$ „einigermaßen“ bekannt sein. Nach (24.7) hat man zu diesem Zweck $\frac{2}{\nu} w(\nu)$ an einigen Stellen des interessierenden ν -Intervalls zu berechnen. Wie dabei vorzugehen ist, wird im 27. Abschnitt angedeutet.

Mit (25.4) geht (23.4) in

$$\omega \approx \sqrt{\frac{K_0 - H_0 a_0^2}{r_0 l_0} - \frac{g a_0 \nu}{r_0 l_0}}$$

oder

$$\omega(\nu) \approx \sqrt{[\omega(0)]^2 - \frac{g a_0 \nu}{r_0 l_0}}$$

über. Im Hinblick auf (20.15), (20.16) liegt es nahe, statt dessen

$$\omega(\nu) \approx \sqrt{[\omega(0)]^2 + \frac{g \nu}{l_0}} \quad (25.5)$$

zu schreiben. Das so formulierte Ergebnis ist jedoch nahezu trivial. Seine eigentliche Bedeutung liegt in dem Ausdruck (23.8) für $\omega(0)$.

26. Der Grenzwinkel $\underline{\nu}$

Die Frequenz $\omega(\nu)$ wird kleiner mit abnehmender Neigung ν . Die untere Grenze der Menge aller Neigungen ν , wofür die Stabilitätsbedingung (20.19) erfüllt ist, wird mit $\underline{\nu}$ bezeichnet. Die Bestimmungsgleichung für den Grenzwinkel $\underline{\nu}$ ergibt sich mit

$$\lim_{\nu \rightarrow \underline{\nu}} \omega(\nu) = 0 \quad (26.1)$$

oder im Hinblick auf (20.19) am einfachsten mit

$$\lim_{\nu \rightarrow \underline{\nu}} \left(K - \frac{I^2}{H} \right) = 0.$$

Aus (25.4) folgt

$$\underline{\nu} = \frac{1}{g a_0} (K_0 - H_0 a_0^2),$$

also wegen (23.5)

$$\underline{\nu} = \frac{1}{M g a_0} \left(\frac{2 J_0}{\lambda} \frac{2 p_0}{\mathfrak{G} \sin 2 p_0} + \frac{d \Delta_0}{d \Theta} \right). \quad (26.2)$$

Selbstverständlich ist $\underline{\nu}$ negativ ($a_0 < 0!$).

Die Formel (25.5) liefert im Fall (26.1) die Beziehung $[\omega(0)]^2 = -\frac{g}{l_0} \underline{\nu}$ und geht damit in

$$\omega(\nu) \approx \sqrt{\frac{g}{l_0} (\nu - \underline{\nu})} \quad (26.3)$$

über. Dieser Wurzelausdruck kann als Kreisfrequenz eines mathematischen Pendels mit der Pendellänge l_0 und um den (positiven) Winkel $\nu - \underline{\nu}$ gegen die Vertikale geneigter Drehachse gedeutet werden. Hierauf beruht die für l_0 gebräuchliche Bezeichnung „reduzierte Pendellänge“ (von \mathfrak{G}). Es zeigt sich also, daß die Indikatorlänge (22.13) mit der reduzierten Pendellänge übereinstimmt.

27. Die Biegesteifigkeit der Blattfedern

Zugunsten der Bedingung (17.7) erscheint die Biegesteifigkeit J_j von \mathfrak{B}_j ($j = 1, 2$) als Funktion der Neigung ν . Da J_j faktisch nicht stetig verändert werden kann, bedeutet diese

Abhängigkeit möglicherweise, daß die verwendeten Blattfedern durch passende, d. h. der Vorschrift (24.4) genügende Federn zu ersetzen sind. Die am Austausch beteiligten Federn brauchen sich nur in ihrer Dicke zu unterscheiden.

Nach (11.5) ist die Biegeungssteifigkeit J proportional zur dritten Potenz der Dicke δ von \mathfrak{B} . Deswegen empfiehlt es sich, die Dicke δ_j von \mathfrak{B}_j als Funktion von ν anzusetzen und β sowie E als Konstanten beizubehalten. Der auf (11.5) beruhende Ansatz lautet sodann

$$J_j = \frac{E \beta}{12} \delta_j^3$$

mit

$$\delta_j = \delta [1 + \varepsilon_j(\nu)], \quad \varepsilon_j(0) = 0, \quad \delta = \text{const.}$$

Die Funktion $\varepsilon_j(\nu)$ beschreibt die relative Dickenänderung $\frac{\delta_j - \delta}{\delta}$ mit ν . Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{J_j}{J_0} &= (1 + \varepsilon_j)^3, \\ \varepsilon_j &= \sqrt[3]{\frac{J_j}{J_0}} - 1. \end{aligned} \quad (27.1)$$

Selbstverständlich möchte man für alle interessierenden Neigungen ν dieselben Blattfedern verwenden. Das ist jedoch nur dann zulässig, falls

$$|\varepsilon_j(\nu)| < \bar{\varepsilon} \quad (27.2)$$

zutrifft, wobei die positive Konstante $\bar{\varepsilon}$ nicht größer als die technisch begründete Toleranz von δ ist.

Die Abhängigkeit der Biegeungssteifigkeit J_j von ν ist etwas umständlich. Aus (17.11) folgt

$$J_j(\nu) = J_0 p_0^2 \frac{\cos \nu - (-1)^j \tan \alpha \sin \nu}{[p_j(\nu)]^2}. \quad (27.3)$$

Die Formel (17.2) regelt den Zusammenhang zwischen den Funktionen $p_j(\nu)$ und $q_j(\nu)$. In (18.12) hängt q_j aber in sehr einfacher Weise von ν ab. Der zu ν gehörende Funktionswert J_j

kann also berechnet werden, indem man sich zunächst mittels (18.12) $q_j(\nu)$ verschafft, dann über (17.2) den entsprechenden Wert $p_j(\nu)$, der schließlich in (27.3) eingeführt wird. Hierbei müssen nur die Größen α , J_0 und entweder p_0 oder q_0 vorgegeben sein. Den Gleichungen (17.10) und (18.10) ist zu entnehmen, daß dann die Gehängemasse M , die Blattfederlänge λ und die durch (14.2) definierte Größe f gar nicht einzeln bekannt zu sein brauchen. Man kann insbesondere so verfahren, wenn eine gewisse Vorstellung vom Verlauf der Funktion $w(\nu)$ oder $\frac{2}{\nu} w(\nu)$ erwünscht ist.

Wegen $0 < q_j(\nu) < 1$ kommen nur solche ν -Werte in Betracht, für die

$$0 < q_0 \pm (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu < 1 ,$$

also

$$\tan |\nu| < \text{Min} \left(1, \frac{q_0}{1 - q_0} \right) \cot \alpha \quad (27.4)$$

gilt. Diese notwendige Bedingung ergibt sich aus (18.12). Sie bewirkt jedoch in praxi keine beträchtenswerte Einschränkung des ν -Intervalls. Ist z. B. $\cot \alpha = 3$ und $\tan |\nu| > 0,02$ (wie bei HSJ-I), so darf q_0 nach (27.4) sogar den außerordentlich kleinen Wert $\frac{1}{151}$ annehmen ($p_0 = 151$), der indessen völlig undiskutabel ist. Eine „spürbare“ Beschränkung in der Wahl von ν kann demgegenüber durch (27.2) erfolgen.

Die Beziehung (18.12) wird in

$$\frac{1 - q_j}{1 - q_0} = 1 - (-1)^j \tan \alpha \tan \nu \quad (27.5)$$

umgeformt. Im Hinblick darauf läßt sich (27.3) in

$$\frac{J_j}{J_0} = \frac{p_0^2}{1 - q_0} \frac{1 - q_j}{p_j^2} \cos \nu$$

überführen. Diese Gleichung nimmt unter Berücksichtigung von (17.3), (20.12) die Gestalt

$$\frac{J_j}{J_0} = \frac{F_j}{F_0} \cos \nu \quad (27.6)$$

an. Der Quotient $\frac{J_j}{J_0}$ stimmt also um so besser mit $\frac{F_j}{F_0}$ überein, je kleiner $|v|$ ist.

Die Formel (27.6) legt nahe, zur Bestimmung von $\frac{J_j(v)}{J_0}$ die graphische Darstellung der Hilfsfunktion $F(p)$ heranzuziehen (vgl. Abb. 7). Man entnimmt ihr die zu p_0 bzw. $p_j(v)$ gehörenden Funktionswerte F_0 bzw. $F_j = F[p_j(v)]$, die in (27.6) eingesetzt werden. Eine zweckmäßige Abänderung des Verfahrens erfolgt indem man F als Funktion von q graphisch darstellt. Die Werte $q_j(v)$ liefert die einfache Beziehung (18.12). Hierbei erübrigt sich die (graphische oder numerische) Ermittlung von $p_j(v)$. Der Maßstab auf der p - bzw. q -Achse des Diagramms muß allerdings besonders groß gewählt werden.

Ein derartiges Vorgehen ist indessen recht umständlich, vor allem dann, wenn nur die Einhaltung der Bedingung (27.2) kontrolliert wird. In diesem Fall empfiehlt es sich, einen anderen Weg einzuschlagen. Aus (18.12) folgt nämlich

$$\begin{aligned} q_1(v) &\leq q_0 \leq q_2(v) \quad \text{für } v \geq 0, \\ \operatorname{sgn} q'_j(v) &= (-1)^j. \end{aligned}$$

Wegen $p'(q) < 0$ ($q > 0$) bekommt man somit

$$\left. \begin{aligned} p_1(v) &\geq p_0 \geq p_2(v) \quad \text{für } v \geq 0, \\ \operatorname{sgn} p'_j(v) &= \operatorname{sgn} p'(q_j) \operatorname{sgn} q'_j(v) = -(-1)^j. \end{aligned} \right\} \quad (27.7)$$

Nach (16.5) ist $F'(p) < 0$ ($p > 0$), so daß also

$$\left. \begin{aligned} F[p_1(v)] &\leq F_0 \leq F[p_2(v)] \quad \text{für } v \geq 0, \\ \operatorname{sgn} \frac{dF_j}{dv} &= \operatorname{sgn} F'(p_j) \operatorname{sgn} p'_j(v) = (-1)^j \end{aligned} \right\} \quad (27.8)$$

gilt. Im Hinblick auf (27.6) ergibt sich demnach

$$J_1(v) \leq J_0 \leq J_2(v) \quad \text{für } v \geq 0 \quad (27.9)$$

und außerdem

$$\operatorname{sgn} J'_j(0) = (-1)^j. \quad (27.10)$$

Ob beide Funktionen $J_1(v)$ und $J_2(v)$ in dem gesamten vorgegebenen Intervall \mathfrak{J} monoton sind, ist jedoch nicht ohne weiteres zu erkennen. Um sich darüber Klarheit zu verschaffen, wird zunächst (27.3) logarithmisch differenziert:

$$\frac{J'_j(v)}{J_j} = -2 \frac{p'_j(v)}{p_j} - (-1)^j \tan [\alpha + (-1)^j v]. \quad (27.11)$$

Anhand von (18.12) und (24.1) bildet man

$$q'_j(v) = (-1)^j (1 - q_0) \frac{\tan \alpha}{\cos^2 v}$$

und unter Zuhilfenahme der LANGEVINSCHEN Funktion (16.4)

$$-q'(p) = q [\mathfrak{Tan} p - \mathfrak{L}(p)],$$

also

$$-\frac{1}{p q'(p)} = \frac{1}{\mathfrak{Tan} p [\mathfrak{Tan} p - \mathfrak{L}(p)]} = \frac{1}{1 - q} \frac{\mathfrak{L}(p)}{\mathfrak{Tan} p - \mathfrak{L}(p)}, \quad (27.12)$$

und mittels (27.5)

$$\begin{aligned} -\frac{p'_j(v)}{p_j} &= -\frac{q'_j(v)}{p_j q'(p_j)} \\ &= (-1)^j \frac{\mathfrak{L}(p_j)}{\mathfrak{Tan} p_j - \mathfrak{L}(p_j)} \frac{\sin \alpha}{\cos [\alpha + (-1)^j v] \cos v}. \end{aligned}$$

Damit geht (27.11) in

$$\begin{aligned} (-1)^j 2 \frac{J'_j(v)}{J_j} \cos [\alpha + (-1)^j v] \frac{\cos v}{\sin \alpha} \\ = 2 \mathfrak{R}(p_j) + 1 - \frac{\sin [\alpha + (-1)^j 2v]}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (27.13)$$

über, wobei der Wert $\mathfrak{R}(p_j)$ der Funktion

$$\mathfrak{R}(p) = \frac{2}{\frac{\mathfrak{Tan} p}{\mathfrak{L}(p)} - 1} - 1 \quad (27.14)$$

erscheint, die im Intervall $(0, \infty)$ positiv ist und streng monoton wächst. Abb. 10 zeigt den Verlauf von $\mathfrak{R}(p)$ im Intervall $[0, 4]$.

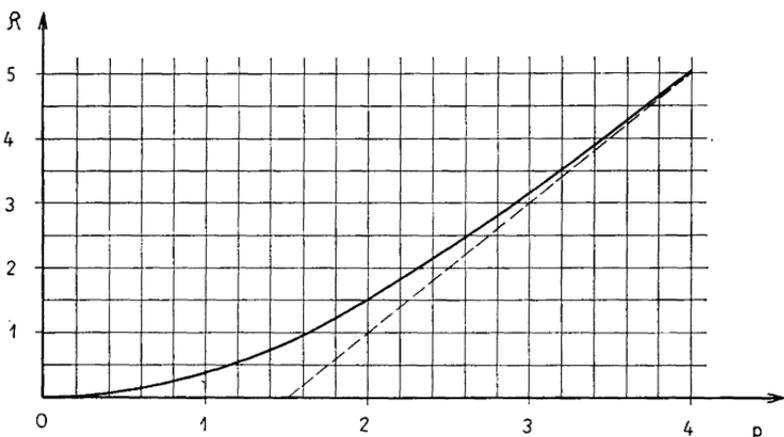


Abb. 10. Darstellung der Funktion $\mathfrak{R}(p) = \frac{2}{\tan p - 1} - 1$ im Inter-

vall $0 \leq p \leq 4$. $\mathfrak{L}(p)$ ist die LANGEVINSCHЕ Funktion. Die gestrichelt gezeichnete Gerade stellt die Asymptote von \mathfrak{R} dar. Für große p -Werte gilt $\mathfrak{R}(p) \approx 2p - 3$

Die Gleichung (27.13) ergibt

$$\operatorname{sgn} J'_j(\nu) = (-1)^j \operatorname{sgn} \left\{ 2 \mathfrak{R}(p_j) + 1 - \frac{\sin [\alpha + (-1)^j 2\nu]}{\sin \alpha} \right\}.$$

Wegen (27.10) stellt

$$2 \mathfrak{R}(p_j) + 1 \geq \frac{\sin [\alpha + (-1)^j 2\nu]}{\sin \alpha} \quad (27.15)$$

eine notwendige Bedingung für die Monotonie von $J_j(\nu)$ dar. Sie ist eo ipso erfüllt, wenn $j = 1$ und $\nu \geq 0$ oder $j = 2$ und $\nu \leq 0$ gesetzt wird. Das bedeutet

$$J'_1(\nu) < 0 \quad \text{für} \quad \nu \geq 0,$$

$$J'_2(\nu) > 0 \quad \text{für} \quad \nu \leq 0.$$

Man beachte (24.5)! Dieses Verhalten von $J_j(\nu)$ ist übrigens der Formel (27.6) im Hinblick auf (27.8) direkt anzusehen.

Im Fall $J_1(-\nu) = J_2(\nu)$, $\nu > 0$ [s. (24.5)] lautet (27.15)

$$2 \Re(p_j) + 1 \geq \frac{\sin(\alpha + 2\nu)}{\sin \alpha}, \quad p_j = p_j [(-1)^j \nu], \quad \nu > 0.$$

Da $\Re(p)$ monoton wächst und (27.7) gilt, sind offenbar beide Funktionen $J_1(\nu)$ und $J_2(\nu)$ im ganzen Intervall \mathfrak{J} genau dann monoton, wenn

$$2 \Re[p_2(\bar{\nu})] + 1 \geq \frac{\sin(\alpha + 2\bar{\nu})}{\sin \alpha} \quad (27.16)$$

mit

$$\bar{\nu} = \sup_{\nu \in \mathfrak{J}} |\nu|$$

zutrifft. Der Wert $\bar{\nu}$ ist entweder die obere Grenze oder der Betrag der unteren Grenze von \mathfrak{J} . In der Regel wird $\bar{\nu}$ durch

$$\bar{\nu} = \sup_{\nu \in \mathfrak{J}} \nu$$

definiert. Anderenfalls stimmt $\bar{\nu}$ mit dem Betrag des Grenzwinkels $\underline{\nu}$ überein: $\bar{\nu} = -\underline{\nu}$. Hierbei setzt man wie schon zur Definition von $\underline{\nu}$ stillschweigend voraus, daß die untere Grenze von \mathfrak{J} stets durch die „Stabilitätsgrenze“ bestimmt wird. Diese Annahme ist praktisch, aber nicht notwendig.

Es zeigt sich nun, daß bei zweckmäßiger Vorgabe von α und $\bar{\nu}$ nicht nur die Bedingung (27.16), sondern auch die hinreichende (stärkere) Forderung

$$\Re[p_2(\bar{\nu})] \geq \bar{\nu} \cot \alpha$$

schon von so kleinen p_0 -Werten an erfüllt ist, daß in praxi durchweg

$$\operatorname{sgn} J'_j(\nu) = (-1)^j$$

vorausgesetzt werden darf. Beispielsweise für $\cot \alpha = 3$ und $\bar{\nu} = 0,02$ ist selbst $p_0 = 0,4$ noch ein solcher Wert.

Infolge der Monotonie von $J_j(\nu)$ in \mathfrak{J} braucht man anstelle von (27.2) nur

$$|\varepsilon_j(\bar{\nu})| < \bar{\varepsilon}$$

zu beachten. Wegen (27.1) und (27.9) ist das gleichbedeutend mit

$$\text{Max} \left[1 - \sqrt[3]{\frac{J_1(\bar{\nu})}{J_0}}, \sqrt[3]{\frac{J_2(\bar{\nu})}{J_0}} - 1 \right] < \bar{\varepsilon}.$$

Unter dieser Voraussetzung können also für alle Neigungen $\nu \in \mathfrak{J}$ dieselben Blattfedern $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ beibehalten werden.

Um schließlich eine Vorstellung von der Größenordnung des Betrags der maximalen relativen Dickenänderung $\varepsilon_j(\bar{\nu})$ zu bekommen, genügt es, die Näherungsformel

$$\varepsilon_j(\bar{\nu}) \approx \varepsilon'_j(0)\bar{\nu}$$

zugrunde zu legen. Aus (27.1) folgt

$$\varepsilon'_j(0) = \frac{1}{3} \frac{J'_j(0)}{J_0},$$

und (27.13) entnimmt man

$$\frac{J'_j(0)}{J_0} = (-1)^j \mathfrak{R}(p_0) \tan \alpha,$$

so daß sich

$$\varepsilon_j(\bar{\nu}) \approx (-1)^j \mathfrak{R}(p_0) \frac{\tan \alpha}{3} \bar{\nu},$$

also

$$|\varepsilon_j(\bar{\nu})| \approx \varepsilon_2(\bar{\nu}) \approx \mathfrak{R}(p_0) \frac{\tan \alpha}{3} \bar{\nu}, \quad (27.17)$$

ergibt. Speziell für $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ und $\bar{\nu} = 0,02$ erhält man $\varepsilon_2(0,02) \approx 2 \mathfrak{R}(p_0) \cdot 10^{-3}$.

28. Darstellung der Funktion $p_j(\nu)$

Die Funktion $p_j(\nu)$ erscheint nach (17.2) und (18.12) in der impliziten Form

$$\frac{\mathfrak{Tan} p_j(\nu)}{p_j(\nu)} = q_0 + (-1)^j (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu, \quad (28.1)$$

wodurch die meisten Kontrollrechnungen erschwert werden.

Mitunter kann man jedoch unbeschadet der erforderlichen Genauigkeit anstelle von (28.1) numerisch bequemere Näherungsformeln verwenden.

Falls p_0 so groß ist, daß $\mathfrak{Tan} p_0$ durch 1 ersetzt werden darf, bevorzugt man gegenüber (28.1) die Gleichung

$$p_j(\nu) = \frac{1}{q_0 + (-1)^j (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu}$$

oder wegen $p_0 q_0 = 1$

$$\frac{p_j(\nu)}{p_0} = \frac{1}{1 + (-1)^j (p_0 - 1) \tan \alpha \tan \nu} \quad (28.2)$$

Die Berechtigung hierzu ist im Hinblick auf (24.3) und (27.7) für $p_1(\nu) = p_2(-\nu)$, $\nu > 0$, ohne weiteres einzusehen. Bevor (28.2) zur Berechnung von $p_1(-\nu) = p_2(\nu)$, $\nu > 0$, herangezogen wird, muß man prüfen, ob auch noch $\mathfrak{Tan} p_2(\bar{\nu})$ genügend genau mit 1 übereinstimmt. Erst wenn diese notwendige Voraussetzung erfüllt ist, bietet sich mit (28.2) eine für jede Neigung $\nu \in \mathfrak{J}$ brauchbare Näherungsformel an. Gilt außerdem

$$[(p_0 - 1) \tan \alpha \tan \bar{\nu}]^2 \ll 1,$$

so vereinfacht sich (28.1) zu

$$\frac{p_j(\nu)}{p_0} = 1 - (-1)^j (p_0 - 1) \tan \alpha \tan \nu.$$

Für $p_j(\nu) < \frac{\pi}{2}$ ergibt sich

$$\mathfrak{Tan} p_j = p_j - \frac{1}{3} p_j^3 + \frac{2}{15} p_j^5 - \dots$$

Diese Reihendarstellung wird in (28.1) eingeführt. Man erhält

$$\begin{aligned} & \frac{p_j^2}{p_0^2} \left(1 - \frac{2}{5} p_j^2 + \dots \right) \\ & = \left(1 - \frac{2}{5} p_0^2 + \dots \right) [1 - (-1)^j \tan \alpha \tan \nu], \end{aligned}$$

also

$$\frac{p_j}{p_0} = \left[1 - \frac{1}{5} (p_0^2 - p_j^2) + \dots \right] \left[1 - \frac{(-1)^j}{2} \tan \alpha \tan \nu - \frac{1}{8} \tan^2 \alpha \tan^2 \nu - \dots \right],$$

und unter der Annahme

$$\frac{1}{8} (\tan \alpha \tan \nu)^2 \ll 1, \quad \frac{1}{5} |p_0^2 - [p_j(\nu)]^2| \ll 1 \quad (28.3)$$

schließlich

$$\frac{p_j(\nu)}{p_0} = 1 - \frac{(-1)^j}{2} \tan \alpha \tan \nu.$$

Die Bedingung (28.3) ist immer erfüllbar, wenn man nur $|\nu|$ klein genug wählt. Die Näherungsformel leistet um so mehr, je kleiner der vorgegebene Wert p_0 ist. Für $p_0 < 0,9$ läßt sie sich normalerweise ($\bar{\nu} \approx 0,02$) auf das gesamte Intervall \mathfrak{J} vorteilhaft anwenden.

Im allgemeinen verhilft der (nur näherungsweise richtige) Ansatz

$$p(q_j) = p_0 + (-1)^j p'(q_0) (q_j - q_0) + \frac{1}{2} p''(q_0) (q_j - q_0)^2 \quad (28.4)$$

zu einer für die Berechnung von $p_j(\nu)$ geeigneten Gleichung. Im Hinblick auf (18.12) und wegen $p(q_j) = p_j$, $p(q_0) = p_0$ nimmt (28.4) die Form

$$p_j(\nu) = p_0 + (-1)^j p'(q_0) (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu + \frac{1}{2} p''(q_0) (1 - q_0)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \nu \quad (28.5)$$

an. Aus (27.12) und (27.14) folgt

$$p'(q_0) (1 - q_0) = -p_0 \frac{\mathfrak{K}_0 + 1}{2}, \quad \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}(p_0),$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} p''(q_0) (1 - q_0)^2 &= \frac{p_0}{4} (\mathfrak{K}_0 + 1) (\mathfrak{K}_0 - 1 + p_0 \mathfrak{K}'_0), \\ \mathfrak{K}'_0 &= \mathfrak{K}'(p_0). \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

Damit geht (28.5) in

$$\frac{p_j(\nu)}{p_0} = 1 - (-1)^j \frac{\mathfrak{R}_0 + 1}{2} \tan \alpha \tan \nu$$

$$+ \frac{\mathfrak{R}_0 + 1}{8} (\mathfrak{R}_0 - 1 + p_0 \mathfrak{R}'_0) \tan^2 \alpha \tan^2 \nu \quad (28.7)$$

über. Das Glied mit $\tan^2 \nu$ wird lediglich als „Korrekturterm“ berücksichtigt.

Dem (einzigem) Wendepunkt der die Funktion $q(p)$ im kartesischen (p, q) -Diagramm darstellenden Kurve (s. Abb. 9) sind die Koordinaten \tilde{p}, \tilde{q} zugeordnet. Die Kurve ist an jeder Stelle (p, q) mit $0 < p < \tilde{p}$ von unten konkav und in allen Punkten (p, q) mit $p > \tilde{p}$ von unten konvex; d. h. es gilt

$$q''(p) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \text{für } p \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \tilde{p}$$

oder wegen

$$p''(q) = - \frac{q''(p)}{[q'(p)]^3}$$

und $q'(p) < 0$ ($p > 0$)

$$p''(q) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \text{für } p \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \tilde{p}. \quad (28.8)$$

Die logarithmische Ableitung von (24.1)

$$\frac{q'(p)}{q} = \frac{2}{\mathfrak{C} \sin 2p} - \frac{1}{p}$$

wird nochmals nach p differenziert, wodurch sich unter Beachtung von $q''(\tilde{p}) = 0$ die Bestimmungsgleichung für p

$$\left[\frac{(q' \tilde{p})}{\tilde{p}} \right]^2 = 4 \frac{\mathfrak{C} \cot 2 \tilde{p}}{\mathfrak{C} \sin 2 \tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{p}^2},$$

also

$$p \mathfrak{T} \tan \tilde{p} - \frac{\mathfrak{C} \sin 2 \tilde{p}}{2 p} + 1 = 0, \quad (28.9)$$

ergibt. Man errechnet $p \approx 0,9199$.

Aus (28.6) und (28.8) folgt sofort

$$\mathfrak{R}_0 - 1 + p_0 \mathfrak{R}'_0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \text{für } p_0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} p.$$

Die Funktion $\mathfrak{R}'(p)$ braucht nicht explizite bekannt zu sein; denn es genügt die Abschätzung des Betrags von $\mathfrak{R}_0 - 1 + p_0 \mathfrak{R}'_0$, die sich nur auf die Monotonie von (27.14) stützt. Sie wird durch $\mathfrak{R}'(p) > 0$ charakterisiert. Im Fall $p_0 < \tilde{p}$ erhält man

$$0 < 1 - \mathfrak{R}_0 - p_0 \mathfrak{R}'_0 < 1 - \mathfrak{R}_0.$$

Dann ist der Betrag des Korrekturterms in (28.7) stets kleiner als $\frac{1 - \mathfrak{R}'_0}{8} \tan^2 \alpha \tan^2 \bar{\nu}$.

Die Funktionen (27.14) und $2p - 3$ sind asymptotisch gleich;

$$\mathfrak{R}(p) \sim 2p - 3 \quad \text{für } p \rightarrow \infty.$$

Da das geometrische Bild von (27.14) an jeder Stelle ($p > 0$) von unten konvex ist (s. Abb. 10), muß also

$$\mathfrak{R}'(p) < 2 \quad (p > 0)$$

sein, so daß man unter der Voraussetzung $p_0 > \tilde{p}$

$$0 < \mathfrak{R}_0 - 1 + p_0 \mathfrak{R}'_0 < \mathfrak{R}_0 + 2p_0 - 1$$

bekommt. Folglich ist der für $p_0 > p$ positive Korrekturterm in (28.7) kleiner als $\frac{\mathfrak{R} + 1}{8} (\mathfrak{R}_0 + 2p_0 - 1) \tan^2 \alpha \tan^2 \bar{\nu}$.

Im Spezialfall $p_0 = \tilde{p}$ reduziert sich die Näherungsformel (28.7) auf

$$\frac{p_j(\nu)}{\tilde{p}} = 1 - (-1)^j \frac{\mathfrak{R}(\tilde{p}) + 1}{2} \tan \alpha \tan \nu. \quad (28.10)$$

Die Beziehung

$$\mathfrak{S} \sin 2p = \frac{2 \mathfrak{T} \tan \tilde{p}}{1 - \mathfrak{T} \tan^2 \tilde{p}}$$

liefert zusammen mit (28.9) und (16.4) für $\mathfrak{L}(\tilde{p})$ den Ausdruck

$$\mathfrak{L}(p) = \frac{\mathfrak{T} \tan^2 \tilde{p}}{\frac{1}{\tilde{p}} + \mathfrak{T} \tan \tilde{p}},$$

der in (27.14) eingesetzt wird. Daraus folgt

$$\frac{\mathfrak{R}(\tilde{p}) + 1}{2} = p \mathfrak{T} \tan p,$$

womit (28.10) in

$$\frac{p_j(\nu)}{\tilde{p}} = 1 - (-1)^j \tilde{p} \mathfrak{T} \text{an } \tilde{p} \tan \alpha \tan \nu$$

übergeht. Die numerische Gleichung lautet also

$$\frac{p_j(\nu)}{0,9199} = 1 - (-1)^j 0,6678 \tan \alpha \tan \nu .$$

Aus (18.12) ergibt sich übrigens für $q_0 = \tilde{q} \approx 0,7890$

$$\frac{q_j(\nu)}{0,7890} = 1 + (-1)^j 0,2674 \tan \alpha \tan \nu .$$

29. Zusammenfassung

Das relativ zur „starrten Erde“ ruhende kartesische Koordinatensystem \mathfrak{S}_0 mit den Basisvektoren i_0, j_0, k_0 dient als Inertialsystem. Der Vektor k_0 ist in bezug auf den Nullpunkt von \mathfrak{S}_0 vertikal aufwärts gerichtet. Die Schwere erscheint in \mathfrak{S}_0 als konstanter Vektor. Sein Betrag (die Schwereintensität) wird mit g bezeichnet. Ein zweites kartesisches Koordinatensystem \mathfrak{S} mit dem Nullpunkt R (Referenzpunkt) und den Basisvektoren i, j, k repräsentiert das Gestell. Da nur translatorische Gestellbewegungen in Betracht kommen, sind diese Vektoren als konstant anzusehen. Es wird

$$k \cdot k_0 = i \cdot i_0 = \cos \nu, \quad k \cdot i_0 = -i \cdot k_0 = \sin \nu$$

gesetzt. Der Winkel ν ($|\nu| < 0,02$) ist die sogenannte Neigung (von k gegen die Vertikale). Die \mathfrak{S}_0 -Koordinaten ξ, η, ζ von R sind Funktionen der Zeit t . Sie beschreiben die Gestellbewegung (s. 2).

Einem beliebigen Massenpunkt P des (starrten) Gehänges \mathfrak{G} entsprechen die \mathfrak{S} -Koordinaten x, y, z . Dem Schwerpunkt P_* von \mathfrak{G} sind die \mathfrak{S} -Koordinaten x_*, y_*, z_* zugeordnet. M ist die Masse, also Mg das Gewicht von \mathfrak{G} . Die drei Hauptträgheitsachsen von \mathfrak{G} in P_* bilden ein weiteres kartesisches Koordinatensystem \mathfrak{S}_* mit den Basisvektoren i_*, j_*, k_* . Die

(konstanten) \mathfrak{S}_* -Koordinaten von $P \in \mathfrak{G}$ werden mit a, b, c bezeichnet. Die Gleichung

$$\sum_{P \in \mathfrak{G}} \mu (a^2 + b^2) = M s^2$$

definiert den Trägheitsradius s von \mathfrak{G} . Darin bedeutet μ das Massenelement von \mathfrak{G} in P . Die neun Richtungskosinus $i_* \cdot i, \dots, f_* \cdot f$ hängen von den EULERSCHEN Winkeln φ, ψ, ϑ ab. Die Bedingungen

$$z_* \equiv 0 \quad \text{und} \quad \vartheta \equiv 0$$

besagen, daß die Gehägebewegung eben ist. Aus $\vartheta \equiv 0$ folgt $\psi \equiv 0$. Demnach stellt $\varphi \equiv \Theta$ den Drehwinkel von \mathfrak{G} dar. Für genügend kleine Gehägebewegungen gelten sodann die (linearisierten) Transformationsformeln

$$x = x_* + a - b \Theta, \quad y = y_* + a \Theta + b, \quad z = c$$

(s. 3–6).

Die Aufhängung von \mathfrak{G} erfolgt in den Gehängepunkten P_i ($i = 0, 1, 2$) mit den \mathfrak{S}_* -Koordinaten $a_i, 0, c_i$. In P_0 hängt \mathfrak{G} an einer dünnen Stahlsaiten, während an der Stelle P_j ($j = 1, 2$) eine Blattfeder \mathfrak{B}_j so festgeklemmt ist, daß sie nur in einen ebenen Spannungszustand versetzt wird. Es gilt

$$0 > a_1 > a_0 > a_2, \quad c_1 > c_2$$

und

$$\frac{c_j}{a_0} = \tan \alpha_j \quad \text{mit} \quad |\alpha_j| < \frac{\pi}{4}.$$

Infolge der Beschränkung auf kleine Gehägebewegungen und des dabei ausgeübten Zwangs durch die Aufhängung kommt eine Verschiebung der „Blattfederendpunkte“ P_1, P_2 parallel zur x -Achse nicht in Betracht, so daß insbesondere

$$x_* = \text{const}$$

anzunehmen ist. Die Dämpfungsspule wird durch den Punkt P_{31} repräsentiert. Der Punkt P_{32} stellt die Wandlerspule dar. Die \mathfrak{S}_* -Koordinaten von P_{3j} werden mit a_{3j}, b_{3j}, c_{3j} bezeichnet.

net. Die Anordnung von P_{31} und P_{32} ist durch

$$a_{3j} = a_3 > 0, \quad b_{31} b_{32} < 0, \quad c_{3j} = 0$$

bestimmt (s. 7, 8).

Der in P_i bzw. P_{3j} (neben der Schwerkraft) angreifenden äußeren Kraft sind die \mathcal{C} -Koordinaten X_i, Y_i, Z_i bzw. X_{3j}, Y_{3j}, Z_{3j} zugeordnet. Zudem verursachen die Einspannung der Blattfedern und die Torsion des Aufhängedrahts das Drehmoment $-\Delta f$. Bei voraussetzungsgemäßer Funktion der Aufhängung und der Dämpfungsvorrichtung gilt

$$X_0 = Y_0 \equiv 0, \quad Z_j \equiv 0, \quad X_{3j} = Z_{3j} \equiv 0$$

und unter der Annahme

$$|\ddot{\xi}| + |\ddot{\zeta}| \ll g$$

$$\left\| \begin{array}{c} X_1 \\ -X_2 \end{array} \right\| = \frac{Z_0}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \left\| \begin{array}{c} 1 + \tan \alpha_2 \tan \nu \\ 1 + \tan \alpha_1 \tan \nu \end{array} \right\|$$

mit

$$Z_0 = M g \cos \nu$$

sowie

$$Y_{3j} = -D_j (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}). \quad (D_j \text{ nichtnegativ konstant})$$

Die Größen Y_j und Δ werden als lineare Funktionen von y_* und Θ angesetzt, so daß

$$\frac{\partial}{\partial y_*} \left\| \begin{array}{c} Y_j \\ \Delta \end{array} \right\| = \text{const}, \quad \frac{\partial}{\partial \Theta} \left\| \begin{array}{c} Y_j \\ \Delta \end{array} \right\| = \text{const}.$$

Es ergeben sich die Beziehungen

$$\sum_j \frac{\partial Y_j}{\partial y_*} \tan \alpha_j = 0, \quad \sum_j \frac{\partial Y_j}{\partial \Theta} \tan \alpha_j = Z_0.$$

Die beiden (linearen) Bewegungsgleichungen erscheinen zunächst in der Form

$$M \ddot{y}_* + D (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) - \sum_j \frac{\partial Y_j}{\partial y_*} y_* - \sum_j \frac{\partial Y_j}{\partial \Theta} \Theta = -M \eta.$$

$$M s^2 \ddot{\Theta} + D a_3 (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta})$$

$$- \left(\sum_j a_j \frac{\partial Y_j}{\partial y_*} - \frac{\partial \Delta}{\partial y_*} \right) y_* + \left[\sum_j a_j \left(X_j - \frac{\partial Y_j}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial \Delta}{\partial \Theta} \right] \Theta = 0$$

mit

$$D = D_1 + D_2$$

(s. 9).

Die homogene, im undeformierten Zustand quaderförmige Blattfeder \mathfrak{B} hat die (freie) Länge λ , die Breite β und die Dicke δ . Man darf voraussetzen, daß die kleine Deformation von \mathfrak{B} eine reine Biegung ist. In einem ebenen kartesischen Koordinatensystem sind dem laufenden Punkt der neutralen Faser \mathfrak{s} von \mathfrak{B} die Koordinaten u, v zugeordnet. Die Funktion

$$v = v(u), \quad 0 \leq u \leq \lambda,$$

mit

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(\lambda) = v_\lambda, \quad v'(\lambda) = v'_\lambda$$

stellt \mathfrak{s} dar. Die Differentialgleichung für \mathfrak{s} lautet

$$v''(u) - \frac{1}{J} Q_*(u) = 0,$$

wobei J die Biegesteifigkeit von \mathfrak{B} und $Q_*(u)$ das Moment der auf den Querschnitt von \mathfrak{B} an der Stelle u einwirkenden äußeren Kraft ist. Im Punkt (λ, v_λ) greift die äußere Kraft mit den Koordinaten U, V an; U ist positiv konstant. Das durch die Einspannung von \mathfrak{B} hervorgerufene Drehmoment wird mit der Größe W berücksichtigt. Weil nur kleine Biegungen von \mathfrak{B} in Betracht kommen, genügt der Ansatz

$$Q_* = \left| \begin{array}{cc} \lambda - u & v_\lambda - v \\ U & V \end{array} \right| + W.$$

Als Gleichung von \mathfrak{s} ergibt sich sodann

$$v = \frac{k n (\cos k u - 1) + m (\sin k u - k u)}{k^3}$$

mit

$$k = \sqrt{\frac{U}{J}}, \quad m = -\frac{V}{J}, \quad n = \frac{V\lambda - Uv_\lambda + W}{J}.$$

Sie verhilft zu den Darstellungen

$$V = \frac{U}{1-q} \left(\frac{1}{\lambda} v_\lambda - \frac{q}{2} v'_\lambda \right),$$

$$W = -\frac{1}{2} \frac{Uq}{1-q} \left(v_\lambda - \frac{\lambda}{2} v'_\lambda \right) + \frac{J}{\lambda} \frac{1}{q} v'_\lambda$$

mit

$$q = \frac{\mathfrak{I} \operatorname{an} p}{p}, \quad p = \frac{\lambda}{2} k$$

(s. 10—13).

Die beiden Blattfedern $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ sollen dieselbe Länge λ haben. Die Biegesteifigkeit von \mathfrak{B}_j wird mit J_j bezeichnet. Dem gehängefesten Endpunkt der neutralen Faser \mathfrak{s}_j von \mathfrak{B}_j sind die \mathfrak{S} -Koordinaten x_j, y_j, c_j zugeordnet. Die Differenz

$$x_1 - x_2 = a_1 - a_2 = e$$

ist positiv. Die \mathfrak{S} -Koordinaten des gestellfesten Endpunkts von \mathfrak{s}_1 bzw. \mathfrak{s}_2 bilden das Tripel $x_1 - \lambda, 0, c_1$ bzw. $x_2 + \lambda, 0, c_2$. Die Differenz

$$(x_2 + \lambda) - (x_1 - \lambda) = 2\lambda - e = f$$

muß ebenfalls positiv sein. In P_0 ist \mathfrak{G} an der zylindrischen Stahlsaite \mathfrak{D} mit der Länge L , dem Durchmesser d und dem Torsionsmodul G aufgehängt. Das von \mathfrak{D} auf \mathfrak{G} ausgeübte Drehmoment wird durch $-\Delta_0 \mathfrak{k}$ mit

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{32} G \frac{d^4}{L} \Theta$$

ausgedrückt. Der Vektor $-\Delta_j \mathfrak{k}$ repräsentiert das von \mathfrak{B}_j auf \mathfrak{G} rückwirkende „Einspannmoment“. Es gilt

$$\Delta = \sum_i \Delta_i$$

(s. 14).

Die an \mathfrak{B} vorgenommenen Untersuchungen werden auf \mathfrak{B}_j übertragen. Die Darstellungen für V und W gehen dabei in

$$Y_j = -\frac{(-1)^j X_j}{1-q_j} \left\{ \frac{1}{2} y^* + \left[\frac{a_j}{\lambda} + (-1)^j \frac{q_j}{2} \right] \Theta \right\}$$

und

$$A_j = \frac{1}{2} \frac{X_j q_j}{1 - q_j} \left\{ y^* + \left[a_j + (-1)^j \frac{\lambda}{2} \right] \Theta \right\} + \frac{1}{\lambda} \frac{J_j}{q_j} \Theta$$

mit

$$q_j = \frac{\Im \operatorname{an} p_j}{p_j}, \quad p_j = \sqrt{\frac{-(1)^j X_j}{J_j}}$$

über. Unter Verwendung der Hilfsfunktion

$$F(p) = \frac{p - \Im \operatorname{an} p}{p^3}$$

ergibt sich

$$-\frac{c_2}{c_1} = \frac{J_1 F(p_2)}{J_2 F(p_1)}.$$

Es ist zweckmäßig,

$$c_1 = -c_2 = h, \quad -\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad (h, \alpha \text{ positiv konstant})$$

anzunehmen. Infolgedessen erscheint J_j als Funktion von v ;

$$J_j = J_j(v), \quad J_j(0) = J_0.$$

Man erhält

$$p_j = p_0 \sqrt{\frac{J_0}{J_j} [\cos v - (-1)^j \tan \alpha \sin v]}$$

mit

$$p_0 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{M g \cot \alpha}{2 J_0}}$$

und

$$q_0 = \frac{\Im \operatorname{an} p_0}{p_0} = \frac{f}{\lambda}.$$

Wegen $q_0 < 1$ ist $f < \lambda$. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{y}_* + \frac{D}{M} (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) + H y_* - I \Theta = -\ddot{\eta},$$

$$s^2 \ddot{\Theta} + \frac{D}{M} a_3 (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) - I y_* + K \Theta = 0.$$

Die Koeffizienten

$$H = \frac{g \cot \alpha}{\lambda (1 - q_0)} \cos \nu ,$$

$$I = - H \left[a_0 + \frac{\lambda}{2} (1 - q_0) \tan \alpha \tan \nu \right] ,$$

$$K = H \left[a_0^2 - \frac{\lambda^2}{4} g_0 (1 - q_0) \right] + \frac{1}{M} \left[\frac{1}{\lambda} \left(\frac{J_1}{q_1} + \frac{J_2}{q_2} \right) + \frac{dA_0}{d\Theta} \right]$$

sind positiv. In diesen Gleichungen wird die Forderung

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

berücksichtigt (s. 15—19).

Dem speziellen gehängefesten Punkt \bar{P}_j werden die \mathfrak{S}_* -Koordinaten $\bar{a}_j, 0, 0$ und die \mathfrak{S} -Koordinaten $x_j, y_j, 0$ zugeordnet. Dabei gilt

$$\bar{y}_j = y_* + \bar{a}_j \Theta$$

mit

$$\bar{a}_j = \frac{1}{2I} \left[H s^2 - K + (-1)^j \sqrt{(H s^2 - K)^2 + (2 I s)^2} \right] ,$$

also insbesondere

$$- \bar{a}_1 \bar{a}_2 = s^2 .$$

Der Abstand

$$- \bar{a}_1 = r$$

zwischen \bar{P}_1 und P_* hängt ebenso wie $\overline{P_2 P_*} = \bar{a}_2$ nur schwach von ν ab;

$$r = r(\nu) , \quad r(0) = r_0 .$$

Im allgemeinen darf

$$r_0 = - a_0$$

angenommen werden. Die Bewegungsgleichungen erscheinen in der Form

$$\ddot{\bar{y}}_j + \frac{D}{M} \left(1 + \frac{\bar{a}_j a_3}{s^2} \right) (\dot{y}_* + a_3 \dot{\Theta}) + \left(H - \frac{I \bar{a}_j}{s^2} \right) \bar{y}_j = - \ddot{\eta} .$$

Sie sind genau dann entkoppelt, wenn entweder der Spezialfall $D = 0$ vorliegt oder die Bedingung

$$a_3 = \bar{a}_2$$

erfüllt ist. Hiernach stellt \bar{P}_2 die Projektion von P_{3j} auf die a -Achse dar, so daß $\bar{y}_2(t)$ die Verrückungen der Dämpfungs- und Wandler spule beschreibt.

Mit

$$\ddot{\bar{y}}_2 + \frac{D}{M} \left(1 + \frac{a_3}{r} \right) \dot{\bar{y}}_2 + \left(H - \frac{I}{r} \right) \bar{y}_2 = - \ddot{\eta}$$

bietet sich also die Indikatorgleichung an. Die andere Bewegungsgleichung

$$\ddot{\bar{y}}_1 + \omega_1^2 \bar{y}_1 = - \ddot{\eta}$$

liefert den Hinweis, inwieweit die Hypothese zutrifft, wonach die bevorzugte Aufhängung zu einer gestellfesten Drehachse für \mathcal{G} verhilft, so daß sich \mathcal{G} wie eine Drehmasse bewegt und \bar{P}_1 auf jener Achse liegt, also gestellfest ist. Für die einfache stationäre Gestellbewegung

$$\xi \equiv 0, \quad \eta = \eta_0 \sin \Omega t, \quad \zeta \equiv 0 \quad (\eta_0 > 0)$$

sind so lange keine Bewegungen von \bar{P}_1 feststellbar, wie $\eta_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2$ unterhalb eines gewissen Betrags liegt. Die Eigenfrequenz $\omega_1(\nu)$ der Schwingungen von \bar{P}_1 errechnet sich nach der Formel

$$\omega_1 = \sqrt{H + \frac{I}{a_3}}.$$

Insbesondere gilt

$$\omega_1(0) = \sqrt{\frac{g \cot \alpha}{\lambda (1 - q_0)} \left[1 + \left(\frac{r_0}{s} \right)^2 \right]}.$$

Bleibt $|\bar{y}_1|$ vernachlässigbar klein, so kann man \bar{y}_2 durch $(r + a_3) \Theta$ ersetzen und

$$r + a_3 = l$$

als Indikatorlänge bezeichnen.

$$\omega(\nu) = \sqrt{H - \frac{I}{r}}$$

stellt die Eigenfrequenz der Indikatorschwingungen dar. Somit lautet die modifizierte Indikatorgleichung

$$\ddot{\Theta} + \frac{D}{M} \frac{l}{r} \dot{\Theta} + \omega^2 \Theta = - \frac{\ddot{\eta}}{l}$$

(s. 20—22).

$$Q = M r l$$

ist das Trägheitsmoment von \mathcal{G} in bezug auf eine zu \mathfrak{k} parallele (gehängefeste) Achse im Abstand r von P_* . Ebenso wie r und l hängt auch Q (nur sehr schwach) von ν ab. Im Fall $\nu = 0$ nimmt l bzw. Q den Wert l_0 bzw. Q_0 an. Für hinreichend kleine $|\nu|$ -Werte ergibt sich die Näherungsformel

$$\omega(\nu) \approx \sqrt{[\omega(0)]^2 + \frac{g \nu}{l_0}}$$

mit

$$\omega(0) = \sqrt{\frac{1}{Q_0} \left(\frac{2 J_0}{\lambda} \frac{2 p_0}{\sin 2 p_0} + \frac{d \Delta_0}{d \Theta} \right)}.$$

Der durch

$$\lim_{\nu \rightarrow \underline{\nu}} \omega(\nu) = 0$$

definierte Grenzwinkel $\underline{\nu}$ resultiert aus der Gleichung

$$\underline{\nu} = \frac{1}{M g a_0} \left(\frac{2 J_0}{\lambda} \frac{2 p_0}{\sin 2 p_0} + \frac{d \Delta_0}{d \Theta} \right).$$

Man kann den Wurzelausdruck

$$\sqrt{\frac{g}{l_0} (\nu - \underline{\nu})} \approx \omega(\nu)$$

als Kreisfrequenz eines mathematischen Pendels mit der Pendellänge l_0 und um den (positiven) Winkel $\nu - \underline{\nu}$ gegen die Vertikale geneigter Drehachse deuten. Hierauf beruht die für

l_0 gebräuchliche Bezeichnung „reduzierte Pendellänge“ (von \mathfrak{G}). Die Indikatorlänge stimmt also mit der reduzierten Pendellänge überein (s. 23—26).

Da $J_j(\nu)$ faktisch nicht stetig verändert werden kann, bedeutet die Abhängigkeit von ν möglicherweise, daß die verwendeten Blattfedern durch passende Federn zu ersetzen sind. Es empfiehlt sich, die Dicke δ_j von \mathfrak{B}_j als Funktion von ν aufzufassen und β sowie den linearen Elastizitätsmodul E von \mathfrak{B}_j als Konstanten beizubehalten. Man bekommt sodann

$$J_j = \frac{E \beta}{12} \delta_j^3$$

mit

$$\delta_j = \delta [1 + \varepsilon_j(\nu)], \quad \varepsilon_j(0) = 0.$$

Durch $\varepsilon_j(\nu)$ wird die relative Dickenänderung $\frac{\delta_j(\nu) - \delta}{\delta}$ beschrieben. Man kann nur dann für jede Neigung ν aus dem vorgegebenen Intervall \mathfrak{J} dieselben Blattfedern verwenden, wenn

$$|\varepsilon_j(\nu)| < \bar{\varepsilon}$$

zutrifft, wobei die positive Konstante $\bar{\varepsilon}$ nicht größer als die technisch begründete Toleranz von δ ist. Eine hinreichende Bedingung ergibt sich mit

$$\text{Max} \left[1 - \sqrt[3]{\frac{J_1(\bar{\nu})}{J_0}}, \sqrt[3]{\frac{J_2(\bar{\nu})}{J_0}} - 1 \right] < \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\nu} = \sup_{\nu \in \mathfrak{J}} \nu.$$

Um eine Vorstellung von der Größenordnung von $|\varepsilon_j(\nu)|$ zu bekommen, verwendet man die Näherungsformel

$$|\varepsilon_j(\bar{\nu})| \approx \varepsilon_2(\bar{\nu}) \approx \mathfrak{R}(p_0) \frac{\tan \alpha}{3} \bar{\nu}$$

mit

$$\mathfrak{R}(p_0) = \frac{2}{\frac{\mathfrak{T} \text{an } p_0}{\mathfrak{Q}(p_0)} - 1} - 1, \quad \mathfrak{Q}(p_0) = \mathfrak{C} \text{ot } p_0 - \frac{1}{p_0}$$

(s. 27).

Die Funktion $p_j(v)$ erscheint in der impliziten Form

$$\frac{\mathfrak{Tan} p_j(v)}{p_j(v)} = q_0 + (-1)^j (1 - q_0) \tan \alpha \tan v ,$$

wodurch die meisten Kontrollrechnungen erschwert werden. Mitunter kann man jedoch unbeschadet der erforderlichen Genauigkeit statt dessen numerisch bequemere Näherungsformeln benutzen (s. 28).

II. Die Theorie der elektrodynamischen Registrierung

30. Wahl der Registriermethode

Nachdem in den vorangehenden Abschnitten die Theorie des mechanischen Empfängers gegeben worden ist, gilt es nun, die Forderungen an die Eigenschaften des Seismographen weiter zu konkretisieren und die optimale Registriermethode zu wählen.

Eine getreue Aufzeichnung der von Erdbeben oder ähnlichen Erscheinungen erzeugten elastischen Wellen ist bekanntlich nur in beschränktem Rahmen möglich. Damit wenigstens die *P*- und *S*-Wellen sowie die kurzperiodischen Oberflächenwellen amplitudengetreu aufgezeichnet werden können, soll der neue Seismograph die Bodenbewegungen am Stationsort im Periodenintervall von 0,1 bis 20 s mit nahezu konstanter Vergrößerung wiedergeben.

Da die Mikroseismik auf den Seismogrammen nicht zu stark in Erscheinung treten soll, darf die Vergrößerung derartiger Seismographen in dem in Frage stehenden Bereich den Wert 1000 nicht überschreiten.

Diese schon recht hohen Forderungen können nur befriedigt werden, wenn die Registrierung mit Hilfe eines Galvanometers erfolgt. Dies folgt zwingend aus einer Betrachtung über die Neigungsempfindlichkeit von Horizontalseismographen. Eine Erweiterung der oben nur für translatorische Bodenbewegungen gegebenen Theorie auf langsame Neigungsschwingungen zeigt, daß schon die Erdzeiten bei direkter Registrierung

einen nicht mehr tragbaren Einfluß haben. Bei der galvanometrischen Registriermethode ist das dagegen nicht der Fall.

Von den beiden galvanometrischen Verfahren kommt nur das elektrodynamische in Frage. Beim elektromagnetischen bewirken die starken magnetischen Direktionskräfte unerwünschte Nichtlinearitäten und erschweren somit die Konstruktion von langperiodischen Seismographen.

Die Untersuchungen über die Aufzeichnung von stationären oder plötzlich einsetzenden Schwingungen werden zeigen, daß das elektrodynamische Prinzip gegenüber der direkten Registriermethode keine ins Gewicht fallenden Nachteile besitzt.

31. Die Bewegungsgleichungen des elektrodynamischen Seismographen

In den an dem Gehänge des mechanischen Empfängers befestigten Spulen, die in die Felder von gestellfesten Permanentmagneten tauchen, werden bei einer Bewegung des Gehänges gegenüber dem Gestell Spannungsschwankungen induziert (siehe 8). Die eine Tauchspule ist mit dem Galvanometer verbunden, wobei zwischen Galvanometer und Spule noch Widerstände zur Anpassung und Empfindlichkeitsregelung geschaltet werden können. Die andere Tauchspule wird über einen Widerstand geschlossen und dient somit allein zur Dämpfung des mechanischen Empfängers.

Da bei der folgenden Theorie die Luftreibung und die Reaktion des Galvanometers nicht mehr wie in der Theorie des mechanischen Empfängers (siehe 9) vernachlässigt werden sollen, kann die modifizierte Indikatorgleichung nicht in der Form (22.16) übernommen werden. Nach (9.15) waren die von der Dämpfung herrührenden Kräfte zu

$$Y_{3j} = D_j (\dot{y}_* + a_3 \dot{\theta})$$

angesetzt. Nach (22.11) ist l die Indikatorlänge des mechanischen Empfängers. Das von der Dämpfung ausgeübte Moment ergibt sich daher und unter Berücksichtigung der Be-

trachtungen von 22 sowie mit (9.20) zu

$$\mathfrak{M} = - D l^2 \dot{\Theta} \mathfrak{f} . \quad (31.1)$$

Mit (31.1) lautet die durch (22.16) gegebene Differentialgleichung des mechanischen Empfängers

$$\ddot{\Theta} + \omega_s^2 \Theta = - \frac{\ddot{\eta}}{l} + \frac{\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{f}}{Q} . \quad (31.2)$$

Die in (22.15) definierte Eigenfrequenz der Indikatorschwingungen wird im weiteren mit ω_s bezeichnet, also

$$\omega \equiv \omega_s .$$

Es wird angenommen, daß die Luftreibung proportional der Geschwindigkeit der Gehägebewegung ist und das Moment

$$- b_s \dot{\Theta} \mathfrak{f}$$

hervorrufft. Es sei N_j die Windungszahl der j -ten Tauchspule, λ_j die Länge einer Windung, H_j die Stärke des Magnetfeldes und \bar{l} die Entfernung der Spulenmitte von der Drehachse. Wenn wie bei HSJ-I die Richtungen der Magnetfelder, die Tauchspulenströme I_j und der Basisvektor \mathfrak{j} aufeinander senkrecht stehen, so ist nach den Gesetzen über die Kraftwirkung magnetischer Felder auf stromdurchflossene Leiter

$$- \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{f} = b_s \dot{\Theta} + G_1 I_1 + G_2 I_2 , \quad (31.3)$$

wobei

$$G_j = N_j \lambda_j H_j \bar{l} . \quad (31.4)$$

Nach den Ausführungen in 22 und 26 müßte eigentlich die hier für die Indikatorlänge benutzte Größe \bar{l} mit der reduzierten Pendellänge l übereinstimmen, da nur unter dieser Voraussetzung die Entkoppelung der Bewegungsgleichungen des mechanischen Empfängers gelingt. Den weiteren Betrachtungen wird aber, obwohl $\bar{l} \neq l$ angesetzt wird, nur die eine Differentialgleichung (22.16) zur Beschreibung der Gehägebewegung zugrunde gelegt. Wenn die Frequenz der Bodenbewegung Ω in der Nähe der durch (22.2) definierten Eigenfrequenz ω_1 liegt,

werden die Bewegungen des Gehänges nicht mehr durch (31.2) allein richtig beschrieben werden. Sind, wie bei HSJ-I, die Frequenzen der interessierenden Bodenbewegungen $\Omega \ll \omega_1$, so bleibt dies ohne Belang. Die in 47 beschriebenen Untersuchungen werden die Grenzen der Gültigkeit von (31.2) aufzeigen. Danach ist es zulässig, für die in der Seismologie zu untersuchenden Frequenzen nur (31.2) heranzuziehen. Da aus konstruktiven Gründen die Bedingung $\bar{l} = l$ nur schwer zu erfüllen war, wurde auf sie verzichtet.

Der wesentliche Unterschied in der Konstruktion eines Galvanometers gegenüber der des mechanischen Empfängers eines elektrodynamischen Seismographen besteht darin, daß die Drehachse durch den Schwerpunkt des Gehänges geht. Da, wie in 2 vorausgesetzt, nur translatorische Gestellbewegungen in Betracht kommen, gilt für das Galvanometer eine (31.2) entsprechende Gleichung. Es fehlt allerdings das Glied mit $\ddot{\eta}$.

Ist Ψ der Winkelausschlag, ω_g die Eigenfrequenz, Q_g das Trägheitsmoment und \mathfrak{M}_g das „Moment der Dämpfung“, so lautet analog (31.2) die Bewegungsgleichung des Galvanometers

$$\ddot{\Psi} + \omega_g^2 \Psi = - \frac{\mathfrak{M}_g}{Q_g}. \quad (31.5)$$

Wenn I_g der in der Galvanometerspule fließende Strom ist, der so orientiert wird, daß ein positiver Strom eine Ausschlagvergrößerung bewirkt, so gilt analog (31.3)

$$\mathfrak{M}_g = b_g \dot{\Psi} - G_g I_g, \quad (31.6)$$

wobei G_g die aus der Theorie des Galvanometers [7] bekannte dynamische Galvanometerkonstante und b_g der Koeffizient der Luftdämpfung ist.

Die elektrische Schaltung des Seismographen ist in Abb. 11 dargestellt. R_{s_j} sind die Widerstände der Tauchspulen, R_g ist der innere Galvanometerwiderstand, R_D ist der Abschlußwiderstand der Dämpfungsspule. Die Widerstände des T -Gliedes R_1, R_2, R_3 dienen zur Empfindlichkeitsregelung und zur Anpas-

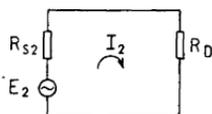
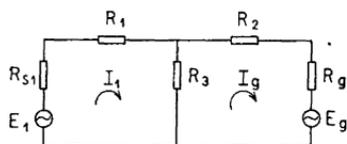


Abb. 11. Die elektrische Schaltung des Seismographen

Nach Abb. 11 ist

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= I_1(R_{s1} + R_1) + (I_1 - I_g) R_3, \\ E_2 &= I_2(R_{s2} + R_D), \\ E_g &= I_g(R_g + R_2) + (I_g - I_1) R_3. \end{aligned} \right\} \quad (31.9)$$

Aus dem System (31.9) erhält man mit (31.7) und (31.8)

$$I_1 = \frac{G_1 (R_g + R_2 + R_3) \dot{\Theta} - G_g R_3 \dot{\Psi}}{(R_{s1} + R_1) (R_g + R_2) + R_3 (R_{s1} + R_g + R_1 + R_2)}, \quad (31.10)$$

$$I_2 = \frac{G_2 \dot{\Theta}}{R_{s2} + R_D}, \quad (31.11)$$

$$I_g = \frac{G_g (R_{s1} + R_1 + R_3) \dot{\Psi} - G_1 R_3 \dot{\Theta}}{(R_{s1} + R_1) (R_g + R_2) + R_3 (R_{s1} + R_g + R_1 + R_2)}. \quad (31.12)$$

Der Anteil von I_1 , der proportional $\dot{\Theta}$ ist, und der gesamte Strom I_2 wirken als Dämpfung des mechanischen Empfängers. Es wird daher

$$\alpha_{sj}^* = \frac{G_j^2}{2 Q \omega_s (R_{sj} + R_{asj})} \quad (31.13)$$

gesetzt. Dabei sind die R_{asj} die „äußeren Spulenwiderstände“:

$$R_{as1} = R_1 + \frac{R_3 (R_g + R_2)}{R_g + R_2 + R_3}, \quad (31.14)$$

$$R_{as2} = R_D.$$

sung des Galvanometers an die Wandlerspule. Nach dem Induktionsgesetz ist die in den Tauchspulen entstehende EMK $E_j = N_j \lambda_j H_j \bar{l} \dot{\Theta} = G_j \dot{\Theta}$. (31.7)

Gemäß der LENZschen Regel wird bei einem Ausschlag des Galvanometers in dessen Spule eine Gegen-EMK erzeugt, für die analog (31.7) gilt

$$E_g = -G_g \dot{\Psi}. \quad (31.8)$$

Der Anteil von I_g , der proportional $\dot{\Psi}$ ist, dämpft die Galvanometerbewegung. Es wird daher

$$\alpha_g^* = \frac{G_g^2}{2 Q_g \omega_g (R_g + R_{ag})} \quad (31.15)$$

gesetzt. Dabei ist

$$R_{ag} = R_2 + \frac{R_3 (R_{s1} + R_1)}{R_{s1} + R_1 + R_3} \quad (31.16)$$

der äußere Galvanometerwiderstand.

Der Anteil von I_g , der proportional $\dot{\Theta}$ ist, ist alleinige Störfunktion in der Bewegungsgleichung des Galvanometers. Man definiert den Übertragungsfaktor

$$\kappa = \frac{G_1 G_g}{Q_g (R_{s1} + R_1) (R_g + R_2) + R_3 (R_{s1} + R_g + R_1 + R_2)} \cdot R_3 \quad (31.17)$$

Der Anteil von I_1 , der proportional $\dot{\Psi}$ ist, beschreibt die Rückwirkung des Galvanometers auf den mechanischen Empfänger. Der Rückwirkungsfaktor σ wird definiert durch

$$\sigma = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{Q_g}{\alpha_s \omega_s \alpha_g \omega_g Q}} \quad (31.18)$$

Dabei sind

$$\alpha_s = \alpha_{s0} + \alpha_{s1}^* + \alpha_{s2}^*, \quad (31.19)$$

$$\alpha_g = \alpha_{g0} + \alpha_g^* \quad (31.20)$$

die Betriebsdämpfungen des mechanischen Empfängers bzw. Galvanometers und

$$\alpha_{s0} = \frac{b_s}{2 \omega_s Q}, \quad (31.21)$$

$$\alpha_{g0} = \frac{b_g}{2 \omega_g Q_g} \quad (31.22)$$

die Dämpfungen bei offenen Stromkreisen. Mit (31.13) bis (31.17) sowie (31.19), (31.20) ergibt sich aus (31.18)

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_{s1}^* \alpha_g^*}{\alpha_s \alpha_g} \frac{R_3^2}{(R_{s1} + R_1 + R_3) (R_g + R_2 + R_3)} \quad (31.23)$$

Aus (31.23) folgt bei Beachtung von (31.19), (31.20)

$$0 \leq \sigma \leq 1. \quad (31.24)$$

Aus (31.2) und (31.5) erhält man mit (31.3), (31.6), (31.10) bis (31.13), (31.15) und (31.19) bis (31.22) das bekannte Differentialgleichungssystem eines elektrodynamischen Seismographen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\Theta} + 2 \alpha_s \omega_s \dot{\Theta} + \omega_s^2 \Theta &= -\frac{\ddot{\eta}}{l} + \frac{4 \alpha_s \omega_s \alpha_g \omega_g \sigma^2}{\kappa} \dot{\Psi}, \\ \ddot{\Psi} + 2 \alpha_g \omega_g \dot{\Psi} + \omega_g^2 \Psi &= \kappa \dot{\Theta}. \end{aligned} \right\} \quad (31.25)$$

32. Die Integration der Bewegungsgleichungen für stationäre Gestellbewegungen

Um einen Überblick über die Eigenschaften eines elektrodynamischen Seismographen und Hinweise für seine Abstimmung zu erhalten, wird die Wirkung einer stationären Gestellbewegung

$$\eta = \eta_0 \sin \Omega t \quad (32.1)$$

untersucht. Die Lösung des Systems (31.25) erfolgt mit Hilfe der LAPLACE-Transformation [1]. Dabei wird eine im Originalbereich definierte Funktion $X(t)$, deren Verschwinden für $t < 0$ vorausgesetzt wird, in den Bildbereich transformiert. Die Bildfunktion $x(p)$ ergibt sich aus

$$x(p) \equiv \mathfrak{L} X(t) = \int_0^{\infty} X(t) e^{-pt} dt.$$

Diese Transformation auf (32.1) angewendet, führt zu

$$\mathfrak{L} \eta(t) = \frac{\eta_0 \Omega}{p^2 + \Omega^2}. \quad (32.2)$$

Den bekannten Regeln der LAPLACE-Transformation entsprechend gehen die Differentialgleichungen des Systems (31.25) in die algebraischen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (p^2 + 2 \alpha_s \omega_s p + \omega_s^2) \vartheta(p) &= -\frac{p^2 \eta_0 \Omega}{p^2 + \Omega^2} + \frac{4 \alpha_s \omega_s \alpha_g \omega_g \sigma^2}{\kappa} p \psi(p), \\ (p^2 + 2 \alpha_g \omega_g p + \omega_g^2) \psi(p) &= \kappa p \vartheta(p) \end{aligned} \right\} \quad (32.3)$$

über. Die Gleichungen (32.3) gelten unter der Voraussetzung, daß zur Zeit $t = 0$ die durch (32.1) gegebene stationäre Schwingung einsetzt und sich der mechanische Empfänger sowie das Galvanometer in Ruhe befinden. Wie in [12] ausführlich erörtert, brauchen die nach dieser Voraussetzung nicht notwendig verschwindenden „natürlichen“ Anfangswerte beim Rechnen mit der LAPLACE-Transformation nicht berücksichtigt zu werden. Das System (32.3) wird nach $\psi(p)$ aufgelöst:

$$\psi(p) = -\frac{\kappa p^3 \eta_0 \Omega}{l(p^2 + \Omega^2)g(p)}, \quad (32.4)$$

wobei

$$g(p) = (p^2 + 2\alpha_s \omega_s p + \omega_s^2)(p^2 + 2\alpha_g \omega_g p + \omega_g^2) - 4\alpha_s \alpha_g \omega_s \omega_g \sigma^2 p^2. \quad (32.5)$$

Die Rücktransformation von (32.4) in den Originalbereich erfolgt mit Hilfe des Umkehrintegrals

$$\Psi(t) = -\frac{\kappa \eta_0 \Omega}{2\pi i l} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{p^3}{(p^2 + \Omega^2)g(p)} e^{pt} dp. \quad (32.6)$$

Zur Lösung des Integrals (32.6) verwendet man am besten den Residuensatz der Funktionstheorie. Das Integral kann man nach dem Satz von CAUCHY als eine Summe von Umlaufintegralen in der komplexen p -Ebene um alle Pole des Integranden von (32.6) darstellen. Die Summe der Umlaufintegrale um die Wurzeln von $g(p)$ ergibt dabei den sog. Einschwingvorgang, der in 38 weiter untersucht werden soll. Bei stationärer Erregung, wie z. B. gemäß (32.1), klingt dieser Vorgang mit der Zeit ab und es bleibt nur die erzwungene Schwingung Ψ_z übrig, die als Summe der Umlaufintegrale um $p = \pm i \Omega$ dargestellt wird. Nach dem Residuensatz ist

$$\Psi_z(t) = -\frac{\kappa \eta_0 \Omega^3}{2l} \left[\frac{e^{i\Omega t}}{g(i\Omega)} + \frac{e^{-i\Omega t}}{g(-i\Omega)} \right].$$

Daraus folgt

$$\Psi_z(t) = -\frac{\kappa \eta_0}{l} W(\Omega) \sin(\Omega t + \varphi), \quad (32.7)$$

wobei

$$W(\Omega) = \frac{\Omega^3}{\sqrt{[(\Omega^2 - \omega_s^2)(\Omega^2 - \omega_g^2) - 4\alpha_s\alpha_g\omega_s\omega_g\Omega^2(1 - \sigma^2)]^2 + 4\Omega^2[\alpha_g\omega_g(\Omega^2 - \omega_s^2) + \alpha_s\omega_s(\Omega^2 - \omega_g^2)]^2}}, \quad (32.8)$$

$$\tan \varphi = -\frac{(\Omega^2 - \omega_s^2)(\Omega^2 - \omega_g^2) - 4\alpha_s\alpha_g\omega_s\omega_g\Omega^2(1 - \sigma^2)}{2\Omega[\alpha_g\omega_g(\Omega^2 - \omega_s^2) + \alpha_s\omega_s(\Omega^2 - \omega_g^2)]}. \quad (32.9)$$

$W(\Omega)$ und $\varphi(\Omega)$ sind die Amplituden- bzw. Phasencharakteristik des Seismographen.

Ist L_g die Lichtzeigerlänge des Galvanometers, so ist

$$\mathfrak{B} = \frac{2L_g\kappa}{l} W(\Omega) \quad (32.10)$$

die sogenannte dynamische Vergrößerung des Seismographen, d. h. die Vergrößerung, die eine rein sinusförmige Bodenbewegung der Kreisfrequenz Ω erfährt, wenn der Einschwingvorgang abgeklungen ist.

Bei Vernachlässigung des Rückwirkungsfaktors kann man statt (32.8)

$$W_0(\Omega) = \frac{U_s U_g}{\Omega} \quad (32.11)$$

schreiben, wobei

$$U_s = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_s^2)^2 + 4\alpha_s^2\omega_s^2\Omega^2}}, \quad (32.12)$$

$$\frac{U_g}{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_g^2)^2 + 4\alpha_g^2\omega_g^2\Omega^2}}. \quad (32.13)$$

U_s und $\frac{U_g}{\Omega}$ sind der vom mechanischen Empfänger bzw. Galvanometer bewirkte Anteil der gesamten Amplitudencharakteristik.

33. Die Abstimmung des Seismographen

Die Berechnung der wahren Bodenamplituden am Stationsort wird nur dann genau erfolgen können, wenn der Seismograph die Bodenverrückungen getreu aufzeichnet. Es muß

also die dynamische Vergrößerung in einem großen Ω -Intervall von der Frequenz der Bodenbewegung unabhängig sein. Schon COULOMB und GRENET [4] haben gezeigt, daß man mit einem mäßig gedämpften langperiodischen mechanischen Empfänger und einem stark gedämpften kurzperiodischen Galvanometer diese Forderung erfüllen kann. Wählt man nämlich

$$\begin{aligned}\omega_s &\ll \omega_g, \\ 0,3 &\leq \alpha_s \leq 0,6, \\ \alpha_g &\gg 1,\end{aligned}$$

so folgt aus (32.10) unter Beachtung von (32.11), (32.13) für Bodenfrequenzen $\Omega \approx \omega_g$:

$$W_0(\Omega) = \frac{1}{2 \alpha_g \omega_g}. \quad (33.1)$$

W_0 ist also für $\Omega \approx \omega_g$ nicht mehr von Ω abhängig. Die Aufzeichnung ist amplitudengetreu. (33.1) legt es nahe, als normierte Amplitudencharakteristik

$$\bar{W}(\Omega) = 2 \alpha_g \omega_g W(\Omega) \quad (33.2)$$

zu definieren. Eingehende Untersuchungen über die Amplitudencharakteristik [15] haben gezeigt, daß $\bar{W}(\Omega)$ in einem möglichst breiten Ω -Intervall konstant ist, wenn die Dämpfungen folgendermaßen festgelegt werden:

$$\alpha_s = 0,5, \quad (33.3)$$

$$\alpha_g = \frac{1}{2} \frac{\omega_g}{\omega_s} \gg 1. \quad (33.4)$$

Aus (31.10) folgt unter Beachtung von (33.3), (33.4) für

$$\Omega_u = \frac{\omega_g}{2 \alpha_g} = \omega_s \quad (33.5)$$

und

$$\Omega_0 = 2 \alpha_g \omega_g \quad (33.6)$$

sofort in guter Näherung

$$\bar{W}_0(\Omega_0) \approx \bar{W}_0(\Omega_u) \approx \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Bei den Frequenzen Ω_0 und Ω_u ist die normierte Amplitudencharakteristik im Fall $\sigma = 0$ auf das $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ fache des Maximalwertes abgefallen. Diese Frequenzen begrenzen demnach das Ω -Intervall, in dem die Amplitudencharakteristik von der Frequenz unabhängig ist. Aus (33.5), (33.6) folgt

$$\frac{\Omega_0}{\Omega_u} = 4 \alpha_g^2 = \left(\frac{\omega_g}{\omega_s}\right)^2. \quad (33.7)$$

(33.7) ist ein Maß für die Breite des Ω -Intervalls. Dessen Mitte liegt bei

$$\sqrt{\Omega_0 \Omega_u} = \omega_g,$$

also bei der Eigenfrequenz des Galvanometers.

Nach (33.5) stimmt die langperiodische Grenze mit der Eigenfrequenz des mechanischen Empfängers überein. Damit die in 30 aufgestellten Forderungen erfüllt werden, ist die Eigenperiode des Empfängers auf

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 20 \text{ [s]}$$

abzustimmen. Als Registrierinstrument dient ein Galvanometer vom Typ H-01 des VEB-Geophysikalischer Gerätebau Brieselang mit einer Eigenperiode von etwa 1 s. Die Dämpfung dieses Galvanometers kann auch auf den nach (33.4) geforderten Wert gebracht werden. Die untere Grenze des Ω -Intervalls liegt somit bei $\Omega_u = 0,05$ s. Im Bereich von 0,05 bis 20 s ist demnach $W_0(\Omega)$ konstant, und somit ist erreicht, was in 30 gefordert worden ist.

Wie in 25 ausgeführt, kann die Eigenfrequenz des mechanischen Empfängers durch Änderung des Winkels ν reguliert werden. Die Eigenfrequenz des Galvanometers H-01 kann leider nicht geändert werden. Da aber alle Seismographen möglichst in den interessierenden Bereichen die gleiche Charakteristik haben sollen, ist bei der Abstimmung wie folgt vorzugehen. Zunächst wird T_s auf genau 20 s eingestellt. Da die

Eigenperiode des Galvanometers

$$T_g = \frac{2 \pi}{\omega_g} \quad (33.8)$$

bekannt ist ($T_g \approx 1$), wird α_g nach (33.4) berechnet.

Es wird jetzt die Amplitudencharakteristik für $\Omega < \omega_g$ betrachtet. Aus (33.2) folgt mit (32.11), (32.13) und (33.4)

$$\bar{W}_0(\Omega) = \frac{U_s}{\sqrt{1 + \frac{\omega_s^2}{\Omega^2} - 2 \frac{\omega_s^2}{\omega_g^2} + \frac{\omega_s^2 \Omega^2}{\omega_g^4}}}$$

Die Beachtung der Voraussetzungen $\frac{\omega_s}{\omega_g} \ll 1$ und $\Omega < \omega_g$ führt zu

$$\bar{W}_0(\Omega) \approx \frac{U_s}{\sqrt{1 + \frac{\omega_s^2}{\Omega^2}}}$$

Demnach ist $\bar{W}_0(\Omega)$ für $\Omega > \omega_g$ nicht von der Eigenfrequenz des Galvanometers ω_g abhängig. Da für $\Omega \approx \omega_g$ die Amplitudencharakteristik sowieso konstant ist, hängt also die Vergrößerung nur für kurze Perioden, die kleiner als Ω_u sind, von ω_g ab. Diese Frequenzen sind aber für seismologische Zwecke ohne Interesse. Wenn man also nach der hier gegebenen Vorschrift die Seismographen abstimmt, wird man identische Amplitudencharakteristiken erhalten, ohne zu strenge Forderungen an die Identität der Eigenfrequenzen der Galvanometer stellen zu müssen.

Die Amplituden- und die Phasencharakteristik ist für die gewählte Abstimmung in Abb. 12 dargestellt. Die gestrichelte Kurve gilt für $\sigma^2 = 0,1$. Die Phasencharakteristik ändert sich für diesen Wert nicht merklich. Im Bereich der kurzperiodischen Raumwellen und der Mikroseismik finden nur geringe Phasenverschiebungen statt. Man erkennt aber auch, daß für langsame Bodenbewegungen die Phasenverschiebung schon beträchtlich ist, wenn auch die Amplitudencharakteristik noch von der Frequenz unabhängig ist.

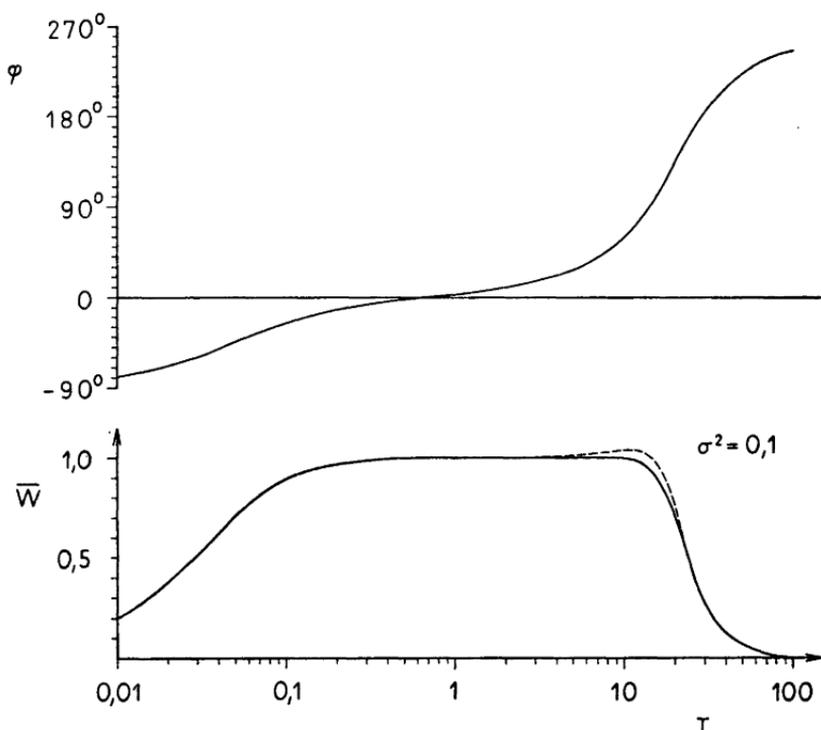


Abb. 12. Die Amplituden- und die Phasencharakteristik

34. Die Vergrößerung

Aus (32.10) erhält man mit (33.2) für die dynamische Vergrößerung

$$\mathfrak{B} = \frac{L_g \kappa}{\alpha_g \omega_g l} \bar{W}(\Omega).$$

Definiert man

$$V = \frac{L_g \kappa}{\alpha_g \omega_g l}, \quad (34.1)$$

so ist V die Vergrößerung des Seismographen in dem Ω -Intervall, in dem die Amplitudencharakteristik konstant ist. Die Vergrößerung hängt also außer von den bereits durch Abstimmung festgelegten Größen α_g und ω_g von der Lichtzeigerlänge des Galvanometers, der reduzierten Pendellänge und dem Übertragungsfaktor κ ab.

Für den Übertragungsfaktor gilt nach (31.17), wenn kein Widerstands- T -Glieder eingeschaltet ist, also für $R_1 = R_2 = 0$, $R_3 = \infty$:

$$\alpha_0 = \frac{G_1 G_g}{Q_g(R_{s1} + R_g)}. \quad (34.2)$$

Durch das Widerstands- T -Glieder wird der Übertragungsfaktor auf den n -ten Teil herabgesetzt. Ein Vergleich von (34.2) und (31.17) ergibt

$$n = \frac{(R_{s1} + R_1)(R_g + R_2) + R_3(R_{s1} + R_g + R_1 + R_2)}{(R_{s1} + R_g)R_3}. \quad (34.3)$$

Aus (34.1) geht hervor, daß durch das T -Glieder auch die Vergrößerung auf den n -ten Teil herabgesetzt wird.

Mit Hilfe von (31.16), (31.17) wird (34.2) umgeformt zu

$$V = \frac{L_g G_1 G_g}{Q_g l \alpha_g \omega_g} \frac{R_3}{(R_g + R_{ag})(R_{s1} + R_1 + R_3)}. \quad (34.4)$$

Da man bei dem verwendeten Galvanometer ohne weiteres

$$\alpha_{g0} \ll \alpha_g$$

voraussetzen kann, ist

$$\alpha_g \approx \alpha_g^*.$$

Mit (31.15) erhält man dann aus (34.4)

$$V = \frac{2 L_g G_1}{l G_g} \frac{R_3}{R_{s1} + R_1 + R_3}. \quad (34.5)$$

Zu einer anderen Formel für die Vergrößerung gelangt man, wenn man die Beziehung (31.18) in (34.1) einsetzt unter Beachtung von (33.3), (33.4):

$$V = \frac{2 \sigma L_g \omega_s}{\omega_g l} \sqrt{\frac{Q}{Q_g}}. \quad (34.6)$$

Da der Rückwirkungsfaktor beschränkt ist, wird die Vergrößerung wesentlich durch das Verhältnis der Trägheitsmomente bestimmt.

35. Der Empfindlichkeitsregler

Das in 31 beschriebene Widerstands- T -Glied (s. Abb. 11) dient einmal zur Herabsetzung der Empfindlichkeit des Seismographen, zum anderen kann aber auch die Anpassung des Galvanometers an die Tauchspule des mechanischen Empfängers und umgekehrt beeinflußt werden. Wie aus (31.13) und (31.15) zu ersehen ist, sind die Dämpfungen des mechanischen Empfängers und des Galvanometers ebenfalls von den Widerständen des T -Gliedes abhängig. Der Anteil der Dämpfung des mechanischen Empfängers, der von der Wandler-spule herrührt, ist ohne das T -Glied entsprechend (31.13)

$$\bar{\alpha}_{s1} = \frac{G_1^2}{2 Q \omega_s (R_{s1} + R_g)}. \quad (35.1)$$

Der elektrodynamische Anteil der Galvanometerdämpfung ist ohne T -Glied entsprechend (31.15)

$$\bar{\alpha}_g = \frac{G_g^2}{2 Q_g \omega_g (R_{s1} + R_g)}. \quad (35.2)$$

Derjenige äußere Galvanometerwiderstand, bei dessen Anschluß die Galvanometerdämpfung $\alpha_g = 1$ ist, ist der sog. äußere aperiodische Grenzwiderstand R_{agr} . Nach (31.15) und (31.20) ergibt sich dafür

$$R_{agr} = \frac{G_g^2}{2 Q_g \omega_g (1 - \alpha_{g0})} - R_g. \quad (35.3)$$

Der gesamte Widerstand dieses Stromkreises ist der aperiodische Grenzwiderstand

$$R_{gr} = R_{agr} + R_g. \quad (35.4)$$

Aus (31.15) wird mit (35.3) und (35.4)

$$\alpha_g^* = \frac{R_{gr}(1 - \alpha_{g0})}{R_g + R_{ag}}. \quad (35.5)$$

Die Maximaldämpfung des Galvanometers wird bei Kurzschluß erreicht ($R_{ag} = 0$). Sie beträgt nach (31.20) und (35.5)

$$\alpha_{gk} = \frac{R_{gr}}{R_g} (1 - \alpha_{g0}) + \alpha_{g0}. \quad (35.6)$$

Zwischen den Dämpfungen mit und ohne T -Glied sollen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\alpha_{s1}^* = \mu_s \bar{\alpha}_{s1},$$

$$\alpha_g^* = \mu_g \bar{\alpha}_g.$$

Mit (31.13), (31.15), (35.1), (35.2) folgt daraus

$$\mu_s = \frac{R_{s1} + R_g}{R_{s1} + R_{as1}}, \quad (35.7)$$

$$\mu_g = \frac{R_{s1} + R_g}{R_g + R_{ag}}. \quad (35.8)$$

Setzt man in (35.7) und (35.8) die Beziehungen (31.14) und (31.16) ein, so erhält man zusammen mit (34.3) ein System von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten R_1 , R_2 , R_3 . Die Auflösung dieses Systems lautet

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{n(n\mu_g - 1)R_g - (n^2\mu_s\mu_g - n^2\mu_g + n - 1)R_{s1}}{n^2\mu_s\mu_g - 1}, \\ R_2 &= \frac{n(n\mu_s - 1)R_{s1} - (n^2\mu_s\mu_g - n^2\mu_s + n - 1)R_g}{n^2\mu_s\mu_g - 1}, \\ R_3 &= \frac{n(R_{s1} + R_g)}{n^2\mu_s\mu_g - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (35.9)$$

Die Größen n , μ_s und μ_g können nicht beliebig vorgegeben werden, da man sonst nach (35.9) eventuell negative Widerstände erhält. Welche Möglichkeiten hierfür bestehen, ist in [14] ausführlich erörtert worden. Hier seien nur die Gleichungen (35.9) für den wichtigen Spezialfall $\mu_s = \mu_g = 1$ hingeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{nR_g - R_{s1}}{n + 1}, \\ R_2 &= \frac{nR_{s1} - R_g}{n + 1}, \\ R_3 &= \frac{R_{s1} + R_g}{n - \frac{1}{n}}. \end{aligned} \right\} \quad (35.10)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erkennt man sofort, daß

$$n \geq \text{Max} \left(\frac{R_{s1}}{R_g}, \frac{R_g}{R_{s1}} \right)$$

sein muß, damit alle $R_j \geq 0$ sind. Diese Bedingungen können nicht immer erfüllt werden, zumal wenn n nicht groß ist.

Da die Dämpfung des mechanischen Empfängers auch mit dem Widerstand R_D reguliert werden kann, ist es nicht notwendig, die Bedingung $\mu_s = 1$ einzuhalten. Wird $R_2 = 0$ angenommen, so ergibt sich aus (31.16), (34.3), (35.8)

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= (n - 1) R_{s1} - n (\mu_g - 1) R_g, \\ R_3 &= \frac{n R_{s1} - n (\mu_g - 1) R_g}{n \mu_g - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (35.11)$$

In diesem Fall ist, wie aus der zweiten Gleichung von (35.9) folgt,

$$\mu_{s1} = \frac{n R_{s1} + (n - 1) R_g}{n^2 [R_{s1} + (1 - \mu_g) R_g]}. \quad (35.12)$$

Wird $R_1 = 0$ gesetzt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= \frac{(n - 1) R_{s1} + n (1 - \mu_g) R_g}{n \mu_g}, \\ R_3 &= \frac{R_{s1}}{n \mu_g - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (35.13)$$

In diesem Falle folgt aus der ersten Gleichung von (35.9)

$$\mu_{s2} = \frac{n (n \mu_g - 1) (R_{s1} + R_g) + R_{s1}}{n^2 \mu_g}.$$

36. Die Parameter des Galvanometers

Einige Parameter des Galvanometers werden meist schon von der Herstellerfirma bestimmt. Es sind dies die Eigenperiode T_g , die offene Dämpfung α_{g0} , der aperiodische Grenzwiderstand R_{gr} und die Stromkonstante C_i . Letztere ist definiert durch den Strom, der einen Lichtzeigerausschlag von 1 mm auf einer 1 m entfernten Skala hervorruft. Mit (31.5),

(31.6) ist nach dieser Definition, wenn man die Verdoppelung des Ausschlages durch die Reflexion am Galvanometerspiegel beachtet,

$$C_i = \frac{\omega_g^2 Q_g}{2 G_g} 10^{-10} \text{ [A/mm/m]}. \quad (36.1)$$

Nach (35.3) und (35.4) gilt für den Grenzwiderstand

$$R_{gr} = \frac{G_g^2}{2 Q_g \omega_g (1 - \alpha_{g0})} 10^7 \text{ [\Omega]}. \quad (36.2)$$

Aus (36.1) und (36.2) ergibt sich bei Beachtung von (33.8)

$$G_g = \frac{2 T_g C_i R_{gr} (1 - \alpha_{g0})}{\pi} 10^3 \text{ [Vs]}, \quad (36.3)$$

$$Q_g = \frac{T_g^2 C_i^2 R_{gr} (1 - \alpha_{g0})}{\pi^3} 10^{13} \text{ [g cm}^2\text{]}. \quad (36.4)$$

Die Formeln (36.1) bis (36.4) gelten mit den angegebenen Zahlenfaktoren, wenn die Einheiten in den eckigen Klammern benutzt werden. Mit (36.3) und (36.4) kann man aus den meist bekannten Parametern des Galvanometers die für die Theorie der elektrodynamischen Seismographen wichtigeren Größen G_g und Q_g berechnen.

Um einen Anhaltspunkt über die Parameter eines Galvanometers H-01 zu erhalten, werden hier diejenigen des Instrumentes Nr. 59/463 mitgeteilt:

$$T_g = 1,19 \text{ [s]},$$

$$\alpha_{g0} = 0,013,$$

$$R_g = 1009 \text{ [\Omega]},$$

$$R_{gr} = 11,3 \text{ [k}\Omega\text{]},$$

$$C_i = 2,42 \cdot 10^{-9} \text{ [A/mm/m]}.$$

Daraus errechnet sich

$$G_g = 2,05 \cdot 10^{-3} \text{ [Vs]},$$

$$Q_g = 0,035 \text{ [g cm}^2\text{]}.$$

37. Die Neigungsempfindlichkeit

In der Theorie des mechanischen Empfängers wurde vorausgesetzt, daß das Gestell nur translatorische Bewegungen ausführt. Ein Horizontalseismograph ist aber bekanntlich im Gegensatz zum Vertikalseismographen auch für bestimmte Drehbewegungen, und zwar für Drehungen um die i_0 -Achse empfindlich. Die exakte Ableitung der Bewegungsgleichung des mechanischen Empfängers für diese sog. Neigungsschwingungen soll hier nicht gegeben werden. Dies ist für mechanische Empfänger mit einem Freiheitsgrad aus der allgemeinen Bewegungsgleichung [17] möglich, wobei vorausgesetzt wird, daß die Drehung so langsam ist, daß die Drehgeschwindigkeiten und -beschleunigungen vernachlässigbar sind.

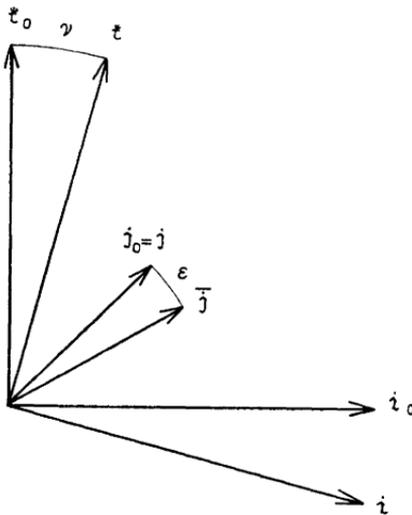


Abb. 13. Zur Definition der Drehung ϵ

Die folgende vereinfachte Betrachtung führt zu dem gleichen Ergebnis. Die Drehung des Gestells um die i_0 -Achse mit dem Drehwinkel ϵ führt j in \bar{j} über (s. Abb. 13). Die Komponente des Schwerevektors in \bar{j} -Richtung ist dann

$$g \sin \epsilon .$$

Wenn keine translatorischen Bewegungen stattfinden, wirkt jetzt auf den Empfänger die Horizontalbeschleunigung

$$\eta = g \varepsilon . \quad (37.1)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß ε sehr klein ist. Bei dieser oberflächlichen Betrachtung sind natürlich ebenfalls Drehgeschwindigkeiten und -beschleunigungen vernachlässigt, obwohl ε eine Funktion von t ist. In der Bewegungsgleichung des mechanischen Empfängers (31.2) ist jetzt die Beziehung (37.1) einzusetzen.

Zunächst wird die Neigungsempfindlichkeit der direkt registrierenden Seismographen betrachtet. Als Indikatorvergrößerung dieser Instrumente wird das Verhältnis des Indikatorausschlages zur Bodenverrückung bezeichnet, wenn diese so schnell erfolgt, daß in der Indikatorgleichung (22.16) auf der linken Seite nur das Glied mit $\ddot{\Theta}$ beachtet zu werden braucht. Zweimalige Integration ergibt

$$\Theta = - \frac{\eta}{l} .$$

Erfolgt die Registrierung mit einem Zeiger der Länge L_z , so ist die Indikatorvergrößerung

$$V_D = \frac{L_z}{l} .$$

Führt das Gestell langsame Neigungsschwingungen aus, so daß in der Indikatorgleichung auf der linken Seite nur das Glied $\omega_s^2 \Theta$ zu beachten ist, lautet diese

$$\omega_s^2 \Theta = - \frac{g \varepsilon}{l} . \quad (37.3)$$

Wenn wieder L_z die Indikatorlänge ist und das Verhältnis des Indikatorausschlages zum Neigungswinkel ε als Neigungsvergrößerung V_N definiert wird, so folgt aus (37.2) und (37.3)

$$V_N = \frac{g}{\omega_s^2} V_D . \quad (37.4)$$

Nach (37.4) besitzt ein Horizontalseismograph mit großer Eigenperiode eine hohe Neigungsvergrößerung. Wenn $T_s = 20$ s

und $V_D = 1000$ ist, so erhält man $V_N = 482$ [mm/Winkelsekunde]. Ein derartiges Instrument würde schon die Erdzeiten, die eine Doppelamplitude von etwa $0,03''$ besitzen, mit etwa 15 mm Ausschlag registrieren. Die an seismischen Stationen auf der Erdoberfläche beobachteten Neigungseffekte sind aber meist größer als die Erdzeiten. Die direkte Registrieremethode ist also bei langperiodischen Seismographen ungeeignet.

Bei der galvanometrischen Registrierung liegen die Verhältnisse wesentlich günstiger. Die Formeln für stationäre Neigungsschwingungen

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \Omega t$$

gehen aus denen für translatorische hervor, wenn man in 32 die Substitution

$$\eta_0 = \frac{g}{\Omega^2} \varepsilon_0$$

ausführt. Insbesondere erhält man für die Neigungsvergrößerung bei der Frequenz Ω im eingeschwungenen Zustand entsprechend (32.10)

$$\mathfrak{R}_N = \frac{2 L_g \kappa g}{l \Omega^2} W(\Omega).$$

Unter Beachtung von (33.2), (34.1) folgt daraus

$$\mathfrak{R}_N = \frac{Vg}{\Omega^2} \bar{W}(\Omega). \quad (37.5)$$

Es wird als normierte Neigungsvergrößerung

$$n = \frac{\omega_s^2}{\Omega^2} \bar{W}(\Omega).$$

definiert. $n(\Omega)$ ist in Abb. 14 graphisch dargestellt, wobei die für HSJ-I gewählte Abstimmung zugrunde gelegt wurde. Die normierte Neigungsvergrößerung hat einen anderen Verlauf als die normierte Amplitudencharakteristik. Sie hat ein ausgeprägtes Maximum bei

$$\Omega_{\max} \approx 0,89 \omega_s.$$

Für diese Frequenz ist

$$\mathfrak{R}_N(\Omega_{\max}) \approx 0,73 \frac{Vg}{\omega_s^2}. \quad (37.6)$$

Ein elektrodynamischer Verrückungsmesser ist also am empfindlichsten für Neigungsschwingungen, deren Periode ungefähr gleich der Eigenperiode des mechanischen Empfängers ist. Die maximale Neigungsempfindlichkeit von HSJ-I liegt bei etwa 22 s und beträgt ungefähr $\frac{3}{4}$ des entsprechenden Maximalwertes bei Direktregistrierung, wie ein Vergleich von (37.4) und (37.6) ergibt.

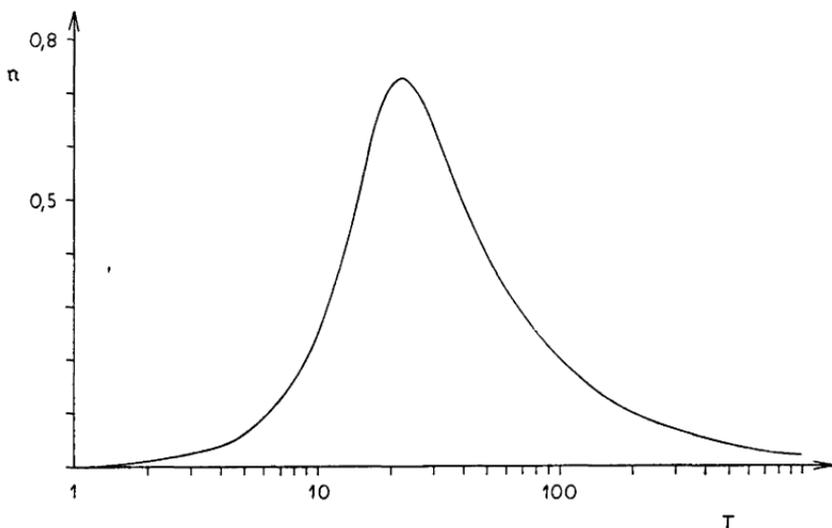


Abb. 14. Die normierte Neigungsvergrößerung

Für sehr langsame Neigungsschwingungen ergibt sich aus (37.5) unter Beachtung von (33.4)

$$\mathfrak{R}_N \approx \frac{V g \Omega}{\omega_s^3}. \quad (37.7)$$

Ein Vergleich von (37.4) und (37.7) zeigt, daß die Vergrößerung sehr langsamer Neigungsschwingungen beim elektrodynamischen Seismographen um $\frac{\Omega}{\omega_s}$ kleiner ist als bei einem direkt registrierenden Seismographen. Für HSJ-I ist bei 12stündiger Periode $\mathfrak{R}_N \approx 0,223$ [mm/Winkelsekunde]. Die Erdbebenzeiten und andere langperiodische Neigungseffekte treten daher kaum in Erscheinung.

Dieses wesentlich günstigere Verhalten der elektrodynamischen Verrückungsmesser gegenüber Neigungseffekten ist der entscheidende Grund dafür, daß dem elektrodynamischen Prinzip der Vorzug gegeben worden ist. Es wird damit überhaupt erst möglich, langperiodische Seismographen mit hoher Vergrößerung zu bauen.

38. Der Einschwingvorgang

In 32 wurde nur der Lösungsanteil des Differentialgleichungssystems betrachtet, der den erzwungenen Vorgang darstellt. Eine seismische Welle ist aber nur in sehr grober Näherung durch eine stationäre Sinusschwingung darstellbar. Ganz besonders interessiert sogar das Verhalten des Seismographen beim Eintreffen einer Welle. Bei den Betrachtungen dieses Abschnitts wird der Rückwirkungsfaktor vernachlässigt. Diese Voraussetzung kann man vornehmen, weil man theoretisch einen Seismographen mit nichtverschwindendem Rückwirkungsfaktor durch einen mit verschwindendem ersetzen kann, indem man die Eigenfrequenzen und Dämpfungen etwas ändert [4], [12]. Anstelle von (31.25) wird in diesem Abschnitt den Betrachtungen das System

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\Theta} + 2 \alpha_s \omega_s \dot{\Theta} + \omega_s^2 \Theta &= -\frac{\ddot{\eta}}{l}, \\ \ddot{\Psi} + 2 \alpha_g \omega_g \dot{\Psi} + \omega_g^2 \Psi &= \kappa \dot{\Theta} \end{aligned} \right\} \quad (38.1)$$

zugrunde gelegt.

Wenn sich der mechanische Empfänger und das Galvanometer zur Zeit des Einsatzes einer Welle in Ruhe befinden, lauten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \Theta(0) &= 0, & \dot{\Theta}(0) &= -\frac{1}{l} \dot{\eta}(0), \\ \Psi(0) &= 0, & \dot{\Psi}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung resultiert dabei aus der Forderung, daß die Bewegung des Gehängeschwerpunktes im \mathfrak{E}_0 -System stetig erfolgen soll.

Wenn $\dot{\eta}(0) \neq 0$ ist, kann man hieraus sofort entnehmen, daß die Anfangsgeschwindigkeiten von Gehänge- und Bodenbewegung entgegengesetzt gerichtet sind. Dadurch ist auch die Richtung des ersten Galvanometerauschlages festgelegt.

Für $\dot{\eta}(0) = 0$ gilt das gleiche. Stellt man $\eta(t)$ und $\Theta(t)$ als Potenzreihen dar:

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \sum c_j t^j, \\ \Theta(t) &= \sum d_j t^j,\end{aligned}$$

so muß bei den gegebenen Anfangsbedingungen

$$c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = 0$$

sein. Mit Hilfe der ersten Differentialgleichung des Systems (38.1) gelangt man zu der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}d_{j+2}(j+2)(j+1) \\ + 2 \alpha_s \omega_s d_{j+1}(j+1) + \omega_s^2 d_j = -\frac{c_{j+2}}{l}(j+2)(j+1).\end{aligned}$$

Wenn c_k der erste nicht verschwindende Koeffizient der Reihenentwicklung von $\eta(t)$ ist, so ist

$$\begin{aligned}d_0 = d_1 = \dots d_{k-1} = 0, \\ d_k = -\frac{c_k}{l}.\end{aligned}$$

Für die zweite Differentialgleichung kann man eine analoge Betrachtung durchführen und kommt zu dem Ergebnis, daß unabhängig von der Form der Bodenbewegung die Richtung des ersten Einsatzes auf dem Seismogramm durch die Richtung des ersten Einsatzes der Bodenbewegung eindeutig festgelegt ist.

Zur genaueren Diskussion des Einschwingvorganges soll der Einsatz einer stationären Sinusschwingung

$$\eta = \eta_0 \sin \Omega t$$

näher untersucht werden. Da man sich alle möglichen Bodenbewegungen nach dem Theorem von FOURIER aus derartigen harmonischen Schwingungen zusammengesetzt vorstellen kann,

wird das Ergebnis dieser speziellen Untersuchung schon genügend Hinweise für den allgemeinen Teil liefern. Die Lösung dieses Falles findet man mit Hilfe des Integrals (32.6). Es müssen jetzt auch die Umlaufintegrale um die Nullstellen von $g(p)$ berechnet werden. Bei Vernachlässigung der Rückwirkung sind diese Nullstellen leicht zu finden. Für den Einschwingvorgang ergibt sich bei Beachtung von (33.3), (33.4)

$$\Psi_E(t) = \frac{\kappa \eta_0}{l} \left[\frac{U_s e^{-\alpha_s \omega_s t}}{\Omega \beta_s \left(\frac{\omega_g^2}{\omega_s^2} - 1 \right)} \sin(\beta_s \omega_s t + \zeta_s + \bar{q}_s) + \frac{U_g e^{-\alpha_g \omega_g t}}{\Omega \beta_g \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_g^2} \right)} \text{Sin}(\beta_g \omega_g t - \zeta_g + \bar{q}_g) \right], \quad (38.2)$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_s &= \sqrt{1 - \alpha_s^2}, \\ \beta_g &= \sqrt{\alpha_g^2 - 1}, \\ \cos \bar{q}_s &= \alpha_s, \\ \text{Cos} \bar{q}_g &= \alpha_g, \\ \sin \zeta_s &= 2 \alpha_s \beta_s U_s, \\ \cos \zeta_s &= \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\Omega^2} - 2 \alpha_s^2 \right) U_s, \\ \text{Sin} \zeta_g &= 2 \alpha_g \beta_g U_g, \\ \text{Cos} \zeta_g &= \left(2 \alpha_g^2 - 1 + \frac{\omega_g^2}{\Omega^2} \right) U_g. \end{aligned}$$

Die Galvanometerbewegung setzt sich aus dem erzwungenen Vorgang Ψ_z und dem Einschwingvorgang Ψ_E zusammen:

$$\Psi(t) = \Psi_z(t) + \Psi_E(t).$$

$\Psi_z(t)$ ist durch (32.7) gegeben. Der Einschwingvorgang besteht nach (38.2) aus einem vom mechanischen Empfänger und einem vom Galvanometer herrührenden Anteil. Sein zeitlicher Verlauf wird durch deren Eigenperioden und Dämpfungen be-

stimmt, die negativen e -Potenzen bewirken ein Abklingen dieses Vorgangs.

In Abb. 15 ist die Lösung des Differentialgleichungssystems für HSJ-I dargestellt. Es wurde also

$$\frac{\omega_s}{\omega_g} = 20$$

gesetzt. Ferner wurde zur Vereinfachung

$$\eta_0 = -\frac{l}{\kappa W}$$

angenommen. Die Lösungskurven sind für fünf Fälle berechnet. Einmal für eine Frequenz $\Omega_3 = 3\sqrt{\omega_s \omega_g}$, die etwa in der Mitte des frequenzunabhängigen Bereichs liegt, dann an dessen Rändern, wo die Vergrößerung um etwa 10% abgesunken ist ($\Omega_2 = 0,3\sqrt{\omega_s \omega_g}$, $\Omega_4 = 50\sqrt{\omega_s \omega_g}$), und schließlich noch an den Stellen, wo die Vergrößerung nur $1/10$ des Maximalwertes beträgt ($\Omega_1 = 0,1\sqrt{\omega_s \omega_g}$, $\Omega_5 = 1000\sqrt{\omega_s \omega_g}$). Die gestrichelten Kurven stellen den Einschwingvorgang dar, die strichpunktierten den erzwungenen. Die stark ausgezogene Kurve ist die Summe beider.

Da die Bewegung des mechanischen Empfängers zum Zeitpunkt $t = 0$ stetig vom Nullpunkt aus beginnt, muß zu diesem Zeitpunkt die Amplitude des Einschwingvorganges der des erzwungenen entgegengesetzt gleich sein. Die Amplitude des erzwungenen Vorganges zur Zeit $t = 0$ wird wesentlich durch die Phasenverschiebung $\varphi(\Omega)$ bestimmt. Diese Funktion ist ebenfalls in Abb. 15 dargestellt. Wenn die Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung klein ist, so ist auch die Amplitude des Einschwingvorganges zur Zeit $t = 0$ klein, das ist bei Ω_3 und Ω_4 der Fall. Ist die Periode der Erregerschwingung kürzer als die Eigenperiode des Galvanometers und des mechanischen Empfängers, so tritt zwar ein großer Einschwingvorgang auf, dieser klingt aber nur langsam ab, so daß er als scheinbare Nullpunktsverlagerung die Kurvenform wenig beeinflußt (s. Ω_5). Die Doppelamplitude einer Schwingung wird daher durch den Einschwingvorgang nur wenig verändert.

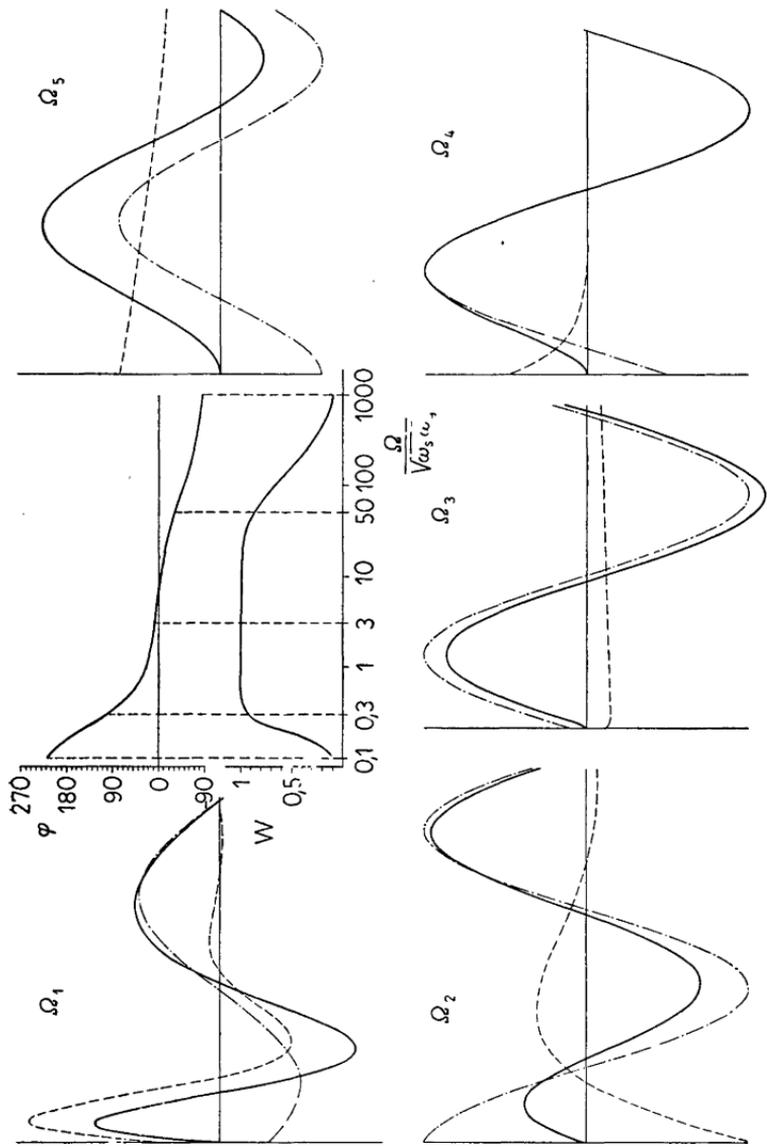


Abb. 15. Der Einschwingvorgang bei sinusförmiger Erregung

Wenn die Bodenbewegung dagegen langperiodisch ist, wird durch die Phasenverschiebung ein großer Einschwingvorgang bedingt, obwohl die Amplitudencharakteristik noch günstige Verhältnisse vortäuscht (s. Ω_2). Die Aufzeichnung wird schon in beachtlichem Maße verfälscht. Besonders groß wird der Einschwingvorgang, wenn die Phasenverschiebung größer als 180° ist. Die zur Zeit $t = 0$ negative Amplitude des erzwungenen Vorganges wird dem Betrag nach größer, und daher muß die Amplitude des Einschwingvorganges für $t > 0$ zunächst noch wachsen, damit gemäß den obigen Betrachtungen der erste Ausschlag des Galvanometers in der geforderten Richtung liegt.

In Abb. 16 ist neben der Amplitudencharakteristik die Vergrößerung des ersten und zweiten Extremums des Galvanometerauschlages dargestellt. Man erkennt, daß die Vergrößerung des ersten Maximums lange nicht in einem so großen Bereich konstant ist wie die dynamische Vergrößerung. Bildet man das Mittel des ersten und zweiten Extremums, so stimmt diese Kurve in einem weiten Bereich mit der Amplitudencharakteristik überein. Es ist also empfehlenswert, bei der Auswertung von ersten Einsätzen die Doppelamplituden heranzuziehen.

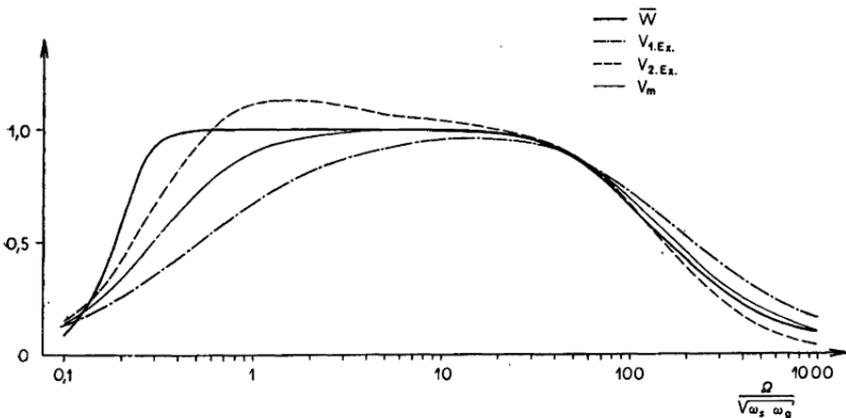


Abb. 16. Die Vergrößerung des ersten und zweiten Extremums bei sinusförmiger Erregung

III. Die Konstruktion und Eichung von HSJ-I

39. Die Berechnung der Bauelemente des mechanischen Empfängers

Die Theorie des mechanischen Empfängers und der galvanometrischen Registrierung haben eine Reihe von Beziehungen geliefert, die nunmehr bei der Berechnung der wichtigsten Teile des mechanischen Empfängers verwendet werden müssen.

Nach den in 33 durchgeführten Untersuchungen muß die Eigenperiode des mechanischen Empfängers 20 s betragen. Für kleine Neigungen der Drehachse gegen die Vertikale gilt nach (26.3)

$$T_s = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g(v - \underline{v})}}. \quad (39.1)$$

Die Stabilität eines Horizontalseismographen wird durch die Neigung $v - \underline{v}$ bestimmt. Die bisher bekannt gewordenen brauchbaren Konstruktionen, bei denen viel Wert auf eine einwandfrei definierte Drehachse gelegt worden ist (s. z. B. [11]), haben ihre Stabilitätsgrenze bei etwa $v - \underline{v} = 2'$. Wenn beim mechanischen Empfänger von HSJ-I diese Grenze bei etwa 60 s liegen soll, so muß die reduzierte Pendellänge nach (39.1)

$$l \approx 50 \text{ cm}$$

TABELLE 2

T_s	$v - \underline{v}$
60	1,9'
50	2,7'
30	7,5'
20	17'
10	68'

betragen. Die Tabelle 2 gibt den Zusammenhang zwischen Neigung und Eigenperiode nach (39.1) für diese reduzierte Pendellänge wieder. Danach kann man also die Eigenperiode zwischen 10 und 60 s regulieren, ohne das Gestell zu stark neigen zu müssen (s. 2).

Nach (34.6) wird die Vergrößerung des Seismographen durch das Trägheitsmoment des mechanischen Empfängers bestimmt:

$$Q = \frac{Q_g \omega_g^2 l^2 V^2}{4 \sigma^2 \omega_s^2 L_g^2} . \quad (39.2)$$

Das Trägheitsmoment des Galvanometers ist nach 36 mit ca. $0,04 \text{ g cm}^2$ anzusetzen. Die Lichtzeigerlänge L_g beträgt 1 m. Wenn die in 30 geforderte 1000fache Vergrößerung bei einem Rückwirkungsfaktor von $\sigma^2 < 0,1$ erreicht werden soll, so muß nach (39.2)

$$Q > 4 \cdot 10^3 l^2 [\text{g cm}^2] \quad (39.3)$$

sein. Für $\sigma^2 < 0,1$ ist nach Abb. 12 die Amplitudencharakteristik nur wenig verändert. Wenn das Gehänge im wesentlichen aus einer Masse besteht, deren Schwerpunkt in der Entfernung l von der Drehachse liegt und deren Ausdehnung klein gegen l ist, muß diese nach (39.3) etwa 4 kg betragen.

Die in 43 beschriebene Prüfung eines Gehänges der zweiten Konstruktion ergab

$$M g = 5 [\text{kp}] ,$$

$$M g r_0 = 225 [\text{kp cm}] .$$

Daraus folgt

$$r_0 = - a_0 = 45 [\text{cm}] .$$

Nach (17.7) wird der Abstand h der oberen und unteren Federeinspannstelle von der zur Drehachse orthogonalen Ebene durch den Schwerpunkt gleich groß gewählt. Aus (7.4), (17.8) folgt

$$\tan \alpha = \frac{h}{r_0} . \quad (39.4)$$

Für den Abstand der gestellfesten Einklemmstellen f (s. Abb. 6) muß nach (18.9), (18.10) gelten

$$\frac{f}{\lambda} = q_0 = \frac{\Im \text{an } p_0}{p_0} , \quad (39.5)$$

dabei ist nach (17.10)

$$p_0 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{M g \cot \alpha}{2 J_0}} \quad (39.6)$$

und die Biegesteifigkeit nach (11.5)

$$J_0 = E \frac{\beta \delta^3}{12} .$$

Der Elastizitätsmodul wird nach [6] mit $2,1 \cdot 10^6$ kp/cm² angesetzt. Die Größe h wurde zu 15 cm gewählt und somit ist $\cot \alpha = 3$. Für eine Federbreite von $\beta = 0,5$ cm sind die Biegesteifigkeit und die Wurzel in (39.5) aus Tabelle 3 zu entnehmen.

TABELLE 3

δ mm	J_0 kp/cm ²	$\sqrt{\frac{M g \cot \alpha}{2 J_0}}$ cm ⁻¹
0,035	0,00375	44,76
0,06	0,0189	19,92
0,08	0,04475	12,95
0,1	0,0875	9,26

Mit (39.5) erhält man für verschiedene in mm gegebene Größen λ und δ Werte für p_0 , die in Tabelle 4 zusammengestellt sind.

TABELLE 4

$\lambda \backslash \delta$	1	2	3	5
0,035	2,238	4,476	6,714	11,19
0,06	0,996	1,992	2,988	4,98
0,08	0,648	1,295	1,944	3,24
0,1	0,463	0,926	1,389	2,31

Aus (39.5) und (39.6) ergibt sich für den Abstand der gestellfesten Einklemmstellen

$$f = 2 \sqrt{\frac{2 J_0}{M g \cot \alpha}} \mathfrak{Z} \operatorname{an} p_0 .$$

In Tabelle 5 findet man einige entsprechende Werte für f . Bei großem p_0 ist $\mathfrak{Z} \operatorname{an} p_0 \approx 1$, und dann ist der Abstand f nicht

mehr von der Federlänge abhängig. Da sich ein Abstand $f \approx 1$ mm recht gut einhalten läßt, wird $\delta = 0,06$ mm gewählt.

TABELLE 5

$\lambda \backslash \delta$	1	2	3	5
0,035	0,44	0,45	0,45	0,45
0,06	0,76	0,97	1,00	1,00
0,08	0,88	1,33	1,48	1,54
1	0,93	1,57	1,90	2,12

Für $\lambda > 2$ mm ist der Abstand f schon nicht mehr von λ abhängig. Es wird die Federlänge auf $\lambda = 3$ mm festgesetzt. Versuche wurden auch mit 2 und 5 mm durchgeführt (s. 47).

Nach 27 wird die von der Theorie geforderte Abhängigkeit der Biegesteifigkeit von ν durch Änderung der Federdicke erreicht. Da für die hier gewählten Federabmessungen $p_0 \approx 3$, ergibt sich aus (27.14) für $\mathfrak{R}(p_0) \approx 3$. Damit ist gemäß (27.17) $\varepsilon_2(0,02) \approx 6 \cdot 10^{-3}$. Die notwendige Änderung der Federdicke liegt also für $\nu < 0,02$ unter 1% und braucht somit nicht beachtet zu werden.

Die Direktionskraft der Aufhängung wird durch den Grenzwinkel ausgedrückt. Nach (26.2) ist bei Beachtung von (14.3), (39.4), (39.6)

$$\underline{\nu} = - \frac{1}{h \varepsilon \sin 2 p_0} \sqrt{\frac{2 J_0}{M g \cot \alpha} - \frac{\pi G d^4}{32 M g r_0 L}}.$$

Der Aufhänge draht ist eine Klaviersaite vom Durchmesser $d = 0,03$ cm, seine Länge beträgt $L = 23,14$ cm. Nach [6] wird für den Torsionsmodul $G = 8 \cdot 10^5$ kp/cm² angesetzt. Der vom Aufhänge draht herrührende Anteil von $\underline{\nu}$ ist somit $1,22 \cdot 10^{-5}$, im Winkelmaß 0,042'. Für den von den Blattfedern herrührenden Anteil erhält man $1,66 \cdot 10^{-5}$ bzw. 0,057'. Insgesamt ist

$$\underline{\nu} = 0,1'.$$

Damit ist $\underline{\nu}$ im Vergleich zu den in Tabelle 2 für $\nu - \underline{\nu}$ gefor-

derden Werten vernachlässigbar. Es wird sich daher auch die Formel (26.2) bei HSJ-I kaum experimentell überprüfen lassen.

Es bleibt noch nachzuweisen, daß bei den gewählten Abmessungen der Blattfedern die zulässigen Belastungen nicht überschritten werden. Der Draht hat einen Querschnitt von $\frac{\pi}{4} d^2$, also von $0,07 \text{ mm}^2$. Er muß ein Gewicht von 5 kp tragen. Damit ist die Belastung des Drahtes 70 kp/mm^2 . Die Blattfedern haben einen Querschnitt von $0,3 \text{ mm}^2$. Die an ihnen wirkenden Zugkräfte betragen für $\nu = 0$ nach (9.10)

$$X_0 = \frac{M g \cot \alpha}{2} = 7,5 \text{ [kp]} .$$

Damit ist die Belastung 25 kp/mm^2 . Für gute Federstähle liegen nach [6] die Zugfestigkeiten weit über 100 kp/mm^2 . Diese Grenze wird also keinesfalls überschritten.

Die Stahlsaite nimmt die in Richtung der Drehachse weisende Komponente der am Gehänge wirkenden Führungskraft Z_0 auf:

$$Z_0 = M g \cos \nu .$$

Nach [6] liegt die Grundfrequenz von Querschwingungen einer gespannten Saite bei

$$f_q = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Z_0}{\rho_D F_D}} , \quad (39.7)$$

wobei ρ_D die Dichte des Stahldrahtes und F_D sein Querschnitt ist. Ist m_D die Masse des Drahtes, so wird aus (39.7) für kleine ν :

$$f_q = \sqrt{\frac{M g}{4 m_D L}} .$$

Die Masse eines Stahldrahtes der Dicke $d = 0,03 \text{ cm}$ und der Länge $L = 23,14 \text{ cm}$ betrug $0,1405 \text{ g}$, und somit ist $f_q = 623 \text{ Hz}$. Mit Hilfe dieser Resonanz kann man leicht die Spannung der Saite auf den geforderten Betrag einstellen (s. 41).

40. Die Konstruktion des mechanischen Empfängers

Eine vereinfachte Seitenansicht des mechanischen Empfängers zeigt Abb. 17. Dies ist die dritte Ausführung der Konstruktion, die sich aber von der zweiten, wovon eine Fotografie in Abb. 18 zu sehen ist, nicht wesentlich unterscheidet.

Der gesamte Empfänger ist auf einer Grundplatte (1) aus Aluminiumguß montiert. Die Ösen für die Fußschrauben sind an die Grundplatte angegossen. Die drei Fußschrauben (2) bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Der Abstand der beiden Fußschrauben in der Nähe der Aufhängung beträgt 474 mm. Von dieser Verbindungslinie ist die dritte Fußschraube 835 mm entfernt. Da die Fußschrauben eine Ganghöhe von 0,5 mm besitzen, wird der Empfänger bei einer Umdrehung um

$$\Delta\nu = 0,0005988 = 2,06'$$

geneigt. Aus (26.3) ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{dT_s}{d\nu} = -\frac{g T_s^3}{8 \pi^2 l}$$

Für $l = 50$ cm ist dann

$$\frac{dT_s}{d\nu} = -0,2485 T_s^3.$$

Bei einer Eigenperiode von 20 s ändert sich mit einer Umdrehung die Eigenperiode um 1,19 s.

Die Grundplatte trägt den Bock (3), an dem sich die gestellfesten Einklemmstellen für die Blattfedern (4) und (5) sowie die Einspannvorrichtung (6) für den Torsionsdraht (7) befinden. Die Einspannvorrichtung ist so ausgeführt, daß durch Drehung an der oberen Rändelmutter der Draht gespannt werden kann, ohne gleichzeitig eine Torsion erleiden zu müssen. Mit der unteren Rändelmutter wird die Vorrichtung arretiert. Beim Transport des Gerätes können die Blattfedern durch je eine Metallschiene gegen Bruch gesichert werden. Das Gehänge besteht bei der dritten Ausführung aus einem dreieckigen Aluminiumgußrahmen (8). Dieser Rahmen, der bei den

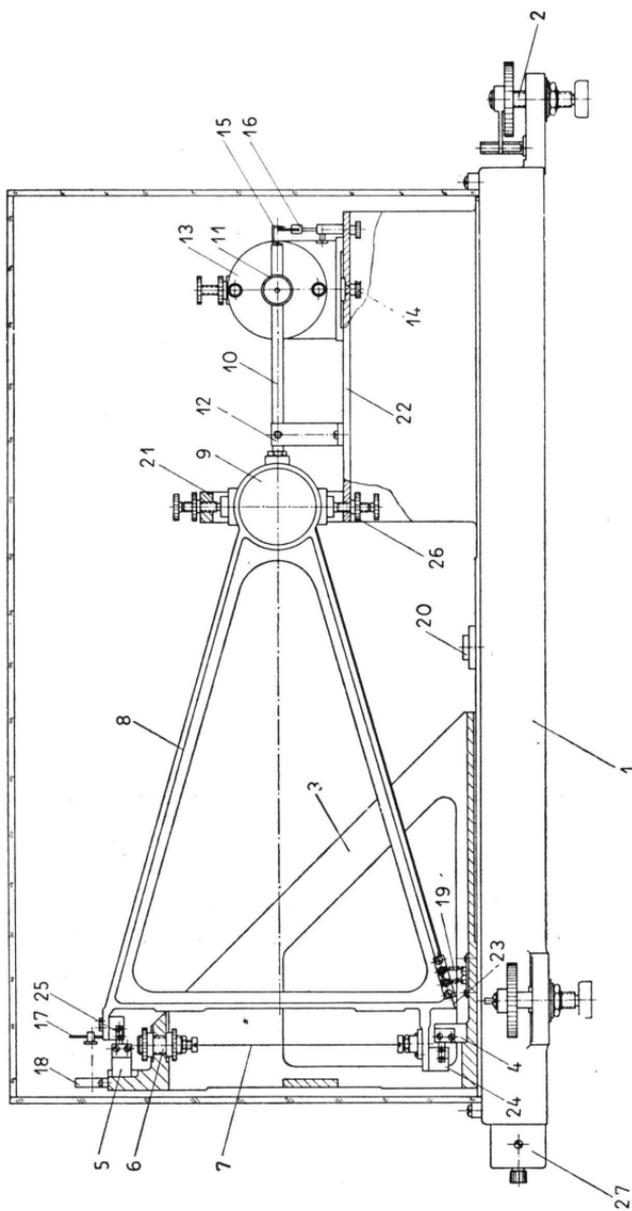


Abb. 17. Seitenansicht des mechanischen Empfängers (schematisch)

früheren Ausführungen aus mehreren Teilen gefertigt worden ist, trägt die zylindrische Masse (9) aus Messing und den Stab (10), an dem die Tauchspulen (11) befestigt sind. Die Masse kann durch vier Schrauben mit Klemmbacken beim Transport arretiert werden. Der Abstand der Mitte des Zylinders von der Drehachse beträgt 50 cm.

In der Nähe der Masse befindet sich die Ausschlagbegrenzung (12). Sie wird so eingestellt, daß die Spulen ein Spiel von ± 3 mm haben. Bei der Eichung kann die Stellung der Anschläge so verändert werden, daß dem Gehänge definierte Auslenkungen gewünschter Größe erteilt werden können. In 70 cm Entfernung von der Drehachse sind die Tauchspulen (11) angebracht. Die beiden Stangen, die die Spulen tragen, sind aus eisenfreiem Messing gefertigt.

Die Ringspaltmagnete (13) sind in zwei zur Spulenbewegung orthogonalen Richtungen mittels Schlittenführungen verstell-

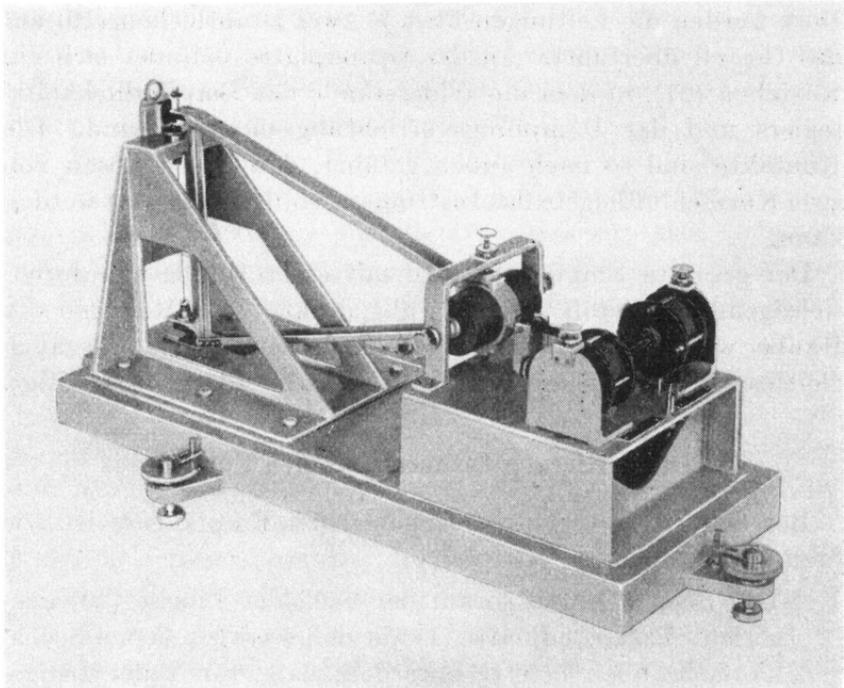


Abb. 18. Der mechanische Empfänger von HSJ-I

bar. Dadurch können die Magnete leicht so justiert werden, daß die Spulen in den Ringspalten nicht reiben. Die Magnet-systeme können auch in der Bewegungsrichtung der Spulen verschoben werden. In ihrer endgültigen Stellung werden sie durch je zwei Schrauben (14) fixiert.

Am Ende des Gehänges befindet sich ein Zeiger (15), der vor einer Skala (16) spielt. Diese Skala ist verstellbar.

Am Gehänge ist ein Spiegel (17) und am Bock eine Linse (18) mit einer Brennweite von 130 cm angebracht. Diese Einrichtung ist zur Erleichterung der Eicharbeiten geschaffen worden. Da die Galvanometerlinse eine Brennweite von 100 cm hat, kann man das Galvanometer vor den Empfänger stellen und die Bewegungen der Spiegel des Gehänges und des Galvano-meters auf einem Film registrieren.

Die von den Tauchspulen kommenden Leitungen sind am Gehänge bis in die Nähe der unteren Blattfedern geführt. Dort werden die Leitungen über je zwei Drahtlocken (19) auf das Gestell überführt. An der Grundplatte befindet sich ein Kästchen (27), in dem die Widerstände des Empfindlichkeits-reglers und der Dämpfungsvorrichtung montiert sind. Die Kontakte sind so nach außen geführt, daß durch Lösen von zwei Kurzschlußbügeln das Instrument völlig entdämpft werden kann.

Der gesamte Empfänger wird mit einer Haube aus durch-sichtigem Kunststoff (Piacryl) abgedeckt. Zum Reinigen der Haube wird das Poliermittel Piablank empfohlen, das auch gleichzeitig eventuelle elektrostatische Aufladungen beseitigt.

41. Die Justierung des mechanischen Empfängers

Bei der Justierung des mechanischen Empfängers ist wie folgt vorzugehen:

1. Der Bock (3) muß so auf der nach der Libelle (20) aus-gerichteten Grundplatte (1) mit den 6 vorgesehenen Sechs-kantschrauben befestigt werden, daß er mit der Längs-achse der Grundplatte fluchtet, damit nach Montage des

- Gehänges (8) die Brücke (21), die Ausschlagbegrenzung (12) und die Magnetsysteme (13) symmetrisch aufgesetzt werden können.
2. Der Zeiger (15) des Gehänges soll in der Ruhelage mit dem Nullpunkte der Skala (16) übereinstimmen.
 3. Die zulässigen Fluchtabweichungen der beiden gestellfesten Federklemmstellen (4) und (5) und der Bohrung für die Spannvorrichtung des Torsionsdrahtes (6) sind in den Konstruktionszeichnungen festgelegt und genau nachzuprüfen.
 4. Der Spulenträger (10) muß in der Symmetrieachse des Gehänges liegen.
 5. Einsetzen des Gehänges.
 - 5.1. Die zylindrische Masse (9) wird zu beiden Seiten von je einer 25 mm hohen Unterlage, die beide auf den Tisch (22) vorübergehend aufgelegt werden, gestützt.
 - 5.2. Das Gehänge muß in der Nähe der Drehachse bei (23) auf eine weitere Unterlage aufgelegt werden. Deren Höhe muß so gewählt werden, daß die Symmetrieachse des Gehänges parallel zur Grundplatte verläuft.
 - 5.3. Die verstellbaren Federklemmbacken am Gehänge (24) und (25) werden bei einer freien Federlänge von 5 mm so befestigt, daß sie mit der Vorderkante des Gehänges abschließen. Bei der gewünschten freien Federlänge von 3 mm werden sie so eingestellt, daß die obere (25) 2 mm vor- und die untere (24) 2 mm zurücksteht.
 - 5.4. Die freie Federlänge wird mit zwei Unterlagen eingestellt, die nach dem Festklemmen der Blattfedern wieder entfernt werden.
 - 5.5. Nunmehr wird der Torsionsdraht (7) leicht gespannt und die Unterlage bei (23) entfernt.
 - 5.6. Die Arretierschraube (26) wird so weit angezogen, daß sich die Unterlagen an der Masse entfernen lassen.
 - 5.7. Hierauf wird der Torsionsdraht so gespannt, daß seine Querschwingungen bei 623 Hz eine Resonanzstelle besitzen. Gleichzeitig mit dem Spannen wird die Masse durch

Herunterdrehen der Arretierschraube (26) freigegeben. Diese beiden Arbeitsgänge sind unbedingt gleichzeitig durchzuführen, weil sonst eine Verspannung der Blattfedern eintreten kann.

6. Blattfederwechsel.
- 6.1. Masse (9) arretieren.
- 6.2. Torsionsdraht entspannen.
- 6.3. Gehänge bei (23) unterstützen.
- 6.4. Blattfederklemmstellen (4) und (5) lösen.
- 6.5. Masse (9) durch 25 mm hohe Unterlagen unterstützen und Arretierung der Masse lösen.
- 6.6. Blattfedern wechseln.
- 6.7. Weiterverfahren wie bei 5.4. bis 5.7.
7. Nach fertiger Justierung ist die Eigenperiode des mechanischen Empfängers bei verschiedenen Gleichgewichtslagen zu bestimmen. Die erhaltene Kurve muß symmetrisch zur geforderten Gleichgewichtslage sein (s. 44), anderenfalls ist die Justierung zu wiederholen.

42. Der Spezialfall $\nu = 90^\circ$

Zu der im nächsten Abschnitt beschriebenen Eichung des mechanischen Empfängers wird die reduzierte Pendellänge bei horizontalgestellter Drehachse bestimmt. Dazu muß das Gehänge ausgebaut und die Einspannung der unteren Blattfeder \mathfrak{B}_2 entfernt werden. Dafür wird eine neue Klemmvorrichtung, die der für die obere Blattfeder ähnelt, angeschraubt. An den beiden Blattfedern kann dann das Gehänge so aufgehängt werden, daß die Drehachse in einer horizontalen Ebene liegt und der Schwerpunkt des Gehänges sich unter der Drehachse befindet.

Die Theorie für eine solche Aufhängung kann leicht aus den Betrachtungen des Kapitels I abgeleitet werden. Es ist nur $\nu = 90^\circ$ zu setzen. Aus (9.8) folgt mit den erlaubten Vernachlässigungen des Abschnitts 9 für die i - und t -Komponente der

Kräfte an den gehängefesten Einklemmstellen der Blattfedern

$$\begin{aligned} X_1 &= M g \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}, \\ X_2 &= - M g \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}, \\ Z_0 &= 0. \end{aligned} \quad (42.1)$$

Da die Bedingung (17.8) zu beachten ist, folgt aus den ersten beiden Gleichungen von (42.1):

$$X_1 = X_2 = - \frac{M g}{2}. \quad (42.2)$$

Beide Blattfedern sind also gleich belastet. Nach dem oben Gesagten ist ferner anstelle der in Tabelle 1 des Abschnitts 15 aufgeführten Zuordnungen

$$\begin{aligned} v_\lambda &= y_1 = y_2, \\ v'_\lambda &= \frac{y_* - y_1}{x_* - x_1} \end{aligned}$$

zu setzen. Ferner folgt aus (15.1)

$$\begin{aligned} y_1 &= y_* + a_1 \Theta, \\ \frac{y_* - y_1}{x_* - x_1} &= \Theta. \end{aligned}$$

Da die Biegesteifigkeit der beiden Blattfedern jetzt gleich sein soll, wird aus (15.3)

$$k_j^* = \sqrt{\frac{M g}{2 J}}. \quad (42.3)$$

Nach (17.1) und (17.2) gilt dann

$$p^* = \frac{\lambda}{2} k^*, \quad (42.4)$$

$$q^* = \frac{\mathfrak{T} \text{an } p^*}{p^*}. \quad (42.5)$$

Für die j -Komponente der Kräfte und die Momente an den gehängefesten Einklemmstellen der Blattfedern ergibt sich aus

(15.6) und (15.7)

$$Y_1 = Y_2 = \frac{X_1}{1 - q^*} \left[\frac{1}{\lambda} y + \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{q^*}{2} \right) \Theta \right], \quad (42.6)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{2} \frac{X_1 q^*}{1 - q^*} \left[y_* + \left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right) \Theta \right] + \frac{1}{\lambda} \frac{J}{q^*} \Theta. \quad (42.7)$$

Für die Koeffizienten H , K , I in den Bewegungsgleichungen gilt jetzt nach (18.1) und (42.6)

$$-\frac{M}{2} H = \frac{X_1}{\lambda (1 - q^*)}, \quad (42.8)$$

nach (19.1) und (42.6)

$$M I = \frac{2 X_1}{1 - q^*} \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{q^*}{2} \right), \quad (42.9)$$

nach (19.6), (14.6), (42.6) und (42.7)

$$\begin{aligned} M K &= 2 X_1 \left[a_1 - \frac{a_1}{1 - q^*} \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{q^*}{2} \right) \right] + \frac{X_1 q^*}{1 - q^*} \left(a_1 - \frac{\lambda}{2} \right) \\ &+ \frac{2 J}{\lambda q^*} = M H \left(a_1^2 - a_1 \lambda + \frac{q^* \lambda^2}{4} \right) + \frac{2 J}{\lambda q^*}. \end{aligned} \quad (42.10)$$

Da der Aufhängedraht fehlt, ist $\Delta_0 = 0$ zu setzen. Damit sind alle Größen, die im System (19.9) vorkommen, für diese zu Prüfzwecken dienende Aufhängung erklärt.

Die Entkoppelung der Systeme braucht nur für den ungedämpften Fall ($D = 0$) durchgeführt zu werden. Es ist auch nur notwendig, die autonome Gehäμβewegung ($\ddot{\eta} \equiv 0$) zu untersuchen. Es treffen also die Voraussetzungen von 20 zu und man kann die Entkoppelung wie dort durchführen. Für die autonome Bewegung ist dann nach (20.18) die Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{H s^2 + K}{2 s^2} \left[1 - \sqrt{1 - 4 s^2 \frac{H K - I^2}{(H s^2 + K)^2}} \right]. \quad (42.11)$$

(42.11) läßt sich umformen in

$$\frac{T^2}{4 \pi^2} = \frac{1}{2} \frac{H s^2 + K}{H K - I^2} \left[1 + \sqrt{1 - 4 s^2 \frac{H K - I^2}{(H s^2 + K)^2}} \right]. \quad (42.12)$$

Dabei ist T die Periode der Eigenbewegung. Aus (42.9), (42.10) folgt bei Beachtung von (42.2), (42.8)

$$H K - I^2 = H^2 \left[a_1^2 - a_1 \lambda + \frac{q^* \lambda^2}{4} + \frac{2 J (1 - q^*)}{q^* M g} - \left(a_1 - \frac{q^* \lambda}{2} \right)^2 \right]$$

und mit (42.5)

$$H K - I^2 = H g \left(-a_1 + \frac{\lambda}{2} \frac{\mathfrak{C} \text{ot } 2 p^*}{p^*} \right). \quad (42.13)$$

(42.10) liefert mit (42.2), (42.3), (42.4), (42.8)

$$K + H s^2 = H \left(a_1^2 + s^2 - a_1 \lambda + \frac{q^* \lambda^2}{4} + \frac{(1 - q^*) \lambda^2}{p^{*2} q^* 4} \right). \quad (42.14)$$

Setzt man (42.13) und (42.14) in (42.12) ein, so erhält man für die Eigenperiode bei $\nu = 90^\circ$ unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung λ^2 :

$$\begin{aligned} \frac{T_{90}^2}{4 \pi^2} &= \frac{1}{2} \frac{a_1^2 + s^2 - a_1 \lambda}{\left(-a_1 + \frac{\lambda}{2} \frac{\mathfrak{C} \text{ot } 2 p^*}{p^*} \right) g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 s^2 a_1 (1 - q^*) \lambda}{(a_1^2 + s^2)^2}} \right) \\ &= -\frac{a_1^2 + s^2}{g a_1} \left(1 - \frac{a_1^3 \lambda}{(a_1^2 + s^2)^2} + \frac{\lambda \mathfrak{C} \text{ot } 2 p^*}{2 a_1 p^*} - \frac{s^2 a_1 \lambda \mathfrak{T} \text{an } p^*}{(a_1^2 + s^2)^2 p^*} \right). \end{aligned} \quad (42.15)$$

Vergleicht man (42.15) mit der bekannten Formel für die Eigenperiode eines physischen Pendels

$$\frac{T^2}{4 \pi^2} = \frac{l}{g},$$

so ergibt sich für die reduzierte Pendellänge

$$l = -\frac{a_1^2 + s^2}{a_1} \left(1 - \frac{a_1^3 \lambda}{(a_1^2 + s^2)^2} + \frac{\lambda \mathfrak{C} \text{ot } 2 p^*}{2 a_1 p^*} - \frac{s^2 a_1 \lambda \mathfrak{T} \text{an } p^*}{(a_1^2 + s^2)^2 p^*} \right). \quad (42.16)$$

Dieser Wert für die reduzierte Pendellänge ist mit dem zu vergleichen, der sich für ein eingebautes Gehäuse ergibt. Nach (20.15) ist

$$r_0 = -\frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Daraus folgt mit (14.1), (14.2) und (18.10)

$$r_0 = -a_1 + \lambda \left(1 - \frac{q_0}{2}\right). \quad (42.17)$$

Nach (23.7) ist die reduzierte Pendellänge für das eingebaute Gehänge

$$l_0 = \frac{r_0^2 + s^2}{r_0}. \quad (42.18)$$

Aus (42.17), (42.18), (18.9) erhält man bei Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung λ^2 :

$$-\frac{a_1^2 + s^2}{a_1} = l_0 - \frac{r_0^2 - s^2}{r_0^2} \lambda \left(1 - \frac{\Im \text{an } p_0}{2 p_0}\right). \quad (42.19)$$

Bei Beachtung von (42.17) und (42.19) ergibt sich aus (42.16) unter Vernachlässigung von Größen der Ordnung λ^2 :

$$l = l_0 + \frac{s^4}{r_0^2 (r_0^2 + s^2)} \lambda - \frac{r_0^2 + s^2}{2 r_0^2} \lambda \frac{\Im \text{ot } 2 p^*}{p^*} + \frac{s^2}{r_0^2 + s^2} \lambda \frac{\Im \text{an } p^*}{p^*} + \frac{r_0^2 - s^2}{2 r_0^2} \lambda \frac{\Im \text{an } p_0}{p_0}. \quad (42.20)$$

Nach (39.6), (42.3) und (42.4) besteht die Beziehung

$$p_0 = p^* \sqrt{\cot x}.$$

Der Abstand des Drehpunktes bei dieser Aufhängung vom Schwerpunkt ist nach (20.6) durch

$$r = \frac{1}{2 I} \left[K - H s^2 + \sqrt{(K - H s^2)^2 + (2 I s^2)^2} \right] \quad (42.21)$$

gegeben. (42.21) wird umgeformt in

$$r = \frac{1}{2 I} \left[K - H s^2 + (K + H s^2) \sqrt{1 - \frac{4 s^2 (H K - I^2)}{(H s^2 + K)^2}} \right].$$

Daraus folgt mit (42.2), (42.8), (42.13), (42.14) bei Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung λ^2 :

$$\begin{aligned}
 r &= -\frac{1}{2\left(a_1 - \frac{q^*}{2}\lambda\right)} \left[a_1^2 - s^2 - a_1\lambda \right. \\
 &\quad \left. + (a_1^2 + s^2 - a_1\lambda) \sqrt{1 + \frac{4s^2 a_1 (1 - q^*)\lambda}{(a_1^2 + s^2)^2}} \right] \\
 &= -a_1 + \frac{a_1^2 \lambda}{a_1^2 + s^2} - \frac{(a_1^2 - s^2)}{2(a_1^2 + s^2)} q^* \lambda.
 \end{aligned} \tag{42.22}$$

Der Abstand der Drehachse von der gestellfesten Einspannung ist

$$\bar{f} = \lambda - a_1 - r.$$

Mit (42.22) wird daraus

$$\bar{f} = \frac{s^2}{a_1^2 + s^2} \lambda - \frac{(a_1^2 - s^2)}{2(a_1^2 + s^2)} q^* \lambda. \tag{42.23}$$

43. Die Bestimmung der Parameter des Gehänges

Zur Berechnung der Vergrößerung des Seismographen ist die genaue Kenntnis der reduzierten Pendellänge notwendig. Die anderen Parameter, das Trägheitsmoment, das Moment $M g r_0$ und der Trägheitsradius werden zwar bei der Berechnung der Aufhängung gebraucht, sie müssen aber nicht so genau bekannt sein wie die reduzierte Pendellänge.

Die reduzierte Pendellänge kann durch Horizontalstellen der Drehachse oder durch Änderung der Eigenperiode bestimmt werden.

Bei der ersten Methode erfolgt die Aufhängung wie in 42 beschrieben. Aus den Eigenschwingungen dieser Anordnung kann man die reduzierte Pendellänge berechnen:

$$T_{90^\circ} = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{l}}{g}}. \tag{43.1}$$

Da die Periode $T_{90^\circ} \approx 1,4$ s beträgt, ist nicht mit einer großen Abhängigkeit vom Ausschlag zu rechnen wie bei der zweiten weiter unten zu besprechenden Methode. Die reduzierte Pendellänge wird bei sorgfältiger Ausführung der Versuche sehr genau bestimmt werden können. Dies kann leicht geschehen, wenn man etwa 100 Schwingungen fotografisch registriert und mit den Sekundenmarken einer genauen Uhr — bei den Versuchen wurde die Quarzuhr des Instituts benutzt — vergleicht.

Die zweite Methode zur Bestimmung der reduzierten Pendellänge besteht darin, daß die Eigenperiode des mechanischen Empfängers bei verschiedenen Neigungen der Drehachse gegenüber der Vertikalen gemessen wird. Nach (26.3) ist

$$T_s = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g(\nu - \underline{\nu})}}.$$

Da die Lage der Vertikalen nur schwer mit der notwendigen Genauigkeit festzustellen ist und auch nicht ohne weiteres experimentell bestimmt werden kann, müssen mindestens zwei Messungen mit verschiedenen Neigungswinkeln ν_i durchgeführt werden. Wie in 40 beschrieben, stellt man die verschiedenen Neigungen durch Drehen an der in der Nähe der Magnete befindlichen Fußschraube des Gestells ein. Die Differenz der Neigungen kann an der geeichten Fußschraube abgelesen werden. Nach (26.3) ist

$$\frac{l}{g} \omega_{s_i}^2 - (\nu_i - \underline{\nu}) = 0. \quad (43.2)$$

Die bekannte Differenz zweier Neigungen ist

$$\Delta \nu_i = \nu_i - \nu_1,$$

wobei ν_1 die unbekannte Neigung in der Ausgangsstellung ist. Aus (43.2) folgt somit

$$\frac{l}{g} \omega_{s_i}^2 - (\nu_1 - \underline{\nu}) = \Delta \nu_i. \quad (43.3)$$

Bei m Versuchen ist (43.3) ein System von m Gleichungen mit den Unbekannten l und $v_1 - v_2$, die nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden werden können. Dabei ist nur die Lösung für die reduzierte Pendellänge interessant. Nach [10] erhält man

$$l = g \frac{\sum \omega_{s_i}^2 \sum \Delta v_i - m \sum \omega_{s_i}^2 \Delta v_i}{(\sum \omega_{s_i}^2)^2 - m \sum \omega_{s_i}^4}.$$

Bei den Versuchen ist der mechanische Empfänger zunächst auf eine Eigenperiode von etwa 8 s eingestellt worden. Es wurden dann 10 Einstellungen gemessen, wobei sich die Eigenperiode bis über 20 s erhöhte. Es ist nicht ratsam, bei größeren Eigenperioden noch Messungen durchzuführen, da die Eigenperiode dann sehr vom Ausschlag abhängt. Der Fehler in der Bestimmung der reduzierten Pendellänge wird bei dieser Methode unter 1% liegen, wenn man die Eigenperioden durch Registrierung der Gehägebewegung mit dem Spiegelsystem bestimmt (s. 44). Diese Methode hat den Vorteil, daß die reduzierte Pendellänge nach der endgültigen Justierung des mechanischen Empfängers festgestellt wird.

Nach in 42 durchgeführten Betrachtungen werden beide Methoden nicht die gleiche reduzierte Pendellänge liefern. Nach (42.20) wird bei der ersten Methode ein Fehler Δl begangen:

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{s^4}{r_0^2 (r_0^2 + s^2)} - \frac{r_0^2 + s^2}{2 r_0} \frac{\zeta \cot 2 p^*}{p^*} + \frac{s^2}{r_0^2 + s^2} \frac{\zeta \tan p^*}{p^*} + \frac{r_0^2 - s^2}{2 r_0^2} \frac{\zeta \tan p_0}{p_0}.$$

Für $\left(\frac{r_0}{s}\right)^2 = 7,2$ wird daraus

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = 0,017 - 0,570 \frac{\zeta \cot 2 p^*}{p^*} + 0,122 \frac{\zeta \tan p^*}{p^*} + 0,431 \frac{\zeta \tan p_0}{p_0}.$$

In Tabelle 6 sind die für Blattfedern der Breite $\beta = 0,5$ cm und der Dicke $\delta = 0,06$ cm berechneten Werte zusammengestellt. Danach liegt der Unterschied in der Bestimmung der reduzierten Pendellänge unter 1/00.

TABELLE 6

λ cm	p^*	p_0	Δl cm
0,2	1,15	1,992	-0,039
0,3	1,73	2,988	-0,031
0,5	2,88	4,98	-0,026

Das Trägheitsmoment des Gehänges wird am besten mit Hilfe von (23.6) durch Anbringen von Zusatzmassen an das Gehänge bestimmt. Es ist die reduzierte Pendellänge durch

$$l = \frac{Q}{M r_0} \quad (43.4)$$

gegeben. Wird die Zusatzmasse m_z im Abstand r_z von der Drehachse angebracht, so erhöht sich das Trägheitsmoment um Q' . Der neue Schwerpunkt des Gehänges befindet sich im Abstand r'_0 von der Drehachse, wobei

$$(M + m_z) r'_0 = M r_0 + m_z r_z. \quad (43.5)$$

Die neue reduzierte Pendellänge ist dann

$$l' = \frac{Q + Q'}{M r_0 + m_z r_z}. \quad (43.6)$$

Aus (43.4) und (43.6) erhält man

$$Q = \frac{Q' - m_z r_z l}{l' - l} l \quad (43.7)$$

und

$$M r_0 = \frac{Q' - m_z r_z l}{l' - l}. \quad (43.8)$$

Wenn die Ausdehnung der Zusatzmasse klein gegen r_z ist, kann man

$$Q' \approx m r_z^2$$

setzen. Dann wird aus (43.7)

$$Q \approx m r_z l \frac{r_z - l}{l' - l}.$$

Aus dieser Formel ist zu ersehen, daß die Zusatzmasse nicht in der Nähe des Schwingungsmittelpunktes angebracht werden darf. Dann wäre $r_z \approx l'$ und die Bestimmung des Trägheitsmoments wäre mit einem großen Fehler behaftet.

Da sich beim Auflegen einer Zusatzmasse die Gesamtmasse und der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ändern, müßten bei der zweiten Methode anders bemessene Blattfedern eingesetzt werden. Nur so können die in der Theorie des mechanischen Empfängers aufgestellten Bedingungsgleichungen erfüllt werden.

Die zweite Methode zur Bestimmung der reduzierten Pendellänge ist also nicht zu empfehlen. Es wurde daher die Bestimmung des Trägheitsmomentes mit der ersten Methode durchgeführt. Ohne Zusatzmasse ergab sich für ein Gehänge der zweiten Ausführung

$$l = 50,59 \text{ cm .}$$

Es wurde eine Messingscheibe von 9 mm Dicke und 75,5 mm Außendurchmesser auf das Gehänge aufgesteckt und mit einem kleinen Ring festgehalten. Der Abstand dieser Zusatzmasse von der Drehachse betrug $r_{z1} = 73,67 \text{ cm}$, das zusätzliche Trägheitsmoment $Q'_1 = 1,833 \cdot 10^6 \text{ gcm}^2$, die Masse $m_{z1} = 342,9 \text{ g}$. Danach wurde eine zweite Messingscheibe gleicher Abmessung aufgesteckt. Für die gesamte Zusatzmasse ist dann $r_{z2} = 73,22 \text{ cm}$, $Q'_2 = 3,622 \cdot 10^6 \text{ gcm}^2$, $m_{z2} = 675 \text{ g}$. Bei diesen Belastungen ergab sich

$$l_1 = 52,85 \text{ cm ,}$$

$$l_2 = 54,53 \text{ cm .}$$

Nach (43.8) erhält man als Mittel für beide Versuche

$$M r_0 = 2,22 \cdot 10^4 \text{ gcm}$$

und nach (43.7)

$$Q = 1,12 \cdot 10^7 \text{ gcm}^2 .$$

Da $M = 5 \text{ kg}$ ist

$$r_0 = 44,4 \text{ cm .}$$

Mit (23.7) ergibt sich dann

$$\left(\frac{r_0}{s}\right)^2 = 7,17.$$

Bei diesen Versuchen wird vorausgesetzt, daß sich die Lage der Drehachse nur wenig ändert, wenn die Zusatzgewichte aufgelegt werden. Nach (43.5) ist die Änderung der Lage des Schwerpunktes

$$dr_0 = r'_0 - r_0 = \frac{m_z (r_z - r_0)}{M + m_z}.$$

Für die beiden hier durchgeführten Versuche ist $dr_0 = 1,88$ bzw. $3,44$ cm. Wenn man $a_1 \approx -r_0$ und $\mathfrak{T}an p^* \approx 1$ setzt, erhält man aus (43.23) bei Beachtung von (42.5)

$$\overline{df} = \frac{2 s^2 r_0}{(r_0^2 + s^2)^2} \lambda \left(1 - \frac{1}{p^*}\right) dr_0 + \frac{r_0^2 - s^2}{4 (r_0^2 + s^2)} \frac{\lambda m_z}{p^* M}.$$

Für $\lambda = 0,3$ cm, $\left(\frac{r_0}{s}\right)^2 = 7,2$ ist

$$\overline{df} = 0,0271 \frac{dr_0}{r_0} + 0,0328 \frac{m_z}{M}.$$

Selbst für die stärkere Belastung ergibt sich nur

$$\overline{df} = 0,0065 \text{ cm}.$$

Die Änderung der Lage der Drehachse ist also vernachlässigbar.

44. Die Abhängigkeit der Eigenperiode des mechanischen Empfängers vom Ausschlag und von der Gleichgewichtslage

In der Theorie des mechanischen Empfängers wurde auf nichtlineare Betrachtungen verzichtet. Trotzdem müssen die auftretenden nichtlinearen Effekte experimentell untersucht werden. Dazu kann man die Abhängigkeit der Eigenperiode vom Ausschlag oder auch von der Gleichgewichtslage feststellen. Bei der ersten Methode wird die Eigenperiode des ungedämpften mechanischen Empfängers bei verschiedenen

Schwingungsamplituden um die geforderte Gleichgewichtslage gemessen. Bei der zweiten Methode wird die Eigenperiode bei kleinen Ausschlägen untersucht, wobei dem Gestell verschiedene Neigungen erteilt werden, so daß das Gehänge um eine von der geforderten verschiedenen, der „tatsächlichen“ Gleichgewichtslage schwingt.

Bei exakter Justierung des mechanischen Empfängers müssen die nichtlinearen Effekte symmetrisch zur geforderten Gleichgewichtslage ($\Theta = 0$) sein. Die autonome Bewegung des Gehänges kann dann durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\Theta} + \omega_{s_0}^2 (\Theta + e_2 \Theta^3) = 0 \quad (44.1)$$

in zweiter Näherung beschrieben werden.

Bei der ersten Methode wird das Gehänge um Θ_0 aus der Gleichgewichtslage $\Theta = 0$ ausgelenkt und dann losgelassen. Die Anfangsbedingungen von (44.1) lauten somit

$$\left. \begin{aligned} \Theta(0) &= \Theta_0, \\ \dot{\Theta}(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44.2)$$

Die Integration von (44.1) erfolgt mit Hilfe des Energiesatzes. Dazu wird (44.1) mit $\dot{\Theta}$ multipliziert. Die nachfolgende Integration ergibt bei Beachtung von (44.2)

$$\dot{\Theta}^2 + \Theta_{s_0}^2 \left(\Theta^2 + \frac{e_2}{2} \Theta^4 \right) = \omega_{s_0}^2 \left(\Theta_0^2 + \frac{e_2}{2} \Theta_0^4 \right).$$

Daraus folgt durch eine zweite Integration

$$\omega_{s_0} t = \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\Theta}{\pm \sqrt{\Theta_0^2 - \Theta^2 + \frac{e_2}{2} (\Theta_0^4 - \Theta^4)}}.$$

Für $\dot{\Theta} > 0$ gilt das positive und für $\dot{\Theta} < 0$ gilt das negative Vorzeichen der Wurzel. Für $\Theta = -\Theta_0$ wechselt $\dot{\Theta}$ das Vor-

zeichnen. Für eine volle Periode ergibt sich

$$\frac{\omega_{s0} T}{4} = \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{\Theta_0^2 - \Theta^2 + \frac{e_2}{2}(\Theta_0^4 - \Theta^4)}}.$$

Für kleine e_2 kann man den Integranden entwickeln:

$$\frac{\omega_{s0} T}{4} = \int_0^{\Theta_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\Theta_0^2 - \Theta^2}} - \frac{e_2}{4} \frac{\Theta_0^2 + \Theta^2}{\sqrt{\Theta_0^2 - \Theta^2}} \right] d\Theta.$$

Mit Hilfe einer Integraltafel erhält man

$$\omega_{s0} T = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} e_2 \Theta_0^2 \right). \quad (44.3)$$

Bei der zweiten Methode wird die Eigenperiode bei kleinen Ausschlägen um die von der geforderten abweichende Gleichgewichtslage $\Theta = \Theta_0$ bestimmt. Es ist also

$$\omega_s'^2 = \frac{d}{d\Theta} [\omega_{s0}^2 (\Theta + e_2 \Theta^3)]_{\Theta=\Theta_0}$$

und damit

$$\omega_{s0} T_s' = 2\pi \left(1 - \frac{3}{2} e_2 \Theta_0^2 \right). \quad (44.4)$$

Ein mechanischer Empfänger der zweiten Ausführung wurde nach beiden Methoden untersucht. Die Eigenschwingungen wurden bei abgenommenen Magneten mit dem Spiegelsystem fotografisch registriert. Die Ergebnisse der ersten Methode sind in Tabelle 7 zusammengestellt.

TABELLE 7

$\Theta_0 \cdot 10^3$	T_s
1,20	19,45
2,33	19,34
5,33	19,19
10,09	18,47
17,96	17,50

In Abb. 19 ist eine graphische Darstellung gegeben. Mit den ersten vier Meßwerten (in Abb. 19 durch \times gekennzeichnet) wurden die Größen T_{s0} und e_2 von (44.3) nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Es ergab sich

$$T_{s0} = 19,44 \pm 0,03$$

$$e_2 = (1,30 \pm 0,07) \cdot 10^3.$$

Die ausgezogene Kurve in Abb. 19 ist mit diesen Werten berechnet worden. Der fünfte Meßwert (durch o gekennzeichnet) liegt außerhalb der Kurve. (44.3) gilt daher mit diesen Werten

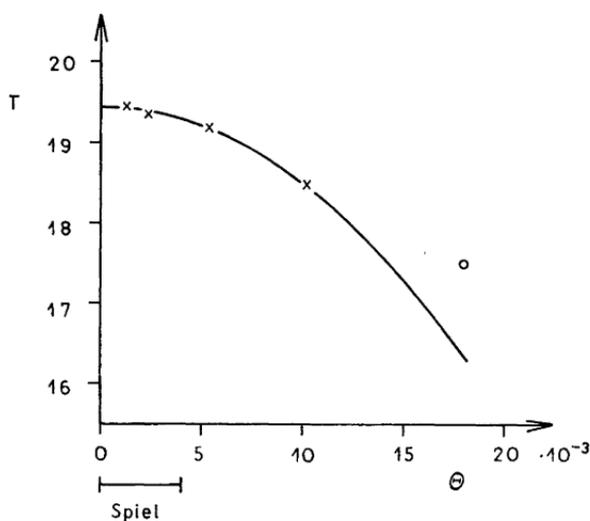


Abb. 19. Die Abhängigkeit der Eigenperiode vom Ausschlag

für $\theta < 10^{-2}$. Da das Spiel des Gehänges nur $\pm 4 \cdot 10^{-3}$ beträgt, ist das auch ausreichend. Um auch den fünften Meßwert noch zu erfassen, müßte der Näherungsansatz (44.1) erweitert werden.

Das Untersuchungsergebnis nach der zweiten Methode findet man in Tabelle 8. In Abb. 20 ist eine graphische Darstellung gegeben. Die fünf mittleren Meßwerte (in Abb. 20 durch \times gekennzeichnet) wurden einer Ausgleichsrechnung zugrunde gelegt.

Es ergab sich nach (44.4)

$$T_{s0} = 19,21 \pm 0,05 ,$$

$$e_2 = (1,19 \pm 0,09) \cdot 10^3 .$$

TABELLE 8

$\theta_0 \cdot 10^3$	T'_s
-16,41	15,59
-10,83	16,42
- 5,97	17,93
- 3,43	18,82
- 0,50	19,23
1,90	19,02
4,92	18,48
10,30	16,74
15,50	15,90

Der Unterschied zwischen den nach beiden Methoden bestimmten Werten für T_{s0} erklärt sich dadurch, daß bei der zweiten

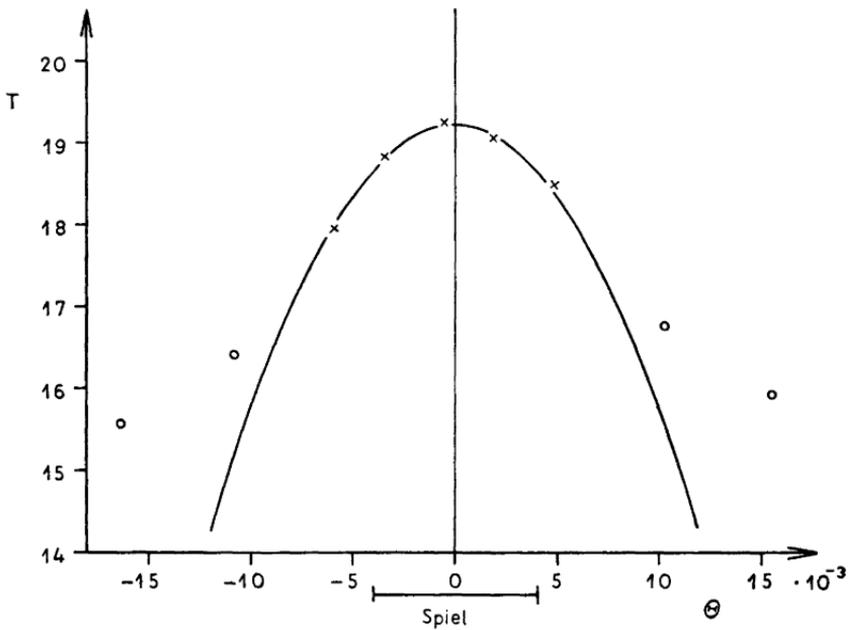


Abb. 20. Die Abhängigkeit der Eigenperiode von der Gleichgewichtslage

Methode nicht, wie eigentlich notwendig war, bei sehr kleinen Ausschlägen gemessen worden ist. Da die Meßgenauigkeit dann zu gering geworden wäre, wurde eine Amplitude von $5 \cdot 10^{-3}$ verwendet. Bei einer derartigen Amplitude ist nach den ersten Versuchen $T_s \approx 19,2$ und somit der geringere Wert für T_{s0} nach der zweiten Methode erklärt. Es ist aber bemerkenswert, daß die Koeffizienten der Nichtlinearität e_2 innerhalb der Meßfehler übereinstimmen. Die vier äußeren Meßwerte konnten nicht zu einer Ausgleichung nach (44.4) herangezogen werden, da sonst die Näherungskurve in dem hauptsächlich interessierenden mittleren Bereich zu sehr von den Meßwerten abweicht. (44.4) gilt mit den obigen Werten gut im Intervall $\Theta_0 < 5 \cdot 10^{-3}$.

Die zweite Methode ist, wie viele Experimente gezeigt haben, sehr gut geeignet, die einwandfreie Justierung des mechanischen Empfängers zu prüfen. Es zeigt sich jede Fehljustierung sofort in einer oft erheblichen Unsymmetrie der Meßwerte zur geforderten Gleichgewichtslage.

45. Die Tauchspulen

Für den Empfindlichkeitsregler wird von den in 35 aufgezeigten Möglichkeiten diejenige gewählt, bei der $R_2 = 0$ gesetzt ist. Es wird daher für die Übertrager- und die Dämpfungsspule die in Abb. 21 dargestellte Schaltung gewählt.

Das Galvanometer wird an den Klemmen 4 und 6 angeschlossen. Bei abgeschaltetem Galvanometer kann man den mechanischen Empfänger durch Lösen der Kurzschlußbügel zwischen 2 und 3 sowie 4 und 5 entdämpfen.

Es kann leicht möglich sein, daß an einer Station die Bodenunruhe so stark ist, daß die normalerweise auf 1000 eingestellte Vergrößerung herabgesetzt werden muß. Dies ist leicht zu erreichen, indem man zwischen die Klemmen 4 und 6 und das Galvanometer ein weiteres T -Glied schaltet. Dabei muß beachtet werden, daß bereits der Widerstand R_1 fest eingebaut ist. Es darf sich also bei der Berechnung des neuen Empfindlichkeitsreglers für R_1 nicht ein Wert ergeben, der kleiner ist als der bereits eingebaute. Außerdem darf sich für R_2 kein negativer Wert ergeben. Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn für die nach (35.9) zu errechnenden Widerstände gilt

$$\frac{\partial R_1}{\partial n} > 0, \quad (45.1)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial n} > 0. \quad (45.2)$$

Für μ_{s1} ist dabei der nach (35.12) geforderte Wert zu nehmen, denn es soll sich durch die Einschaltung des Zusatzreglers die Dämpfung des mechanischen Empfängers nicht ändern. Sonst würde eine neue Eichung notwendig werden. Aus (45.1) und

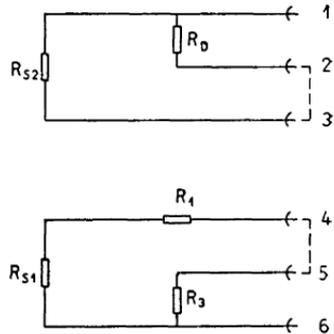


Abb. 21. Die elektrische Schaltung des mechanischen Empfängers

(45.2) ergibt sich bei Beachtung von (35.12)

$$\mu_g > \frac{R_g + R_{s1}}{2 R_g}, \quad (45.3)$$

$$n > \frac{2 R_g}{R_{s1} + R_g}. \quad (45.4)$$

Wenn man $n > 2$ wählt, so wird die Bedingung (45.4) sicher erfüllt sein. (45.3) ist nach Vergleich mit (35.8) sicher erfüllt, wenn $R_{sg} < R_g$ ist. Mit (31.20), (35.5) und (35.6) folgt dann die Bedingung

$$\alpha_g > \frac{\alpha_{gk} + \alpha_{g0}}{2}. \quad (45.5)$$

Diese Bedingung ist bei der für HSJ-I verwendeten Abstimmung und den Galvanometern H-01 erfüllt. Nach den in 36 genannten Parametern erhält man unter Beachtung von (33.4)

$$\begin{aligned} \alpha_g &= 8,4, \\ \frac{\alpha_{gk} + \alpha_{g0}}{2} &= 5,6. \end{aligned}$$

Wenn kein Empfindlichkeitsregler eingeschaltet ist, so ergibt sich nach (34.5) für die elektrodynamische Konstante des Wandlers

$$G_1 = \frac{V L G_g}{2 L_g}.$$

Für $V = 1000$, $l = 50$ cm, $L_g = 100$ cm, $G_g = 2,05 \cdot 10^{-3}$ Vs folgt daraus als Mindestwert für die elektrodynamische Konstante 5 Vs. Da nach der obigen Betrachtung ein Empfindlichkeitsregler mit $n > 2$ eingebaut werden soll, muß $G_1 \approx 10$ Vs sein.

Der Ringspalt des Magneten hat einen inneren Durchmesser von 25 mm, eine Breite von 1,9 mm und eine Höhe von 6 mm. Der Spulenkörper ist aus Piacryl gefertigt und aus einem Stück gearbeitet. Die Dicke des Körpers beträgt 0,2 mm an den Stellen, wo der Kupferdraht aufgewickelt wird. Die Wickelung hat eine Höhe von 12 mm. Die Spule ragt also in der Ruhelage je 3 mm über den Spalt hinaus. Messungen mit Versuchsspulen ergaben, daß man mit einer Feldstärke von 3000 Gauß

rechnen kann. Der mittlere Radius einer Windung kann mit 27 mm angesetzt werden. Nach (31.4) muß die Spule

$$N_1 = \frac{G_1}{\lambda_1 H_1 \bar{l}}$$

Windungen besitzen. Mit $\bar{l} = 70$ cm, $G_1 = 10$ Vs ergibt sich $N_1 \approx 560$.

Die Dämpfungsspule soll die gleichen Abmessungen und die gleiche Wicklung wie die Wandler­spule besitzen. Bei vernachlässigbarer offener Dämpfung ist nach (31.13) die durch die Dämpfungsspule erhaltene Dämpfung bei Kurzschluß

$$\alpha_{s2k}^* = \frac{G_2^2}{2 Q \omega_s R_{s2}}$$

Die Dämpfung ist reichlich bemessen, wenn $\alpha_{s2k}^* = 0,5$ gesetzt wird. Nach 43 ist $Q = 1,12 \cdot 10^7$ g cm². Für eine Eigenperiode von $T_s \approx 20$ s folgt dann

$$R_{s2} \approx 280 [\Omega].$$

Da die Windungszahl $N_1 = N_2 = 560$ ist, so beträgt die Drahtlänge $N_1 \lambda_1 = 47,5$ m. Es muß also 1 m des verwendeten Drahtes einen Widerstand von ca. 5,9 Ω haben. Nach [8] erfüllt ein Draht von 0,06 mm Durchmesser am besten diese Bedingung.

Bei sauberem Wickeln ließen sich etwa 4 vollgewickelte Lagen mit 600 Windungen und einem Widerstand von 300 Ω aufbringen. Spulen mit diesen Abmessungen ergaben mit verschiedenen Galvanometern bei allen Versuchsmustern gute Abstimmungsmöglichkeiten.

46. Die Eichung des elektrodynamischen Wandlers und die Dämpfungsbestimmung

Die Parameter des Galvanometers sind meist schon von der Herstellerfirma bestimmt, anderenfalls muß die Eichung nach den bekannten Methoden [7], [12] vorgenommen werden. Die Eigenperiode des mechanischen Empfängers wird gemäß den

Betrachtungen in 33 auf genau 20 s eingestellt. Die für die optimale Abstimmung erforderliche Galvanometerdämpfung wird nach (33.4) berechnet. Aus (31.20) und (35.5) ergibt sich dann der zur geforderten Dämpfung notwendige äußere Galvanometerwiderstand

$$R_{ag} = \frac{R_{gr} (1 - \alpha_{g0})}{\alpha_g - \alpha_{g0}} - R_g .$$

Der Wandlerwiderstand wird ein Widerstand in Reihe oder parallel geschaltet, so daß der Ausgangswiderstand des Wandlers gleich R_{ag} ist.

Zur Erleichterung der Eichung wird ein Widerstands- T -Glieder berechnet, das die Vergrößerung auf den zehnten Teil herabsetzt. Die Dämpfungsverhältnisse sollen durch dieses Glied nicht geändert werden. Mit $n = 10$, $R_{s1} = R_{ag}$ folgt aus (35.10)

$$\bar{R}_1 = \frac{10 R_g - R_{ag}}{11} ,$$

$$\bar{R}_2 = \frac{10 R_{ag} - R_g}{11} ,$$

$$\bar{R}_3 = \frac{10}{99} (R_g + R_{ag}) .$$

Es ergeben sich stets positive Widerstände, wenn

$$\frac{1}{10} < \frac{R_{ag}}{R_g} < 10 . \quad (46.1)$$

Wenn α_{g0} vernachlässigbar ist, folgt aus (35.5) und (35.6)

$$\frac{R_{ag}}{R_g} = \frac{\alpha_{gk}}{\alpha_g} - 1 . \quad (46.2)$$

Damit lautet die Bedingung (46.1)

$$\frac{1}{11} \alpha_{gk} < \alpha_g < \frac{10}{11} \alpha_{gk} . \quad (46.3)$$

Die linke Seite ist wegen der viel schärferen Bedingung (45.5) bereits als erfüllt anzusehen. Die rechte Seite ist eine weitere Bedingung für die Galvanometerauswahl.

Zur Bestimmung des Übertragungsfaktors und damit der Vergrößerung wird der sogenannte Verrückungstest benutzt. Dabei wird das Gehänge des mechanischen Empfängers um den Winkel Θ_* in eine neue fixierte Lage übergeführt. Die hierdurch in der Tauchspule induzierte Spannung bewirkt einen Galvanometerausschlag, der das Maximum Ψ_{mv} erreicht und wieder in die Ausgangslage zurückkehrt. Die Theorie dieses Testes ist in [12], [13] gegeben. Sie liefert, wenn die Auslenkdauer gegenüber der Galvanometereigenperiode vernachlässigbar ist, die Beziehung

$$\Psi_{mv} = \frac{\alpha \Theta_*}{C_v \omega_g}, \quad (46.4)$$

wobei

$$C_v = \frac{\alpha_g}{\beta_g} \text{Arct} \alpha_g. \quad (46.5)$$

Der Vorteil dieses Testes liegt darin, daß (46.4) nicht von der Eigenperiode und Dämpfung des mechanischen Empfängers abhängt. Für $\alpha_g > 8$ kann man statt (46.5) die Näherung

$$C_v = 2 \alpha_g$$

verwenden. Der dabei auftretende Fehler ist kleiner als 2% und kann vernachlässigt werden. Setzt man (46.4) in (34.1) ein, so erhält man

$$\bar{V} = \frac{2 I_g \Psi_{mv}}{\Theta_* l}. \quad (46.6)$$

Diesen vorläufigen Wert \bar{V} für die Vergrößerung bestimmt man auch am besten mit dem oben für die Eichung berechneten T -Glied. Die Herabsetzung 1:10 ist aber in (46.6) noch nicht berücksichtigt.

Es ist nun der fest einzubauende Empfindlichkeitsregler zu berechnen, der die Vergrößerung \bar{V} auf den gewünschten Wert $V = 1000$ herabsetzt. Dazu werden die beiden möglichen Fälle gesondert betrachtet.

Im ersten Fall ist $R_{ag} > R_{s1}$. Dann muß mit der Tauchspule ein Widerstand R'_s in Serie geschaltet werden.

$$R'_s = R_{ag} - R_{s1}.$$

Nach (34.5) hat ein derartiger Serienwiderstand keinen Einfluß auf die Vergrößerung, da $R_3 = \infty$. Damit die endgültige Vergrößerung 1000 beträgt, muß für den eingebauten Empfindlichkeitsregler

$$n = \frac{\bar{V}}{1000}$$

sein. Da die richtige Galvanometeranpassung schon durch Zuschalten von R'_s erreicht wurde, ist in (35.11) R_{ag} anstelle von R_{s1} und $\mu_g = 1$ zu setzen, also

$$R_1 = (n - 1) R_{ag},$$

$$R_3 = \frac{n}{n - 1} R_{ag}.$$

Im zweiten Fall ist $R_{ag} < R_{s1}$. Dann muß der Tauchspule vorläufig ein Widerstand R_p parallel geschaltet werden.

$$R_p = \frac{R_{s1} R_{ag}}{R_{s1} - R_{ag}}. \quad (46.7)$$

Durch diese Parallelschaltung wird der Übertragungsfaktor auf den n' -ten Teil herabgesetzt. Nach (34.3) ist

$$n' = 1 + \frac{R_{s1} R_g}{R_p (R_{s1} + R_g)}. \quad (46.8)$$

Da nach den Untersuchungen von 45 die Tauchspule so gefertigt wird, daß die Empfindlichkeit auf die Hälfte herabzusetzen ist, muß $n' < 2$. Mit (46.8) folgt

$$R_p > \frac{R_{s1} R_g}{R_{s1} + R_g}$$

und mit (46.7)

$$R_{ag} > \frac{R_g R_{s1}}{R_{s1} + 2 R_g}.$$

In (46.2) eingesetzt, erhält man :

$$\frac{\alpha_{gk}}{\alpha_g} - 1 > \frac{R_{s1}}{R_{s1} + 2 R_g}.$$

Da nach 45 $R_{s1} \approx 300$ und $R_g \approx 1000$, so muß

$$\alpha_g < \frac{23}{26} \alpha_{gk}$$

sein. Das ist eine etwas schärfere Bedingung als (46.3), die für die Galvanometerauswahl maßgebend ist. Damit die endgültige Vergrößerung 1000 beträgt, muß für den eingebauten Empfindlichkeitsregler

$$n = \frac{\bar{V} n'}{1000}$$

sein. Der Empfindlichkeitsregler wird nach (35.11) berechnet, wobei (35.8) zu beachten ist.

Nach dem Einbau der Widerstände des Empfindlichkeitsreglers in das Kästchen (27) (s. Abb. 17) wird der Verrückungstest wiederholt, um die endgültige Vergrößerung festzustellen. Da für diese Versuche eine Auslenkung der Spulen um etwa 1 mm genügt, war es möglich, die Abhängigkeit der Vergrößerung von der tatsächlichen Gleichgewichtslage zu überprüfen. Es ergab sich, daß die Vergrößerung an den Ausschlagsbegrenzungen geringer ist als in der geforderten Gleichgewichtslage. Sie sank aber nie um mehr als 5% ab.

Nach dieser ersten Vergrößerungsbestimmung ist die Dämpfung des mechanischen Empfängers auf den gewünschten Wert einzustellen. Die offene Dämpfung wird bei der Bestimmung der Eigenperiode mit erfaßt, indem man das Verhältnis aufeinanderfolgender Ausschläge bestimmt [12]. Die offene Dämpfung bei 20 s Eigenperiode liegt bei $\alpha_{s0} \approx 0,005$. Wird diese geringe Dämpfung nicht erreicht, so muß eine Reibung der Spulen im Magnetspalt vorliegen.

Die Dämpfungsbestimmung bei geschlossenen Spulen geschieht mit Hilfe des Stoßtestes. Dem Gehänge wird zu diesem Zweck ein kurzer Stoß erteilt und die Galvanometerbewegung registriert. Den Stoß erteilt man am besten elektrisch, indem

der Dämpfungsspule ein Stromstoß zugeführt wird [12]. Nach [12], [13], [15] ist das Verhältnis der ersten beiden Galvanometerausschläge Ψ_{ms1} und Ψ_{ms2} ein Maß für die Dämpfung. Wie in [15] gezeigt, hängt das Verhältnis

$$v = \left| \frac{\Psi_{ms1}}{\Psi_{ms2}} \right|$$

hauptsächlich nur von der Dämpfung des mechanischen Empfängers und nicht von den anderen Größen ab, wenn die Bedingung (33.4) nahezu erfüllt ist. Nach [13] gilt für $0,4 < \alpha_s < 0,6$ die Näherung

$$v = 0,6961 + 1,5405 \alpha_s + 0,6960 \alpha_s^2.$$

Man kann v auch der Tabelle 9 entnehmen. Es ist der Abschlußwiderstand der Dämpfungsspule R_D so lange zu verändern, bis das für $\alpha_s = 0,5$ geforderte $v \approx 1,64$ erreicht ist.

Mit Hilfe des Stoßtestes ist auch eine Vergrößerungsbestimmung möglich. Hierbei muß auch der Maximalausschlag des mechanischen Empfängers Θ_{ms} gemessen werden. Nach [13] ist

$$\kappa = C_s \alpha_g \omega_g \frac{\Psi_{ms1}}{\Theta_{ms}}$$

und

$$V = C_s \frac{L_g \Psi_{ms1}}{l \Theta_{ms}}.$$

Die Größe C_s hängt von α_s ab und ist in Tabelle 9 aufgeführt, wobei die Erfüllung der Bedingung (33.4) vorausgesetzt wurde.

Eine weitere Methode zur Vergrößerungsbestimmung ist der Ausschwingtest. Hierbei wird das Gehänge des mechanischen Empfängers um den Winkel Θ_* ausgelenkt und, nachdem der Galvanometerausschlag abgeklungen ist, wieder freigelassen. Beim Ausschwingen des Gehänges erreicht der Galvanometerausschlag das Maximum Ψ_{mA} . Nach [13] ist

$$\kappa = C_A \alpha_g \omega_g \frac{\Psi_{mA}}{\Theta_*}$$

und

$$V = C_A \frac{L_g \Psi_{mA}}{l \Theta_*}.$$

Die Größe C_s ist für verschiedene α_s in Tabelle 9 aufgeführt, wobei die Erfüllung der Bedingung (33.4) vorausgesetzt wurde.

TABELLE 9

α_s	v	C_s	C_A
0,4	1,4235	3,533	4,460
0,5	1,6401	3,458	4,936
0,6	1,8706	3,392	5,419

Die Anwendung aller drei Methoden zeigte eine gute Übereinstimmung innerhalb der zu erwartenden Meßgenauigkeit.

Die Berechnung des Rückwirkungsfaktors erfolgt am besten nach (31.18). Es kann auch (31.23) verwendet werden, wozu aber noch α_{s1}^* bestimmt werden müßte, was keine Schwierigkeiten bereitet. Für den Rückwirkungsfaktor ist stets $\sigma^2 < 0,1$.

47. Schütteltischversuche

Die Untersuchungen auf dem Schütteltisch hatten die Aufgabe, einmal das Verhalten des mechanischen Empfängers bei sehr schnellen Bodenbewegungen festzustellen und zum anderen in einem möglichst großen Bereich die Gültigkeit der theoretisch berechneten dynamischen Vergrößerung zu überprüfen. Damit wird auch bewiesen, daß das Differentialgleichungssystem (31.25) die Bewegung des Seismographen richtig beschreibt.

Nach der Theorie hat der mechanische Empfänger eigentlich zwei Freiheitsgrade und infolgedessen eine, wenn auch für seismologische Gegebenheiten sehr hohe, weitere Eigenfrequenz ω_1 . Nach (22.4) ist

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \cot \alpha}{\lambda (1 - q_0)} \left[1 + \left(\frac{r_0}{s} \right)^2 \right]}.$$

Nach den Betrachtungen in 39 kann unter Umständen die Blattfederlänge variiert werden, ohne daß die Aufhängung wesentlich geändert werden muß. Wenn die Blattfederdicke

$\delta = 0,06$ mm beträgt, braucht bei einer Länge $\lambda \geq 2$ mm der Abstand der gestellfesten Einklemmstellen nicht geändert zu werden. Die Eigenfrequenz ω_1 kann man für ein Gehänge der zweiten Ausführung Tabelle 10 entnehmen.

TABELLE 10

λ [mm]	ω_1	$\frac{\omega_1}{2\pi}$
2	482	77
3	342	55
5	245	39

Damit der durch das Galvanometer bedingte Abfall der dynamischen Vergrößerung bei hohen Frequenzen nicht berücksichtigt werden mußte, wurde der mechanische Empfänger zunächst ohne

Galvanometer untersucht. Er wurde auf einen Horizontal-schütteltisch gestellt, dessen auf drei Stahlkugeln rollende Aluminiumplattform elektrodynamisch erregt wird. An der Tischplatte und an dem Gehänge des mechanischen Empfängers in der Nähe der zylindrischen Masse wurde je ein induktiver Wegaufnehmer der Fa. Hottinger Meßtechnik befestigt. Über Trägerfrequenzverstärker wurden die aufgenommenen Schwingungen verstärkt und mit einem direktschreibenden Registriergerät aufgezeichnet. Die Tauchspulen waren mit Widerständen so abgeschlossen, daß die Dämpfung $\alpha_s \approx 0,5$ war.

In Abb. 22 ist das Ergebnis der Untersuchung eines mechanischen Empfängers der ersten Ausführung dargestellt. A_s ist die Amplitude des Gehänges an der Stelle des Wegaufnehmers und A_T die des Tisches. Bei dieser Ausführung ist das Gestell ein aus Winkeleisen geschweißter Rahmen. Der Tisch, auf dem die Magnete befestigt sind, ist auf dem Rahmen mit Schrauben befestigt. Man erkennt in Abb. 22 deutlich bei 19 Hz die Resonanzstelle. Da $\lambda = 3$ mm war, stimmt diese mit der nach Tabelle 10 berechneten nicht überein. Die nähere Untersuchung ergab, daß diese Resonanzstelle durch das zu leicht gebaute Gestell verursacht wurde. In Abb. 22 sind die Meßpunkte einfach verbunden worden. Die Kurve hat also einige kleine Zacken, die nicht unbedingt reell sein müssen, sondern durch Meßfehler bedingt sein können.

Da das Gestell zu leicht gebaut war, wurde bei der zweiten Ausführung die Grundplatte aus Aluminiumguß hergestellt. Die Seitenwände des Tisches, der die Magneten trägt, sind an

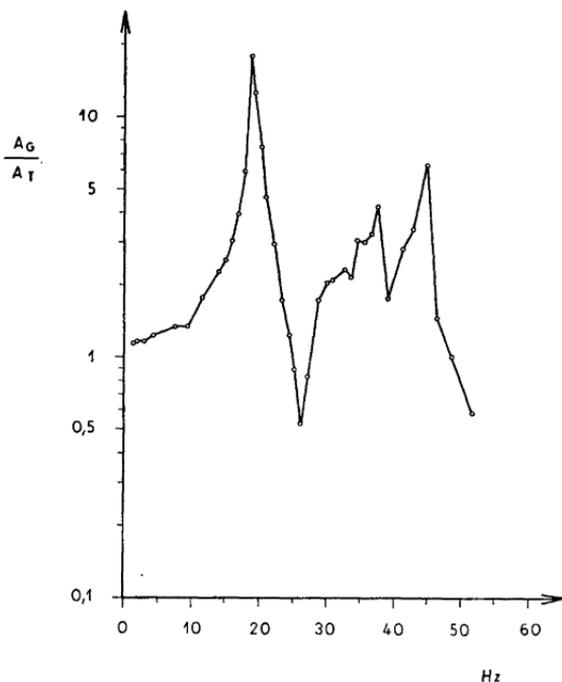


Abb. 22. Eichung eines mechanischen Empfängers der ersten Ausführung auf dem Schütteltisch

die Grundplatte angegossen. In Abb. 23 sind die Ergebnisse der Versuche für Federlängen von 2, 3 und 5 mm dargestellt. Man sieht, daß die Resonanzstelle bei 19 Hz verschwunden ist. Für die verschiedenen Blattfederlängen ändert sich das Bild wesentlich. Für $\lambda = 5$ mm liegt eine Resonanzstelle bei 40 Hz, für $\lambda = 3$ mm liegt eine bei 50 Hz und für $\lambda = 2$ mm liegt die Hauptresonanz bei 59 Hz. Es ist auch bei allen Versuchen eine Resonanzstelle bei etwa 40 Hz festzustellen. Diese wird also nicht durch die Aufhängung, sondern durch andere Konstruktionselemente bedingt sein. Es kann eine Eigenresonanz

des Gehänges selbst sein, das bei diesen Frequenzen vielleicht nicht mehr als starr angenommen werden darf. Diese Resonanz ist sicher dafür verantwortlich zu machen, daß die von der Theorie geforderten Eigenschwingungen an etwas anderer Stelle als berechnet liegen. Für $\lambda = 3$ und 5 mm ist die Übereinstimmung von Theorie und Experiment gut.

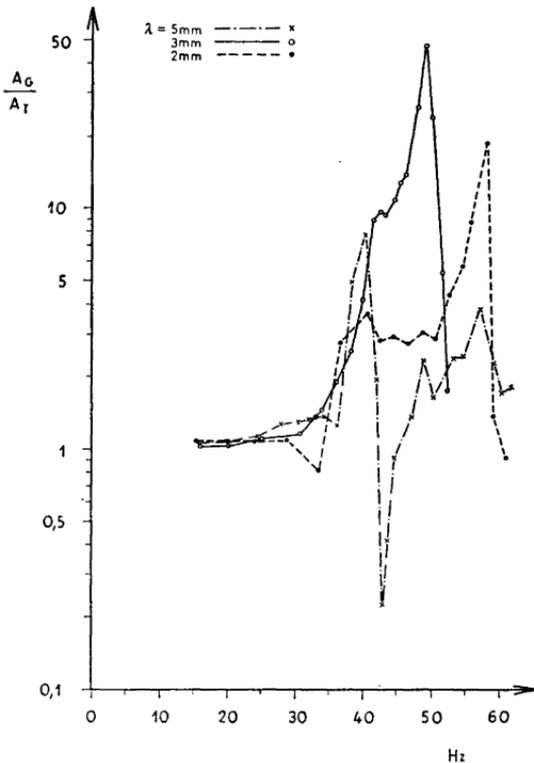


Abb. 23. Eichung eines mechanischen Empfängers der zweiten Ausführung auf dem Schütteltisch

Um nun auch eine experimentelle Überprüfung der dynamischen Vergrößerung des Seismographen vorzunehmen, wurde eine Eichung durchgeführt, bei der die Bewegung des mechanischen Empfängers mit dem Galvanometer registriert wurde. Die Tischbewegung wurde wieder mit einem Hottingergeber

registriert und somit die Vergrößerung berechnet. Abb. 24 zeigt diese Eichung. Leider konnten nur bis zu einer Periode von 5 s sinusförmige Tischbewegungen ausreichender Amplitude erzeugt werden, so daß die Prüfung nur im Bereich von 0,02 bis 5 s erfolgen konnte. Für Perioden über 5 s wird auch die hohe Neigungsempfindlichkeit des Seismographen die Untersuchung sehr erschweren [12]. Für die langsamen Tischbewegungen ist eine gute Übereinstimmung der theoretisch berech-

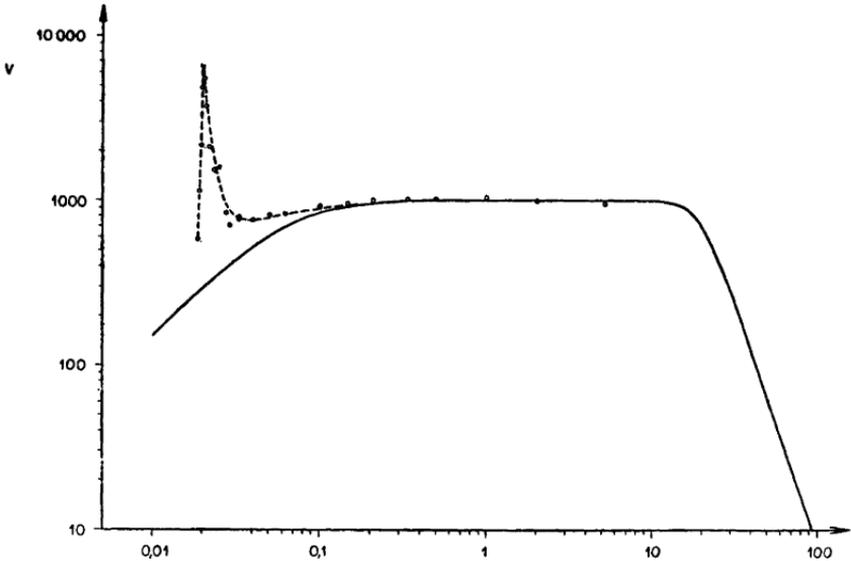


Abb. 24. Überprüfung der dynamischen Vergrößerung auf dem Schütteltisch

neten (ausgezogenen) Kurve mit den experimentellen Meßwerten (Kreise) festzustellen. Auch die berechnete Vergrößerung in dem von der Frequenz unabhängigen Bereich ist bestätigt worden. Bei 50 Hz tritt die erwartete Resonanzstelle auf. Eine derartig hohe Störfrequenz dürfte bei seismologischen Zwecken ohne Belang sein.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß die Schütteltischversuche die theoretischen Voraussagen bestätigt haben.

Literatur

- [1] DOETSCH, G., Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. München: Oldenburg 1956.
- [2] EMDE, F., Tafeln elementarer Funktionen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1959.
- [3] FÖRTSCH, O., Das Verhalten von Blattfederseismographen bei freier und erzwungener Schwingung. *Ann. di Geofis.* 5 (1952), S. 321—356.
- [4] GRENET, G., und COULOMB, J., Nouveaux principes de construction des séismographes électromagnétiques. *Annales de Physique*, Paris, 11. série 3 (1935), S. 321—369.
- [5] HOLZMÜLLER, W., Technische Physik, Bd. 1. Berlin: VEB Verlag Technik 1959.
- [6] Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, Bd. 1. Berlin: W. Ernst & Sohn 1955.
- [7] MEYER, E., und MOERDER, C., Spiegelgalvanometer und Lichtzeigerinstrumente. Leipzig: Geest & Portig 1952.
- [8] RINT, C., Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker, Bd. 1. Berlin: Radio und Kinotechnik GMBH 1952.
- [9] RÖSSIGER, M., Beitrag zur Theorie des Blattfederseismographen. *Zeitschr. f. Geophys.* 8 (1932), S. 470—477.
- [10] SANDEN, H. v., Praktische Mathematik. Leipzig, Teubner 1948.
- [11] SAWARENSKI, E. F., und KIERNOS, D. P., Elemente der Seismologie und Seismometrie. Berlin: Akademie-Verlag 1960.
- [12] TEUPSER, CH., Die Eichung und Prüfung von elektrodynamischen Seismographen. *Freiberger Forschungshefte C 130*, Berlin 1962.
- [13] TEUPSER, CH., Die Eichung von elektrodynamischen Verrückungsmessern mit Hilfe von Testversuchen. *Veröff. des Institutes für Bodendynamik und Erdbebenforschung in Jena* 72 (1962), S. 93 bis 119.
- [14] TEUPSER, CH., Empfindlichkeitsregler für elektrodynamische Seismographen. *Gerl. Beitr. Geophys.*, Leipzig 68 (1959) 2, S. 90—103.

- [15] TEUPSER, CH., Zur Abstimmung und Eichung von elektrodynamischen Verrückungsmessern. Gerl. Beitr. Geophys., Leipzig **69** (1960) 5, S. 269—289.
- [16] TEUPSER, CH., und ULLMANN, W., Ein neuer Horizontalseismograph mit galvanometrischer Registrierung. Zeitschr. f. Geophys. **25** (1959), S. 272—279.
- [17] ULLMANN, W., Zur Klassifikation der Seismographen, Schwingungs- oder Erschütterungsmesser. Gerl. Beitr. Geophys., Leipzig **65** (1956) 2, S. 91—108.

Vorwort

Mit dem vorliegenden Band wird jener Teil der im seismometrischen Forschungsprogramm unseres Instituts vorgesehenen Arbeiten veröffentlicht, der zur Konstruktion des neuen Horizontalseismographen HSJ-I (Horizontalseismograph Jena, Typ I) verholfen hat.

Die im Kapitel I entwickelte Theorie des mechanischen Empfängers befaßt sich im wesentlichen mit dem Problem einer optimalen Aufhängung des Gehänges. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind nicht nur für HSJ-I sondern auch für die weitere Entwicklung von Horizontalseismographen an unserem Institut richtungsweisend.

Im Kapitel II wird die Theorie der elektrodynamischen Registrierung in einer Form dargestellt, die auch für Vertikalseismographen zutrifft. Diese Betrachtung setzt voraus, daß die Instrumente die Bodenverrückungen in einem breiten Frequenzintervall ohne Verzerrungen aufzeichnen.

Das Kapitel III befaßt sich mit der Konstruktion und Eichung des Seismographen HSJ-I. Außerdem wird die Theorie von HSJ-I in einigen wesentlichen Punkten experimentell bestätigt.

Das Kapitel I wurde von W. ULLMANN verfaßt, während von CH. TEUPSER die Kapitel II und III bearbeitet worden sind. Beide Darstellungen sind infolge der langjährigen engen Zusammenarbeit weitestgehend aufeinander abgestimmt.

Jena, im September 1963

Die Verfasser

ABHANDLUNGEN DES GEOMAGNETISCHEN INSTITUTS POTSDAM

U. a. erschienen

- Nr. 27 **Sonderheft zum 70jährigen Bestehen des Geomagnetischen Instituts Potsdam**
1961. 166 Seiten — 124 Abbildungen — 46 Tabellen — 4° — Ganzleinen 48,— DM
- Nr. 28 **DIETRICH LENNERS**
Beiträge zum Problem der Stabilitätsuntersuchung gegengekoppelter Verstärker
1960. 40 Seiten — 38 Abbildungen — 4° — 13,20 DM
- Nr. 29 **Tagungsbericht Geomagnetismus und Aeronomie**
1962. 306 Seiten — 230 Abbildungen, davon 2 auf Falttafeln — 22 Tabellen — 4° — 98,— DM
- Nr. 30 **KLAUS LENGNING / OTTO LUCKE / KURT SELLIEN**
Betrachtungen über die Vermessungen des erdmagnetischen Hauptfeldes in Norddeutschland zu den Epochen 1901, 1935 und 1955
1961. 72 Seiten — 12 Abbildungen, davon 4 Falttafeln — 12 Tabellen — 4° — 33,— DM
- Nr. 31 **ARMIN GRAFE**
Die Bedeutung der Abweichungen geomagnetischer Tagesmittel vom sogenannten Normalwert für die Analyse des geomagnetischen Ringstromeffektes
WOLFGANG MUNDT
Statistische Bearbeitung und Analyse geomagnetischer Landesvermessungen
1964. 147 Seiten — 120 Abbildungen, davon 12 auf 6 Tafeln — 21 Tabellen — 4° 51,— DM
- Nr. 32 **HEINZ KAUTZLEBEN**
Die analytische Darstellung des geomagnetischen Hauptfeldes und der Säkularvariation
1963. 96 Seiten — 4° — 23,50 DM
- Nr. 33 **CHRISTIAN-ULRICH WAGNER**
Die negativen Ionen des Sauerstoffs und ihre Bedeutung für ionosphärische Prozesse
Eine Untersuchung über die Bedeutung quantenmechanischer Berechnungen für die Aeronomie
1963. 104 Seiten — 24 Abbildungen — 14 Tabellen — 4° — 25,50 DM

Wir empfehlen Fortsetzungsbesug der Reihe durch eine Buchhandlung



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

VERÖFFENTLICHUNGEN DES INSTITUTES FÜR BODENDYNAMIK
UND ERDBEBENFORSCHUNG IN JENA
DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

U. a. erschienen

Heft 70 FRIEDRICH GERECKE

Seismische Registrierungen in Jena

1. Januar 1959 bis 31. Dezember 1959

1962. 145 Seiten — 8° — 14,50 DM

Heft 71 FRIEDRICH GERECKE / DOROTHEA GÜTH

Seismische Registrierungen der Nebenstationen von Jena: Potsdam, Halle, Plauen und Sonneberg 1959

1963. 209 Seiten — 8° — 21,— DM

Heft 72 **Zum Gedenken Emil Wiecherts anlässlich der 100. Wiederkehr seines Geburtstages**

1962. 132 Seiten — 31 Abbildungen — 13 Tabellen — 10 Faltkarten — 1 Titelbild — 8° 29,— DM

Heft 73 RICHARD MAAZ

Theoretische Untersuchung der Wechselwirkung zwischen dem mechanischen Empfänger eines Seismographen und einer longitudinalen harmonischen Planwelle im Vollraum

1963. 59 Seiten — 28 Abbildungen — 1 Tabelle — 8° — 13,50 DM

Heft 74 FRIEDRICH GERECKE

Seismische Registrierungen in Jena

1. Januar 1960 bis 31. Dezember 1960

1963. 145 Seiten — 8° — 15,30 DM

Heft 75 FRIEDRICH GERECKE / DOROTHEA GÜTH

Seismische Registrierungen der Nebenstationen von Jena: Potsdam, Halle, Plauen und Sonneberg 1960

1964. 181 Seiten — 8° — 16,40 DM

Wir empfehlen Fortsetzungsbezug der Reihe durch eine Buchhandlung



A K A D E M I E - V E R L A G · B E R L I N