



Veröffentlichungen
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena
Herausgegeben von deren Direktor August Sieberg
Heft 37

Untersuchung
über die Beanspruchung elastischer,
prismatischer Stäbe bei erdbeben=
artigen Stoßwirkungen

Von
W. Sponheuer

Mit 8 Abbildungen



1941

Reichsverlagsamt · Berlin NW40

Veröffentlichungen
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena
Herausgegeben von deren Direktor August Sieberg
Heft 37

Untersuchung
über die Beanspruchung elastischer,
prismatischer Stäbe bei erdbeben=
artigen Stoßwirkungen

Von
W. Sponheuer

Mit 8 Abbildungen



1941

Reichsverlagsamt · Berlin NW40

Printed in Germany



741 3853

Vorwort.

Die nachstehende Experimentaluntersuchung mittels des an der Reichsanstalt für Erdbebenforschung konstruierten und gebauten Stoßtisches bildet eine Ergänzung zu meiner in Heft 29 dieser Veröffentlichungen niedergelegten Untersuchung über die Zerstörung von Ziegelmauerwerk durch Erdbebenstöße. Beide Arbeiten zusammen genommen setzen uns, wie neuere Erfahrungen im Gelände gelehrt haben, bei sinngemäßer Verwertung bereits in den Stand, grundsätzliche Fragen über die Zerstörbarkeit auch anderer Baukonstruktionsarten unter wirklichkeitsnahen Gesichtspunkten zu beurteilen.

Sponheuers Untersuchung mußte besonderer Umstände halber Anfang 1939 abgebrochen werden. Jedoch genügt der vorliegende Teil für den genannten Zweck.

Jena, im November 1940

A. Sieberg

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	7
Erster Abschnitt: Theoretischer Teil.	
I. Stoßtisch zur Erzeugung erdbebenähnlicher Bewegungen und seine Bewegungsgleichungen	9
1. Ableitung der Bewegungsgleichungen nach dem Verfahren von Lagrange	9
3. Allgemeine Form der Kopplungsgleichungen bei Dämpfungsfreiheit	11
3. Umformung der Bewegungsgleichungen von der Form der Beschleunigungs- auf die der Kraftkopplung.....	11
4. Herleitung der Differentialgleichung der Tischbewegung aus den Bewegungsgleichungen	13
II. Der einseitig eingespannte prismatische Stab auf dem Stoßtisch	18
1. Ableitung der Gleichung der Biegelinie bei Anregung durch eine dämpfungsfreie Stoßbewegung	18
2. Ableitung der Gleichung der Biegelinie bei Anregung durch eine gedämpfte Stoßbewegung	22
Zweiter Abschnitt: Experimenteller Teil.	
I. Versuchseinrichtung und Methode	28
II. Versuchsergebnisse	31
Literatur	36

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Konstruktion erdbebensicherer Bauten geben. Hauptsächlich sollen die Vorgänge geklärt werden, die zu Beginn eines Bewegungsvorganges, den man gemeinlichhin als Stoß bezeichnet, auftreten. Die seit langem zu Untersuchungen seismischer Probleme verwandten Schütteltische erzeugen in der Regel harmonische Schwingungen. In der Natur werden schwerlich jemals reine Sinusschwingungen den Boden in Bewegung versetzen. Die Erfahrungen in den Zerstörungsgebieten von Erdbeben haben gezeigt, daß der Hauptschaden von einzelnen Stößen verursacht wird. Ferner ergibt sich aus neueren Untersuchungen über die Ermittlung der wahren Bodenbewegungen aus Seismogrammen der Impulscharakter der Erdbeben. Aus diesen Überlegungen heraus wurde für die experimentelle Nachprüfung seismischer Aufgaben nicht der übliche Schütteltisch, sondern ein sog. Stoßtisch benutzt, der in der Lage ist, erdbebenähnliche Bewegungsvorgänge zu erzeugen.

Die von A. SIEBERG [7] mit dem Stoßtisch bereits früher ermittelten Versuchsergebnisse bei Modellversuchen mit Backsteinmauerwerk stehen in bester Übereinstimmung mit den in der Natur durch Erdbeben verursachten. In keinem Falle ließen sich diese Ergebnisse durch Anwendung einfacher harmonischer Schwingungen bei den Versuchen erzielen.

Ein wichtiger Teil bei Baukonstruktionen ist der Stab. In allen Gebäuden, namentlich bei solchen, die in eigentlichen Erdbebengebieten errichtet werden, haben Bauelemente prismatisch-stabförmigen Charakters einen wesentlichen Anteil. Die Bedeutung dieser stabförmigen Bauelemente liegt darin, daß sie dazu bestimmt sein sollen, die zusätzliche Beanspruchung durch Horizontalstöße bei Erdbeben unschädlich zu machen.

So zahlreich die Untersuchungen solcher Bauelemente im Hinblick auf ihre seismische Wirksamkeit auch sind, so fehlten doch bisher die Untersuchungen über das Verhalten von Stäben bei Stoßbeanspruchung, die der Gegenstand dieser Arbeit sind.

Die Fertigstellung der Arbeit wurde durch die Teilnahme an Prof. Siebergs erdbebenkundlich-vulkanologischen Studienreise in die Haupterdeben- und Vulkangebiete der Balkanhalbinsel und Südtaliens und eine im Anschluß daran vorgenommene Reise durch Deutschlands Erdbebengebiete verzögert. Schließlich wurde durch den Kriegsausbruch wegen sofortiger Einberufung die Arbeit völlig abgebrochen und konnte erst gelegentlich einesurlaubes fertiggestellt werden. Wegen der Kürze der Zeit mußte auf eine breitere Darstellung verzichtet werden; von dem reichlich vorhandenen Versuchsmaterial konnte nur ein Bruchteil ausgewertet werden. Jedoch läßt sich bereits hieraus das Wesentliche der Untersuchung ableiten.

Erster Abschnitt.

Theoretischer Teil.

Zur Erleichterung des Verständnisses der experimentellen Untersuchungen werden nachstehend die theoretischen Grundlagen entwickelt, da die Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichungen eines einseitig eingespannten prismatischen Stabes für die angegebenen Anfangsbedingungen noch nicht bekannt sind.

I. Stoßtisch zur Erzeugung erdbebenähnlicher Bewegungen und seine Bewegungsgleichungen.

Der Stoßtisch wurde an der Reichsanstalt für Erdbebenforschung nach Angabe des Herrn Direktor Prof. Dr. A. SIEBERG entwickelt und von dem Verfasser für seine besonderen Aufgaben, insbesondere Modellversuche, konstruiert.

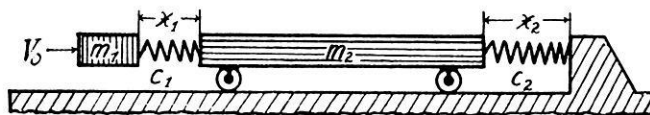


Abb. 1. Schema des Stoßtisches.

Der Stoßtisch Abb. 1 wird durch ein Pendel mit der Masse m_1 in Bewegung gesetzt, und zwar schlägt die Pendelmasse mit der Geschwindigkeit v_0 mit ihrer Feder, deren Konstante c_1 ist, gegen den Tisch. Der Stoß dauert so lange, als das Pendel mit seiner Feder den Tisch berührt. Während dieser Zeit vollführt das System eine gekoppelte Schwingung. Ist die Deformation der Feder gleich null geworden, so trennt sich das Pendel vom Tisch und der Stoßvorgang ist zu Ende. Von nun an führt der Tisch eine einfache harmonische Schwingung aus.

Da gerade die Verhältnisse beim Stoß untersucht werden sollen, wollen wir zunächst die Bewegungsgleichungen einer Anordnung nach Abb. 1 eingehend untersuchen.

1. Ableitung der Bewegungsgleichungen nach dem Verfahren von Lagrange. Bei Annahme von Dämpfungsfreiheit kön-

nen die Bewegungsgleichungen dieses Systems einmal nach dem Verfahren von LAGRANGE hergeleitet werden, wobei von der Energie der Lage und der Bewegung ausgegangen wird, zum andern nach dem Prinzip von D'ALEMBERT. Nach LAGRANGE ergibt sich die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2;$$

die potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2;$$

hierbei bedeutet: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Die Anwendung des Satzes von LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta(T - V)}{\delta q_i} = 0;$$

q_i ist hier eine allgemeine Koordinate, in unserem Falle also

$$q_i = \dot{x}_1, \dot{x}_2.$$

Die einzelnen Glieder lauten nun:

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{x}_1} = m_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2);$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T_1}{\delta \dot{x}_1} \right) = m_1 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2); \quad T - V = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} c_1 x_1^2 - \frac{1}{2} c_2 x_2^2;$$

$$\frac{\delta(T - V)}{\delta x_1} = -c_1 x_1;$$

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{x}_2} = m_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + m_2 \dot{x}_2;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{x}_2} \right) = m_1 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + m_2 \ddot{x}_2;$$

$$\frac{\delta(T - V)}{\delta x_2} = -c_2 x_2;$$

nun ist für $x_1 = q_1$: $m_1 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c_1 x_1 = 0$;

für $x_2 = q_2$: $m_1 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 = 0$;

oder etwas umgeformt:

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1}{m_1} x_1 + \ddot{x}_2 = 0; \tag{1}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_1 + m_2} x_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{x}_1 = 0; \tag{2}$$

dieses Gleichungspaar stellt eine gekoppelte Schwingung und zwar bei Beschleunigungskopplung dar.

2. Allgemeine Form der Kopplungsgleichung ohne Dämpfungsglieder. In der allgemeinen Form lauten die Gleichungen der Beschleunigungskopplung:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \nu_1^2 x_1 + \varrho_1 \ddot{x}_2 &= 0; \\ \text{und:} \quad \ddot{x}_2 + \nu_2^2 x_2 + \varrho_2 \ddot{x}_1 &= 0; \end{aligned}$$

mit Bezug auf Gleichung (1, 2) ist

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{c_1}{m_1}; \quad \varrho_1 = 1; \\ \nu_2^2 &= \frac{c_2}{m_1 + m_2}; \quad \varrho_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Der Kopplungsfaktor ist:

$$\varrho = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}; \quad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \quad \text{also } \varrho = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}.$$

Die Kreisfrequenzen sind hierbei:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}; \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_1 + m_2}}.$$

Die allgemeine Form der Kraftkopplungsgleichungen lautet:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \nu_1'^2 x_1 + \tau_1 \nu_1'^2 x_2 &= 0; \\ \ddot{x}_2 + \nu_2'^2 x_1 + \tau_2 \nu_2'^2 x_2 &= 0. \end{aligned}$$

3. Umformung der Bewegungsgleichungen. Die Gleichungen (1, 2) der Beschleunigungskopplung lassen sich, wie nun gezeigt werden soll, auf die Form der Kraftkopplung bringen:

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1}{m_1} x_1 + \ddot{x}_2 = 0; \tag{1}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_1 + m_2} x_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{x}_1 = 0; \tag{2}$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{c_2}{m_1 + m_2} x_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{x}_1; \tag{2}$$

eingesetzt in (1) ergibt

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1}{m_1} x_1 - \frac{c_2}{m_1 + m_2} x_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{x}_1 = 0 \tag{1}$$

oder:

$$\ddot{x}_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) + \frac{c_1}{m_1} x_1 - \frac{c_2}{m_1 + m_2} x_2 = 0;$$

$$\text{da } \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}:$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2} x_1 + \frac{c_2}{m_2} x_2 = 0;$$

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2}\right) x_1 - \frac{c_2}{m_2} x_2 = 0. \quad (1a)$$

In entsprechender Weise bringen wir Gleichung (2) auf die Form der Kraftkopplung: Setzen wir aus Gleichung (1)

$$\ddot{x}_1 = -\frac{c_1}{m_1} x_1 - \ddot{x}_2$$

in Gleichung (2) ein, so erhalten wir:

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_1 + m_2} x_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{c_1}{m_1} x_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{x}_2 = 0; \quad (2)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} x_2 - \frac{c_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1 = 0;$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2} x_2 - \frac{c_1}{m_2} x_1 = 0;$$

nun lautet das Gleichungspaar der Kraftkopplung, das aus den Gleichungen (1) und (2) der Beschleunigungskopplung durch Umformung erhalten wurde:

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2}\right) x_1 - \frac{c_2}{m_2} x_2 = 0; \quad (1a)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2} x_2 - \frac{c_1}{m_2} x_1 = 0. \quad (2a)$$

Aus der allgemeinen Form der Kopplungsgleichung ohne Dämpfung folgt bei Kraftkopplung:

$$\nu_1'^2 = \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2}; \quad \tau_1 \nu_1'^2 = -\frac{c_2}{m_2};$$

$$\nu_2'^2 = \frac{c_2}{m_2}; \quad \tau_2 \nu_2'^2 = -\frac{c_1}{m_2};$$

$$\tau_1 \tau_2 = \frac{c_2 c_1}{m_2 m_2} \cdot \frac{m_1 m_2}{c_1 (m_1 + m_2)} \frac{m_2}{c_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Demnach werden der Kopplungsfaktor:

$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

und die Kreisfrequenzen:

$$\nu'_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2}}; \quad \nu'_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}.$$

4. Herleitung der Differentialgleichung der Tischbewegung aus den Bewegungsgleichungen. Jedes der beiden vorstehend abgeleiteten Gleichungspaare der Beschleunigungs- und der Kräftekopplung ergibt nach Zusammenfassung eine Differentialgleichung 4. Grades für x_1 und x_2 , die aber identisch sind.

Aus (1) folgt:

$$m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -c_1 x_1;$$

dieses in Gleichung (2) eingesetzt:

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 - c_1 x_1 = 0;$$

hieraus wird:

$$x_1 = \frac{m_2}{c_1} \ddot{x}_2 + \frac{c_2}{c_1} x_2;$$

zweimal differenziert wird daraus:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2}{c_1} \ddot{\ddot{x}}_2 + \frac{c_2}{c_1} \ddot{x}_2;$$

diese beiden Ausdrücke für x_1 und \ddot{x}_1 in Gleichung (1) eingesetzt, ergeben nun folgenden Ausdruck:

$$\frac{m_2}{c_1} \ddot{\ddot{x}}_2 + \frac{c_2}{c_1} \ddot{x}_2 + \frac{c_1}{m_1} \frac{m_2}{c_1} \ddot{\ddot{x}}_2 + \frac{c_1}{m_1} \frac{c_2}{c_1} x_2 + \ddot{x}_2 = 0;$$

nach Kürzung und Zusammenfassung:

$$\ddot{\ddot{x}}_2 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) \ddot{x}_2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} x_2 = 0;$$

für x_1 läßt sich dieses ebenfalls durchführen!

Aus Gleichung (1a) bestimmen wir;

$$x_2 = \frac{m_2}{c_2} \ddot{x}_1 + \frac{c_1 m_2}{m_1 c_2} x_1 + \frac{c_1}{c_2} x_1;$$

differenzieren wir zweimal, dann ist

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2}{c_2} \ddot{\ddot{x}}_1 + \frac{c_1 m_2}{m_1 c_2} \ddot{x}_1 + \frac{c_1}{c_2} \ddot{x}_1;$$

diese beiden Ausdrücke, in (2a) eingesetzt, ergeben wiederum die Differentialgleichung 4. Grades:

$$\frac{m_2}{c_2} \ddot{\ddot{x}}_1 + \left(\frac{c_1 m_2}{m_1 c_2} + \frac{c_1}{c_2} \right) \ddot{x}_1 + \frac{c_2}{m_2} \left[\left(\frac{c_1 m_2}{m_1 c_2} + \frac{c_1}{c_2} \right) x_1 + \frac{m_2}{c_2} x_1 \right] - \frac{c_1}{m_2} x_1 = 0.$$

Zusammengefaßt und gekürzt wird hieraus wie oben:

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) \dot{x}_1 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} x_1 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung dieser Differentialgleichung lautet:

$$r^4 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) r^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0;$$

hieraus die Quadratwurzel ergibt:

$$r^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Die beiden Gleichungspaare (je eins für Beschleunigungs-, je eins für Kraftkopplung) ergeben jeweils gleiche charakteristische Gleichungen. Es läßt sich demnach zeigen, daß sich die Bewegungsgleichungen des besprochenen Systems sowohl durch die Ausdrücke der Beschleunigungskopplung als auch für Kraftkopplung darstellen lassen und daß sich je ein Gleichungspaar für Beschleunigungs- und Kraftkopplung ergibt, das zu denselben allgemeinen Lösungen der charakteristischen Gleichung führt.

Die Differentialgleichung für die Bewegung des Tisches lautete bekanntlich:

$$\ddot{x}_2 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) \dot{x}_2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} x_2 = 0;$$

ihre allgemeine Lösung ist:

$$x_2 = A \cos \sqrt{(\alpha + \beta) t} + B \sin \sqrt{(\alpha + \beta) t} + C \cos \sqrt{(\alpha - \beta) t} + D \sin \sqrt{(\alpha - \beta) t}.$$

Hierbei ist:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right);$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{4 c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Die 4 Integrationskonstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Für $t = 0$ ist: $x_1 = 0$; $\dot{x}_2 = 0$; $\dot{x}_1 = v_0$; $\dot{x}_2 = 0$; somit ist die Bewegung des Systems Pendel-Stoßtisch durch folgende 2 Gleichungen für x_1 und x_2 gegeben.

$$x_1 = \frac{v_0}{2\beta m_2} \left[\frac{c_2 m_2 (\alpha + \beta)}{\sqrt{\alpha + \beta}} \sin \sqrt{(\alpha + \beta) t} + \frac{c_2 - m_2 (\alpha - \beta)}{\sqrt{\alpha - \beta}} \sin \sqrt{(\alpha - \beta) t} \right];$$

$$x_2 = \frac{v_0}{2\beta m_2} \left[-\frac{c_1}{\sqrt{\alpha + \beta}} \sin \sqrt{(\alpha + \beta) t} + \frac{c_1}{\sqrt{\alpha - \beta}} \sin \sqrt{(\alpha - \beta) t} \right];$$

oder vereinfacht:

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \sin \omega_2 t;$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t.$$

In Abb. 2 sind die Wege des Tisches und des Pendels während der Stoßperiode in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen. Die Tischbewegung setzt sich aus den beiden Schwingungen

$$x_2 = A_2 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t,$$

die Pendelbewegung aus:

$$x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \sin \omega_2 t + x_2$$

zusammen.

Wenn die Deformation der Pendelfeder $x_1 = 0$ geworden ist, dann trennt sich das Pendel vom Tisch, der Stoßvorgang ist zu Ende. Von nun an vollführt der Tisch, wie bereits gesagt, eine einfache harmonische Bewegung, deren Gleichung

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 = 0$$

ist. Wenn nach Ablauf der Zeit t_2 der Stoßvorgang zu Ende ist, so müssen in die Lösung der vorstehenden Differentialgleichung für $t = t_2$:

$$x_2 = (x_2)_{t_2}; \quad \dot{x} = (\dot{x}_2)_{t_2}$$

gesetzt werden.

In welcher Weise der Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Stoßtisches von der Stoßhärte, d. h. von der Steifigkeit der Feder c_1 abhängen, zeigen die Abb. 3_{a-c}. Mit zunehmender Federsteifigkeit verringert sich die Dauer des Stoßes und auch der Weg des Tisches während der Stoßphase, dagegen steigt die Beschleunigung zu immer größeren Werten an.

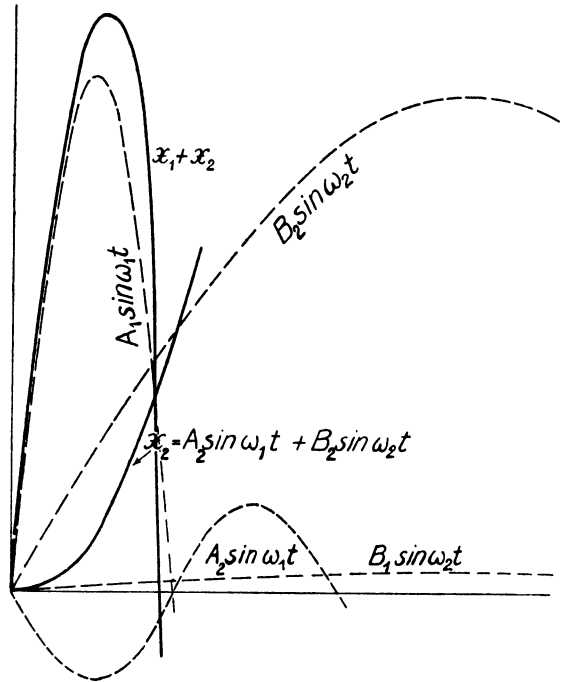


Abb. 2. Pendel- und Tischbewegung in Abhängigkeit von der Zeit während der Stoßphase.

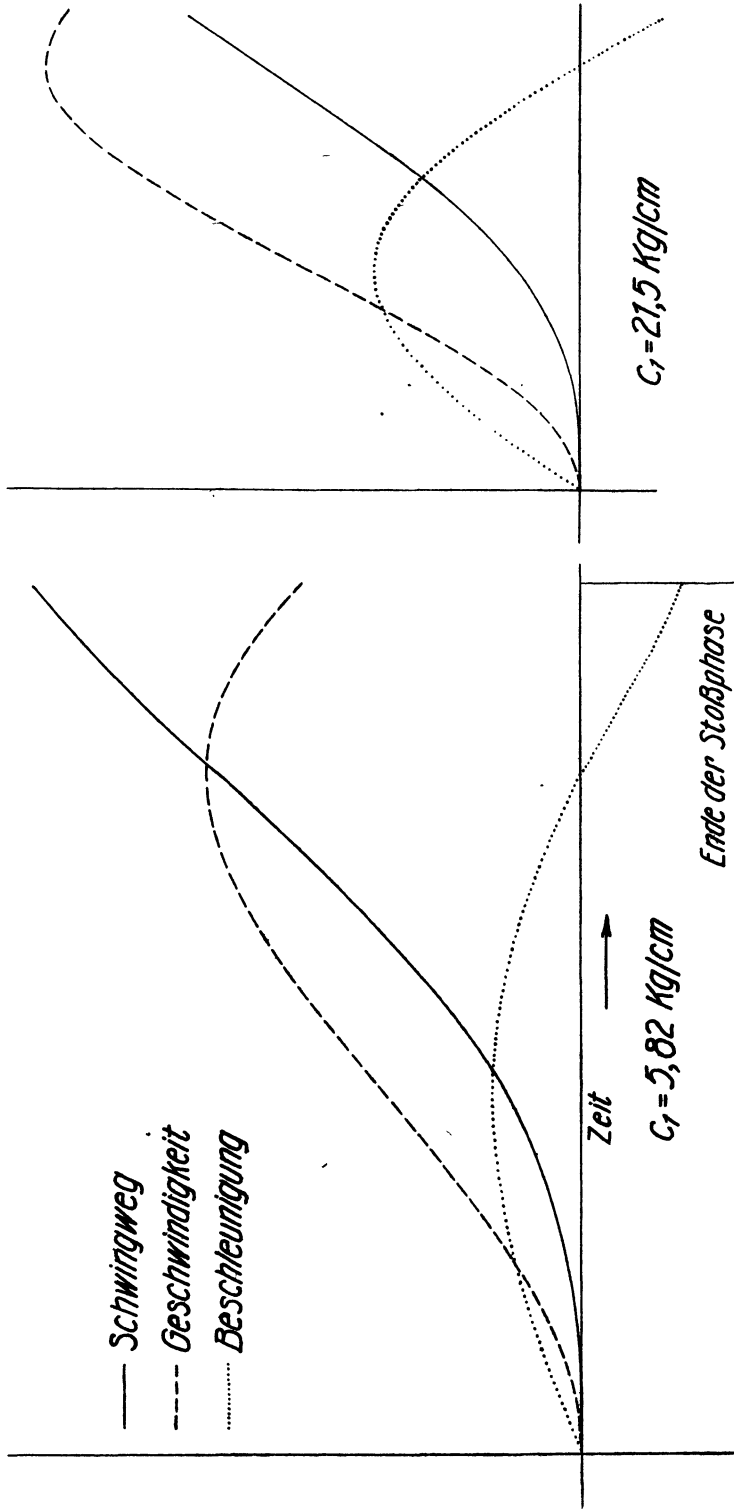


Abb. 3 a, b. Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Stoßtisches in Abhängigkeit von der Zeit während der Stoßphase bei verschiedenen Federkonstanten C_1 .

b

a

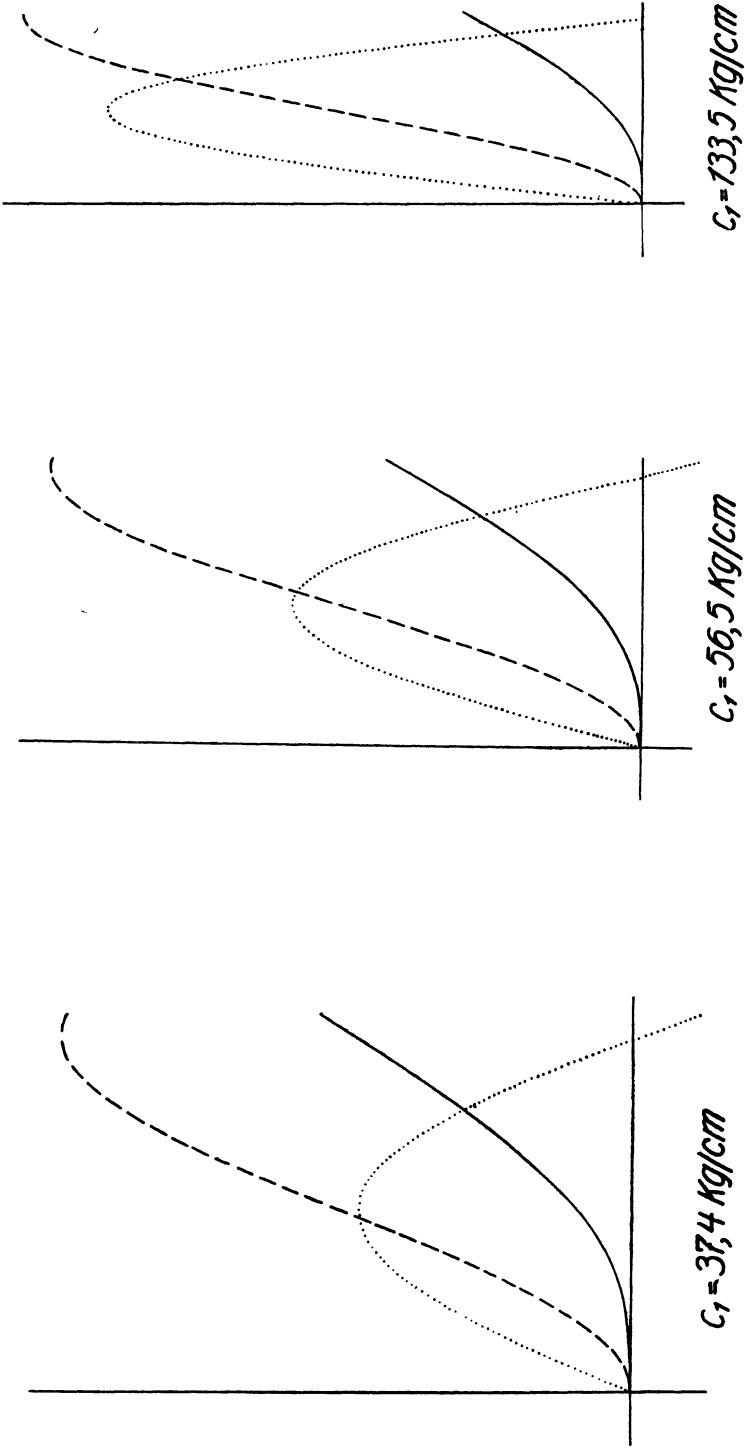


Abb. 3 c-e. Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Stoßsiches in Abhängigkeit von der Zeit während der Stoßphase bei verschiedenen Federkonstanten c_1 .

II. Der einseitig eingespannte prismatische Stab auf dem Stoßtisch.

In der nun folgenden Herleitung der Biegelinie des einseitig eingespannten prismatischen Stabes ist der Einfluß der Kopplung zwischen Stab und Tisch nicht berücksichtigt worden.

1. Herleitung der Gleichung der Biegelinie bei Anregung durch eine dämpfungs freie Stoßbewegung. Es sei:

- l = Stablänge
- g = Erdbeschleunigung
- E = Elastizitätsmaß des Stabmaterials
- F = Stabquerschnitt
- I = Trägheitsmoment des Stabquerschnittes
- γ = Dichte des Stabmaterials
- y = Ordinate der horizontalen Stabschwingungen
- x = Abszisse eines Stabpunktes
- ω = Kreisfrequenz der Bodenschwingung
- ν = Kreisfrequenz der Stabschwingung
- M = Biegemoment
- W = Widerstandsmoment
- σ = innere Spannung.

Die Differentialgleichung eines schwingenden Stabes von gleichem Querschnitt lautet:

$$\frac{EIg}{jF} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

mit dem Produktansatz $y(x, t) = f(x)g(t)$ erhält man die bekannte allgemeine Lösung:

$$y = (a \cos \nu t + b \sin \nu t) (A_1 \cos m x + A_2 \cos m x + A_3 \sin m x + A_4 \sin m x).$$

Die erste Klammer enthält die Zeitfunktion, die zweite die Ortsfunktion. Hierin ist:

$$m = \sqrt[4]{\frac{\gamma F \omega^2}{EIg}}.$$

Nachdem man durch geeignete Anfangsbedingungen die vier Konstanten A_{1-4} und die Art des Bewegungsvorganges (die Zeitfunktion) bestimmt hat, können mit Hilfe dieser Lösung die Biegelinie und die daraus ableitbaren Biege- und Querkräfte bestimmt werden.

Nimmt man an, daß der Stab an einem Ende fest eingespannt ist, so ergeben sich folgende Anfangsbedingungen:

$$1) t = 0; \quad y = 0;$$

- 2) $x = 0$; $y = A_0 \sin \omega_1 t + B_0 \sin \omega_2 t$; zusammengesetzte Sinusbewegungen (gekoppelte Schwingung);
- 3) $x = 0$; $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; denn die Krümmung an der Einspannstelle = 0;
- 4) $x = 1$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$; das Biegemoment an der Stabspitze = 0;
- 5) $x = 1$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$; Querkraft an der Stabspitze = 0.

Gegenüber den bisher bekannten Anfangsbedingungen stellt die zweite eine Neuerung dar. In den bisherigen Arbeiten wurde die zweite Anfangsbedingung als eine einfache Sinusbewegung von der Form $y = A_0 \sin \omega t$ dargestellt, d. h. die Einspannstelle führt eine harmonische Schwingung aus. In der hier vorliegenden Form vollführt die Einspannstelle eine aus zwei Sinusschwingungen zusammengesetzte Schwingung aus. Zum besseren Verständnis der späteren Untersuchungen sei hier eine vollständige Bestimmung der Konstanten A_{1-4} durchgeführt.

Aus der ersten Anfangsbedingung folgt:

$$1) t = 0; y = a(A_1 \text{Cof } m x + A_2 \cos m x + A_3 \text{Sin } m x + A_4 \sin m x) = 0.$$

$$\text{Also } a = 0.$$

2) $x = 0$; $y = A_0 \sin \omega_1 t + B_0 \sin \omega_2 t$; da die Frequenzen übereinstimmen müssen

$$\nu_1 = \omega_1, \nu_2 = \omega_2,$$

schreiben wir:

$$\begin{aligned} y &= C_1 (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t) (A_1 \text{Cof } m_1 x + A_2 \cos m_1 x \dots) \\ &\quad + C_2 (a \cos \omega_2 t + b \sin \omega_2 t) (B_1 \text{Cof } m_2 x + B_2 \cos m_2 x \dots) \\ &= A_0 \sin \omega_1 t + B_0 \sin \omega_2 t; \end{aligned}$$

setzt man hierin $x = 0$, so wird

$$y = C_1 b \sin \omega_1 t (A_1 + A_2) + C_2 b \sin \omega_2 t (B_1 + B_2) = A_0 \sin \omega_1 t + B_0 \sin \omega_2 t.$$

Hieraus folgt:

$$C_1 b (A_1 + A_2) = A_0; \quad C_2 b (B_1 + B_2) = B_0.$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\partial y}{\partial x} &= C_1 b \sin \omega_1 t m_1 (A_1 \text{Sin } m_1 x - A_2 \sin m_1 x + A_3 \text{Cof } m_1 x \\ &\quad + A_4 \cos m_1 x) \\ &\quad + C_2 b \sin \omega_2 t m_2 (B_2 \text{Sin } m_2 x - B_2 \sin m_2 x + B_3 \text{Cof } m_2 x \\ &\quad + B_4 \cos m_2 x) = 0. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ wird $A_3 + A_4 = 0$; $B_3 + B_4 = 0$.

$$4) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1 b \sin \omega_1 t m_1^2 (A_1 \text{Cof } m_1 x - A_2 \cos m_1 x + A_3 \text{Sin } m_1 x - A_4 \sin m_1 x) + C_2 b \sin \omega_2 t m_2^2 (B_1 \text{Cof } m_2 x - B_2 \cos m_2 x + B_3 \text{Sin } m_2 x - B_4 \sin m_2 x) = 0.$$

Für $x = l$ wird nun

$$C_1 b m_1^2 \sin \omega_1 t (A_1 \text{Cof } m_1 l \dots) + C_2 b m_2^2 \sin \omega_2 t (B_1 \text{Cof } m_2 l \dots) = 0;$$

und hieraus:

$$(A_1 \text{Cof } m_1 l - A_2 \cos m_1 l + A_3 \text{Sin } m_1 l - A_4 \sin m_1 l) = 0;$$

$$(B_1 \text{Cof } m_2 l - B_2 \cos m_2 l + B_3 \text{Sin } m_2 l - B_4 \sin m_2 l) = 0.$$

$$5) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C_1 b \sin \omega_1 t m_1^3 (A_1 \text{Sin } m_1 x + A_2 \sin m_1 x + A_3 \text{Cof } m_1 x - A_4 \cos m_1 x) + C_2 b \sin \omega_2 t m_2^3 (B_1 \text{Sin } m_2 x + B_2 \sin m_2 x + B_3 \text{Cof } m_2 x - B_4 \cos m_2 x) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C_1 b \sin \omega_1 t m_1^3 (A_1 \text{Sin } m_1 x + A_2 \sin m_1 x + A_3 \text{Cof } m_1 x - A_4 \cos m_1 x) + C_2 b \sin \omega_2 t m_2^3 (B_1 \text{Sin } m_2 x + B_2 \sin m_2 x + B_3 \text{Cof } m_2 x - B_4 \cos m_2 x) = 0.$$

$$6) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}_{x=l} = C_1 b \sin \omega_1 t m_1^3 (A_1 \text{Sin } m_1 l + A_2 \sin m_1 l + A_3 \text{Cof } m_1 l - A_4 \cos m_1 l) + C_2 b \sin \omega_2 t m_2^3 (B_1 \text{Sin } m_2 l + B_2 \sin m_2 l + B_3 \text{Cof } m_2 l - B_4 \cos m_2 l) = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichungen 1) bis 4) werden die Größen A_{1-4} und B_{1-4} bestimmt. Wenn wir zuerst A_{1-4} bestimmen, so lautet die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{Cof } m_1 l & -\cos m_1 l & \text{Sin } m_1 l & -\sin m_1 l \\ \text{Sin } m_1 l & \sin m_1 l & \text{Cof } m_1 l & -\cos m_1 l \end{vmatrix}$$

In dieser Determinante wird die erste Spalte von der zweiten abgezogen, woraus sich dann eine Determinante 3. Grades ergibt. In dieser wird die dritte Spalte von der zweiten abgezogen und wir erhalten eine Determinante 2. Grades:

$$D = \begin{vmatrix} (-\text{Cof } m_1 l - \cos m_1 l) & (\text{Sin } m_1 l + \sin m_1 l) \\ (-\sin m_1 l - \text{Sin } m_1 l) & (\text{Cof } m_1 l + \cos m_1 l) \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhält man nun:

$$D = -(2 + 2 \cos m_1 l \text{Cof } m_1 l).$$

Alsdann lautet jetzt

$$A_1 = \frac{A_0}{C_1 b} \begin{vmatrix} \frac{A_0}{C_1 b} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\cos m_1 l & \mathfrak{S}in m_1 l & -\sin m_1 l \\ 0 & \sin m_1 l & \mathfrak{C}of m_1 l & -\cos m_1 l \end{vmatrix} : D.$$

Nachdem diese Determinante vereinfacht und auf eine solche 2. Grades gebracht worden ist, ergibt sich dann:

$$A_1 = \frac{A_0}{C_1 b} \frac{(1 + \cos m_1 l \cdot \mathfrak{C}of m_1 l + \sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l)}{2(1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l)};$$

$$A_1 = \frac{A_0}{2 C_1 b} \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} + 1 \right);$$

entsprechend für A_2 :

$$A_2 = \frac{A_0}{2 C_1 b} \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} - 1 \right);$$

$$A_3 = -\frac{A_0}{2 C_1 b} \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l + \cos m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} \right);$$

$$A_4 = +\frac{A_0}{2 C_1 b} \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l + \cos m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} \right).$$

Für die Größen B_{1-4} ergeben sich die gleichen Werte mit dem Argument $m_2 l$, so daß die vollständige Lösung, wenn man beachtet, daß

$$-\left(1 - \frac{\sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l}\right) = +\left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} - 1\right)$$

ist und

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} + 1 \right)$$

ausgeklammert werden kann, heißt:

$$\begin{aligned} y = & C_1 b \sin \omega_1 t \frac{A_0}{2 C_1 b} \left[\left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \mathfrak{C}of m_1 l \cos m_1 l} + 1 \right) \mathfrak{C}of m_1 x \right. \\ & - \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} - 1 \right) \cos m_1 x \\ & - \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l + \cos m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} \right) \mathfrak{S}in m_1 x \\ & \left. + \left(\frac{\sin m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l + \cos m_1 l \mathfrak{S}in m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} \right) \sin m_1 x \right] \\ & + C_2 b \sin \omega_2 t \frac{B_0}{2 C_2 b} \left[\dots m_2 l \dots m_2 x \right]. \end{aligned}$$

Setzt man zur besseren Übersicht:

$$d_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathfrak{S}in m_1 l \sin m_1 l}{1 + \cos m_1 l \mathfrak{C}of m_1 l} \right)$$

entsprechend d_2 mit dem Index m_2 , ferner

$$e_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{C}of m_1 l \sin m_1 l + \mathfrak{S}in m_1 l \cos m_1 l}{1 + \mathfrak{C}of m_1 l \cos m_1 l} \right);$$

e_2 wiederum entsprechend mit dem Index $m_2 l$, so lautet die endgültige Gleichung der Biegelinie des eingespannten Stabes mit den obigen Anfangsbedingungen:

$$y = A_0 \sin \omega_1 t [d_1 (\mathfrak{C}of m_1 x - \cos m_1 x) + \cos m_1 x - e_1 (\mathfrak{S}in m_1 x - \sin m_1 x)] \\ + B_0 \sin \omega_2 t [d_2 (\mathfrak{C}of m_2 x - \cos m_2 x) + \cos m_2 x - e_2 (\mathfrak{S}in m_2 x - \sin m_2 x)].$$

Bekanntlich ergibt sich aus zweimaliger Differentiation der Biegelinie das Biegemoment:

$$M = - EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - A_0 \sin \omega_1 t m_1^2 EI [d_1 (\mathfrak{C}of m_1 x + \cos m_1 x) \\ - \cos m_1 x - e_1 (\mathfrak{S}in m_1 x + \sin m_1 x)] - B_0 \sin \omega_2 t m_2^2 [\dots m_2 x \dots].$$

In bekannter Weise erhält man die dynamische Biegespannung:

$$\sigma = \frac{M}{W}.$$

2. Herleitung der Gleichung der Biegelinie bei Anregung durch eine gedämpfte Stoßbewegung. Die vorher gegebene Ableitung der Biegelinie eines einseitig eingespannten Stabes von gleichem Querschnitt hatte als zweite Anfangsbedingung eine zusammengesetzte Sinusbewegung bzw. eine gekoppelte Schwingung, die ungedämpft ist. Es soll nun im folgenden die Biegelinie eines solchen Stabes hergeleitet werden, wenn sein Fußpunkt eine zusammengesetzte gedämpfte Schwingung vollführt. Diese Herleitung gestattet, bei beliebigen Bewegungsformen die Beanspruchung eines Stabes zu errechnen und ist darum als allgemeinerer Fall zu betrachten.

Die Differentialgleichung für den schwingenden eingespannten Stab gleichen Querschnittes lautet:

$$\frac{EIg}{\gamma F} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

der Übersichtlichkeit halber setzt man

$$\frac{EIg}{\gamma F} = C.$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung sei folgender Ansatz versucht:

$$y(x, t) = f(x)g(t) \text{ (Produktansatz);}$$

nun kann gesetzt werden:

$$Cf'''g + fg'' = 0;$$

das Ganze durch f und g geteilt ergibt:

$$C \frac{f'''}{f} + \frac{g''}{g} = 0;$$

man setzt nun

$$\frac{g''}{g} = -m^2; \text{ folglich } C \frac{f'''}{f} = m^2;$$

hierbei ist m willkürlich. Aus der vorletzten Gleichung ergibt sich:

$$g'' + m^2g = 0;$$

die charakteristische Gleichung hierzu heißt:

$$r^2 + m^2 = 0;$$

daraus folgt:

$$r = \pm im;$$

nun lautet die allgemeine Lösung für g :

$$g = A_m e^{im t} + B_m e^{-im t};$$

setzen wir entsprechend: $Cf''' - m^2f = 0$;

dazu die charakteristische Gleichung:

$$r^4 = \frac{m^2}{C};$$

deren Wurzeln lauten:

$$r_{1, 2} = \pm \frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{C}}; \quad r_{3, 4} = \pm i \frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{C}};$$

die allgemeine Lösung dafür lautet dann:

$$f = A_1^{(m)} e^{r_1 x} + A_2^{(m)} e^{r_2 x} + A_3^{(m)} e^{r_3 x} + A_4^{(m)} e^{r_4 x},$$

so ist die allgemeine Lösung obiger Schwingungs-Differentialgleichung durch das Produkt von g und f gegeben. In dieser allgemeinen Lösung sind die Konstanten $A_m, B_m, A_1, A_2, A_3, A_4$ unbekannt und mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu bestimmen. Diese lauten mit Ausnahme der zweiten wie oben.

$$t = 0; \quad y = 0;$$

$$x = 0; \quad y = A_0 e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t + B_0 e^{-\beta_2 t} \sin \omega_2 t$$

(zusammengesetzte gedämpfte Sinusschwingungen);

$$x = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ (Krümmung verschwindet);}$$

$$x = 1; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ (Moment verschwindet);}$$

$$x = 1; \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \text{ (Querkraft verschwindet).}$$

Absichtlich wurden bei der allgemeinen Lösung von g komplexe Größen eingeführt, um der zweiten Anfangsbedingung (zwei gedämpfte Sinusschwingungen) zu entsprechen. Setzen wir nun in unserer allgemeinen Lösung $x = 0$, so erhalten wir für f :

$$f = A_1^{(m)} + A_2^{(m)} + A_3^{(m)} + A_4^{(m)}; \text{ denn } e^0 = 1.$$

Es wird also

$$y = (A_1^{(m)} + \dots + A_4^{(m)}) (A_m e^{i m t} + B_m e^{-i m t});$$

setzt man nun

$$m_1 = \omega_1 + i \beta_1,$$

so wird:

$$e^{i m t} = e^{-\beta_1 t} \cos \omega_1 t + i e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t$$

und

$$e^{-i m t} = e^{-\beta_1 t} \cos \omega_1 t - i e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t.$$

Um auf die Form der zweiten Anfangsbedingung zu kommen, lassen wir die beiden \cos -Glieder in den Ausdrücken für $e^{i m t}$ und $e^{-i m t}$ wegfallen und erhalten dann für:

$$t = 0;$$

$$y = 0;$$

$$B_{m_1} = -A_{m_1};$$

nun kann die Lösung geschrieben werden:

$$y_1 = (A_1^{(m_1)} + A_2^{(m_1)} + A_3^{(m_1)} + A_4^{(m_1)}) 2 A_{m_1} i (e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t).$$

Wird entsprechend $m_2 = \omega_2 + i \beta_2$

gesetzt, so erhalten wir wie vorher

$$B_{m_2} = -A_{m_2}$$

und $y_2 = (A_1^{(m_2)} + A_2^{(m_2)} + A_3^{(m_2)} + A_4^{(m_2)}) 2 A_{m_2} i (e^{-\beta_2 t} \sin \omega_2 t).$

Aus den beiden Teillösungen y_1 und y_2 kann die allgemeine Lösung zusammengesetzt werden, da jede Lösung plus einer anderen Lösung bei homogenen linearen Differentialgleichungen eine neue Lösung ergibt (Superposition):

$$y = A_0 f_1 g_1 + B_0 f_2 g_2;$$

hierbei ist $f_1 = (A_1^{(m_1)} e^{r_1 x} + A_2^{(m_1)} e^{r_2 x} + A_3^{(m_1)} e^{r_3 x} + A_4^{(m_1)} e^{r_4 x})_1;$

Index 1 bezieht sich auf r_1 bis r_4 .

$$f_2 = (A_1^{(m_2)} e^{r_1 x} + \dots + A_4^{(m_2)} e^{r_4 x})_2;$$

$$g_1 = 2i A_{m_1} e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t$$

und entsprechend für Index $_2$:

$$g_2 = 2i A_{m_2} e^{-\beta_2 t} \sin \omega_2 t ;$$

damit die Anfangsbedingung erfüllt wird und A_0 und B_0 erhalten wird, sei

$$2i A_{m_1} (A_1^{(m_1)} + \dots + A_4^{(m_1)}) = 1$$

gesetzt oder

$$2i A_{m_1} = \frac{1}{(A_1^{(m_1)} + \dots + A_4^{(m_1)})}$$

und für Index $_2$ entsprechend.

Die beiden Anfangsbedingungen waren

1) $t = 0, \quad y = 0 ;$

2) $x = 0, \quad y = A_0 e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t + B_0 e^{-\beta_2 t} \sin \omega_2 t .$

Aus der dritten Anfangsbedingung ergibt sich:

3) $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = A_0 f_1' g_1 + B_0 f_2' g_2 \Big|_{x=0} ;$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A_0 (r_1 A_1 + \dots + r_4 A_4)_{m_1} g_1 + B_0 (r_1 A_1 + \dots + r_4 A_4)_{m_2} g_2 = 0 .$$

Da f und g verschiedene Funktionen sind, außerdem A_0, B_0 noch willkürliche Konstanten sind, kann diese Gleichung nur $= 0$ sein, wenn $(r_1 A_1 + \dots + r_4 A_4)$ und der mit dem Index $_2$ entsprechende Ausdruck gleich Null ist.

Man erhält also folgende zwei Gleichungen:

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = (r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 + r_4 A_4)_{m_1} = 0 ;$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = (r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 + r_4 A_4)_{m_2} = 0 ;$$

man kann nun für die vierte Anfangsbedingung sogleich schreiben:

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=1} = (r_1^2 A_1 e^{r_1 1} + \dots + r_4^2 A_4 e^{r_4 1})_{m_1} = 0 ;$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=1} = (r_1^2 A_1 e^{r_1 1} + \dots + r_4^2 A_4 e^{r_4 1})_{m_2} = 0 .$$

In gleicher Weise für die fünfte

$$(r_1^3 A_1 e^{r_1 1} + \dots + r_4^3 A_4 e^{r_4 1})_{m_1} = 0 ;$$

$$(r_1^3 A_1 e^{r_1 1} + \dots + r_4^3 A_4 e^{r_4 1})_{m_2} = 0 ;$$

wie wir vorher gesehen haben, sind im ganzen zwölf Konstanten in der allgemeinen Lösung enthalten, die bestimmt werden müssen. Es sind dies folgende: ~

Aus der Funktion g_1 : die beiden A_{m_1} und B_{m_1} ; weil aber $A_{m_1} = -B_{m_1}$ ist (s. vorher), entfällt eine davon. Genau so bei der Funktion g_2 : A_{m_2} und B_{m_2} , wovon wiederum eine entfällt. Wie vorher zu sehen ist, ist A_{m_1} und entsprechend A_{m_2} durch die Konstanten $[A_1^{(m_1, s)} + \dots + A_4^{(m_1, s)}]$ bestimmt. Diese letzten vier müssen noch bestimmt werden. Hierzu stehen uns folgende drei Gleichungen zur Verfügung, die durch die Anfangsbedingungen gegeben sind:

$$\begin{array}{l} r_1 A_1 + \dots + r_4 A_4 = 0 \\ r_1^2 A_1 e^{r_1 l} + \dots + r_4^2 A_4 e^{r_4 l} = 0 \\ r_1^3 A_1 e^{r_1 l} + \dots + r_4^3 A_4 e^{r_4 l} = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad 1$$

Im folgenden seien nur die Konstanten mit dem Index $_1$ angegeben, da die mit dem Index $_2$ gleichlauten. Wir können nun A_{1-4} gleich gewissen Determinanten setzen:

$$\begin{array}{l} A_1 = F \quad \left| \begin{array}{ccc} r_2 & r_3 & r_4 \\ r_2^2 e^{r_2 l} & r_3^2 e^{r_3 l} & r_4^2 e^{r_4 l} \\ r_2^3 e^{r_2 l} & r_3^3 e^{r_3 l} & r_4^3 e^{r_4 l} \end{array} \right| ; \\ A_1 = r_2 r_3 r_4 \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ r_2 e^{r_2 l} & r_3 e^{r_3 l} & r_4 e^{r_4 l} \\ r_2^2 e^{r_2 l} & r_3^2 e^{r_3 l} & r_4^2 e^{r_4 l} \end{array} \right| ; \end{array}$$

$$A_1 = F r_2 r_3 r_4 [(r_3 r_4^2 - r_4 r_3^2) e^{(r_3 + r_4) l} - (r_2 r_4^2 - r_4 r_2^2) e^{(r_2 + r_4) l} + (r_2 r_3^2 - r_3 r_2^2) e^{(r_2 + r_3) l}];$$

$$A_1 = F r_2 r_3 r_4 [r_3 r_4 (r_4 - r_3) e^{(r_3 + r_4) l} + r_4 r_2 (r_2 - r_4) e^{(r_4 + r_2) l} + r_2 r_3 (r_3 - r_2) e^{(r_3 + r_2) l}];$$

In ähnlicher Weise bestimmen wir:

$$A_2 = F r_3 r_4 r_1 [r_4 r_1 (r_1 - r_4) e^{(r_4 + r_1) l} + r_3 r_1 (r_3 - r_1) e^{(r_3 + r_1) l} + r_4 r_3 (r_4 - r_3) e^{(r_4 + r_3) l}];$$

$$A_3 = F r_4 r_1 r_2 [r_1 r_2 (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) l} + r_2 r_4 (r_4 - r_2) e^{(r_2 + r_4) l} + r_4 r_1 (r_1 - r_4) e^{(r_1 + r_4) l}];$$

$$A_4 = F r_1 r_2 r_3 [r_2 r_3 (r_3 - r_2) e^{(r_3 + r_2) l} + r_1 r_3 (r_1 - r_3) e^{(r_1 + r_3) l} + r_1 r_2 (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) l}].$$

Mithin sind die vier Konstanten A_1 bis A_4 bestimmt. Nun fehlt noch die Errechnung der Größen r_1 bis r_4 . Es war

$$r_{1, 2} = \pm \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{C}}; \quad r_{3, 4} = \pm i \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{C}};$$

ferner war $m = \omega + i\beta$ und demnach

$$\sqrt{m} = \sqrt{\omega + i\beta} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}};$$

$$\sqrt{m} = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\omega^2 + \beta^2}; \\ &\text{vgl. Abb. 4;} \\ \sin \varphi &= \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}; \\ \sin \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}; \\ \cos \varphi &= \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}; \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + \beta^2} + \omega}{2}}; \end{aligned}$$

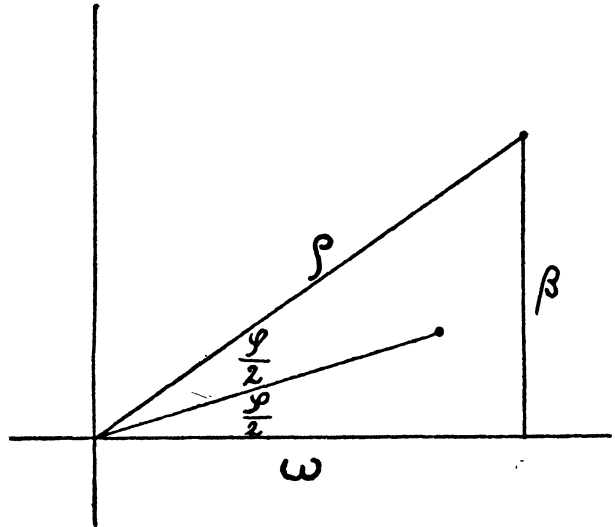


Abb. 4.

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + \beta^2} - \omega}{2}}. \text{ Nun ist:}$$

$$\sqrt{m} = \sqrt[4]{\omega^2 + \beta^2} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + \beta^2} + \omega}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + \beta^2} - \omega}{2}} \right]; \text{ oder}$$

$$\sqrt{m} = \sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2 + \omega \sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2 - \omega \sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{2}}.$$

Endlich ist:

$$r_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{C}} \left[\sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2 + \omega \sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2 - \omega \sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{2}} \right];$$

$$r_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{C}} \left[i \sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2 + \omega \sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{2}} - \sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2 - \omega \sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{2}} \right].$$

Es ergibt sich aus vorstehendem, daß die Wurzelwerte r_1 bis r_4 sich je aus einem Realteil und einem Imaginärteil zusammensetzen. Berücksichtigt man, daß in bezug auf die Differentialgleichung die Realteile für sich eine Lösung ergeben, so kann nun, da alle notwen-

digen Werte bekannt sind, die Lösung geschrieben werden, wenn man für $A_n = F a_n$ setzt:

$$y = A_0 F (a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x} + a_3 e^{r_3 x} + a_4 e^{r_4 x})_{m_1} \frac{1}{F (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)_{m_1}} e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t \\ + B_0 F (a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x} + a_3 e^{r_3 x} + a_4 e^{r_4 x})_{m_2} \frac{1}{F (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)_{m_2}} e^{-\beta_2 t} \sin \omega_2 t;$$

oder

$$y = A_0 \left(\frac{a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x} + a_3 e^{r_3 x} + a_4 e^{r_4 x}}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \right)_{m_1} e^{-\beta_1 t} \sin \omega_1 t \\ + B_0 \left(\frac{a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x} + a_3 e^{r_3 x} + a_4 e^{r_4 x}}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \right)_{m_2} e^{-\beta_2 t} \sin \omega_2 t .$$

Zweiter Abschnitt.

Experimenteller Teil.

Auf eine breitere Darstellung der Versuchseinrichtung, insbesondere des Stoßtisches, konnte hier verzichtet werden, da dieser bereits an anderer Stelle eingehend beschrieben worden ist.

I. Versuchseinrichtung und Methode.

Für die experimentelle Ermittlung der Biegelinie wurde nach mancherlei Versuchen eine Methode entwickelt, die einwandfreie Ergebnisse liefert. Da die Biegelinie bei verschiedenen Stoßbedingungen, d. h. bei verschiedenen Stoßhärten untersucht werden sollte, wurden Pendelfedern mit unterschiedlichen Drahtstärken verwandt. Die Federkonstanten dieser Federn, die ja in erster Linie für die Frequenzen ω_1 , d. h. für die Stoßdauer und die Stoßhärte maßgebend sind, wurden auf dem Versuchswege durch Messen ihrer Längenänderung bei Belastung nachgeprüft. Im allgemeinen entsprechen die Werte c_1 denen aus der Hütte, Bd. II, S. 664, 25. Aufl. Bei allen Versuchen wurde die Periode des frei schwingenden Tisches konstant gehalten, um den Einfluß der Stoßhärte allein zu erhalten.

Ebenso war die Energie des Stoßes, d. h. die Fallhöhe des Pendels die gleiche.

Der untersuchte Stab hatte eine freie Länge von 55 cm und einen Querschnitt von $15 \times 1,5$ mm. Die Eigenperiode der Grundschiwingung betrug 0,26 sec und stimmte genau mit der aus der Gleichung

$$T_0 = 1,787 l^2 \sqrt{\frac{\gamma F}{E I g}} \text{ überein.}$$

Auf dem zu untersuchenden Stab sind in gleichen Abständen neun leichte Hohlspiegel angebracht. Jeder dieser Spiegel wird von einer Einfadenlampe so angeleuchtet, daß das Bild des Fadens auf die Zylinderlinse einer Registrierfilmkamera fällt. Die Verbiegungen des Stabes beim Schwingen ergeben entsprechende Ausschläge der Lichtzeiger, deren Abbildungsschärfe praktisch unabhängig von der Tischbewegung ist. Abb. 5 zeigt das Schema der Versuchsanordnung. Um

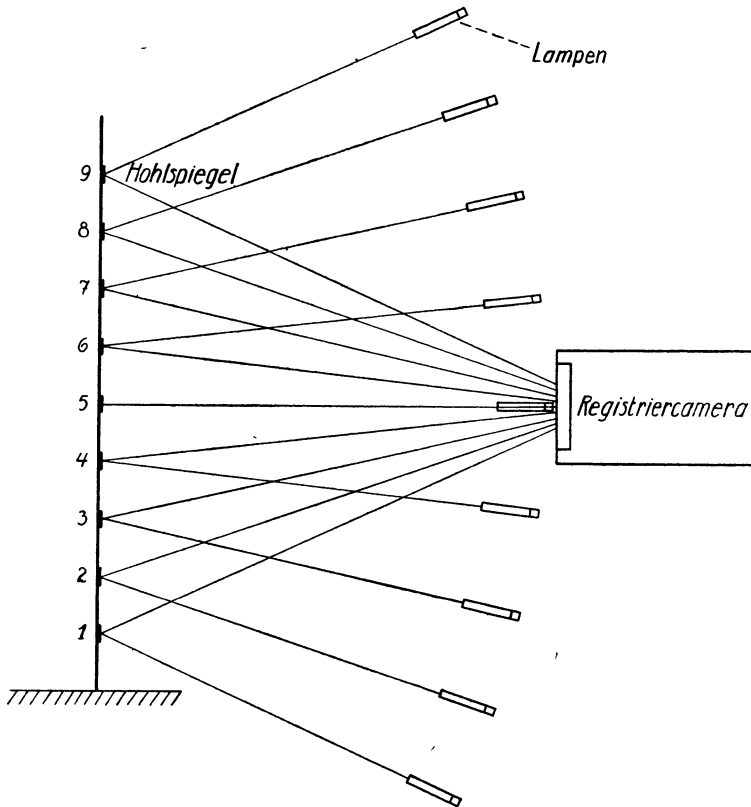


Abb. 5. Schema der Versuchsanordnung.

eine genügende Auflösung der Vorgänge zu erhalten, wurde die Filmgeschwindigkeit des Registrierapparates möglichst hoch, etwa 15 cm/sec gewählt. Der Augenblick der Beendigung der Stoßphase wurde dadurch erhalten, daß der primäre Stromkreis einer Induktionsspule durch die Pendelfeder selbst beim Verlassen des Tisches unterbrochen wurde. Der hierbei in der Induktionsspule entstehende Sekundärstrom erzeugte mittels Geislerrohr einen Lichtblitz, der auf

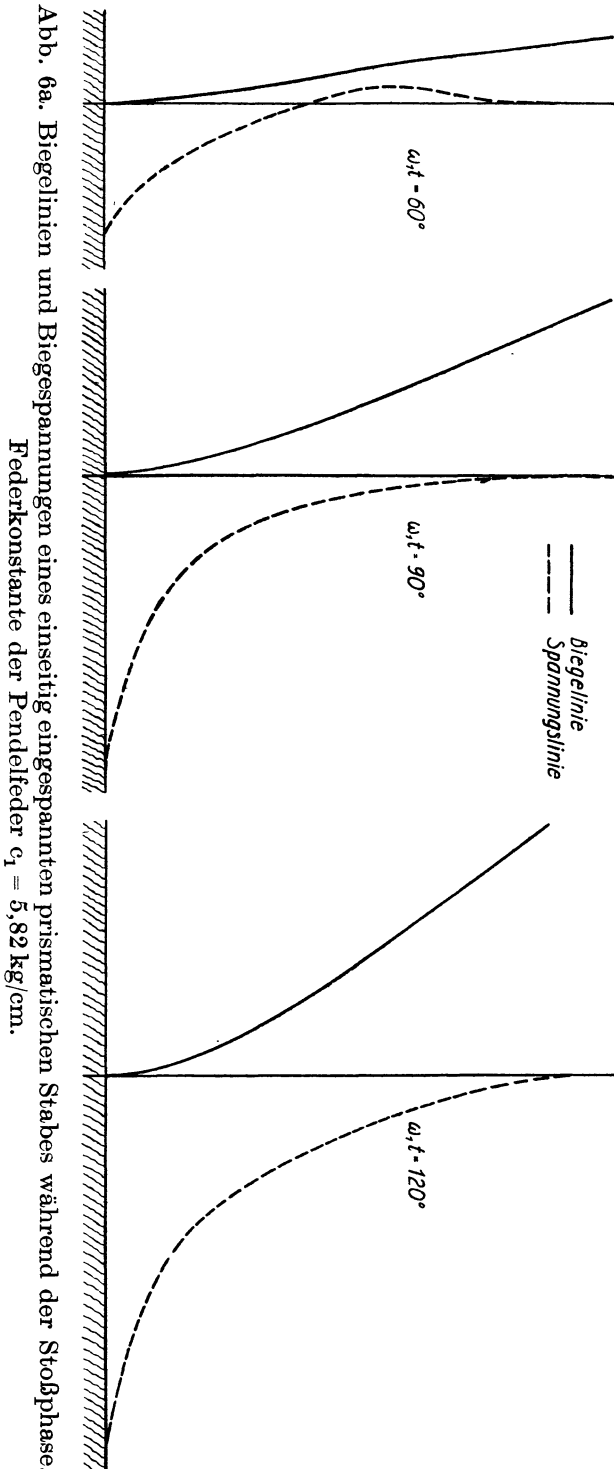


Abb. 6a. Biegelinien und Biegespannungen eines einseitig eingespannten prismatischen Stabes während der Stoßphase. Federkonstante der Pendelfeder $c_1 = 5,82 \text{ kg/cm}$.

dem Film registriert wurde und das Ende der Stoßphase anzeigt.

Zum Ausmessen der Registrierfilme wurde ein Meßkomparator benutzt. Die Dauer der Stoßphase t_2 wurde zu etwa 180° der Frequenz ω_1 entsprechend Abb. 2 angenommen. Die Werte für die Ausschläge der Lichtzeiger wurden von 15° zu 15° der Stoßphase abgelesen. Hieraus konnten die Biegelinien zeichnerisch ermittelt werden. Aus

diesen ergaben sich durch zweimalige graphische Differentiation die Biegespannungen. Diese recht umständlichen und genau auszuführenden zeichnerischen Arbeiten wurden durch die Benutzung einer Zeichenmaschine fühlbar erleichtert. Wegen des Zeitmangels konnte die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch nur an Stichproben rechnerisch nachgewiesen werden. Da die Tischbewegung

bei allen Versuchen schwach gedämpft war, wurde zur Nachrechnung Dämpfungsfreiheit vorausgesetzt.

II. Versuchsergebnisse.

Die nun folgenden Abb. 6 a–e u. 7 zeigen den Verlauf der Biege- und Spannungslinien in den Stoßphasen 60° , 90° und 120° bei verschiedenen Steifigkeitszahlen der Stoßfedern.

Der Stoß setzt sich, wie im ersten Teil der Arbeit gezeigt wird, aus zwei Frequenzteilen ω_1 und ω_2 zusammen. Je nachdem eine dieser beiden Frequenzen der Eigenschwingungszahl des Stabes oder

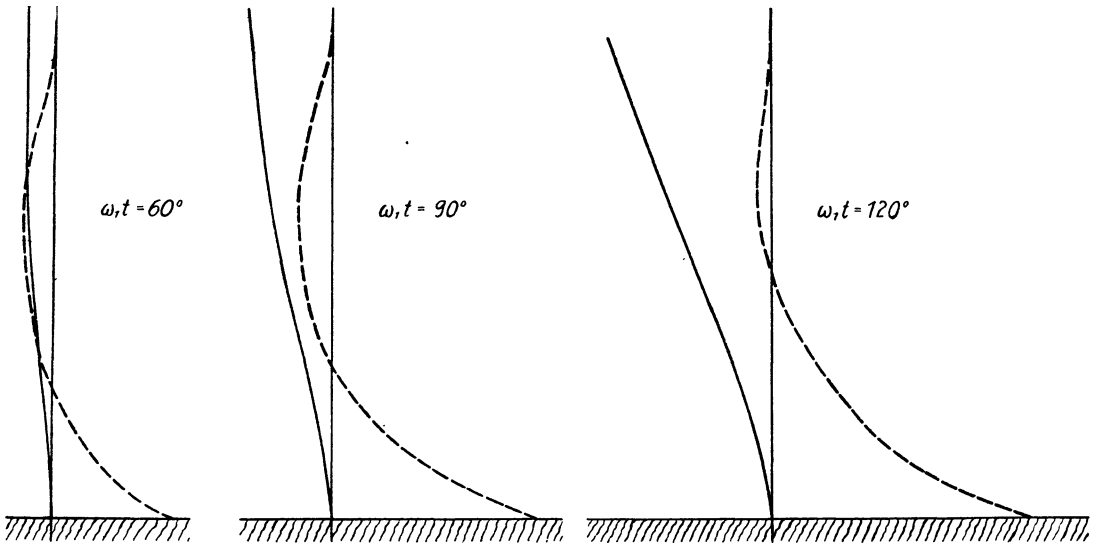


Abb. 6 b. Biegelinien und Biegespannungen eines einseitig eingespannten prismatischen Stabes während der Stoßphase.
Federkonstante der Pendelfeder $c_1 = 21,5 \text{ Kg/cm}$.

einer seiner Harmonischen benachbart ist, wird die eine oder die andere überwiegen und das Bild der Beanspruchung beeinflussen. Während der frei schwingende Stab ähnliche Spannungsverhältnisse wie bei statischer Belastung aufzuweisen hat, können sich die Verhältnisse bei stoßartiger Beanspruchung merklich ändern. So bieten die Biege- und Spannungslinien im allgemeinen mit Ausnahme der Kurven bei $c_1 = 5,82$ einen verhältnismäßig einheitlichen Verlauf. Abweichend von der Beanspruchung eines frei schwingenden Stabes ist der zusammengesetzte Charakter der Spannungslinien, die eben auf das Vorhandensein zweier Frequenzen zurückzuführen ist und sich darin äußert, daß eine Nullstelle vorhanden ist und der obere Teil des Stabes mit umgekehrtem Vorzeichen beansprucht wird. Die beiden Frequenzanteile setzen sich gemäß ihrem Frequenzverhältnis zu-

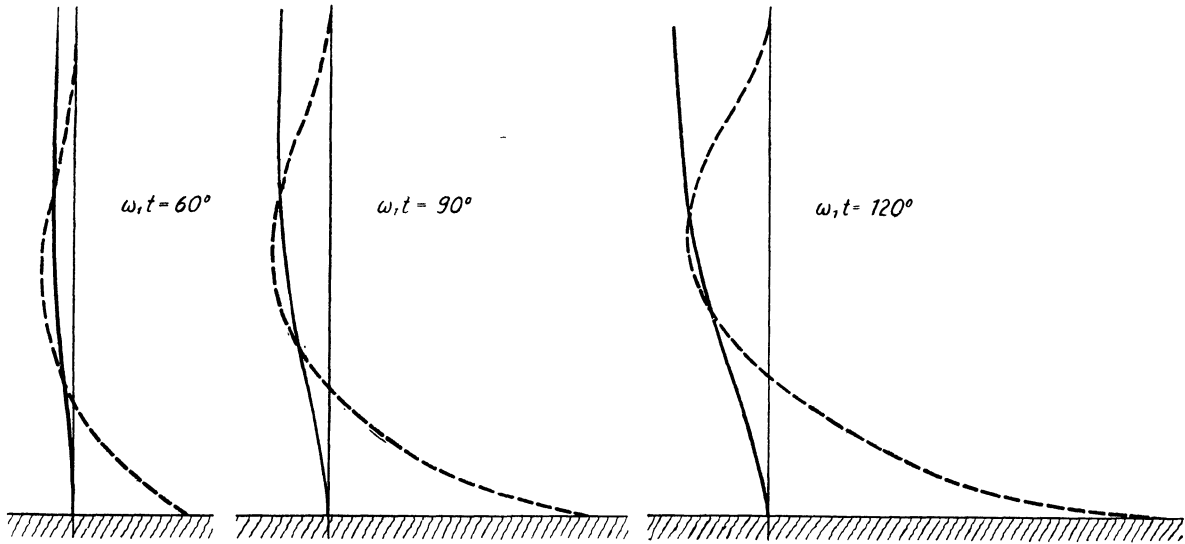


Abb. 6d. Biegelinien und Biegespannungen eines einseitig eingespannten prismatischen Stabes während der Stoßphase.
Federkonstante der Pendelfeder $c_1 = 56,5 \text{ Kg/cm}$.

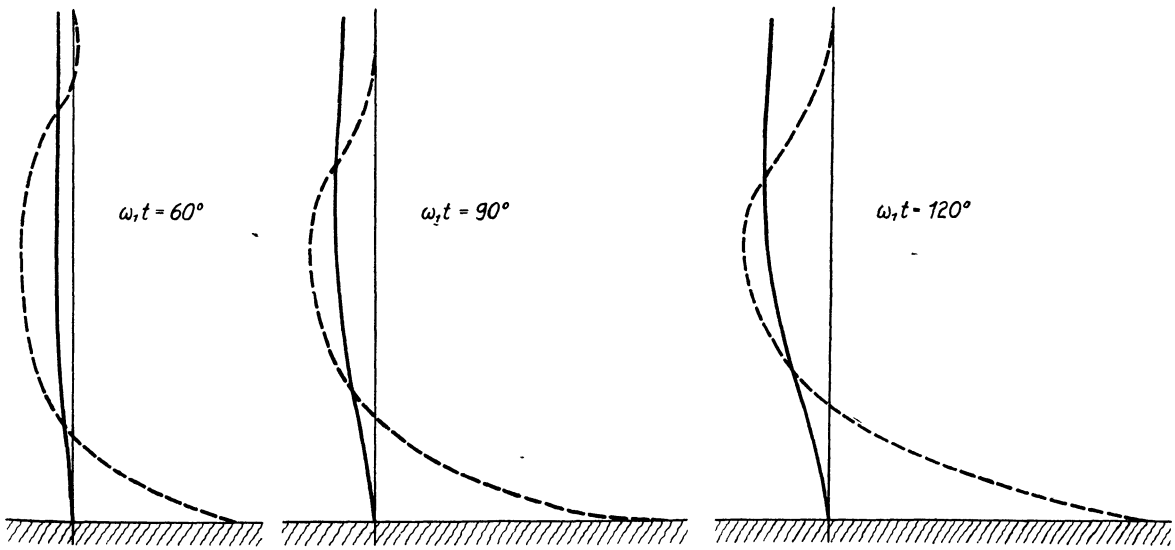


Abb. 6e. Biegelinien und Biegespannungen eines einseitig eingespannten prismatischen Stabes während der Stoßphase.
Federkonstante der Pendelfeder $c_1 = 133,5 \text{ Kg/cm}$.

da die weiterhin zu erwartenden eine ähnliche Verteilung aufweisen. Bei den Kurven mit $c_1 = 5,82$ und $c_1 = 21,5$ kg/cm, die sich nur weniger in der Form als in der Größe der Beanspruchung untereinander unterscheiden, ist der Einfluß der schnelleren Frequenz ω_1 nur gering. Jedoch ändern sich mit wachsenden Federsteifigkeiten die Belastungsverhältnisse derart, daß die Spannungen an der Einspannstelle zwar abnehmen, aber z. T. in höher gelegenen Stabteilen ihren Höchstwert erreichen.

Im allgemeinen also dürfte nach vorstehendem das Bild der Spannungsverteilung bei stoßartiger Beanspruchung oftmals recht erheblich von demjenigen verschieden sein, das durch eine einfache Sinusbewegung oder durch die freie Schwingung des Stabes entsteht. Von welcher Bedeutung dieses für die Erdbebenbautechnik ist, braucht wohl nicht betont zu werden.

Z. B. haben überschlanke Hochbauten, die man als stabförmige Körper ansehen kann, eine Widerstandsmomentenfläche, die von dem oben besprochenen Verlauf der Biegespannungen bzw. Biegemomente erheblich abweichen kann. Man kann hiernach ohne Zwang das durch Erdbeben verursachte Schadenbild solcher Hochbauten erklären. Die Zerstörungen setzen da ein, wo sich die stärksten Abweichungen der beiden genannten Momentenflächen voneinander befinden. Diese Stelle liegt häufig über der Einspannstelle und hängt, wie gezeigt wurde, von der Härte des Stoßes, d. h. von dem Frequenzverhältnis der anregenden Bodenschwingung sowie der Eigenfrequenz des Stabkörpers und seiner höheren Harmonischen ab.

Die Registrierungen, aus denen die vorstehenden Biege- und Spannungslinien gewonnen sind, zeigen Abb. 8. Bei den größeren Federsteifigkeiten ist ohne weiteres die Doppelwelligkeit der Stabschwingung erkennbar.

Als Folgerung aus den Ergebnissen ist zu fordern, daß bei der Beurteilung von Erdbebenerschütterungen für die Sicherheit von Bauwerken nicht nur die aus Erdbebenamplitude und Periode errechnete Horizontalbeschleunigung maßgebend ist, sondern daß nach Möglichkeit das Frequenzgemisch der Erdbebenstöße analysiert wird. Hiernach ist die zu erwartende Verformung und Beanspruchung eines Bauwerkes zu ermitteln.

Für die experimentellen Untersuchungen wurden mir von dem Herrn Direktor der Reichsanstalt für Erdbebenforschung die Mittel und Einrichtungen der Reichsanstalt zur Verfügung gestellt. Hierfür und für die verständnisvolle Förderung meiner Arbeit spreche ich

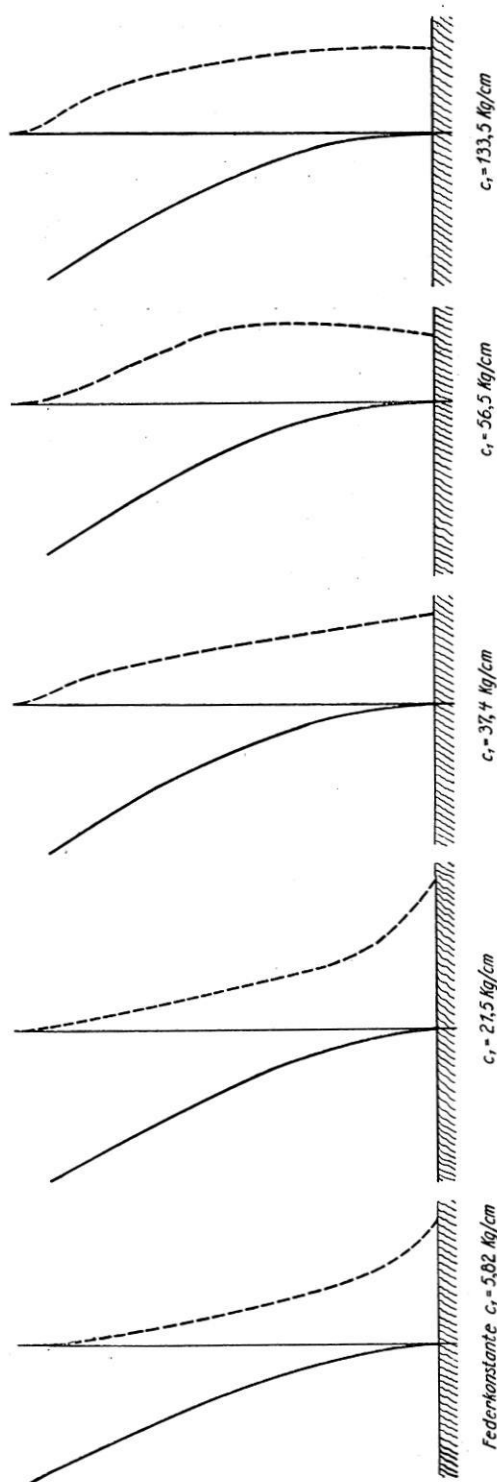


Abb. 7. Biegelinien und Biegespannungen eines einseitig eingespannten prismatischen Stabes im Augenblick der ersten Maximalamplitude bei verschiedenen Federkonstanten.

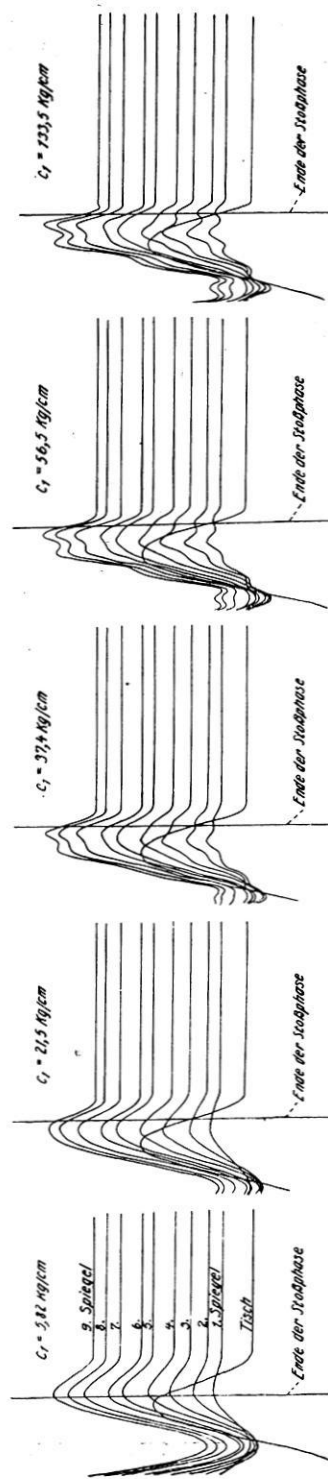


Abb. 8. Registrierkurven von Biegeschwingungen eines einseitig eingespannten prismatischen Stabes bei verschiedenen Federsteifigkeiten c_1 .

Herrn Direktor Professor Dr. Dr. h. c. A. SIEBERG auch als meinem Lehrer meinen herzlichsten Dank aus.

Literatur.

1. BRISKE, R., Die Erdbebensicherheit von Bauwerken. Erweiterter Sonderdruck aus der Zeitschrift „Die Bautechnik“, Jahrgang 1927.
2. BRÖTZ, O., Erschütterungen in Gebäudeteilen mit Backsteinmauerwerk (Mauerwerkspfeiler). Diss. Hannover 1933.
3. HORT, W., Technische Schwingungslehre. Berlin 1922.
4. JACOBSEN, L. S., Vibration research at Stanford university, Bulletin of the Seismological Society of America **19** (1929).
5. PÖSCHL, TH., Lehrbuch der technischen Mechanik. Berlin 1930.
6. SCHMERWITZ, GERHARD, Berechnungen zu einer Hebelwaage für Schweregradientenbestimmungen. Beiträge zur angewandten Geophysik **4** (1934). Heft 3.
7. SIEBERG, A., Qualitative Versuche über Erdstöße und ihre zerstörende Wirkung auf Ziegelmauerwerk. Veröffentlichungen der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena, Heft 29. Berlin 1936.
8. SIEBERG, A., Geologische, physikalische und angewandte Erdbebenkunde. Jena 1923.