

Mitteilungen
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena
Herausgegeben vom Leiter A. Sieberg

Heft 6

Gravitation

Von

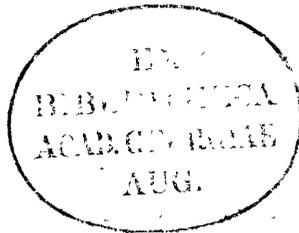
O. Meisser

Mit 12 Abbildungen im Text

Die „Mitteilungen“ der Reichsanstalt für Erdbebenforschung bringen gemeinverständliche Aufsätze und zusammenfassende Darstellungen für weitere Kreise, im Gegensatz zu den „Veröffentlichungen“, die den wissenschaftlichen Originaluntersuchungen vorbehalten sind.

Das vorliegende Heft ist ein Sonderabdruck aus der 2. Auflage des Handwörterbuches der Naturwissenschaften, das im Verlag von Gustav Fischer in Jena erscheint.

A. Sieberg.



Z 1934. 2665 Z

Gravitation.

1. Das Newtonsche Gesetz. 2. Die Schwerkraft auf der Erde und die Erdgestalt. 3. Experimentelle Bestimmung der Schwerkraft. 4. Isostasie. 5. Lokale und zeitliche Aenderungen der Schwerkraft. 6. Die Verteilung der Schwerkraft im Erdinnern. 7. Gültigkeitsgrenze für das Newtonsche Gravitationsgesetz.

1. Das Newtonsche Gesetz. Hat man im Raum zwei Massen m_1 und m_2 , so ziehen diese sich längs ihrer Verbindungslinie bei einer Entfernung r mit einer Kraft K nach dem bereits 1687 von J. Newton ausgesprochenem Gesetz

$$K = k \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1)$$

an. Hierbei ist k die nur vom Maßsystem abhängige Gravitationskonstante. Das Gesetz wurde empirisch gefunden und hat sich bei seiner Anwendung auf die geophysikalischen (Erdgestalt, Schwereverteilung auf der Erde, Ebbe und Flut) und astronomischen (Mechanik des Himmels) Probleme mit größter Genauigkeit bestätigt. Erst in der neueren Relativitätstheorie hat man versucht die Gravitation mit den anderen physikalischen Erscheinungen in Beziehung zu bringen.

Die Gravitationskonstante k wird nach (1) experimentell aus der Anziehung bekannter Massen ermittelt. Die Messungen mit der Coulombschen Drehwaage (Cavendish) bestimmen die Kraft K (vgl. Fig. 1) aus dem Ablenkwinkel ϑ und der Torsionskonstanten des Gehängedrahtes d . Die von Richarz und Krigar-Menzel verfeinerte Wägungsmethode (Jolly) benutzt eine

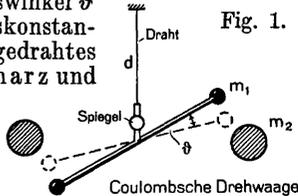


Fig. 1.

Doppelwaage (vgl. Fig. 2). Das Gewicht (m) befindet sich über (A, A') bzw. unter (B, B')

dem Bleiklotz ($M = 100000 \text{ kg}$). Wilsing bestimmt die Gravitationskonstante aus der Ablenkung eines langsam (Fig. 3) schwingenden Pendels, dessen Schwerpunkt (S) nahe dem Unterstützungspunkt (A) liegt. Man kann auch die Anziehung von Körpern bekannter Masse mit der der Erde vergleichen, um die Anziehungskonstante zu finden. So ergeben sich

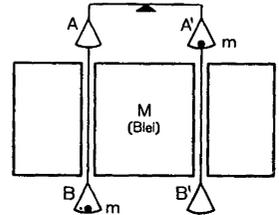


Fig. 2.

entsprechende Methoden aus der Lotabweichung (Mackelyne) zu beiden Seiten eines Berges oder aus der Schwereänderung in verschiedenen Tiefen oder Höhen. Da man aus dem Kenntnis von k und der Erdbeschleunigung g auch die mittlere Erddichte ϑ_m

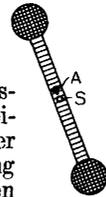


Fig. 3.



$$\vartheta_m = \frac{3g_{\text{Pol}}}{4\pi k \cdot R_{\text{Pol}} \left(1 + \alpha - \frac{3}{2}c\right)} \quad (2)$$

(R_{Pol} Erdradius am Pol, α Abplattung,

$$c = \frac{\text{Zentrifugalkraft}}{\text{Schwere am Äquator}})$$

ableiten kann, benutzt man die obigen Methoden zur Bestimmung von k als solche für ϑ_m . Daneben läßt sich selbstverständlich k ebenfalls über (1) aus astronomischen Angaben ermitteln. Die auf so verschiedene Weise beobachteten Werte ergeben im Mittel $\vartheta_m = 5,52$ und $k = 6,67 \cdot 10^{-8}$.

Die an und für sich zu erwartende Materialunabhängigkeit der Gravitationskonstante konnte bis auf 10^{-8} von Eötvös für die

verschiedensten Stoffe (Pt, Wasser, Holz usw.) auch experimentell bestätigt werden.

2. Die Schwerkraft auf der Erde und die Erdgestalt. Die Schwerkraft g der Erde setzt sich aus der Anziehungswirkung der ruhenden Erde und der von der Erdrotation herrührenden Zentrifugalkraft zusammen. Die gemeinsame Resultierende wird für gewöhnlich als „Schwere“ bezeichnet. Der Zusammenhang der Gravitation mit der Erdgestalt ist durch die Definition gegeben, daß in jedem Punkte der Erdoberfläche die Richtung der Schwere mit der Flächennormale zusammenfällt. Die so angenommene Erdoberfläche würde von der Wasserfläche eines mit den verschiedenen Meeren zusammenhängenden Kanalnetzes gebildet werden, falls das Wasser sich gegen die Erde in relativer Ruhe befände. Für diese Niveaulfläche wurde von Listing der Name

„Geoid“ eingeführt.

Um die Erdschwere allgemein darzustellen, bedient man sich des Potentials¹⁾.

Für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem (vgl. Fig. 4) schreibt sich das Potential W (die z -Achse liege in der Rotationsachse der Erde, die xy -Ebene falle in die Aequatorebene, die Koordinaten eines Massenelementes dm der Erde seien in $P: x, y, z$, die des Aufpunktes $P': x', y', z'$)

$$W = V + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \cdot \omega^2$$

$$= k \cdot \int \frac{dm}{e} + \frac{\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2), \quad (4)$$

wobei V das Potential der Anziehung der ruhenden Erde für sich ist, ferner ist $e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ und ω die

Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. Die Schwere g selbst ist gegeben durch

$$g = - \frac{\partial W}{\partial n} = \sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\}}, \quad (5)$$

¹⁾ Bezeichnet W das Potential der Schwere, so ist die Feldstärke F (die auf die Masseneinheit wirkende Kraft) $F = - \text{grad } W$. Die Feldstärke ist wirbellos, d. h. $\text{rot } W = 0$ und im massenfreien Raum ist $\text{div } W = 0$ ($\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$ Laplacesche Gleichung), liegt der Punkt jedoch innerhalb der wirkenden Masse, ist $\text{div } W = -4\pi\sigma$ (Laplacesche Gleichung), wobei σ die Massendichte ist.

wenn n die Richtung der Flächennormale bedeutet. Nach (5) ist die Oberfläche des „Geoids“ durch diejenige Niveaulfläche (Aequipotentialfläche) $W = \text{const.}$ gegeben, die durch einen Fixpunkt im Meeresniveau hindurchgeht. Für allgemeine Betrachtungen jedoch ist diese Fläche vor den übrigen Niveaulflächen $W = \text{const.}$ nicht weiter ausgezeichnet. Um einfache Relationen für die Variation der Schwere mit dem Ort auf der Erde zu gewinnen, wird die Entfernung $e = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \cdot \cos \gamma}$ (vgl. Fig. 4) nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$ ($r' > r$) entwickelt, es ist dann (4)

$$W = k \cdot \int \frac{dm}{r'} \cdot \left\{ 1 + \frac{r}{r'} \cdot P_1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 P_2 + \dots \right\} + \frac{\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2). \quad (6)$$

Die P_i sind einfache Kugelfunktionen, für $r' > r$ erhält man

$$P_1 = \cos \gamma \quad P_3 = -\frac{3}{2} \cos \gamma + \frac{5}{2} \cos^3 \gamma$$

$$P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \gamma \quad P_i = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \left\{ \cos^i \gamma - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)} \cos^{i-2} \gamma \right.$$

$$\left. + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2i-1)(2i-3)} \cos^{i-4} \gamma - \dots \right\}. \quad (7)$$

Führt man noch geozentrische Koordinaten (Breite φ , Länge λ) $x = r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$, $y = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$, $z = r \cdot \sin \varphi$ ein und beachtet, daß, wenn der Schwerpunkt der Erde Koordinatenanfangspunkt ist und die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, gilt

$$\int dm = M = \text{Erdmasse} \quad \int x' dm = \int y' dm = \int z' dm = 0$$

$$A = \int (y'^2 + z'^2) \cdot dm \quad \text{Hauptträgheitsmoment, bezogen auf die } x\text{-Achse}$$

$$B = \int (z'^2 + x'^2) \cdot dm \quad \text{„ „ „ } y\text{-„}$$

$$C = \int (x'^2 + y'^2) \cdot dm \quad \text{„ „ „ } z\text{-„}$$

$$\int x' \cdot y' \cdot dm = \int y' \cdot z' \cdot dm = \int z' \cdot x' \cdot dm = 0,$$

so schreibt sich (6) zu

$$W = \frac{Mk}{r} + \frac{k}{2r^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{3(B-A)k}{4r^3} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} \cos^2 \varphi + T = U + T.$$

Das Glied T hängt nur von den dritten und höheren Kugelfunktionen ab und bedeutet eine Vernachlässigung von Gliedern in der vierten Ordnung der Abplattung a

$$a = \frac{\text{Aequatordurchmesser } (2a_0) - \text{Polardurchmesser } (2b_0)}{\text{Aequatordurchmesser } (2a_0)}$$

Der erste Ausdruck $\frac{Mk}{r}$ in (8) ist das Potential einer homogenen Kugel von der Masse M . Die nächsten Glieder in φ berücksichtigt, ergeben

das Potential eines Rotationsphäroides. Nimmt man auch noch eine inhomogene Massenverteilung an, die einen elliptischen Aequator bedingt, so stellt $W - U = T$ das Potential eines dreiachsigen Ellipsoides dar, das man allgemein auch als „Niveausphäroid“ bezeichnet. Die Schwerkraft g folgt aus

$$g = \sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{r \cos \varphi \partial \lambda} \right)^2 \right\}} \quad (9)$$

zu

$$g = \frac{Mk}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2r^2 M} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{9(B-A)}{4Mr^2} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda - \frac{\omega^2 r^3}{Mk} \cos^2 \varphi + \dots \right\} \quad (10)$$

Aus Formel (10) und (8) ergibt sich das erweiterte Clairautsche Theorem

$$\frac{a_0 - b_0}{a_0} = \alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot a_0}{g_0} - \frac{g_p - g_0}{g_0} - \alpha \left(\alpha + \frac{\omega^2 \cdot a_0}{g_0} \right). \quad (11)$$

Vernachlässigt man die quadratischen Glieder der Abplattung rechts in (11), so hat man das bereits von Clairaut gegebene Theorem:

$$\text{Erdbplattung} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\text{Zentrifugalkraft}}{\text{Schwerkraft}} \text{ am Aequator}$$

Die Bedeutung des Clairautschen Theorems liegt darin, daß man aus dem Schwerkraftverlauf an der Erdoberfläche die Erdgestalt (α) ohne wesentliche Voraussetzungen über die Massenverteilung im Erdinnern (Rotationskörper, der um seine Hauptträgheitsachse annähernd rotiert) bestimmen kann.

Aus dem experimentell vorliegenden Material fand Helmert 1901

$$\gamma = 978,030 \cdot \{ 1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin 2\varphi \}. \quad (13)$$

Mithin findet man über

$$\frac{g_p - g_0}{g_0} = 0,005285, \quad a_0 = 6378,4 \text{ km},$$

$$\frac{\omega^2 a_0}{g_0} = 0,003468 \text{ aus (12) } \alpha \text{ zu } 1/297.$$

Die Fläche $U = (W - T) = \text{const.}$ (8) ohne die Glieder in λ stellt ein „Niveausphäroid“ dar, dem sich sehr nahe ein Rotationsellipsoid anschmiegt. Die größte Erhebung des Sphäroids über das Ellipsoid beträgt für $\varphi = 45^\circ$ ungefähr 17 m. Der Ausdruck T — die Restfunktion von W — hängt nur von den Masseninhomogenitäten im Erdinnern ab. Da die Fläche $U = \text{const.}$ — Niveausphäroid — unabhängig von diesen Massenunregelmäßigkeiten ist, so wählt man sie als vorgegebene Bezugsfläche. Das Theorem von H. Bruns gestattet, den Abstand zwischen dem Niveausphäroid $U = U_0$ und der entsprechenden Niveaufläche $W = U_0$, die einen gleichen Potentialwert ($W_0 = U_0$) besitzt, anzugeben. Der längs der Normalen in P (vgl. Fig. 5) gemessene Abstand N ist

$$N = - \frac{T}{\gamma \cos \varepsilon}, \quad (14)$$

wobei die normale Schwere gleich γ und ε der Winkel zwischen Niveausphäroidnormalen in P und der Schwere ist. Da $\gamma \cdot \cos \varepsilon$ annähernd konstant ist, stellt der Verlauf von T die Abweichungen des Geoids vom Niveausphäroid

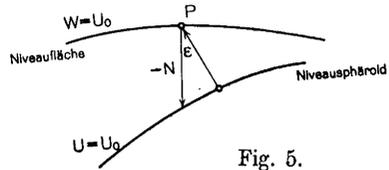


Fig. 5.

dar. Einem positiven Wert von T entspricht eine Hebung, einem negativen Wert eine Senkung des Geoids über das Niveausphäroid gleichen Potentials. Zahlenangaben über die üblichen Geoidundulationen liegen in der Größenordnung von 100 m.

Die Formel von Stokes gestattet aus der Schwereverteilung Δg_ψ (in Abhängigkeit vom Zunahme der Schwerkraft vom Aequator bis zum Pol

$$\text{Schwerkraft am Aequator} \cdot \text{sphärischen Abstand } \psi) \text{ über} \quad (12)$$

$$N = R \cdot \int_0^\pi \frac{\Delta g_\psi}{G} F \cdot d\psi \quad (15)$$

den Abstand N zu berechnen [G mittlerer theoretischer Schwerkraft, R mittlerer Erdradius. $F(\psi)$ wird aus der unten stehenden Fig. 6 entnommen].

Kann man die höheren Kugelfunktionen in (6) für $i > 2$ aus der Verteilung der Schwere ermitteln, so läßt sich N und damit auch die Gestalt des Geoids bestimmen.

Für die Bestimmung des Geoides sind nach Bruns außer Schweremessungen noch folgende Messungen erforderlich: 1. Astro-

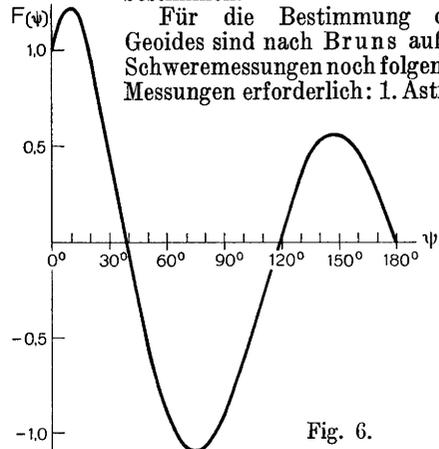


Fig. 6.

nomische Ortsbestimmungen, 2. Triangulierungen, 3. Trigonometrische Nivellements und 4. Geometrische Nivellements.

$$\Delta g_i = \frac{2\pi}{n} k \cdot \vartheta_i \cdot \left\{ a_{i+1} - a_i - \sqrt{a_{i+1}^2 + h_i^2} + \sqrt{a_i^2 + h_i^2} \right\} \quad (19)$$

$$\sim \frac{3}{4n} \cdot \frac{\vartheta_i}{\vartheta_m} \cdot h_i \cdot \frac{g}{R} \left\{ \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right\} \text{ für } h_i > a_i$$

duzierten Schwerewerten hat aus den Kontinentstationen folgende Schwereverteilungen ergeben, die trotz mancher Bedenken hinsichtlich

Das umfangreiche Beobachtungsmaterial mit seinen entsprechend auf das Meeresniveau re-

der Reduktionsverfahren dennoch die wahre Schwere γ annähernd wiedergeben:

Helmert (1901): $\gamma = 978,030 [1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi]$	} (20)
„ (1915): $\gamma = 978,052 [1 + 0,005285 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi + 0,000018 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 17^\circ)]$	
Berroth (1916): $\gamma = 978,046 [1 + 0,005296 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi + 0,000016 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 10^\circ)]$	
Bowie (1917): $\gamma = 978,039 [1 + 0,005294 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi]$	
Heiskanen (1924): $\gamma = 978,052 [1 + 0,005285 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi + 0,000027 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda - 18^\circ)]$	
„ (1928): $\gamma = 978,049 [1 + 0,005293 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi + 0,000019 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda]$	
Somigliana (1929): $\gamma = 978,030 [1 + 0,005289 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi]$	

Daraus lassen sich für die Erdgestalt folgende Abplattungswerte herleiten:

Helmert	1901	1: $\alpha = 298,3$
„	1915	296,7
Berroth	1916	297,8
Bowie	(1917)	297,6
Heiskanen	1924	296,7
„	1928	297,3
Somigliana	1929	297,0

Als internationale Werte gelten seit 1924 für das Umdrehungsellipsoid $a_0 = 6378,388$ km 1: $\alpha = 297$ (kleine Halbachse 6356,911 km, Aequatorquadrant 10019,148 km, Meridianquadrant 10002,288 km). Wieweit die Längenglieder in (20) für einen reell elliptischen Aequator sprechen (trotz des Widerspruches mit der Erdgestalt als Gleichgewichtsfigur), ist zur Zeit noch nicht geklärt.

4. Isostasie. Die Lehre von der Isostasie besagt, daß das Erdinnere nach den Gesetzen der Hydrostatik geschichtet sei. Demnach müssen den sichtbaren Masseninhomogenitäten in der Erdkruste unsichtbare Massenausgleiche entsprechen, so daß von einer ideellen Niveaulfläche — „der isostatischen Ausgleichsfläche“ — an auf den einzelnen Flächen gleiche Massen lagern. Gestützt wird die Lehre von der Isostasie vornehmlich durch die Verteilung der Schwere, die bei den Stationen im Gebirge für $g_{B,F} - \gamma$ negative Werte ergibt, d. h. den äußeren Massenhäufungen ist im Innern ein Massendefekt zugeordnet. Fernerhin ist die Schwere auf den Weltmeeren etwas übernormal, was auf eine unterirdische Kompensation der durch das Wasser verursachten Dichteanomalie spricht. Nach Pratt denkt man sich die Kruste („Sial“) so auf dem „Sima“ schwimmend, daß bei gleicher Eintauchtiefe die Erhebungen durch Auflockerungen in der vertikalen Dichte zu erklären sind. Demgegenüber ist die Theorie von Airy physikalisch einleuchtender, weil sie die Dichte konstant annimmt und dadurch mit verschiedenen Eintauchtiefen (Archimedisches Prinzip) arbeitet. Nach beiden Theorien kommt man zu einer mittleren Tiefe der Ausgleichsfläche von ca. 120 km.

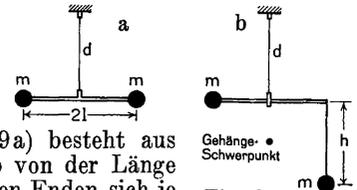
Unter besonderen Annahmen, die sich auf seismische Daten stützen, erhält Heiskanen für Eurasien 58 km, Nordamerika 57 km, Atlantik 25 km, Pazifik 5 km. Regionale Abweichungen ergaben für die Ausgleichsfläche Schwankungen zwischen 50 und 300 km. Neuere kritische Betrachtungen der Reduktionsmethoden haben den grundlegenden Wert der Schweremessungen für die Lehre von der Isostasie z. T. erschüttert, so daß man trotz der geologischen und seismischen Argumente nur von einer Hypothese reden kann.

5. Lokale und zeitliche Aenderungen der Schwerkraft. a) Die Drehwaage von Eötvös erlaubt, für eingehendere Untersuchungen des Schwerefeldes die Größen

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$$

zu messen, um einen Einblick in kleinere lokale Feldstörungen zu erhalten (vgl. Art. „Geophysik“).

Das „Krümmungsvariometer“ (vgl. Fig. 9a) besteht aus einem Stab von der Länge 2l, an dessen Enden sich je ein Gewicht m befindet. Das



gesamte Gehänge wird von einem dünnen Torsionsfaden d getragen. Infolge der räumlichen Aenderung der Schwerkraft sind die auf die beiden Gewichte wirkenden Kräfte verschieden, und daher erleidet der Torsionsdraht eine Verdrillung um einen bestimmten Winkel. Das „Schwerevariometer“ (Fig. 9b) ist insofern eine Weiterbildung, als das eine Gewicht an einem Ende des Balkens um die Höhe h tiefer verlegt ist.

Um die Gleichgewichtslage des Gehänges eines Schwerevariometers abzuleiten, wird das Potential der Erdschwere W wie in (4) angenommen. Der Torsionsdraht fällt in die z-Achse, die x-Achse geht nach Norden, die y-Achse nach Osten. Zum Koordinaten-

ursprung wählt man den Schwerpunkt des Gehänges. Für den Nullpunkt ist $g_{x0} = 0, g_{y0} = 0, g_{z0} = g_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0$. Innerhalb des Apparates soll mit Vernachlässigung der dritten und höheren Ableitungen des Potentials gelten:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 \cdot z + \dots \\ &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_0 \cdot z + \dots \\ g_y &= \left(\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)_0 \cdot z + \dots \\ &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0 \cdot z + \dots \\ g_z &= \left(\frac{\partial g_z}{\partial x}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)_0 \cdot z + \dots \\ &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0 \cdot y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_0 \cdot z + \dots \end{aligned} \right\} (21)$$

Wenn man die Entwicklung mit den Gliedern zweiter Ordnung abbricht, ist es für die Endformeln gleichgültig, ob man als Nullpunkt die Mitte des Waagebalkens oder den Gehängeschwerpunkt nimmt. Unter der Voraussetzung, daß der Waagebalken horizontal ist, erleidet er eine Verdrehung aus seiner Nulllage, die durch

$$\tau \cdot \psi = \int (x \cdot g_y - y \cdot g_x) \, dm \quad (22)$$

gegeben ist, wobei τ die Torsionskonstante des Aufhängedrahtes bedeutet. Das Integral ist über alle Massenelemente des Gehänges zu erstrecken. Weiter führt man ein neues mit dem Gehänge verbundenes Koordinatensystem ξ, η, ζ ein, das denselben Nullpunkt besitzt und dessen ζ -Achse mit der alten z -Achse zusammenfällt. ξ kommt in die Längs- und η in die Querrichtung des Waagebalkens zu liegen, β ist der Winkel $\angle(x, \xi)$. Es geht dann (22) über in

$$\begin{aligned} \psi \cdot \tau &= \frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \sin 2\beta + K \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cos 2\beta \\ &\quad - m h l \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \sin \beta + m h l \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \sin \beta \end{aligned} \quad (23)$$

unter Berücksichtigung von $\int \xi \cdot \eta \, dm = \int \eta \cdot \zeta \, dm = 0, \int \xi \cdot \zeta \, dm = m h l$; ferner hat man wegen der geringen Querdimension (η) des Gehänges gesetzt $\int (\xi^2 - \eta^2) \, dm \sim \int (\xi^2 + \eta^2) \, dm \sim K = \text{Trägheitsmoment des Gehänges}$. Für das Krümmungsvariometer ergibt sich aus (23), da $h = 0$,

$$\psi \cdot \tau = \frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \sin 2\beta + K \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cos 2\beta. \quad (24)$$

Bestimmt man die jeweilige Stellung des Gehänges in verschiedenen Azimuten β , so kann man mit der Waage der ersten Form (34) zwei Größen, mit der zweiten Form (33) vier Größen ermitteln. Die Apparate sind wegen ihrer Verwendung als geophysikalische Feldinstrumente zu

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g_1} &= \frac{1}{2g} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{1}{\cos 2\chi} \right\} \\ \frac{1}{g_2} &= \frac{1}{2g} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{1}{\cos 2\chi} \right\}, \end{aligned} \right\} (25)$$

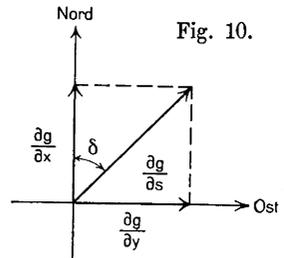
konstruieren, daß noch Größen von $1 \cdot 10^{-9}$ CGS in den zweiten Ableitungen des Potentials sicher meßbar sind.

Um die nötige Empfindlichkeit zu erzielen, wurden die Gehänge und Aufhängedrähte so dimensioniert, daß man eine Schwingungsdauer von etwa 22 Minuten erhielt. Eötvös wählte folgende Zahlen $l = 20 \text{ cm}, h = 26 \text{ cm}, K$ etwa 21000 CGS, die Drähte bestanden aus Platiniridium und hatten einen Durchmesser von 40μ ($\tau = 0,5$ bei einer Länge von 65 cm). Die Waagebalken wurden mit einem dreifachen Metallgehäuse umgeben, um, zwecks Vermeidung von Luftströmungen, eine gleichmäßige Temperatur im Innern erzielen zu können.

Die Größen $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$ geben die horizontale Aenderung von g in der Nord-Süd- bzw. Ost-Westrichtung an, den horizontalen Gradient $\frac{\partial g}{\partial s}$ (vgl. Fig. 10) findet

man aus $\frac{\partial g}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)^2}$ und $\delta = \arctg \frac{\frac{\partial y \partial z}{\partial^2 W}}{\frac{\partial x \partial z}{\partial^2 W}}$. Um die Empfindlichkeit

der Drehwaage darzutun, sei erwähnt, daß $1 \cdot 10^{-9}$ CGS — auch Eötvöseinheit genannt (E.) — in $\frac{\partial g}{\partial s}$ die Aenderung von g um ein Billionstel seines Wertes auf 1 cm in der



Horizontalen bedeutet. Die beiden anderen Größen $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ bezeichnet man als „Krümmungsglieder“. Die Hauptkrümmungsradien e_1 , und e_2 der durch den jeweiligen Koordinatenursprung gehenden Niveaufläche sind

wenn χ den Winkel bezeichnet, den die Normalebene des größten Krümmungsradius mit der xz -Ebene bildet. Die Differenz

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = - \frac{1}{g \cos 2\chi} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\} \quad (26)$$

gibt die Abweichung der Niveauläche von der Kugelgestalt an. Die Winkel χ_1 und χ_2 (für ϱ_1 und ϱ_2) sind durch

$$\operatorname{tg} 2\chi_1 = \operatorname{tg} 2\chi_2 = - \frac{2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}} \quad (27)$$

gegeben.

Zur vollständigen Bestimmung einer Niveauläche fehlt nur der Wert $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$, weil ja zu den übrigen vier Gliedern noch die Laplacesche Gleichung hinzukommt. Eötvös gibt weiterhin ein Verfahren an, in einem annähernd ebenen Gebiete mittels zahlreicher Stationen die Gestalt der Niveauläche zu ermitteln, wenn an seinen Enden sich astronomisch-geodätische Stationen befinden.

Die Drehwaage findet hauptsächlich ihre Anwendung für geophysikalische Aufschlußarbeiten, um Schwerstörungen durch Masseninhomogenitäten des Untergrundes festzustellen.

b) Bisher ist der Einfluß der Gestirne auf die irdische Schwere nicht berücksichtigt worden. Durch die fluter-

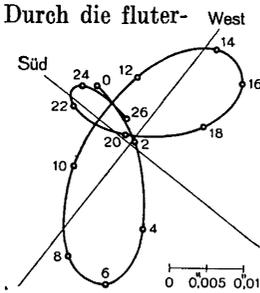


Fig. 11. Lotbewegung in Freiberg i. Sa.
2. 1. 1912, 0^h bis
3. 1. 1912, 2^h.

sich immer senkrecht zu der neuen resultierenden Schwere zu stellen. Da die beobachteten Lotablenkungen kleiner sind als die, die man aus der Mond- und Sonnenanziehung für eine absolut starre Erde berechnet, folgt, daß die Erde unvollkommen den deformierenden Kräften nachgibt. Die theoretischen maximalen Wirkungen betragen

	Mond	Sonne
Winkelablenkung des Lotes	0,017''	0,008''
Schwereänderung	$\frac{1}{17800000}$	$\frac{1}{38800000}$

Die tägliche Bahnkurve des Lots ist äußerst klein, und ihre Bestimmung bedarf sehr genauer Meßmethoden. Die nötige Genauigkeit für die Feststellung so kleiner Neigungsänderungen kann mit einem Horizontalpendel erreicht werden (vgl. Art. „Pendel“).

Die photographischen Registrierungen der Pendel geben sehr verschlungene Kurven für die Lotbewegung (Fig. 11). Wendet man die Methode der harmonischen Analyse auf die sich über längere Zeiträume erstreckenden Registrierungen an und bestimmt die einzelnen (halb-, ganz- und mehrtägigen) Mond- und Sonnenglieder, so erhält man aus den gefundenen maximalen Amplituden, verglichen mit den theoretischen Werten, genaue Angaben über die Elastizität des Erdkörpers. Horizontalpendelbeobachtungen sind von v. Rebeur, Ehlert, Kortazzi, Schweydar, Hecker, Haid und Orloff ausgeführt. In der folgenden Tabelle sind die Werte für ψ_{\max} (halbtägige Mondwelle) in der Nord-Süd- und Ost-Westrichtung für einige Orte zusammengestellt

	Potsdam	Dorpat	Freiburg i. Br.	Durlach i. B.
Nordsüd beobachtet	0,00335''	0,00389''	0,00440''	0,00267''
theoretisch	0,00788''	0,00705''	0,00790''	0,00787''
Ostwest beobachtet	0,00665''	0,00540''	0,00787''	0,00766''
theoretisch	0,00999''	0,00828''	0,01063''	0,01042''

Der azimutale Unterschied in der Mondwelle ist auf die Einwirkung der Gezeiten des Meeres zurückzuführen. Die letzten Messungen in einem 189 m tiefen Schacht bei Freiberg i. Sa. ergeben für die Starrheit im Erdzentrum $30,8 \cdot 10^{11}$ egs und an der Erdoberfläche $3,1 \cdot 10^{11}$ egs, wenn das Rochesche Dichtegesetz zugrunde gelegt wird (Schweydar); als Vergleich sei die Starrheitskonstante des Stahls, die $8 \cdot 10^{11}$ egs beträgt, angeführt.

Außer der periodischen Aenderung der Schwerkraft ist die Aenderung der Intensität der Schwerkraft in Potsdam bestimmt. Die Intensitätsänderung von g durch die Flutkraft des Mondes beträgt für eine absolut starre Erde an der Oberfläche

$$\frac{dg}{g} = 16,8 \cdot 10^{-8} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right),$$

wenn z die Zenitdistanz für einen beliebigen Punkt auf der Erde bedeutet. Als Instrument benutzt man ein etwas modifiziertes Schmidtsches Trifilargravimeter, das eine Genauigkeit in $\frac{dg}{g}$ von etwa 10^{-8} gibt. (Tommaschek u. Schaffernicht.) Das Trifilargravimeter (Fig. 12) besteht aus einer Scheibe (S), die an drei Fäden (F) aufgehängt ist. In der Mitte der Scheibe greift von oben eine Feder (K) an, die man tordieren (T) kann. Der Torsion der Feder wirkt der Zug der Fäden und die Schwerkraft entgegen. Aus diesen Messungen läßt sich ebenfalls die Größe der Deformation der Niveaulächen und die Höhe der elastischen Gezeiten ableiten.

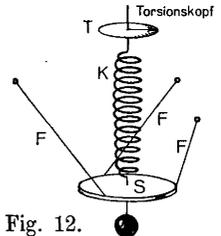


Fig. 12.

Andere Veränderungen von g nichtperiodischer Natur, die man bisher glaubte feststellen zu können, sind nur auf Beobachtungs- bzw. instrumentelle Fehler zurückzuführen.

6. Verteilung der Schwerkraft im Erdinnern. Bei einer homogenen Kugel nimmt die Schwere gleichmäßig nach dem Mittelpunkt zu ab, bei einer inhomogenen Kugel, deren Dichte nach dem Innern zu wächst, ist das nicht mehr der Fall. Unter Vernachlässigung der Abplattung der Erde und der Zentrifugalkraft ist die Schwere g in einem Punkt im Abstand b vom Erdmittelpunkt

$$\frac{4 \pi^2 k}{b^2} \int_0^b r^2 \vartheta(r) dr \quad b \leq R \text{ (Erdradius).}$$

Für das Helmhertsche Dichtegesetz $\vartheta_r = \vartheta_{r=0} \cdot \left\{ 1 - 1,04 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 0,275 \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right\}$ ergibt sich in einer Tiefe von $0,18 \cdot R$ ein Schweremaximum von $1,05 \cdot g_0$. Für eine zweiteilige Erde nach Wiechert liegt das Schweremaximum an der Grenze zwischen Kern und Mantel, für eine Manteldicke von 1400 (1500) km und einer Dichte von 3,2 (3,3) beträgt das Maximum $1,15 g_0$.

7. Gültigkeitsgrenze für das Newtonsche Gravitationsgesetz. Für die Dimensionen unseres Erdkörpers hat sich das Anziehungsgesetz ohne Einschränkung innerhalb der gegebenen Genauigkeit als gültig erwiesen, wie die Betrachtungen über das Geoid zeigen, d. h. das Entfernungsgesetz ist für Entfernungen

von einigen bis zu ca. 6 Millionen Metern erprobt. Für die astronomischen Abweichungen in der Merkurbahn und bei der Anwendung des Gravitationsgesetzes auf den unendlichen Raum mit unendlicher Massenerfüllung haben sich notwendigerweise Abänderungsversuche von (1) ergeben. In der Form

$$K = k \frac{m_1 \cdot m_2}{r^{2+\lambda}} \quad \lambda \leq 1,5 \cdot 10^{-7}$$

$$K = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} e^{-\lambda' r} \quad \lambda' < 1 \cdot 10^{-8}$$

hat sich λ bzw. λ' stets sehr klein ergeben. Ebenso haben andere Ueberlegungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation und über die Form des Gravitationsgesetzes im nichteuklidischen Raum zu Fragen geführt, die erst von der allgemeinen Relativitätstheorie beantwortet werden (vgl. Art. „Relativitätstheorie“).

Literatur. S. Lit. unter Art. „Pendel“. **Helmert, F. R.**, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Bd. II, Leipzig 1884. — *Encykl. d. math. Wiss.*: V₁ **J. Zenneck**, Gravitation; S. **Oppenheim**, Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes, VI₂. Ferner entsprech. Artikel in **B. Gutenberg**, Handb. d. Geophysik, Bd. I, Berlin 1931. — **Tomaschek, R.**, und **Schaffernicht, W.**, Hochempfindl. Bifilar- und Interferenz-Gravimeter, *Ann. d. Phys.*, 15, 799, 1932, u. *Astr. Nachr.*, Bd. 248, S. 929. **O. Meisser**.

Veröffentlichungen der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena

- Heft 1: Die Verbreitung der Erdbeben auf Grund neuerer makro- und mikro-seismischer Beobachtungen und ihre Bedeutung für die Fragen der Tektonik.** Von Dr. August Sieberg, Privatdozent für Geophysik an der Univers. Jena. Mit einer farb. seismisch-tektonischen Weltkarte. 96 S. gr. 8° 1922 Rmk 1.60*
- Heft 2: Die Explosionskatastrophe von Oppau am 21. September 1921 nach den Aufzeichnungen der Erdbebenwarten.** Von Prof. Dr. Oscar Hecker, Jena. Mit 5 Tafeln. 18 S. gr. 8° 1922 Rmk —.60*
- Heft 3: Zur Gründung der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena.** Von O. Hecker. Mit 2 Abbild. im Text. — **Das Erdbeben in der chilenischen Provinz Atacama am 10. November 1922.** Von A. Sieberg und B. Gutenberg. Mit 2 Abbild. im Text und 18 Tafeln mit Seismogrammen. 48 S. gr. 8° 1924 Rmk 4.50*
- Heft 4: Das mitteleuropäische Erdbeben vom 16. November 1911.** Bearbeitung der makroseismischen Beobachtungen. Von Dr. A. Sieberg und Dr. R. Lais. Mit 8 Abbild. im Text und 2 farb. Isoseistenkarten. 106 S. gr. 8° 1925 Rmk 10.—*
- Heft 5: Ueber die Laufzeiten der Vorläufer- und Wechselwellen bei Erdbeben in ihrer Beziehung zur Schichtung der Erdrinde.** Von G. Krumbach. 19 S. gr. 8° 1926 Rmk 1.—*
- Heft 6: Das Einsturzbeben in Thüringen vom 28. Januar 1926.** Von A. Sieberg und G. Krumbach. Mit 6 Abbild. im Text und 1 Isoseistenkarte. 32 S. gr. 8° 1927 Rmk 1.50*
- Heft 7: Seismische Registrierungen in Jena.** 1. Oktober 1926 bis 31. Dezember 1927. Von G. Krumbach. 23 S. gr. 8° 1928 Rmk 1.—*
- Heft 8: Das Erdbeben in Japan am 7. März 1927.** 11 Tafeln (26×38 cm) mit Seismogrammen und 4 S. Text. Lex. 8° 1928 Rmk 3.—*
- Heft 9: Beiträge zu einer experimentellen Seismik.** Von O. Meisser. Mit 68 Abbild. im Text. V, 77 S. gr. 8° 1929 Rmk 4.50*
- Heft 10: Seismische Registrierungen in Jena 1. Januar bis 31. Dezember 1928.** Von G. Krumbach. 24 S. gr. 8° 1929 Rmk 1.20*
- Heft 11: Die wichtigsten Erdbeben des Jahres 1924 und ihre Bearbeitung.** Von G. Krumbach und A. Sieberg. Lex. 8° Rmk 6.—*
- Heft 12: Entstehung und Ausbreitung Deutscher Erdbeben in ihrer Abhängigkeit von den geologischen Verhältnissen.** Von Fritz Nennstiel. Mit 8 Karten im Text. 43 S. gr. 8° 1930 Rmk 3.—*
- Heft 13: Seismische Registrierungen in Jena, 1. Januar bis 31. Dezember 1929.** Von G. Krumbach. 21 S. gr. 8° 1930 Rmk 2.—*
- Heft 14: Seismische Registrierungen in Jena, 1. Januar bis 31. Dezember 1930.** Von G. Krumbach. 20 S. gr. 8° 1931 Rmk 1.60*
- Heft 15: Tätigkeitsbericht der Reichsanstalt für Erdbebenforschung für die Zeit vom April 1930 bis März 1931.** 12 S. gr. 8° 1931 Rmk 1.—
- Heft 16a: Die Ausbreitung von Erdbebenwellen in großen Herdentfernungen bei dem Südseebeben vom 26. Juni 1924.** Von G. Krumbach. Mit 16 Abbild. im Text. VI, 68 S. gr. 8° 1934 Rmk 3.—
- Heft 16b: Die instrumentellen Aufzeichnungen des Erdbebens vom 26. Juni 1924.** Von G. Krumbach. Mit 24 Tafeln. Wiedergabe der Seismogramme von M. Töpfer. 1931 Rmk 5.—*

August Sieberg

Reg.-Rat, Professor für Geophysik an der Universität Jena

Geologische, physikalische und angewandte Erdbebenkunde.

Mit 178 Abbild., 1 farb. seismisch-tektonischen Weltkarte und einem Anhang von 17 Hilfstafeln für die angewandte Erdbebenforschung. XIII, 572 S. gr. 8° 1923
Rmk 18.—, geb. 20.—*

Inhalt: Einleitung: Die physikalischen und geologischen Grundlagen der Erdbebenforschung. / 1. Begriff und Erscheinungsformen der Erdbeben. 2. Mechanik der Erdbeben. 3. Entstehung und Arten der Erdbeben. 4. Theorie der Erdbebenwellen und verwandter Erscheinungen sowie deren Bedeutung für die Erkenntnis des Erdinnern. (Von Dr. Beno Gutenberg.) 5. Geographie der Erdbeben. 6. Erdbebeninstrumente. 7. Seismische Untersuchungsmethoden. / Anhang: 17 Hilfstafeln für die angewandte Erdbebenforschung. — Namen-, Sach- und Ortsverzeichnis.

Eine einheitliche und ins Einzelne gehende Darstellung des Gesamtgebietes der Erdbebenkunde. Das Buch ist als Nachschlagebuch für Fachleute sowie als Lehrbuch für Studierende und zum Selbststudium gedacht. Deshalb werden die zum Verständnis notwendigen Grundlehren von Geologie und Physik in knappster, eigens dem Zweck angepaßter Form vorausgeschickt.

Geologische Einführung in die Geophysik.

Für Studierende der Naturwissenschaften, des Ingenieurwesens und des Bergbaues, sowie zum Selbststudium. Mit 260 Abbild. im Text und 1 farb. Karte. X, 374 S. gr. 8° 1927
Rmk 17.—, geb. 19.—*

Inhalt: Einleitung: Zusammenhänge in der Physik der Erd feste. Aufgaben und Hilfsmittel. Aufschlußmethoden. Deutschsprachige Lehr- und Handbücher. / 1. Der Erdplanet. 2. Innerer Aufbau und physikalische Verhältnisse des Erdkörpers. 3. Die Stellung der Erde im Weltganzen und der Entwicklungsgang. 4. Die irdische Schwere. 5. Die erdmagnetischen und verwandte Erscheinungen. 6. Die magmatischen Vorgänge. 7. Die tektonischen Vorgänge. 8. Die seismischen Vorgänge. 9. Die Erdbeben. / Literatur. Namen-, Sach- und Ortsverzeichnis.

Geolog. Rundschau. 1927, Heft 6: . . . Was das neue Werk auf das vorteilhafteste auszeichnet, ist die große Klarheit der Darstellung, das konsequent durchgeführte Prinzip, alles ab ovo zu erklären, nichts als bekannt vorauszusetzen, die übersichtliche, reiche Gliederung des Stoffes und die Beigabe von Figuren, mit denen in äußerst geschickter Weise die im Text vertretenen Auffassungen verdeutlicht werden. Sehr zu begrüßen ist die Einfügung geschichtlicher Daten bei allen Abschnitten. Für den Geologen ist diese kritische Zusammenfassung des geophysikalischen Wissens von größtem Werte. Stehen doch viele der hier behandelten Probleme gerade im Vordergrund des Interesses in der allgemeinen Geologie. . . . Das Buch ist ein Muster an Vielseitigkeit und Vollständigkeit. Druck, Ausstattung und Papier des Buches sind vorzüglich. Wilckens.

Untersuchungen über Erdbeben und Bruchschollenbau im östlichen Mittelmeergebiet.

Ergebnisse einer erdbebenkundlichen Orientreise, unternommen im Frühjahr 1928. Mit 6 Erdbebenkatalogen, sowie 65 Abbild. und Karten im Text, und 2 farbigen Erdbebenkarten. („Denkschriften der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena“. Bd. 18, 2.) VI, 114 S. gr. 4° 1932
Rmk 20.—

Einführung in die Erdbeben- und Vulkankunde Süditaliens.

Mit 2 farbigen Ansichten, sowie 67 Abbild. und Karten im Text. VI, 226 S. 8° 1914
Rmk 4.—*

Inhalt: 1. Das Wesen der Erdbeben und des Vulkanismus, sowie der Zusammenhang mit dem geologischen Aufbau des südlichen Italien. 2. Die erloschenen Vulkane der römischen Campagna. 3. Der Vesuv. 4. Das Einbruchsbecken von Neapel und seine erloschenen Vulkane. 5. Kalabrien und die Erdbeben des südlichen Italien. 6. Die Ostküste Siziliens. 7. Der Aetna. 8. Der Stromboli und die übrigen äolischen Inselvulkane. — Literaturverzeichnis. Register.

Erdbebenforschung und ihre Verwertung für Technik, Bergbau und Geologie.

Eine erste Einführung zum Selbststudium. Mit 52 Abbild. im Text. (Erweiterter Sonderdruck aus „Handwörterbuch der Naturwissenschaften“. 2. Aufl.) VII, 144 S. kl. 8° 1933
Rmk 3.20