

**Veröffentlichungen
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena**

Herausgegeben vom Leiter **August Sieberg**

Heft 23

**Geophysikalische Arbeiten
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung
in Jena**

Von

**A. Sieberg, G. Krumbach, O. Meißer, H. Martin
G. Schmerwitz, M. Müller, A. Herrmann
H. Schmücking**

Mit 26 Figuren



Leipzig

Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

1 9 3 4

Veröffentlichungen
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena

Herausgegeben vom Leiter **August Sieberg**

Heft 23

Geophysikalische Arbeiten
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung
in Jena

Von

A. Sieberg, G. Krumbach, O. Meißer, H. Martin
G. Schmerwitz, M. Müller, A. Herrmann
H. Schmücking

Mit 26 Figuren



Leipzig
Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

1 9 3 4

Die nachstehenden neueren Untersuchungen auf verschiedenen Gebieten geophysikalischer Forschung, die von Mitgliedern der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena durchgeführt sind, wurden erstmalig in der Festschrift zum 70. Geburtstage des früheren Direktors der Reichsanstalt, Herrn Geheimrat Professor Dr. Oskar Hecker (Beiträge zur Angewandten Geophysik, Band 4, Heft 3, Leipzig 1934) veröffentlicht. Sämtliche Arbeiten, ausgenommen diejenigen von Krumbach, gehören zu den von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft unterstützten geophysikalischen Forschungen.

A. Sieberg

Z 1934. 3853 -

Inhaltsverzeichnis

	Seite
SIEBERG, A., Ein Beitrag zur Frage der Wirtschaftsgefährdung durch Erdbeben in Deutschland. (Mit 1 Figur)	1—10
KRUMBACH, Gerhard, Über die Aufzeichnung von Fernbeben mit kurzperiodischen Seismometern. (Mit 3 Figuren). . . .	11—16
MEISSER, O., Experimentelle Untersuchungen an Quarzglaspendeln mit Quarzglasschneiden. (Mit 1 Figur).	17—22
MARTIN, H., Beiträge zum Amplitudenregistrierverfahren (Koinzidenzregistrierverfahren). (Mit 1 Figur).	23—27
SCHMERWITZ, Gerhard, Berechnungen zu einer Hebelwaage für Schweregradientenbestimmungen. (Mit 5 Figuren) . . .	28—49
MÜLLER, Max, Ein neues elektrisches Aufschlußverfahren mit großer Tiefenwirkung. (Mit 10 Figuren)	50—63
HERRMANN, A., Empfindlichkeitssteigerung bei piezoelektrischen Beschleunigungsmessern. (Mit 3 Figuren).	64—69
SCHMÜCKING, H. und MEISSER, O., Der Einfluß des Antriebs auf die Schwingungsdauer eines Pendels. (Mit 2 Figuren) . .	70—74

Ein Beitrag zur Frage der Wirtschaftsgefährdung durch Erdbeben in Deutschland.

Von

A. Sieberg.

(Mit 1 Figur.)

Zusammenfassung: Die Bedrohung von Belangen der deutschen Wirtschaft durch Erdbeben deutschen Ursprungs ist größer, als gewöhnlich angenommen wird. Am Beispiel des Rheinischen Industriegebietes wird dies im einzelnen gezeigt unter Hinweis auf grundsätzliche Überlegungen, denen vorbeugende Sicherungsmaßnahmen Rechnung zu tragen haben.

Wie die steigende Inanspruchnahme der Reichsanstalt für Erdbebenforschung durch Behörden, Industrieunternehmen und Private zeigt, beginnt sich die Erkenntnis durchzusetzen, daß auch neuere makroseismische Arbeitsmethoden geeignet sind, der Wirtschaft Deutschlands beachtliche Dienste zu leisten¹⁾. Allein ein unlängst unter Mitwirkung der Reichsanstalt bearbeitetes Projekt²⁾, die Sicherung eines von Einsturz bedrohten Stadtteiles mit rund 800 Häusern, wird im Falle der Ausführung bei rund 1½ Million Reichsmark Gesamtkosten 76200 achtstündige Tagewerke zusätzlicher Arbeit während 30 Wochen für 507 Arbeiter schaffen. Nach den bisherigen Erfahrungen der Reichsanstalt vermochte die Erdbebenforschung der deutschen Wirtschaft Vermögenswerte zu erhalten und zu bringen, die bereits im Jahr eine Million Mark übersteigen. Nähere Angaben müssen zur Vermeidung unerwünschter Einmischungen in schwebende Verfahren unterbleiben. Der Aufbau einer Abteilung für technische und bodenmechanische Erdbebenforschung konnte an der Reichsanstalt für Erdbebenforschung bereits in Angriff genommen werden.

Während Geologie und Bergbau das fertige Erdrindengebäude, seine heute so verwickelte Ausgestaltung in Ansichten, Grund- und Aufrissen

¹⁾ A. SIEBERG, Warum Erdbebenforschung in Deutschland. Mitteilungen d. Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena, Nr. 3, 1933.

A. SIEBERG, Arbeiten der Reichsanstalt für Erdbebenforschung für das Wirtschaftsleben Deutschlands. Als Manuskript gedruckt 1933.

²⁾ A. SIEBERG, Über Ursache und Verhütung der Straßen- und Hauseinstürze in X. Als Manuskript gedruckt 1933/34.

zur Darstellung bringen, liefert die Gesamtheit der Erdbeben gewissermaßen ein kinematographisches Laufbild des gegenwärtigen Abschnittes der Bauausführung; zeigt, wodurch jeder Stein an seine Stelle gelangt, wie jeder Teil des Erdrindengebäudes zustande kommt. In dem Maße, wie die bodenmechanische Erdbebenkunde deutscher Prägung, die nicht am Grünen Tisch entstand, die begonnene Entwicklung zu einer Bewegungslehre der Erdrinde fortsetzt, ist sie in der Lage und berufen, mit der Zeit die geologische Lehre von der Gebirgsbildung, der Tektonik, auf eine natürlich-experimentelle Grundlage zu stellen¹⁾.

Die tatsächlich vorhandene Bedrohung von Belangen der deutschen Wirtschaft durch Erdbeben pflegt ebenso unterschätzt zu werden wie Deutschlands Erdbebentätigkeit, weil letztere gewöhnlich harmlos erscheint. Zwar bringt der Jahresverlauf nur wenige Beben, abgesehen von gelegentlichen Schwärmen mit vielen Hunderten von Einzelstößen, wie sie besonders dem Vogtland eigentümlich sind. Zudem handelt es sich dabei vorwiegend um schadlose Erderschütterungen, die kaum Beachtung finden. Aber die Fachliteratur behandelt daneben auch bis in die neueste Zeit hinein Erdbeben mit erheblichen Schäden und selbst Zerstörungen, die für längere Zeit das öffentliche Leben völlig beherrscht haben, vereinzelt Menschen töteten und verletzten; mitunter wurde fast Großbebencharakter erreicht. Die Zwischenzeiten sind allerdings bei solchen schweren Beben meistens so lang, daß die Erinnerung daran verblaßt. Aber mitunter folgte auch eine Reihe von Schadenbeben innerhalb weniger Jahre aufeinander. Außerdem werden nicht wenige Beben lokalen Ursprunges, darunter Schadenbeben, für Gegenden bezeugt, die, wie Norddeutschland, nach der herrschenden Ansicht als bebenfrei galten. Erinnerung sei bloß an einige wenige unter jenen bemerkenswerteren Erdbeben, über die ausführliche Nachrichten vorliegen:

1410, August, 23. Erdbeben in der Mark Brandenburg mit Schäden zu Wittstock und Havelberg, die Veranlassung zu einem lateinischen Gedicht gaben. Gefühlt bis Lübeck, Magdeburg, Halle und in Sachsen.

1737, Mai, 11.—18. und **1933**, Februar, 8. Kräftige Schadenbeben in der Gegend von Rastatt bis Karlsruhe.

1755, Dezember, 27. und **1756**, Februar, 18. Zerstörende Beben im Roerlgraben von Münstereifel bis Jülich und am Eifelnordrand bis Aachen; drei

¹⁾ A. SIEBERG, Untersuchungen über Erdbeben und Bruchschollenbau im östlichen Mittelmeergebiet. Denkschr. Mediz.-Naturw. Ges. zu Jena, 18. Bd., 2. Lief., Jena 1932. — Vgl. auch die beiden Vorträge Zur Mechanik tektonischer Vorgänge und Beziehungen zwischen Erdbeben und Geologie in Z. Dtsch. geol. Ges. 84, Berlin 1932.

Tote und mehrere Verletzte. Wochenlang wurde trotz der Winterszeit in Zelten und Baracken außerhalb der Ortschaften gewohnt. Schüttergebiete bis zur Zuidersee, dem Brüsseler und Londoner Becken, Paris, Straßburg, Halle. Zahllose Nachstöße, darunter nicht wenige Schadenbeben.

1872, März, 6. Leicht zerstörendes Erdbeben im Bruchfeld von Posterstein bei Schmölln in Ostthüringen; ziemlich großes Schadengebiet, ein Toter. Das Schüttergebiet reichte bis Breslau, Braunschweig, Gießen, Hechingen, Passau und Prag.

1873, Oktober, 22. und 1877, Juni, 24. Kräftige Schadenbeben im Wurmkohlenrevier von Herzogenrath bei Aachen. Schüttergebiete von Brüssel bis Münster i. W. und Gießen reichend.

1878, August, 26. Kräftiges Schadenbeben am Niederrhein, besonders von Oberembt bis Etzweiler; die Spuren der Schäden an Häusern und im Erdboden waren noch vor wenigen Jahren zu sehen. Das Schüttergebiet reichte von der Zuidersee bis Hannover und Straßburg.

1911, November, 16. Deutschlands größtes Beben, das fast den Charakter von schweren innerasiatischen Beben erreichte. In Ebingen belief sich der Schaden auf 300 000 M. Gebäudezerstörung fanden außerdem in der Gegend von Dußlingen (sämtliche Gebäude), Balingen (66%), Lautlingen, Bitz, Trochtelfingen und Sigmaringen statt. Manche Einwohner kampierten vorübergehend außerhalb der Häuser in behelfsmäßig errichteten Verschlägen. In Württemberg bezifferte sich der Gesamtschaden auf etwa 610 000 M., für Hohenzollern und Baden liegen keine Schätzungen vor; jedoch muß der Gesamtschaden 1 Million M. erheblich überschritten haben, trotzdem größere Industrieunternehmen nicht in Mitleidenschaft gezogen worden sind. Erdspalten und Schlammkegel entstanden bei Stockach, Bodenveränderungen im Bodensee. Schiffe auf Rhein und Ill verspürten die Stöße gleichfalls. Das Schüttergebiet reichte bis Braunschweig, Wien, der Riviera di Levante und der Loire. Eine leichtere, aber wiederum Schäden verursachende Wiederholung brachte der 20. Juli 1913.

Für die Wirtschaft ist die Kenntnis der durch Erdbeben angerichteten Schäden von ausschlaggebender Bedeutung, zumal am gleichen Ort Schäden entsprechender oder auch höherer Stärke für die Zukunft erwartet werden müssen. Die Herde nach Lage, Charakter der Tätigkeit und Beschaffenheit als geologische Störungsstelle interessieren dagegen den Theoretiker und den Geologen. Diese Erwägungen veranlaßten mich zur Entwicklung der sogenannten Kraftfeldmethode¹⁾. Demgegenüber spielt die Häufigkeit der Erdbeben, als Ausdruck der Herdregsamkeit, aus theoretischen und praktischen Gründen bloß eine untergeordnete Rolle.

Die wichtigsten Herde, besonders schadenbringender Erdbeben in Deutschland gehören den Hauptverwerfungszonen der Erdrinde an,

¹⁾ Denkschr. Mediz.-Naturw. Ges. zu Jena 1932.

von denen manche aus leichtbegreiflichen Gründen Bergbau- und Industriezentren mit Talsperren und dergleichen beherbergen. Bei der hohen wirtschaftlichen Bedeutung dieser Landstriche wäre es auf die Dauer nicht mehr zu verantworten, wenn dort nicht zum mindesten bei der Neuschaffung lebenswichtiger Großanlagen die heutigen Lehren der Erdbebenkunde Berücksichtigung fänden.

In dieser Erkenntnis hat die Reichsanstalt für Erdbebenforschung schon seit langen Jahren begonnen, alles überhaupt erreichbare Beobachtungsmaterial über Erdbeben in Deutschland, seit den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart, quellenkritisch und nach einheitlichen Methoden zu bearbeiten mit dem Ziel, den Wirtschaftsbedürfnissen in gleichem Maße Rechnung zu tragen wie den wissenschaftlichen Belangen. Einen vorläufigen kurzen Bericht, mit drei Kartenskizzen kleinen Maßstabes der Erdbebentätigkeit Deutschlands nach der Kraftfeldmethode, sowie einem Katalog von 108 bemerkenswerteren Erdbeben seit dem Jahre 58 n. Chr. bis zur Gegenwart, enthält meine Erdbebengeographie¹⁾. Dank der Unterstützung durch die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft stehen die Vorarbeiten unmittelbar vor dem Abschluß. Infolgedessen ist die Reichsanstalt für Erdbebenforschung schon jetzt in der Lage, wohl über fast sämtliche die Erdbebentätigkeit Deutschlands betreffenden Fragen erschöpfende Auskunft zu erteilen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß in Deutschland neben den tektonischen Erdbeben, mit engsten Beziehungen der Herde zum Bruchschollenbau, vereinzelt auch echte und künstliche Einsturzbeben vorkommen. Echte Einsturzbeben, wie dasjenige bei Stadtroda vom 28. Januar 1926, sind beispielsweise aus dem Thüringer Becken bekannt. In den mitteldeutschen Bergbaugebieten, vor allem in den Salzlagerstätten des Zechsteins und auch des Buntsandsteins, die zum Teil Braunkohlen unterlagern, spielen unterirdische Auslaugungen mit Einstürzen bis zum Tage hinauf eine wirtschaftlich bedeutungsvolle Rolle. Die Kohlenreviere haben nicht allein unter tektonischen Beben, sondern auch unter Gebirgsschlägen und unter Bergschäden verursachenden Zusammenbrüchen des Toten Mannes zu leiden. Hier hat, entgegen der üblichen Meinung, die Erfahrung bereits gelehrt, daß nicht alle Senkungsschäden über Tag

¹⁾ A. SIEBERG, Erdbebengeographie. Gutenbergs Handbuch der Geophysik, Bd. 4. Berlin 1932.

dem Bergbau zuzuschreiben sind¹⁾. Trotzdem dieser neue, vielversprechende Forschungszweig erst wenig über das Anfangsstadium herausgekommen ist, ergaben sich für die Reichsanstalt bereits mancherlei Gesichtspunkte, um die Beurteilung von Bergschäden auf geophysikalisch zuverlässigere Grundlage als bisher zu stellen. Welche Bedeutung diese Möglichkeit für Rechtsprechung und Wirtschaft erlangen kann, sofern von ihr Gebrauch gemacht wird, hat sich bereits in der Praxis gezeigt. Darüber hinaus darf die Hoffnung gehegt werden, daß die Reichsanstalt auf dieser erdbebenkundlichen Grundlage, unterstützt durch instrumentelle Sondermethoden der Angewandten Geophysik, dem Problem wirksamerer Verhütung von Bergwerksunfällen näher kommt. Auch auf diesem Gebiete ist ein Fortschritt selbstverständlich nur dann möglich, wenn Gelegenheiten zum Studium am Objekt geboten werden. Anschließend sei noch erwähnt, daß der weit verbreitete Glaube an vulkanische Beben in Eifel und Siebengebirge sowie in Süddeutschland, z. B. Kaiserstuhl, Ries, Urach und Hegau zu Unrecht besteht.

Um bereits jetzt eine ungefähre Vorstellung von der Wirtschaftsgefährdung Deutschlands durch Erdbeben zu vermitteln, gebe ich in Fig. 1 eine vereinfachte kartographische Darstellung für das Rheinland, die einstweilen die Schwerindustrie allein berücksichtigt. Wenn auch noch nicht alle Einzelheiten dem letzten Stande unseres Wissens voll entsprechen sollten, so dürfte sich doch jedenfalls am Grundsätzlichen nichts ändern. Da diese Karte für sich allein spricht, kann ich mich auf wenige Erläuterungen beschränken.

Unter den von mir und meinen Schülern²⁾ nach neueren Gesichtspunkten auch kartographisch bearbeiteten Erdbeben des Rheinischen Industriegebietes hatten manche einen Umfang und Wirkungen, wie sie von den Wenigsten für Deutschland vermutet werden. Von der Größe solcher Schüttergebiete, bis zur Grenze der Fühlbarkeit durch den Menschen, gibt die kleine Nebenkarte in der linken Ecke der Hauptkarte (Fig. 1) eine ausreichende Vorstellung. In der Hauptkarte sind sämtliche bekannt gewordenen Erdbebenwirkungen an Gebäuden folgendermaßen gegeneinander abgestuft:

¹⁾ A. SIEBERG, Erdbebenforschung und ihre Verwertung für Technik, Bergbau und Geologie“. Jena 1933. — Vgl. auch Kap. 15 der Jenaer Denkschr. 1932 sowie eine Reihe von Gutachten des Verfassers.

²⁾ F. NENNSTIEL, Entstehung und Ausbreitung deutscher Erdbeben in ihrer Abhängigkeit von geologischen Verhältnissen. Veröff. d. Reichsanstalt, Heft 12, Jena 1930.

Leichte Schäden: An vereinzeltten Häusern kam es zu Rissen im Verputz, zum Abbröckeln von Bewurf der Decken und Wände, zum Herabfallen von Dachpfannen und von Kaminsteinen, bisweilen zum Zusammenbruch schadhafter Schornsteine.

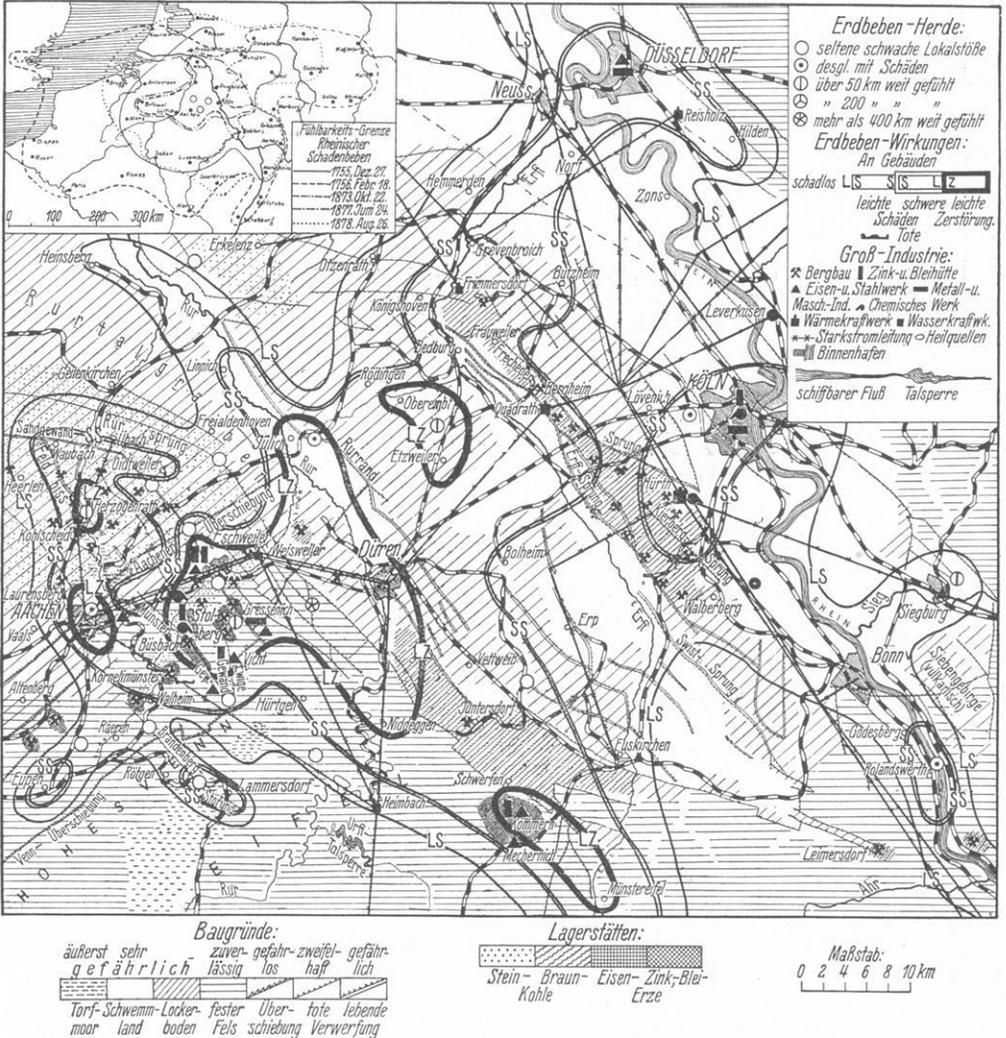


Fig. 1.

Wirtschaftsgefährdung durch Erdbeben im Rheinischen Industriegebiet.
 Bearbeitet von A. SIEBERG, Reichsanstalt für Erdbebenforschung.

Kräftige Schäden: Zahlreiche Gebäude wurden in Mitleidenschaft gezogen. Leichte Risse entstanden in solidem, kräftigere in minderwertigem Mauerwerk. Viele Dachpfannen glitten zu Boden, zahlreiche Schornsteine und Hausverzierungen brachen ab. Die heute vorhandenen Leitungsmasten würden gleich-

falls Beschädigungen ausgesetzt sein, und schon das Schwingen der Starkstromfernleitungen würde Kurzschlüsse erzeugen. Mitunter warfen Gewässer Wellen auf.

Leichte Zerstörungen: Fast kein Haus blieb unbeschädigt. Im Mauerwerk öffneten sich klaffende Spalten, vor allem litten Kirch- und Fördertürme sowie Fabrikamine Schaden; bisweilen wurde Abbruch von Bauten in verschiedenem Umfange notwendig. Vereinzelt stürzten wenig standfeste Mauern, Giebel und selbst schadhafte Hütten ein; Leitungsmasten können abbrechen. In Schwemmland und Lockerböden rissen Spalten auf, an Hängen rutschte das Erdreich ab und über Grubenbauen kam es zu Tagebrüchen (Pingen). Auch wurde kräftiger Wellenschlag auf Gewässern, der Schiffe ins Schaukeln versetzte und gegeneinander stieß, beobachtet.

Todesfälle durch Erdbeben sind für das Besprechungsgebiet bloß vereinzelt bezeugt. Von drei Personen wissen wir, daß sie von herabfallenden Steinen erschlagen wurden, während eine Mutter mit ihren sechs Kindern einer in den Trümmern ausbrechenden Feuersbrunst zum Opfer fiel. Auch gab es Verletzte.

Gerade die Haupterdbeben haben wochen- und monatelang Nachstöße gehabt, oft mehrere an jedem Tag, von denen nicht wenige erneute Schäden verursachten. Dieses spannende Gefühl der Unsicherheit ließ dann, wie wir vor allem aus den packenden Schilderungen der Ereignisse um die Jahreswende 1755/56 wissen, das gesamte öffentliche Leben in den Bann der Erdbeben geraten¹⁾. Die Spuren des Erdbebens von 1878 in der Berghheimer Gegend an Häusern und im Erdboden waren noch vor wenigen Jahren gut sichtbar.

Nach den bis jetzt allerorten bestätigten Erfahrungen muß, wie bereits erwähnt wurde, damit gerechnet werden, daß über kurz oder lang in den bisherigen Schadengebieten Erdbeben gleicher, vielleicht auch größerer Stärke auftreten. Da die Beschaffenheit des Baugrundes²⁾ einschließlich der Nachbarschaft von Verwerfungen die örtliche Wirkungsstärke der Bebenwellen auf die Gebäude bestimmt, wird auch die relative Zonenabgrenzung der Schadengebiete in den Grundzügen erhalten bleiben.

Jedoch hat die kulturelle Entwicklung des letzten Halbjahrhunderts eine Reihe von neuen Gefahrmomenten gebracht, die besonders die Wirtschaft schädigen können, und zwar: Unmittelbar durch die erforderlichen Reparaturkosten für Bau-, Maschinen-, Kraft- und Verkehrsanlagen; mittelbar durch Betriebsstockungen, also Leistungsminderungen.

¹⁾ A. SIEBERG, Einiges über Erdbeben in Aachen und Umgebung. Die Erdbebenwarte, 2, Laibach 1903.

²⁾ A. SIEBERG, Ein Beitrag zur Statik der Erdbeben. Praktika d. Akademie in Athen, 4, 1929.

Dazu kommt noch, daß die Belegschaften größerer Werke durch Schadenbeben während der Arbeitszeit an Leben und Gesundheit ganz besonders bedroht sind. Deshalb muß mit der Möglichkeit größerer Verlustziffern gerechnet werden, als bis jetzt bekannt sind.

Sehr zu denken gibt die Tatsache, daß das Industriegebiet am Nordrand von Eifel und Hohem Venn einem Haupterdebebengebiet¹⁾ angehört und daß außerdem manche wertvollen Anlagen auf gefährlichem Baugrund errichtet sind, der von den im Erdbeben schwingenden Werkanlagen viel ungünstiger beansprucht wird, als der mit ruhenden Gebäudelasten rechnende Bautechniker annimmt.

Von Schadenmöglichkeiten, mit denen im Besprechungsgebiet gerechnet werden muß, seien bloß die nachstehenden näher untersucht:

Bergbau. Nach den praktischen Erfahrungen und im Einklang mit theoretischen Überlegungen sind unter Tag kaum Schäden zu erwarten; Gebirgsschläge, Flüssigkeits- oder Gasausbrüche, die von Erdbeben hervorgerufen wären, scheinen in der Literatur nicht bezeugt zu sein. Jedoch kann es über Tag zu Bodensenkungen, Tagebrüchen, Spaltenbildungen und ähnlichen Bergschäden mit ihren mechanisch durch das Erdmassengleiten bedingten Wirkungen auf Bau-, Maschinen- und Transportanlagen kommen. Zu Beschädigungen neigen, neben den Essen, besonders Fördertürme, bis zu einem gewissen Grade auch die Wellen von Bewetterungsmaschinen. Auch ist mit der Möglichkeit von Rutschungen an Halden, Kippen und den Abbaustößen von Tagebauen, beispielsweise in Braunkohlengruben, zu rechnen.

Industriewerke. Besonders gefährdet sind hochragende, überschlankte Anlagen, wie sie namentlich die Chemischen Werke aufweisen, zumal wenn sie in Flußauen, auf Talböden oder auf Schuttkegeln, Ton-schichten u. dgl. an Hängen stehen. Ein beachtliches Gefahrmoment bilden Spülkippen wegen der Dambruchmöglichkeit. Welchen Umfang würde beispielsweise der aufsehenerregende Erdrutsch an der Spülkippe der Berndorfer Solvaywerke zu Latdorf²⁾ in Anhalt vom Mai 1933 angenommen haben, wenn die Massen durch Erdstöße losgerissen und vorwärtsgetrieben worden wären.

Kraftwerke, Überlandzentralen. Ungleichmäßige Verlagerung von Maschinenfundamenten oder Abnicken von Leitungsmasten würde

¹⁾ A. SIEBERG, Zur Geologie der Erdbeben im Rheinland. Z. f. Geophys. 2, Braunschweig 1926.

²⁾ A. SIEBERG, Über die Entstehung des Erdrutsches bei Latdorf im Mai 1933. Als Manuskript gedruckt 1933.

zu Betriebsstockungen führen, deren Folgen für die Wirtschaft und überhaupt für die meisten Zweige des öffentlichen Lebens, ganz abgesehen von der Personengefährdung, nicht erörtert zu werden brauchen.

Feuersgefahr. Es ist eine zwar altbekannte, aber trotzdem noch wenig gewürdigte Erfahrungstatsache, daß selbst in Haupterdbebenländern der ganzen Welt die Feuersbrünste, die bei Erdbeben durch verschüttete Feuer, zerrissene Gasleitungen, elektrische Kurzschlüsse u. dgl. entstehen, oftmals einen vielfach größeren Schaden anrichten als die Bodenerschütterungen. Auf diese Weise können, wie zahlreiche Beispiele beweisen, selbst energiearme Erdbeben wirtschaftliche Schäden allergrößten Umfanges zeitigen. Es unterliegt keinem Zweifel, daß sich manche der heutigen Industrieanlagen, soweit sie Schadenbeben ausgesetzt sind, zu einer beachtenswerten Gefahrenquelle dieser Art entwickelt haben.

Eisenbahnen. Abgesehen von etwaigen Dammrutschungen, namentlich in Flußauen oder an Hängen, dürften Erdbeben des Rheinlandes keine größeren Verkehrsstörungen verursachen.

Talsperren. Glücklicherweise liegt die Urft-Talsperre, wenigstens nach den bisherigen Erfahrungen, schon außerhalb der Gefahrenzone. Man stelle sich aber vor, was in den Tälern von Urft und Roer geschehen würde, wenn durch allmähliche Erweiterung ursprünglich wenig bedeutender Risse in der Sperrmauer das aufgestaute Wasser einen unvorhergesehenen Durchbruch erzwingen würde.

Den Binnenhäfen und den dort weilenden Schiffen droht in unserem Gebiet kaum eine Gefahr.

Die Heilquellen (Thermen) zu Aachen haben bis jetzt nachgewiesenermaßen keinen Schaden durch Erdbeben erlitten, trotzdem dieses Gerücht mehrmals, anscheinend von der Konkurrenz, ausgestreut worden war. Demnach besteht die Hoffnung, daß sie auch weiterhin verschont bleiben.

Nachdem die drohenden Gefahren erkannt sind, läßt sich auch der Frage nach der Möglichkeit von Schadenverhütung wenigstens in den Grundzügen nähertreten.

Selbst wenn eine Vorhersage von Erdbeben, mit genauester Zeit-, Orts- und Stärkebestimmung, möglich wäre, vermöchte sie bestenfalls einige Menschen vor Leibesschäden, aber unter keinen Umständen die Wirtschaft vor Sachschäden zu bewahren. Denn die vorhandenen Wirtschaftsobjekte lassen sich weder aus dem Gefahrenbereich entfernen, noch nachträglich gegen die eigene Reaktion auf Erdbebenwellen und gegen diejenige ihres Standortes, des Untergrundes, sichern. Mit-

hin sind die bereits bestehenden Anlagen unentrinnbar ihrem Schicksal ausgeliefert.

Nicht zu verantworten wäre es aber, wenn wirtschaftlich tragbare Maßnahmen, die geeignet sind, vorstehend genannte Schäden zu vermeiden oder wenigstens nach Möglichkeit zu verringern, bei industriellen und ähnlichen Neuanlagen versäumt würden. Diese Maßnahmen sind gerade bei industriellen Werken in allererster Linie eine Standortfrage. Denn die Bauausführung von technischen Gliedern der Anlage verträgt, schon wegen der geforderten Leistungen, meistens keine grundlegenden Änderungen. Nur hin und wieder wird der Konstrukteur vielleicht auf eine Formgebung und Durchbildung von Einzelheiten Bedacht nehmen können, die größere Widerstandsfähigkeit gegen die zusätzliche Beanspruchung durch Erdbebenwirkungen verspricht; allerdings bloß unter der Voraussetzung, daß sich deren Kräfte nach Art, Größe und Richtung ermitteln lassen. Letzteres ist aber nur für gesunden, gewachsenen Fels als Baugrund bis zu einem gewissen Grade möglich, nicht für Lockerböden oder gar für wasserdurchtränktes Schwemmland; bei ausweichendem oder abrutschendem Boden unter den Fundamenten versagt überhaupt jede menschliche Kunst. Dabei ist noch zu beachten, daß die dem Bautechniker geläufige Art der Standfestigkeitsbeurteilung von Baugründen bei Erdbeben versagen muß, weil schwingende Gebäude den Boden plötzlich weit stärker beanspruchen als ruhende. Unter diesen Umständen bleiben die Wahl des Baugrundes und die Fundamentierung von ausschlaggebender Bedeutung. Glücklicherweise genügt in manchen Fällen schon die Verlegung¹⁾ einer Baustelle um ein Geringes, um gefährliche Baugründe zu meiden und um ein den gegebenen Bedingungen entsprechend befriedigendes Maß von Standsicherheit bei Erdbeben zu erzielen, unter voller Wahrung der wirtschaftlichen und verkehrstechnischen Vorteile des Standortes. Aber selbstverständlich müssen die diesbezüglichen Sonderuntersuchungen schon vor Beginn der Planung abgeschlossen sein.

Zwar ist die Reichsanstalt für Erdbebenforschung in erster Linie eine von nichtwissenschaftlichen Sonderinteressen unberührte Forschungsstätte. Aber seit jeher hat sie, wie schon die vorstehenden Darlegungen über ein Einzelgebiet zu erkennen geben, ihre Forschungsergebnisse bewußt und auch mit Erfolg in den Dienst am Deutschen Volke gestellt.

¹⁾ A. SIEBERG, Das Korinther Erdbeben vom 22. April 1928. Jenaische Z. Naturw., N. F. 57, 1928.

Über die Aufzeichnung von Fernbeben mit kurzperiodischen Seismometern.

Von

Gerhard Krumbach.

(Mit 3 Figuren.)

Zusammenfassung: An dem Beispiel des Erdbebens vom 15. I. 1934 wird gezeigt, daß kurzperiodische Erdbebeninstrumente, wie das 15000-kg-Seismometer in Jena, geeignet sind, auch gute Fernbebenaufzeichnungen zu liefern. Es ist dann durch gleichzeitige Verwendung von mechanischer und optischer Registrierung die Möglichkeit gegeben, das 15000-kg-Seismometer als Universalinstrument zu benutzen.

Ausgesprochene Nahbebeninstrumente, also Instrumente mit Eigenperioden von 1—3 sec und starken Vergrößerungen sind an den seismischen Stationen verhältnismäßig wenig vorhanden. Es können daher auch Vergleichsmessungen mit den normalen Stationsinstrumenten selten durchgeführt werden. Dazu kommt auch, daß die meist erhöhte Registriergeschwindigkeit der Nahbebeninstrumente die Phasengruppen bei Fernbeben weniger deutlich erkennen läßt und damit die unmittelbare Gegenüberstellung der Seismogramme sehr erschwert.

Eine derartige Vergleichsuntersuchung ließ sich jedoch zur Prüfung der neuen Einrichtungen bei der Neuaufstellung der NS-Komponente des 15000-kg-Seismometers der Station Jena durchführen.

Die Konstanten des 15000-kg-Seismometers sind:

$$\begin{aligned} \text{NS: } V &= 2200, T_0 = 2,2 \text{ sec, } \varepsilon : 1 = 5,6; \\ \text{EW: } V &= 2200, T_0 = 1,4 \text{ sec, } \varepsilon : 1 = 3,6. \end{aligned}$$

Da die Schwingungsperiode der freien Pendelmasse auch 2,2 sec beträgt, so zeigen die Konstanten, daß im Aufbau der neuen Komponente wesentliche Verbesserungen erzielt worden sind.

Für die Vorversuche wurde die neue NS-Komponente mit einer provisorischen Registriereinrichtung versehen, bei der der Minutenabstand 11 mm betrug. Die Registriergeschwindigkeit bei dem Vergleichsinstrument (Wiechert 1200 kg) ist 15 mm/min. Infolgedessen lassen sich also die Seismogramme bequem vergleichen.

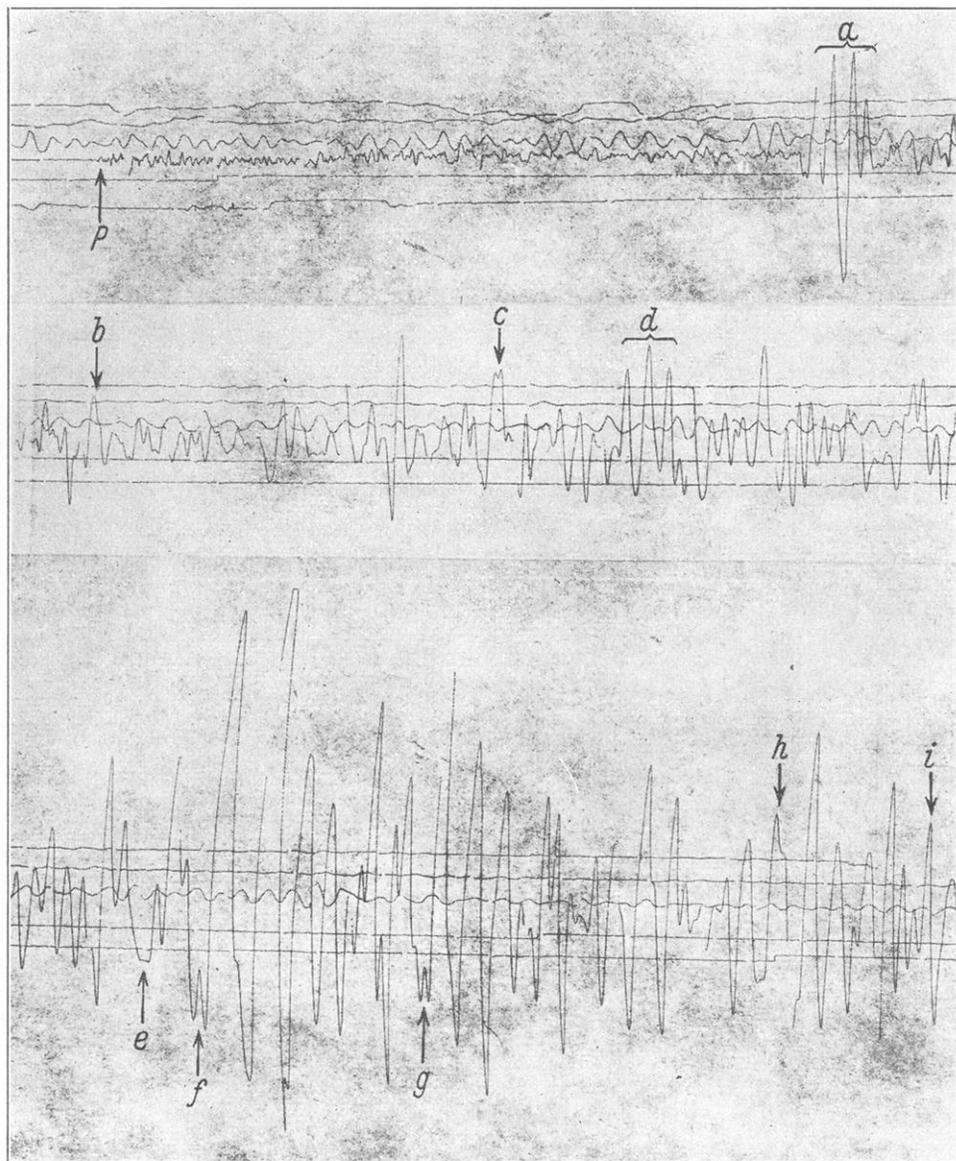


Fig. 1. NS-Komponente des 1200-kg-WIECHERT-Seismometers bei dem Beben vom 15. I. 1934. ($T_0 = 8,8$ sec.)

Als Unterlage für die Untersuchungen diente das gut ausgeprägte Beben vom 15. I. 1934 (Jamalpur). Die NS-Komponente des 1200-kg-Seismometers hatte dabei folgende Konstanten: $V = 250$, $T_0 = 8,8$ sec, $\varepsilon : 1 = 3,8$. Die Eigenperiode des WIECHERT-Seismometers betrug also das Vierfache von der des 15000-kg-Seismometers.

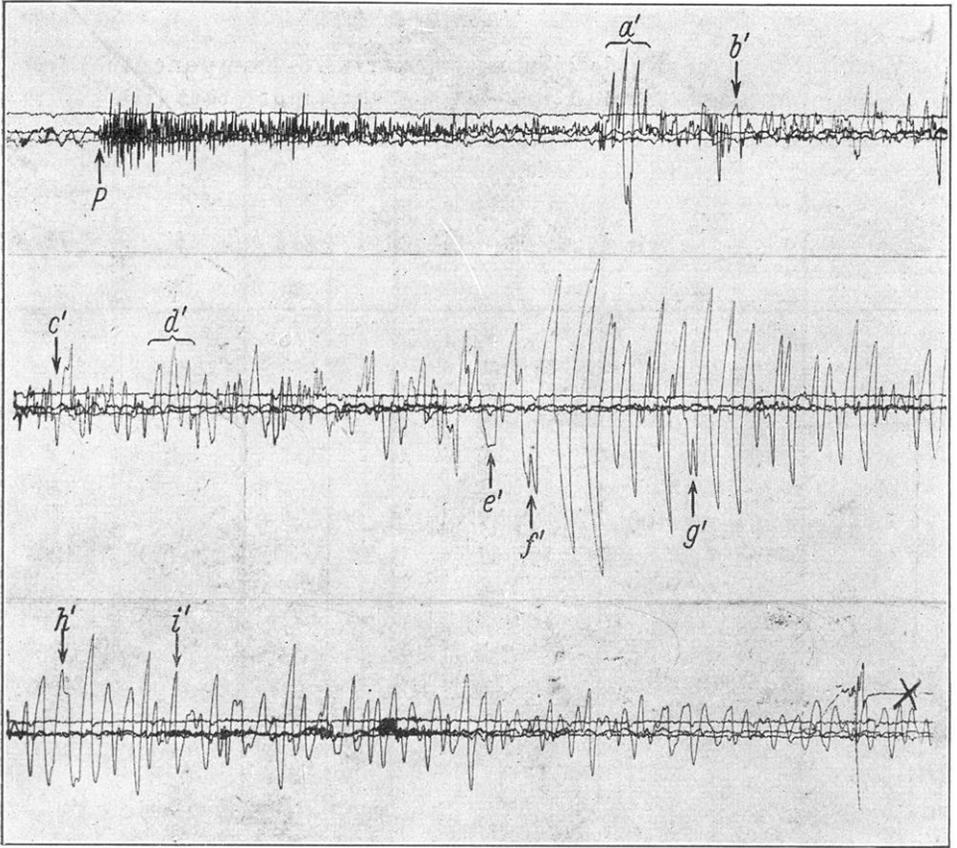


Fig. 2. NS-Komponente des 15000-kg-Seismometers bei dem Beben vom 15. I. 1934. ($T_0 = 2,2$ sec.)

Schon ein flüchtiger Blick auf die Parallelregistrierungen (Fig. 1 und 2) zeigt eine völlige Identität der Seismogramme. Zu einem besseren Vergleich sind in den beiden Reproduktionen die entsprechenden Phasen gleichmäßig bezeichnet. Dabei fällt auf, daß, abgesehen von einer Verstärkung der kurzen Perioden im Anfangsbereich, das ganze weitere Diagramm völlig mit der Aufzeichnung eines Fernbebeninstrumentes in allen Einzelheiten übereinstimmt.

Diese Übereinstimmung ist daher ein sicherer Beweis für das einwandfreie Arbeiten der neuen Komponente. Ferner ist die Identität der Seismogramme zweier im Aufbau ganz verschiedener Apparate eine Bestätigung für die „Theorie der automatischen Seismographen“.

Zur objektiven Überprüfung der Verhältnisse sind in der nachfolgenden Tabelle die Werte für die Ausmessung einzelner Phasen zusammengestellt.

Tabelle 1.

Vergleich der Registrierungen der NS-Komponente des WIECHERT- (I) und des 15000-kg-Seismometers (II).

Phase	Zeit			Diagramm- amplitude		Periode		Bodenbewegung	
				I	II	I	II	I	II
	h	m	s	mm	mm	s	s	μ	μ
<i>e p</i>	9	53	34						
<i>i P</i>	9	53	42						
<i>m</i>	9	54,0				8	< 1		
<i>i S</i>	10	01	46						
<i>m</i>	10	02,3		23	13,5; 19	16	16	250	320
<i>i S_{R2}</i>	10	06	00						
<i>m</i>	10	06,2		19	11	12	12	110	120
<i>i S_{R3}</i>	10	07	30						
<i>m</i>	10	07,6		12	7; 11	20	20	210	260
<i>e L</i>	10	11,0							
<i>M₁</i>	10	17,2		> 59	26	33	33	> 2500	2400
<i>M₂</i>	10	19,0		45	21	21	22	900	950
<i>M₃</i>	10	21,5		28	15	22	22	600	700
<i>F</i>	13,3		h						

Diese Gegenüberstellung zeigt deutlich auch die numerische Übereinstimmung der Beobachtungsergebnisse. Die Diagrammamplituden sind bei dem 15000-kg-Seismometer etwa halb so groß wie bei dem WIECHERT-Seismometer. Die ausgemessenen Perioden sind trotz des großen Unterschiedes in den Eigenperioden der Instrumente völlig gleich. Auch sind keine wesentlichen Unterschiede in den Amplituden der wahren Bodenbewegung vorhanden. Größere Werte bei dem 15000-kg-Seismometer haben zum Teil ihre Ursache in der Amplitudenverstärkung durch kurzperiodische Überlagerungen.

Wegen der guten Übereinstimmung der Ergebnisse liegt es jetzt nahe, allgemein die Wirksamkeit der beiden Seismometer durch die Berechnung der dynamischen Vergrößerung für die Periodenwerte von 0–35 sec zu vergleichen. Dabei wird die bekannte Formel benutzt:

$$\mathfrak{B} = \frac{V}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right\}^2 + 4 \frac{(\ln \epsilon)^2}{\pi^2 + (\ln \epsilon)^2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}}$$

Tabelle 2.

Vergleich der dynamischen Vergrößerung für Perioden von 0—35 sec bei dem WIECHERT (I) und dem 15000-kg-Seismometer (II).

Periode sec	Dynamische Vergrößerung		Peri- ode sec	Dynamische Vergrößerung		Peri- ode sec	Dynamische Vergrößerung	
	I	II		I	II		I	II
0	250	2200	2,6		1830	14	125	55
0,2		2200	2,8		1610	15	110	50
0,4		2235	3	280	1430	16	95	40
0,6		2290	4	290	745	17	80	35
0,8		2350	5	305	500	18	70	33
1	260	2415	6	320	310	19	65	30
1,2		2510	7	325	225	20	60	25
1,4		2530	8	315	170	22	50	22
1,6		2600	9	290	135	24	40	18
1,8		2570	10	250	110	26	30	16
2,0	270	2455	11	210	90	28	25	13
2,2		2280	12	180	75	30	20	12
2,4		2040	13	145	60	35	15	11

Diese Übersicht und auch ihre graphische Darstellung (Fig. 3) zeigen deutlich, daß sich die starke Vergrößerung des 15000-kg-Seismometers nur bis 3—4 sec, also im Periodenbereich der Nahbeben, auswirkt. Bereits von 6 sec ab entspricht die Vergrößerung der von normalen Fernbebeninstrumenten. So liefert demnach das 15000-kg-Seismometer gleichzeitig sehr gute Ergebnisse für Nah- und Fernbeben. Damit liegt auch eine universelle Verwendung nahe. Zur Auflösung der schnellen Schwingungen bei den Nahbebenregistrierungen bleibt die alte Aufzeichnungsmethode,

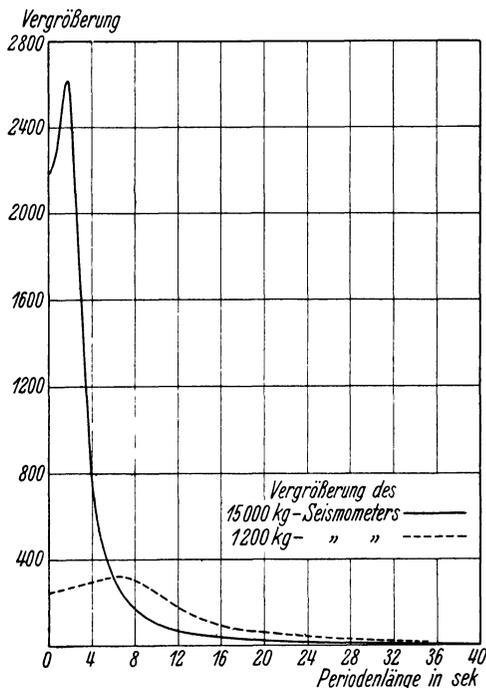


Fig. 3. Vergleich der dynamischen Vergrößerungen für verschiedene Periodenlängen.

also Rußschreibung mit 60 mm Registriergeschwindigkeit bestehen. Die Diagrammamplitude ist halb so groß wie bei den normalen Stationsinstrumenten. Zur Erzielung der gleichen Empfindlichkeit muß daher für die Fernbebenaufzeichnung die Vergrößerung erhöht werden. Zweckmäßig verwendet man hierfür gleichzeitig optische Registrierung. Ohne Beeinträchtigung der Wirksamkeit läßt sich dann durch einfaches Aufsetzen eines Spiegels auf die letzte Hebelachse und geeignete Wahl des Lichtweges die normale Vergrößerung erreichen. Als Registriergeschwindigkeit ist dabei etwa 15 mm/sec zu verwenden.

Durch diesen einfachen Zusatz ist damit ein Universalinstrument für Nah- und Fernbeben geschaffen.



Experimentelle Untersuchungen an Quarzglaspendeln mit Quarzglasschneiden.

Von

O. Meißer.

(Mit 1 Figur.)

Zusammenfassung: Messungen an Pendeln mit Quarzglasschneiden ergeben eine geringe Konstanz. Stahl ist als Schneidmaterial besser geeignet als andere spröde Stoffe.

Bei relativen Schweremessungen mit invariablen Pendeln ist die Genauigkeit letzten Endes von der Konstanz der Pendel selbst abhängig, denn die sonstigen Korrekturen (für die Amplitude, die Temperatur, das Mitschwingen, den Luftdruck) können eliminiert bzw. entsprechend klein gehalten werden. Für die Untersuchung der Konstanz der Pendel wurden acht Quarzglaspendel in zwei neuen Zeißschen Vakuumpendelapparaten mit elektrischer Auslösung und photographischer Registrierung (Schwingungsdauerverfahren) benutzt. Die acht Pendel wurden teilweise gleichzeitig in beiden Apparaten mit denselben Zeitmarken unter denselben physikalischen Bedingungen beobachtet, um vollkommen unabhängig von den Uhrgangschwankungen und sonstigen störenden Einflüssen zu sein. Quarzglas wurde als Material gewählt, weil dieser Stoff im Gegensatz zu den Nickeleisenlegierungen unmagnetisch ist und wohl auch eine beständigere Form gewährleistet. Der Temperaturkoeffizient von $a \sim 5 \cdot 10^{-7}$ bedingt auch in der Halbschwingungsdauer T eine geringe Abhängigkeit von $2,5 \cdot T \cdot 10^{-7}$ sec für 1° C. Diesem Vorteil steht ein größerer Koeffizient für die Luftdichte (ca. 3,6 fach gegenüber Indalotans) als ein gewisser Nachteil gegenüber. Der relative Druck läßt sich dann am besten mit einem verkürzten Kombinationsmanometer aus Hg und einer leichteren Flüssigkeit genügend genau bestimmen¹⁾. Um den „Druckkoeffizienten“ für die einzelnen Pendel möglichst gleich zu bekommen, muß das spezifische Ge-

¹⁾ M. R. DARBORD, Manomètre à mercure et à huile C. R. 1929, 14.

wicht der Pendel und ihre Form bis auf ca. 1⁰/₀₀ übereinstimmen. In Tabelle 1 sind die spezifischen Gewichte der Pendelkörper angegeben.

Tabelle 1.

Pendel Nr.	3	4	5	6	7	8	9	10
Spez. Gew.	2,20 ₄	2,20 ₅	2,20 ₅	2,20 ₄	2,20 ₅	2,20 ₅	2,20 ₄	2,20 ₅
Pendelgew. g	678,45	678,40	678,50	678,45	678,65	678,90	678,65	678,50

Die Bedingung für die Gleichheit dieser Werte von < 1⁰/₀₀ ist eingehalten. Ein Quarzglasstück minderer Qualität (größere Luft einschlüsse) hatte hingegen nur ein spezifisches Gewicht von 2,200₉¹⁾. Die Spalte für die Pendelgewichte in Tabelle 1 zeigt, daß auch für die Dimensionen die obige Bedingung eingehalten ist.

Die eingesetzten Schneiden bestanden aus Quarzglas. Als Auflageflächen dienten Achatscheiben von 10 mm Durchmesser. Für einen Krümmungsradius von $\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ cm erhält man, wenn die idealgedachte Schneide auf beiden Achatlagern genau aufliegen würde, eine²⁾ maximale Druckspannung von ~ 150 kg/mm². Die normale Druckfestigkeit beträgt für Quarzglas 190–198 kg/mm². Die unbenutzten Schneiden zeigten nach der Methode von SCHMERWITZ³⁾ Krümmungsradien bis 4 μ , die ihrerseits längs des Schneidenprofils sich teils bis 100⁰/₀ ändern können. Die fertigen Pendel zeigten Schwingungsdauern, die weder einen Zusammenhang mit den Pendelmassen noch mit den vorher gemessenen Schneidenradien zeigten. Als einziges Ergebnis kann man die Tatsache feststellen, daß man ohne Abstimmung diese Quarzglaspendel mit einer Genauigkeit von $\pm 2 \cdot 10^{-5}$ sec herstellen kann. Diese Grenze ist durch den Krümmungsradiuseinfluß (BESSELKORR.) gesetzt. Die Pendel werden an einem eingesetzten Indalatans-

¹⁾ Der Literaturwert beträgt nach LANDOLT-BÖRNSTEIN 2,206.

²⁾ Die maximale Druckspannung σ_{\max} in der Schneidenmitte ist bei zylinderförmigem Querschnitt nach HÜTTE I. Bd. 1925, S. 570.

$$\sigma_{\max} = \sqrt{0,175 \cdot \frac{P \cdot E}{L \cdot \rho}}. \quad (1)$$

Es ist Elastizitätsmodul $E = 0,72 \cdot 10^6$ kg/cm² Gewicht $P = 0,7$ kg
 Auflagelänge $L = 2$ cm $\sigma_{\max} \sim 150$ kg/mm²

³⁾ G. SCHMERWITZ, Messung von Schneidenkrümmungsradien. Z. Instrumentenkde 52 (1932) 1–14.

zylinder von ca. 5 g fein abgestimmt. Zwischen Gewichtsänderung (Zusatzscheiben) dm und der entsprechenden Schwingungsdaueränderung dT besteht hier die Relation

$$dT = 1,48 \cdot 10^{-7} dm \text{ (mg) sec} , \quad (2)$$

wenn die Schraube im Abstand der halben reduzierten Pendellänge von der Schneide angebracht ist.

Die Pendelpaare wurden bis auf einige Einheiten der 7. Dezimale in der Halbschwingung gleichgemacht. Bei der folgenden Konstantenbestimmung zeigte sich mit steigender Zahl der Messungen, daß die Gleichheit der Pendelschwingungen auf die Dauer sich nicht aufrecht-erhalten ließ. Die in Tabelle 2 angeführten Messungen wurden im

Tabelle 2.

Auf gleiche mittlere Halbschwingung reduzierte Halbschwingungen¹⁾.

Nr.	Datum	Pendel: Q 3 sec	Q 4 sec	Q 5 sec	Q 6 sec
1	5. 7. 32	0,405 1100,5	0,405 1099,4	0,405 1098,3	0,405 1101,6
2	5. 7. 32	1098,6	1100,8	1096,3	1104,2
3	5. 7. 32	1099,2	1100,3	1096,9	1103,7
4	6. 7. 32	1100,2	1097,4	1098,3	1104,1
5	7. 7. 32	1099,2	1098,2	1098,0	1104,5
6	8. 7. 32	1099,7	1101,4	1096,0	1103,0
7	9. 7. 32	1034,8	(!) 1243,8	1069,1	1052,0
8	9. 7. 32	1051,0	1186,7	1080,4	1081,0
9	9. 7. 32	1078,4	1100,8	1100,6	1120,1
10	11. 7. 32	1093,2	1076,5	1070,7	1159,7
11	11. 7. 32	1097,9	1098,7	1098,9	1105,4
12	11. 7. 32	1099,8	1101,4	1097,3	1101,6
13	11. 7. 32	1098,9	1100,4	1096,4	1104,1
14	12. 7. 32	1095,3	1103,1	1094,1	1107,4
15	12. 7. 32	1095,5	1102,6	1095,3	1106,6
16	13. 7. 32	1095,1	1097,3	1092,0	1115,4
17	13. 7. 32	1092,5	1094,7	1073,0	1138,8
18	16. 7. 32	1061,1	1138,9	1082,0	1084,9

Vakuum (ca. 10 mm Hg), bei konstanten Bedingungen und einer ein-stündigen Beobachtungsdauer vorgenommen. Der Apparat wurde nicht verändert. Die Messungen an den ersten Tagen 5. bis 8. VII. 1932

¹⁾ Die Pendelmessungen und Auswertungen wurden von Herrn Mechaniker HOHMANN mit großem Geschick ausgeführt.

stimmen als Einzelmessungen recht gut untereinander überein (Auswertgenauigkeit ca. $\pm 5 \cdot 10^{-8}$ sec). Vor der zweiten Messung am 11. VII. 1932 wurden die Pendel neu eingehängt und die Lager gut gereinigt. Mit der Zeit laufen die abgeglichenen Halbschwingungen wiederum auseinander. Die ganz großen Differenzen (!) ließen sich teilweise durch kleine Staubfäserchen erklären, die unter die Schneide geraten waren. Eine erhöhte Sauberkeit verminderte fast vollständig solche großen „Pendelsprünge“, da nach sorgfältiger Reinigung die alten Werte bis auf einige Einheiten der 7. Dezimale meistens wieder hergestellt werden konnten.

Um evtl. Fehler zu vermeiden, die über die „Besselkorrektion“ beim Aufsetzen der Schneiden auf das Pendellager auftreten können, wurde die Arretierung so umgebaut, daß in beiden Koordinaten die Lagerreproduzierbarkeit in der Größenordnung von mehreren $\frac{1}{10} \mu$ war, wie noch mikroskopisch festgestellt werden konnte. In Fig. 1 sind die

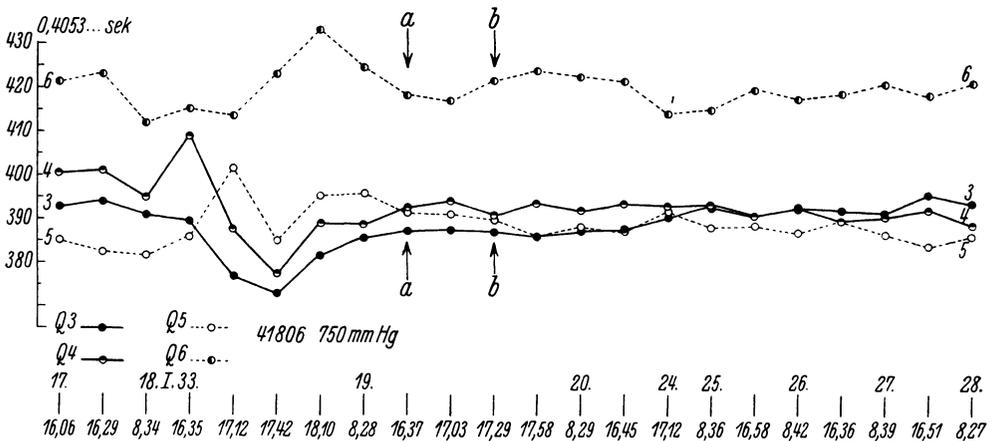


Fig. 1.

Wiederholungsmessungen auf gleiches mittleres Pendel (aus Q 3, Q 4, Q 5, Q 6) reduziert graphisch dargestellt. Das Pendelpaar Q 3 und Q 4 hat sich noch am besten gehalten. Trotzdem ist auch hier deutlich festzustellen, daß die geringe Differenz von mehreren Einheiten der 7. Dezimale in der Halbschwingung nicht konstant ist. Um experimentell festzustellen, wieweit an diesen Schwankungen in Fig. 1 Änderungen der Unterlage eingehen, wurden folgende zwei Versuche angestellt: Am 19. I. 1933 16^h 37^m (s. Fig. 1 ↑ a) erhielt jedes Pendel gegenüber seiner sonstigen Lage eine seitliche Verschiebung in der Richtung der

Achse von einigen $\frac{1}{10}$ mm. Es ist auffallend, daß dieser Wert ($\uparrow a$) mit dem vorangehenden und nachfolgenden relativ gut auf einer Geraden liegt (innerhalb $\pm 2 \cdot 10^{-7}$ sec). Weiterhin konnten die Achatauflagen durch besondere Schrauben um einige NEWTONsche Farbringe verspannt werden (mit einer Prüfplatte gemessen). An der Stelle $\uparrow b$ in Fig. 1 (19. I. 1933 17^h 29^m) wurden die Achatauflageflächen künstlich verspannt. Auch hier zeigt sich wider Erwarten keine beträchtliche Änderung ($> 2 \cdot 10^{-7}$ sec) in der relativen Konstanz der Halbschwingungen. Diese beiden Versuche (a, b) führen zu dem Schluß, daß die Inkonstanz der Pendel — abgesehen von Staubteilchen auf den Lagern — in erster Linie von den Veränderungen an der Schneide selbst abhängt.

Die nach Formel (1) berechnete maximale Druckbeanspruchung σ_{\max} der Schneide hatte zur Voraussetzung, daß die Schneide längs ihrer Gesamtlänge an den Achatlagern aufliegt. Betrachtet man die benutzten Quarzglasschneiden bei starker Vergrößerung (1000 fach)¹⁾, so sieht man, daß — wenn auch ein definierter Krümmungsradius gemessen wird — diese Schneiden aus Quarzglas — ebenso bei Schneiden aus noch härteren Mineralien²⁾ — als eine stark zerklüftete Kante anzusprechen sind, die trotz sorgfältiger Herstellung ein sägeartiges Aussehen annehmen. Außerdem kommt hinzu, daß die Achatlager sich nicht auf die Dauer genau als zwei ebene annähernd parallele Flächen erhalten³⁾. Weiterhin wurde für die Schneiden aus Quarzglas trotz reichlicher Dimensionierung eine Durchbiegung von ca. $0,08 \mu$ unter dem Einfluß des Pendelgewichts berechnet. So erscheint es in Verbindung mit den obigen Versuchen (Fig. 1) recht wahrscheinlich, daß die Schneiden nur an einigen Punkten aufliegen. Diese „Punktauflagen“ sind über längere Meßreihen bei den verwandten Quarzglasschneiden nicht konstant, da dieses spröde Material bei evtl. stoßweisen Überbeanspruchungen leicht ausspringt.

Als Abhilfe ist eine Auflage von Kugel-Ebene oder von zwei gekreuzten Zylindern möglich. Schließlich kann man versuchen, Stahl als Schneidenmaterial zu verwenden. Die Versuche mit Kugeln an Stelle von Schneiden führten zu keinem allseitig befriedigenden Ergebnis

¹⁾ Vgl. Fig. 5 in MEISSER, Schneiden- und Unterlagematerial bei invariablen Pendeln für rel. Schweremessungen. Z. Geophys. 9 (1933) 173—180.

²⁾ Z. B. Korund.

³⁾ Von diesem Gesichtspunkt aus bietet die STÜCKRATHSche Form des Pendelkopfes recht erhebliche Vorteile gegenüber der STERNECKSchen T-Form.

(Amplitudenkorrektion). Hingegen gelang es, Stahlschneiden in besserer Qualität herzustellen und bessere Ergebnisse zu erzielen, wie Tabelle 3 zeigt.

Tabelle 3.

Pendel Q 6 mit Stahlschneiden bei einmaliger Messung am:

2. 10. 33.	$T = 0,4076$	126,8	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
5. 10. 33.	$T = 0,4076$	125,9	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
12. 10. 33.	$T = 0,4076$	125,4	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
13. 10. 33.	$T = 0,4076$	127,2	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
13. 10. 33.	$T = 0,4076$	126,1	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
16. 10. 33.	$T = 0,4076$	127,8	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
25. 10. 33.	$T = 0,4076$	127,6	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
25. 10. 33.	$T = 0,4076$	126,7	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
27. 10. 33.	$T = 0,4076$	127,8	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec
27. 10. 33.	$T = 0,4076$	126,9	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ sec

Durch das gleichzeitige Beobachten von je vier Pendeln bei einer Messung lassen sich geringe Änderungen ($< 5 \cdot 10^{-7}$ sec) eines einzelnen Pendels leicht erkennen und in Rechnung setzen. Über eine Genauigkeit von $\pm 0,3$ mgal mit diesen Schwerependeln bei einer Einzelmessung (vier gleichzeitig schwingende Pendel) zu kommen, erscheint nach den bisherigen Erfahrungen recht unwahrscheinlich.

Beiträge zum Amplitudenregistrierverfahren (Koinzidenzregistrierverfahren).

Von

H. Martin.

(Mit 1 Figur.)

Zusammenfassung: Es wird der Unterschied zwischen den allgemein üblichen Registrierverfahren (Registrierung auf fortlaufendem Film) und dem Amplitudenregistrierverfahren erläutert. An Hand einer Figur werden weitere Ergebnisse der Untersuchung einer Riefler-Uhr hinsichtlich des Zusammenhanges von Antrieb und Schwingungsdauer des Pendels mitgeteilt.

§ 1. Genauigkeit und Leistungsfähigkeit.

Man kann sich einmal die Frage vorlegen, worin eigentlich der grundsätzliche Unterschied zwischen den gewöhnlichen Registrierverfahren zur Aufzeichnung von Schwingungen aller Art und dem bei der Registrierung der Koinzidenzen verwandten Verfahren liegt. Dieser Unterschied ist kurz der folgende: Bei den allgemein üblichen Registrierverfahren ist die Genauigkeit der Auswertung von der Geschwindigkeit und der Präzision der Papierführung abhängig. Je größer die Papiergeschwindigkeit und je gleichmäßiger der Papiertransport ist, um so größer ist die Genauigkeit der Auswertungsmöglichkeit. Dabei leisten zur Interpolation auf kurze Filmstrecken und damit für kurze Zeiten Zeitmarken von beispielsweise $\frac{1}{50}$ oder $\frac{1}{100}$ Sek. (Stimmgabelunterbrecher mit GEISLER-Rohr) gute Dienste. Die Genauigkeit der gewöhnlichen Registrierverfahren ist von der Genauigkeit der Zeitkoordinate abhängig.

Beim photographischen Koinzidenzverfahren ist das auch, aber in ganz anderer Beziehung der Fall, denn die Genauigkeit der Auswertung ist von der Geschwindigkeit von Registrierfilm oder -platte unabhängig. Dafür dient einer der beiden zu vergleichenden periodischen Vorgänge selbst zur Registrierung. Darin besteht eine Beschränkung in den Anwendungsmöglichkeiten. Aber die Leistungsfähigkeit ist an den Stellen,

wo das photographische Koinzidenzverfahren anwendbar ist, sehr viel größer als das der gewöhnlichen Registrierverfahren. Dazu kommt die sehr bequeme, einfache Auswertung.

Ein Beispiel möge als Erläuterung dienen. Bei den schon früher¹⁾ und im folgenden beschriebenen Ergebnissen handelt es sich kurz gesagt um den Vergleich der Schwingungsdauern zweier Systeme (Uhr-freischwingendes Pendel, Uhr-Stimmgabel). Dabei werden die Schwingungen des freien Pendels bzw. der Stimmgabel zur Zeitmessung selbst benutzt, wodurch die Unabhängigkeit der Führungsgeschwindigkeit der Registrierplatte erreicht wird. Die Genauigkeit ist dann am größten, wenn die Aufzeichnung der periodischen Lichtblitze in dem Moment erfolgt, in welchem die zur Registrierung dienende Schwingung durch den Nullpunkt geht. Nehmen wir die Amplitude der von einer Stimmgabelschwingung aufgezeichneten Kurve zu y mm an, ist die Frequenz der Stimmgabelschwingung N Schw./sec und die Auswertungsgenauigkeit dy mm, dann beträgt der Fehler der Zeitbestimmung dt

$$dt = \frac{dy}{2\pi \cdot y \cdot N} \text{ sec.}$$

Bei den angeführten Versuchen war die Frequenz der Röhrenstimmgabel $N = 61$ Schw./sec, $y = 10$ mm und $dy = 1/100$ mm. Der Fehler der Zeitmessung betrug somit

$$dt = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Es entspricht also der Meßgenauigkeit von $1/100$ mm die Zeitgenauigkeit von $2,6 \cdot 10^{-6}$ sec.

Wollte man mit einem gewöhnlichen Registrierverfahren dieselbe Genauigkeit erreichen, so brauchte man eine Filmgeschwindigkeit von 3,8 m/sec. Dazu müßte man nach Aufnahme der Registrierung die mühevollen Auswertung in Kauf nehmen.

Ohne Anwendung besonderer Kunstgriffe kann man auf einer $9/12$ -Platte unter Verwendung des Breitformates mit Hilfe des photographischen Koinzidenzverfahrens bequem zwei Registrierungen von je 15 min unterbringen. Der dazu nötige Film würde beim gewöhnlichen Registrierverfahren eine Länge von 6,8 km haben. Bei Ver-

¹⁾ H. MARTIN, Das photographische Koinzidenzverfahren und das Pendel als Zeitmesser. *Ergh. angew. Geophys.* (Gerl. Beitr. Geophys.) **2** (1932) 204—265. Die Genauigkeit von Pendelkontakten und der Einfluß des Steigrades einer Pendeluhr auf die Schwingungsdauer des Pendels. *Z. Geophys.* **9** (1933) 83—87.

wendung des Längsformates der $\frac{9}{12}$ -Platte erhöhen sich die entsprechenden Werte um $\frac{1}{4}$.

An anderer Stelle wird gezeigt werden, daß man das photographische Koinzidenzverfahren mit entsprechenden Abänderungen zu den verschiedensten Untersuchungen heranziehen kann, wobei Wert auf eine reine Zeitmessung gelegt wird. Vielleicht ist es zweckmäßig, in Zukunft nicht mehr von dem Koinzidenz-, sondern ganz allgemein von dem Amplitudenregistrierverfahren zu sprechen.

§ 2. Weitere mit dem Amplitudenregistrierverfahren gewonnene Ergebnisse.

Die folgenden Ergebnisse sollen ein Bild von der Brauchbarkeit des Amplitudenregistrierverfahrens geben. Dabei handelt es sich um weitere Untersuchungen an Pendeluhr, wobei die Schwingungsdauer des Uhrpendels mit der einer schnellschwingenden Stimmgabel verglichen wurde. Die Abnahme der Schwingungsdauer der Uhr erfolgte mit Hilfe des Pendelkontaktes.

Die Uhr Riefler 479 diente $1\frac{1}{2}$ Jahr anderen Zwecken und war erst in letzter Zeit für die Untersuchungen des Einflusses vom Antrieb auf die Schwingungsdauer des Pendels wieder verfügbar. Bei den früheren Messungen [Z. Geophys. 9 (1933) 83—87] zeigten sich noch offensichtliche Fehler im Pendelkontakt. Deshalb wurde dieser neu angefertigt. Die Achse erhielt eine mit größter Sorgfalt ausgeführte Rubinsteinlagerung. Mit diesem neuen Pendelkontakt wurden die folgenden Kurven in Fig. 1 aufgenommen. Die beiden ersten Kurven unterscheiden sich durch die Einstellung des Pendelkontaktes. Diese war bei der ersten Kurve fast symmetrisch, bei der zweiten unsymmetrisch und zwar derart, daß der Pendelkontakt nur während 0,5 sec auf dem am Pendel angebrachten Hebel auflag und damit auch während dieser Zeit einen Einfluß auf die Schwingungen des Pendels ausübte. Bei der Aufnahme der Kurven wurde während jeder Minute eine bestimmte Sekunde ausgeblendet. An diesen Stellen sind die beiden ersten Kurven in Fig. 1 punktiert gezeichnet.

Durch eine Reihe von Versuchen wurde das aus den beiden ersten Kurven in Fig. 1 sichtbare Ergebnis gewonnen, daß bei Veränderung der Schließungsdauer des Pendelkontaktes der periodische Verlauf während jeder einzelnen Minute zwar aufrecht erhalten, jedoch der Charakter dieses Verlaufes vollständig geändert wird. Allerdings muß man dabei berücksichtigen, daß etwaige kleine Amplitudenschwan-

kungen des Rieflerpendels bei einem Abnahmephasenpunkte von 45° gegenüber einem solchen von 0° bei symmetrischer Einstellung sich mit dem π -fachen Betrage hinsichtlich der Änderung der Schwingungsdauer bemerkbar machen. Man hätte also erwarten sollen, daß die Schwankungen der ersten Kurve in der zweiten π -fach vergrößert sein müßten,

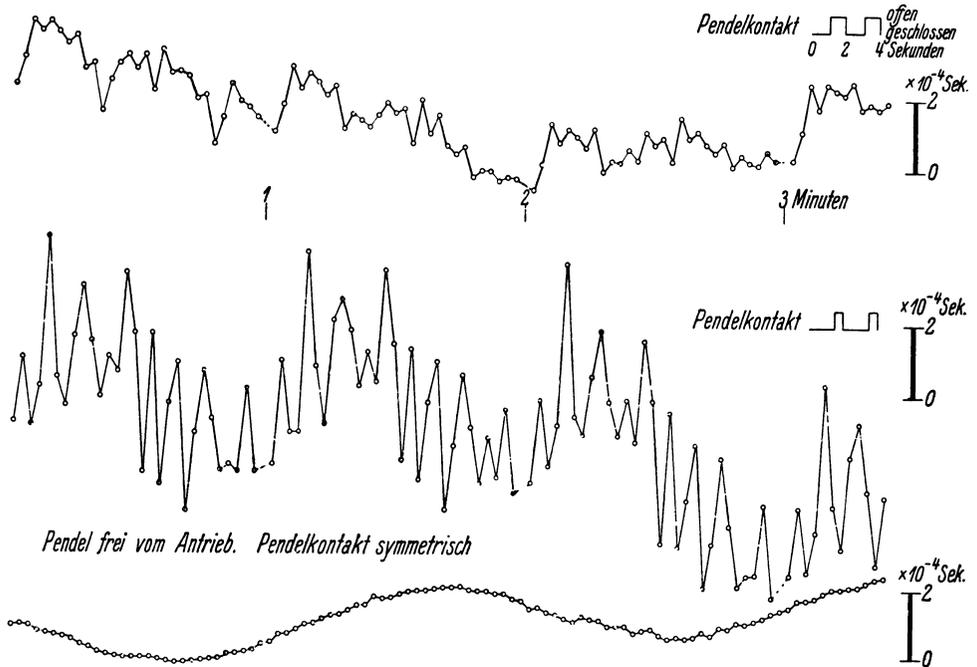


Fig. 1.

der Charakter des Verlaufes aber erhalten geblieben wäre. Aber bei unsymmetrischem Pendelkontakt spielt der Einfluß des Antriebes insofern stärker mit, weil er sich mehr auswirken kann, da das Pendel eine längere Zeit während jeder Schwingung unbeeinflußt vom Pendelkontakt schwingt.

Um nun ein einwandfreies Bild von der Genauigkeit des Pendelkontaktes selbst zu bekommen, wurde der Uhantrieb abgeschaltet und eine Prüfung der Schwingungsdauer des nunmehr freien Pendels mit Hilfe des Pendelkontaktes vorgenommen. Ein Bild von den sich so ergebenden Registrierungen gibt die letztere Kurve in Fig. 1. Aus ihr geht hervor, daß der Gesamtfehler aller in der Apparatur vorhandenen beweglichen Teile (Stimmgabel, Pendel, Pendelkontakt und Registrier-spiegelsystem) im ungünstigsten Falle $2 \cdot 10^{-5}$ sec betragen hat. Es

ergibt sich auch hier wieder, daß ein mechanischer Kontakt unter entsprechenden Vorkehrungen mit einer Genauigkeit von 10^{-5} sec sicher zu arbeiten imstande ist.

Mechanische Anforderungen an einen Pendelkontakt. Legen wir uns die Frage vor, wie genau die Lagerung der Achse und die Auflage der Kontaktflächen des Pendelkontaktes sein müssen, um bei jeder Öffnung des Stromkreises mit einer Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-5}$ sec zu arbeiten, so ergibt sich die folgende Überlegung: Der Pendelkontakt hat eine Amplitude von 1 mm bei einer Schwingungsdauer von 2 sec. Dann entspricht einer Zeit dt von $1 \cdot 10^{-5}$ sek. eine Länge von $31 \mu\mu$. Plötzliche Lage- und Längenänderungen dieser Größe machen sich in der Registrierung noch bemerkbar.

Selbstverständliche Voraussetzung für das einwandfreie Arbeiten des Pendelkontaktes ist die völlige Freiheit von Funkenbildung, denn jeder Funke hinterläßt Rückstände, die sich sofort in einem Springen der aufgenommenen Kurvenpunkte bemerkbar machen. Die Untersuchungen in vorliegendem Falle wurden mit einer Stromstärke von 40—60 mA vorgenommen. Zur Unterdrückung der Funkenbildung war dem Pendelkontakt ein Widerstand parallel geschaltet.

Das Rieflerpendel ohne Antrieb. Über die Schwingungen des Rieflerpendels ohne Antrieb sollen hier noch einige Worte gesagt werden. Sehr auffällig ist die aus der dritten Kurve in Fig. 1 deutlich sichtbare Periode von 2 min. Diese ist allein dadurch möglich, daß das Rieflerpendel noch eine zweite Schwingung ausführt. Man kann die Amplitude dieser Schwingung von 2 min erheblich dadurch vergrößern, daß man der Pendelschwingung eine seitliche Komponente erteilt. Andererseits ist es nicht gelungen, diese Schwingung völlig zu unterdrücken, selbst wenn man das Loslassen des Pendels mit allen zu Gebote stehenden Mitteln vornimmt. Wie diese Periode von 2 min zustande kommt, läßt sich ohne weiteres nicht sagen. Dazu ist es nötig, sich die Möglichkeit zu verschaffen, die Pendelschwingung selbst in zwei zueinander senkrechten Richtungen registrieren zu können.

Die entsprechenden Messungen mit anderen Uhren sind noch nicht abgeschlossen, so daß ein Vergleich an dieser Stelle jetzt nicht möglich ist. Soviel aber läßt sich heute schon sagen, daß das Amplitudenregistrierverfahren geeignet ist, dem Präzisionsuhrenbau wichtige Fingerzeige zu geben und manche bisher noch ungeklärte Frage zu beantworten.

Berechnungen zu einer Hebelwaage für Schweregradientenbestimmungen.

Von

Gerhard Schmerwitz.

(Mit 5 Figuren.)

Zusammenfassung: Mit einer Hebelwaage, deren Empfindlichkeit durch ein Horizontalpendel ausreichend vergrößert worden war, sind orientierende Vorversuche ausgeführt worden, welche die Möglichkeit zu einer Weiterentwicklung der Waage in Aussicht stellten. Zur Begründung dieser Versuche sind daraufhin die Koppelungsschwingungen des Systems: Waage plus Horizontalpendel abgeleitet und an experimentellen Vergleichen bestätigt worden. Die Lösungen der gedämpften Koppelungsschwingungen geben die Erklärung dafür, daß aus den Umkehrpunkten des aufgesetzten Horizontalpendels die Nulllage der Waage ebensogut abgelesen werden kann wie aus den Zeigerstellungen. Der zweite Abschnitt behandelt die Veränderungen, denen bei einer Hebelwaage Rechnung getragen werden muß, wenn anstatt der Schneiden Bandfederaufhängungen verwendet werden. Die Biegungsformen der Bandfeder werden ermittelt, und der Einfluß eines veränderlichen Drehpunktes abgegrenzt. In dem Ersatz der Mittelschneide durch eine Bandfeder werden keine Vorteile gesehen. Weiterhin sind die Gleichgewichtsbedingungen für eine Waage mit Seitenbändern und Mittelschneide abgeleitet und die technischen sowie praktischen Sicherheitsforderungen bezüglich der Wahl der Banddimensionen aufgestellt.

1. Vorbemerkung.

In der kürzlich hier erschienenen Veröffentlichung von S. REISCH¹⁾ sind, verbunden mit einer Mitteilung über eine neue Empfindlichkeitssteigerung der Hebelwaage, sehr ausführlich die verschiedenartigen Einflüsse erörtert, denen bei einem solchen zu höchster Empfindlichkeit gezüchteten Instrument Rechnung getragen werden muß. Es bedarf kaum mehr einer besonderen Erwähnung, wie sehr gerade der Mangel an einer brauchbaren Vertikalgradienten-Waage schon seit langem das Konto der Experimentalgeophysiker belastet. Die in der erwähnten Arbeit noch als unübersichtlich oder kaum lösbar bezeichneten Fragen gaben die Veranlassung zu der vorliegenden Mitteilung. Entgegen einer ursprünglichen Absicht werden daher die bisher gesammelten Er-

gebnisse schon hier wiedergegeben in der Hoffnung, daß sie einen nur vorläufigen Beitrag zu den allgemeinen Bemühungen um das noch nicht erreichte experimentelle Ziel darstellen.

Wie erwähnt wurde, sind vor etwa drei Jahren von O. HECKER und mir, ebenfalls von dem JOLLYschen Wägungsprinzip ausgehend, ähnliche Versuche in Angriff genommen worden. Die ersten für eine weitere Orientierung brauchbaren Vorversuche wurden 1931/32 an einer 1-kg-Präzisionswaage ausgeführt, die für den vorliegenden Zweck mit einem Horizontalpendel versehen war. Hierbei ist der Arretierungsmechanismus der Waage zunächst so beibehalten worden, wie er — den Präzisionsanforderungen keineswegs entsprechend — von der Firma geliefert war. Umgestaltet wurde nur die Aufhängung: zwei Seitenbänder statt Schneiden. Die Mittelschneide blieb bestehen (siehe Abschnitt 3). An die Stelle der beiden Schalen trat je eine 1-kg-Wendevorrichtung, die hier vorläufig mit der Hand bedient werden mußte. Die Wendung auf einer Seite verursachte eine vertikale Gewichtsvorlagerung um 25 cm. Die Waage war nur durch ein festes Pappgehäuse geschützt, das vor jeder Gewichtswendung abgenommen werden mußte.

Zeitlich aufeinanderfolgende vertikale Gewichtsverschiebungen (auf der rechten und linken Seite abwechselnd) ergaben bei einem Versuch auf einer etwa 2 m entfernten Skala Einstellungsunterschiede von: 23 — 37 — 15,5 — 14,6 — 21,8 cm. Diese Werte lagen immer im richtigen Sinn und etwa in der zu erwartenden Größenordnung. Am Ende dieser Beobachtungsreihe war der Meßpunkt gleichförmig aus dem Gesichtsfeld gewandert. Nach jeder Gewichtsverschiebung sind bis zur Beruhigung der Bewegung 10 bis 15 Schwingungen beobachtet worden. Die Schwingungsdauer betrug etwa 40 sec. Eine gewisse Abhängigkeit der Werte von der Einstellung läßt sich bei hohen Empfindlichkeiten, wie in früheren Arbeiten dargelegt wurde, wohl vorwiegend auf einen inkonstanten Schneidenkrümmungsradius zurückführen.

Es stand zu hoffen, daß eine wesentliche Verbesserung der Reproduzierbarkeit dieser der Größe nach vollkommen ausreichenden Meßauschläge erzielt werden könnte. Die Voraussetzungen hierfür gaben u. a. der Einbau eines guten Arretierungsmechanismus, Einsetzen von richtig

¹⁾ S. REISCH, Über eine Möglichkeit zur Empfindlichkeitssteigerung der Hebelwaage und ihre Anwendung zur Messung des vertikalen Gradienten der Schwerkraft. Beitr. zur angew. Geophysik 4 (1934) 134—151. Nr. 2.

dimensionierten Bändern, mechanischer Wendung der Gewichte und der Bau eines doppelwandigen Metallschutzkastens. Diese baulichen Umänderungen wurden zum größten Teil in der Zwischenzeit auch durchgeführt; jedoch die experimentellen Arbeiten mußten durch äußere Umstände veranlaßt auf etwa anderthalb Jahr fast ganz eingestellt werden. Anfang 1934 konnten sie erst wieder in beschränktem Umfang aufgenommen werden.

Die bisherige, im folgenden mitgeteilte Bearbeitung führte 1. zu einer mathematischen Klärung der dynamisch vollkommen übersichtlichen Verhältnisse der Schwingungsbewegungen der Anordnung: Waage plus Horizontalpendel — als gekoppeltes System. Anschließend wurden 2. für eine Waage die Gleichgewichtsbedingungen berechnet, wenn für die Schalen oder den Balken an Stelle von Schneiden eine Bandaufhängung oder ein Federgelenk zur Verwendung kommt. Hierbei stellte sich wiederum heraus, daß die Schwierigkeiten nicht bei den Berechnungen liegen, sondern auf dem Gebiet zu suchen sind, das mit dem Wort: Nullpunktsverlagerung eine Anzahl mehr oder weniger geklärter experimenteller und technisch-konstruktiver Mängel umfaßt.

2. Die Horizontalpendelwaage als gekoppeltes Schwingungssystem.

a) Überblick über die Theorie der Bewegung gedämpfter Systeme bei Kraftkoppelung.

Für zwei gekoppelte Systeme mit den Indizes 1 und 2 lauten bei Berücksichtigung der Dämpfung die Differentialgleichungen der Bewegung für Kraftkoppelung¹⁾.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d t^2} + 2 h_1 \frac{d x_1}{d t} + k_1^2 x_1 + \tau_1 k_1^2 x_2 &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d t^2} + 2 h_2 \frac{d x_2}{d t} + k_2^2 x_2 + \tau_2 k_2^2 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Hieraus erhält man durch Umrechnung für x_1 bzw. x_2 je eine Differentialgleichung 4. Ordnung der Form:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x}{d t^4} + 2 (h_1 + h_2) \frac{d^3 x}{d t^3} + (k_1^2 + k_2^2 + 4 h_1 h_2) \frac{d^2 x}{d t^2} + 2 (h_2 k_1^2 + h_1 k_2^2) \frac{d x}{d t} \\ + k_1^2 k_2^2 (1 - \tau_1 \tau_2) x = 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Z. B. M. Wien. Ann. Physik **61** (1897) 163; P. DRUDE, Ann. Physik **13** (1904) 512; AUERBACH-HORT, Handb. der phys. und techn. Mechanik **2**, 652.

Die Lösungen dieser Differentialgleichung ergeben sich aus den Wurzeln der charakteristischen Gleichung (siehe z. B. CZUBER, Lineare Differentialgleichungen S. 469).

Die charakteristische Gleichung ist eine algebraische Gleichung 4. Grades und lautet:

$$r^4 + 2(h_1 + h_2)r^3 + (k_1^2 + k_2^2 + 4h_1h_2)r^2 + 2(h_2k_1^2 + h_1k_2^2)r + k_1^2k_2^2(1 - \tau_1\tau_2) = 0.$$

Nach der Umformung durch Einführung der Veränderlichen $z = r + \frac{h_1 + h_2}{2}$ und der Abkürzung $\tau_1\tau_2 = \tau^2$ erhält man:

$$\begin{aligned} z^4 + \left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{3(h_1 - h_2)^2}{2} - 2h_1h_2\right)z^2 - (h_1 - h_2)(k_1^2 - k_2^2 - h_1^2 + h_2^2)z \\ + k_1^2k_2^2(1 - \tau^2) - \frac{h_1 + h_2}{2}(h_1k_2^2 + h_2k_1^2) + \frac{(k_1^2 - k_2^2)(h_1^2 - h_2^2)}{4} \\ - \frac{(h_1^2 - h_2^2)^2}{4} + \frac{(h_1 + h_2)^4}{16} = 0. \end{aligned}$$

Führt man noch die wahren Schwingungszahlen in der Definition:

$n_1^2 = k_1^2 - h_1^2$; $n_2^2 = k_2^2 - h_2^2$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} z^4 + \left(n_1^2 + n_2^2 - \frac{(h_1 - h_2)^2}{2}\right) \cdot z^2 - (n_1^2 - n_2^2)(h_1 - h_2) \cdot z \\ + \left[\left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2 + n_1^2\right] \cdot \left[\left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2 + n_2^2\right] - \tau^2(n_1^2 + h_1^2)(n_2^2 + h_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung müssen, komplex angesetzt, die Form haben:

$$z_1 = \beta + i \cdot \omega_1; \quad z_2 = \beta - i \cdot \omega_1; \quad z_3 = -\beta + i \cdot \omega_2; \quad z_4 = -\beta - i \cdot \omega_2.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} r_1 = \beta - \frac{h_1 + h_2}{2} + i \cdot \omega_1; \quad r_2 = \beta - \frac{h_1 + h_2}{2} - i \cdot \omega_1, \\ r_3 = -\beta - \frac{h_1 + h_2}{2} + i \cdot \omega_2; \quad r_4 = -\beta - \frac{h_1 + h_2}{2} - i \cdot \omega_2. \end{aligned}$$

Das gibt als Lösungen der beiden Differentialgleichungen 4. Ordnung.

$$\begin{aligned} x_1 = A_1 \cdot e^{-\left(\frac{h_1 + h_2}{2} - \beta\right) \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + B_1 \cdot e^{-\left(\frac{h_1 + h_2}{2} + \beta\right) \cdot t} \\ \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2), \end{aligned}$$

$$x_2 = A_2 \cdot e^{-\left(\frac{h_1+h_2}{2}-\beta\right) \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + B_2 \cdot e^{-\left(\frac{h_1+h_2}{2}+\beta\right) \cdot t} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Hierbei soll immer $n_2 > n_1$ genommen werden und auch $\omega_2 > \omega_1$ sein.

Wird bei einer Horizontalpendelwaage mit φ der Ausschlagswinkel des Balkenzeigers und mit α der des Horizontalpendels bezeichnet, so erhalten die Lösungen hier die Form:

$$\varphi = A_1 \cdot e^{-\delta_1 t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta_2 t} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha = A_2 \cdot e^{-\delta_1 t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 e^{-\delta_2 t} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Die Größe der Amplitude sowie die Phasen φ_1 und φ_2 hängen nur von willkürlichen Ausgangswerten ab. Die vom Balken sowie vom Horizontalpendel ausgeführten Schwingungen setzen sich aus zwei verschiedenen Grundschwingungen mit im allgemeinen auch verschiedenen Dämpfungen zusammen. Die Koppelungsfrequenzen ω_1 ; ω_2 und die Dämpfungen δ_1 ; δ_2 sind aus den bekannten Größen n_1 ; n_2 ; h_1 ; h_2 ; τ zu ermitteln.

Falls h_1 und h_2 Null sind, also für den Fall ungedämpfter Schwingungen, kann die Ableitung der Lösung, die sich dann noch in geschlossener Form darstellen läßt, bei M. WIEN a. a. O. nachgelesen werden. Bei Berücksichtigung der Dämpfung ist eine sämtliche Fälle enthaltende Lösung in geschlossener Form nicht mehr möglich. Da aus diesem Grunde alle bisherigen Berechnungen immer unter Vernachlässigungen für Spezialfälle ausgeführt wurden, welche für die Koppelungsschwingungen der Horizontalpendelwaage nicht zulässig sind, wird hier in Anlehnung an die eingangs zitierten Arbeiten eine etwas allgemeiner gehaltene Behandlung gegeben. Diese ermöglicht es, für jeden beliebigen Ausgangswert der oben aufgeführten fünf Größen, die veränderten Koppelungswerte zu bestimmen.

b) Bewegungsgleichungen der Horizontalpendelwaage und Berechnung des Koppelungskoeffizienten.

Die Ableitung der Bewegungsgleichungen soll an Hand der Fig. 1 durchgeführt werden.

Die Lage des Waagebalkens ist in der Figur durch die drei Schneiden genügend gekennzeichnet. An den beiden Endschnitten hängen die

Schalen, welche die Direktionskraft nur dann beeinflussen, wenn die Verbindungslinie der drei Schneiden keine Gerade ist (von dem Einfluß der Krümmungsradien abgesehen). Ein rechtwinkliges Koordinatensystem liegt in der gezeichneten Weise in dem Waagebalken. Die y -Achse fällt mit der Drehachse des Waagebalkens zusammen. Dieser schwingt in der xz -Ebene, das Horizontalpendel nahezu in der xy -Ebene. Horizontalpendeldrehpunkt D und die Drehachse des Balkens fallen im allgemeinen nicht zusammen. Das Horizontalpendel kann einige Zentimeter von der Drehachse entfernt angebracht werden, ohne daß hierbei die durch

die Differentialgleichung (4) dargestellten Verhältnisse verändert werden. Das Horizontalpendel führt mit dem Waagebalken als

Bezugssystem nur Drehungen aus. Horizontale Verschiebungen brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

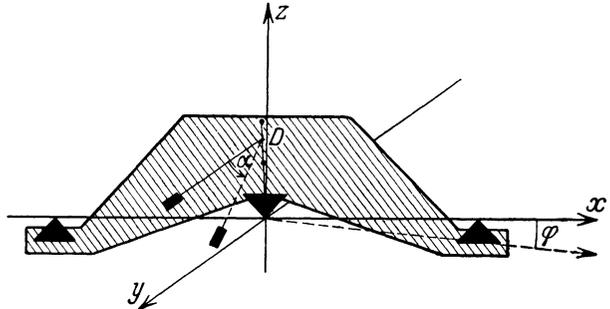


Fig. 1. m_1 = Masse des Waagebalkens. s_1 = Schwerpunktsabstand desselben. m_2 = Masse des Horizontalpendels. s_2 = Schwerpunktsabstand. c = Vergrößerungsfaktor des Horizontalpendels. φ = Winkelausschlag des Waagebalkens. α = Winkelausschlag des Horizontalpendels.

Unter diesen Bedingungen lauten die Bewegungsgleichungen der beiden gekoppelten Einzelsysteme:

(Waagebalken):

$$K_1 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - m_1 \cdot g \cdot s_1 \cdot \varphi + m_2 \cdot g \cdot s_2 \cdot \alpha - 2 h_1 \cdot \frac{d \varphi}{dt} \quad (3)$$

(Horizontalpendel):

$$K_2 \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - m_2 \cdot g \cdot \frac{s_2}{c} \cdot \alpha + m_2 \cdot g \cdot s_2 \cdot \varphi - 2 h_2 \cdot \frac{d \alpha}{dt} \quad (4)$$

Mit K_1 ; K_2 sind die Trägheitsmomente bezeichnet, mit h_1 ; h_2 die Dämpfungen der Einzelsysteme. Aus dem Vergleich mit den allgemeinen Gleichungen in Kapitel 1 ergibt sich der Koppelungsfaktor:

$$\tau^2 = \frac{m_2 \cdot s_2 \cdot c}{m_1 \cdot s_1}.$$

c) Lösungsverfahren für die Koppelungsfrequenzen bei beliebigen Ausgangswerten von n_1, n_2, h_1, h_2, τ .

Die veränderten Frequenzen lassen sich, wie schon erwähnt, für den Fall ungedämpfter Schwingungen noch in geschlossener Form angeben. Es ist:

$$\omega_1^2; \omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \tau^2 \cdot n_1^2 \cdot n_2^2}. \quad (5)$$

Zwischen diesen Größen bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= n_1^2 + n_2^2 \\ \omega_1 \cdot \omega_2 &= n_1 \cdot n_2 (1 - \tau^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Kommt noch die Dämpfung dazu, so ist eine Darstellung in geschlossener Form nicht mehr möglich. Die von M. WIEN durchgeführte Lösung kann man für den vorliegenden Fall auch nicht benutzen, da hier weder die Differenz der Schwingungszahlen noch der Koppelungskoeffizient und auch die Dämpfungen nicht als kleine Größen anzusehen sind. Die allgemeinere Lösung für beliebige Werte dieser Größen ergibt sich in Anlehnung an einen ähnlichen Weg¹⁾, durch Koeffizientenvergleich. Eine Gleichung 4. Grades mit den Wurzeln z_1, z_2, z_3, z_4 kann geschrieben werden:

$$(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot (z - z_4) = 0.$$

Durch Lösen der Klammern und Vergleich mit 2. Kapitel a) folgen die Beziehungen:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2 \beta^2 = n_1^2 + n_2^2 - \frac{1}{2} (h_1 - h_2)^2 = a. \quad (7)$$

$$2 \beta (\omega_1^2 - \omega_2^2) = - (h_1 - h_2) \cdot (n_1^2 - n_2^2) = b. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 + \beta^2) (\omega_2^2 + \beta^2) &= \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right)^4 + (n_1^2 + n_2^2) \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right)^2 \\ &+ n_1^2 \cdot n_2^2 - \tau^2 \cdot (n_1^2 + h_1^2) (n_2^2 + h_2^2) = c. \end{aligned} \quad (9)$$

Da die rechten Seiten sich aus den jeweils gegebenen Größen zusammensetzen, seien diese mit den Parameterwerten a, b, c bezeichnet. Mit Hilfe der drei Gleichungen (7) bis (9) sind die drei Unbekannten ($\omega_1; \omega_2; \beta$) zu bestimmen.

Zieht man von der ins Quadrat erhobenen Gleichung (7) die mit 4 multiplizierte Gleichung (9) ab, so erhält man:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 - 8 \beta^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) = a^2 - 4 c. \quad (10)$$

¹⁾ P. DRUDE, Ann. Physik **13** (1904) 534.

Außerdem ist:

$$b^2 = 4 \beta^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2. \quad (11)$$

$$a + 2 \beta^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2). \quad (12)$$

Aus (11) und (12) folgt:

$$\frac{b^2}{2} = [(\omega_1^2 + \omega_2^2) - a] \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2.$$

Setzt man:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = x; \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = y,$$

so ist

$$\frac{b^2}{2} = y^2 (x - a)$$

und

$$a^2 - 4c = y^2 - \frac{2b^2 x}{y^2}.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen führt z. B. für x auf eine Gleichung 3. Grades und zwar:

$$x^3 - 2ax^2 + \left(\frac{5}{4}a^2 - c\right) \cdot x + a \cdot c - \frac{1}{4}a^3 - \frac{b^2}{8}.$$

$$x = z + \frac{2a}{3} \text{ gibt } z^3 - \left(c + \frac{a^2}{12}\right) \cdot z + \left(\frac{1}{3}ac - \frac{b^2}{8} - \frac{a^3}{108}\right) = 0.$$

Falls für die Konstanten p, q eingesetzt werden:

$$z^3 - p \cdot z + q = 0.$$

Die Lösung läßt sich von hier ab nicht mehr allgemein weiterführen, da diese für den Fall, daß $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ positiv ist durch die Cardanische Formel, falls diese Größe negativ ist, nur durch trigonometrische Rechnung gefunden werden kann.

Die Dämpfungen ergeben sich aus der Berechnung von β . (11) und (12) in (10) eingesetzt, ergeben:

$$a^2 - 4c = \frac{b^2}{4\beta^2} - 8\beta^2 a - 16\beta^4.$$

Durch Umformung erhält man:

$$\beta^6 + \frac{a}{2} \cdot \beta^4 + \frac{a^2 - 4c}{16} \cdot \beta^2 - \frac{b^2}{64} = 0, \quad (13)$$

woraus sich auch β^2 immer berechnen läßt.

Aus dem Vorzeichen von β^4 und dem der Konstanten $\frac{b^2}{64}$ der Gleichung (13) schließt man, daß immer nur eine Wurzel β^2 reell und zugleich positiv sein kann. Womit die beiden Werte $\pm \beta$ eindeutig be-

stimmt sind. Man erhält sie durch Einsetzen von $\beta^2 = z - \frac{a}{6}$. Dann wird aus (13):

$$z^3 - \left(\frac{a^2}{48} + \frac{c}{4} \right) \cdot z - \frac{a^3}{864} + \frac{a \cdot c}{24} - \frac{b^2}{64} = 0.$$

Mit dem eben durchgeführten Schema kann man in jedem beliebigen Fall für gedämpfte Schwingungen die gesuchten Koppelungswerte berechnen. Da sich für spezielle Anwendungen meist noch sehr wesentliche Vereinfachungen durchführen lassen, soll zur Vermeidung der langwierigen Rechnungen mit Gleichungen 3. Grades eine solche auch hier gegeben werden.

Bei praktischer Verwendung der Horizontalpendelwaage ist immer $h_1^2; h_2^2 \ll n_1^2; \omega_1^2 \ll n_2^2; \omega_2^2$ und außerdem auch β von der Größenordnung von $h_1; h_2$. Unter diesen Voraussetzungen können die Gleichungen (7) und (9) in der vereinfachten Form geschrieben werden.

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = n_1^2 + n_2^2. \quad (7a)$$

$$\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = n_1^2 \cdot n_2^2 \cdot (1 - \tau^2). \quad (9a)$$

Das sind dieselben Beziehungen, die man für die Koppelungsfrequenzen ohne Dämpfung erhält. In dem vorliegenden Fall werden also die Frequenzen selbst durch starke Dämpfung nur sehr wenig verändert. Die Verteilung der Dämpfungen auf die beiden Einzelsysteme berechnet sich nur aus der Gleichung (8), für die es im Fall ungedämpfter Schwingungen kein Analogon gibt.

d) Anwendung auf zwei Beispiele an einer Horizontalpendelwaage.

1. Beispiel. Direkt gemessene Ausgangswerte der beiden Einzelsysteme:

Horizontalpendel: $T_2 = 3,2$ sec; $n_2 = 1,96$; $n_2^2 = 3,83$

Waagebalken: $T_1 = 7,4$ sec; $n_1 = 0,85$; $n_1^2 = 0,72$

$m_1 = 200$ g; $s_1 = 0,048$ cm

$m_2 = 0,058$ g; $s_2 = 5,6$ cm; $c = 24$; $\tau^2 = 0,812$.

Die Koppelungsfrequenzen sind:

$$\omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \tau^2 n_1^2 n_2^2},$$

$$\omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \tau^2 n_1^2 n_2^2}.$$

Die obigen Ziffern eingesetzt, ergeben:

$\omega_1^2 = 0,115$; $\omega_1 = 0,339$; $T_1 = 18,6$ sec (errechnet),

$\omega_2^2 = 4,435$; $\omega_2 = 2,11$; $T_2 = 2,98$ sec (errechnet).

Die Dämpfungen berechnen sich aus (8) Kapitel c.

$$\beta = -\frac{(h_1 - h_2)}{2} \cdot \frac{n_1^2 - n_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

Mit: $h_1 = 0,002$; $h_2 = 0,137$ (Ausgangswerte) folgt $\beta = 0,049$.
 Also: $\delta_1 = 0,020$; $\delta_2 = 0,118$ (errechnete Werte).

(Ohne Vernachlässigung wurden aus den Lösungen der Gleichungen 3. Grades bis auf wenige Prozent genau dieselben Werte erhalten.)

Aus den errechneten Werten setzen sich die Koppelungsschwingungen zusammen:

$$\varphi = A_1 \cdot e^{-0,020 \cdot t} \cdot \sin(0,34 \cdot t + \varphi_1) + B_1 \cdot e^{-0,12 \cdot t} \cdot \sin(2,11 \cdot t + \varphi_2),$$

$$\alpha = A_2 \cdot e^{-0,020 \cdot t} \cdot \sin(0,34 \cdot t + \varphi_1) + B_2 \cdot e^{-0,12 \cdot t} \cdot \sin(2,11 \cdot t + \varphi_2).$$

Diese Formel gibt die Berechtigung für die Ablesung des Waagennullpunktes aus den Horizontalpendelamplituden. Denn die T_2 -Schwingung ist gegenüber der T_1 -Schwingung so stark gedämpft, daß sie schon nach der ersten bis zweiten Schwingung von T_1 kaum noch meßbar vorhanden ist. Ein Vergleich zwischen gemessenen und errechneten Werten ergab an einem Beispiel:

$$\delta_1 = 0,0175 \text{ (gemessen); } T_1 = 19,5 \text{ sec (gemessen),}$$

$$\delta_1 = 0,020 \text{ (errechnet); } T_1 = 18,6 \text{ sec (errechnet).}$$

Die kurzperiodige Überlagerung der T_2 -Schwingung ist an diesem Beispiel nicht nachweisbar gewesen. Erst bei geeigneter Wahl der Ausgangsfrequenzen können, wie weiter unten in dem 2. Beispiel gezeigt wird, beide Koppelungsfrequenzen mit gleicher Intensität auftreten.

Hier soll zunächst noch an dem 1. Beispiel ein Vergleich zwischen der früher abgeleiteten statischen Gleichgewichtsbedingung und der dynamischen Behandlung als Koppelungswaage gegeben werden.

Für eine Horizontalpendelwaage ohne Schalen lautet die Empfindlichkeitsbeziehung:

$$\frac{\varphi}{p} = \frac{l}{m_1 s_1 - c \cdot m_2 \cdot s_2}.$$

Für $l = 15,3$ cm und die obigen Werte berechnet sich: $\frac{\varphi}{p} = 0,0085$

Bogengrad pro 1 mg, während $\frac{\varphi}{p} = 0,010$ gemessen wurde. Da kleine Schwankungen der Differenz im Nenner große Änderungen in der Empfindlichkeit verursachen, und die einzelnen Werte nicht besonders genau ermittelt werden können, ist eine bessere Übereinstimmung der Zahlen nicht zu erwarten.

Wird die Empfindlichkeit der Waage ohne Horizontalpendel so eingestellt, daß sie 0,010 Bogengrad pro Milligramm beträgt, so ergibt sich

für die Waage eine Schwingungsdauer von 18,5 sec, d. i. im Bereich der Meßgenauigkeit dieselbe Zeit wie die der vergrößerten Koppelschwingung T_1 . Die früher angeführten Daten bezüglich der Empfindlichkeitserhöhung müssen hier dahin ergänzt werden, daß neben der Erhöhung der Ablesegenauigkeit um den Faktor c eine Steigerung der absoluten Empfindlichkeit nur dann stattfindet, falls man, wie dort geschehen ist, die Schwingungsdauer unbeachtet läßt. Bei konstant gehaltener Schwingungsdauer tritt durch den Zusatz eines Horizontalpendels eine Änderung der absoluten Empfindlichkeit (das ist eine Änderung des Ausschlags des Balkenzeigers für 1 mg Übergewicht) nicht ein. Diese Frage konnte erst durch Anwendung der Theorie der Koppelschwingungen geklärt werden. Die Vergrößerung der Ablesegenauigkeit durch den Zusatz des Horizontalpendels bleibt somit der allein ausschlaggebende Faktor.

2. Beispiel. Die Schwingungsdauer der Waage und des Horizontalpendels wurden gleich groß gewählt. Die Ausgangswerte waren:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2,95 \text{ sec} , \\ T_2 &= 3,00 \text{ sec} . \end{aligned}$$

Masse und Schwerpunktsabstand betragen:

$$\begin{aligned} m_1 &= 200 \text{ g}; & m_2 &= 0,183 \text{ g} \\ s_1 &= 0,32 \text{ cm}; & s_2 &= 6,0 \text{ cm} \\ & & c &= 26 . \end{aligned}$$

Hieraus folgt für den Koppelungsfaktor:

$$\tau = \sqrt{\frac{m_2 \cdot s_2 \cdot c}{m_1 s_1}} = 0,668 .$$

Somit werden:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= n \sqrt{1 - \tau}; & \omega_2 &= n \sqrt{1 + \tau} \\ \omega_1 &= 1,21; & \omega_2 &= 2,70 \\ T_1 &= 5,20 \text{ sec}; & T_2 &= 2,32 \text{ sec} . \end{aligned}$$

Da hier gemäß Gleichung (8) $\beta = 0$ ist, erhält man die Dämpfung: $\delta_1; \delta_2$ aus den Meßwerten $h_1 \sim 0,003; h_2 = 0,086$ (Kap. a) S. 278) zu:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,045 .$$

Die in Fig. 2 wiedergegebene Kurve ist aus den beiden errechneten Schwingungsdauern $T_1 = 5,20$ sec und $T_2 = 2,32$ sec bei der ebenfalls errechneten Dämpfung $\delta = 0,045$ zusammengesetzt. Ein Vergleich der aus diesen Werten errechneten Kurve Fig. 2a mit der in Fig. 2b wiedergegebenen photographischen Registrierung der Koppelungsschwingung

der Horizontalpendelwaage bestätigt die Richtigkeit der hier durchgeführten Ableitung.

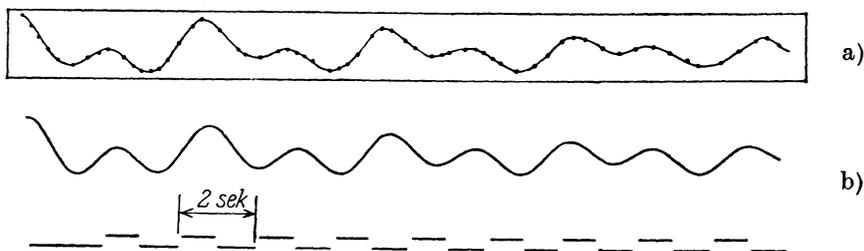


Fig. 2. Koppelungsschwingung der Horizontalpendelwaage bei einer Einstellung, die nur zur Prüfung der Rechnungen diente.

a) Errechnete Kurve. b) Pause einer photographischen Registrierung.

3. Ersatz der Schneidenlagerung bei einer Hebelwaage durch Bandaufhängung.

a) Einleitung.

Die Schneiden einer Waage haben die Aufgabe, eine Drehachse (d. h. eine unendlich dünne, mathematische Gerade) darzustellen. Dieser Rolle sind sie jedoch bei größeren Genauigkeitsforderungen nicht mehr gewachsen. Das liegt daran, daß eine Schneide an ihrer schärfsten Stelle nicht unmeßbar fein ist, sondern durch eine kleine, aber nachweisbare Zylindermantelfläche begrenzt wird. Bei genaueren Untersuchungen stellte sich heraus, daß auch der Radius dieses Zylinders nicht an allen Stellen, die beim Schwingen mit der Pfanne zur Berührung kommen, gleich groß ist. In diesem Bereich können Schwankungen von 10—50 % auftreten. Bei einem sehr empfindlich eingestellten Waagebalken erkennt man einen ungleichmäßigen Radius an einer Änderung der Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Skalenstellung des Zeigers. Dieser Fehler läßt sich an einer einzigen Schneide noch berücksichtigen. Bei drei Schneiden wird beim Arretieren und Desarretieren die gegenseitige Lage der Schneiden bzw. Pfannen bis auf Genauigkeiten von 10^{-8} — 10^{-10} nicht immer dieselbe bleiben. Eine Verbesserung des Arretierungsmechanismus, der so hohen Forderungen Rechnung trägt, wird sich bei einer Waage mit drei Schneiden kaum durchführen lassen. Bei Verwendung von Bandfedern erscheint eine Erfüllung der Bedingungen leichter möglich.

b) Über die Wirkungsweise der Bandaufhängung.

Um die bei Schneidenlagerung auftretenden Unregelmäßigkeiten zu beseitigen, ist man bei Uhrpendeln schon in den meisten Fällen zur

Bandfederaufhängung übergegangen. Die von BOCK¹⁾ durchgeführten theoretischen Untersuchungen über die Funktionen einer Bandfeder bei schwingendem Pendel lassen sich nicht ohne weiteres auf an Bändern befestigte Waagschalen übertragen. Die Bewegung eines Pendels wird bei im Raum fester Einspannstelle ausgeführt und unterliegt auch horizontalen Beschleunigungskräften; während bei einer Waagschale mit Bandaufhängung keine horizontalen Kräfte auftreten, dafür aber der obere Einspannpunkt Drehbewegungen ausführt.

Zur Klärung der in diesem Zusammenhang stehenden Fragen soll durch Anwendung der gewöhnlichen Biegungstheorie zunächst ohne unmittelbare Verbindung mit der Hebelwaage die Form der Bandfeder, ihre Größe und Festigkeit berechnet werden.

Es ist zu bemerken, daß schon W. WEBER 1841²⁾ sich mit dem gleichen Problem beschäftigt hat. Abgesehen von der mathematisch nicht einwandfreien Lösung der Differentialgleichung S. 507 ist dort auch die physikalische Voraussetzung nicht zutreffend, daß bei einer Drehung der Einspannstelle der Bandfeder die am anderen Ende befindliche Masse keine Drehung ausführt. Außerdem wird der Einfluß der Länge der Feder von W. WEBER nicht berücksichtigt.

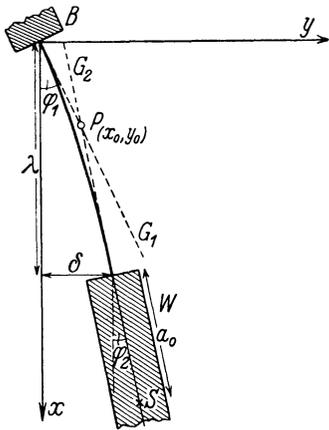


Fig. 3. Biegungsform des mit einer Waagschale (W) belasteten Bandes.

B : Waagebalkenende.

In der Fig. 3 sei λ die Länge der Bandfeder, die in der Ausgangslage $\varphi_1 = 0$ senkrecht nach unten hängt. An ihrem unteren Ende ist ein Körper eingespannt (z. B. die Waagschale) mit dem Gewicht P in Kilogramm und dem Schwerpunktsabstand a_0 von der unteren Einspannstelle. E sei der Elastizitätsmodul, J das statische

Trägheitsmoment des Querschnittes. Als Abkürzung wird eingeführt

$\sqrt{a} = \sqrt{\frac{P}{E \cdot J}}$, eine Größe, die im Fall eines rechteckigen Bandquerschnittes der Breite b und Dicke h die Form $\sqrt{\frac{12 P}{E h^3 b}}$ besitzt.

¹⁾ H. BOCK, Die Funktionen der Pendelfelder. Z. Instrumentenkde 46 (1926) 445.

²⁾ W. WEBER, De tribus novis librarum construendarum methodis. WILH. WEBERS Werke 1 (1892) 497.

Hieraus folgt:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda}.$$

2. $\delta = f(\varphi_1)$ aus a)

$$\delta = -C_1 - C_2 - a_0 \cdot \varphi_2$$

$$\delta = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + a_0\right) e^{\sqrt{a} \cdot \lambda} - \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - a_0\right) e^{-\sqrt{a} \cdot \lambda} - 2a_0}{(1 - a_0 \sqrt{a}) e^{-\sqrt{a} \cdot \lambda} + (1 + a_0 \sqrt{a}) e^{\sqrt{a} \cdot \lambda}} \cdot \varphi_1$$

$$\delta = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \cos \sqrt{a} \cdot \lambda - a_0}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda} \cdot \varphi_1.$$

3. $y = f(\varphi_1)$

$$y = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - a_0\right) \cdot e^{\sqrt{a}(x-\lambda)} - \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + a_0\right) e^{-\sqrt{a}(x-\lambda)} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + a_0\right) e^{\sqrt{a} \cdot \lambda} - \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - a_0\right) e^{-\sqrt{a} \cdot \lambda}}{(1 - a_0 \sqrt{a}) e^{-\sqrt{a} \cdot \lambda} + (1 + a_0 \sqrt{a}) e^{\sqrt{a} \cdot \lambda}} \cdot \varphi_1$$

$$y = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a} (x - \lambda) - a_0 \cos \sqrt{a} (x - \lambda) + \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \cos \sqrt{a} \cdot \lambda}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda} \cdot \varphi_1.$$

c) Vergleich mit experimentellen Versuchen.

Die Ergebnisse lassen sich am einfachsten an Hand der Formel (1) nachprüfen. Benutzt wurden Stahlbänder $h = 0,1$ mm; $b = 12$ mm und λ variabel. Die Bänder wurden zwischen zwei Backen eingeschraubt. Diese waren an den Klemmflächen eben geschliffen und besaßen gut rechtwinklige Kanten, um Verspannungen der Bänder auszuschließen. P betrug 0,227 kg, φ_1 wurde an einem Theodolit-Teilkreis, φ_2 mit Skala und Fernrohr abgelesen. a_0 betrug 101 mm, also $a_0 \cdot \sqrt{a} = 10,5$, wobei für E der Wert 21000 kg/mm² genommen wurde.

Fig. 4 gibt eine Meßkurve von $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ wieder, die deutlich zeigt, daß bis zu Winkeldifferenzen von 10° keine Abweichungen vom linearen Verlauf, den die Theorie fordert, auftreten. Erst bei etwa 40° traten Störungen auf.

Eine zweite Meßreihe wurde an einem Messing-Vierkantstück ausgeführt, bei dem durch Ausfräsen ein gegen die Umgebung wesentlich dünneres Profil hergestellt worden war, so daß also Klauen und Band aus einem homogenen Stück bestanden.

Für das verwendete Messing war nach der üblichen Durchbiegungsmethode $E = 10600 \text{ kg/mm}^2$ gefunden worden.

Stahl.

	experim.	Mit $E = 21000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ theor.	λ mm
φ_1	174	130,3	30
φ_2	28,6	24,1	14,2
„	14,2	12,8	9,0
„	63,8	47,8	20,5

Messing.

	experim.	Mit $E = 10600 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ theor.	λ mm	P in kg
φ_1	2,10	1,80	23,2	0,163
φ_2	4,31	3,80	18,5	„
„	9,15	7,89	18,5	1,081
„	1,37	1,33	18,5	„

An den Tabellen, die von den jeweiligen Geraden (wie in Fig. 4) nur das Steigungsmaß enthalten, sieht man, daß die größeren Quotienten um 10—20% höher liegen als die theoretisch berechneten. D. h. bei einer Drehung eines Bandpendels um den Winkel φ_1 bleibt der experimentell ermittelte Winkel φ_2 um diesen Betrag hinter dem theoretischen zurück. Der Einfluß

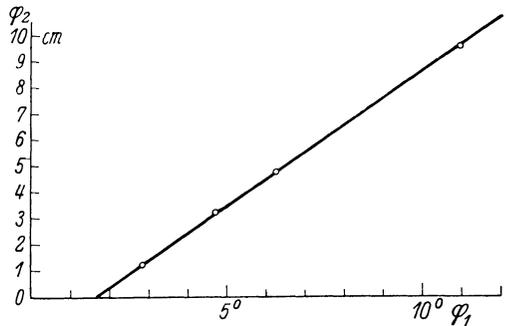


Fig. 4. Abhängigkeit des Drehungswinkels (φ_2) einer mit Band befestigten Waagschale von dem Ausschlagswinkel des Waagebalkens (φ_1).

von Scherungsbeanspruchung und Normalspannungen ergab überschlagsmäßig Verkleinerungen von φ_2 von maximal nur etwa 1%. Für Stahl ergibt sich z. B. nach dieser Methode rückwärts berechnet ein Elastizitätsmodul von 18600 statt 21000 kg/mm^2 .

Der Grund zu den Abweichungen liegt sehr wahrscheinlich in den vereinfachten mathematischen Annahmen der Biegungstheorie.

d) Bestimmung des Drehpunktes bei einer Bandaufhängung.

Eine wesentliche Forderung für eine Hebelwaage ist die Unveränderlichkeit der Lage des Drehpunktes. Dieser Punkt P kann durch den Schnittpunkt derjenigen beiden Tangenten definiert werden, die an den beiden Einspannstellen an das Band zu legen sind. Für kleine Winkel lauten die Gleichungen dieser beiden Geraden (Fig. 3):

$$\begin{aligned}(G_1) \quad y &= \varphi_1 \cdot x \\ (G_2) \quad y &= \varphi_2 \cdot x + c = \varphi_2 \cdot (x - \lambda) + \delta.\end{aligned}$$

Die Drehpunktskoordinaten x_0 ; y_0 werden aus

$$y_0 = \varphi_2 \cdot x_0 + \delta - \varphi_2 \cdot \lambda$$

und

$$y_0 = \varphi_1 \cdot x_0$$

ermittelt.

$$x_0 = \frac{\delta - \varphi_2 \cdot \lambda}{\varphi_1 - \varphi_2}; \quad y_0 = \frac{\delta - \varphi_2 \cdot \lambda}{\varphi_1 - \varphi_2} \cdot \varphi_1.$$

Der Abstand dieses Drehpunktes $d = OP$ ist:

$$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}} \cong x_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \varphi_1^2\right) \sim x_0, \text{ wenn } \varphi_1 \ll 1.$$

Für kleine Winkel findet man somit:

$$d = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} \mathfrak{S}in \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \mathfrak{C}os \sqrt{a} \cdot \lambda - a_0 - \lambda}{\mathfrak{C}os \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \mathfrak{S}in \sqrt{a} \cdot \lambda - 1}.$$

Der Drehpunktsabstand ist hiernach bei kleinen Winkeln φ_1 unabhängig von der Amplitude. Erst bei $\varphi_1 \sim 10^0$ treten Abweichungen von mehr als 1% auf.

e) Anwendung auf eine Hebelwaage zur Bestimmung des vertikalen Schweregradienten.

Neben der Bestimmung der Größe von d hat man sich hier darüber Rechenschaft abzulegen, wie stark sich bei einer Hebung des Schwerpunkts der Waagschale dieser Abstand ändert, da ja d von a_0 abhängig

ist. Für die folgende Berechnung sind die Daten einer 1-kg-Waage zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned} \lambda &= 18 \text{ mm}; & a_0 &= 330 \text{ (bzw. 130 mm nach Hebung des Gewichts)} \\ h &= 0,06 \text{ mm}; & E &= 21000 \text{ kg/mm}^2 \\ b &= 14 \text{ mm}; & P &= 1,76 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\sqrt{a} = 0,57; \quad \sqrt{a} \cdot \lambda = 10,2; \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = 1,75$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(Gewicht unten, } a_0 = 330 \text{ m/m)} \quad d &= \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} + a_0}{1 + a_0 \sqrt{a}} = 1,75 \text{ m/m} \\ \text{(Gewicht oben, } a_0 = 130 \text{ m/m)} \quad d &= \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} + a_0}{1 + a_0 \sqrt{a}} = 1,76 \text{ m/m} \end{aligned} \right\} \approx \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Wenn, wie fast immer bei Waagschalen $\sqrt{a} \cdot \lambda \sim 1$ ist, so kann für d der einfachere Wert $\frac{1}{\sqrt{a}}$ genommen werden.

f) Vergleich des statischen und dynamischen Drehpunktes.

Von BOCK ist für den Drehpunktsabstand bei einem Federpendel der folgende Wert berechnet worden.

$$\text{I.} \quad \sigma = \lambda \cdot \frac{i^2}{l^2 + i^2} + \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{l^2 - i^2}{l^2 + i^2} \text{Tang} \frac{\sqrt{a} \cdot \lambda}{2}.$$

Der hier ermittelte Wert lautet:

$$\text{II.} \quad d = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} \text{Sin} \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \text{Cos} \sqrt{a} \cdot \lambda - a_0 - \lambda}{\text{Cos} \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \text{Sin} \sqrt{a} \cdot \lambda - 1}$$

a, λ haben dort dieselbe Bedeutung wie hier. l entspricht dem hier benutzten Abstand a_0 , während i hier keine entsprechende Größe zugeordnet werden kann, da es ein mechanischer Trägheitsradius (auf den Schwerpunkt S bezogen) ist. Für den Grenzfall $i = 0$, mithin für ein mathematisches Pendel geht I. für große $\frac{\sqrt{a} \cdot \lambda}{2}$ über in: $\sigma = \frac{1}{\sqrt{a}}$, derselbe Wert, der für große $\frac{\sqrt{a} \cdot \lambda}{2}$ auch für d gefunden wurde.

In dem Beispiel des vorigen Abschnittes (e) ist i^2 ungefähr $\frac{1}{10} \cdot l^2$ und nach BOCK, Formel (I) somit:

$$\sigma = 3,06 \text{ mm}.$$

Das ist eine sehr beträchtliche Abweichung gegenüber dem statischen Drehpunktsabstand $d = 1,75$ mm. Der Grund liegt darin, daß, wie schon erwähnt, die Biegung des Bandes im Falle der Pendelschwingung anderen Kräften unterworfen ist als bei einer Biegung der oberen Einspannstelle.

Zu dem Abschnitt bei BOCK über den Pendeldrehpunkt sei bemerkt, daß für eine Waage, bei der $i \gg l$ und $a \gg l$ ist, σ nahezu gleich λ wird. Somit kann bei beliebiger Anordnung der Pendelmasse der Drehpunkt auch an jeder beliebigen Stelle des Bandes liegen. Unter diesen Voraussetzungen ist er also nicht auf den Bereich 0 bis $\frac{\lambda}{2}$ beschränkt.

g) Mittelbandaufhängung statt Schneide.

Für einen Waagebalken, der statt einer Mittelschneide an einem Band aufgehängt ist, ergeben sich die Ableitungen in ähnlicher Weise wie vorher aus Fig. 3. Jedoch bleibt hier B , die Einklemmung, fest. φ_1 ist immer Null. Der Abstand a_0 wird von der unteren Einspannstelle nach oben gerechnet und mit a_1 bezeichnet. Der Schwerpunkt liegt also, falls a_1 positiv ist, in der Bandhöhe oder darüber. l sei die Länge des Hebelarms, φ der Ausschlag des Balkens durch Übergewicht p hervorgerufen. Die übrigen Bezeichnungen behalten ihre Bedeutung. Man erhält so für die Form des Bandes in Abhängigkeit von p :

$$y = \frac{p \cdot l}{P} \cdot \frac{\cos \sqrt{a} \cdot x - 1}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda - a_1 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda} \quad (1)$$

und für die Waagenempfindlichkeit:

$$\frac{\varphi}{p} = \frac{l}{P} \cdot \frac{\sqrt{a} \cdot \sin \sqrt{a} \cdot \lambda}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda - a_1 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda} \quad (2)$$

Labil wird die Waage $\left(\frac{\varphi}{p} = \infty\right)$, wenn $a_1 = \frac{1}{\sqrt{a} \operatorname{tg} \sqrt{a} \cdot \lambda}$.

Für positive Werte von a_1 wurde bei zwei verschiedenen Bandlängen für 1 mg Übergewicht gefunden:

(theor.)	$\varphi_I = 0,0171$	$\varphi_{II} = 0,0353$
(experim.)	$\varphi_I = 0,0167$	$\varphi_{II} = 0,0315$

P , das Gewicht des Balkens, betrug 566 g.

Die Versuche, a_1 negativ zu wählen und hiermit die Empfindlichkeit zu erhöhen, scheiterten bei den verschiedensten Bandformen daran, daß infolge von Verspannungsänderungen oder Durchknickungen (dem sog. „Meister“) keine gleichmäßige Empfindlichkeit über größere

Winkelbereiche erhalten wurde. Die Verspannungen verursachten Sprünge in der Kurve $\varphi = f(p)$.

Ein Ersatz der Mittelschneide bei einer Waage durch Bandaufhängung erweist sich somit als ungeeignet. Es bleibt daher nur die Möglichkeit, die beiden Endschneiden durch Bänder zu ersetzen, bei denen sich (Fig. 4) keine derartigen Verspannungen störend bemerkbar gemacht haben, was infolge des großen Schwerpunktsabstandes a_0 auch nicht zu erwarten ist.

h) Waage mit Mittelschneide und Endbändern.

Die Gleichgewichtsbedingung einer solchen Waage wird an Hand der Fig. 5 abgeleitet. Es bedeutet P = Masse einer Schale (in der Form \sqrt{a} jedoch nur Gewicht in Kilogramm!). M = Masse des Balkens, ρ den Krümmungsradius der Mittelschneide. Die übrigen Bezeichnungen bleiben die gleichen. Dann wird:

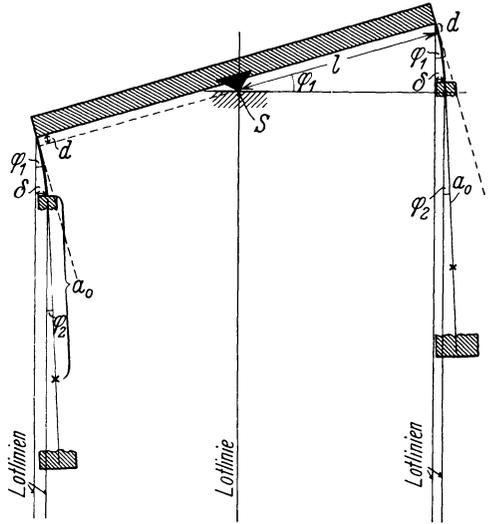


Fig. 5. Form einer Waage mit Endbändern bei einem Ausschlag φ_1 und Lage der verschiedenen Hilfslinien.

$$[l - \rho \cdot \varphi_1 - \delta - a_0 \cdot \varphi_2 + d \cdot \varphi_1] \cdot$$

$$(P + p) = M \cdot (\rho + s) \varphi_1 + P \cdot (l + \rho \cdot \varphi_1 + \delta + a_0 \varphi_2 - \delta \cdot \varphi_1)$$

$$p \cdot l = M \cdot (\rho + s) \cdot \varphi_1 + 2P \cdot (\rho \cdot \varphi_1 + \delta + a_0 \varphi_2 - d \cdot \varphi_1),$$

$$p \cdot l = M \cdot (\rho + s) \cdot \varphi_1 + 2P \cdot \left(\rho \cdot \varphi_1 - d \cdot \varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sin \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \cos \sqrt{a} \cdot \lambda}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda} \cdot \varphi_1 \right),$$

falls $M' = 2P$ gesetzt wird:

$$\frac{p \cdot l}{\varphi_1} = M \cdot (\rho + s) + M' \left(\rho - d + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sin \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sin \sqrt{a} \cdot \lambda}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda} \right),$$

wenn $\text{Tang } \sqrt{a} \cdot \lambda \sim 1$ ist, wird der Bruch $= \frac{1}{\sqrt{a}}$ und man erhält

dann die vereinfachte Beziehung für die Empfindlichkeit einer Waage mit Seitenbändern:

$$\frac{p \cdot l}{\varrho_1} = M (\varrho + s) + M' \left(\varrho + d + \frac{1}{\sqrt{a}} \right),$$

wo d , von der Horizontalen nach oben gemessen, negativ zu setzen ist.

i) Über die Wahl der Banddimensionen.

Nach dem Vorbild technischer Sicherheitsforderungen soll die zulässige Maximalbelastung der Bandaufhängung ermittelt werden. Der gefährliche Querschnitt liegt an der oberen Einspannstelle, da hier das Biegemoment am größten wird. Dieses ist $M = y \cdot P$, wobei $y = \delta + a_0 \cdot \varphi_2$ ist. Bezeichnet man mit $J = \frac{1}{12} h^3 \cdot b$ das Trägheitsmoment des Querschnittes und setzt $l = \frac{h}{2}$, so gilt für technische Sicherheit die Forderung, daß immer $\frac{M}{J} \cdot l \leq k$ sein muß.

Für k ist die zulässige Belastungsgrenze einzusetzen. $\frac{J}{l} = W$ wird als Widerstandsmoment bezeichnet. Demnach gilt auch:

$$\frac{P \cdot y}{W} \leq k.$$

Als Beispiel soll hier für ein 0,06 mm dickes Band der Maximalwinkel φ_1 ermittelt werden, bei dem die Grenze der Festigkeit erreicht wird. Es ist:

$$\frac{J}{l} = W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{14 \cdot 36 \cdot 10^{-4}}{6} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ [mm]}^3.$$

Als Elastizitätsgrenze wird für die weitere Berechnung für Stahl $k = 50 \text{ kg/mm}^2$ und für Platin-Iridium $k = 20 \text{ kg/mm}^2$ angenommen. Sollen bei der Biegung keine elastischen Störungen auftreten, so ist zu fordern, daß etwa $\frac{1}{5}$ des Betrages dieser Werte nicht überschritten wird.

Das bedeutet hier:

$$y \cdot P = M \leq 10 \cdot 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ [kg} \cdot \text{mm]} \text{ (für Stahl).}$$

Die Auslenkung des unteren Einspannpunktes δ muß für das vorliegende Beispiel ($P = 1,76 \text{ kg}$) sein:

$$y \leq \frac{8,3 \cdot 10^{-2}}{1,76} \text{ mm.}$$

Da

$$y = \delta + a_0 \cdot \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sin \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \cos \sqrt{a} \cdot \lambda}{\cos \sqrt{a} \cdot \lambda + a_0 \sqrt{a} \sin \sqrt{a} \cdot \lambda} \cdot \varphi_1$$

wird hier $y = 1,75 \cdot \varphi_1$ gesetzt.

Das Ergebnis ist:

$$\varphi_1 \leq 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ Bogengrad (für Stahl 0,06 mm)}$$

$$\varphi_1 \leq 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ Bogengrad (für Pt-Ir 0,06 mm)}$$

Oder:

$$\varphi_1 = 1,5^0 \quad (\text{Stahl})$$

$$\varphi_1 = 0,6^0 \quad (\text{Pt-Ir})$$

Bei Verwendung der Bänder darf die Maximalamplitude vom Nullpunkt ab gerechnet bei Stahl $1,5^0$ nicht überschreiten, da sonst elastische Nachwirkungen des Bandes, wenn nicht gar Verknickungen, starke Fehler in der Reproduzierbarkeit der Einstellung hervorrufen würden. Die Banddimensionen sind in solchen Fällen vielleicht nicht immer richtig bemessen worden. Denn bei Benutzung noch dünnerer Bänder müßten die Amplituden mit der Wurzel aus der Banddicke noch weiter eingeschränkt werden. Bei veränderlichem h lautet die Formel allgemein:

$$\varphi_1 \leq \frac{k \cdot \sqrt{h \cdot b}}{\sqrt{3 \cdot P \cdot E}}$$

(für die Einschränkung: $\text{Tang } \sqrt{a} \cdot \lambda \sim 1$).

Ein neues elektrisches Aufschlußverfahren mit großer Tiefenwirkung.

Von

Max Müller.

(Mit 10 Figuren.)

Zusammenfassung: Wenn man einen aus Glühkathodenröhre und Kapazität bestehenden Gleichrichter durch einen niederperiodischen Wechselstrom speist und über zwei polarisationsfreie Elektroden durch die Erde belastet, dann entsteht im Gleichrichter ein zusätzlicher Energieverlust, welcher durch die Auslösung elektrolytischer Erscheinungen hervorgerufen wird. Auf dynamischem Wege gelingt es, diese Energieverluste zu bestimmen und Erregerströme und Polarisationsströme unabhängig voneinander dem zeitlichen Verlaufe nach zu registrieren.

Durch Feldmessungen wird der Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Verlaufe der in der Erde ausgelösten elektrolytischen Erscheinungen und ökonomisch wichtigen Schichtenfolgen aufgezeigt.

Die elektrische Leitfähigkeit der Gesteine ist bekanntlich einerseits abhängig von deren petrographischer Beschaffenheit und Porosität und andererseits von der Zusammensetzung und Menge des eingeschlossenen Wassers. Da in vollkommen trockenem Zustande alle Gesteine — mit Ausnahme der metallischen Erze — absolute Nichtleiter sind, wird die Erdstromleitung lediglich durch das in den Gesteinen eingeschlossene Wasser vermittelt. Das letztere enthält gelöste Salze und stellt somit einen Elektrolyten dar. Grundsätzliche Untersuchungen hierüber hat bekanntlich K. SUNDBERG veröffentlicht¹⁾. Je mehr elektrolytische Lösungen in einem Gestein enthalten sind und je reicher der Elektrolyt an gelösten Salzen ist, desto besser ist dessen Leitfähigkeit. So stellen z. B. kompakte Gesteine wie Granit, Gneis, Quarzit infolge ihres geringen Wassergehaltes schlechte Leiter dar, während unter den weicheren Gesteinen, Gips, Steinsalz und Kohle wegen ihres geringen Wassergehaltes hohe spezifische elektrische Widerstände besitzen.

¹⁾ SUNDBERG, (Ergh. angew. Geophys.) Gerl. Beitr. Geophys. 1930.

Andererseits sind die nichtverfestigten Gesteine infolge ihres reichen Wassergehaltes in der Regel gute Leiter. Es ist jedoch notwendig, unter den letzteren zwischen durchlässigen und undurchlässigen Gesteinen zu unterscheiden. In den mehr oder weniger undurchlässigen Gesteinen wie Ton und Mergel und in den tonhaltigen Schiefern befindet sich eine verhältnismäßig konstante Menge Wasser eingeschlossen. Unter solchen Umständen können diese Gesteine durch ihren spezifischen Widerstand reproduzierbar charakterisiert werden, weil das Wasser in ihnen ein Maximum von gelösten Bestandteilen dieser Gesteine enthält. In porösen Formationen liegen die Verhältnisse aber anders. In den letzteren, z. B. in Sanden kann das Wasser verhältnismäßig rasch zirkulieren und ändert deshalb seine Zusammensetzung nur wenig. Der spezifische elektrische Widerstand charakterisiert also in diesem Falle eher das eingeschlossene Wasser als das Gestein selbst. Die elektrische Leitfähigkeit wird also um so geringer, je reiner das Wasser ist.

Nun ist aber gerade die Aufsuchung von porösen Gesteinen, z. B. von Sanden, Sandsteinen oder porösen Kalksteinen für die Erforschung von Lagerstätten von größter Bedeutung, weil gerade diese porösen Medien die Träger von Öl, Gas und Wasser sind. Früher ist die Porosität dieser Gesteine ausschließlich an Hand von Kernbohrproben untersucht worden, ein Verfahren, das nicht nur sehr teuer, sondern auch ungenügend ist, weil poröse Materialien meistens nicht verfestigt sind.

Während nun alle in der Literatur bekannten elektrischen Meßmethoden sich ausschließlich mit der Bestimmung des spezifischen Widerstandes der Gesteinsmedien begnügen, ist es SCHLUMBERGER¹⁾ zum ersten Male gelungen, auch die Porosität der Gesteinsmedien zu ermitteln. Das von SCHLUMBERGER entwickelte Meßverfahren hat sich zu einem äußerst wertvollen Hilfsmittel der modernen Bohrtechnik entwickelt, beschränkt sich jedoch ausschließlich auf die Untersuchung unverrohrter Bohrlöcher und deren unmittelbarer Umgebung. SCHLUMBERGER ermittelt den spezifischen Widerstand und die Porosität längs der Bohrlöchwände durch Einführung von Meßkabeln und Sonden in die Bohrlöcher selbst und nennt sein Verfahren „electrical coring“.

¹⁾ SCHLUMBERGER, Electrical Coring; a Method of determining bottom-hole data by electrical measurements. Technical Publication Nr. 462. The American Institute of Mining and Metallurgical engineers.

Im folgenden möge nun ein neues Aufschlußverfahren beschrieben werden, das die Aufgabe hat, von der Erdoberfläche aus Aufschluß über die petrographische Beschaffenheit tief gelegener Gesteinszonen zu gewinnen. Während SCHLUMBERGER sich auf die Messung der elektromotorischen Kraft der in der unmittelbaren Umgebung der Elektroden und der Bohrlochwände entstehenden spontanen Polarisation beschränkt, gründet sich das Meßprinzip des neuen Verfahrens auf die Bestimmung des Energieverlustes, welcher bei der Auslösung aller in den stromdurchflossenen Medien erzeugten elektrolytischen Erscheinungen hervorgerufen wird.

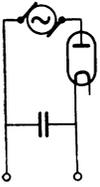


Fig. 1.

Die schematische Meßanordnung ist in ihrer einfachsten Form in Fig. 1 dargestellt. Ein sinusförmiger niederperiodischer Wechselstrom speist einen dynamischen Gleichrichter und wird über zwei Elektroden der Erde zugeleitet. Als Ventil dient hierbei eine hochevakuierte Glühkathodenröhre. Die Meßanordnung ist daher nichts anderes als ein dynamischer Gleichrichter, dessen niederperiodische Stromimpulse in der Erde elektrolytische Vorgänge erzeugen, welche eine zusätzliche Belastung des Generators hervorrufen.

Bei der dynamischen Gleichrichtung des niederfrequenten Wechselstromes entstehen nun im Gleichrichter folgende Verluste:

1. Die Energieverluste im Ventil in der Sperrichtung, welche bei Verwendung sehr gut evakuierter Glühkathodenröhren vernachlässigt werden können.
2. Die Energieverluste im Ventil in der Flußrichtung, bei deren Ermittlung zu beachten ist, daß diese nicht als durch Ohmschen Widerstand erzeugt angesehen werden können.
3. Die Energieverluste im Gleichstromverbrauchskreis durch Lieferung von periodisch veränderlichem statt konstantem Gleichstrom durch das Ventil.
4. Die Energieverluste im Gleichstromverbrauchskreis durch die im Erdboden hervorgerufenen elektrolytischen Vorgänge.

Im Falle einer rein Ohmschen Belastung des Gleichrichters kann man die unter 1 bis 3 genannten Verluste ganz leicht durch Ermittlung des zeitlichen Verlaufes von Strom und Spannung in den verschiedenen Stromkreisen des Gleichrichters berechnen. Es wäre daher naheliegend, die unter 4 genannten Verluste am einfachsten in der Weise zu ermitteln,

daß man an den Ausgangsklemmen des Gleichrichters den Verlauf von Strom und Spannung ermittelt, das eine Mal, wenn der Gleichrichter durch die Erde belastet wird und das andere Mal, wenn er durch einen rein Ohmschen Widerstand belastet wird, der genau so groß ist wie der Widerstand zwischen den Erdungselektroden. Ein solches Meßverfahren wäre jedoch sehr umständlich und auch wenig empfindlich, weil die durch die Erde hervorgerufene zusätzliche elektrolytische Belastung verhältnismäßig gering ist.

Um geeignete Meßgrößen zum Nachweis elektrolytischer Erscheinungen in großer Tiefe zu finden, betrachten wir daher am einfachsten zunächst die Vorgänge bei der dynamischen Gleichrichtung. Wir ermitteln zu diesem Zweck zunächst den zeitlichen Verlauf der Ströme und Spannungen in den verschiedenen Stromkreisen für den Fall der rein Ohmschen Belastung, um dann aus deren Abweichung bei einer zusätzlichen elektrolytischen Belastung Rückschlüsse auf die elektrolytischen Vorgänge selbst zu ziehen.

Die Meßanordnung.

Die Fig. 2 zeigt das prinzipielle Schaltschema des Generators und des dynamischen Gleichrichters. Mit Hilfe der beiden Röhrengeneratoren G_1 und G_2 werden zwei sinusförmige Wechselströme von etwa 300 Hertz erzeugt. Beide Generatoren sind mit eisenfreien und kapazitätsfrei gewickelten Induktionsspulen geringer Dämpfung ausgerüstet, um das Auftreten von Oberschwingungen zu vermeiden. Würde man die mit den beiden Schwingspulen L_1 und L_2 gekoppelten Spulen L_3 und L_4 direkt in Serie schalten, so würde bei gleicher Intensität der beiden Grundschwingungen eine sinusförmige niederperiodische Schwebung entstehen, welche die sinusförmige Variation der Intensität der Grundschwingungen darstellt und daher nicht ohne weiteres als niederperiodische sinusförmige Stromquelle betrachtet werden kann. Um nun reine, von den Grundschwingungen freie Wechselströme zu erhalten, werden die beiden Grundschwingungen unabhängig voneinander verstärkt. Der Anodenstrom der beiden Verstärkerröhren V_1 und V_2 fließt durch die ge-

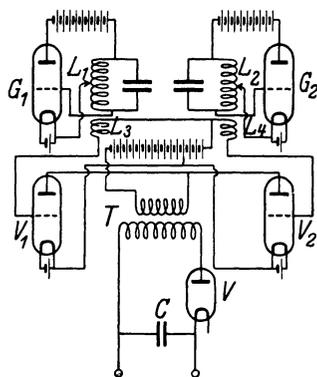


Fig. 2.

meinsame Primärschleife eines Transformators T , dessen Sekundärschleife auf Resonanz mit der Schwebungsfrequenz abgestimmt ist und dessen Dimensionen im übrigen so gewählt sind, daß die Grundschwingungen gedrosselt werden. Die überaus verwickelten Vorgänge im Transformator sollen an dieser Stelle nicht näher

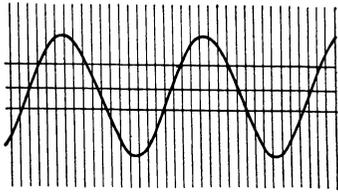


Fig. 3. Sekundärspannung am Transformator (mit Zeißschleifengalvanometer registriert).

geschildert werden, es sei lediglich erwähnt, daß die Drosselwirkung des Transformators in hohem Maße vom Verhältnis der Frequenz der Grundschwingungen zur Eigenfrequenz der Primärschleife des Transformators abhängt. Die Fig. 3 zeigt den Verlauf der Sekundärspannung des Transformators an der vom Verfasser entwickelten Apparatur. Die Kurve wurde mit Hilfe eines mit einem Ohmschen Wider-

stand in Serie liegenden Zeißschleifengalvanometers auf einem Film registriert, auf welchem letzterem mit Hilfe von Stimmgabel, Induktor und Geißleröhre in bekannter Weise Zeitmarken angebracht wurden. Die Eigenfrequenz des Zeiß-Schleifengalvanometers beträgt ca. 100 Hertz. Man erkennt aus der in Fig. 3 dargestellten Kurve, daß die Sekundärspannung des Transformators tatsächlich rein sinusförmig und vollkommen frei von Oberschwingungen ist. Wir können daher den Sekundärstrom des Transformators für die folgenden Überlegungen ohne Bedenken als rein sinusförmige niederperiodische Stromquelle betrachten.

Die Vorgänge im Gleichrichter im Falle der rein Ohmschen Belastung.

Im folgenden mögen nun zunächst theoretisch die Vorgänge bei der dynamischen Gleichrichtung für den Fall der rein Ohmschen Belastung unter den in Fig. 1 und 2 dargestellten Bedingungen untersucht werden. Generell müssen hierbei auch die Ein- und Ausschaltvorgänge beachtet werden, weil diese einen großen Einfluß auf den Verlauf von Strom und Spannung in den einzelnen Stromkreisen haben.

Wir setzen, wie bereits erwähnt, eine sinusförmige Sekundärspannung $E = E_0 \sin \omega t$ am Transformator T voraus. Es sei im folgenden i der durch das Ventil V fließende Gesamtstrom, i_c der kapazitive Ladestrom der Kapazität C , R_i der innere Widerstand des Ventiles,

R der parallel zum Kondensator liegende Ohmsche Belastungswiderstand, i_R der durch den letzteren fließende Belastungsstrom und e_c sei die kapazitive Ladespannung am Kondensator C . Dann muß der durch das Ventil fließende Gesamtstrom gleich der Summe von kapazitivem Ladestrom und Ohmschen Belastungsstrom sein, und im Augenblicke des Aus- und Einschaltens müssen die beiden letzteren entgegengesetzt gleich groß sein. Aus der Bedingung, daß die Kondensatorspannung $e_c = \frac{1}{c} \int i_c dt = R \cdot i_R$ ist, folgt dann weiterhin, daß der Kondensatorstrom i_c der Differentialquotient von i_R ist. Endlich muß die Transformatorspannung E gleich der Summe des Spannungsabfalles im Ventil und der kapazitiven Ladespannung e_c sein. Hieraus ergibt sich:

$$E = R_i (i_c + i_R) + \frac{1}{c} \int i_c dt = R_i i_c + \frac{R_i + R}{c R} \int i_c dt$$

und unter Anwendung der symbolischen Schreibweise ergibt sich für den Ladestrom die Gleichung:

$$i_c = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}} + K e^{-\frac{(R_i + R)}{c R_i \cdot R} \cdot t}, \tag{1}$$

in welcher K eine Konstante, $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cdot e^{j \omega t}$ und $\mathfrak{R} = R_i - j \cdot \frac{(R_i + R)}{c R}$. Das 2. Glied der Gleichung (1) stellt hierbei den Einschaltvorgang dar und die Konstante K ermittelt sich aus der Bedingung, daß zur Einschaltzeit der gesamte durch das Ventil fließende Strom = 0 ist.

In der Durchlaßzone gelten dann für die Kondensatorspannung und Ströme in den einzelnen Kreisen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} e_c &= - E_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \left\{ \frac{R}{R_i} \sin \beta \cos (\omega t + \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \sin (\omega t_1 + \alpha - \beta) e^{-\left(\frac{R_i + R}{c R_i \cdot R}\right) t} \right\} \\ i_R &= - \frac{E_0}{R} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \left\{ \frac{R}{R_i} \sin \beta \cos (\omega t + \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \sin (\omega t_1 + \alpha - \beta) e^{-\left(\frac{R_i + R}{c R_i \cdot R}\right) t} \right\} = \frac{e_c}{R} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 i_c &= \frac{E_0}{R_i} \cos \alpha \left\{ \sin (\omega t + \alpha) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R_i + R}{R \cos \beta} \sin (\omega t_1 + \alpha - \beta) e^{-\left(\frac{R_i + R}{c R_i \cdot R}\right) t'} \right\} \\
 i &= \frac{E_0 \cos \alpha}{R_i \cos \beta} \left\{ \sin (\omega t + \alpha - \beta) \right. \\
 &\quad \left. - \sin (\omega t_1 + \alpha - \beta) e^{-\left(\frac{R_i + R}{c R_i \cdot R}\right) t'} \right\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Hierin ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_i + R}{\omega C R_i R}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\omega C R}$; $t' = t - t_1$, wobei t_1 den Anfang der Durchlaßzone bedeutet.

Man erkennt aus den Gleichungen 2, daß der kapazitive Ladestrom i_c und der Ohmsche Belastungsstrom i_R die entgegengesetzte Richtung haben und weiterhin, daß eine Änderung des Verhältnisses von Transformatorspannung zur Kondensatorspannung auch eine Änderung des Verhältnisses von kapazitivem Ladestrom und Ohmschem Belastungsstrom zur Folge haben muß.

Weiterhin muß zu den Zeiten t_1 und t_2 die Kondensatorspannung gleich der Sekundärspannung am Transformator sein. Das Ende der Durchlaßzone t_2 ergibt sich aus der Bedingung, daß in diesem Zeitpunkt der gesamte durch das Ventil fließende Strom = 0 sein muß.

In der Sperrzone entlädt sich der Kondensator nach einer Exponentialfunktion, wobei Entladestrom i_c und Belastungsstrom i_R wegen $i = 0$ entgegengesetzt gleiche Werte haben. Man sieht, daß die Aufladung des Kondensators stufenweise erfolgt und sich allmählich ein Zustand des dynamischen Gleichgewichtes einstellt, in welchem das Verhältnis der Aufladezeit zur Entladezeit für jeden Impuls genau das gleiche ist.

Im Falle der rein Ohmschen Belastung hängt nun das Verhältnis der Transformatorspannung E zur Ladespannung e_c nur von α und β und vom Widerstandsverhältnis $\frac{R_i}{R}$ ab. Andererseits ist $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \left(1 + \frac{R}{R_i}\right)$. Da nun aber β lediglich von dem Produkt $\omega C R$ abhängt, nicht aber von den Einzelwerten von ω , C und R , so liegt es nahe das Spannungsverhältnis $\frac{E}{e_c}$ in Abhängigkeit vom Widerstandsverhältnis $\frac{R}{R_i}$ für verschiedene Werte des Produktes $\omega R C$ zu ermitteln, um auf diese Weise zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $\frac{E}{e_c}$ innerhalb eines engen

für die Messungen in Frage kommenden Frequenzbereiches unabhängig vom Belastungswiderstand R wird. Ist $R_i > R$, dann kann man den Kondensator C stets in der Weise dimensionieren, daß in dem in Frage kommenden Frequenzbereich von 0,5—3 Hertz das Spannungsverhältnis $\frac{E}{e_c}$ in weiten Grenzen unabhängig von R wird. Im gleichen Frequenzbereiche werden dann auch die Kurvenformen des kapazitiven Ladestromes und Belastungsstromes unabhängig von R .

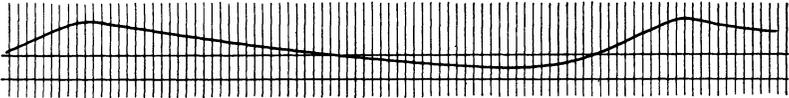


Fig. 4. Belastungsstrom für eine Frequenz 0,704 Hertz.

Von besonderer Wichtigkeit ist es den Verlauf des Belastungsstromes kennen zu lernen. Die Fig. 4 zeigt eine Registrierung von i_R in Übereinstimmung mit der Theorie für eine Kapazität von 10^{-5} F, für $R_i = 3000 \Omega$ und $R = 300 \Omega$ und für eine Frequenz von 0,704 Hertz.

Belastung des dynamischen Gleichrichters durch die Erde.

Wird nun der Gleichrichter durch die Erde belastet, so werden in der letzteren Polarisationsströme ausgelöst, welche sich durch die Medien entladen und deren Gesamtintensität der Dicke der stromdurchflossenen Schichten und außerdem der Stromdichte der Erregerströme proportional ist. Bei der Auslösung der innerhalb der Medien entstehenden elektrolytischen Erscheinungen wird nun Energie verbraucht, welche vom Gleichrichter geliefert und gedeckt werden muß.

Die zusätzliche elektrolytische Belastung hat nun eine Störung des dynamischen Gleichgewichtes des Mechanismus zur Folge und bedingt zunächst eine Deformation der Form des zeitlichen Verlaufes der kapazitiven Ladespannung bzw. der Klemmenspannung am Gleichrichter und des Belastungsstromes. Mißt man daher den zeitlichen Verlauf des Belastungsstromes und der Klemmenspannung das eine Mal, wenn der Gleichrichter durch die Erde belastet ist, und das andere Mal, wenn er durch einen rein Ohmschen Widerstand von der Größe des Erdwiderstandes belastet wird, so ergeben sich Abweichungen zwischen den beiden Beobachtungsergebnissen. Da diese Abweichungen um so größer sind, je tiefer die Stromfrequenz ist, folgt, daß dieselben nur auf elektro-

lytische Erscheinungen zurückgeführt werden können und nicht etwa durch die Einflüsse von Induktion und Kapazität in den Medien selbst hervorgerufen werden können.

Am einfachsten könnte man nun in der Weise vorgehen, daß man die bei der Auslösung elektrolytischer Erscheinungen hervorgerufene Deformation des Belastungsstromes und der Kondensatorspannung als Funktion der Stromfrequenz bei verschiedenem Elektrodenabstand ermittelt.

Da die Eindringungstiefe der Ströme mit wachsendem Elektrodenabstande und sinkender Stromfrequenz in mathematisch-physikalisch wohlbekannterweise zunimmt, ist auch eine Grundlage für die Analyse und Interpretation der Meßdaten gegeben. Als Meßgrößen kann man das Verhältnis der Aufladezeit zur Entladezeit der kapazitiven Ladestromspannung und dessen Frequenzabhängigkeit benutzen oder aber man bestimmt auf polarplanimetrischem Wege direkt die Formfaktoren der Strom- und Spannungskurven im Ausgangskreis und deren Abhängigkeit von der Frequenz. Bei der Messung wählt man der Einfachheit halber die Dimensionen von Kapazität und innerem Ventilwiderstand des dynamischen Gleichrichters so, daß im gegebenen Frequenzbereiche die Indikationen unabhängig von den Schwankungen des Ohmschen Belastungswiderstandes werden, damit beim Verändern des Elektrodenabstandes die Variationen des Widerstandes zwischen den Elektroden nicht mit in die Messung eingehen.

Da sich die Störung des dynamischen Gleichgewichtes auch in einer von der elektrolytischen Belastung und der Frequenz abhängigen Änderung des Verhältnisses der Klemmenspannung am Transformator zur Kondensatorspannung bemerkbar macht, so könnte man auch zur Messung des zeitlichen Verlaufes dieser beiden Spannungen übergehen.

Schließlich könnte man auch den zeitlichen Verlauf des kapazitiven Ladestromes einerseits und des Belastungsstromes andererseits registrieren und als Funktion der Frequenz und des Elektrodenabstandes miteinander vergleichen.

Eine wesentlich empfindlichere Methode zur Messung der in der Erde ausgelösten Polarisationsströme ist die folgende: Man schaltet parallel zu den Ausgangsklemmen ein hochohmiges Ventil V_1 in Serie mit einem Hochohmwiderstand R_2 und legt parallel zum Ventil einen Kondensator C_1 von solcher Größe, daß im Falle rein Ohmscher Belastung kapazitiver Ladestrom und Ventilstrom entgegengesetzt gleich groß sind und infolgedessen an dem Widerstand R_2 kein Spannungsabfall

entstehen kann, während bei einer zusätzlichen elektrolytischen Belastung in R_2 ein Strom entsteht, welcher der Gesamtintensität aller in der Erde ausgelösten Polarisationsströme proportional ist. Der Spannungsabfall an R_2 kann, wie dies Fig. 5 zeigt, mit Hilfe von Elektrometer- röhre und Schleifengalvanometer S gemessen werden.

Zur Vermeidung der unerwünschten Polari- sation der Elektroden werden die Messungen am besten mit Hilfe von polarisationsfreien Elek- troden ausgeführt.

Um die Gesamtintensität der Polarisations- ströme gegenüber der Erregerstromstärke kennen zu lernen, registriert man am besten den zeitlichen Verlauf der Klemmenspannung zwischen den Elek- troden gleichzeitig mit dem Spannungsabfall an R_2 auf ein und dem- selben Film.

Für die Interpretation stehen jetzt folgende Meßgrößen zur Ver- fügung:

1. Das Verhältnis von Erregung und Polarisation in Abhängigkeit von der Frequenz und dem Elektrodenabstand.
2. Die Formfaktoren der registrierten Kurven in Abhängigkeit von der Frequenz und dem Elektrodenabstand.
3. Das Verhältnis der Auflade- und Entladezeit in Abhängigkeit von der Frequenz und dem Elektrodenabstand.
4. Die Reaktionsgeschwindigkeit, welche der Änderung der Gesamt- intensität aller Polarisationsströme in einem Zeitelement innerhalb der Periode proportional ist und welche vom Wassergehalt der Medien abhängt. (Wiederum als Funktion von Frequenz und Elektrodenabstand.)

Feldversuche.

Bei der Durchführung der Feldversuche wurde die in den Fig. 2 und 5 dargestellte Meßanordnung benutzt. Mit Hilfe zweier Zeiß- schleifengalvanometer wurden gleichzeitig auf ein und demselben Film die elektromotorische Kraft der Erregung und die elektromotorische Kraft der Gesamtpolarisation der stromdurchflossenen Medien registriert. Die Versuche wurden jeweils mittels 3—4 verschiedenen Frequenzen im Bereiche zwischen 1 und 5 Hertz vorgenommen. Die Filme wurden

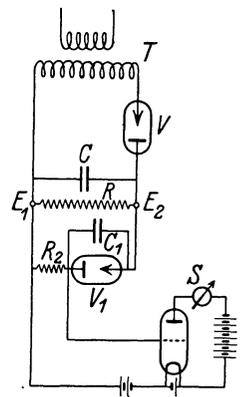


Fig. 5.

wie in der angewandten Seismik mittels Stimmgabel, Induktor und Geißlerröhre mit Zeitmarken versehen. Im Felde wird die ganze Apparatur unter einem Zelt aufgestellt. Die Messungen werden bei verschiedenen Abständen der Elektroden ausgeführt. Eine Elektrode bleibt hierbei jeweils fest, während die zweite versetzt wird. Je größer der Elektrodenabstand, um so größer ist die Eindringungstiefe der

Ströme. Man kann daher eine systematische Analyse der Schichten bis zu großen Tiefen vornehmen.

Für die Ausführung der Versuche genügt eine Ausgangsleistung des Generators von nur 1—1,5 W. Als Stromquellen können deshalb Trockenbatterien und Akkumulatoren verwandt werden.

Im folgenden seien einige an einer durch Tiefbohrungen gut erschlossenen Erdöllagerstätte gewonnene Meßresultate gezeigt.

Die ersten Messungen wurden in der Streichrichtung der Schichten über einer Schichtenfolge von Diluvium, Tertiär und oberer und unterer Kreide mit einer Gesamtmächtigkeit von ungefähr 2000 m ausgeführt. Ihr Ergebnis ist in

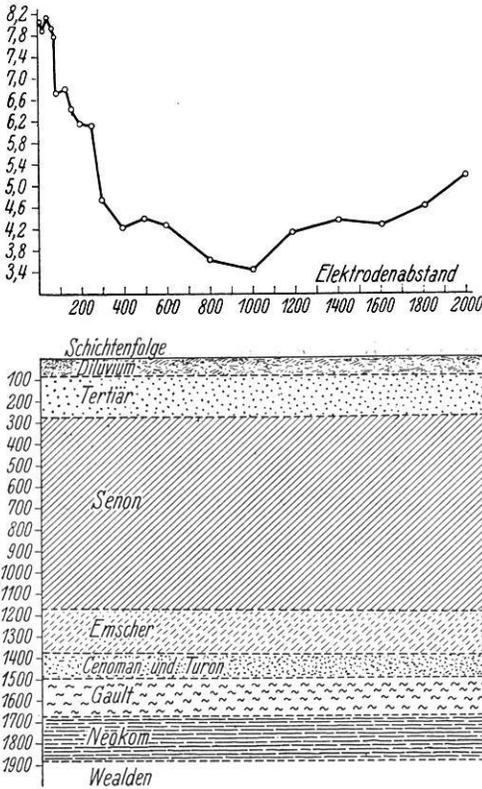


Fig. 6. $\frac{\text{Entladezeit}}{\text{Aufladezeit}}$ für die Frequenz 2,5 Hertz ○○○○

der Fig. 6 dargestellt, in welcher als Ordinaten das Verhältnis der Entladezeit zur Aufladezeit für die Frequenz von 2,5 Hertz und als Abszissen die Elektrodenabstände eingezeichnet sind. Durch Bohrungen sind die Messungen kontrollierbar bis zu einer Tiefe von 1850 m. In der etwa 75—80 m mächtigen diluvialen Deckschicht, die aus Sanden und Kiesen besteht, beträgt das Verhältnis der Entladezeit zur Aufladezeit für eine Frequenz von 2,5 Hertz etwa 8. Dann sinken die Meßdaten an der oberen Grenze des Tertiärs in einem scharfen Sprung auf etwa 6,7 ab und erreichen an der unteren Grenze des Tertiärs

den Betrag von 6,2. An der oberen Grenze des Senons sinkt das Verhältnis der Entlade- zur Aufladezeit sprunghaft auf den Betrag von etwa 4,6 ab. Im Senon, das eine Gesamtmächtigkeit von etwa 900 m besitzt, nehmen die Indikationen langsam ab. Während sie im oberen Teil des Senons, in welchem sich Kalksandsteinbänke befinden, zwischen 4,6 und 4,2 schwanken, sinken sie in den aus Kreidekalken bestehenden unteren Teilen des Senons auf 3,6—3,4 herab. Erst in einer Tiefe von etwa 1200 m, der oberen Grenze des Emschers und im Cenoman wachsen die Indikationen bis zum Betrage von 4,2—4,4 wieder an. Während sich nun die darunter liegenden Tonmergel des Gaults vom Emscher und Cenoman fast gar nicht abheben, zeigen die in einer Tiefe von 1700—1800 m liegenden Schiefertone des Neokoms ein charakteristisches Ansteigen der Indikationen, welche sich in den kalkfreien Tonen des Wealdens in einer Tiefe von etwa 2000 m bis zum Betrage von etwa 5,2 steigert. Das Interessanteste dieses Meßergebnisses ist, daß die Tiefen der horizontalen Schichtgrenzen annähernd so groß sind wie die Elektrodenabstände. Eine eingehende theoretische Begründung dieser überaus einfachen Beziehung werde ich in einer weiteren Arbeit geben.

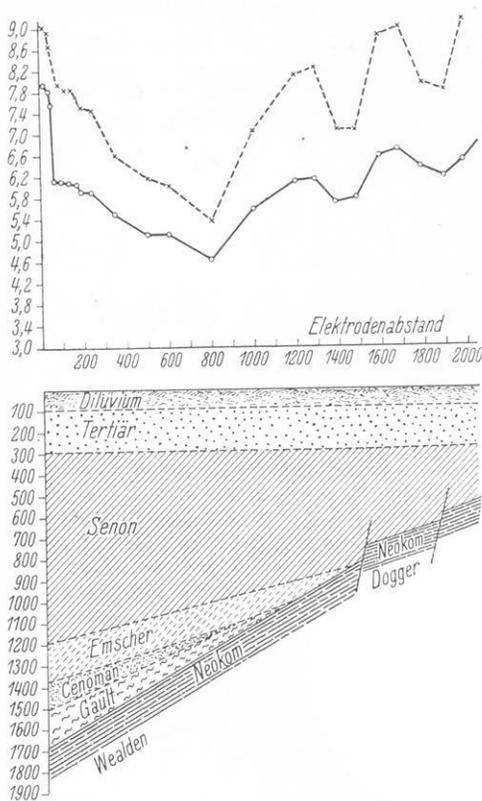


Fig. 7.

$\frac{\text{Entladezeit}}{\text{Aufladezeit}}$ für die Frequenz
 1,6 Hertz ×××××
 $\frac{\text{Entladezeit}}{\text{Aufladezeit}}$ für die Frequenz
 2,5 Hertz ○○○○

In der Fig. 7 ist eine weitere Messung dargestellt, welche senkrecht zur Streichrichtung der Schichten und zwar in der Richtung des Ansteigens der letzteren ausgeführt wurde. Im ersten Teil der Meßlinien weichen die Meßdaten der Fig. 6 und 7 nur wenig voneinander ab, weil

die Mächtigkeit der obersten Schichten in beiden Profilen annähernd dieselbe ist. Erst im zweiten Teil der beiden Meßlinien zeigen sich erhebliche Abweichungen der Meßdaten, welche dadurch bedingt sind, daß in dem in Fig. 7 dargestellten Profil einige Kreideformationen fehlen und außerdem das Neokom durch Verwerfungen hochgeschoben ist. In der Fig. 7 sind die Meßdaten für zwei verschiedene Frequenzen von 2,5 Hertz und 1,6 Hertz dargestellt, um zu zeigen, in welcher Weise sich aus der Frequenzabhängigkeit der Meßdaten Rückschlüsse auf die Beschaffenheit der Medien ziehen lassen.

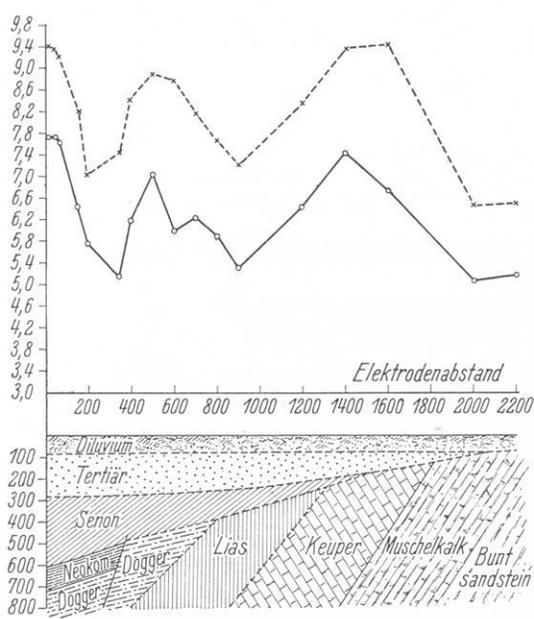


Fig. 8.

Entladezeit
Aufladezeit für die Frequenz 2,5 ○○○○
Entladezeit
Aufladezeit für die Frequenz 1,6 ××××

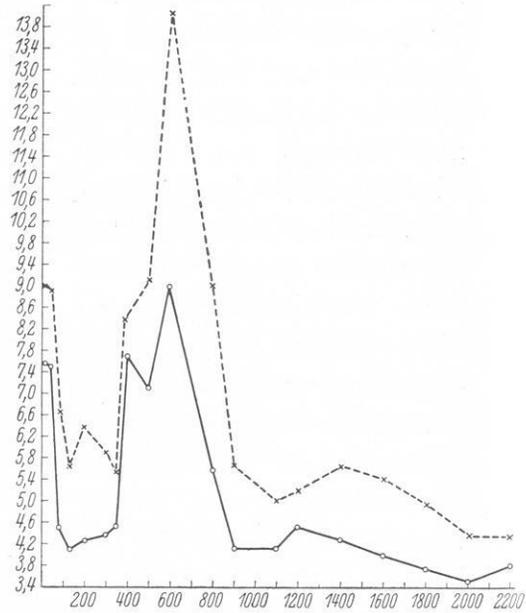


Fig. 9.

Entladezeit
Aufladezeit für die Frequenz 2,5 Hertz ○○○○
Entladezeit
Aufladezeit für die Frequenz 1,6 Hertz ××××

Die Fig. 8 zeigt die Fortsetzung der in Fig. 7 dargestellten Messungen. Das Profil stellt eine sehr steil einfallende Schichtenfolge von Neokom, Dogger, Lias, Keuper und Muschelkalk dar mit einem gemeinsamen Deckgebirge von Diluvium und zum Teil Tertiär und Senon. Fig. 9 zeigt das gleiche Schichtprofil wie Fig. 8, aber von rückwärts gemessen. In beiden Figuren hebt sich der Gipskeuper an genau denselben Stellen am prägnantesten von allen Medien ab. In beiden Figuren verursachen die Kalke der Lias und des Muschelkalks ein Absinken der Indikationen.

Die Abweichungen der Meßdaten sind, wie durch Vergleich der Fig. 8 und 9 leicht zu erkennen ist, lediglich durch die umgekehrte Reihenfolge der Schichten und durch das Einfallen der letzteren bedingt. Um eine genaue Bestimmung des Profiles zu ermöglichen, wurden eine Anzahl von parallelen Meßlinien in der Streichrichtung gelegt, welche der Kürze halber hier nicht beschrieben werden sollen.

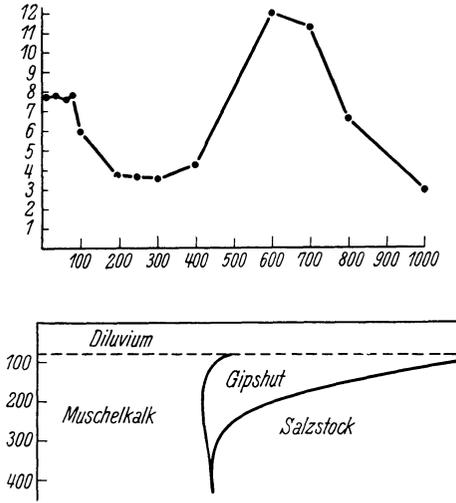


Fig. 10. $\frac{\text{Entladezeit}}{\text{Aufladezeit}}$ für die Frequenz 2,5.

Fig. 10 zeigt die Reaktion von Gipshut und Salzrand. Über das Intensitätsverhältnis von Erregung und Polarisation, über die Formfaktoren der registrierten Kurven und über die Reaktionsgeschwindigkeit der elektrolytischen Vorgänge werde ich in einem weiteren Aufsatz berichten.

Empfindlichkeitssteigerung bei piezoelektrischen Beschleunigungsmessern.

Von

A. Herrmann.

(Mit 3 Figuren.)

Zusammenfassung: Es werden die günstigsten Schnittrichtungen und Dimensionen von Quarz und Seignettesalz für piezoelektrische Beschleunigungsmesser diskutiert. Seignettesalzplatten senkrecht zur a - und c -Achse sind wenig geeignet, während solche senkrecht zur b -Achse günstig sind. Außerdem werden die Beziehung zwischen Druck und entstehender Ladungsmenge und der Einfluß der Feuchtigkeit für Kristalle dieser Schnittrichtung untersucht.

Zur Messung von Erschütterungen sind piezoelektrische Beschleunigungsmesser entwickelt worden. Sie besitzen neben anderen wesentlichen Vorzügen¹⁾ den Vorteil, daß sie gestatten, die bei den Erschütterungen auftretenden Beschleunigungen direkt zu messen.

Meistens werden die piezoelektrischen Eigenschaften des Quarzes verwendet. Schneidet man aus dem Quarzkristall eine Platte ($l \cdot b \cdot d$) so heraus, daß ihre Flächen senkrecht zur optischen, einer elektrischen und der auf beiden senkrechten neutralen Achse stehen, so werden bei Druck parallel zur elektrischen oder zur neutralen Achse elektrische Ladungen erzeugt.

Die Ladungsmenge ist bekanntlich gegeben durch die Formeln:

Fall 1: Druck parallel zur elektrischen Achse

$$q = d_{11} P, \quad (1)$$

Fall 2: Druck parallel zur neutralen Achse

$$q = d_{11} \frac{l}{d} P. \quad (2)$$

¹⁾ B. GALITZIN, Proc. Roy. Soc. London (A) 95 (1919) 492; R. AMBRONN, Z. f. Feinmechanik und Präzision 39 (1931) 199; W. ZELLER, Z. f. Bauwesen 80 (1930) 171.

Dabei ist $d_{11} = d_{qu} = -6,9 \cdot 10^{-8} \frac{\text{el. stat. Einh.}}{\text{dyn}}$ der piezoelektrische Modul des Quarzes, P die in Dyn gemessene auf die Fläche $b \cdot l$ bzw. $b \cdot d$ wirkende Kraft.

Bei den gebräuchlichen Beschleunigungsmessern erfolgt die Druckänderung parallel zur elektrischen Achse des Quarzkristalls. Wie aus Gleichung (2) hervorgeht, kann man durch Druck in Richtung der neutralen Achse und durch geeignete Dimensionierung von l und d die entstehende Ladungsmenge und damit die Empfindlichkeit der Anordnung noch wesentlich steigern.

Es ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung, festzustellen, ob es möglich ist, durch Verwendung einer anderen piezoelektrischen Substanz die Empfindlichkeit des Beschleunigungsmessers noch weiter zu erhöhen.

Nach Formel (1) und (2) ist die entstehende Ladungsmenge der Größe des piezoelektrischen Moduls proportional. Also muß man einen Stoff mit möglichst großem piezoelektrischen Modul verwenden. Diese Bedingung erfüllt am besten das Seignettesalz. Seine drei von Null verschiedenen Piezomoduln sind nach VALASEK¹⁾ $d_{14} = 2300 \cdot 10^{-8}$, $d_{25} = -138 \cdot 10^{-8}$, $d_{36} = 28,3 \cdot 10^{-8} \frac{\text{el. stat. Einh.}}{\text{dyn}}$ bei 0°C . Schneidet man aus dem Kristall eine rechteckige Platte ($l \cdot b \cdot d$) heraus, deren eine Begrenzungsfläche senkrecht zur kristallographischen a -Achse des Seignettesalzes steht, wobei ihre Längsrichtung unter einem Winkel von 45° gegen die b -Achse geneigt ist (siehe Fig. 1), so ergibt die Theorie der Piezoelektrizität die folgende Beziehung²⁾:

$$q_a = \frac{d_{14}}{2} \frac{l}{d} P. \quad (3)$$

q ist die auf der Fläche $l \cdot b$ (also senkrecht zur a -Achse) entstehende Ladungsmenge, P ist die in Dyn gemessene Kraft senkrecht zur Fläche $b \cdot d$. Die Krafrichtung schließt also mit der b - und c -Achse einen Winkel von 45° ein.

Analog gelten für Platten, die senkrecht zur b - (bzw. c -) Achse

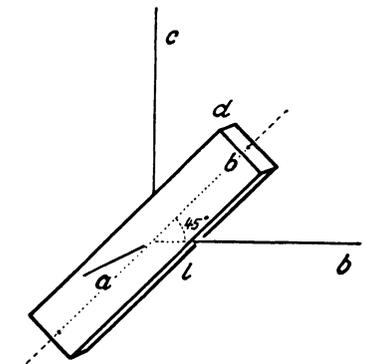


Fig. 1.

¹⁾ J. VALASEK, Science **65** (1927) 235–236.

²⁾ Vgl. die gründliche Arbeit von H. O. WOOD, Bull. seism. Soc. Amer. **11** (1921) 15.

stehen und unter 45° gegen die c - (bzw. a -) Achse geneigt sind (siehe Fig. 2 und 3), die Gleichungen:

$$q_b = \frac{d_{25}}{2} \frac{l}{d} \cdot P; \quad (4) \quad q_c = \frac{d_{36}}{2} \cdot \frac{l}{d} \cdot P. \quad (5)$$

Die Ladung wird dabei stets auf der Fläche $b \cdot l$ erzeugt. Der Druck hat auf die Fläche $b \cdot d$ zu erfolgen.

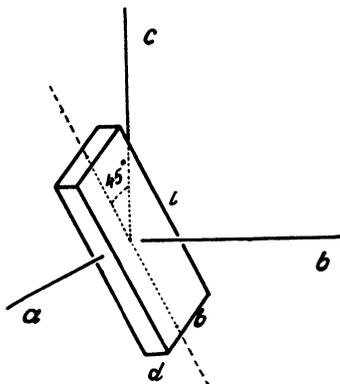


Fig. 2.

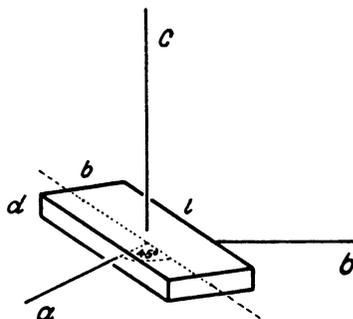


Fig. 3.

Beim piezoelektrischen Beschleunigungsmesser werden nicht die durch die Druckschwankungen erzeugten Elektrizitätsmengen direkt gemessen, sondern vielmehr die an den Belegen entstehenden elektrischen Spannungen. Demzufolge ist die Kapazität und somit die Dielektrizitätskonstante des Kristalls von großer Bedeutung.

Haben eine Seignettesalzplatte und eine Quarzplatte die gleiche Gestalt, so ist das Verhältnis der Spannungen (V) bei gleichem Druck P , wenn man die Kapazität des Außenkreises (Elektrometer bzw. Gitter der Röhre + Zuleitungsdrähte) nicht berücksichtigt, bestimmt durch

$$\frac{V_s}{V_{qu}} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{qu} d_s l}{\varepsilon_s d_{qu} d} \quad (\text{im Fall 1}), \quad \frac{V_s}{V_{qu}} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{qu} d_s}{\varepsilon_s d_{qu}} \quad (\text{im Fall 2}); \quad (6)$$

daraus findet man die in Tabelle 1 zusammengestellten Verhältniswerte. Setzt man die Kapazität (C_A) des Außenkreises in Rechnung, so liegt der Wert von $\frac{V_s}{V_{qu}}$ bei Seignettesalzkristallen, die senkrecht zur b -Achse stehen und unter 45° gegen die c -Achse geneigt sind, je nach Dimensionierung von l (4–6 cm), b (0,5 oder 1 cm), d (0,2 oder 0,3 cm) und C_A (10 oder 20 cm) zwischen $7,6 \frac{l}{d}$ und $9,3 \frac{l}{d}$ (im Fall 1) bzw. 7,6 und 9,3 (im Fall 2).

Tabelle 1.

Schnitttrichtung des Seignettekristalls	Quarz	
	Druck \parallel el. Achse (Fall 1)	Druck \perp el. Achse (Fall 2)
$\perp a$ -Achse $\varepsilon_a \sim 80$	$\sim 9,2 \cdot \frac{l}{d}$	$\sim 9,2$
$(45^\circ \wedge b)$ $\sim 10^4$	$\sim 0,1 \cdot \frac{l}{d}$	$\sim 0,1$
$\perp b$ -Achse $\varepsilon_b \sim 7$	$\sim 6,3 \cdot \frac{l}{d}$	$\sim 6,3$
$(45^\circ \wedge c)$		
$\perp c$ -Achse $\varepsilon_c \sim 9$	$\sim 1 \cdot \frac{l}{d}$	~ 1
$(45^\circ \wedge a)$		

Dabei sind für die Piezomoduln die oben angegebenen Werte verwendet. Die Dielektrizitätskonstante von Quarz ist $\varepsilon_{qu} = 4,4$ gesetzt. Bei Seignettesalz gehen die Angaben über die Dielektrizitätskonstante für Kraftlinien parallel zur a -Achse stark auseinander. Während CADY¹⁾ den Wert $\varepsilon_a = 80$ als richtig annimmt, finden neuerdings VALASEK²⁾, KOBeko und KURTSCHATOV³⁾, SCHULWAS-SOROKIN⁴⁾ und OPLATKA⁵⁾ einen viel größeren von der Feldstärke abhängigen Wert in der Größenordnung 10^4 ⁶⁾. Für die Dielektrizitätskonstante in Richtung der b -Achse ist $\varepsilon_b = 7$, in Richtung der c -Achse $\varepsilon_c = 9$ gesetzt. Tabelle 1 zeigt, daß Seignettesalzplatten senkrecht zur a -Achse trotz des dafür geltenden großen Piezomoduls infolge der neuerdings ermittelten Größe der Dielektrizitätskonstanten nicht günstig sind. Auch andere Gründe sprechen dagegen, so orientierte Seignettesalzplatten für exakte Erschütterungsmessungen zu verwenden: Eine große Zahl von Untersuchungen, die von CADY, KOBeko und KURTSCHATOV, SCHULWAS-SOROKIN, VALASEK⁷⁾

1) W. G. CADY, Report of National Research Council, May 1918.

2) J. VALASEK, Physic. Rev. **17** (1921) 475; **19** (1922) 438; **20** (1922) 639; **23** (1924) 114; **24** (1924) 560.

3) P. KOBeko und J. KURTSCHATOV, Z. Physik **66** (1930) 192.

4) R. D. SCHULWAS-SOROKIN, Z. Physik **77** (1932) 541; **73** (1932) 700.

5) G. OPLATKA, Physik. Z. **34** (1933) 299.

6) H. O. WOOD (a. a. O.) benutzt bei seiner Betrachtung über die Verwendungsmöglichkeit von senkrecht zur a -Achse geschnittenen Seignettesalzplatten zum Bau eines Beschleunigungsmessers den Wert $\varepsilon_a = 80$, womit die bei ihm wenig befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ihre Erklärung findet.

7) A. a. O.

und anderen ausgeführt wurden, zeigten, daß der piezoelektrische Modul durchaus keine Konstante ist, sondern stark temperatur- und feuchtigkeitsabhängig ist und daß Ermüdungs-, Lähmungs- und Hysteresiserscheinungen auftreten. Zwischen -16 und $+23^{\circ}\text{C}$ ist das erzeugte piezoelektrische Moment nur für kleine Belastungen (ca. $\frac{1\text{ kg}}{\text{cm}^2}$) der Belastung proportional.

Weit günstiger liegen nach VALASEK die Verhältnisse für Platten senkrecht zu b -Achse und solche senkrecht zur c -Achse. Die letztere Schnittmöglichkeit kommt wegen des dafür geltenden relativ kleinen Piezomoduls für die praktische Verwendung nicht in Betracht. VALASEK fand, daß fast alle bei d_{14} auftretenden Unregelmäßigkeiten bei den anderen Moduln gar nicht oder in nur ganz geringem Maße vorhanden sind. Insbesondere sind d_{25} und d_{36} nahezu temperaturunabhängig.

Der Verfasser untersuchte, ob genaue Linearität zwischen piezoelektrischer Wirkung und Belastung besteht. Zu diesem Zweck wurden je drei Würfel¹⁾ von folgender Orientierung geprüft:

1. Zwei Flächen, die als Elektrodenflächen dienten, stehen senkrecht zur kristallographischen b -Achse, die anderen schließen mit den Achsen a und c einen Winkel von 45° ein (vgl. Fig. 2, $l = b = d$).
2. Zwei Flächen stehen senkrecht zur c -Achse, die anderen sind unter 45° gegen b - und a -Achse geneigt (vgl. Fig. 3, $l = b = d$).

Sie wurden sorgfältig getrocknet und in einer hochisolierten Druckapparatur in Stufen von 50 — 200 g belastet. Es ergab sich Proportionalität zwischen Druck und Ladung bis zu dem gemessenen Druck von $\frac{4\text{ kg}}{\text{cm}^2}$. Abweichungen hiervon betragen bei einer Dauerlast von $\frac{4\text{ kg}}{\text{cm}^2}$ gegenüber einer solchen von $\frac{0,5\text{ kg}}{\text{cm}^2}$ höchstens 2 — 3% .

Zunächst konnte fast niemals mit ein und demselben Würfel zu verschiedenen Zeiten die gleiche Wirkung erzielt werden. Dafür sind nicht Temperaturschwankungen sondern Änderungen der Luftfeuchtigkeit verantwortlich zu machen. Das Isolationsvermögen des Kristalls ist in hohem Maße von den Feuchtigkeitsverhältnissen abhängig. Eine rohe Bestimmung der Kapazität des Systems Kristall + Elektrometer ergab gute Übereinstimmung mit den von VALASEK angegebenen

¹⁾ Die Seignettesalzwürfel wurden in freundlicher Weise von der Firma Carl Zeiss zur Verfügung gestellt, wofür besonders Herrn Dr. HAASE auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

Werten für die Moduln d_{25} und d_{36} . Das Seignettesalz kann nur dann zur Messung auch langperiodischer Beschleunigungen Verwendung finden, wenn der Kristall gut isoliert. Das läßt sich durch Verminderung der Luftfeuchtigkeit erreichen. Zu diesem Zweck wurde der Seignettekristall (Orientierung wie in Fig. 2), der in die Druckapparatur eingesetzt war, mit einem Glasgefäß umgeben. Durch Hindurchsaugen von getrockneter Luft wurde die relative Luftfeuchtigkeit zwischen 65 und 20% variiert:

Bei einer Feuchtigkeit von mehr als 50% ist der spezifische Widerstand kleiner als $10^{11} \Omega$, bei 40% ist er von der Größenordnung 10^{13} und erreicht bei 20% einen Wert von ungefähr $5 \cdot 10^{14}$. Es ist nicht ratsam, sehr niedrige Feuchtigkeitsgrade zu verwenden und etwa den Kristall in einen Exsikkator einzubringen; denn es tritt infolge Ausscheidens von Kristallwasser eine Zerstörung des Kristalls ein. Bei ungefähr 25% Feuchtigkeit zeigt sich bei Zimmertemperatur auch nach Monaten nicht die geringste Veränderung des Seignettesalzes.

Die piezoelektrische Wirksamkeit ist bei ein und demselben Feuchtigkeitsgrade zeitlich konstant, ändert sich zwischen 20 und 30% Feuchtigkeit nicht und nimmt zunächst (zwischen 30 und 45%) langsam, dann sehr rasch ab.

Zusammenfassend kann man somit sagen:

Seignettesalzplatten, die senkrecht zur kristallographischen a -Achse ausgeschnitten sind (vgl. Fig. 1), sind als piezoelektrische Substanz für Beschleunigungsmesser ungeeignet.

Platten, die senkrecht zur b -Achse orientiert und unter 45° gegen die c -Achse geneigt sind, erfüllen die Ansprüche, die an ihre Leistungsfähigkeit gestellt werden, wenn die sie umgebende Lufthülle eine Feuchtigkeit von 20–25% aufweist.

Bei Orientierung nach Fig. 3 liegen die Verhältnisse wegen des relativ niedrigen Piezomoduls nicht günstiger als bei Quarz.

Der Einfluß des Antriebs auf die Schwingungsdauer eines Pendels.

Von

H. Schmücking und O. Meißer.

(Mit 2 Figuren.)

Zusammenfassung: Es wird eine Beziehung zwischen der Antriebskraft und dem logarithmischen Dekrement aufgestellt. Bei einem impulsförmig wirkenden Antrieb ist die Schwingungsdauerkorrektur auch für den Antrieb außerhalb der Mittellage des Pendels abgeleitet.

Ein Pendel, das stets mit gleicher Amplitude schwingen soll, z. B. das Pendel einer Uhr, benötigt einen Antrieb. Dieser Antrieb kann dauernd wirken, z. B. als sinusförmige Kraft, oder aber der Antrieb erfolgt durch Impulse, jede Halbschwingung (beiderseitiger Antrieb), jede 2. Halbschwingung (einseitiger Antrieb) oder in noch größeren Abständen, etwa jede 30. Sekunde wie bei der Shortt-Uhr.

Für ein Pendel gilt die Gleichung:

$$K \cdot \varphi'' = -s \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi - N \cdot \varphi' + H \cdot F(\varphi) \cdot s \cdot m, \quad (1)$$

wenn:

m = Pendelmasse

K = Trägheitsmoment des Pendels

φ = Amplitude des Pendels

s = Abstand des Schwerpunkts vom Drehpunkt

$H \cdot F(\varphi)$ = Antriebskraft.

Die Dämpfung N ist wie gewöhnlich der Geschwindigkeit proportional gesetzt, was für kleine Amplituden zulässig ist. $F(\varphi)$ ist die Funktion, die den Antrieb mit der Amplitude verbindet. Es soll der Antrieb nur eine Funktion der Amplitude sein, was sich praktisch durch Verwendung von Photozellen erreichen läßt.

Gleichung (1) wird unter Einführung von $\frac{N}{K} = 2k$; $\frac{s \cdot m}{K} = \frac{1}{l}$ geschrieben:

$$\varphi'' + 2k \cdot \varphi' + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = \frac{H \cdot F(\varphi)}{l}. \quad (2)$$

Durch Entwicklung des \sin und Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung, wird (2), wenn man noch das dimensionslose Zeitmaß¹⁾:

$\tau = \sqrt{\frac{g}{l}} t$ einführt:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + 2\alpha \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} + \varphi = \frac{H}{g} \cdot F(\varphi), \quad (3)$$

worin $\alpha = k \sqrt{\frac{l}{g}}$ ist.

Soll der Antrieb gerade so groß sein, daß die Reibungsverluste kompensiert werden, so muß gelten:

$$\frac{H \cdot F(\varphi)}{g} = 2\alpha \cdot \varphi_0 \cdot \cos \tau$$

oder da $\alpha = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \approx \frac{\Lambda}{2\pi}$ (Λ logarithmisches Dekrement) (4)

$$\frac{H \cdot F(\varphi)}{g} = \frac{\Lambda}{\pi} \cdot \varphi_0 \cdot \cos \tau.$$

Der Antrieb ist dann ohne Einfluß auf die Halbschwingungsdauer T des Pendels, wenn er gegen die sinusförmige Bewegung mit einer Phasenverschiebung von 90° erfolgt und nach (4) mit dem logarithmischen Dekrement zusammenhängt. Diese Tatsache wurde von SCHIEFERSTEIN²⁾ bei der Konstruktion seines elastisch gekoppelten Pendels verwendet. Von RICHTER-GEFFKEN³⁾ ist 1929 ein elektrisch rückgekoppeltes Pendel auf der gleichen Grundlage vorgeschlagen worden; jedoch ist bisher keine experimentelle Ausführung bekannt geworden.

Für den impulsförmigen Antrieb stellte LIPPMANN⁴⁾ schon 1896 die hierfür geltenden Gesetze auf und gab an, wann ein solcher Antrieb ohne Störungen auf die Schwingungsdauer des Pendels ist. Er fand:

¹⁾ Vgl. JÄGER, Elektr. Meßtechnik 1922, 26—41.

²⁾ SCHIEFERSTEIN, Z. techn. Physik 1922, 377—380. „Über mechanische und elektro-mechanische Schwingungen.“

³⁾ RICHTER-GEFFKEN, Die Uhrmacherwoche 1929. Nr. 48/49. „Neue Möglichkeiten des Präzisionsuhrenbaues.“

⁴⁾ LIPPMANN, C. R. hebdom. Acad. Sci. 122 (1896) 104—108. „Sur l'entretien du mouvement du pendule sans perturbations.“

Erfolgt der Impuls während des Abstiegs, wo also Geschwindigkeit und Kraft nach der Vertikalen hin gerichtet sind, so bringt dieser Impuls ein Vorgehen zustande. Findet der Impuls während des Aufstiegs statt, so ergibt sich ein Nachgehen. Erfolgt er aber genau in der Mitte, dann ergibt sich keinerlei Störung der Schwingungsdauer. Liegt der Antriebspunkt außerhalb der Mitte und erfolgt ein Impuls beim Aufstieg und ein gleichstarker beim Abstieg, so sind die Störungen gleich und entgegengesetzt gerichtet, heben sich also gegenseitig auf. — Im Jahre 1898 gibt LIPPMANN¹⁾ eine rechnerische Behandlung dieses letzten Falles und zwar mit der Einschränkung, daß die Zeit, die das Pendel zum Zurücklegen der Strecke: Vertikalstellung-Antriebsstellung braucht, sehr klein ist.

Im folgenden sollen allgemeine Formeln abgeleitet werden für den Fall, daß der Antriebsimpuls an einer beliebigen Stelle der Pendelbahn erfolgt.

Da sich nun die strenge Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen: $\varphi'' + 2\alpha\varphi' + \varphi = C(\varphi)$ nicht allgemein lösen läßt, so muß man sich damit begnügen, zunächst die Gleichung der freien, gedämpften Schwingung: $\varphi'' + 2\alpha\varphi' + \varphi = 0$ zu behandeln und die Lösungen mit aneinandergesetzten Anfangsbedingungen „zusammenzuflicken“. — Wir machen noch die Voraussetzung, daß der Impuls von äußerst kurzer Dauer sein möge; andernfalls müssen die entsprechenden Mittelwerte eingesetzt werden.

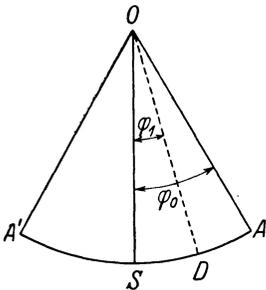


Fig. 1.

Pendelbewegung.

Im Punkte *A*, siehe Fig. 1, werde das Pendel mit der Geschwindigkeit Null losgelassen und möge sich bis zum Punkte *D* unbeeinflusst bewegen. Für diese Strecke kann man die Differentialgleichung ansetzen:

$$\varphi'' + 2\alpha\varphi' + \varphi = 0, \quad (5)$$

deren allgemeine Lösung

$$\varphi = \frac{A}{\beta} \cdot \sin(\beta(\tau - \tau_i) + b_i) \cdot e^{-\alpha(\tau - \tau_i)} \quad (6)$$

ist und worin: $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

¹⁾ LIPPMANN, C. R. hebdomadaire Acad. Sci. **127** (1898) 15–18. „Sur l'entretien du mouvement pendulaire sans perturbations. Entretien du pendule géodésique.“

Aus (6) folgt für $\tau = \tau_i$: $\varphi = \varphi_i$, $\varphi' = \varphi_i'$

$$A^2 = \varphi_i^2 + 2 \varphi_i \varphi_i' + \varphi_i'^2, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} b_i = \beta \cdot \frac{\varphi_i}{\alpha \varphi_i + \varphi_i'}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\alpha}{\beta} \quad (8)$$

und für $\tau_i = \tau_1$

$$\varphi' = -\frac{A}{\beta} \cdot e^{-\alpha(\tau - \tau_1)} \cdot \sin(\beta(\tau - \tau_1) + b_1 - \psi). \quad (9)$$

Endlich folgt aus (6) noch für die erste Maximalamplitude der Wert:

$$\varphi_{\max} = A e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\pi + \psi - b_1)}. \quad (10)$$

Für die Strecke AD gelten die Anfangsbedingungen:

$$\tau_i = 0; \quad \varphi = \varphi_0; \quad \varphi' = 0, \quad \text{mithin: } A = \varphi_0 \text{ und } b_0 = \psi.$$

Vom Punkte D ab muß man die Differentialgleichung mit neuen Bedingungen ansetzen. Wir setzen nur voraus, daß der Impuls, den das Pendel erhält, gerade ausreicht die Amplitude konstant zu halten, also daß:

$$\varphi_{\max} = -\varphi_0 = -A \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\pi + \psi - b_1)}. \quad (11)$$

Dem Pendel wird in D ein konstanter Geschwindigkeitszuwachs, gleich $\frac{\varphi_0}{\beta} \cdot c$, erteilt. Es ist für D :

$$\varphi' = -\frac{\varphi_0}{\beta} (e^{-\alpha \tau_1} \cdot \sin \beta \tau_1 - c). \quad (12)$$

Die Halbperiode τ_m ist die Zeit, die das Pendel braucht, um die Amplitude $ADSA'$ zurückzulegen.

Aus (10) folgt:

$$\beta \tau_m = \pi + \psi - b_1 + \beta \tau_1 \quad (13)$$

und wegen:

$$\beta \tau_1 + \psi = \pi - \operatorname{arc} \sin \beta \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_0} e^{\alpha \tau_1}$$

$$b_1 = \pi - \operatorname{arc} \sin \beta \cdot \frac{\varphi_1}{A} = \pi - \operatorname{arc} \sin \beta \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \cdot e^{-\alpha(\tau_m - \tau_1)}$$

ergibt sich schließlich die Halbperiode:

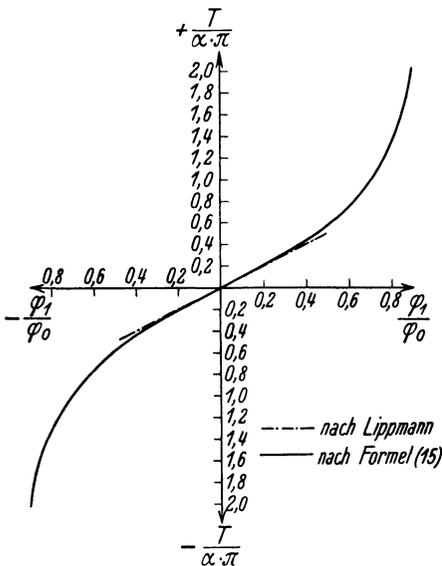
$$\tau_m = \frac{\pi}{\beta} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arc} \sin \beta \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_0} e^{\alpha \tau_1} \cdot e^{-\alpha \tau_m} - \operatorname{arc} \sin \beta \frac{\varphi_1}{\varphi_0} e^{\alpha \tau_1} \right) \right\}. \quad (14)$$

Zur Berechnung dieses Ausdruckes setzt man:

$$\beta \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \cdot e^{\alpha \tau_1} = n \quad \text{und} \quad \tau_m \approx \pi$$

in Verbindung mit dem Faktor α , dann wird:

$$\left. \begin{aligned} \tau_m &= \frac{\pi}{\beta} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} (\arcsin n \cdot e^{-\alpha \pi} - \arcsin n) \right\} \\ &\approx \frac{\pi}{\beta} \left[1 - \frac{\alpha n}{\sqrt{1-n^2}} \right] \quad \text{für } n < 0,9 \\ &\approx \pi - \Delta T. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$



Der Einfluß der gemachten Vernachlässigungen übersteigt bei $n = 0,9$ noch nicht 10⁰‰.

Für die rechnerische Auswertung der Formel (15) setzt man $\beta = 1$, da α in der Größenordnung von 10⁻⁴ liegt.

In Fig. 2 ist der Verlauf des Korrektionsausdrucks ΔT im allgemeinen Maßstab graphisch dargestellt. Die gerade Linie würde der LIPPMANNSCHEN Korrektion entsprechen und geht proportional n und gilt nur in der Nähe der Vertikalstellung. Aus der Symmetrie

Fig. 2. Schwingungsdauerkorrektion der Kurve zur Ordinatenachse folgt für beliebigen impulsförmigen Antrieb¹⁾.

ohne weiteres für jede Antriebsstellung, daß zwei aufeinanderfolgende Impulse, die mit gleicher Stärke an derselben Stelle, einmal beim Aufstieg (τ_1) und das folgende Mal beim Abstieg ($\tau_m - \tau_1$) stattfinden, sich in ihrer Wirkung auf die Schwingungsdauer, abgesehen von Gliedern in α^2 , ausgleichen. Die experimentellen Untersuchungen werden später gegeben.

¹⁾ Es muß in Figur 2 heißen $\frac{\Delta T}{\alpha \pi}$ anstelle von $\frac{T}{\alpha \pi}$.