

**Veröffentlichungen  
der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena**

Herausgegeben vom Direktor **Oscar Hecker**

**Heft 9**

---

**Beiträge  
zu einer experimentellen Seismik**

Von

**O. Meisser**

Mit 68 Abbildungen im Text



Jena  
Verlag von **Gustav Fischer**  
1929

# Veröffentlichungen

## der Reichsstation für Erdbebenforschung

### in Jena

**Heft 1: Die Verbreitung der Erdbeben auf Grund neuerer makro- und mikro-seismischer Beobachtungen und ihre Bedeutung für Fragen der Tektonik.** Von Dr. August Sieberg, Privatdozent für Geophysik an der Univers. Jena. Mit einer farb. seismisch-tektonischen Weltkarte. 96 S. gr. 8° 1922 Rmk 1.60

Auf Grund statistischer Verwertung des zuverlässigsten, bis jetzt vorhandenen Beobachtungsmaterials und neuer Arbeitsmethoden gelangt die geographische Verteilung der festländischen und submarinen Erdbeben in ihrem Zusammenhang mit dem jeweiligen tektonischen Aufbau ausführlich zur Darstellung. Dabei ergeben sich zum Teil erhebliche Abweichungen vom gewohnten Bild.

Besonders bemerkenswert sind die Ergebnisse allgemeiner Art, die die mannigfaltigsten Probleme der Erdkunde im weitesten Sinne betreffen. Einige derselben dürften dazu angetan sein, Theoretiker auf tektonischem Gebiete zur Nachprüfung ihrer Ansichten anzuregen. Die beigegebene seismisch-tektonische Weltkarte in viel-farbiger Ausführung, Maßstab 1:80 Mill., ist die erste ihrer Art.

**Heft 2: Die Explosionskatastrophe von Oppau am 21. September 1921 nach den Aufzeichnungen der Erdbebenwarten.** Von Prof. Dr. Oscar Hecker, Jena. Mit 5 Tafeln. 18 S. gr. 8° 1922 Rmk —.60

**Heft 3: Zur Gründung der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena.** Von O. Hecker. Mit 2 Abbild. im Text. — **Das Erdbeben in der chilenischen Provinz Atacama am 10. November 1922.** Von A. Sieberg und B. Gutenberg. Mit 2 Abbild. im Text und 18 Tafeln mit Seismogrammen. 48 S. gr. 8° 1924 Rmk 4.50

**Heft 4: Das mitteleuropäische Erdbeben vom 16. November 1911.** Bearbeitung der makroseismischen Beobachtungen. Von Dr. A. Sieberg und Dr. R. Lais. Mit 8 Abbild. im Text und 2 farb. Isoseistenkarten. 106 S. gr. 8° 1925 Rmk 10.—

**Heft 5: Ueber die Laufzeiten der Vorläufer- und Wechselwellen bei Erdbeben in ihrer Beziehung zur Schichtung der Erdrinde.** Von G. Krumbach. 19 S. gr. 8° 1926 Rmk 1.—

**Heft 6: Das Einsturzbeben in Thüringen vom 28. Januar 1926.** Von A. Sieberg und G. Krumbach. Mit 6 Abbild. im Text und 1 Isoseistenkarte. 32 S. gr. 8° 1927 Rmk 1.50

**Heft 7: Seismische Registrierungen in Jena.** 1. Oktober 1926 bis 31. Dezember 1927. Von G. Krumbach. 23 S. gr. 8° 1928 Rmk 1.—

**Heft 8: Das Erdbeben in Japan am 7. März 1927.** 11 Tafeln (26×38 cm) mit Seismogrammen und 4 S. Text. Lex. 8° 1928 Rmk 3.—

Das Beben ist von japanischer Seite bereits bearbeitet worden. Die Reproduktionen der an den deutschen und österreichischen Erdbebenwarten gewonnenen Aufzeichnungen dieses Bebens sollen die Möglichkeit eines Vergleichs der Registrierungen bieten. Die Instrumentalkonstanten sind so wiedergegeben, wie sie von den Erdbebenwarten mitgeteilt wurden.

Die Bemerkungen über das Epizentralgebiet sind von Reg.-Rat. Dr. Krumbach nach den japanischen Veröffentlichungen zusammengestellt worden, ebenso hat derselbe die Einteilung der Seismogramme vorgenommen.

**Veröffentlichungen**  
**der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena**  
Herausgegeben vom Direktor **Oscar Hecker**  
**Heft 9**

---

**Beiträge**  
**zu einer experimentellen Seismik**

Von

**O. Meisser**

Mit 68 Abbildungen im Text



Jena  
Verlag von Gustav Fischer  
1929

Die grundlegenden experimentellen Versuche für diese Arbeit konnten mit Mitteln durchgeführt werden, die dem Unterzeichneten von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für geophysikalische Forschungsarbeiten zur Verfügung gestellt waren.

Auch zu den Kosten für die Drucklegung der Arbeit hat die Notgemeinschaft einen Teil beigetragen.

**O. Hecker.**



## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Experimentelle Seismik und „große Seismik“ . . . . .	V
<b>I. Theoretische Grundlagen . . . . .</b>	<b>1</b>
1. Freie Wellen im elastischen unendlichen Raume . . . . .	1
2. Gebundene Wellen im elastischen unendlichen Halbraume . . . . .	10
3. Geometrische Seismik . . . . .	21
<b>II. Experimentelle Arbeitsmethoden . . . . .</b>	<b>30</b>
1. Konstruktion und Beschreibung der Apparaturen . . . . .	30
2. Die theoretischen Grundlagen für die Auswertung von Registrierungen . . . . .	42
3. Beispiele für Beobachtungen an elastischen Wellen . . . . .	61
a) Laufzeitverfahren . . . . .	61
b) Emergenzwinkel . . . . .	69
c) Perioden . . . . .	70
d) Amplitudenverfahren . . . . .	74
Ziele und Aufgaben einer experimentellen Seismik . . . . .	77

## Einleitung.

Die Seismik ist bisher fast ausschließlich von der theoretischen Seite aus betrachtet worden. Die experimentelle Durcharbeitung der Wellenkinematik dagegen wurde stark vernachlässigt. Man hat sich hauptsächlich darauf beschränkt, Erdbeben in ihren Ausbreitungsformen zu beobachten. Aus dem Verhalten der elastischen Wellen wurden dann an Hand theoretischer Überlegungen Schlüsse auf die Beschaffenheit des Erdinnern gezogen. Zweifellos hat diese Betrachtungsweise zu wertvollen Erkenntnissen geführt. Sie krankt jedoch daran, daß die Erde im Inneren als Beobachtungsmedium unzugänglich ist. Um durch Versuche eindeutige Beweise für die Richtigkeit der einzelnen Rechnungshypothesen führen zu können empfiehlt es sich daher, kleinere Medien zu wählen, deren Struktur und Dimensionen man kennt. An ihnen läßt sich mit größerer Sicherheit prüfen, wieweit die von der allgemeinen Seismik entwickelten Beziehungen und Gesetze stimmen.

Im folgenden soll der Versuch unternommen werden, sinngemäß die schon bekannten Beziehungen und Ergebnisse der großen Seismik auf die Probleme für elastische Untersuchungen im kleinen zu übertragen und kritisch die Grenzen ihrer Gültigkeit zu zeigen. Dazu wird eine seismische und seismisch-akustische Apparatur beschrieben, die von Herrn Geheimrat Hecker im Verein mit dem Verfasser ausgebildet wurde, um versuchsmäßig die verschiedenen Probleme bearbeiten zu können. Auch bei der Beschreibung der experimentellen Anordnungen soll überall da, wo Anlaß zu fehlerhaften Schlüssen und Annahmen vorliegt, eine kritische theoretische und experimentelle Prüfung erfolgen.

# I. Theoretische Grundlagen.

## 1. Freie Wellen im elastischen unendlichen Raume.

Um die Frage zu klären, wie sich gewisse Vorgänge, die man auch als Störungen auffassen kann, in einem elastischen Medium von beliebiger Struktur ausbreiten, soll zunächst der einfachste Fall der Ausbreitung von Wellen in einem isotropen elastischen Medium behandelt werden. Ein solches Medium stellen zwar die obersten Erdschichten wegen ihrer inhomogenen Beschaffenheit nicht dar, immerhin zeigt aber diese Spezialisierung übersichtlich, was für Wellenarten prinzipiell möglich sind<sup>1)</sup>.

Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $(x, y, z)$  genügen die Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  des Vektors  $\mathbf{r}$  eines Teilchens aus seiner Gleichgewichtslage in einem homogenen Medium bei kleinen Amplituden folgender Gleichung

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathfrak{F} - b^2 \cdot \text{rot rot } \mathbf{r} + a^2 \text{ grad div } \mathbf{r} \quad (1^a)$$

- 
- 1) Todhunter, I., and Pearson, K., A history of the theory of elasticity. Cambridge 1886—1893.  
Wiechert, E., Über Erdbebenwellen. Gött. Nach., 1907. I. Teil: Theoretisches über die Ausbreitung der Erdbebenwellen.  
Love, A. E. H., Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. Leipzig und Berlin 1907, Kap. XIII. Die Ausbreitung von Wellen in elastisch festen Medien, p. 339 ff.  
Ders., Wave-motions with discontinuities at wavefronts. Proc. London Math. Soc., 2. Ser., p. 37—62, 1904.  
Ders., Some problems of geodynamics. Cambridge 1911.  
Galitzin, Fürst B., Vorlesungen über Seismometrie. Deutsche Bearbeitung von O. Hecker. Leipzig und Berlin 1914.  
Conrad, V., Dynamische Geologie. Enzykl. d. math. Wiss., 1925. Leipzig VI. 1. 11.  
Weber, R. H., u. Gans, R., Repertorium der Physik. Bd. 1. Leipzig und Berlin 1915.

Obenstehende Literatur ist für die mathematische Darstellung der folgenden Abschnitte zu Rate gezogen worden.

oder auch

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathfrak{F} + (a^2 - b^2) \text{grad div } \mathbf{r} + b^2 \mathcal{A} \mathbf{r} \quad (1^b)$$

geschrieben, wobei bezeichnet

die Dichte des Mediums  $\varrho$

Lamésche Konstanten  $\left. \begin{array}{l} \lambda \\ \mu \end{array} \right\}$

Fortpflanzungsgeschw. der longitudinalen Wellen  $v_l, a^2 = \varrho \cdot v_l^2 = \lambda + 2\mu$

Fortpflanzungsgeschw. der transversalen Wellen  $v_{tr}, b^2 = \varrho \cdot v_{tr}^2 = \mu$

die äußere Volumenkraft  $\mathfrak{F}$

Wendet man auf Gleichung (1) die *div*-Operation an, so wird (1)

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div } \mathbf{r} = \text{div } \mathfrak{F} + a^2 \text{div grad div } \mathbf{r} \quad (2)$$

da

$$\text{div rot } \mathbf{r} = 0$$

Unter Einführung der Bezeichnung  $\text{div } \mathbf{r} = \mathfrak{D}$ , wird (2) zu

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{D} = \text{div } \mathfrak{F} + a^2 \mathcal{A} \mathfrak{D} \quad (2^a)$$

Ebenso erhält man unter Bildung der *rot*-Operation von Gleichung (1)

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{rot } \mathbf{r} = \text{rot } \mathfrak{F} - \text{rot } b^2 \text{rot rot } \mathbf{r} \quad (3)$$

da

$$\text{rot grad } \mathbf{r} = 0$$

Schreibt man für

$$\text{rot } \mathbf{r} = \mathfrak{w}$$

so wird (3) zu

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{w} = \text{rot } \mathfrak{F} + b^2 \mathcal{A} \mathfrak{w} \quad (3^a)$$

Vernachlässigt man den Einfluß der äußeren Kräfte, so ergibt sich für 2<sup>a</sup> und 3<sup>a</sup> ein Gleichungstyp von der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (a^2/\varrho, b^2/\varrho) \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} \quad (4)$$

die man die „charakteristische Gleichung“ nennt. Ihre Lösungen stellen Wellen dar, die sich mit den Geschwindigkeiten  $v_l$  bzw.  $v_{tr}$  fortpflanzen. Die Zurückführung der Gleichung (1) auf zwei einzelne zeigt, daß in einem unendlichen homogenen elastischen Medium zwei Wellenarten möglich

1) Es bedeutet:

△ Laplacescher Operator, Gl. (1) schreibt sich in der Koordinatendarstellung

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_x + a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - b^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\}$$

sind: Dilatations- oder Longitudinalschwingungen (bei ihnen treten wegen ihrer Abhängigkeit von  $\text{div } r$  Volumenänderungen auf) mit der nach allen Seiten gleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \quad \text{s. Ullmer ... (5)}$$

und Transversal- oder Scherungswellen, die mit Drehungen verbunden sind, mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v_{tr} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (6)$$

In Gleichung (1) ist der Einfluß der äußeren Kräfte  $\mathfrak{F}$  vernachlässigt worden. Für unsere Fälle wollen wir  $\mathfrak{F}$  mit der Schwerkraft identifizieren. Es fragt sich, welche Wirkung man für (2<sup>a</sup>) und (3<sup>a</sup>) erhält. Da die Schwere sich von einem Potential  $P$  ableitet, hat man

$$\text{rot } P = 0,$$

somit ergibt sich ganz allgemein, daß die Geschwindigkeit der Scherungswellen von dem äußeren Schwerefeld unabhängig ist, ein Ergebnis, auf das Ullmer<sup>1)</sup> in seiner Allgemeingültigkeit hingewiesen hat. Die longitudinale Wellengeschwindigkeit kann in besonderen Fällen durch das Schwerefeld beeinflußt werden. Für unsere Untersuchungen soll im weiteren von dieser Komplikation abgesehen werden.

Ist das Medium jedoch anisotrop<sup>2)</sup>, so erhält man je nach dem Grade der Anisotropie noch einige Wellen mehr, die aber ihrem Charakter nach nicht so sauber geschieden sind. Die Gesteine in der Erdkruste haben höchstwahrscheinlich z. B. bei Streichen eine ausgezeichnete Richtung, die sich in der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit vom Azimut bemerkbar machen wird. Auch hier soll im Interesse der Einfachheit der Theorie von einer solchen Komplizierung abgesehen werden.

Bisher war für den allgemeinen Fall eines homogenen Mediums nur die „charakteristische Gleichung“ in ihrer Differentialform, ohne auf die Integraldarstellung ihrer Lösungen einzugehen, betrachtet worden. Im folgenden soll die Frage geprüft werden, ob in einem homogenen unbegrenzten Medium noch andere Wellengeschwindigkeiten und Wellenarten,

1) Ullmer, Karl, Die Verzerrungswellen in schweren Mitteln. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik, Bd. 6, 1926, p. 106—111.

2) Rudzki, M. P., Parametrische Darstellung der elastischen Wellen in anisotropen Medien. Bull. Acad. Cracovie, 1911, p. 503—536.

Ders., Sur la propagation d'une onde élastique superficielle dans un milieu transversalement isotrope. Ibid., 1912, p. 47—58.

Ders., Essai d'application du principe de Fermat aux milieu anisotrope. Ibid., 1913, p. 241—253.

wie eingangs gefunden, möglich sind. Die Lösungen für die „charakteristische Gleichung“ ist von Poisson und Kirchhoff<sup>1)</sup> für bestimmte Anfangswerte der Funktion  $\varphi$  in

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi \quad (7)$$

gelöst worden, wenn die Störung wirbel- bzw. dilatationsfrei ist<sup>2)</sup>. Man erhält die Verschiebungskomponenten für eine beliebige Zeit, wenn die Anfangswerte der Verschiebungen und ihre ersten Ableitungen bekannt sind. In einem Punkte  $P(x, y, z)$  (s. Fig. 1) sind zur Zeit

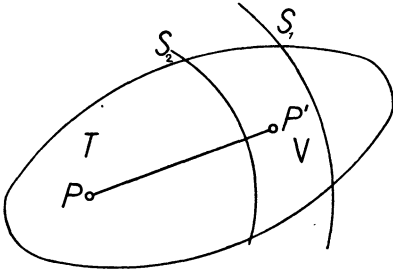


Fig. 1.

$t = 0$  die Anfangsverschiebungen  $u_0, v_0, w_0$ , ihre zugehörigen Anfangsgeschwindigkeiten  $u'_0, v'_0, w'_0$ . Diese Werte sind überall in dem Bereich  $T$  gegeben und verschwinden außerhalb dieses Bereiches.  $v_l$  und  $v_{lr}$  sind die schon bekannten Wellengeschwindigkeiten.  $V$  ist der Raum, der von den beiden mit  $v_l \cdot t$  bzw.  $v_{lr} \cdot t$  als Radius um  $P(x, y, z)$  beschriebenen Kugeln  $S_1$  bzw.  $S_2$  eingeschlossen wird.

$r$  ist der Abstand eines Punktes  $P'(x', y', z')$  in  $V$  von  $P(x, y, z)$ . Die Anfangsverschiebung  $q_0$  in  $P'$  auf die Richtung  $PP'$  projiziert ist dann

$$q_0 = \frac{1}{r} \left\{ (x' - x) \cdot u_0 + (y' - y) \cdot v_0 + (z' - z) \cdot w_0 \right\} \quad (8)$$

Die Verschiebung  $u$  in  $P$  zur Zeit  $t$  erhält man dann zu

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ (tu'_0 + u_0) \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + (tv'_0 + v_0) \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. + (tw'_0 + w_0) \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z} \right\} dV \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint \left\{ r(u_0 \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + v_0 \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y \partial x} + w_0 \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} (tq'_0 + q_0 + \frac{r \partial q_0}{\partial r}) \right\} dS_1 \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint \left\{ r(u_0 \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + v_0 \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y \partial x} + w_0 \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z}) + \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} (tq'_0 + q_0 + \frac{r \partial q_0}{\partial r}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{r^2} (tu'_0 + u_0 + \frac{r \partial u_0}{\partial r}) \right\} dS_2 \end{aligned} \quad (9)$$

1) Love, A. E. H., Lehrbuch, s. p. 1 d. A.

2) Ders., The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium. Proc. London Math. Soc. 2, I, 1904, p. 291—344.

wobei

$$\frac{r\partial u_o}{\partial r} = (x'-x) \frac{\partial u_o}{\partial x'} + (y'-y) \frac{\partial u_o}{\partial y'} + (z'-z) \frac{\partial u_o}{\partial z'} \quad (10)$$

und die Oberflächenintegrale nur über die innerhalb von  $T$  liegenden Teile von  $S_1$  bzw.  $S_2$  zu erstrecken sind. Ähnliche symmetrische Ausdrücke folgen für  $v$  und  $w$ . Die für ganz allgemeine Anfangsbedingungen erhaltenen Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ergeben bei einer eingehenden Diskussion, daß in einer so großen Entfernung von  $T$ , für die man den Bereich als punktförmig auffassen kann, die Bewegung sich durch zwei Wellen im wesentlichen darstellen läßt. Die erste Wellenbewegung ist rein longitudinaler Natur, ihre Geschwindigkeit beträgt  $v_l$ . Der zweite Wellenzug mit der Laufgeschwindigkeit  $v_{tr}$  hat rein transversalen Charakter. Die Bewegung zwischen den beiden Wellenzügen ist nur schwach und muß, wie Love sehr einfach zeigt, den Charakter der wirbelfreien Bewegung in einer inkompressiblen Flüssigkeit haben. Berücksichtigt man noch die Ausdehnung des Bereiches  $T$  gegenüber dem Abstand des Empfängers von  $P$ , so erhält man, falls die beiden Wellenzüge getrennt sind, sowohl für die longitudinale wie für die transversale Bewegung eine Rückenfront<sup>1)</sup>, die sich ebenfalls mit der entsprechenden konstanten Geschwindigkeit bewegt.

In der Nähe einer Störungsquelle ist selbstverständlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle in den einzelnen Azimuten von der Form des Herdes abhängig<sup>2)</sup>. Die Wellen streben jedoch danach, kugelförmige Ausbreitung anzunehmen, so daß im Unendlichen wiederum überall eine konstante Geschwindigkeit herrscht.

Das Ergebnis des vorangehenden Abschnittes läßt sich dahin zusammenfassen, daß in einem homogenen unendlichen elastischen Medium ganz unabhängig von den Anfangsbedingungen nur zwei konstante Wellengeschwindigkeiten möglich sind, die der longitudinalen bzw. transversalen Wellenart entsprechen. Lediglich eine der wirbelfreien Bewegung in einer inkompressiblen Flüssigkeit analoge Wellengattung kann in einem solchen unbegrenzten Medium noch entstehen.

Eine weitere Voraussetzung über das elastische Medium war seine Homogenität. Dieser Punkt soll jetzt fallen gelassen werden, um die Grenzbedingungen an einer Unstetigkeitsfläche zu geben. Zum Studium des Verhaltens einer Welle an der Grenzfläche zwischen zwei elastisch ver-

1) Das plötzliche, gut definierte Abbrechen der Hauptphase bei Angenheister ließe sich entsprechend den obigen Ausführungen als Rückenfront einer Welle deuten. G. Angenheister, Beobachtungen bei Sprengungen. Zeitschr. f. Geophysik, 1927, III, 1, p. 28—33.

2) Sezawa, K., Dilatational and distorsional waves generated from a cylindrical or a spherical origin. Bull. Earthquake Research Institute, II, 1927, p. 13—20, 29—48.

schiedenen Medien wird der Einfachheit halber eine ebene longitudinale bzw. transversale, zeitlich periodische Welle gewählt. An der Grenzfläche erhält man folgende Bedingungen:

1. Die beiderseitigen normalen und tangentiellen Verschiebungen längs der Grenzfläche sind gleich;
2. die beiderseitigen normalen und tangentiellen Spannungen längs der Grenzfläche sind gleich.

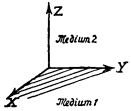


Fig. 2.

Im allgemeinen entstehen in einem isotropen Medium beim Einfall einer longitudinalen (transversalen) Welle vier neue Wellen, nämlich eine reflektierte longitudinale (transversale) und eine reflektierte transversale (longitudinale) Welle im Medium I und eine durchgehende longitudinale (transversale) und eine durchgehende transversale (longitudinale) Welle im Medium II. Die Brechungs- und Reflexionswinkel der einzelnen Wellenanteile sind nach dem *sin*-Gesetz gegeben. Die Größe der verschiedenen Teilamplituden erhält man, indem die Werte

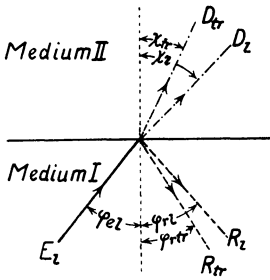


Fig. 3. Einfallende Longitudinalwelle an einer elastischen Grenzfläche.

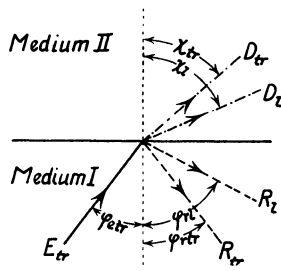


Fig. 4. Einfallende Transversalwelle an einer elastischen Grenzfläche.

für eine ebene Welle in die Grenzbedingungen eingesetzt werden. Bezeichnet die  $x, y$ -Ebene die Grenzfläche (Fig. 2) und ist die  $x, z$ -Ebene gleichzeitig Einfallsebene, so lauten die Grenzbedingungen

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_2 & \lambda_1 \vartheta_1 + 2 \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} &= \lambda_2 \vartheta_2 + 2 \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} \\
 v_1 &= v_2 \text{ für } z = 0 & \mu_1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right\} &= \mu_2 \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right\} \\
 w_1 &= w_2 & \mu_1 \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right\} &= \mu_2 \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Die Einfallswinkel seien  $\varphi_e$ , die Reflexionswinkel  $\varphi_r$ , die Brechungswinkel  $\chi$ ; die einzelnen Strahlwinkel sind dann gegeben durch (Fig. 3 u. 4)



$$\begin{array}{l} \frac{\sin \varphi_{el}}{\sin \varphi_{rl}} = 1 \quad \frac{\sin \varphi_{el}}{\sin \varphi_{rtr}} = \frac{V_{1l}}{V_{1tr}} \quad \frac{\sin \varphi_{el}}{\sin \chi_{tl}} = \frac{V_{1l}}{V_{2l}} \quad \frac{\sin \varphi_{el}}{\sin \chi_{tr}} = \frac{V_{1l}}{V_{2tr}} \\ \frac{\sin \varphi_{etr}}{\sin \varphi_{rtr}} = 1 \quad \frac{\sin \varphi_{etr}}{\sin \varphi_{rl}} = \frac{V_{1tr}}{V_{1l}} \quad \frac{\sin \varphi_{etr}}{\sin \chi_{tr}} = \frac{V_{1tr}}{V_{2tr}} \quad \frac{\sin \varphi_{etr}}{\sin \chi_{tl}} = \frac{V_{1tr}}{V_{2l}} \end{array} \quad (12)$$

Hat man eine einfallende plane longitudinale Welle mit der Amplitude  $E_l$ , so ergibt sich für die einzelnen resultierenden Wellenkomponenten

reflektierte Longitudinalwelle  $R_l$   
 reflektierte Transversalwelle  $R_{tr}$   
 durchgehende Longitudinalwelle  $D_l$   
 durchgehende Transversalwelle  $D_{tr}$

folgendes lineares Gleichungssystem<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} & -\sin \varphi_l \cdot R_l + \cos \varphi_{tr} \cdot R_{tr} - \sin \chi_l \cdot D_l + \cos \chi_{tr} \cdot D_{tr} = -E_l \sin \varphi_l \\ & + \cos \varphi_l \cdot R_l + \sin \varphi_{tr} \cdot R_{tr} - \cos \chi_l \cdot D_l - \sin \chi_{tr} \cdot D_{tr} = -E_l \cos \varphi_l \\ & -\sin 2\varphi_l \cdot R_l + \frac{v_{1l}}{v_{1tr}} \cdot \cos 2\varphi_{tr} \cdot R_{tr} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \left( \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \right)^2 \frac{v_{1l}}{v_{2l}} \cdot \sin 2\chi_l \cdot D_l \\ (13) \quad & - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \left( \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \right)^2 \cdot \frac{v_{1l}}{v_{2l}} \cos 2\chi_{tr} \cdot D_{tr} = +E_l \sin 2\varphi_l \\ & + \cos 2\varphi_{tr} \cdot R_l + \frac{v_{1tr}}{v_{1l}} \sin 2\varphi_{tr} \cdot R_{tr} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{v_{2l}}{v_{1l}} \cdot \cos 2\chi_l \cdot D_l \\ & + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{1l}} \sin 2\chi_{tr} \cdot D_{tr} = E_l \cos 2\varphi_{tr} \end{aligned}$$

Für eine einfallende Transversalwelle, die in der Einfallsebene schwingt, bekommt man folgendes System

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{tr} \cdot R_{tr} - \sin \varphi_l \cdot R_l + \cos \chi_{tr} \cdot D_{tr} - \sin \chi_l \cdot D_l &= + \cos \varphi_{tr} E_{tr} \\ \sin \varphi_{tr} \cdot R_{tr} + \cos \varphi_l \cdot R_l - \sin \chi_{tr} \cdot D_{tr} - \cos \chi_l \cdot D_l &= - \sin \varphi_{tr} E_{tr} \\ \cos \varphi_{tr} \cdot R_{tr} - \frac{v_{1tr}}{v_{1l}} \sin 2\varphi_l \cdot R_l - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \cos 2\chi_{tr} \cdot D_{tr} \\ &+ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{2l}} \sin 2\chi_l \cdot D_l = -2\varphi_{tr} E_{tr} \\ \sin 2\varphi_{tr} \cdot R_{tr} + \frac{v_{1l}}{v_{1tr}} \cos 2\varphi_{tr} \cdot R_l + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \sin 2\chi_l \cdot D_{tr} \\ &+ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{v_{2l}}{v_{1tr}} \cos 2\chi_{tr} \cdot D_l = + \sin 2\varphi_{tr} E_{tr} \end{aligned} \quad (14)$$

1) Dieses Gleichungssystem wurde zuerst bewußt für seismische Zwecke von G. Knott gegeben, die späteren Literaturangaben sind mit aufgezählt. Die obige Darstellung folgt den Arbeiten von Berger und Zöprritz. — Knott, C. G., Reflexion and refraction of elastic waves with seismological applications. Phil. Mag., 1899. — Drude, P., Über die Reflexion und Brechung von Schallwellen an der Grenze zweier isotroper, mit innerer Reibung behafteter Medien. Wied. Ann., 1890, 41, 759. —

Schwingt die einfallende Transversalwelle senkrecht zur Einfallsebene, so erhält man die folgenden einfachen Relationen, da aus Symmetriegründen keine longitudinalen Wellen auftreten.

$$R_{tr} = E_{tr} \cdot \frac{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \cdot \frac{\cos \chi_{tr}}{\cos \varphi_{tr}}}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \cdot \frac{\cos \chi_{tr}}{\cos \varphi_{tr}}} \quad D_{tr} = E_{tr} \cdot \frac{2}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}} \cdot \frac{\cos \chi_{tr}}{\cos \varphi_{tr}}} \quad (15)$$

Die Lösungen für die einzelnen Systeme lassen sich, wenn nicht gerade ein vereinfachender Sonderfall vorliegt, am bequemsten auch numerisch mit Determinanten-Operationen ausführen.

Einen Überblick über den Einfluß der Energieverteilung an Grenzflächen erhält man ohne große mathematische Schwierigkeiten für den senkrechten Einfall der jeweiligen Welle. Die beiden Systeme (13) und (14) gehen über in für eine

senkrecht einfallende Longitudinalwelle

$$\varphi_l = 0$$

$$R_l = E_l \cdot \frac{1 - x}{1 + x} \quad (16)$$

$$D_l = E_l \cdot \frac{2}{1 + x}$$

senkrecht einfallende Transversalwelle

$$\varphi_{tr} = 0$$

$$R_{tr} = E_{tr} \cdot \frac{1 - y}{1 + y} \quad (17)$$

$$D_{tr} = E_{tr} \cdot \frac{2}{1 + y}$$

wo

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{v_{2l}}{v_{1l}} \quad , \quad y = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{v_{2tr}}{v_{1tr}}$$

Die den einzelnen Komponenten  $R$  bzw.  $D$  entsprechenden Energien in Abhängigkeit von  $x$  bzw.  $y$  sind in Fig. 5 graphisch dargestellt.

Zunächst zeigen die obigen Formeln, daß bei senkrechtem Einfall einer Welle nur reflektierte und durchgehende Wellen von demselben Charakter entstehen können. Für die relativen Amplitudenanteile kommen nur die Verhältniswerte der einzelnen Gesteinskonstanten in Betracht. Weiterhin ergibt sich aus der graphischen Darstellung (Fig. 5) ein Über-

Berger, R. Über die Schalldurchlässigkeit. Diss. München 1911. — Zöppritz, K., Erdbebenwellen VII b Gött. Nachr. 1919. p. 66—84. Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen.

blick, wie viel Energie man in ein geschichtetes Medium bei künstlichen Erschütterungen hineinsenden kann, und wie geringe Energiebeträge bei elastisch wenig verschiedenen Gesteinen ( $x \approx 1$ ,  $y \approx 1$ ) durch Reflexionen wieder zurückerhalten werden. Die Zahl  $x$  bezeichnet man in der Akustik auch als „Schallhärte“. Der absolute Betrag von  $R_l^2$  bzw.  $R_{tr}^2$  ist unabhängig davon, ob man  $x$  oder  $1/x$  bzw.  $y$  oder  $1/y$  nimmt.

Wie wohl zuerst ausführlich Wiechert<sup>1)</sup> zeigte, geben die Formeln (13, 14) für die Reflexion der Wellen an der Oberfläche (Medium II Luft) uns einen Aufschluß über den Zusammenhang der Apparateaufzeichnung mit der Bodenbewegung. Trifft eine Welle gegen die Oberfläche, so wird sie unter ihrem Einfallswinkel wieder reflektiert, gleichzeitig entsteht noch eine Welle von anderem Charakter, deren Winkel sich nach (12) berechnet. Die von unserem Instrument angezeigte Bodenbewegung ist die Resultierende aus diesen drei Komponenten, die man schwerlich einzeln messen kann. Den Winkel, unter dem die betreffende Welle einfällt, kann man messen, und es sollen im folgenden die bekannten Relationen für den „wahren und scheinbaren“ Emergenzwinkel für eine einfallende Longitudinalwelle gegeben werden.

Wahrer Emergenzwinkel  $e$   
scheinbarer Emergenzwinkel  $e'$

$$\frac{\text{horizontale Bodenbewegung}}{\text{vertikale Bodenbewegung}} = \operatorname{tg} e'$$

$$\cos e = \frac{v_l}{v_{tr}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin^2 e}{2}} \quad (18)$$

Die übrigen Formeln sind bei Wiechert gegeben. Die Formel (18) ist in Fig. 6 für verschiedene Werte von  $\eta = v_l/v_{tr}$ , die sich in der Wirklichkeit um den Wert  $\eta \approx \sqrt{3}$  bewegen sollen, graphisch dargestellt. Man sieht, daß der Unterschied zwischen  $e$  und  $e'$  mit wachsendem Winkel abnimmt.

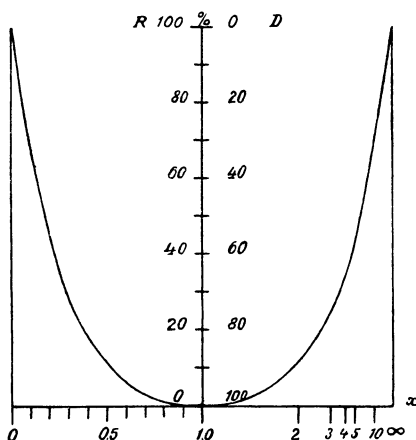


Fig. 5. Reflektierte bzw. durchgehende Energie einer ebenen Welle an einer elastischen Grenzfläche.  $R = \left(\frac{I-x}{I+x}\right)^2$ ;  
 $D = \frac{4x}{(I+x)^2}$

1) Wiechert, E., Über Erdbebenwellen. Gött. Nachr. 1907. I. Teil: Theoretisches über die Ausbreitung der Erdbebenwellen.

Die Bedeutung der Formeln (12) bis (15), die das Verhalten einer ebenen Welle an einer Grenzfläche beschreiben, liegt darin, daß sie uns erlauben, unter einfachen Voraussetzungen die nötigen theoretischen Relationen für experimentelle Versuche zu liefern, wie im zweiten Teil der Arbeit für ein einfach geschichtetes Medium gezeigt wird.

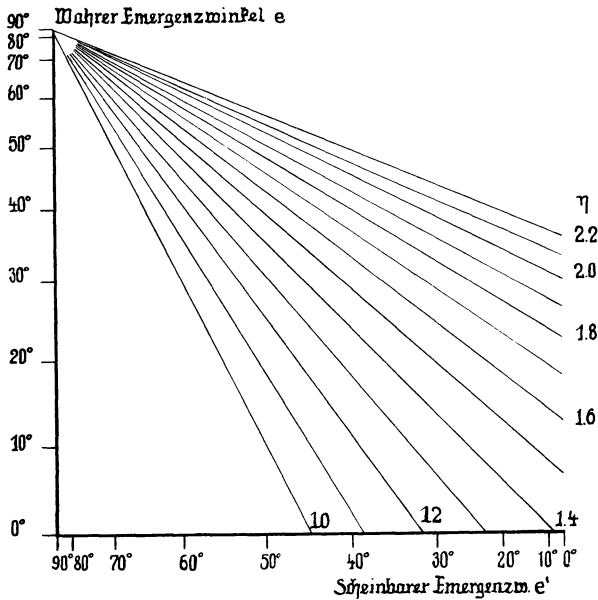


Fig. 6. Wahrer und scheinbarer Emergenzwinkel in Abhängigkeit von  $v/v_{tr}$ .

## 2. Gebundene Wellen im elastischen unendlichen Halbraum.

Gegenüber der Wellenbetrachtung im unendlichen Raume, die allgemeinere Ergebnisse lieferte, sollen im folgenden spezielle Probleme behandelt werden, bei denen die Grenzflächen eine besondere Rolle spielen und die ihrerseits mehr den tatsächlichen Verhältnissen an der Erdoberfläche Rechnung tragen. Die Aufgabe lautet, zu untersuchen, ob durch die Schichtung des Mediums noch neue sogenannte gebundene Wellenarten entstehen können. Zunächst wird das Beispiel des unendlichen elastischen Halbraumes gegeben mit seiner weiteren Behandlung durch Lamb<sup>1)</sup>. Die so gefundenen Oberflächenwellen befriedigen aber wegen ihrer sehr weit abstrahierenden Voraussetzungen die experimentellen Tatsachen nicht, weil sie theoretisch keine Dispersion ergeben. Erst das Ein-

1) Lamb, Horace, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Philosophical Transactions, Ser. A Vol. 203, 1904, p. 1—42.

führen einer Deckschicht, die über dem unendlichen Halbraum gelagert ist, ergab Wellentypen mit Dispersion, die den experimentellen Verhältnissen hinsichtlich ihrer Voraussetzungen über das Medium näher kommen dürften.

Zur Ableitung der an die Oberfläche gebundenen Wellen, Rayleighwellen<sup>1)</sup> nach ihrem Entdecker genannt, läßt man das elastische Medium nur den unendlichen Halbraum erfüllen. Es gelten wiederum für  $u, v, w$  die Gleichungen (1). Als Grenzfläche gegen Luft (s. Fig. 7) wird die  $x, y$ -Ebene angenommen. Vorausgesetzt wird, daß die an die Oberfläche gebundenen Schwingungen nur wenig in das Medium eindringen, so daß ihre Amplitude mit der Tiefe (hier  $z$ ) schnell abklingt. Die Zeitform der Welle ist periodisch, aus mathematischen Gründen erhält der Zeitfaktor die Form  $e^{ipt}$ , wo  $p = 2\pi/T$ , wenn  $T$  die Periode der Schwingung ist. Die Verschiebungskomponenten erhalten einen Ausdruck von der Form

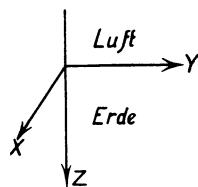


Fig. 7.

$$u = \left\{ Ae^{-\sqrt{f^2 - \frac{p^2}{v_l^2} + i(gx + hy)}} + Be^{-\sqrt{f^2 - \frac{p^2}{v_{tr}^2} + i(gx + hy)}} \right\} e^{ipt}$$

Zu der Gleichung (1) kommen noch die Bedingungen an der Oberfläche hinzu, daß die normale und tangential Spannung verschwinden muß, also

$$\left. \begin{aligned} \lambda \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} &= 0 \\ \mu \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } z = 0 \quad (20)$$

Zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V_R$  erhält man folgende Gleichung

$$\left(\frac{V_R}{v_{tr}}\right)^3 - 8\left(\frac{V_R}{v_{tr}}\right)^2 + 8\left[3 - 2\left(\frac{v_{tr}}{v_l}\right)^2\right]\left(\frac{V_R}{v_{tr}}\right) - 16\left(1 - \left(\frac{v_{tr}}{v_l}\right)^2\right) = 0 \quad (21)$$

Die reellen Wurzeln dieser Gleichung in Abhängigkeit von  $\frac{v_{tr}}{v_l} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}}$  bzw. der Poissonschen Konstanten  $\sigma$  zeigt Fig. 8. Da als wesentliche Voraussetzung der neuen Welle war, daß man ein Amplitudengefälle mit der Tiefe  $z$  hat, so darf man hier nur die eine reelle Wurzel, die durch den

1) Lord Rayleigh, Scientific Papers, Vol. 2, p. 441—447. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.

unteren Kurvenast in Fig. 8 verkörpert ist und eine Oberflächenwellengeschwindigkeit  $V_R < v_{tr}$  ergibt, benutzen. Macht man sich jedoch von der obigen Bedingung frei, so erhält man noch zwei verschiedene Wellen gemäß der Ullerschen Arbeit<sup>1)</sup>. Ein weiteres besonderes Merkmal der Rayleighwellen ist das Verhältnis ihrer Horizontalkomponente zu ihrer Vertikalkomponente. Es ist

$$\frac{w}{u} = \frac{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{V_R}{v_{tr}} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{V_R}{v_{tr}} \right)^2}} \quad (22)$$

für die oben ausgewählte Wurzel erhält man einen Wert von  $\frac{w}{u}$  zwischen

1,27—1,85, d. h. die Vertikalkomponente ist stets größer als die Horizontalkomponente, und zwar nur für diejenige Oberflächenwelle, deren Geschwindigkeit etwas kleiner als die der Transversalwelle in dem entsprechenden Medium ist.

In einer mathematisch äußerst eleganten Arbeit hat Lamb<sup>2)</sup> die Aus-

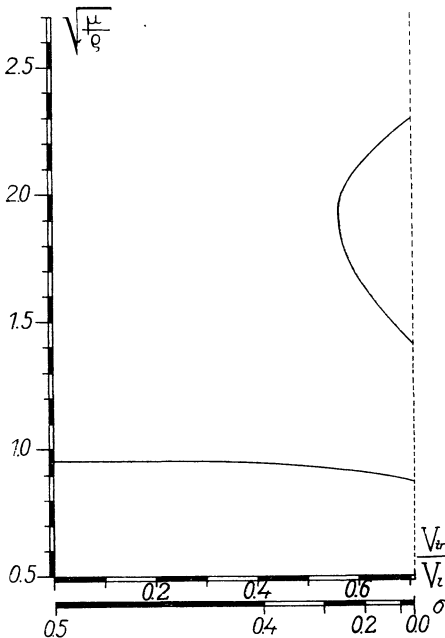


Fig. 8. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Rayleighwellen in Abhängigkeit von  $\sigma$  bzw.  $\frac{v_{tr}}{v_l}$

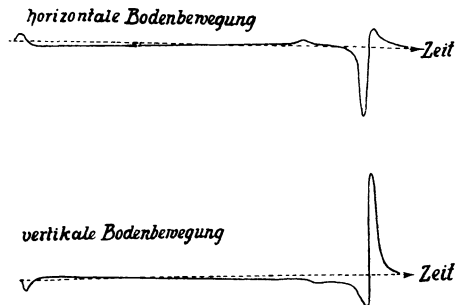


Fig. 9. Die zeitliche Bodenbewegung an der Oberfläche des unendlichen Halbraumes bei einem Stoß nach Lamb.

breitung einer zeitlich begrenzten Störung längs der Oberfläche des elastischen Halbraumes untersucht. Er erhält für einen Punkt der Oberfläche bei einem plötzlichen Impuls in größerer Ferne von der Quelle den in Fig. 9 wiedergegebenen Kurvenverlauf. Die Kurven zeigen je drei Ein-

1) Uller, K., Elastische Oberflächen-Planwellen. Ann. d. Physik, IV, Bd. 56, 1918, p. 463—496.

2) Lamb, H., a. a. O., p. 10 d. A.

sätze, die der longitudinalen, transversalen und Rayleighwellenart entsprechen. Auffallend ist, daß der Bewegungscharakter für eine impulsförmige Anregung nicht oszillatorisch ist.

Der Einfluß der Schwerkraft auf die Rayleighwellen ist von Bromwich<sup>1)</sup> untersucht worden und als sehr klein gefunden.

Das Ergebnis der neuen Annahme läßt sich dahin zusammenfassen: an Grenzflächen ist noch eine neue gebundene Wellenart möglich (nach Uller sogar drei), deren Geschwindigkeit etwas kleiner als die der Transversalen ist und deren Teilchen Ellipsen beschreiben, so daß die Vertikalkomponente stets größer als die horizontale ist.

Die bisher betrachteten Wellen waren dadurch gekennzeichnet, daß sie eine konstante Geschwindigkeit besitzen, die nur von den betreffenden Materialkonstanten abhängt, nicht aber auch von der Wellenlänge und den Dimensionen des Mediums. Ein weiterer Schritt zu neuen Wellentypen wurde durch die Arbeit von Love<sup>2)</sup> getan, der

zuerst bewußt ein geschichtetes Medium behandelte. Über dem unendlichen Halbraum befindet sich eine Deckschicht von der Dicke  $H$  und so, daß  $v_{1tr} < v_{2tr}$ . Es sollen dann in dieser Deckschicht Schwingungen vorhanden sein, die quer zur Fortpflanzungsrichtung verlaufen und die keine Vertikalkomponente zeigen. Gemäß den Bezeichnungen nach Fig. 10 ist die Verschiebung  $v$  (senkrecht zur  $x$ -Richtung)

$$v = \left\{ A \cdot \cos \frac{\lambda z}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\pi v_{1tr}}\right)^2 - 1} + B \sin \frac{\lambda z}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\pi v_{1tr}}\right)^2 - 1} \right\} \cdot \cos 2\pi \left[ \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right] \quad (23)$$

wo  $T$  die Periode der Schwingung und  $\lambda$  deren Wellenlänge ist. Die „Querwelle“ soll aus energetischen Gründen im zweiten Medium schnell abklingen, ihre Form ist

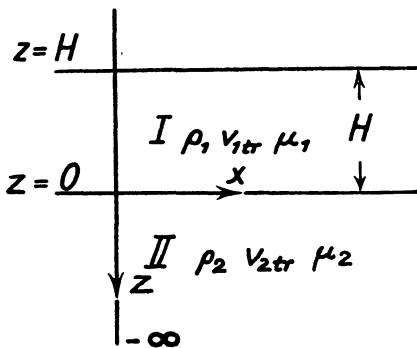


Fig. 10. Unendlicher Halbraum mit einer Deckschicht.

1) Bromwich, T. J. J. A., On the influence of gravity on elastic waves and, particular, on the vibrations of an elastic globe. Proc. of Lond. Math. Soc., Vol. 30, 1890, p. 98—120.

2) Love, a. a. O., Some problems of geodynamics, Chapter XI.

$$v = Ce^{\frac{2\pi}{\lambda z} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi v_{2tr}}\right)^2}} \cdot \cos 2\pi \left[ \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right] \quad (24)$$

Berechnet man sich mit diesen Formeln die entsprechenden Grenzbedingungen, so erhält man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V_Q$  dieser Querwellen folgende Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{H}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{V_Q}{v_{1tr}}\right)^2 - 1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \left(\frac{V_Q}{v_{1tr}}\right)^2}{\left(\frac{V_Q}{v_{1tr}}\right)^2 - 1}} \quad (25)$$

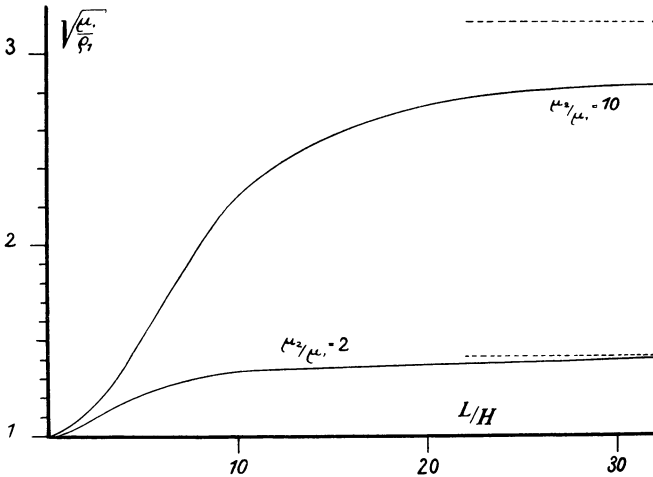


Fig. 11. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Querwellen in Abhängigkeit von  $\frac{\mu_2}{\mu_1}$  und  $\frac{L}{H} = \frac{\text{Wellenlänge}}{\text{Schichtdicke}}$

In beistehender Figur 11 ist für verschiedene Werte von  $\frac{\mu_2}{\mu_1}$  bei gleichen Dichten beider Medien der Verlauf der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V_Q$  in Abhängigkeit von  $\lambda/H$  für die Knotenebene nullter Ordnung gezeichnet.  $V_Q$  bewegt sich je nach der Wellenlänge  $\lambda$  und Schichtdicke  $H$  zwischen den beiden Werten  $v_{1tr}$  und  $v_{2tr}$ . Diesem Werte streben die  $V_Q$  für  $\lambda/H \sim \infty$  asymptotisch zu. Das Hauptmerkmal dieser Schwingungen ist neben ihrem transversalen Charakter und der quer zur Fortpflanzungsrichtung sich befindenden Schwingungsrichtung eine normale Dispersion, da ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Wellenlänge zunimmt.



E. Meißner<sup>1)</sup> zeigte dann später, daß Querwellen auch ganz allgemein in einem Medium möglich sind, wenn nur die elastischen Eigenschaften sich stetig mit der Tiefe ändern. Er gibt in seiner neuesten Arbeit einen mathematisch eleganten Überblick über die numerisch lösbaren Fälle.

Es lag sehr nahe, die Untersuchungen über die Oberflächenwellen auch auf ein Medium mit einer Deckschicht auszu-dehnen. Der erste Versuch stammt von Bromwich<sup>2)</sup>, die weiteren Arbeiten von Love<sup>3)</sup> und Sezawa<sup>4)</sup>. Die Ergebnisse in ihrer Allgemeinheit lassen sich nicht voll diskutieren, da die Bestimmungsgleichungen für die Wellengeschwindigkeit sehr kompliziert werden. Im folgenden sei ein kurzer mathematischer Abriß für das ebene zweidimensionale Problem gegeben. Die Konstanten der Deckschicht seien  $\mu_1, \lambda_1, \rho_1$ , die des übrigen Halbraumes  $\mu, \lambda, \rho$ . Die Lage des Koordinatensystems ergibt sich aus der Fig. 12. Für die Verschiebungen  $r_i$  gelten zunächst die Gleichung (1)

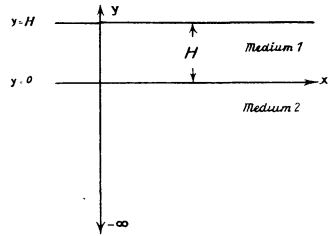


Fig. 12. Unendlicher Halbraum mit einer Deckschicht.

$$\rho_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} = (\lambda_i + \mu_i) \cdot \text{grad div } r_i + \mu_i \Delta r_i$$

Die Lösung wird

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \Delta \varphi \quad (26)$$

wo

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \Delta \psi$$

Bezeichnet man mit  $\frac{2\pi}{p}$  die Periode und mit  $\frac{2\pi}{f}$  die Wellenlänge der Welle,

1) Meißner, E., Elastische Oberflächenwellen mit Dispersion in einem inhomogenen Medium. Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. Zürich, Bd. 66, 1921, S. 181—195. — Ders., Elastische Oberflächen-Querwellen. Verhandl. d. 2. internat. Kongr. f. techn. Mechanik, 1926, S. 3—11.

2) Bromwich, a. a. O., p. 13 d. A.

3) Love, a. a. O., p. 13 d. A.

4) Sezawa, Katsutada, On the propagation of Rayleigh-waves on plane and spherical surfaces. Bull. Earthquake Research Institute, Vol. 2, 1927, p. 21—28. Ders., Dispersion of elastic waves propagated on the surface of stratified bodies and on curved surfaces. Ibid., Vol. 3, 1927, p. 1—15.

5)  $\omega$  ist die charakteristische Funktion für longitudinale,  $\psi$  für transversale Wellen.

so gelten folgende Ansätze für

Medium I

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \{C \cdot \text{Sin } r_1 y + D \cdot \text{Cos } r_1 y\} \cdot e^{i(pt - fx)} \\
 \psi_1 &= \{E \cdot \text{Sin } s_1 y + F \cdot \text{Cos } s_1 y\} \cdot e^{i(pt - fx)} \\
 r_1^2 &= f^2 - h_1^2 & h_1^2 &= p^2 \varrho_1 / (\lambda_1 + 2\mu_1) \\
 s_1^2 &= f^2 - k_1^2 & k_1^2 &= p^2 \varrho_1 / \mu_1 \\
 u_1 &= \{-if [C \cdot \text{Sin } r_1 y + D \cdot \text{Cos } r_1 y] + s_1 [E \cdot \text{Cos } s_1 y \\
 &\quad + F \cdot \text{Sin } s_1 y]\} e^{i(pt - fx)} \\
 v_1 &= \{r_1 [C \cdot \text{Cos } r_1 y + D \cdot \text{Sin } r_1 y] + if [E \cdot \text{Sin } s_1 y \\
 &\quad + F \cdot \text{Cos } s_1 y]\} e^{i(pt - fx)}
 \end{aligned} \tag{27}$$

Medium II

$$\begin{aligned}
 \varphi &= A e^{ry} \cdot e^{i(pt - fx)} \\
 \psi &= B e^{sy} \cdot e^{i(pt - fx)} \\
 r^2 &= f^2 - h^2 & h^2 &= p^2 \varrho / (\lambda + 2\mu) \\
 s^2 &= f^2 - k^2 & k^2 &= p^2 \varrho / \mu \\
 u &= \{-if A e^{ry} + s B e^{sy}\} \cdot e^{i(pt - fx)} \\
 v &= \{r A e^{ry} + if B e^{sy}\} \cdot e^{i(pt - fx)}
 \end{aligned} \tag{27^a)$$

Die einzelnen zu erfüllenden Grenzbedingungen sind:

1.  $u_1 = u$
2.  $v_1 = v$  für  $z = 0$
3.  $\lambda_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$
4.  $\mu_1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} = \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\}$  (28)
5.  $\lambda_1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} + 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$
6.  $\mu_1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} = 0$  } für  $z = +H$

Führt man die obigen Werte für die Verrückungen in die Grenzbedingungen (28) 1.—6. ein, so erhält man die folgenden sechs Bestimmungsgleichungen für  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$

	A	B	C	D	E	F	
1.	-if	+s	0	if	-s <sub>1</sub>	0	= 0
2.	+r	+if	-r <sub>1</sub>	0	0	-if	= 0
3.	2f <sup>2</sup> -k <sup>2</sup>	+2ifs	0	- $\frac{\mu_1}{\mu}(2f^2-k_1^2)$	-2i $\frac{\mu_1}{\mu}fs_1$	0	= 0
29) 4.	-2ifr	+2f <sup>2</sup> -k <sup>2</sup>	2i $\frac{\mu_1}{\mu}fr_1$	0	0	- $\frac{\mu_1}{\mu}(2f^2-k_1^2)$	= 0
5.	0	0	(2f <sup>2</sup> -k <sub>1</sub> <sup>2</sup> ) $\mathfrak{S}\sin r_1 H$	(2f <sup>2</sup> -k <sub>1</sub> <sup>2</sup> ) $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\{r_1 H$	2ifs <sub>1</sub> $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\{s_1 H$	2ifs <sub>1</sub> $\mathfrak{S}\sin s_1 H$	= 0
6.	0	0	-2ifr <sub>1</sub> $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\{r_1 H$	-2ifr <sub>1</sub> $\mathfrak{S}\sin r_1 H$	(2f <sup>2</sup> -k <sub>1</sub> <sup>2</sup> ) $\mathfrak{S}\sin s_1 H$	(2f <sup>2</sup> -k <sub>1</sub> <sup>2</sup> ) $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\{s_1 H$	= 0

Da man es mit einem linearen homogenen Gleichungssystem zu tun hat, so erhält man die „Geschwindigkeitsgleichung“ für die möglichen Wellen in ihrer Abhängigkeit von den elastischen Konstanten beider Medien und der Dicke der Deckschicht, indem man die Determinante aus den Koeffizienten der sechs Unbekannten verschwinden läßt, und gelangt so zu einer analogen Gleichung wie Sezawa. Die Determinante von der sechsten Ordnung läßt sich in eine vierter Ordnung überführen, die lautet:

$$\begin{vmatrix}
 r_1(2f^2 a - k^2) & r(2f^2 a + k^2) & 2ifrs_1 a & 2if^3 a \\
 -2ifs r_1 a & -2if^3 a & s_1(2f^2 a - k^2) & s(2f^2 a + k^2) \\
 (2f^2 - k_1^2) \mathfrak{S}\sin r_1 H & (2f^2 - k_1^2) \mathfrak{C}\mathfrak{O}\{r_1 H & 2if s_1 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\{s_1 H & 2if s_1 \mathfrak{S}\sin s_1 H \\
 -2ifr_1 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\{r_1 H & -2ifr_1 \mathfrak{S}\sin r_1 H & (2f^2 - k_1^2) \mathfrak{S}\sin s_1 H & (2f^2 - k_1^2) \mathfrak{C}\mathfrak{O}\{s_1 H
 \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

wo  $a = 1 - \frac{\mu_1}{\mu}$

Das Verhältnis der vertikalen Amplitude zur horizontalen an der Oberfläche ergibt sich nach einer leichten Umformung aus

$$\begin{aligned}
 u_{1z=H} &= -\frac{k_1^2 s_1}{2f^2 - k_1^2} \cdot (E \mathfrak{C}\mathfrak{O}\{s_1 H + F \mathfrak{S}\sin s_1 H) \\
 v_{1z=H} &= \frac{ik_1^2}{2f} \cdot (E \mathfrak{S}\sin s_1 H + F \mathfrak{C}\mathfrak{O}\{s_1 H)
 \end{aligned} \quad (31a)$$

zu

$$-\left(\frac{v_1}{u_1}\right)_{z=H} = i \frac{1 - \frac{k_1^2}{2f^2}}{\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{f^2}}} \cdot \frac{E \cdot \mathfrak{T}\text{ang } s_1 H + F}{E + F \cdot \mathfrak{T}\text{ang } s_1 H} \quad (31b)$$

Wird die Dicke  $H$  der Schicht sehr groß, so daß man  $\mathfrak{T}\text{ang } s_1 H \approx 1$  setzen kann, so erhält man, wie eigentlich vorauszusehen, die schon bekannten Rayleighwellen, da

$$-\left(\frac{v_1}{u_1}\right)_{z=H} = i \frac{1 - k_1^2/2f^2}{\sqrt{1 - k_1^2/f^2}} \quad (32)$$

derselbe absolute Faktor ist wie in Formel (22). Für die Geschwindigkeit  $f/k_1$  ergibt sich aus 5. und 6. in (29)

$$4f^2 r_1 s_1 = (2f^2 - k_1^2)^2$$

da man für die großen Argumente  $s_1 H$  und  $r_1 H$  die dortigen hyperbolischen Funktionen näherungsweise einander gleichsetzen darf.

Es soll an dieser Stelle auf keine nähere Diskussion der Gleichung (30) eingegangen werden, deren Typus in der beigegebenen Fig. 13 allgemein angedeutet ist. Das wesentliche Moment ist, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge und Schichtdicke, wie in Fig. 13 dargestellt, abhängt, ohne daß der monotone Funktionsverlauf gestört wird, d. h. die  $V$ -Werte bewegen sich nur zwischen den beiden Oberflächengeschwindigkeitswerten, die den beiden Medien entsprechen.

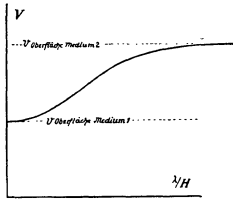


Fig. 13, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der gebundenen Welle in einem zweischichtigen Medium.

Anschließend sollen noch die Frequenzgleichungen für die Eigenschwingungen einer unendlichen ebenen Platte kurz gegeben werden, da bei der Besprechung der experimentellen Ergebnisse auf das Folgende verwiesen werden muß. Die Schwingungen einer unendlichen ebenen Platte von der Dicke  $2H$  ist des öfteren schon behandelt worden. Im folgenden wird im Anschluß an die Gleichungen (28) gezeigt, wie man zu den entsprechenden Geschwindigkeitswerten gelangt<sup>1)</sup>.

Es gelten dieselben Bezeichnungen wie S. 15. Die Nullebene (hier  $x, y$ -Ebene) komme in die Plattenmitte zu liegen, so daß die Platte sich von  $y = +H$  bis  $y = -H$  erstreckt. Unter Benutzung des Ansatzes (27) für eine Deckschicht erhält man zur Bestimmung der Wellengeschwindigkeit folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin rH \cdot C + \cos rH \cdot D + \frac{2ifs}{(2f^2 - k^2)} \cos sH \cdot E \\ + \frac{2ifs}{(2f^2 - k^2)} \cdot \sin sH \cdot F &= 0 \\ -\sin rH \cdot C + \cos rH \cdot D + 2ifs(2f^2 - k^2) \cos sH \cdot E \\ - 2ifs(2f^2 - k^2) \cdot \sin sH \cdot F &= 0 \\ -\cos rH \cdot C - \sin rH \cdot D + \frac{(2f^2 - k^2)}{2ifr} \sin sH \cdot E \\ + \frac{(2f^2 - k^2)}{2ifr} \cdot \cos sH \cdot F &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

1) Lord Rayleigh, Scientific Papers, Vol. 3, 1902, p. 249. On the free vibrations of an infinite plate of homogenous isotropic elastic matter. — Lamb, H., On waves in an elastic plate. Proc. of Royal Soc. London, 1917, Vol. 93, p. 114—128.

$$\begin{aligned}
 -\mathfrak{Cof} r H \cdot C + \mathfrak{Sin} r H \cdot D - \frac{(2f^2 - k^2)}{2ifr} \mathfrak{Sin} s H \cdot E \\
 + \frac{(2f^2 - k^2)}{2ifr} \mathfrak{Cof} s H \cdot F = 0
 \end{aligned}$$

Die Auswertung der Determinante ergibt zwei Spezialfälle:

$$C = F = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{k^2 s}{2f^2 - k^2} \mathfrak{Cof} s H \cdot E \\
 v_1 &= i \frac{k^2}{2f} \cdot \mathfrak{Sin} s H \cdot E \\
 \mathfrak{Tg} r H &= \frac{(2f^2 - k^2)^2}{4f^2 rs} \cdot \mathfrak{Tg} s H
 \end{aligned} \right\} (34)$$

und

$$E = D = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{k^2 s}{2f^2 - k^2} \mathfrak{Sin} s H \cdot F \\
 v_1 &= i \frac{k^2}{2f} \mathfrak{Cof} s H \cdot F \\
 \mathfrak{Tg} r H &= \frac{4f^2 rs}{(2f^2 - k^2)^2} \mathfrak{Tg} s H
 \end{aligned} \right\} (36)$$

Beide Fälle gehen für sehr dicke Platten in die Rayleighwellengleichungen über, die für die Eigenschwingungen eines unendlichen Halbraumes alle Periodenwerte zuläßt. An der Fläche  $y = +H$  verhalten sich die Quotienten  $\frac{v}{u}$  der beiden Fälle

$$\left(\frac{v}{u}\right)_{c=0} = \frac{2f^2 - k^2}{2fs} \cdot \mathfrak{Tg} s H \quad (38)$$

kleiner als das Verhältnis der Rayleighwellenamplituden,

$$\left(\frac{v}{u}\right)_{\nu=0} = \frac{2f^2 - k^2}{2fs} \cdot \mathfrak{Cot} s H$$

größer als das Verhältnis der Rayleighwellenamplituden. Auf eine nähere Diskussion der Frequenzgleichungen will ich hier verzichten. Mir kommt es nur darauf an, nachzuweisen, daß — wenn von stehenden Wellen in der Größenordnung der Schichtdicke oder ihren Vielfachen abgesehen wird — die Wellen die Tendenz haben, möglichst große Perioden anzunehmen.

Ich möchte jetzt einen bestimmten Wert  $\lambda$  ermitteln, für den die aufgenommene Energie der Plattenschwingung sich am intensivsten an der Oberfläche bemerkbar macht. Die kinetische Energie für ein Flächenelement ist proportional mit dem Ausdruck

$$\frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^2}{\partial t}\right) \right\} \quad (40)$$

Da alle Verschiebungskomponenten denselben Zeitfaktor haben, braucht man für die jeweilige kinetische Energie eines Flächenelementes nur den Ausdruck

$$(u^2 + v^2)$$

in Betracht zu ziehen. Da für einen ausgezeichneten Wert  $\lambda$  dieser Ausdruck ein Extremum werden muß, kann man die Differentialoperation  $\frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0$  darauf anwenden und erhält für beide Fälle  $C = 0$  und  $D = 0$  die Bedingung

$$\lambda \sim \infty$$

d. h. die Platte hat bei der Wellenleitung die Tendenz, Wellen mit der größeren Periode zu bevorzugen.

Bei den bisher behandelten besonderen Fällen von gebundenen Schwingungen elastischer Medien war stets angenommen, daß die Schwingungen zeitlich gemäß dem gemeinsamen Faktor  $e^{ipt}$ , wo  $\frac{2\pi}{p}$  die Periode bedeutet, kontinuierlich seien. In der Praxis hat man aber vielfach Quellen, die eine zeitliche Begrenzung aufweisen. Mittels des Theorems von Fourier kann man jeden beliebigen Anfangszustand durch Überlagerung von unendlich vielen Wellenlängen darstellen. Für den unendlichen Halbraum ist die Ausbreitung einer Störung längs der Oberfläche von Lamb<sup>1)</sup> berechnet worden. Die Verhältnisse werden jedoch sofort andere, wenn das betreffende Medium Dispersion zeigt, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Schwingung von der Wellenlänge abhängt. Um diesen Fall zu veranschaulichen, betrachtet man zwei Einzelwellen, die sich längs der  $x$ -Achse mit gleicher Amplitude bei nur gering verschiedener Wellenlänge bewegen. Die Wellenzüge seien

$$A \sin \left[ \frac{V_1}{\lambda_1} t - \frac{x}{\lambda_1} \right] \cdot 2\pi \text{ und } A \sin \left[ \frac{V_2}{\lambda_2} t - \frac{x}{\lambda_2} \right] \cdot 2\pi \quad (41)$$

Kombiniert man beide Ausdrücke, so findet man eine resultierende Wellenbewegung

$$A \sin \pi \left[ \left( \frac{V_1}{\lambda_1} + \frac{V_2}{\lambda_2} \right) t - x \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_1}{\lambda_1} - \frac{V_2}{\lambda_2} \right) t - x \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \cdot \pi \quad (42)$$

Die Resultante (s. Fig. 14) stellt eine Wellengruppe dar, deren Geschwindigkeit  $U$  beträgt

$$U = \frac{\frac{V_1}{\lambda_1} - \frac{V_2}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}} \quad (43)$$

1) Lamb, a. a. O., p. 10 d. A.

Verallgemeinert man die Formel (43) zu einer Differentialbeziehung, so erhält man ganz allgemein für die „Gruppengeschwindigkeit“

$$U = V - \lambda \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \quad (44)$$

Je nachdem, ob die Phasengeschwindigkeit  $V$  der einzelnen Welle mit der Wellenlänge zu- oder abnimmt, ist die Gruppengeschwindigkeit kleiner oder größer als  $V$ . Neben dieser anschaulichen Ableitung von  $U$  kann man ihr auch noch eine dynamische Bedeutung geben: es ist die Gruppengeschwindigkeit der Energie proportional, die in der Zeiteinheit durch eine zur Fortpflanzungsrichtung vertikal gestellten Ebene fließt.

Zusammenfassend läßt sich bemerken, daß die Dispersion eines Mediums sich in der Gruppenbildung bei der Wellenausbreitung äußert. Als eine weitere Erscheinung, auf die hier nur hingewiesen werden soll, läßt sich — bisher ist dies nur bei Wasserwellen mathematisch exakt durchgeführt worden<sup>1)</sup> — das Anwachsen der Wellenperiode mit der Entfernung vom Herd auffassen. Diese beiden experimentell auffallend hervortretenden Erscheinungen lassen sich mathematisch restlos nur bei einer strengen Lösung der elastischen Probleme finden, wenn auch die Anfangsbedingungen im Medium voll zur Berücksichtigung gelangen.

### 3. Geometrische Seismik.

Die bisherigen Betrachtungen waren von den elastischen Grundgleichungen ausgegangen. Im folgenden soll ein mehr formaler Weg beschritten werden, der in seinen Ansätzen zwar einfacher ist, aber trotzdem in vielen Beziehungen auch den dynamischen Verhältnissen gerecht wird. Die Wellenausbreitung von einer hier punktförmig angenommenen Quelle

1) Sehr deutlich kommt diese Erscheinung in der Theorie der Wellen auf tiefem Wasser, die durch eine lokale Störung hervorgerufen werden, zum Ausdruck. An der Stelle  $x = -a$  bis  $x = +a$  sei die Oberfläche um den Betrag  $c$  gestört (vgl. Burnside), während alle anderen Punkte der Oberfläche zur Zeit  $t = 0$  in Ruhe sind. Die Gestalt der Oberfläche weit von der Quelle ist gegeben durch

$$y = \frac{4c}{\sqrt{x}} \left( \frac{x}{gt^2} \right)^{1/2} \cdot \sin \frac{gt^2 a}{4x^2} \cdot \sin \left( \frac{gt^2}{4x} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Dieser analytische Ausdruck ergibt neben Gruppen eine merkliche Zunahme der Periode mit der Entfernung, sowohl der der Gruppe als auch der der einzelnen Welle, deren Periode  $\sqrt{x}$  proportional verläuft. Die entsprechende Literatur ist Burnside, W., On deep-water waves resulting from a limited original disturbance. Proc. London Math. Soc., Vol. 20, 1889, p. 22—38. — Lamb, H., Lehrbuch der Hydrodynamic, Deutsch von J. Friedel. Leipzig und Berlin 1907, Kap. IX, p. 447 ff. — Terazawa, K., Water waves caused by a local disturbance on or beneath the surface. Proc. of Royal Soc. London A, Vol. 92, 1916, p. 57—81.

wird auf geometrischer Grundlage behandelt. Die bekannten Methoden der Erdseismik sollen auf die Strahlfortpflanzung in den obersten Erdschichten angewandt werden<sup>1)</sup>. Das gestellte Problem ist, für eine vorgegebene Schichtung die Laufzeitkurve zu berechnen. In der Praxis lautet die Aufgabe umgekehrt, rückwärts aus einer bekannten Laufzeitkurve die Strahlbahn zu konstruieren. Im folgenden sollen beide Fragestellungen erörtert werden.

Für die weiteren Betrachtungen werden einige Einschränkungen gemacht:

1. die verschiedenen übereinander liegenden Schichten seien parallel zur Erdoberfläche (entspricht der konzentrischen Schichtung im Erdkörper);
2. die elastischen Konstanten sind nur von der Tiefe abhängig, so daß man aus Symmetriegründen nur zwei-dimensionale Betrachtungen benötigt.

Der Herd  $H$  der Störung liegt an der Oberfläche, die Störung habe einen periodischen bzw. aperiodischen Verlauf und wirke nur im Punkte  $H$  selbst (s. Fig. 15).

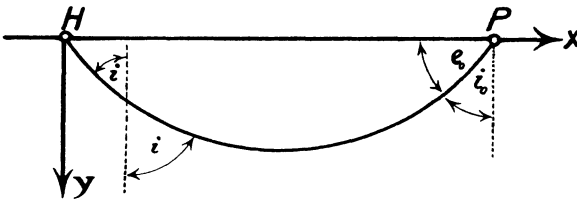


Fig. 15. Strahlbahn.

Die Fragestellung ist: welche Bahn beschreibt der Strahl  $HP(x)$ , wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Mediums für die betreffende Wellenart  $v(y)$  sei, und die für die

eingeschlagene Bahn erforderliche „Laufzeit“ ein Minimum werden soll? Der beschriebene Weg ist eine „Brachystochrone“. Mittels Variationsrechnung erhält man eine Differentialgleichung, der der Strahl genügen muß. Bezeichnet man ein Bogenelement des Strahles mit  $ds$  und sei  $v(y)$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so muß die Laufzeit  $T$

$$T = \int_0^x \frac{ds}{v(y)} = \int_0^x \frac{dx}{v(y)} \cdot \sqrt{1 + y'^2} = \int_0^x f(x, y) dx \quad (45)$$

ein Minimum werden. Die Variationsrechnung ergibt für diesen Fall die Bedingung:

$$f = y' \frac{df}{dy} + c \quad (46)$$

1) Conrad, a. a. O., p. 1 d. A. — Galitzin, a. a. O., p. 1 d. A. — Kövesligethy, R. de Seismonomia. Modena 1906.



wo  $c$  eine willkürliche Konstante ist. Führt man die einzelnen Rechenoperationen durch, so geht (46) über in

$$c \cdot v = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (47)$$

Formel (47) erhält eine anschauliche Bedeutung, wenn man beachtet, daß nach Fig. 15

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} e = \cot i \quad (48)$$

Mittels (48) geht (47) über in

$$c = \frac{\sin i}{v(y)} = \frac{\cos e}{v(y)} \quad (49)$$

d. h. das übliche Sinusbrechungsgesetz ergibt sich als ganz allgemeine Beziehung für einen Strahl. Selbstverständlich läßt sich die Ableitung von (49) auch elementar durchführen, doch ist meines Erachtens hier die beträchtliche Voraussetzungslosigkeit mehr betont. Der Vollständigkeit halber seien noch die entsprechenden Ausdrücke für  $T$  und  $x$  gegeben:

$$T = 2 \cdot \int_0^{ym} \frac{1}{v(y)} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1 - [c \cdot v(y)]^2}} \quad (50)$$

$$x_P = 2 \int_0^{ym} \frac{c \cdot v dy}{\sqrt{1 - (c \cdot v)^2}} \quad (51)$$

Aus (45) ergibt sich durch Differentiation die einfache Beziehung

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{v(y) \sin i} = \frac{1}{v} \quad (52)$$

analog der Formel für die Erdkugel. Die scheinbare oder Oberflächengeschwindigkeit  $v$  hängt durch die Relation (52) mit dem Einfallswinkel  $i$  und der dazugehörigen Geschwindigkeit  $v(y)$  zusammen. Da der Strahl  $HP(x)$  wieder zur Erdoberfläche zurückkehrt, falls  $v$  mit der Tiefe  $y$  wächst, wird für seinen Scheitel, wo ja  $i = \pi/2$  sein muß, (52) zu

$$v = \frac{\partial x}{\partial T} = v_{\text{Scheitel}} \quad (53)$$

d. h. die jeweilige Tangente an die Laufzeitkurve in dem Punkte  $P(x)$  gibt mir sofort die Scheitelgeschwindigkeit des Strahles für den Scheitelpunkt der Bahn (in halber Entfernung Herd = Station). Die Wichtigkeit von (53) liegt darin, daß man aus der Laufzeitkurve sofort die Geschwindigkeiten in den einzelnen Tiefen angeben kann, die der Strahl durchlaufen hat. Stellt sich ein Teil der Laufzeitkurve als Gerade dar, so heißt das nach (53),

daß die verschiedenen Scheitel der einzelnen Bahnen in derselben Schicht liegen müssen, da ja  $v = \text{const.}$  Die Bedeutung von Formel (53) beruht in ihrer Allgemeingültigkeit. Man wird sie überall da anwenden, wo man bei einer Wellenfortpflanzung infolge der Zeitmessung eine Laufzeitkurve aufnehmen kann, um so einen Einblick in den sonst nicht direkt beobachtbaren Schichtenzustand zu erhalten (Erddinneres, Lufthülle).

Eine Betrachtung des Krümmungsradius ergibt noch die Bedingung für die Geradlinigkeit der Strahlen. Der Krümmungsradius ist gegeben durch

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad (54)$$

Kombiniert man Formel (47) mit (54) und beobachtet, daß

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{\rho} = -c \cdot \frac{dv}{dy} \quad (55)$$

Die Krümmung des Strahles ist direkt mit der Zu- bzw. Abnahme der Geschwindigkeit in der Tiefe proportional. Für  $\frac{1}{\rho} = 0$  muß  $\frac{dv}{dy} = 0$  werden, d. h. in Schichten mit konstanter Geschwindigkeit hat man einen geradlinigen Verlauf der Strahlen. Unter Beachtung dieser Tatsache und zusammen mit dem Brechungsgesetz (49) kann man leicht näherungsweise den Strahlverlauf in einem Medium rechnerisch und zeichnerisch verfolgen. Aus Kreisbögen setzen sich die Strahlen zusammen, wenn

$$c \cdot \frac{dv}{dy} + a = 0 \quad (56)$$

$$v = \frac{v_0}{c} - \frac{a}{c} \cdot y$$

Die Geschwindigkeit ist in diesem Falle eine lineare Funktion der Tiefe.

Wie schon eingangs erwähnt, ist die eine Aufgabe, für bekannte Konfigurationen die Laufzeitkurven anzugeben. Es sollen folgende einfache Fälle kurz zusammengestellt werden<sup>1)</sup>:

- a) Schichten mit verschiedener, aber konstanter Geschwindigkeit,
- b) lineare Änderung der Geschwindigkeit mit der Tiefe,
- c) Änderung mit der Quadratwurzel aus der Tiefe.

---

1) Dieselben Fälle sind von E. Wiechert behandelt. Gött. Nachr., H. 1, 1925, p. 49—69. Bemerkungen über die anormale Schallausbreitung.

a) Besteht das betreffende Medium (Luft, Wasser, Erde) aus übereinanderliegenden Schichten, die konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die zu untersuchende longitudinale bzw. transversale Wellenart haben, so bestehen die Bahnen aus geradlinig gebrochenen Strahlen, deren Verlauf durch das Brechungsgesetz (49) bestimmt wird. Die Laufzeitkurven ihrerseits setzen sich aus geradlinigen Stücken zusammen, deren reziproke Tangente gleich der in der betreffenden Schicht herrschenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Aus den Knickpunkten der Geraden und ihren Ordinatenabschnitten lassen sich die jeweiligen Tiefen (bzw. Höhen) und die Dicken der betreffenden Schichten berechnen. Die Ableitungen für ein Verfahren, aus der Laufzeitkurve näherungsweise das Schichtprofil zu konstruieren, wurde bereits in einer früheren Arbeit gegeben<sup>1)</sup>.

b) In dem betreffenden Medium gelte das lineare Fortpflanzungsgesetz

$$v(y) = v_o (1 + \beta y) \quad (57)$$

wo mit freibleibendem Vorzeichen  $\beta = \frac{v_y - v_o}{y}$  definiert ist. Dieser Fall

ist insofern von besonderer Bedeutung, weil man alle anderen Gesetze in erster Annäherung durch Reihenentwicklung auf ihn für kleine  $y$  zurückführen kann. Setzt man die Beziehung (57) in die entsprechenden Formeln ein, so ergibt sich die Bahngleichung zu

$$x = \frac{1}{\beta} \left\{ \operatorname{tg} e_o - \frac{\sqrt{1 - (1 + \beta y)^2 \cos^2 e_o}}{\cos e_o} \right\} = \frac{1}{\beta \cos e_o} \{ \sin e_o - \sin e_y \} \quad (58)$$

Die Strahlbahnen ergeben sich, wie schon früher bemerkt (55), zu Kreisen

$$\left( x - \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} e_o \right)^2 + \left( y + \frac{1}{\beta} \right)^2 = \frac{1}{\beta^2 \cos^2 e_o}$$

Die Laufzeit  $T$  wird

$$T = \frac{1}{v_o \beta} \left\{ \ln \frac{1 + \sin e_o}{\cos e_o} - \ln \frac{1 + \sin e_1}{\cos e} \right\} = \frac{1}{v_o \beta} \ln \frac{1 + \sin e_o}{1 + \sin e} \cdot \frac{\cos e}{\cos e_o} \quad (59)$$

Keht der Strahl wieder zur Ausgangsfläche zurück, d. h. wird  $e = -e_o$ , so erhält man für die Bahn

$$x = \frac{2}{\beta} \operatorname{tg} e_o \quad (60)$$

Die größte Tiefe ist

$$y = \frac{\beta}{2 \operatorname{tg} e_o} \cdot x \quad (61)$$

Entfernung und Tiefe stehen für jeden einzelnen Strahl nicht in einem konstanten Verhältnis. Die gesamte Laufzeit wird

1) Meißer, O., u. Martin, H., Experimentelle Seismik, I. Zeitschr. f. Geophysik, 1927, p. 106—118.

$$T = \frac{2}{v_0\beta} \ln \left\{ \frac{x\beta}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2\beta^2}{4}} \right\} = \frac{2}{v_0\beta} \cdot \ln \frac{1 + \sin e_0}{\cos e_0} \quad (62)$$

In den bestehenden Figuren 16 und 17 ist die Strahlausbreitung für ein Medium gezeichnet, in dem sich die Geschwindigkeit linear mit der

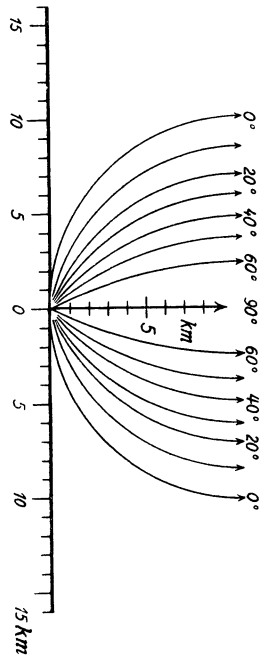


Fig. 16. Strahlengang in einem Medium, für das die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Höhe abnimmt.

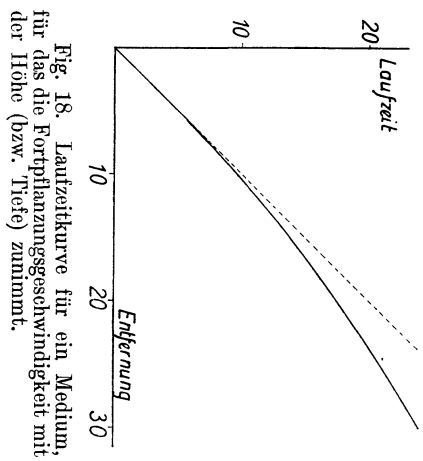


Fig. 18. Laufzeitkurve für ein Medium, für das die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Höhe (bzw. Tiefe) zunimmt.

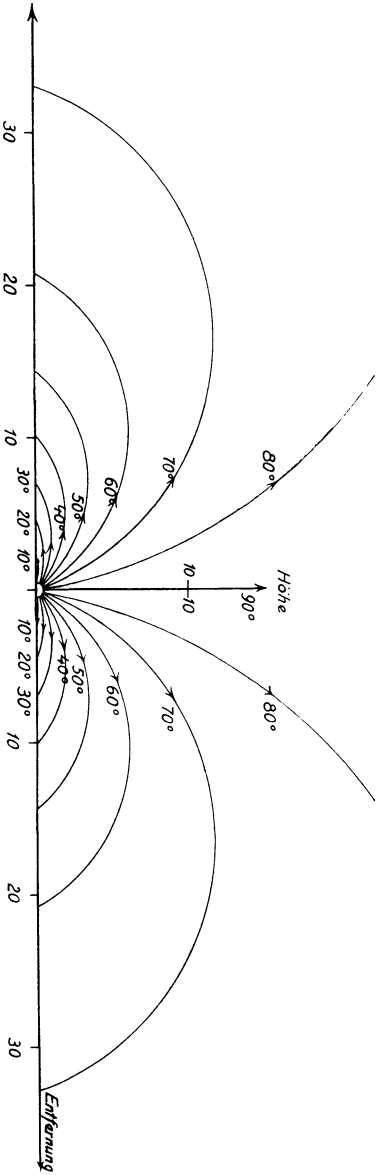


Fig. 17. Strahlengang in einem Medium, für das die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Höhe zunimmt.

Höhe ändert. In dem Fall, daß die Geschwindigkeit mit der Eindringtiefe kleiner wird (s. Fig. 16), zeigt die Skizze das Strahlbild. Der Strahl mit dem Emergenzwinkel  $e = 0$  bildet z. B. für Luftschall den Grenzwinkel, es ist von einem gewissen Umkreis um die Quelle kein Schall mehr hörbar. — Den anderen Fall, der Zunahme der Geschwindigkeit mit der Tiefe, zeigt Fig. 17. Die Strahlen kehren wieder zum Boden zurück. Der Emergenzwinkel nimmt mit der Entfernung Quelle = Beobachtungsort zu. Die entsprechende Laufzeitkurve ( $v = 1$ ) zeigt deutlich die Abweichung (s. Fig. 18) der Laufzeiten (.....) von dem direkten Strahl (——) längs der Entfernungsachse. Die Kurve muß konkav zur Abszisse verlaufen, weil nach Relation (53)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{V_{\text{Scheitel}}}$$

d. h. die Kurventangente muß mit wachsender Entfernung kleiner werden.

c) Änderungen der Geschwindigkeit mit der Quadratwurzel der Höhe spielen eine Rolle bei den Laufzeitkurven für den anormalen Luftschall. Man setze

$$v = v_0 (1 + q \cdot y)^{1/2} \quad (63)$$

wo  $q$  auch wieder doppeltes Vorzeichen haben darf. Führt man (63) in die entsprechenden Formeln ein, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{q \cdot \cos e_0^2} \cdot \left\{ e_0 - e + \cos \frac{e_0 + e}{2} \sin \frac{e_0 - e}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{q \cdot \cos e_0^2} \cdot \left\{ e_0 - e + \sin e_0 \cos e_0 - \sin e \cos e \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

und

$$T = \frac{e_0 - e}{q \cdot v_0 \cdot \cos e_0} \quad (65)$$

Betrachtet man für ein positives  $q$  einen Gesamtstrahl ( $e = -e_0$ ), so wird

$$x = \frac{2 e_0}{q \cos^2 e_0} + \frac{2 t g e_0}{q} \quad (66)$$

$$T = \frac{2 e_0}{q \cdot v_0 \cdot \cos e_0} \quad (67)$$

Der Bahnverlauf ist für kleine  $q$  genähert mit Kreisbahnen identisch, für beträchtlichere Werte hat die Kurve eine kompliziertere Form.

Die umgekehrte Fragestellung lautet: es ist die Laufzeitkurve gegeben, es soll aus dieser die jeweilige Strahlbahn und somit die Geschwindigkeitsverteilung in den durchlaufenen Tiefen berechnet werden. Unter allgemeinen Bedingungen ist dieses Verfahren von Herglotz<sup>1)</sup> und

1) s. Literatur p. 28.

Batemann für den Strahlverlauf in einer Kugel gelöst worden. Überträgt man die Formeln sinngemäß, so ergibt sich für ein horizontalgeschichtetes Medium die jeweilige Strahltiefe  $y_s$  des Scheitels zu

$$y_s = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{x=x_1} \ln \left\{ p + \sqrt{p^2 - 1} \right\} dx \quad (68)$$

wo  $p = \frac{v_{x_1}}{v_x} = \frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial T}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)}$ . Diese Relation gilt nach den Untersuchungen von

Herglotz<sup>1)</sup> nur so lange, wie  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$ . In dem experimentell vorliegenden Falle, daß sich die Laufzeitkurve aus einem gebrochenen Linienzuge darstellt, läßt sich die obige Formel nicht mehr anwenden.

---

1) Herglotz, G., Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. *Physikal. Zeitschr.*, Bd. 8, 1907, p. 145—147. — Wiechert, E., u. Geiger, L., Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern. *Physikal. Zeitschr.*, Bd. 11, 1901, p. 394—411. — Batemann, H., Die Lösung der Integralgleichung, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erdbebenwelle im Innern der Erde mit den Zeiten verbindet, die die Störung gebraucht, um zu verschiedenen Stationen auf der Erdoberfläche zu gelangen. *Physikal. Zeitschr.*, Bd. 11, 1910, p. 96—99.

Die im folgenden gegebene kurze Ableitung folgt der Wiechertschen Form. Aus Gleichung (45) ergibt sich bei einer gegebenen Scheiteltiefe für die Entfernung  $x$ , in der der Strahl auftaucht,

$$x/2 = \int_0^{y \text{ Scheitel}} v dy / \sqrt{1 - (v/v_s)^2} \quad (69)$$

wobei  $v_s$  die entsprechende Scheitelgeschwindigkeit ist. Das Bestreben geht dahin, aus der Laufzeitkurve die unter dem Integral stehende Geschwindigkeitsverteilung zu ermitteln. Diese läßt sich in einen von Abel gelösten Typ umformen. Hat man die Gleichung

$$f(\eta) = \int_{\eta}^{\alpha} u(\xi) d\xi / (\xi - \eta)^{\lambda} \quad (70)$$

so bestimmt sich die Funktion  $u(\xi)$  zu

$$u(\xi) = \frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \cdot \frac{d}{d\xi} \cdot \int_{\xi}^{\alpha} f(\eta) d\eta / (\eta - \xi)^{1-\lambda} \quad (71)$$

Die Bedeutung des Laufzeitkurvenverfahrens liegt darin, daß man mit wenigen Voraussetzungen sich ein gut fundiertes mathematisches Handwerkszeug schaffen kann, das erlaubt, einen gründlichen Einblick selbst in große Tiefen des durchteilten Mediums zu tun, ohne daß man seinen Beobachtungsort auf der Grenzfläche zu verlassen braucht. Die experimentellen Arbeitsweisen stützen sich hauptsächlich auf dieses Verfahren, und es war daher notwendig, zuerst einmal einen Aufschluß über die möglichen Wellen zu erhalten, deren Laufzeitkurven man beobachten kann.

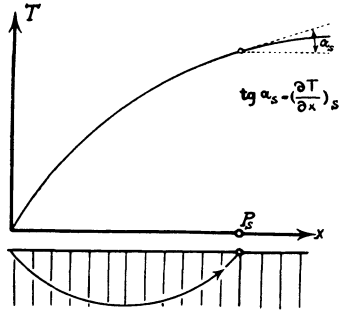


Fig. 19. Laufzeitkurve mit Strahl.

schreibt man (70)

$$\frac{x}{2} \cdot v_s = \int_{y=0}^{y=y_s} dy / \sqrt{1/v^2 - 1/v_s^2} \quad (72)$$

und setzt

$$\begin{aligned} 1/v^2 &= \xi \\ 1/v_s^2 &= \eta \end{aligned}$$

so wird Formel (72) zu

$$v_s \cdot x/2 = \int_{\xi=1/v_o^2}^{\xi=\eta} \frac{dy}{d\xi} \cdot d\xi / (\xi - \eta)^{1/2} \quad (73)$$

Vergleicht man diese Formel mit der Abelschen Form (71), so erhält man als Lösung

$$dy/d\xi = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{1/v_o^2} x \cdot v_s \cdot d\eta / (\eta - \xi)^{1/2} \quad (74)$$

Führt man die einzelnen Bezeichnungen ein und setzt

$$p = \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right) P_s / \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)$$

(s. Fig. 19), so erhält man für die Scheiteltiefe

$$y_s = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{x=x_s} \ln \{p + \sqrt{p^2 - 1}\} dx \quad (75)$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch durch Grenzübergang zu einer unendlich großen Kugel aus der Wiechertschen Formel direkt erhalten.

## II. Experimentelle Arbeitsmethoden.

### 1. Konstruktion und Beschreibung der Apparaturen.

Die Bodenbewegung kann man sich aus sechs verschiedenen Komponenten zusammengesetzt denken. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Fig. 20) zugrunde, so sind drei Translationskomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  längs den Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  und drei Rotationsmöglichkeiten um die einzelnen Achsen mit den Winkeln  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  zu erwarten. Die Bewegungskomponenten leitet man aus den Bewegungsgleichungen für einen starren Körper ab, der auf der Erdoberfläche aufgestellt ist. Man gibt ihm nicht alle Freiheitsgrade, sondern schränkt seine Bewegungs-

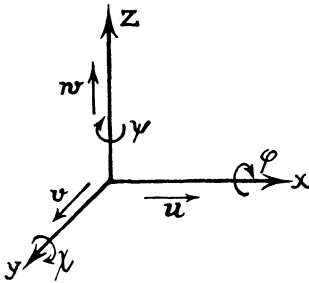


Fig. 20.

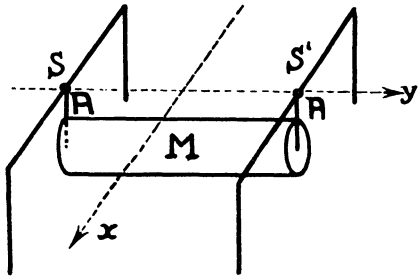


Fig. 21. Horizontalseismometer.

möglichkeiten so ein, daß die Rotationsachse fest bleibt. Für ein System, das um eine feste Achse sich bewegt, gilt die allgemeine Beziehung

$$K \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Sigma \mathfrak{M}_i \quad (76)$$

das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung ist gleich der Momentensumme aller einzeln wirkenden Kräfte<sup>1)</sup>.

Die im folgenden nach den Angaben von Herrn Geheimrat Prof. Hecker gebauten Erschütterungsmesser sind im Prinzip Vertikalpendel mit beschränkten Freiheitsgraden.

Zum Beobachten der Horizontalkomponente der Bodenverschiebung benutzt man hier folgende Konstruktion eines Horizontalseismometers (Fig. 21): Eine schwere Masse  $M$  ist beiderseitig an Blattfedern  $A$  aufgehängt, die in der Schwereachse angreifen. Die  $x$ -Achse liegt senkrecht zu der festen Rotationsachse  $SS'$ , die  $y$ -Achse in  $SS'$ . Die Masse  $M$  reagiert

1) Wiechert, E., Theorie der automatischen Seismographen. Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, II. 1. 1903, p. 1—128. — Galitzin, a. a. O., p. 1 d. A. — Reid, H. F., The Californian earthquake of April 18, 1906. Rep. of the State earthquake Invest. Comm. Washington D.C., Bd. 3, 1910.



nur auf Verschiebungen in der  $x$ -Achse und auf Rotationen um die  $y$ -Achse, alle anderen Bewegungen, die keine Teilkomponente in den beiden angegebenen Achsen aufweisen, sind durch diese konstruktive Anordnung auf das Instrument ohne Wirkung. Um die Bewegungsgleichung abzuleiten, nehme man der Einfachheit halber an, daß die gesamte schwingende Masse im Schwerpunkt konzentriert sei. Es bedeutet:

- $l$  die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse,
- $M$  die gesamte Pendelmasse,
- $K$  das Trägheitsmoment des Massensystems,
- $f/2$  die elastische Kraft einer Feder<sup>1)</sup>.

Auf das Pendel wirkt eine Bodenverschiebung  $x$  und eine Drehung um den Winkel  $\chi$ , wo  $x$  und  $\chi$  Funktionen der Zeit  $t$  sind. Die Ablenkung aus der Ruhelage der Masse  $M$  betrage  $\varphi$ . Die einzelnen Momente, die hier in Betracht kommen, sind:

- 1) —  $gMql$ . Die Schwerkraft  $g$  sucht das Pendel in seine Ruhelage zurückzuführen, der angegebene Betrag gilt nur für kleine Winkel;
- 2) —  $l^2qf$ . Die Aufhängefedern wirken in demselben Sinne wie die Schwere, bei kleinen Ausschläge soll ein lineares Gesetz für die Federkraft gelten, ohne Rücksicht auf die Kurve der Feder;
- 3) —  $\frac{d^2x}{dt^2} Ml$ . Bei einer Verschiebung des Bodens erfährt die Masse  $M$  relativ zum Stativ eine Bewegung, das entsprechende Moment hat dasselbe Vorzeichen wie 1) und 2), da die zugehörige Kraft  $\frac{Md^2x}{dt^2}$  ebenfalls die Masse in ihre Ruhelage zurückzuführen trachtet;

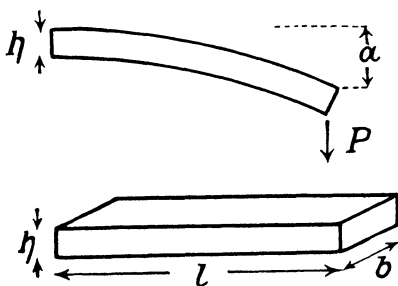


Fig. 22. Dimensionen einer Bandfeder.

1) Die Durchbiegung einer geraden rechteckigen Feder ist

$$\alpha = \frac{4P}{b} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

- $\alpha$  Durchbiegung
- $l$  Federlänge
- $b$  Federbreite
- $h$  Federstärke

Der Zug  $P$  bei einem Ausschlag  $\alpha$  ist (Fig. 22)

$$P = \underbrace{\mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot \left(\frac{h^3}{l}\right) \cdot \frac{b}{4}}_f \cdot \alpha = f \cdot \alpha$$

- 4)  $\frac{d^2\chi}{dt^2} Ml$ . Endlich ergibt eine Drehung um den Winkel  $\chi$  um die  $y$ -Achse bei einer Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2\chi}{dt^2}$  eine senkrechte Kraft, die zu dem angegebenen Moment führt.

Eine dauernde Neigung des Pendels gegen die  $z$ -Achse bedingt nur eine konstante Verschiebung des Nullpunktes. Setzt man die einzelnen Ausdrücke für die verschiedenen Momente in (76) ein, so wird

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g Ml \cdot \varphi - fl^2 \varphi - Ml \frac{d^2x}{dt^2} + Ml \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi g \frac{Ml}{K} \left(1 + \frac{fl}{gM}\right) = -\frac{Ml}{K} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2\chi}{dt^2}\right) \quad (77)$$

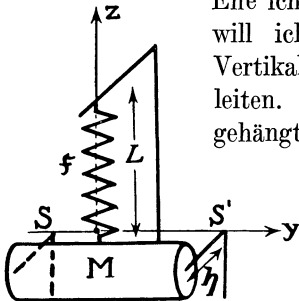


Fig. 23. Vertikalseismometer.

Ehe ich zu einer Diskussion der Gleichung (77) schreite, will ich noch für den entsprechenden Typ eines Vertikalseismometers die Bewegungsgleichung ableiten. An einer Spiralfeder  $F$  ist eine Masse  $M$  aufgehängt (s. Fig. 23), an der noch beiderseitig zwei Blattfedern  $S$  und  $S'$  befestigt sind, um horizontale Bodenbewegungen auszuschalten. Die Rotationsachse, die unserem festen Koordinatensystem zugrunde liegt, geht durch  $SS'$ . Der Apparat hat ebenfalls nur zwei Freiheitsgrade, die ihm erlauben, die Verschiebung des Bodens in der  $z$ -Achse und Drehungen um die  $y$ -Achse aufzuzeichnen. Man legt für die weiteren Betrachtungen Gleichung (76) zugrunde. Die einzelnen Momente rühren von folgenden Kräften her:

1. Die Schwerkraft greift in  $M$  an und bewirkt einen Zug nach unten, man hat  $\mathfrak{M}_1 = -Mgh$ .
2. Die Feder  $F$  übt in der Ruhelage eine Kraft  $P_0 = fL$  nach oben aus, das entsprechende Moment ist  $\mathfrak{M}_{20} = fL_0h$ . Findet eine Ablenkung um den Winkel  $\varphi$  statt, so ist das Gesamtmoment von  $F$  herrührend  $\mathfrak{M}_2\varphi = (L_0f - qf)h$ .
3. Die Blattfedern, deren Federkraft  $b/2$  sei, üben ein 2) gleichgerichtetes Moment  $\mathfrak{M}_3 = -bh\varphi$  aus<sup>1)</sup>.

1) Es sei hier nochmals betont, daß  $\varphi$  sehr klein ist. Man kann daher die trigonometrischen Funktionen durch ihre entsprechenden Näherungsformeln ersetzen.

4. Die vertikale Verschiebung mit der Beschleunigung  $\frac{d^2z}{dt^2}$  ergibt

$$\mathfrak{M}_4 = -hM \frac{d^2z}{dt^2} \text{ und}$$

5. schließlich die Drehung um den Winkel  $\psi$

$$\mathfrak{M}_5 = +Mh \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Fügt man die einzelnen Komponenten zusammen und beachtet, daß  $F \cdot L_0 - M \cdot g \cdot l = 0$ , weil die Feder  $F$  der Schwere von  $M$  das Gleichgewicht hält, so wird

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -h f \cdot \varphi - b \varphi h - M h z'' + M h \psi''$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi \cdot \frac{h(f+b)}{K} = -\frac{Mh}{K} (z'' - \psi'') \quad (78)$$

Die Bewegungsgleichungen (77) und (78) haben denselben Typ, nimmt man in jedem Fall noch ein Glied hinzu, das die im System vorhandene Dämpfung berücksichtigt, die proportional der Geschwindigkeit angenommen wird, so lautet die gemeinsame Normalgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a \frac{d\varphi}{dt} + b \cdot \varphi = \begin{cases} -c \cdot (x'' - x'') \\ -d \cdot (z'' - \psi'') \end{cases} \quad (79)$$

Auffallend ist in beiden Fällen, daß es keine Möglichkeit gibt, mit einem einzelnen solchen Apparat die Bodenverschiebung allein anzuzeigen; beide Gleichungen ergeben immer die Verschiebung in der entsprechenden Richtung zusammen mit der Drehung um die Apparateachse. Theoretische Überlegungen führen nun dazu, zunächst einmal von diesen Drehungen abzusehen, da ihre zu erwartenden Beträge im Verhältnis zu den jeweiligen Verschiebungen sehr klein ausfallen dürften.

Die Gleichung (79) stellt die Bewegung eines schwingungsfähigen Systems unter der Einwirkung einer äußeren Kraft dar, man hat es mit den bekannten Erscheinungen der erzwungenen Schwingungen zu tun. Die Eigenschwingung des horizontalen Erschütterungsmessers ist

$$T_H = 2\pi \sqrt{\frac{K}{g M l (1 + \frac{fl}{g M})}} \quad (80^a)$$

und die des Vertikalapparates

$$T_V = 2\pi \sqrt{\frac{K}{h(f+b)}} \quad (80^b)$$

Für ein Aggregat von zwei Apparaten war die Bedingung gestellt, daß die Schwingungsdauer ca. 0,2 sec betragen sollte, ferner müssen die Schwingungsdauern in sich bis auf ungefähr 1 % mindestens gleich sein, da die Diagramme für besondere Zwecke benutzt werden sollten.

Die Erschütterungsmesser sind in ihren Grundzügen bereits bei der Ableitung ihrer Bewegungsgleichungen skizziert. In den beistehenden Figuren (24) ist ein in der Institutswerkstatt ausgeführtes Modell wiedergegeben. Die Masse  $M$  — ein mit Blei gefüllter Zylinder von 12 kg — ist so konstruiert, daß das Gewicht für den Transport bequem herausgenommen werden kann. Die Masse  $M$  ist an zwei Blattfedern aufgehängt. Die „Länge  $l_0$  des Pendels“ beträgt ungefähr 1 cm (reduziert

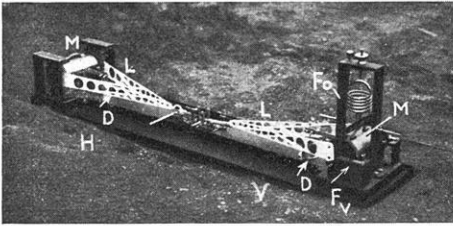


Fig. 24. Horizontal ( $H$ )- und Vertikal ( $V$ )-seismometer. Größe 1 : 20.

durch die Federn), während die ausgeführte Länge, die ja durch den Durchmesser der Masse bestimmt ist, ungefähr 4,5 cm ausmacht. Die Federn verkleinern die Schwingungsdauern in bequemer Weise, bedingen aber zugleich einen Verlust an Empfindlichkeit. Analog dem Horizontalerschütterungsmesser ist das Instrument zur Auf-

zeichnung der Vertikalkomponente ( $V$ ) der Bodenbewegung ausgeführt (Fig. 24). Die beiden Blattfedern  $F_v$  sind in ihren Dimensionen den entsprechenden beim Horizontalseismometer gleich, um dieselbe Winkelvergrößerung bei gleicher reduzierter Pendellänge zu erhalten. Die vertikale Feder  $F_0$  ist so abgeglichen, daß das gesamte System eine Schwingungsdauer von 0,210 sec ergibt. Beiden Instrumenten gemeinsam ist die weitere Anordnung der Vergrößerungseinrichtung, die für kleine Winkel  $\varphi$  in dieser Form für jedes Instrument dieselbe Vergrößerungszahl gibt. An der Masse  $M$  befindet sich ein Arm von der Länge  $L$  gleich 30—60 cm (je nach Modell). Die entsprechende Vergrößerung beträgt dann für sehr schnelle Schwingungen

$$\begin{aligned} \text{horizontaler Erschütterungsmesser} & \frac{L}{l_0} \left( 1 + \frac{fl}{gM} \right) \\ \text{vertikaler Erschütterungsmesser} & \frac{L}{l_0} \left( 1 + \frac{b}{f} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

Die so erreichte Vergrößerung genügt in den wenigsten Fällen, ferner eignet sich diese Anordnung auch kaum für eine photographische Registrierung der Bewegung. Unter Benutzung der üblichen Poggendorfschen Spiegelablesung wird die lineare (strenger Kreis-) Bewegung des Hebelarmendes

von  $L$  in eine Drehbewegung übergeführt. Die hier benutzte Anordnung (Fig. 25) ist die folgende: am Ende des Armes  $L$  ist in  $B$  ein dünner Faden befestigt. Dieser läuft über eine Achse  $C$  und wird seinerseits von einer schwachen Feder  $D$  gespannt. Auf der Achse  $C$  sitzt ein Hohlspiegel, der das Bild der Lampe  $L$  (s. Fig. 31) auf einen Film in der Entfernung  $A$  wirft. Die Auf- und Abwärtsbewegung des Armes  $L$  wird so in eine Drehbewegung übergeführt. Die Vergrößerung hängt außer von  $A$  wesentlich von dem Achsendurchmesser  $2r$  ab, der durch das Anbringen von verschieden starken Rädchen sich in gewissen Grenzen, die durch die Faden-

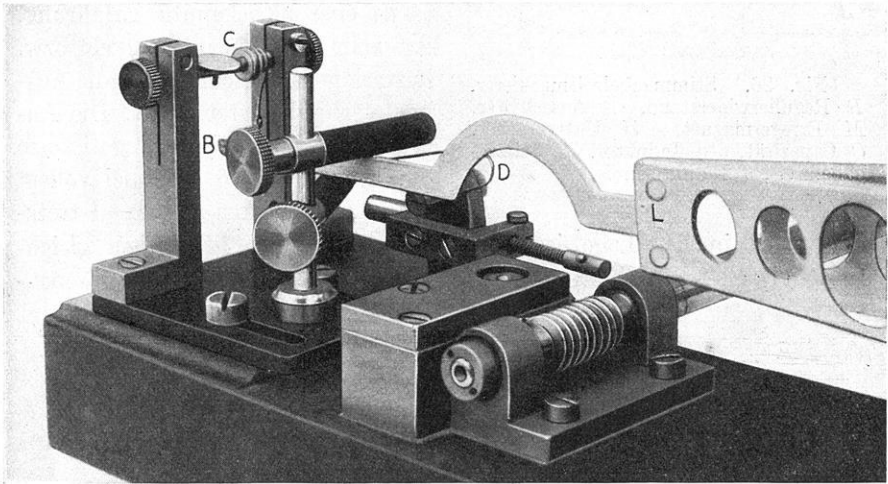


Fig. 25. Spiegelanordnung am Horizontalseismometer. Größe 1 : 15.

reibung gesteckt sind, bequem verändern läßt. Die endgültige Vergrößerung ist dann bei sehr schnellen Schwingungen

$$V = \frac{2A}{r} \cdot \frac{L}{l_0} \quad (82)$$

Die gebauten Apparate gestatteten, die Vergrößerung  $V$  von 3000—15000 zu verändern. Die Masse wurde mit Absicht zu 12 kg gewählt, um die, wenn auch sehr kleinen Reibungsverluste in der Achse  $C$  und die Verluste infolge der Federsteifigkeit bequem überwinden zu können, so daß die Bewegung des ungedämpften Pendels ein geringes Dekrement aufwies. Die Dämpfung wurde durch einen Flüssigkeitsdämpfer nach O. Hecker<sup>1)</sup> bewirkt. Für eine neue Konstruktion würde es sich vielleicht empfehlen,

1) Hecker, O., Über die Vorteile der Anwendung von Instrumenten mit Dämpfung für die Erdbebenforschung. Zeitschr. f. Instrumentenk., 1901, Heft 3.

eine magnetische Dämpfung mit permanenten Magneten anzubringen, weil diese sauberer als Glycerin- bzw. Öldämpfung ist und nicht in so hohem Maße von der Temperatur abhängt.

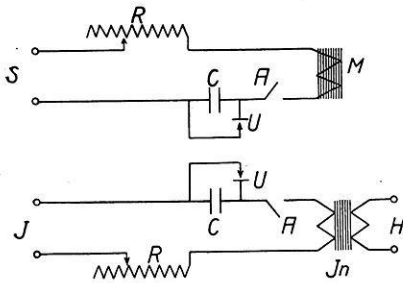


Fig. 26. Stimmgabelzeitmarkierer. *R* Regulierwiderstand, *A* Ausschalter, *M* Erregermagnet, *U* Unterbrecher, *C* Capacität, *Jn* Induktor, *S* Stimmgabelkreis, *J* Induktorkreis.

Für die photographische Registrierung dieser (und auch der übrigen) Geländeapparate ist restlos das Prinzip durchgeführt, die Anordnung so zu treffen, daß man zur Vornahme der einzelnen Aufnahmen kein besonderes Dunkelzelt benötigt; denn es ist eine altbekannte Erfahrung, daß beim Arbeiten im Dunkeln bzw. in stark gedämpftem Lichte die Ausbeute sehr darunter leidet. Die Anordnung der Registrierung ist so durchgebildet, daß man bei vollem Tageslicht arbeiten kann und trotz-

dem noch in der Lage ist, die zu registrierenden Lichtzeiger gleichzeitig visuell zu beobachten. Der Registrierapparat mit seinen Neben-



Fig. 27. Stimmgabelzeitmarkierer. Größe 1:8.

apparaten ist bereits früher beschrieben<sup>1)</sup>. Er unterscheidet sich von den üblichen „Feldapparaten“ durch seine äußerst gleichmäßige

1) Meißer, O., u. Martin, H., Zur Registrierung von schnell verlaufenden Vorgängen für geophysikalische Untersuchungen. Zeitschr. f. Geophysik, Bd. 2, 1926.

Papiergeschwindigkeit, die durch Verwendung von großen Schwungmassen, Lagerung der Achsen in Kugeln und Vermeidung von Zahnrädern zum Antrieb erzielt worden ist. Ein weiteres, für genaues Arbeiten unerlässliches Moment ist die Verwendung einer Stimmgabel als Zeitschreiber. Die Stimmgabel dient als Unterbrecher für den

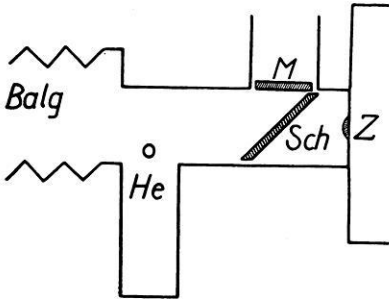


Fig. 28. Zeitmarkierung und visuelle Beobachtung am Registrierapparat.

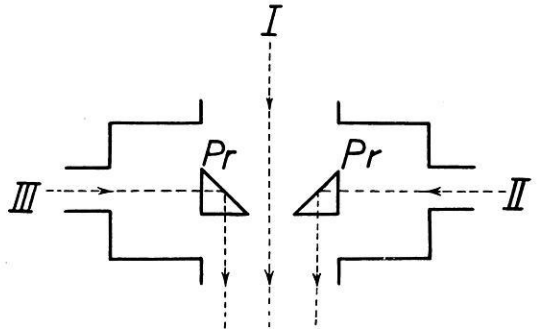


Fig. 29. Optischer Verteiler zum Registrierapparat.

Primärstrom eines Induktors, dessen Sekundärwicklung (s. Fig. 26, 27) eine Wasserstoffröhre (*He*) speist, die sich vor der Zylinderlinse *Z* (s. Fig. 28) befindet. Die Schaltskizze und konstruktive Ausführung eines solchen „Zeitmarkierers“ (nach v. Angerer<sup>1</sup>) zeigt bestehende Fig. 27. Am Registrierapparat befindet sich vor der Zylinderlinse *Z* eine unter  $45^\circ$  geneigte Spiegelglasscheibe *Sch*, die es gestattet, dauernd visuell auf einer rötlichen Mattscheibe *M* die

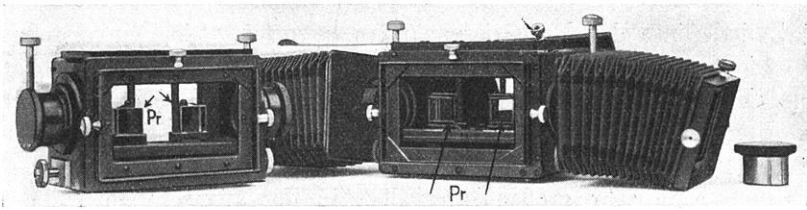


Fig. 30. Optischer Verteiler zum Registrierapparat mit Bälgen.  
(*Pr* Prisma) Größe 1:10

Lichtbilder zu beobachten. Um gleichzeitig auf denselben Film drei verschiedene Aggregate nebeneinander registrieren zu können, wird dem Apparat ein „Verteiler“ vorgesetzt (Fig. 29, 30). Die von der Seite kommenden Strahlen *II* und *III* werden durch die Prismen *Pr* um  $90^\circ$

1) Angerer, v., Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 1922.

abgelenkt, so daß sie parallel mit  $I$  auf den Film fallen. Da die Zeitmarken als dunkle Linien über den ganzen Film laufen, ist man bequem in der Lage, die verschiedenen von den einzelnen Instrumenten aufgezeichneten Ereignisse parallaxenfrei zeitlich zu fixieren. Die Prismen besitzen die nötigen Feinverstellungen, so daß man leicht die den einzelnen Strahlen zukommende Registrierbreite verstellen kann.

Die Erschütterungsmesser selbst stehen auf einem Grundbrett (s. Fig. 24), um ein schnelles Justieren zu ermöglichen. Darüber kommt ein Holzkasten mit entsprechenden Ausbrüchen und „Schornsteinen“. Die Fig. 31 zeigt

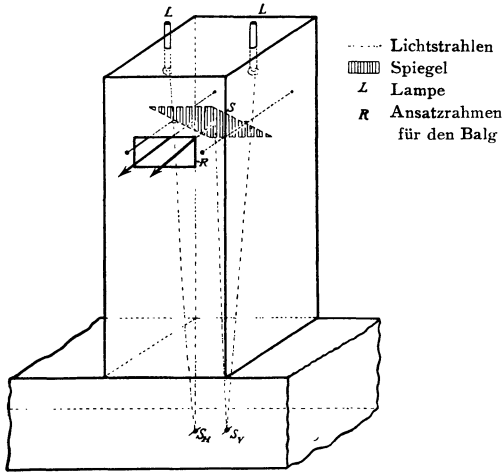


Fig. 31. Schornstein mit Registrierlampen.

eine schematische Skizze des Lampenschornsteins. Die beiden Lampen  $L$  für die einzelnen Registrierkomponenten sind auf dem Deckel in einer Richtung verschiebbar angeordnet, so daß man eine geringe seitliche Neigung der Hohlspiegel  $S_H, S_V$  bequem wegjustieren kann. Die Vorjustierung der Spiegel  $S_H, S_V$  geschieht auf eine sich zwischen den Lampen  $L$  befindende Mattscheibe. Durch Drehen des Spiegels  $S$  werden die beiden Lichtpunkte durch einen Balg auf

die Zylinderlinse des Registrierapparates geworfen. Die Feinverstellung des Lichtpunktes vom Horizontalseismometer erfolgt durch Neigen seiner Fußplatte mittels der Fußschraube am Spiegel. Die Justierung des Vertikalseismometers wird durch eine schwache der Hauptfeder parallel geschaltete Feder ausgeführt. Man wird es vermeiden, die Lichtpunkte in sehr großen Intervallen in der angegebenen Weise zu justieren, da man einige Vorsicht walten lassen muß, um die Spannung der Gegenfeder an der Spiegelachse nicht zu gering oder zu stark werden zu lassen. Die Regulierung der Lichtpunkte läßt sich bequem von außen ausführen, ohne daß fremdes Licht in den Apparat zutreten kann.

An einigen Registrierungen soll kurz gezeigt werden, wie die einzelnen Elemente der Apparatur geprüft wurden. Da bei den Untersuchungen über die Fortpflanzung elastischer Wellen im Boden ein besonderes Gewicht auf Zeitmessungen gelegt wird, mußte zunächst die Konstanz der



Stimmgabel für kleine Zeitintervalle und auch über größere Zeiträume geprüft werden. Die Sekundenmarken des Pendelkontaktes von der Uhr Strasser-Rohde (Gang 0,0 sec) wurden von einem Zeiss'schen Schleifengalvanometer mit kleiner kurzperiodiger Registrierschleife gleichzeitig mit den Marken des Stimmgabelunterbrechers auf den Film gebracht. In der beistehenden Tabelle sind die mit dem eigens für solche Messungen gebauten Komparator (Fig. 32) ausgewerteten Zeitmarken gegeben.

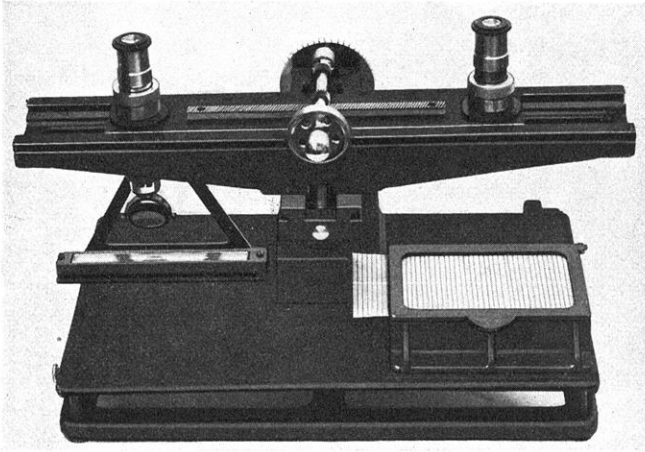


Fig. 32. Komparator zum Ausmessen von Filmen. Größe 1:5.

Zahl der Sekunden (Pendelkontakt)	Zahl der Zeitmarkenintervalle		
	fortlaufend	für 2 sec	für 1. sec
0	0,0		
2	100,11	100,11	50,06
4	200,30	100,19	50,09 <sub>s</sub>
6	300,48	100,18	50,09
8	400,66	100,18	50,09
10	500,82	100,16	50,08
12	601,00	100,18	50,09
14	701,18	100,18	50,09

Die Papiergeschwindigkeit betrug 12,5 cm/sec, ausgemessen wurde der Film auf  $\pm 2/100$  mm, so daß die für diese Apparatur angegebene Zeitgenauigkeit von  $5 \cdot 10^{-4}$  sec für scharfe Abbildung der Kurven bequem zu erzielen ist, zumal man die Registriergeschwindigkeit bis auf 20 cm/sec herauf setzen kann. Auch die Konstanz der Stimmgabel über längere Zeiträume, während deren die Apparatur sehr oft im Gelände auch bei

wenig pfleglicher Behandlung gebraucht wurde, ist vollkommen hinreichend, wie folgende Tabelle zeigt:

Temperatur	Datum	Zahl der Intervalle für 1 sec.
14°	12. I. 27	50,10
?	31. IX. 27	50,08
12°	22. X. 27	50,03

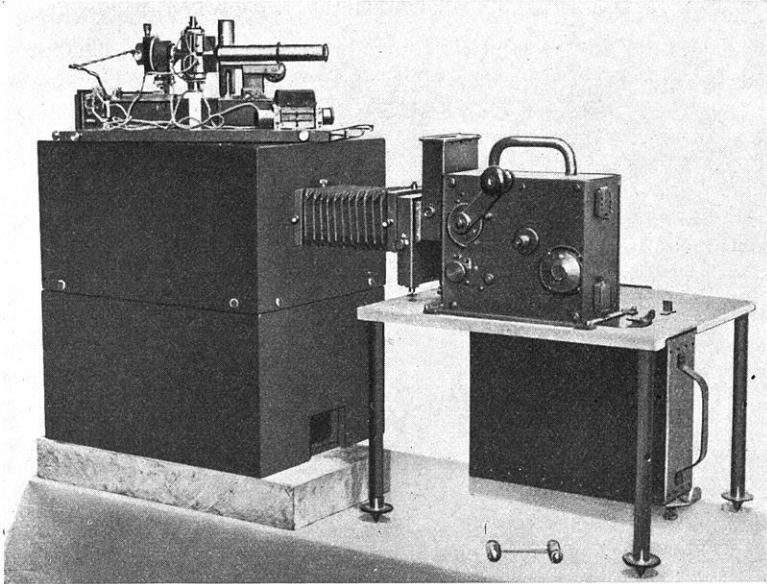


Fig. 33. Saitengalvanometer mit Doppelsaiteneinsätzen und Registrierapparat.  
Größe 1:10.

Bei diesen Zeitprüfungen wurden gleichzeitig Versuche angestellt, das für unsere Zwecke günstigste Registriergalvanometer zu ermitteln. Zuerst

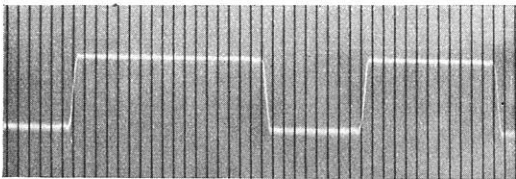


Fig. 34. Ein- und Ausschalten eines konstanten Stromes mit dem Zeißschen Schleifengalvanometer registriert. Größe 1:1.

wurde mit einem Saitengalvanometer (s. Fig. 33) gearbeitet; dieses Instrument hat bei aperiodischer Einstellung und nicht zu kleiner Empfindlichkeit den Nachteil einer relativ langen Schwingungsdauer. Die

Einsätze für eine Störung sind aber hinsichtlich ihrer Schärfe, abgesehen von der Dämpfung, wesentlich durch die Schwingungsdauer bedingt. Das Zeißsche

Schleifengalvanometer mit einer Spezialregistrierschleife genügt den Anforderungen, die z. B. bei der Aufzeichnung von Mikrofonströmen gestellt werden: Kurventreue und schnelle Einstellung, wie die Registrierung eines kurzen konstanten Stromes zeigt (Fig. 34). Hinzu kommt noch, daß dieses Instrument einen kleinen Systemwiderstand (16  $\Omega$ ) besitzt, der für dünne Saiten bedeutend größer ist. Der Registrierapparat gestattet durch Vorsetzen des Prismenvorbaues (Fig. 29, 30) drei Galvanometer nebeneinander aufzeichnen zu lassen.

Die Prüfung der Erschütterungsmesser geschieht am besten, indem man die zu untersuchenden Kurven registriert, da so eine bequeme Auswertung möglich ist. Die beiden Komponenten der Seismometer müssen zunächst auf gleiche Schwingungsdauer gebracht werden. Nachdem schon durch Konstruktion die beiden Perioden bis auf einige Prozent gleichgemacht worden waren, gelang es durch die Wahl von passenden Federn die Frequenzen beider Pendel bis auf 1 % in Übereinstimmung zu bringen. Die letzte Feinabstimmung, die übrigens vor jeder neuen Aufstellung sich sehr leicht nachkontrollieren läßt, nimmt man durch geringe Verschiebung des Schwerpunktes der Masse  $M$  vor, die Beobachtung geschieht bei ungedämpften Pendeln mittels Koinzidenzen; es ist nicht schwer, die Schwingungsdauern so bis auf 0,5 % übereinstimmend zu machen. Der Film zeigte

$$T_{Hor.} = 2,016/10 = 0,2016 \text{ sec}$$

$$T_{Vert.} = 1,426/7 = 0,2037 \text{ sec}$$

Differenz vom Mittelwert  $\pm 5,5 \text{ ‰}$

Die Eigenschwingung bei schwacher Dämpfung zeigt in der Amplitudenabnahme sehr empfindlich, ob in den Achsen noch eine störende Reibung vorhanden ist, ferner gibt die Kurve auch an, wie die Gegenfeder am Spiegel einjustiert ist. Berechnet man das Dämpfungsverhältnis  $k$  aus einer solchen Kurve, so erhält man

$k$			
A: 1,02	E: 1,04	I: 1,09	M: 1,08
B: 1,09	F: 1,07	J: 1,06	N: 1,06
C: 1,08	G: 1,09	K: 1,04	
D: 1,10	H: 1,12	L: 1,14	

Die Schwankungen rühren von zusätzlichen Bodenbewegungen, die sich auch in kleinen Unregelmäßigkeiten der Periode bemerkbar machen. Variiert jedoch  $k$  mit der Amplitude stark und systematisch, so hat man Zusatzkräfte, die sich nicht durch die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfassen lassen, man muß dann zur Theorie der pseudoharmonischen Schwingungen greifen. Um

jedoch diese Schwierigkeiten experimentell auszuschalten, wurde die Masse  $M$  so groß gewählt, daß die Größe dieser Energieverluste nicht wesentlich die Eigenschwingungen beeinflußt.

Eine weitere Abweichung vom theoretischen Kurvenverlauf erhält man durch die Eigenschwingungen des Spiegelsystems, das man als gekoppeltes System mit der schwingenden Masse betrachten kann, das Koppelungselement ist der über die Achse laufende Faden. Nach den M. Wienschen Untersuchungen<sup>1)</sup> erhält man zwei Schwingungen, deren Frequenzen gegenüber den Eigenfrequenzen bei schwacher Koppelung nur wenig verstimmt sind, beide Schwingungen überlagern sich. Experimentell kommen zwei besondere Fälle

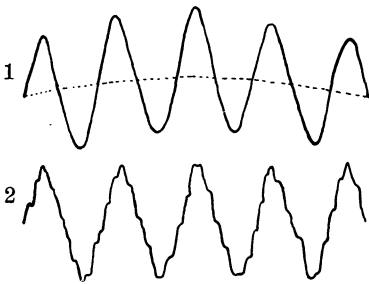


Fig. 35. Spiegelbewegung.

- 1) Eigenschwingung der Spiegelfeder ist größer als die der Masse  $M$ .
- 2) Eigenschwingung der Spiegelfeder ist kleiner als die der Masse  $M$ .

in Betracht, entweder ist die Eigenschwingung der Spiegelfeder klein gegenüber der des Erschütterungsmessers oder groß. Die resultierende Kurve stellt sich als Überlagerung beider Schwingungen dar (Fig. 35). Bei der praktischen Ausführung wurde die Gegenfeder so dimensioniert, daß ihre Eigenschwingung bedeutend größer als die des Apparates war. Die sogenannten „Zacken“ in der Kurve lassen sich durch die richtige Wahl der Spannung sehr stark reduzieren,

da die Rückwirkung des Spiegelsystems auf das Hauptsystem — Erschütterungsmesser — wegen der verhältnismäßig großen Masse gering ist.

## 2. Die theoretischen Grundlagen für die Auswertung von Registrierungen.

Um eine sachgemäße Auswertung der Registrierungen zu erhalten, muß man noch kurz auf die Theorie der erzwungenen Schwingungen eingehen, da gerade bei der Berechnung der wahren Amplituden und der Wahl des Dämpfungsverhältnisses in der seismischen Literatur mitunter noch stark „genäherte“ Lösungen im Gebrauch sind. Die allgemeine Gleichung lautet für die aufgezeichnete Bewegung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \varphi = -\bar{r}'' \gamma = -r'' \quad (83)$$

Der jeweilige Vergrößerungsfaktor — eine multiplikative Konstante —

1) Wien, M., Ann. d. Physik, Bd. 61, 1897, p. 151.

soll mit in den Ausdruck  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  hineingenommen werden. Zur Vereinfachung der Formeln führt man mit Jäger<sup>1)</sup> für die Zeit eine neue dimensionslose Größe  $\tau$  ein durch

$$\tau = \frac{2\pi}{T_0} \cdot t$$

und weiterhin

$$\alpha = \frac{\varepsilon \cdot T_0}{2\pi} \quad \beta = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (84)$$

In die Hauptgleichung eingesetzt, ergibt sich als Ausgangsgleichung für die weiteren Betrachtungen

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{d\tau} + \varphi = -\frac{d^2 r}{d\tau^2} \quad (85)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung soll nicht näher diskutiert werden.

Die Dämpfungskonstante  $\alpha$  hängt mit dem Dämpfungsverhältnis  $k = \frac{x_n}{x_{n+1}}$

bzw.  $k' = k^{1/2} = \frac{x_n}{x_{n+2}}$  gemäß der Relation

$$\alpha = \frac{\ln k}{2\pi} / \sqrt{1 + \left(\frac{\ln k}{2\pi}\right)^2} \quad (86)$$

oder auch invers geschrieben

$$k = e^{\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}}$$

zusammen. Die beistehende Figur (36) zeigt graphisch die Abhängigkeit beider Größen voneinander. Für  $\alpha = 0$  ist das schwingende System ungedämpft, mithin  $k = 1$ , während  $\alpha = 1$  den aperiodischen Grenzfall mit  $k = \infty$  darstellt. Für Werte von  $\alpha > 1$  hat man ultraaperiodische Schwingungen. Die den jeweiligen Dämpfungen entsprechenden wahren Schwingungsdauern sind

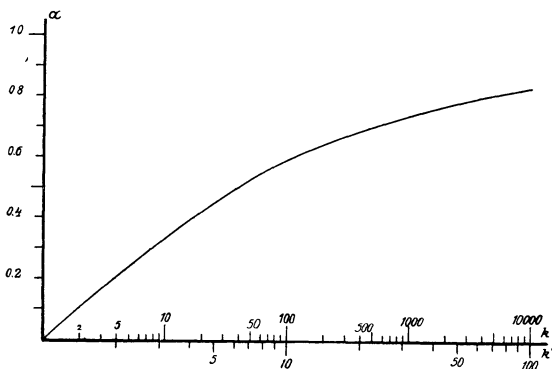


Fig. 36. Dämpfung und Amplitudenverhältnis aufeinanderfolgender Schwingungen.

1) Jaeger, W., Elektrische Meßtechnik, 2. Aufl. Leipzig 1922. — Zölllich, H., Wiss. Veröffentl. aus dem Siemenskonzern, 1920, I, p. 24—63; 1922, I, p. 378—400.

$$T = T_0 / \sqrt{1 - \alpha^2}$$

Auf die weiteren Einzelheiten der Eigenschwingungen des Systems näher einzugehen, kann ich mir wohl versagen.

Von wesentlich größerer Wichtigkeit ist die Lösung von (83) für ein beliebiges  $r(\tau)$ . Es entsteht die Aufgabe, aus der bekannten, durch die Instrumente aufgezeichneten Funktion  $q(\tau)$  rückwärts die wahre Bodenbewegung zu ermitteln. Die bisherigen Lösungen gehen davon aus, daß man eine beliebige Funktion durch eine Fourierreihe darstellen kann. Man bildet das entsprechende partikuläre Integral für  $r \sim \sin \gamma \tau$ , vernachlässigt den Einschwingvorgang gänzlich und rechnet dann die registrierten Einsätze mit einer Formel, die nur im „stationären Zustande“ gilt, auf „wahre“ Bodenbewegung um. Im folgenden sollen zunächst erst einige allgemeine Betrachtungen Platz finden, um dann an einem besonderen Beispiel für  $r$  die Berechnung der „wahren Bodenamplitude“ zu zeigen.

Das Integral von (83) läßt sich mittels der Variation der Konstanten schreiben

$$\begin{aligned} \varphi = e^{-\alpha\tau} \left\{ A \sin \beta\tau + B \cos \beta\tau \right\} + \frac{e^{-\alpha\tau}}{\beta} \left\{ \cos \beta\tau \int_0^\tau r'' e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau d\tau \right. \\ \left. - \sin \beta\tau \int_0^\tau r'' e^{\alpha\tau} \cos \beta\tau d\tau \right\} \end{aligned} \quad (87)$$

Abweichend von den üblichen Darstellungen sollen die beiden Integrale in (87) noch etwas umgeformt werden. Mittels partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{-\alpha\tau} \underbrace{\left\{ A \sin \beta\tau + B \cos \beta\tau \right\}}_{\Phi_0} + 1/\beta \cdot \int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\xi)} \cdot r'' \cdot \sin \beta(\tau-\xi) d\xi \quad \xi = \tau \\ &= \Phi_0 + \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\tau} \cdot r' \sin \beta(\tau-\xi) - \frac{1}{\beta} \cdot \int_0^\tau dr e^{-\alpha(\tau-\xi)} \cdot [\alpha \sin \beta(\tau-\xi) + \\ &\quad + \beta \cos \beta(\tau-\xi)] \\ &= \Phi_0 - \frac{1}{\beta} \int_0^\tau dr e^{-\alpha(\tau-\xi)} \cdot \sin [\beta(\tau-\xi) + \psi] \\ &= \Phi_0 - \frac{1}{\beta} r e^{-\alpha(\tau-\xi)} \cdot \sin [\beta(\tau-\xi) + \psi] + \frac{1}{\beta} \int_0^\tau r d\tau e^{-\alpha(\tau-\xi)} \cdot [\alpha \cdot \sin (\beta(\tau-\xi) + \psi) \\ &\quad + \beta \cdot \cos (\beta(\tau-\xi) + \psi)] \end{aligned}$$

$$= \Phi_0 - r + \frac{1}{\beta} \cdot \int re^{\alpha(\tau-\xi)} \cdot \sin[\beta(\tau-\xi) + 2\psi] d\tau \quad tg \psi = \frac{\beta}{\alpha} \quad (88)$$

Die beiden willkürlichen Konstanten A und B in  $\Phi_0$  lassen sich auch noch allgemein aus (88) ermitteln. Für unsere Betrachtungen soll sein

$$\begin{aligned} \varphi(\tau=0) &= 0 \\ \frac{\partial \varphi(\tau=0)}{\partial \tau} &= 0 \\ \text{für } \tau &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

Für A und B erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} B - r_0 &= 0 \\ -\alpha B + \beta A &= r_0' - 2\alpha r_0 \\ \varphi &= \frac{C^{-\alpha\tau}}{\beta} e^{\sin(\beta\tau + \delta)} - r + \frac{e^{-\alpha\tau}}{\beta} \left\{ \cos p\tau \int_0^{\tau} r e^{\alpha\tau} \sin(\beta\tau + 2\psi) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \sin \beta\tau \int_0^{\tau} r e^{\alpha\tau} \cos(\beta\tau + 2\psi) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (90)$$

wo

$$tg \delta = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_0'}{\alpha \cdot r_0}} \quad C^2 = r_0^2 - 2r_0 r_0' \alpha + r_0'^2$$

Bringt man die vor den Integralen stehenden Funktionen noch mit unter das Integralzeichen, so wird (90)

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e^{-\alpha\tau}}{\beta} (r_0^2 - 2\alpha r_0 r_0' + r_0'^2)^{1/2} \cdot \sin(\beta\tau + \delta) + \frac{1}{\beta} \int_0^{\tau} e^{\alpha(\tau-\xi)} \cdot r \cdot \sin(\beta(\tau-\xi) \\ &\quad + 2\psi) d\tau - r \end{aligned} \quad (91)$$

wobei nur zu beachten ist, daß nach der ausgeführten Integration für  $\xi = \tau$  zu setzen ist.

Der einfache Fall  $x = const.$  ergibt, wie eigentlich auch vorauszusehen ist, keine Lösung; denn wenn eine dauernde Bodenverschiebung auf das Instrument wirkt, so stellt sich keine neue Bewegung ein.

Da man aus der allgemeinen Formel (91) über den Verlauf des partikulären Integrales keine sehr wesentlichen Aussagen mehr machen kann, so sollen die weiteren Ableitungen an einem bestimmten Beispiele vorgenommen werden.

Hinsichtlich der Dämpfungseinstellung am Erschütterungsmesser können verschiedene Gesichtspunkte maßgebend sein. Um einen hohen Grad der Kurventreue, verbunden mit einer schnellen Einstellzeit, zu

erhalten, braucht man nicht den aperiodischen Grenzfall,  $\alpha = 1$ , selbst zu wählen, wie mitunter noch angenommen wird, sondern es genügt bereits schon eine Dämpfung von  $\alpha < 1$ . Im folgenden soll angenommen werden, daß die Störung, die das betreffende Gerät aufzeichnen soll, eine Konstante  $a$  sei, die von der Zeit  $\tau = 0$  an wirkt. Mit den Anfangsbedingungen für  $\tau = 0$ :  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi'(0) = 0$  wird die bekannte Lösung

$$\varphi = a \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha\tau}}{\beta} \cdot \sin [\beta\tau + \psi] \right\} \quad (92)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$$

Die Funktion strebt je nach der Dämpfung  $\alpha$  verschieden oszillierend danach den Wert  $a$  darzustellen. Das erste Maximum liegt bei  $\tau_m = \frac{\pi}{\beta}$  die zugehörige Amplitude beträgt

$$\varphi_m = a \left\{ 1 + \frac{e^{-\alpha\pi}}{\beta} \right\}$$

Die Zeit für das Maximum wird für  $\alpha = 0$  ein Minimum  $\tau_m = \pi$ . Die andere Bedingung lautet, daß die Abweichung des Maximums  $\varphi_m$  von  $a$  möglichst klein sein soll. Soll die Abweichung vom sich einstellenden Endwert  $\frac{100}{\eta}$  % betragen<sup>1)</sup>, so ist die zugehörige Dämpfung

$$\alpha_\eta = \frac{\frac{\ln \eta}{\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln \eta}{\pi}\right)^2}}$$

Die Fig. 37 zeigt die zusammengehörigen Werte  $\alpha$  und  $\eta$ . In der Praxis wird man sich wohl mit einigen Prozenten Abweichung wegen des Ausmeßfehlers begnügen, das entsprechende  $\alpha$  liegt dann bei ungefähr  $\alpha = 0,7$ .

Im folgenden soll angenommen werden, daß die Bodenbewegung der Form

$$r = A' \cdot \sin \gamma \tau$$

genügt; von einer Phasenverschiebung des sinus-Ausdruckes ist der Einfachheit halber abgesehen, zumal die

Bewegung nicht sprunghaft einsetzen soll. Die Bewegungsgleichung für das Schreibsystem wird

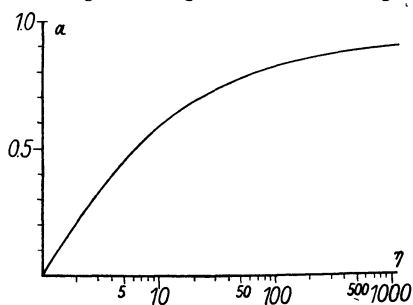


Fig. 37. Dämpfung und Kurventreue bei kleinster Einstellzeit.

1) Zölllich, a. a. O., p. 43. d. A.



$$\varphi'' + 2\alpha \cdot \varphi' + \varphi = -A \cdot \sin \gamma \tau = -A' \cdot \gamma^2 \cdot \sin \gamma \tau \quad (93)$$

Diese Gleichung ist schon öfters in der Physik ausführlich diskutiert worden <sup>1)</sup>. Die üblichen Fälle unterscheiden sich meistens dadurch (z. B. Theorie des Oszillographen), daß in dem Faktor  $A$  nicht noch  $\gamma^2$  vorkommt. Der Unterschied äußert sich dann vornehmlich in der Resonanzkurve. Die allgemeine Lösung mit den Anfangsbedingungen

$$\tau = 0: \quad \varphi = 0 \text{ und } \varphi' = 0$$

lautet

$$\varphi = \frac{A}{q} \left\{ \sin(\gamma \tau + g) - \frac{\gamma}{\beta} \cdot e^{-\alpha \tau} \cdot \sin(\beta \tau + p) \right\} \quad (94)$$

wo

$$\begin{aligned} q^2 &= (\gamma^2 - 1)^2 + 4 \alpha^2 \cdot \gamma^2 \\ g &= \text{arc tg } 2 \alpha \gamma / (\gamma^2 - 1) \\ p &= \text{arc tg } 2 \alpha \beta / (2 \alpha^2 + \gamma^2 - 1) \end{aligned} \quad (95)$$

Da nun bei der Auswertung der registrierten Kurven eine große Bedeutung

den ersten Einsätzen zukommt, soll hauptsächlich der Einschwingvorgang betrachtet werden. Für den „Einsatz“ einer Welle ist das erste Maximum maßgebend. Für die Auswertung liegen die Verhältnisse hinsichtlich der späteren Maxima einfacher: bei einigermaßen hinreichender Dämpfung verschwindet das die Eigenschwingungen des Systems darstellende Glied

mit dem Faktor  $e^{-\alpha \tau}$ , so daß das System nur die aufgeprägte Schwingung phasenverschoben und mit dem Resonanzfaktor  $\Re = \gamma^2/q$  vergrößert bzw. verkleinert wiedergibt. Dieser Resonanzfaktor

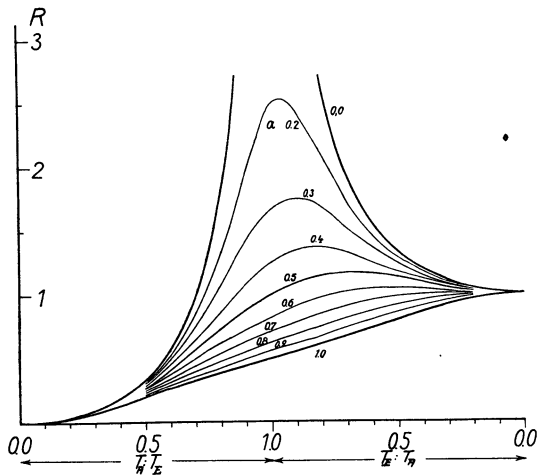


Fig. 38. Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen.  $\gamma = TA : T_E$ .

$$\Re = \gamma^2 / \sqrt{\{(\gamma^2 - 1)^2 + 4 \alpha^2 \cdot \gamma^2\}} \quad (96)$$

1) Busch, H., Eine einfache Ableitung der vollständigen Theorie des Oszillographen. Physikal. Zeitschr., Bd. 12, 1912, p. 615—623. — Jaeger, a. a. O., p. 43. — Emde, Fr., Theoretisches zur Prüfung von Oszillographen. Elektrotechnik u. Maschinenbau, 1910, p. 1067—1071.

besagt, daß solche Schwingungen, deren Periode sehr klein ist (Fig. 38) gegenüber der des Instrumentes, mit der wahren maximalen Amplitude bei allen Dämpfungsverhältnissen im stationären Zustande wiedergegeben werden. Ist jedoch die Schwingungsdauer der störenden Bewegung sehr groß ( $\gamma \sim \infty$ ) im Vergleich mit der des Systems, so sinkt die maximale Amplitude im eingeschwungenen Zustande auf einen geringen Bruchteil der wahren Bewegung. In der Theorie des Oszillographen ist die „Resonanzkurve“ dieselbe Funktion nur mit der reziproken Abszisse. Der Unterschied rührt daher, daß die Störung bei dem Erschütterungsmesser der Beschleunigung der Bodenbewegung ( $r''$ ) proportional ist, während in dem angeführten Beispiel die entsprechende Funktion dem elektrischen Strome direkt proportional ist. Die einfache Beziehung, die die Resonanzkurve bietet, um die maximalen Ausschläge im stationären Zustande auf wahre Bodenbewegung umzurechnen, gilt jedoch nicht für den Einschwing-

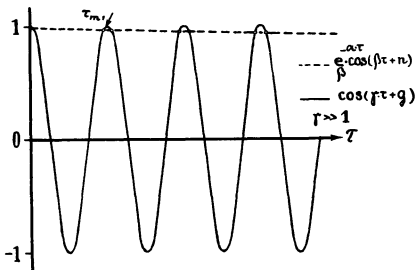


Fig. 39. Graphische Lösung der transzendenten Gleichung (97).

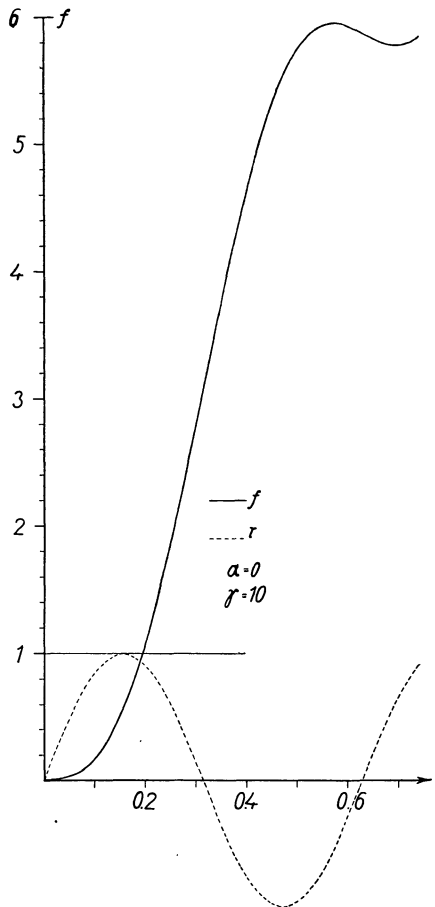


Fig. 40. Einschalten eines ungedämpften Systems.

vorgang. Um eine ungefähre Vorstellung von der Korrektur zu haben, die man für den Fall erzwungener reiner sinus-Schwingungen am ersten Maximum anbringen muß, habe ich für verschiedene Dämpfungen die Größe der ersten Maxima in Abhängigkeit von  $\gamma$  berechnet und in Kurven-

form gebracht. Gleichzeitig gebe ich auch die Verschiebung des Maximums gegenüber der wahren Bodenbewegung an.

Die Zeit  $\tau_m$  für das erste Maximum ermittelt sich aus der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \cos[\gamma \tau_m + g] - \frac{e^{-\alpha \tau_m}}{\beta} \cdot \cos[\beta \tau_m + n] = 0 \quad (97)$$

wobei

$$n = \operatorname{arctg} \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2 - 1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

Die Wurzeln lassen sich in der transzendenten Gleichung (97) leicht als Schnittpunkte der beiden Kurven  $\cos(\gamma \tau_m + g)$  und  $\frac{e^{-\alpha \tau_m}}{\beta} \cdot \cos(\beta \tau_m + n)$  ermitteln. In der beistehenden Fig. 39 ist schematisch die Lösung der Gleichung (97) angedeutet; man sieht, daß für kleine Werte  $\tau_m$  bzw. sehr großes  $\gamma$ , der Wert  $\tau_m$  in der Nähe von  $2\pi/\gamma$  liegen wird. Ist das System ungedämpft ( $\alpha = 0$ ), so lautet die Bestimmungsgleichung für die Zeit  $\tau_m$  des Maximums

$$\cos \gamma \cdot \tau_m = \cos \tau_m \quad (98)$$

für  $\tau_m$  findet man

$$\tau_m = \frac{2\pi}{\gamma + 1} \cdot n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

wobei  $n$  die Ordnungszahl für das jeweilige Maximum bedeutet. Die Lösung versagt für  $\gamma = 1$ , weil in diesem Falle das partikuläre Integral eine andere Form annimmt. Das erste Maximum hat den Wert

$$\varphi_{m,1} = \frac{A}{q} \cdot \left\{ \sin 2\pi \frac{\gamma}{\gamma + 1} - \gamma \cdot \sin \frac{2\pi}{\gamma + 1} \right\} = \Re \cdot f_m \quad (99)$$

wo sich  $q$  vereinfacht zu  $q = \gamma^2 - 1$ . Der Kurvenverlauf bis zum ersten Maximum für  $\alpha = 0$  und  $\gamma = 10$  ist in der beistehenden Figur (40) aufgezeichnet. Das auf das Maximum folgende Minimum ist ebenfalls durch die obige Gleichung (98) mitbestimmt. In der Fig. 41 ist die relative Größe der Amplitude des ersten Maximums zu der Amplitude des stationären Zustandes aufgetragen. Als Abszisse ist das Verhältnis  $\gamma = \frac{T_o}{T_E}$  gewählt.

Die Kurve für  $f_m$  ergibt, daß das System solche Schwingungen, deren Periode viel kleiner als die des Systems ist, mit vergrößerten Einsätzen wiedergibt. Der größte Wert von  $2\pi$  wird für sogenannte unendlich schnelle Schwingungen erreicht. Physikalisch kann man sich auch sehr leicht erklären, daß in diesem Falle, wo das System infolge seiner großen Trägheit im stationären Zustande die wahre Bodenbewegung direkt wieder-

gibt, dieser größte Wert asymptotisch erreicht werden muß, da man es mit einer Art „ballistischer Anfangsbewegung“ zu tun hat (ballistisches Galvanometer). Auffallend ist, daß die Amplitudenkurve für  $\gamma = 1, \alpha = 0$  den Wert Null liefert. Dieses Verhalten ist dem Umstande zuzuschreiben, daß beide Schwingungen zu Anfang Interferenzen bilden. Für größere Perioden der Bodenbewegung als die des Systems wird das erste Maximum bei fehlender Dämpfung stets kleiner als 1. Charakteristisch ist, daß gegen  $\gamma = 0$  zu die Kurve für  $\alpha = 0$  wieder etwas ansteigt, weil die beiden

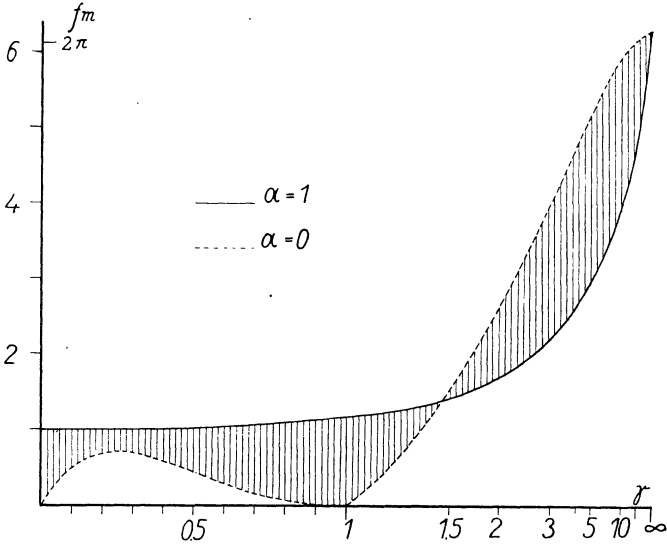


Fig. 41. Die Größe des ersten Maximums in Abhängigkeit von der Dämpfung des Systems und der Periode der aufgezungenen Schwingung.

Schwingungen nicht mehr isochron sind. Ist die Schwingungsdauer unendlich lang, so ergibt das System, wie man sich am Apparat selbst klar macht, nur eine statische langsame Verlagerung des Nullpunktes, die wegen ihrer sehr kleinen Beschleunigung entsprechend schwach ausgebildet ist.

Befindet sich das Instrument im aperiodischen Grenzzustande,  $\alpha = 1$ , so lautet die Bestimmungsgleichung für  $\tau_m$

$$\cos(\gamma \tau_m + g) = e^{-\tau_m} \cdot \left\{ \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} - \tau_m \right\} \quad (100)$$

wo hier

$$g = \text{arctg} \frac{2\gamma}{\gamma^2 - 1}$$

Das entsprechende Maximum lautet

$$\varphi_m = \frac{A}{q} \cdot \left\{ \sin(\gamma \cdot \tau_m + g) - \gamma \cdot e^{-\tau_m} \left[ \tau_m + \frac{2}{\gamma^2 + 1} \right] \right\} \quad (101)$$

wobei hier für  $q = \gamma^2 + 1$  zu setzen ist. Der Verlauf des ersten Maximums in Abhängigkeit von  $\gamma$  zeigt ähnlich wie für  $\alpha = 0$  die Fig. 41. Auch hier erhält man bei sehr schnellen Schwingungen den Grenzwert  $2\pi$ . Im Gegensatz zu  $\alpha = 0$  bewegt sich für  $\gamma = 1$  der Wert des Maximums in der Größenordnung des stationären Zustandes, so daß man nur eine geringe Korrektur von ca. 10—20 % anzubringen hat. Alle übrigen Werte für  $\alpha > 0$  und  $\alpha < 1$  liegen in dem schraffiert eingeschlossenen Gebiete (Fig. 41). Noch besonders möchte ich den Unterschied der Kurve für  $\alpha = 0$  gegenüber der für  $\alpha = 1$  hervorheben: für  $\gamma \ll 1$  strebt die aperiodische Grenzfallkurve gegen 1; ist nämlich

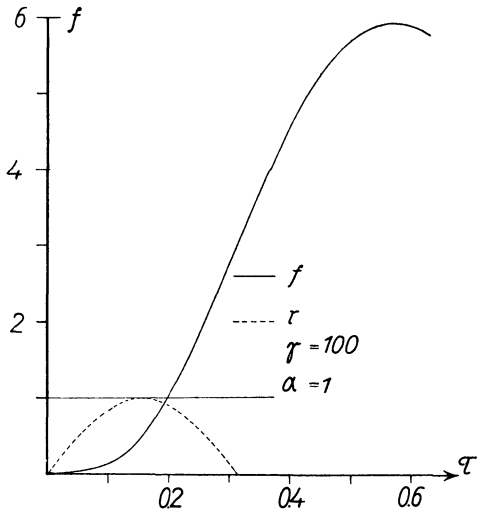


Fig. 42. Einschalten eines aperiodischen Systems.

die aufgeprägte Schwingung sehr groß, so klingen die Eigenbewegungen bei einer starken Dämpfung recht schnell ab, so daß man im ersten Maximum bereits annähernd den eingeschwingenen Zustand erreicht

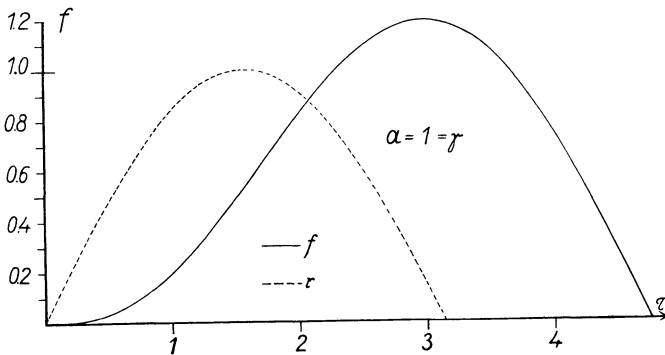


Fig. 43. Einschalten eines aperiodischen Systems.

hat. Beistehende Fig. 42, 43 geben den Einschwingvorgang für  $\alpha = 1$  und  $\gamma = 100$  bzw.  $\gamma = 1$  wieder, mitangegeben ist in beiden Fällen die wahre Bodenbewegung (-----).

Sehr interessant ist auch noch die Phasenverzögerung des aufge-

zeichneten Maximums gegenüber der wahren Bodenbewegung. Fig. 44 zeigt die Zeit des Maximums  $\tau_m$  ausgedrückt in Bruchteilen der Periode  $T_E$  der erzwungenen Schwingung. Die Zeit  $\tau_m$  nimmt für schnelle Schwingungen von  $\frac{2\pi}{\gamma} \approx T_E$  ab bis zu Null für  $\alpha = 0$  bzw.  $\frac{\pi}{2\gamma} \approx \frac{T_E}{4}$  für  $\alpha = 1$ , d. h. für den aperiodischen Grenzfall wird das Maximum der Bodenbewegung ohne Verzögerung aufgezeichnet, wenn die Bodenperiode sehr groß gegenüber der Eigenschwingung ist. Bei sehr schnellen Erschütterungen beträgt die zeitliche Korrektur für das erste Maximum ca.  $\frac{3}{4} \cdot T_E$ ,

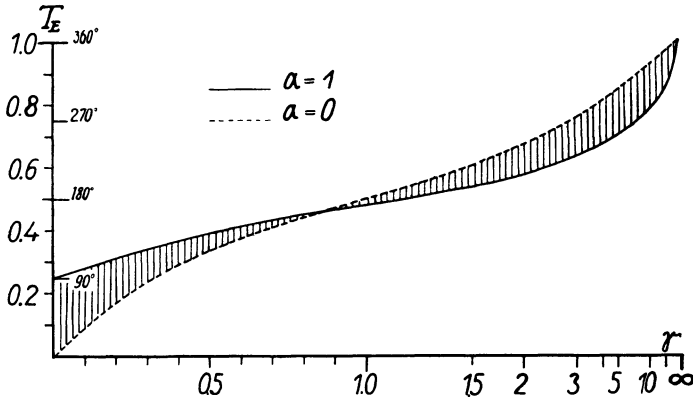


Fig. 44. Die Phasenverzögerung des ersten Maximums in Abhängigkeit von der Dämpfung des Systems und der Periode der aufgezungenen Schwingung.

in der Nähe der Resonanz sinkt die Phasenverschiebung auf ungefähr  $< \frac{1}{2} T_E$  herab. Die Verhältnisse liegen hier für das erste Maximum verschieden gegenüber dem eingeschungenen Zustande.

Faßt man das Resultat noch einmal kurz zusammen, so hat sich folgendes ergeben: die „Resonanzformel“

$$\mathfrak{R} = \gamma^2 / \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 4\alpha^2 \cdot \gamma^2}^{1/2} \quad (96)$$

zum Umrechnen der registrierten Ausschläge auf „wahre“ Bodenbewegung ist nur streng gültig für Schwingungen im stationären Zustande, d. h. die Eigenschwingungen des Systems müssen abgeklungen sein. Will man jedoch den ersten Einsatz schon für die Auswertung mit benutzen, so tritt für die Umrechnung auf „wahre“ Bodenbewegung unter der Annahme reiner, nicht phasenverschobener sinusförmiger Bodenbewegung noch ein Faktor  $f_m(\alpha, \gamma)$  hinzu, so daß die Bodenamplitude  $A'$  ist

$$A' = q_{m, 1} / \mathfrak{R} \cdot f_m \quad (102)$$

Die wahre Eintrittszeit läßt sich ebenfalls aus der Lage des Maximums berechnen, wenn man die entsprechende Phasenkorrektion anbringt. Selbstverständlich ist diese Art der Korrektur nur ein Behelf, um die Größenordnung richtig abzuschätzen. Will man z. B. genaue Emergenzwinkelmessungen machen, so empfiehlt es sich immer, nur Instrumente mit gleicher Periode und gleicher Dämpfung zu benutzen, damit sich die entsprechenden Korrekturfaktoren bei der Bildung des Emergenzwinkels herausheben<sup>1)</sup>.

Die großen maximalen Amplituden beim Einschwingen eines Systems, falls die erzwungenen Frequenzen größer als die Eigenfrequenz sind, kennt man bereits aus der Elektrotechnik, wo die dort auftretenden Überspan-

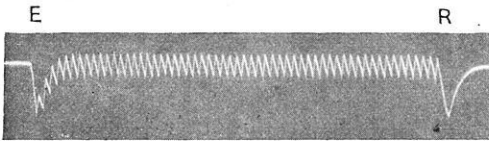


Fig. 45 a. Saitengalvanometer beim Ein- und Ausschalten eines 50per. Wechselstromes. Größe 1:1.

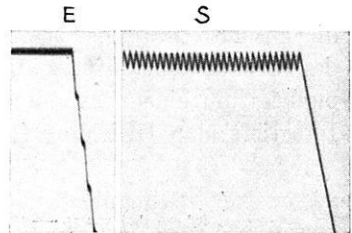


Fig 45 b. Drehspulgalvanometer beim Ein- und Ausschalten eines 50per. Wechselstromes. Größe 1:1.

nungen beim Einschalten sehr unangenehme Begleiterscheinungen sind. Um die oben geschilderten Einschwingvorgänge an einem Beispiel zu illustrieren, seien hier zwei Registrierungen von Galvanometern beigegeben. Die Bewegung eines Saitengalvanometers (s. Fig. 45 a) bzw. eines Drehspulgalvanometers (45b) infolge Stromdurchgangs kann man näherungsweise durch die behandelte Differentialgleichung beschreiben. Die Eigenperiode der 4  $\mu$  starken Saite betrug bei schwacher Spannung ungefähr 0,10 sec, die Dämpfung war sehr groß und entsprach einem Werte  $\alpha > 0,7$ , wie man beim Zurückgehen der Kurve (R) in ihre Ruhelage deutlich sieht. Auf das Galvanometer wurde ein Wechselstrom mit der Periode  $T_E = 0,02$  sec geschaltet. Man bemerkt deutlich beim Einschalten des Stromes in E (Fig. 45a), daß das erste Maximum einen 3,5—4,5 mal größeren Ausschlag aufweist, als die maximalen Amplituden im stationären Zustande. Die gleichen Kurven sind mit dem Drehspulgalvanometer von 8 sec Schwingungsdauer und schwacher Dämpfung  $\alpha \sim 0,1$  aufgenommen. Der Faktor  $f_m$  nimmt hier (Fig. 45 b) den theoretisch geforderten Wert von  $2\pi$  (vergl.

1) Galitzin, a. a. O., p. 1 d. A. — Galitzin ist der einzige Autor in der seismischen Literatur, der in ähnlicher Weise den Einschwingvorgang bei den galvanometrisch registrierenden Seismometern berücksichtigt.

$E$  und  $S$ ) wirklich an, falls die Einschaltung ( $E$ ) bei der richtigen Phase des Wechselstromes vorgenommen wird. Die weiteren Maxima und das absolute Maximum der Einschaltkurve sollen später an anderer Stelle behandelt werden. —

Außer diesem Auswertungsverfahren, die registrierte Bodenbewegung auf bekannte Funktionen zurückzuführen, besteht noch ein direktes, das die Differentialgleichung

$$\varphi'' + 2\alpha \cdot \varphi' + \varphi = -\frac{1}{V} \cdot r'' \quad (103)$$

selbst zum Ausgangspunkt nimmt. In der obigen Formel (103) bedeutet  $V$  die absolute statische Vergrößerung, die man mittels Neigungsänderung des Gestelles bei Horizontalapparaten oder Heben des Massenschwerpunktes um einen bekannten Betrag bei Vertikalseismometern ermittelt. Integriert man Gleichung (103) zweimal, so ergibt sich

$$-\frac{1}{V}(r - r_0) = \varphi - \varphi_0 + 2\alpha \cdot \int_0^\tau \varphi d\tau + \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau \varphi d\tau + \quad (104)$$

$$+ (\varphi'_0 + 2\alpha\varphi_0 + r'_0) \cdot \tau$$

Die Rechnung selbst wird in dem vereinfachten Maßstabe vorgenommen. Schwierigkeiten bereiten bei der Auswertung in (104) die Integrationskonstanten. Die Konstanten  $r_0$  und  $\varphi_0$  bedingen eine konstante Verschiebung des Nullpunktes, die Größen  $r'_0$  und  $\varphi'_0$  gehen linear mit der Zeit ein; die Klammer auf der rechten Seite in (104) kann den Kurvenverlauf für  $r$  erheblich fälschen. Es werden bei jedem neuen Stoße eigentlich neue Anfangsbedingungen auftreten. Es ist das Verdienst von Galitzin<sup>1)</sup>, klar auf diese Schwierigkeit hingewiesen zu haben. In der Praxis kann man sich dadurch helfen, daß man die verschobene Nulllinie ungefähr einzeichnet, da es ja nach unseren sonstigen Betrachtungen ausgeschlossen ist, den relativ kleinen Bodenbewegungen eine außerordentlich starke Verlagerung der Oberfläche zuzuschreiben. Ein anderer Weg ist, unter der Annahme reiner sinusförmiger Bewegung die maximale Amplitude zu berechnen und diesen Wert mit dem integrierten zu vergleichen, die Differenz zwischen beiden wäre dann die jeweilige Nullpunktskorrektur.

Ehe ich ein Beispiel gebe, soll gleichzeitig noch ein einfaches Integrationsverfahren entwickelt werden, das gestattet, rasch und sicher die vorkommenden Integrale mit einer dem Problem angepaßten Genauigkeit auszuwerten.

1) Galitzin, a. a. O., p. 1 d. A.



Die üblichen graphischen Integrationsverfahren gehen von dem Grundgedanken aus, die vorgegebene Kurve  $\varphi(t)$  durch eine sogenannte „Treppenkurve“ zu ersetzen (Fig. 46). Das Integral einer der Abszissenachse parallelen Geraden  $\varphi = \text{const.}$  stellt (Fig. 47) sich als eine gegen die Abszissenachse geneigte Gerade (Fig. 48) dar. Um von dem einfachen Integral das entsprechende Doppelintegral zu bilden, wiederholt man das Näherungsverfahren. Der Nachteil dieser Methode ist, daß man für die Ableitung des Doppelintegrals eine neue Annäherung vornehmen muß, ferner eignet sich dieser Weg auch wenig für eine numerische Übertragung.

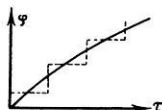


Fig. 46. Approximation durch eine Treppenkurve.

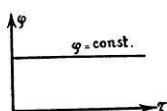


Fig. 47. Gerade  $\varphi(\tau) = \text{const.}$

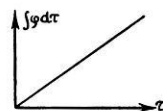


Fig. 48. Integralkurve zu Fig. 47.

Für die numerische Integration soll eine Rechnungsart angegeben werden, die die Eigenart der registrierten Filme berücksichtigt. Betrachtet man eine Erschütterungskurve (Fig. 49), so wird man durch den Anblick des Kurvenverlaufes dazu gebracht, die einzelnen Kurvenäste näherungs-

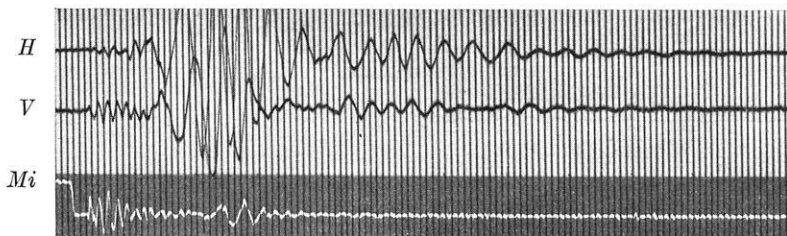


Fig. 49. Registrierung eines Horizontal- (*H*) und Vertikalseismometers (*V*) mit einem Bodenmikrophon (*Mi*) von einem Schuß in 80 m Entfernung. Größe 1:2.

weise durch Gerade zu ersetzen. Man denkt sich die Kurve aus Geraden zusammengesetzt, die entsprechende Integralkurve besteht aus einzelnen Parabeln. Das Doppelintegral wird nun nicht durch Wiederholung dieses Verfahrens gebildet, sondern, um die dabei auftretenden Fehler zu vermeiden, bildet man das Doppelintegral direkt aus der vorgegebenen Näherungskurve. Das numerische Verfahren hat den Vorteil, direkte Kurvenordinaten zu liefern und überläßt dem zeichnerischen Geschick nur die dazwischenliegenden Parabelteile zu ergänzen. Die einzelnen, Ordinaten sind nicht mit einem mehrfachen Interpolationsfehler behaftet, so daß man mit ihnen unbedenklich rechnen kann; die so gewonnenen

Punkte müssen auf der endgültigen Kurve liegen. Das Verfahren läßt sich auch auf höhere Integrale ausdehnen. Da sich die Integralkurven aus Parabelstücken zusammensetzen, sei das Verfahren „Parabelverfahren“ genannt.

Im folgenden seien kurz die Rechenformeln gegeben:

Ein Stück der Kurve  $\varphi(\tau)$  (Fig. 50 a) sei  $P_n, P_{n+1}$ , das entsprechende

bestimmte Integral  $\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \varphi \cdot d\tau$  kann man

$$\mathfrak{F}_{n+1} - \mathfrak{F}_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \varphi \cdot d\tau = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \left\{ \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\tau_{n+1} - \tau_n} \cdot \tau + \varphi_n \right\} \cdot d\tau \quad (105)$$

schreiben. Ausgeführt wird (105)

$$\mathfrak{F}_{n+1} - \mathfrak{F}_n = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_{n+1} - \varphi_n) (\tau_{n+1} - \tau_n) + \varphi_n \cdot (\tau_{n+1} - \tau_n) \quad (106)$$

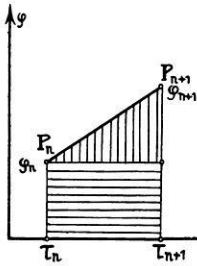


Fig. 50a.

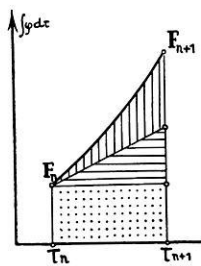


Fig. 50b.  
Integralkurven.

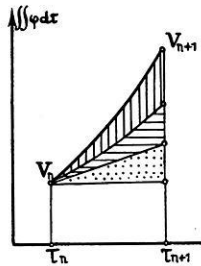


Fig. 50c.

Das bestimmte Integral setzt sich, wie die beiden Fig. 50 a und 50 b zeigen, aus dem Inhalt des entsprechenden Dreiecks und Rechtecks zusammen. Verallgemeinert man den Ausdruck (106), so ist

$$\mathfrak{F}_n = \int_0^{\tau_n} \varphi d\tau = \mathfrak{F}_0 + \sum_{n=0}^{n=n} \left\{ \frac{1}{2} \cdot [\varphi_n - \varphi_{n-1}] \cdot [\tau_n - \tau_{n-1}] + \varphi_{n-1} \cdot [\tau_n - \tau_{n-1}] \right\} \quad (107)$$

Das Doppelintegral  $V$  gewinnt man aus (105) zu

$$V_{n+1} - V_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} d\tau \int \varphi d\tau = \frac{1}{6} (\tau_{n+1} - \tau_n)^2 \cdot (\varphi_{n+1} + 2\varphi_n) + \mathfrak{F}_n \cdot (\tau_{n+1} - \tau_n) \quad (108)$$

Mithin wird allgemein

$$V_n = \int_0^{\tau_n} d\tau \int_0^{\tau} \varphi d\tau = V_0 + \sum_{n=0}^{n=n} \left\{ \frac{1}{6} \cdot (\tau_n - \tau_{n-1})^2 \cdot (\varphi_n + 2\varphi_{n-1}) + \mathfrak{F}_{n-1} \cdot (\tau_n - \tau_{n-1}) \right\} \quad (109)$$

Auch bei diesem Integral kann man sich leicht den geometrischen Aufbau (s. Fig. 50 c) veranschaulichen.

Um einen Überblick über den Fehler dieser Methode zu erhalten — der Fehler ist bei der Zerlegung der Kurve  $\varphi(t)$  in Gerade gegeben — soll ein praktisches Beispiel ausgeführt werden: es sei

$$\varphi(\tau) = \sin \tau$$

das einfache wie Doppelintegral soll für  $\tau = 1,6$  gebildet werden. Die bestehende Tabelle I gibt die Rechnung wieder.

Tabelle I.

$\tau_n$	$\varphi_n$	$\tau_n - \tau_{n-1}$	$\varphi_n - \varphi_{n-1}$	$\frac{\Delta\tau_n \cdot \Delta\varphi_n}{2}$	$\varphi_{n-1} \cdot \Delta\tau_n$	$\mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}_{n-1}$
0,0	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0,199	0,2	0,199	0,020	0,000	0,020
0,4	0,389	0,2	0,190	0,019	0,040	0,059
0,6	0,565	0,2	0,176	0,018	0,078	0,096
0,8	0,717	0,2	0,152	0,015	0,113	0,128
1,0	0,841	0,2	0,124	0,012	0,143	0,155
1,2	0,932	0,2	0,091	0,009	0,168	0,177
1,4	0,985	0,2	0,053	0,005	0,186	0,191
1,6	1,000	0,2	0,015	0,002	0,200	0,202

$\mathfrak{F}_n$	$\varphi_n + 2\varphi_{n-1}$	$(\varphi_n + 2\varphi_{n-1}) \cdot \frac{\Delta\tau_n^2}{6}$	$\mathfrak{F}_{n-1} \cdot \Delta\tau_n$	$V_n - V_{n-1}$	$V_n$
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,020	0,199	0,001	0,000	0,001	0,001
0,079	0,787	0,005	0,004	0,009	0,010
0,175	1,343	0,009	0,016	0,025	0,035
0,303	1,847	0,012	0,035	0,047	0,082
0,458	2,275	0,015	0,061	0,076	0,158
0,635	2,614	0,017	0,092	0,109	0,267
0,826	2,849	0,019	0,127	0,146	0,413
1,028	2,971	0,020	0,166	0,186	0,599

Als Ergebnis findet man

	genähert	streng	Fehler
$\int_{\tau=0}^{\tau=1,6} \sin \tau \cdot d\tau$	1,028	1,029	0,1 %
$\int_{\tau=0}^{\tau=1,6} d\tau \int_{\tau=0}^{\tau=1,6} \sin \tau d\tau$	0,599	0,600	0,17 %

Die Abweichungen sind äußerst gering. Die Genauigkeit und die Zuverlässigkeit der „Parabelmethode“ wird überhaupt davon abhängen, mit welchem Geschick man die die Kurve ersetzenden Geraden legt.

Das vorstehend beschriebene Verfahren, die „wahre Bodenbewegung“ auf direktem Wege zu erhalten, soll an einem Beispiele ausgeführt werden. Als Registrierung benutzte ich eine Kurve (Fig. 49), die die vertikale Bodenbewegung infolge einer in 80 m Entfernung vorgenommenen Sprengung anzeigt. Die Vergrößerung des Instrumentes betrug 4000, die Dämpfung  $\alpha = 0,5$  (d. h.  $k = 6$ ), seine Eigenschwingung war 0,21 sec für eine volle Periode. Die Rechnungen selbst sind in reduziertem Zeitmaße ausgeführt. Für die bequemere Handhabung der Auswertung habe ich den von den Zeitmarken geschriebenen Markenabstand  $a_0 = 0,02$  sec benutzt. Der Größe  $a_0$  entspricht ein  $\tau_0$  von

$$\tau_0 = 2\pi \cdot \frac{a_0}{T_0} = b \quad (110)$$

Die Integrale erhalten einen konstanten Faktor; wie man sieht, wird

$$1/V \cdot (r - r_0) = 2\alpha \cdot b \cdot \int_0^\tau \varphi d\tau + b^2 \cdot \int_0^\tau \int_0^\tau \varphi d\tau + B \cdot \tau + \varphi \quad (111)$$

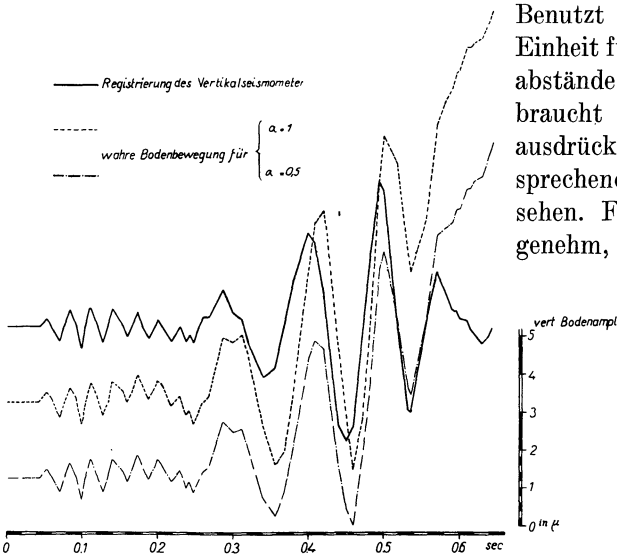


Fig. 51. Wahre vertikale Bodenbewegung zu Film Fig. 49.

Benutzt man also als neue Einheit für  $\tau$  die Zeitmarkenabstände der Stimmgabel, so braucht man die Integralausdrücke nur mit einem entsprechenden Faktor zu versehen. Ferner ist es sehr angenehm, daß man die Dämpfung ebenfalls sehr einfach berücksichtigen kann; sie kommt nur einmal als Faktor vor.

In dem gewählten Beispiel habe ich die vertikale Komponente der Bodenbewegung sorgfältig ausgemessen und die Verbindungspunkte der einzelnen Geraden in Tabelle II mit ihren Abszissen und Ordinaten angegeben. Die wahre Boden-

bewegung ist nach den Formeln (107) und (109) berechnet. Die beiliegende Skizze (Fig. 51) gibt die Ergebnisse graphisch wieder. Die Rechnung ist einmal für  $\alpha = 0,5$ , welcher Wert den Betriebsbedingungen entsprach, und für  $\alpha = 1,0$ , den aperiodischen Grenzfall, durchgeführt.

Tabelle II.

$\tau_n$	$\varphi_n$	$\mathfrak{F}_n$	$V_n$	$\tau_n$	$\varphi_n$	$\mathfrak{F}_n$	$V_n$
2,2	0,0	0,0	0,0	16,0	-2,0	+6,3	+4,1
2,7	+1,0	+1,3	+1,2	17,0	-6,6	-2,8	-2,5
3,0	0,0	+0,6	+0,4	17,8	-5,3	-8,1	-4,9
3,55	-2,0	-2,1	-2,0	18,0	-3,6	-7,9	-4,2
3,8	0,0	-0,4	-0,2	18,4	0,0	-6,2	-2,0
4,2	+2,2	+2,1	+2,2	19,0	+6,4	+1,2	+4,2
4,6	0,0	+0,7	+0,4	19,9	+12,5	+17,1	+15,0
5,0	-3,1	-3,2	-3,1	20,0	+12,4	+18,7	+15,9
5,2	0,0	-0,4	-0,1	20,4	+11,0	+23,9	+18,3
5,6	+2,6	+2,8	+2,7	21,0	+4,5	+25,6	+17,2
6,0	0,0	+0,8	+0,4	21,2	0,0	+22,7	+14,0
6,4	-2,2	1,8	-1,9	22,0	-12,8	+7,4	+1,8
6,7	+0,0	0,0	+0,1	22,5	-15,0	-2,1	-3,5
7,0	+2,4	+2,8	+2,7	23,0	-13,0	-8,7	-6,0
7,7	0,0	+1,6	+1,0	23,6	0,0	-1,9	+3,2
8,0	-1,5	0,0	-0,5	24,0	+8,5	+7,5	+11,5
8,3	0,0	+1,2	+0,9	24,7	+19,4	+29,5	+27,7
8,7	+2,0	+3,8	+3,2	25,0	+18,0	+35,4	+30,2
9,0	0,0	+2,3	+1,6	25,9	0,0	+31,6	+21,6
9,4	-1,6	+0,4	-0,1	26,0	-2,5	+29,7	+19,7
9,8	0,0	+1,8	+1,4	26,6	-10,9	+19,7	+12,1
10,0	+1,0	+3,0	+2,6	26,8	-11,2	+17,5	+11,3
10,3	0,0	+2,3	+1,8	27,8	0,0	+24,3	+21,4
10,9	-2,0	0,4	-0,5	28,0	+3,0	+28,1	+25,0
11,5	0,0	+0,9	+1,1	28,5	+7,5	+36,9	+32,3
11,9	-2,0	-1,7	-1,3	29,0	+5,0	+39,8	+33,3
12,1	-1,0	-1,0	-0,4	29,5	+2,4	+41,6	+34,0
12,4	-2,0	-2,8	-1,9	29,8	+2,3	+43,7	+35,7
12,7	0,0	-1,4	-0,3	30,0	+1,2	+44,0	+35,8
13,0	+1,2	0,0	+0,9	30,5	+1,0	+47,1	+38,5
13,4	+1,2	+0,8	+1,4	30,7	0,0	+47,1	+38,5
14,3	+5,0	+8,6	+7,6	31,0	-0,8	+47,7	+39,5
15,0	+1,9	+8,0	+6,2	31,5	-2,0	+40,1	+48,3
15,6	+1,0	+9,0	+6,6	32,0	-0,9	+43,1	+50,8
15,7	0,0	+8,1	+5,7	32,2	0,0	+52,3	+44,6

Die berechnete Bodenbewegung zeigt das überraschende Ergebnis, daß die aufgezeichnete und wahre Bodenbewegung sich im großen und ganzen recht gut entsprechen. Auffallend ist die geringe Phasenverschiebung beider Kurven. Ich ersehe darin eine Bestätigung, daß man die Bodenbewegung in erster Annäherung als sinusförmig annehmen kann. Auffallend sind die Nullpunktsverlagerungen während der ersten Einsätze, die einer größeren Periode (Fig. 52) überlagert sind. Diese größere Periode entspricht ungefähr der theoretisch zu erwartenden Bewegung, die gemäß der einfachen Ableitung von Lamb in einem unendlichen Halbraume

keine „Modulation“ zeigen dürfte. Die noch sich überlagernden Schwingungen können einmal in der Quelle selbst liegen — der Schuß ist kein reiner aperiodischer Vorgang — oder aber, das Medium ist nicht homogen, man erhält den verschiedenen Schichten entsprechend mehrere kurz aufeinanderfolgende Einsätze; schließlich schreibt eine andere Ansicht den Schichten Eigenschwingungen zu, die sich der theoretischen Bewegung überlagern würden. Ich will an einem Beispiel zeigen, daß man saubere Verhältnisse nur erhält, wenn das Medium zwischen Sende- und Empfängerstelle homogen ist, keine Dispersion zeigt und die Explosion für eine kleine Ladung gut definiert ist. Der Film 53 zeigt die Aufnahme eines Schusses



Fig. 52. Typische Bodenbewegung für die ersten Einsätze.

in tiefem Wasser bei Kronsport in der Eckernförderbucht. Die Laufstrecke betrug ca. 100 m. Der Druckverlauf — mit Mikrophon registriert — ist einfach und entspricht dem von Lamb gegebenen Beispiel. Das Bild ändert sich aber sofort wesentlich, wenn die Ladung vergrößert wird, so daß Komplikationen infolge der Gasentwicklung auftreten (Schußtiefe 3 m unter der Wasseroberfläche) und die Reflexionen an dem Meeresboden hinzutreten. Letzteren Fall zeigt Fig. 54, wo die verschiedenen Reflexionen deutlich zu sehen sind.

Weiterhin bemerkenswert sind die Perioden der einzelnen Gruppen. Ich gehe in einem anderen Abschnitte näher auf diese Verhältnisse ein.

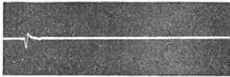


Fig. 53. Schwache Sprengladung im Wasser. Größe 1:3.

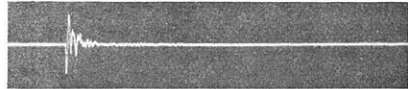


Fig. 54. Stärkere Sprengladung im Wasser. Größe 1:3.

Die Vernachlässigung der einzelnen Integrationskonstanten macht sich mit zunehmendem  $\tau$  störend bemerkbar. Ich habe schon angedeutet, daß man entweder rein zeichnerisch die neue Nulllinie konstruieren kann, oder daß sich die Nullpunktskorrekturen aus den Werten der Maxima ermitteln lassen.

Als wesentliches Ergebnis kann man wohl die Tatsache bezeichnen, daß die Bodenbewegung sich durch trigonometrische Funktionen ( $\sin$ ,  $\cos$ ) angenähert darstellen läßt und relativ getreu vom Erschütterungsmesser aufgezeichnet wird. Ferner ist selbst bei relativ einfachen Verhältnissen im Boden die Bewegung nicht so, wie man sie für ein homogenes Medium theoretisch erwarten sollte; weil sich schon die geringsten Inhomogenitäten

der obersten Erdschichten störend auswirken. Dieser Einfluß wird an zwei Wasserschallmessungen gezeigt.

### 3. Beispiele für Beobachtungen an elastischen Wellen.

#### a) Laufzeitverfahren.

Die Aufgabe der experimentellen Untersuchung mit künstlichen Erschütterungen besteht darin, die einzelnen Elemente einer elastischen Welle, d. h. ihre Ankunftszeit und die daraus abgeleitete Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ihre Periode und ihre absolute bzw. relative Amplitude zu ermitteln. Diese Ergebnisse werden dann mit denen der Theorie verglichen, um die elastischen Konstanten der durchlaufenen Schichten zu bestimmen, und so indirekt einen Einblick in ein sonst der Beobachtung nur schwer oder gar nicht zugängliches Medium zu gewinnen. Bei den

im folgenden beschriebenen Versuchen wurden die künstlichen Erschütterungen meistens durch Sprengungen im Boden hervorgerufen, um eine möglichst einfache und annähernd aperiodische Quelle zu erzielen. Die früheren Filme (Fig. 53 und 54) von Schüssen im Wasser zeigen ja bei einem homogenen, von Grenzflächen freiem Medium

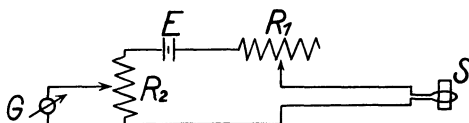


Fig. 55. Elektrische Anordnung zur Registrierung des Sprengmomentes.

*E* Taschenlampenbatterie.

*R*<sub>1</sub>) Regulierwiderstand } 500 Ω

*R*<sub>2</sub>) } 0,1 Ω

*G* Schleifengalvanometer

*S* Sprengladung.

recht einfache Verhältnisse, die eine Übertragung auf den Boden gerechtfertigt erscheinen lassen; übrigens ist diese Methode der Erzeugung von Erschütterungen in der Praxis auch schon längst üblich. Die Bestimmung des Schußmomentes — der Sprengstoff explodiert zeitlich so schnell, daß man von einem Schußmoment sprechen darf — geschah mittels eines „Ruhestromes“, der um die Sprengladung *S* und durch das Galvanometer *G* floß; in dem Augenblick der Explosion (Fig. 55) wurde der Ruhestrom abgeschaltet und das Galvanometer ging in seine Ruhelage zurück. Diese Methode ermöglicht, den Sprengmoment beliebig vieler Sprengungen<sup>1)</sup> parallaxenfrei mit demselben Galvanometer, das auch die Mikrophonströme registriert, mit einer den übrigen Einsätzen entsprechenden Zeitgenauigkeit auf den Film zu bringen.

Um die Geschwindigkeit einer Bodenwelle zu bestimmen, erscheint es als das Einfachste, die Bodenbewegung an zwei Stellen bei demselben

1) Bei mehreren zeitlich aufeinanderfolgenden Sprengungen sind die einzelnen Ruhestromleitungen mit entsprechenden Widerständen parallel geschaltet.

Schüsse zu registrieren, die mit der Schußstelle in einer Linie liegen. In  $P_1$  und  $P_2$  (Fig. 56) war je ein Bodenmikrophon aufgestellt, die den von  $S$  kommenden Bodenschall registrierten, aus der Zeitdifferenz der Einsätze in  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt sich in Verbindung mit der bekannten Entfernung

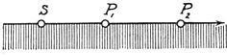


Fig. 56. „Durchgangsschießen“.

$P_1 P_2$  die zugehörige Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Es wird dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß die betreffende Welle parallel zur Oberfläche gelaufen ist. Die Betrachtungen an den Laufzeitkurven werden zeigen, daß dieses „Durchgangsschießen“ mit sehr großer Vorsicht zu gebrauchen ist, da die Strahlenbahn mit in Rechnung gezogen werden muß.

Bei Versuchen in der Gegend von Jena war  $P_1 P_2 = 40$  m,  $P_1 S = 50$  m. Die Mikrophone zeigten folgende drei charakteristischen Einsätze.

	Laufzeiten		Geschw.	Schicht
	$t_{P_1}$	$t_{P_2}$		
	sec			
1. Einsatz	0,040	0,060	2000 m/sec	Gips
2. Einsatz	0,154	0,274	333 „	Luft
3. Einsatz	0,300	0,460	250 „	Auelehm mit Sand

Die direkten Laufzeiten  $t_{P_1}$  und  $t_{P_2}$  darf man nicht verwenden, die so erhaltenen Geschwindigkeitswerte müssen wegen der Bahnform zu klein ausfallen. Benutzt wurde diese Methode wegen der den Werten anhaftenden Unsicherheit nur für informatorische Bestimmung der Fortpflanzungs-

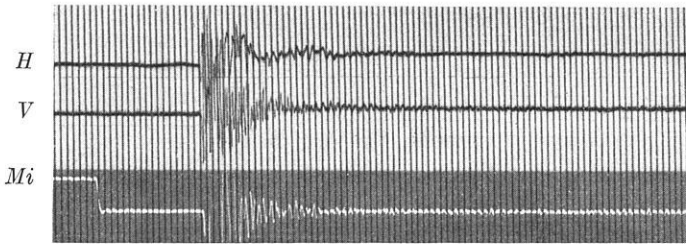


Fig. 57. Luftschuß in 120 m Entfernung. Größe 1:2.

geschwindigkeit; die Entfernungen  $P_1 S$  und  $P_1 P_2$  hängen von der Tiefe und Mächtigkeit der einzelnen Schichten ab.

Ein anderes, der Arbeitsweise der Erdseismik nachgebildetes und zuerst für experimentelle Untersuchungen systematisch von Mintrop<sup>1)</sup> angewandtes Verfahren ist das „Schießen von Laufzeitkurven“. Der

1) Mintrop, L., D. R. P. 304317 vom 17. Mai 1917. — Ders., Erforschung von Gebirgsschichten und nutzbaren Lagerstätten nach dem seismischen Verfahren. Hannover 1922.



Empfänger am Beobachtungsort (Erschütterungsmesser bzw. Mikrophon) bleibt fest, und die Schußstellen liegen auf einer Geraden (oder in besonderen Punktkombinationen) in verschiedenen Entfernungen. Die den einzelnen Entfernungen zugehörigen Laufzeiten werden für die verschiedenen Einsätze bzw. Wellengruppen in einem Koordinatensystem aufgetragen. Um möglichst ökonomisch mit der aufgewandten Energie umzugehen, will ich an zwei Registrierungen zeigen, wie wichtig es ist, die Sprengladung in den Boden einzugraben. Die Fig. 57 zeigt einen Schuß in 120 m Entfernung, wobei — um den Unterschied sehr deutlich herauszuarbeiten — sich der Sprengstoff 1 m über dem Boden befand. Fig. 58 zeigt denselben Schuß, nur mit dem Unterschied, daß die Ladung 1 m tief in einem Bohrloche verdämmt wurde. Die beiden Registrierungen ähneln sich äußerlich in keiner Weise. In Fig. 57 tritt der Luftschall mit seiner sehr kurzen Periode von ca. 0,02 sec sehr stark hervor, der bei der zweiten Sprengung von den beiden Erschütterungsmessern fast

nicht angezeigt wird; ferner ist die kurze Periode des Luftschalles gar nicht zur Ausbildung gekommen. Will man auch die tieferen Schichten des Bodens

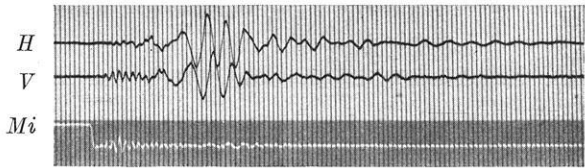


Fig. 58. Verdämte Sprengladung in 120 m Entfernung. Größe 1:3.

zum Ansprechen bringen, so ist es unbedingt erforderlich, die Schußenergie im Boden zu behalten. Bei Fig. 57 ist der in den Boden eingedrungene Energieanteil so gering, daß man am Anfang der Registrierung so gut wie keine Einsätze von den unteren Schichten sieht (Vergrößerung 4000fach). Der Mikrophonempfänger (*Mi*) war 1 m unter der Oberfläche in einem Bohrloch untergebracht, deshalb wird der Schall von diesem Instrument einige  $\frac{1}{1000}$  sec später aufgezeichnet. Ebenso ist zu erklären, daß die Oberflächenwellen nur schwach angedeutet sind. Diese beiden Schüsse (Fig. 57, 58) zeigen, wie wichtig es ist, für die richtige Auswertung von solchen Registrierungen die genauen Versuchsbedingungen zu kennen. Die Schüsse mit kleinen Ladungen, bei denen sich eine Tiefe bis zu einigen Metern als hinreichend erwies, um die Schußenergie im Boden festzuhalten, zeigen durchweg sowohl bei den Kurven der Erschütterungsmesser (*H*, *V*) als auch denen der Bodenmikrophone (*Mi*) keinen ausgesprochenen Luftschall, so daß man auch bei kleinen Entfernungen gut die Wellen der obersten Erdschichten auseinanderhalten kann, die sich für sandig-lehmigen Boden zwischen 80 und 400 m/sec bewegen können. Beachtet man diese Vorsichtsmaßregeln nicht, so hat man bei der Entzifferung meistens be-

trächtliche Schwierigkeiten. Den Schußmoment aus dem Luftschall zu bestimmen, wie es mitunter empfohlen und wohl auch benutzt wird, halte

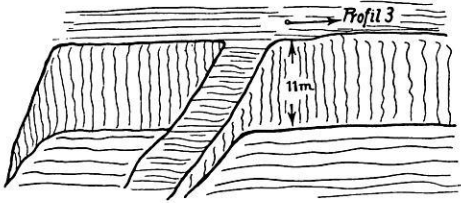


Fig. 59. Lehmgrube bei Kahla.

ich für wenig ratsam, da hiermit Fehler verbunden sind, die die Zeitgenauigkeit beträchtlich heruntersetzen. Was die Reproduzierbarkeit der einzelnen Schußregistrierungen bei gleicher Ladung und gleicher Entfernung angeht, so hat sich herausgestellt, daß

der Kurventyp der gleiche bleibt; die Laufzeiten der einzelnen Wellen sind mit einer Genauigkeit von ca.  $1 \cdot 10^{-3}$  sec ebenfalls wieder zu erhalten. Ausführliches Material soll später in anderem Zusammenhange gegeben werden. Es hat für die Gesteine an der Erdoberfläche keinen großen Zweck, die Zeitgenauigkeit noch weiter zu treiben, als die geschilderte Apparatur leistet.

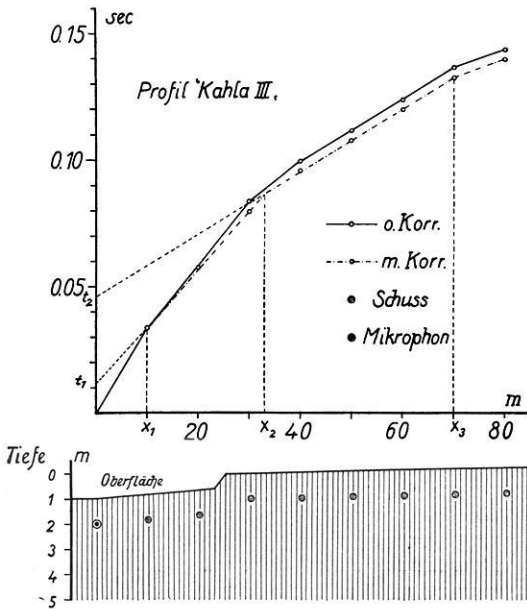


Fig. 60. Laufzeitkurve zu Profil III bei Kahla.

für die ersten Einsätze sind mit einem Mikrophonempfänger gewonnen. Die Werte sind für Profil III, Kahla:

Entfernung	Laufzeit	Entfernung	Laufzeit
10 m	0,034 sec	50 m	0,112 sec
20 „	0,058 „	60 „	0,124 „
30 „	0,084 „	70 „	0,137 „
40 „	0,100 „	80 „	0,144 „

1) Meißer, O., u. Martin, H., a. a. O., p. 25. d. A.

Die Messungen fanden bei Kahla i. Thür. an einem 10—12 m mächtigen Lößvorkommen statt, das über Buntsandstein lag (Fig. 59). Das Vorkommen wird in einem Ziegeleibetrieb abgebaut. Um eine Kontrolle für die Homogenität des Materials zu haben, wurde das Profil parallel dem Grubenrande in ca. 20 m Entfernung geschossen. Die Lage der Schußlinie ergibt sich aus der schematischen Geländeskizze in Fig. 59. Die unkorrigierte Laufzeitkurve (Fig. 60) zeigt einen gebrochenen Linienzug, der auf eine Schichtung des Löß schließen läßt. Die Verschiedenheit in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dürfte wohl hauptsächlich mit auf die starke Entkalkung in den obersten Schichten zurückzuführen sein, da an den Grubenwänden keine ausgesprochene Schichtung sich feststellen ließ.

Aus der Laufzeitkurve soll die Tiefe und Mächtigkeit der einzelnen Schichten abgeleitet werden. Zunächst würde man daran

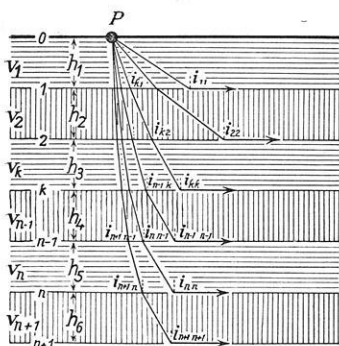


Fig. 61<sup>1)</sup>. Strahlengang in einem n-fach geschichteten Medium.

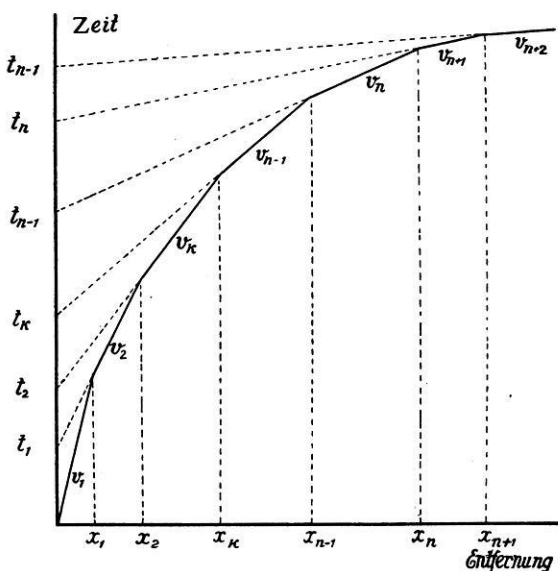


Fig. 62. Laufzeitkurve für ein n-fach geschichtetes Medium.

denken, das strenge sogenannte Wiechert-Herglotzsche Verfahren gemäß der Formel

$$h_x = \frac{1}{\pi} \int_0^x \ln \{ p + \sqrt{p^2 - 1} \} dx \quad (75)$$

zur Tiefenbestimmung anzuwenden. Diese Formel ist jedoch unter der Voraussetzung  $\frac{d^2 T}{dx^2} < 0$  abgeleitet, die für die vorliegende Laufzeitkurve

1) In Fig. 61 muß es heißen  $h_k, h_{n-1}, h_n, h_{n+1}$  statt  $h_3, h_4, h_5$  und  $h_6$ .

sicher nicht erfüllt ist, da  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$  ist. Man muß für diesen Sonderfall die Formeln direkt für ein Medium mit Schichten konstanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit ableiten. Die Bezeichnungen der einzelnen Schichten und Winkel entnehme man den Fig. 61, 62. Der Grenzstrahl längs der  $n$ -ten Schicht läuft mit einer Geschwindigkeit  $v_{n+1}$ , sein Auffallwinkel ist gegeben durch

$$\sin i_{n,n} = \frac{v_n}{v_{n+1}} \quad (111)$$

Der Einfallswinkel in die  $k$ -te Schicht bestimmt sich zu

$$\sin i_{k,n} = \frac{v_k}{v_{n+1}} \quad (112)$$

der Emergenzwinkel ist

$$\cos e_{1,n} = \frac{v_1}{v_{n+1}} \quad (113)$$

Die Laufzeit des in der  $n$ -ten Grenzschicht gelaufenen Strahles  $T_{x,n}$  berechnet sich zu

$$T_{x,n} = 2 \sum_k^n \frac{h_k}{v_k \cdot \cos i_{k,n}} + \frac{x}{v_{n+1}} - 2 \sum_k^n \frac{h_k}{v_{n+1}} \cdot \operatorname{tg} i_{k,n} \quad (114)$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch etwas vereinfachen, wenn man beachtet, daß

$$\cos i_{k,n} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_k}{v_{n+1}}\right)^2}$$

Es wird

$$T_{x,n} = \frac{x}{v_{n+1}} + 2 \sum_k^n \frac{h_k}{v_k} \cdot \cos i_{k,n} \quad (115)$$

Die Laufzeitkurve ist eine Gerade, die aber nur für solche Werte  $x$

$$x > 2 \cdot \sum_k^n h_k \cdot \operatorname{tg} i_{k,n} = x'_n$$

gilt. Die Kurve muß für  $x < x'_n$  in eine Hyperbel übergehen, die die Zeitachse im Punkte

$$t_n = 2 \cdot \sum_k^n \frac{h_k}{v_k} \quad (116)$$

schneidet. Für die folgenden Betrachtungen soll der Hyperbelzweig unberücksichtigt bleiben, da man experimentell den geraden Teil der Laufzeitkurve von  $x > x'_n$  bequemer ermitteln kann. Verlängert man die Gerade  $T_{x,n}$  auch für Werte  $x < x'_n$  und bringt sie mit der Ordinatenachse zum Schnitt, so erhält man für die Ordinatenabschnitte zur Bestimmung der Schichtmächtigkeiten  $h_k$  die folgende Relation

$$t_n = 2 \cdot \sum_k^n \frac{h_k}{v_k} \cdot \cos i_{k,n} = 2 \cdot \sum_k^n \frac{h_k}{v_k} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_k}{v_n}\right)^2} \quad (117)$$

Eine weitere Relation für die Tiefenbestimmung ergeben die Abszissen  $x_n$  der Knickpunkte in der Laufzeitkurve. Die mathematische Bedingung für eine solche Abszisse ist, daß der Strahl aus zwei aufeinanderfolgenden Schichten gleichzeitig ankommt, da  $x_n$  stets  $> x'_n$  ist, so gilt die Gleichung der Geraden

$$T_{x_n,n} = T_{x_n,n+1}$$

oder ausgeführt

$$x_{n+1} - 2 h_{n+1} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{v_{n+1}}{v_{n+2}}\right)}{1 - \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}}} \right\}^{1/2} + \frac{2 \cdot v_{n+1}}{\left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}}\right)} \sum_k^n \frac{h_k}{v_k} (\cos i_{k,n+1} - \cos i_{k,n}) \quad (118)$$

Diese beiden Formeln (117) und (118) werden unter der physikalisch nur mit Hilfsannahmen zu stützenden Voraussetzung, daß die Anregung der Schichten durch einen senkrechten Strahl stattfindet, bedeutend einfacher, sie gehen über in

$$t_n = 2 \cdot \sum_k^n \frac{h_k}{v_k} \quad (117')$$

oder auch

$$h_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{2} \cdot v_n$$

Die Knickstellen  $x_n$  genügen der Beziehung

$$x_n = \frac{2 h_n}{1 - \frac{v_n}{v_{n+1}}} \quad (118')$$

oder auch

$$h_n = \frac{x_n}{2} \left(1 - \frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$$

Die Auswertungsformeln für mehrere Schichten (117) und (118) sind erheblich unhandlicher als für ein gewöhnliches Zweischichtenmedium.

Praktischerseits wird man systematisch vorgehen und die Rekursionsformeln wiederholt anwenden. Obwohl vom energetischen Standpunkt gegen die Rechnung mit dem Grenzstrahl sehr erhebliche Bedenken sich geltend machen lassen, soll doch die Auswertung nach diesen Formeln an der gegebenen Laufzeitkurve mit vorgenommen werden.

Die durch die Beobachtung gegebenen Laufzeiten (Fig. 60) müssen noch auf eine horizontale Oberfläche reduziert werden. Der Empfänger und die Schüsse waren je 1 m tief im Boden eingegraben. Die Oberfläche wurde ausnivelliert, das entsprechende Profil ist in der Fig. 60 unter der Laufzeitkurve gegeben. Man muß an den beobachteten Eintrittszeiten bei Entfernungen über 25 m eine Terrainkorrektur von  $-0,004$  sec anbringen, da das Gelände um 1 m angestiegen ist und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der obersten Lößschicht 250 m/sec beträgt, wie die Messungen an anderen Profilen an demselben Vorkommen zeigen. Der Rechnung für die Tiefe der Lößschicht werden folgende Daten zugrunde gelegt:

Knickpunkte	Ordinatenabschn.	Geschwindigkeiten
$x_1 = 10$ m	$t_1 = 0,012$ sec	$v_1 = 294$ m/sec
$x_2 = 33$ „	$t_2 = 0,046$ „	$v_2 = 435$ „
$x_3 = 70$ „	—	$v_3 = 810$ „
—	—	$v_4 = 1430$ „

Es galt nun, die Lößmächtigkeit zu berechnen, die sich nach den Messungen längs der Grubenwand zu 10 m<sup>1)</sup> ergeben hatte. Unter dem Löß kam eine tiefere Bank Kalk mit Sand vermischt, die eine Wellengeschwindigkeit von ca. 800 m/sec zeigt, wie in einem anderen Profile in der Grube gefunden wurde. Wendet man die einzelnen Formeln zur Berechnung der Schichtdicke an, so erhält man für die Lößmächtigkeit  $h_1 + h_2$

- 10,0 m gemessen am Grubenrand,
- 14,7 m nach der Wiechert-Herglotzschens Methode (75),
- 10,8 m Knickpunkte der Laufzeitkurve (117),
- 11,0 m Ordinatenabschnitte der Laufzeitkurve (118),
- 9,4 m Knickpunkte der Laufzeitkurve (117'),
- 9,2 m Ordinatenabschnitte der Laufzeitkurve (118').

Die Zusammenstellung zeigt, daß — wie wegen der Voraussetzung  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} < 0$

zu erwarten war — die strenge Integralformel (75) versagt und auch versagen muß, der durch Integration gefundene Wert ist viel zu groß. Auffallend ist ferner das Ergebnis für die Grenzstrahlen; die Tiefe ergibt sich um 1 m zu groß (117), (118), während die sehr stark angenäherte Formel

1) Vom Mikrophon bis zur Grubensohle gerechnet.

(117'), (118') einen Wert finden läßt, der nur wenig zu klein ist. Eine exakte Nachprüfung der berechneten Tiefen läßt sich nur bei Sprengversuchen im Wasser durchführen, weil hier einmal die Homogenität des Mediums weitestens gewahrt ist und man jederzeit die Tiefen genau nachmessen kann. Die Messungen im Löß bei Kahla zeigten für die gestellte Aufgabe, seine Mächtigkeit bis auf 2 m sicher zu ermitteln, eine genügende Genauigkeit; um jedoch einwandfrei den Strahlengang des Schalles im Boden feststellen zu können, reichen sie nicht aus, obwohl die große Zeitgenauigkeit und die kleinen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einen erheblichen Vorteil boten.

### b) Emergenzwinkel.

Die theoretischen Betrachtungen über den Emergenzwinkel zeigten, daß er für einfallende Longitudinalwellen nur bei senkrechtem Einfall gegen die Oberfläche direkt meßbar ist; in allen anderen Fällen ergab sich nur der scheinbare Emergenzwinkel, der sich aber auf den wahren umrechnen läßt. In der Literatur<sup>1)</sup> ist das experimentelle Ergebnis mitgeteilt, daß man schon bei kurzen Entfernungen und günstigem Gelände nahezu senkrechten Einfall erhält. Messungen der Reichsanstalt für Erdbebenforschung bestätigen im wesentlichen dieses Ergebnis. Es wurde in Kunitz bei Jena in einem Gelände, wo unter einer Decke aus Lehm und Sand, Gips und Buntsandstein (2500 m/sec) lag, gefunden

Schußentfernung	5 m	15 m	20 m	30 m
scheinbarer Emergenzwinkel	29°	45°	70°	>70°, <85°

Die Messungen zeigen auch für weitere Schüsse als 200 m, daß der scheinbare Emergenzwinkel sicher nicht 90° ist, d. h. man müßte sonst keine entsprechende Horizontalkomponente finden. Ich möchte sagen, daß wohl der Winkel sich nahe einem rechten bewegt, aber die Meßgenauigkeit wegen der relativen Größe der horizontalen Einsätze meistens nicht ausreicht, um sicher die paar Grad Differenz anzugeben, die er von 90° abweicht, zumal die Tangensfunktion sehr groß wird. Die Theorie zeigt ferner gemäß der Relation

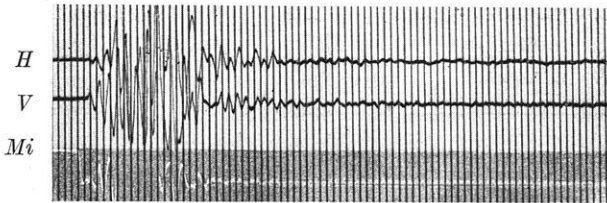
$$\cos e = \frac{\partial T}{\partial x}$$

daß, wenn die Laufzeitkurve eine Gerade ist, die entsprechenden horizontalen und vertikalen Einsätze ein konstantes Amplitudenverhältnis ergeben müssen, falls die Erschütterungsmesser gleiche Periode und Dämpfung haben, d. h. der Emergenzwinkel ist konstant für die entsprechenden Entfernungen.

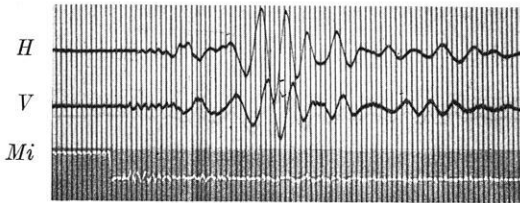
1) Schweydar, W. und Reich, H., Zeitschr. f. Geophysik 1926.

c) Perioden.

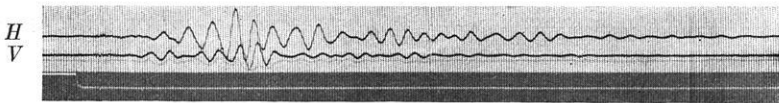
Betrachtet man mehrere Schüsse, die in verschiedenen Entfernungen vom Empfänger gesetzt worden sind, so fällt dem Beobachter sofort auf, daß mit wachsender Entfernung die Perioden größer werden und die einzelnen Einsätze für Wellen, die in den obersten Schichten gelaufen



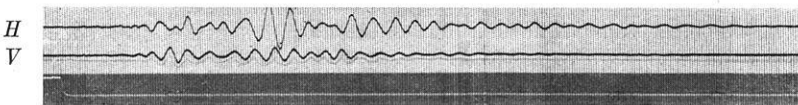
Schußentfernung 20 m. Größe 1:2,5.



Schußentfernung 90 m. Größe 1:2,5.



Schußentfernung 300 m. Größe 1:5.



Schußentfernung 400 m. Größe 1:5.

Fig. 63. Registrierungen künstlicher Sprengungen in verschiedenen Entfernungen.

*H* = Horizontalseismometer.

*V* = Vertikalseismometer.

*Mi* = Mikrofonempfänger mit Sprengmomentmarkierung.

sind, mehr und mehr verwaschen und allmählich in einem allgemeinen „Auf- und Abwogen“ der Bodenbewegung untergehen. Um diese Tatsache rein experimentell zu illustrieren, zeige ich mehrere Filme (Fig. 63), die wiederum bei Kunitz registriert worden sind. Die Registrierungen zeigen die Bewegung des horizontalen (*H*) und vertikalen (*V*) Er-



schütterungsmessers, am Rande gibt ein Schleifengalvanometer ( $M_i$ ) den Schußmoment und die Stromschwankungen eines Bodenkohlemikrophons wieder. Die Schüsse sind absichtlich schwach geladen und nur mit einer geringen Vergrößerung (4000fach) registriert, um die längeren, sich in den oberen Schichten fortpflanzenden Wellen recht zur Geltung kommen zu lassen. Die Kurve (Fig. 63a) zeigt die Periode der mit  $v = 250$  m/sec gelaufenen Welle in Abhängigkeit von der Entfernung. Eine weitere experimentelle

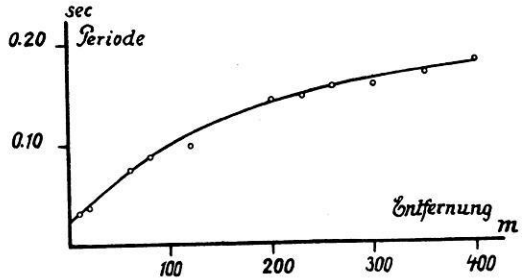


Fig. 63a. Abhängigkeit der Periode von der Entfernung.

Tatsache geben zwei Filme von zwei Sprengungen auf dem Truppenübungsplatz in Jüterbog mit 50 bzw. 300 kg Sprengladung wieder. Die Erschütterungsmesser waren in 1,8 km Entfernung von der Sprengstelle aufgestellt. Die beiden Registrierungen

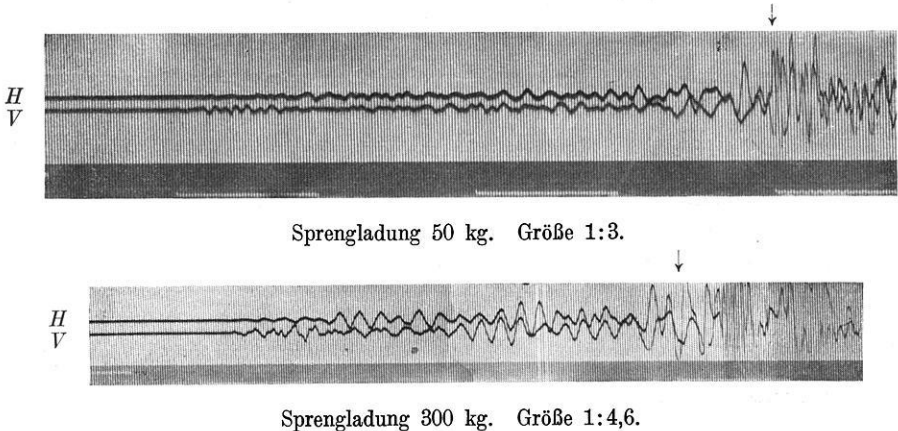


Fig. 64. Horizontale ( $H$ ) und vertikale ( $V$ ) Bodenbewegung zweier Sprengungen in Jüterbog.

(Fig. 64) zeigen die interessante Tatsache, daß die Periode (↓Fig. 64) der Bodenbewegung der obersten Schichten im hohen Maße von der Größe der Sprengladung abhängt, die Werte sind

Schuß 50 kg: 0,112 sec-Periode vor dem Luftschall,

Schuß 300 kg: 0,160 sec-Periode vor dem Luftschall.

Als weiteres hierher gehöriges Material betrachte ich auch die beiden Schüsse (Fig. 57, 58), von denen der eine in Luft, der andere im Boden

zur Explosion gebracht worden war. Diese Tatsachen sind mit der Vorstellung über den Wellenmechanismus in Einklang zu bringen. Das Anwachsen der Periode mit der Entfernung kann man einmal aus der Hydrodynamik an Hand der Wasserwellen erklären. Der Grund dafür liegt in der Dispersion des Mediums, es treten — wie in Teil I gezeigt — Wellengruppen auf mit den ihnen charakteristischen Gruppengeschwindigkeiten. Die einzelnen Perioden wachsen bei Wasserwellen mit der Herdentfernung linear. Einen physikalischen Grund kann man für die Selektivität für lange Wellen mit der Frequenzabhängigkeit der Absorption erklären. Wird in dem elastischen Medium die innere Reibung berücksichtigt, so ergibt sich, daß der Schallabsorptionskoeffizient in dem Exponentialgesetz umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge ist, d. h. also je länger eine Welle, um so größer ist ihre Reichweite<sup>1)</sup>. Die kurzperiodigen Schwingungen laufen sich schneller tot.

Die bisherigen Betrachtungen über die Perioden geben — abgesehen von dem Begriff der Gruppengeschwindigkeit — keinen direkten Grund für die Entstehung der Wellen. Die Quelle — der Schuß — ist bei kleinen Energien nicht in dem Maße mit einer Modulation behaftet, wie die Wassererschüsse zeigen; mithin kann der Grund nur im Medium selbst liegen. Die Betrachtungen an Wasserwellen zeigen, daß, sobald in einem Medium Dispersion vorhanden ist, man mit dem Auftreten von Wellenzügen rechnen muß. Diese Gruppen, die sich vornehmlich für Oberflächenwellen ausbilden, zeigt Fig. 63 (400 m). Für die in tieferen Schichten verlaufenen Strahlen schreibt man die Perioden den „Schichtschwingungen“ zu<sup>2)</sup>. Diese Vorstellung ist in der Anwendung auf unsere Versuche immerhin mit einigen Schwierigkeiten verbunden, da wir bei den kurzdauernden Schüssen keinen stationären Zustand wie bei dauernd wirkenden Quellen (Maschinen, Eisenbahn usw.) haben und man bei den verschiedenen Lagerungsverhältnissen recht komplizierte Koppelungsbedingungen haben dürfte. Schlecht läßt sich dann auch die Abhängigkeit der Periode von der Entfernung und der Ladung bei den obigen Versuchen in Einklang bringen. An dem Aussehen der experimentellen Kurven und dem Befund der Schichtung des Geländes soll das Verhalten der Perioden in verschiedenen Entfernungen etwas verständlich gemacht werden. Nimmt man an, verschiedene recht dünne Schichten liegen übereinander; ferner soll sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_n$  der Schicht  $n$  nur um  $dv$  von der der Schicht  $n + 1$  (Dicke  $dh_n$ ) unterscheiden. Die Quelle werde wieder stoßartig angenommen. Am Empfänger kommen dann kurz

---

1) Berger, a. a. O., p. 8 d. A.

2) Angenheister, a. a. O., p. 5 d. A.

aufeinander die Strahlen aus der Schicht  $n$  und  $n + 1$  an, ihre Zeitdifferenz wird in roher Annäherung

$$T_{n+1} - T_n \sim \frac{2 dh_n}{v_n} + \frac{x \cdot \partial v}{v_n^2}$$

Es kommt mir nur darauf an, zu zeigen, daß die Zeitdifferenz der beiden Einsätze, die man als eine Art von Halbperiode auffassen kann, mit der Entfernung wächst und für sehr herdnahe Beobachtungspunkte einem Grenzwerte zustrebt, der durch die Schichtdicke gegeben ist. Gestützt wird diese Ansicht, das Zustandekommen der Perioden bei diesen Versuchen durch aufeinanderfolgende Einsätze aus sehr dünnen Schichten aufzufassen, durch das zackige (†) Aussehen der Kurven, wie das Beispiel in Fig. 65 zeigt. Die Jüterboger Registrierungen (Fig. 64) geben ebenfalls klar denselben Charakter der Bewegung in den ersten Einsätzen zu erkennen. Die mit der Entfernung wechselnde Phase der Strahlen verändert auch das Kurvenbild mit der Laufstrecke.

Was die Abhängigkeit der Periode von der Schußenergie bei gleicher Entfernung angeht, so könnte man vielleicht auch mit einer Anregung der kleinen Schichten auskommen, deren Einsätze größer aufgezeichnet werden und die Periode somit verlängern.

Die Ansicht von den Schichtschwingungen bietet hier ebenfalls bei der Erklärung einige Schwierigkeiten. Eine den physikalischen Verhältnissen mehr gerecht werdende Darstellung erhält man, wenn die Hertz'sche Theorie des Stoßes auf den Schuß im Boden angewandt wird und man die „Stoßzeit“ betrachtet, die mit der aufgewandten Energie wächst. Eine genauere Zahlenangabe soll später mit den nötigen Formeln gegeben werden. Dieser experimentelle Befund, daß die Periode mit der Schußenergie zunimmt, stellt eine schöne Bestätigung für die Verhältnisse bei Erdbeben dar. Tams<sup>1)</sup> hat für Beben desselben Herdes in der Nordenskiöld-See, die verschiedene Intensitäten besaßen, gefunden, daß mit größerer Bebenenergie die Periode merklich zunahm. Die Ergebnisse der Jüterboger Sprengungen bestätigen experimentell das Resultat von Tams.

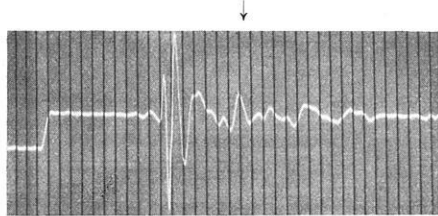


Fig. 65. Schuß mit Bodenmikrophon in 70 m Entfernung. Größe 1:2,5.

1) Tams, E., Vergleichende Untersuchung der Vorläufer und Nachläuferperioden in den Hamburger Diagrammen von drei Beben der Nordenskiöldsee. Gerlands Beiträge zur Geophysik, XVII, 4, 1927, p. 434—442.

Zusammenfassend möchte ich bemerken, daß die strenge physikalische Erklärung der Perioden noch ein ungelöstes mathematisches Problem ist und es auch sein muß, weil die bisherige mathematische Behandlung der elastischen Gleichungen immer nur die aus den Grenzbedingungen berechneten stehenden Wellen betrachtet hat, ohne, wie Lamb es für Rayleighwellen durchgeführt hat, auch die entsprechenden Anfangsbedingungen in einem dispersiven Medium einzuführen, wie von Love angedeutet. Solange auf dieser Grundlage noch keine exakten Untersuchungen vorliegen, sind alle Theorien über den Wellenmechanismus bei künstlichen Sprengungen nur vorläufige Annahmen, die ein Verständlichmachen der Erscheinungen gestatten.

#### d) Amplitudenverfahren.

Die Intensitätsmessungen bei rein experimentellen Untersuchungen (ich sehe von den in der großen Seismik üblichen Methoden hier ab) werden dazu benutzt, um die Abnahme der Bodenerschütterungen mit der Entfernung von der Quelle festzustellen. Diese Methoden spielen eine große Rolle bei der Beurteilung des Einflusses vom Verkehr auf Baulichkeiten.

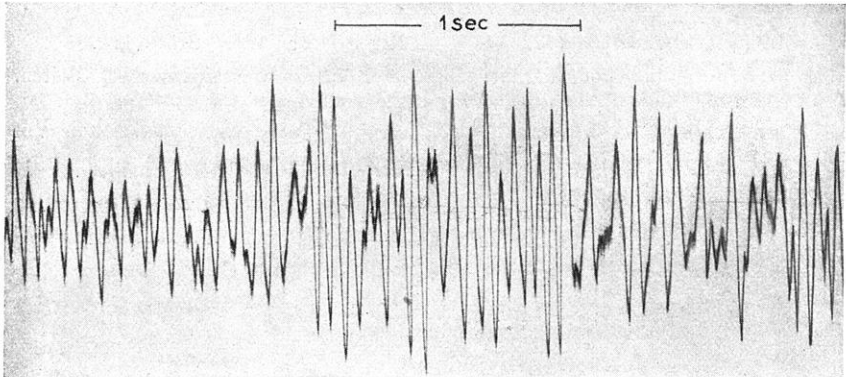
Die theoretischen Grundlagen der Energieabnahme einer Welle mit der Entfernung liegt in ihrem Ansatz begründet. Die Wellen in einem elastisch-homogenen Medium nehmen, wie es die Form der Kugelwelle verlangt, mit  $1/r^2$  ab ( $r$  Entfernung : Herd-Beobachter); die Oberflächenwellen hingegen haben eine mit  $1/r$  proportionale Energie. Die experimentelle Abnahme der Energie ist nur selten genauer untersucht worden. Gebräuchlicher dafür ist ein anderes Verfahren, die Intensität der Bodenbewegung mit anderen Quellen relativ zu vergleichen, z. B. die Bodenerschütterung von Fahrzeugen in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit, der Fahrzeugart usw.

Auf einzelne Untersuchungen und das entsprechende Material will ich nicht näher eingehen, es soll nur an zwei Beispielen gezeigt werden, wie schnell die Wellen mit kurzer Periode in den obersten Erdschichten mit der Entfernung vom Herd abnehmen und nur die längeren Wellen vorherrschen. Die drei folgenden Stationen (Fig. 66) waren in Köln in der Nähe einer verkehrsreichen Straße gemessen.

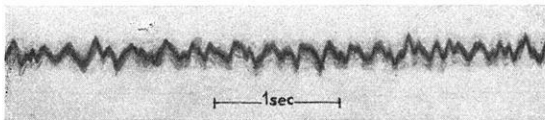
Film	1	2	3
Entfernung von der Straße	12 m	80 m	300 m

während ein schweres mit Ziegelsteinen beladenes Auto in 30 km Fahrgeschwindigkeit über die Versuchsstrecke fuhr. Die im Film 2 und 3 überwiegenden längeren Perioden von 0,3—0,4 sec sind für Köln typisch; sie gehören der sogenannten Stadtunruhe an. Um einen Beweis dafür zu erhalten, daß man es mit einer industriellen Bodenunruhe zu tun hat,

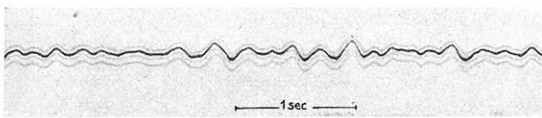
folgen zwei Filme (Fig. 67), die am Rande der Stadt mittags bzw. abends registriert wurden. Die beiden Kurven zeigen deutlich eine größere Ruhe abends als während der Arbeitszeit. Die Vergrößerung der horizontalen Komponente beträgt 3400. Während bei den Kölner Versuchen der Untergrund aus lockerem Boden besteht, zeigen die folgenden Kurven (Fig. 68) auch



Film 1. Größe 1:1



Film 2. Größe 1:2.



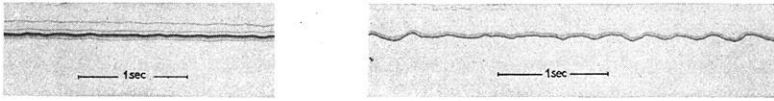
Film 3. Größe 1:2.

Fig. 66. Horizontale Bodenbewegung in verschiedener Entfernung von einer Verkehrsstraße beim Vorbeifahren eines Lastwagens mit 30 km Geschwindigkeit (Köln).

auf festem Boden dasselbe Bild der Energieabnahme von schnellen Schwingungen. In der Zeisszentrale, Jena, steht ein Turbogenerator mit einer Umdrehungszahl von 3000 pro min auf einem Betonfundament, das direkt auf festem Buntsandstein aufsitzt. Die Registrierstationen lagen

Station	1	2	3
Entfernung vom Turbogenerator	auf dem Fundament	50 m	200 m

Die Aufnahmen wurden ebenfalls mit einem Horizontalseismometer gemacht. Die Filme in Fig. 68 zeigen auch wiederum eine schnelle Abnahme der Amplitude für die kurzperiodischen Schwingungen.

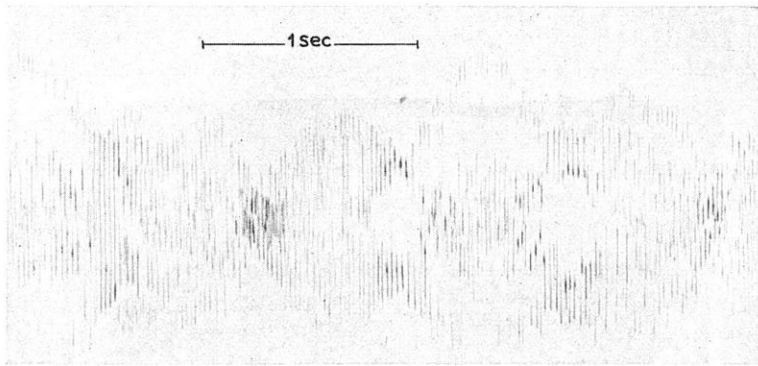


Registrierzeit 19<sup>h</sup>. GröÙe 1:2.

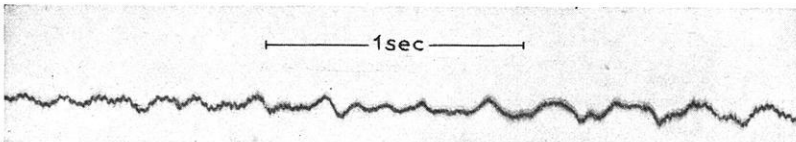
Registrierzeit 12<sup>h</sup>. GröÙe 1:2.

Fig. 67. Horizontale Bodenunruhe auÙerhalb Kölns zu verschiedenen Tageszeiten.

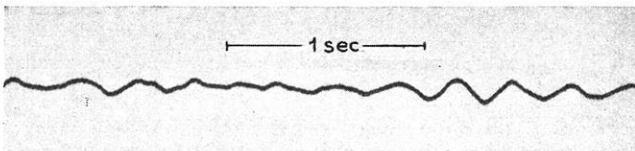
Der Originalität halber möchte ich noch ein rein akustisches Verfahren erwähnen<sup>1)</sup>, das die Laufzeitmessungen indirekt auf Intensitäts-



Station 1.



Station 2.



Station 3.

Fig. 68. Horizontale Bodenbewegung durch einen Turbogenerator, dessen Fundament auf Buntsandstein steht.

1) Fessenden, Reginald R., U.S.A., Pat., 1 240 328.

messungen reduziert. Man benutzt im Boden als Quelle einen ungedämpften Schallsender und betrachtet dann das Schallfeld an der Oberfläche, um aus seinem Verlauf die Lage und Mächtigkeit der einzelnen akustischen Grenzflächen zu ermitteln. Die näheren Auswertungsformeln und eine experimentelle Apparatur werden später an anderer Stelle gegeben.

In den vorstehenden Zeilen habe ich den Versuch unternommen, die Hilfsmittel und die theoretischen Grundlagen, soweit sie für experimentelle Zwecke benötigt werden, in gedrängter Form darzustellen, indem ich mich entweder an bekannte Darstellungen in den Grundzügen angeschlossen habe oder eigene Wege gegangen bin. Besonderen Wert legte ich darauf, überall die Grenzen der theoretischen Annahmen und ebenso die Grenzen für die Leistungsfähigkeit der experimentellen Anordnungen und Versuche zu zeigen.

Aufgabe späterer Untersuchungen ist es nun, die angeschnittenen Probleme weiter zu verfolgen. Es müssen in systematischer Arbeit die verschiedenen Fragen über den Wellenmechanismus geklärt werden. Ferner sind an den einzelnen geologischen Vorkommen die dynamischen elastischen Konstanten der Gesteine mittels Laufzeitkurven zu bestimmen, um ein reichhaltiges, gut experimentell fundiertes Konstantenmaterial zu erhalten.

Erst dann, wenn die Vorarbeiten in den kleinen und kleinsten Verhältnissen geleistet sind, kann das große Ziel mit Aussicht auf einen restlosen Erfolg angestrebt werden: auf rein experimentellem Wege mit künstlichen Erschütterungen die Schichtung der allerobersten Erdkruste zu klären und uns zusammen mit den Ergebnissen der übrigen geophysikalischen Verfahren ein genaues Bild über den Aufbau der Kontinente zu geben.

Eine weitere Anwendung hat sich in jüngster Zeit durch die „Luftseismik“ auf die Erforschung der höheren Schichten der Erdatmosphäre ergeben, auch für diese Untersuchungen bleiben die geschilderten Grundlagen gültig.

Technisch spielen die experimentellen Ergebnisse in der Unterwasserschalltechnik, bei praktischen Erschütterungsmessungen für den Verkehr und bei der Erforschung des geologischen Profils von nutzbaren Lagerstätten mittels künstlicher Sprengungen eine wichtige Rolle.

(Abgeschlossen im März 1928.)

---

---

Frommannsche Buchdruckerei (Hermann Pöble) in Jena — 5795

---



# Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie

Von

**Ernst Richard Neumann**

o. ö. Prof. der Mathematik an der Universität Marburg

Mit 39 Abbildungen im Text

VIII, 228 S. gr. 8° 1922 Rmk 4.50

**Inhalt:** I. Die spezielle Relativitätstheorie. 1. Allgemeine Vorbemerkungen. 2. Rückblick auf die klassische Mechanik. 3. Zur Frage, ob der Weltäther ruht oder mit der Materie mitgeführt wird. 4. Die Problemstellung von Einstein. Voruntersuchung. 5. Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. 6. Die schließliche Lösung des Einsteinschen Problems. Die Lorentz-Transformationen. 7. Vergleichung von Längen und Zeiten in zwei Systemen. 8. Die einfachsten Anwendungen der Theorie, 9. Die Transformation der Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum. 10. Minkowskis geometrische Veranschaulichung der Lorentz-Transformation. 11. Die Grundzüge der Minkowskischen Mechanik. 12. Minkowskis imaginäre Welt. — II. Die allgemeine Relativitätstheorie. 13. Vorbemerkungen. Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip. 14. Graphische Darstellungen. Exkurs in die Flächentheorie. Invarianz und Kovarianz. 15. Der analytische Ausdruck für das Gravitationsfeld. Das allgemeine Relativitätsprinzip. 16. Weitere Beziehungen zur Flächentheorie sowie zur nichteuklidischen Geometrie. 17. Das Einsteinsche Fundamentalgesetz. 18. Grundzüge der Tensorrechnung. 19. Die infinitesimale Parallelverschiebung eines Vektors und die Krümmung einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. 20. Die Feldgleichung der Gravitation. Die Planetenbewegung. — Anhang: Kurzer Ausblick auf die Weylersche Theorie.

Zeitschrift f. angewandte Mathematik u. Mechanik. Bd. IV, 6: . . . Verf. will nur in die Grundgedanken und den Aufbau der Theorie einführen. Er will das Werden der mathematischen Theorie darstellen und ihre Entwicklung aus den allgemeinen physikalischen und erkenntnistheoretischen Grundlagen schildern. Er verwendet nur das notwendige mathematische Rüstzeug: es ist bescheiden genug. Wer differenzieren kann und weiß, was ein Integral ist, wenn die Anfangsgründe der Differentialgeometrie und Variationsrechnung nicht zu schwer vorkommen, und wer soviel analytische Geometrie versteht, wie ihm der Lehrer auf der Schule beizubringen versuchte, wird den Ausführungen Neumanns mit Verständnis und Genuß folgen können. . . . Mängel im Einzelnen wiegen gering gegenüber der Klarheit und Schärfe, den der Aufbau des Buches als Ganzes zeigt. Die echt pädagogischen Tendenzen der Darstellung, das Verweilen des Verf. bei Dingen, von denen anzunehmen ist, daß sie dem Leser Schwierigkeiten bereiten können, die Flüssigkeit der Darstellung, machen das Buch zu einer wertvollen und zugleich auch angenehmen Lektüre. . . . Bieberbach.

Physikalische Zeitschrift. 1923, Nr. 12: Das vorliegende Buch ist ein Lehrbuch im besten Sinne des Wortes. Es vermeidet die Oberflächlichkeit populärer Darstellungen ebenso wie die zu Schwierigkeiten für den Anfänger führende Knappheit der wenigen guten bisherigen Darstellungen desselben Gegenstandes. Der Verf. führt mit großem pädagogischen Geschick seine Leser in die Ideen der Theorie und ihre mathematische Formulierung ein. Die Darstellung schließt sich im wesentlichen der historischen Entwicklung an. Die nötigen mathematischen Hilfsmittel werden dort, wo sie nötig sind, gegeben, und zwar in der Form, in der sie von den beteiligten Forschern in die Theorie eingeführt worden sind. Hierdurch ist sicher die Lektüre der Originale für den Leser sehr erleichtert, Auch die allgemeine Relativitätstheorie wird eingehend behandelt. Ein kurzer Anhang ist der Weylschen Theorie gewidmet.

Das Buch kann allen denen, die die Relativitätstheorie gründlich kennen lernen wollen und über ein gewisses Maß mathematischer und physikalischer Vorbildung verfügen, angelegentlich empfohlen werden. E. Madelung.

# Simon Newcomb's Astronomie für Jedermann

Eine allgemeinverständliche Darstellung der Erscheinungen des Himmels

Fünfte, vollkommen neubearbeitete Auflage

Unter Mitwirkung von Prof. Dr. K. Graff

herausgegeben von

**Prof. Dr. R. Schorr**

Direktor der Hamburger Sternwarte

Mit einem Titelbild, 2 Tafeln, 3 Sternkarten und 100 Abbildungen im Text

VIII, 405 S. 8° 1929 Rmk 8.—, geb. 9.50

Inhalt: 1. Der Himmel und seine scheinbare Bewegung: Das Weltgebäude. Die tägliche Umdrehung der Himmelskugel und die Zeit. Die jährliche Bewegung der Erde. / 2. Die astronomischen Instrumente: Der Refraktor. Das Spiegelteleskop. Die Himmelsphotographie. Das Spektroskop. Astronomische Meßinstrumente. Sternwarten. / 3. Die Sonne, die Erde, der Mond. Die Finsternisse. / 4. Die Planeten und ihre Trabanten: Die Bahnen der Planeten. Merkur, Venus, Mars. Die Gruppe der kleinen Planeten. Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun. Messung von Entfernungen im Sonnensystem. Die Massenanziehung oder Gravitation. / 5. Kometen. Meteore und Zodiakallicht. Sternschnuppen. / 6. Die Fixsternwelt: Allgemeiner Anblick des Fixsternhimmels. Orientierung unter den Sternbildern. Die Entfernungen und Bewegungen der Sterne. Die physikalische Beschaffenheit der Fixsterne. Nebelflecke und Sternhaufen. Die Milchstraße. — Register.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1920, Nr. 25: Dieses Buch des 1909 verstorbenen ausgezeichneten amerikanischen Astronomen gehört zu den besten populären Büchern, die wir haben. Es ist mit einer bewundernswürdigen Klarheit und Einfachheit geschrieben, die jedem auch schwierigere Dinge nahe zu bringen vermögen. Dabei begnügt sich die Darstellung nicht damit, die fertigen Ergebnisse der Wissenschaft in erzählender Weise wiederzugeben, sondern sie erörtert überall auch die Wege, die zu den Ergebnissen führten, und läßt den Leser an der Entwicklung astronomischer Gedanken, Hypothesen und Vorstellungen teilnehmen. Das Buch kann insofern geradezu als ein Beispiel für gute populäre Literatur bezeichnet werden, die nicht nur unterhalten und schlechtweg belehren, sondern auch erzieherisch auf den Geist einwirken und Achtung vor wissenschaftlicher Arbeit erwecken soll. . .

Prof. Dr. H. Mische, Berlin.

Sirius. April 1922: Diese zwar kurze, aber darum um so klarere erste Einführung in die Astronomie bedarf keiner Empfehlung mehr. . . P. H.

Neue Weltanschauung. 1920, Heft 5: Das wertvolle Buch erfüllt gerade die Aufgabe, die man an ein derartiges, für weitere Kreise geeignetes Buch stellen muß. Es werden in ihm nur allgemeine Kenntnisse vorausgesetzt, wie sie selbst eine gute Volksschule vermittelt und der Verf. hat es ganz meisterhaft verstanden, selbst schwierige Fragen ohne mathematische Entwicklungen klar zu machen. . . Allen Liebhabern der Himmelskunde kann das Buch aufrichtig empfohlen werden; auch für die erwachsene Jugend ist es durchaus geeignet und seine Lektüre wird das Interesse an der Astronomie beleben und fördern.

Dr. W. Breitscheid.