ZEITSCHRIFT

FÜR

GEOPHYSIK

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

B. Brockamp, Münster i. W.

unter Mitwirkung von **A. Defant,** Innsbruck — **W. Dieminger,** Lindau b. Northeim
W. Hiller, Stuttgart — **K. Jung,** Kiel — **O. Meyer,** Hamburg
F. Möller, Mainz — **H. Reich,** Göttingen.

Jahrgang 26 1960 Heft 4

PHYSICA - VERLAG · WÜRZBURG

INHALTSVERZEICHNIS

Behrens, J.: Refraktionsseismische Messungen auf See 161

Bosum, W.: Erdmagnetische Messungen im Deckdiabasgebiet der Dillmulde und ihre Auswertung 177

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 34,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls **keine** ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer" beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel, auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung" in deutscher u n d englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die Zeitschrift für Geophysik bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Bernhard Brockamp, Institut für reine und angewandte Geophysik, Münster (Westfalen), Steinfurter Straße 107

Anschrift der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80, Postscheck: Hamburg Nr. 55983

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Münzstr. 12. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing und Hildgund Holler, sämtlich Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler, und Charl. Kuhnert, beide Würzburg.

Typoskript: Physica-Verlag, Würzburg; Offsetdruck: fotokop, Darmstadt.

Printed in Germany

©

PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1960

Refraktionsseismische Messungen auf See [1]

Von J. Behrens, Clausthal [2]

Zusammenfassung: Es wird ein neues Verfahren refraktionsseismischer Messungen auf See beschrieben. Auf dem Meeresboden stehende Geophone sind mit einer Meßboje verbunden. Die Boje trägt eine Apparatur, die es gestattet, seismische Meßwerte auf drahtlosem Wege an ein Registrierschiff zu übermitteln. Es wird mit Frequenzmodulation tonfrequenter Träger gearbeitet. Die Meßwerte werden neben der Direktregistrierung auf Magnetband gespeichert. Die Durchführung der Messungen und vorläufige Ergebnisse werden besprochen.

Abstract: This paper describes a new method for marine refraction seismic measurements. Geophones placed on the seabottom are connected to a buoy which contains instruments for communicating the measurements to the recording boat by wireless. For this purpose frequencymodulation of low carrier frequencies has been used in this method. The results are recorded on magnetic tape in addition to the usual direct recording. The procedure of the measurements is described and the preliminary results are discussed.

Einleitung

Der seismischen Erforschung des Untergrundes stehen zwei Arbeitsmethoden gegenüber. Das Reflexionsverfahren und das Refraktionsverfahren. Beide Methoden lassen sich bei Anpassung des Instrumentariums an die besonderen Verhältnisse auch für Messungen auf dem Meere verwenden.

Während das Reflexionsverfahren – im Schelfgebiet angewandt und zu einer gewissen Perfektion ausgereift – bei Kenntnis der Geschwindigkeiten durch

[1] Erweiterte Form eines Vortrages, gehalten auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft in Bad Soden im Herbst 1959.

[2] Dipl. Geophysiker Jörn Behrens, Institut für Geophysik der Bergakademie Clausthal.

Bohrlochversenkmessungen auf dem nahen Festlande gute Ergebnisse gebracht hat, hat sich die Refraktionsmethode zur Untersuchung des tieferen Untergrundes auf der Hochsee nach den Erfahrungen amerikanischer und englischer Gruppen als besonders brauchbar erwiesen [1-9].

Die Aufgabe schien daher auch in Deutschland lohnend, ein Meßverfahren zu entwickeln, mit dem es möglich ist, refraktionsseismische Messungen auf See auszuführen, zumal ein direkter Nachbau der von den amerikanischen und englischen Arbeitsgruppen z.T. mit Erfolg erprobten Meßapparaturen wegen der Kargheit der Veröffentlichungen gerade in instrumenteller Hinsicht nicht möglich war.

In folgendem wird ein Meßverfahren beschrieben, das im Herbst 1958 im Küstengebiet der westlichen Ostsee und im Sommer 1959 im küstennahen Schelf der Nordsee eingesetzt und erprobt wurde. Es werden zuerst eingehend die Meßanordnung, das Prinzip, der Aufbau, die Wirkungsweise sowie Vor- und Nachteile der Meßapparatur besprochen. Am Schluß des Berichtes wird ein kurzer Überblick über die ersten Meßergebnisse gegeben.

Aufgabenstellung

Die Forderungen, die zur Ausführung refraktionsseismischer Messungen auf See an das Verfahren gestellt wurden, bestanden hauptsächlich in folgenden:

1. Die Anlage muß für Messungen im Schelf und in der Tiefsee gleichermaßen geeignet sein.
2. Alle Störungen, die durch das Registrierschiff entstehen, wie Maschinengeräusche, Bewegungen des Schiffes im Seegang, Zerren an der Ankerkette [7] usw. müssen ausgeschaltet werden.
3. Es muß möglich sein, weit auseinanderliegende Meßpunkte zu besetzen, ohne auf eine Zentralregistrierung verzichten zu müssen.
4. Der Einsatz muß mit geringem Aufwand an Schiffen und Bedienungspersonal geschehen.

Meßanordnung Sommer 1959

Die Erfüllung der genannten Forderungen bedeutete die räumliche Trennung von Aufnahme- und Registrierstation, das heißt: Übertragung der Meßwerte per Funk.

Die Aufnahmeapparatur wurde zu diesem Zweck in eine Boje eingebaut (Abb. 1).

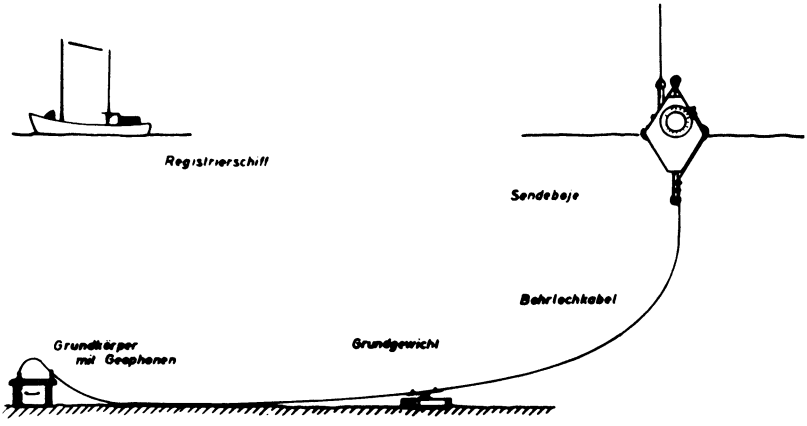


Abb. 1: Prinzip der Meßanordnung Sommer 1959

Die Geophone standen in Grundkörpern auf dem Meeresboden, gaben die Meßwerte per Kabel an die Anlage in der Boje, von wo sie drahtlos an das Registrierboot übertragen wurden. Das Kabel, in Form eines Bohrlochkabels mit Stahlarmierung, diente – durch ein schweres Grundgewicht gehalten – gleichzeitig zur Verankerung der Boje [3].

Die Apparatur zur drahtlosen Übertragung seismischer Meßwerte

Die Apparatur, die der Aufgabe der drahtlosen Übertragung der Meßwerte von der Boje zum Registrierschiff dient, wurde unter folgenden Gesichtspunkten entwickelt [10]:

1. Das Verfahren zur drahtlosen Übertragung seismischer Impulse muß ohne Verzögerung arbeiten. Laufzeiten innerhalb der Apparatur müssen gleichbleiben und damit eichbar sein.
2. Die Apparatur muß bis zu einer unteren Grenzfrequenz von 1 Hz frequenzgetreu arbeiten oder eine reproduzierbare Frequenzkurve besitzen.

[3] Bei Messungen in der Tiefsee, wo eine Verankerung der Tonne in der beschriebenen Weise nicht möglich ist, ist eine Anordnung mit treibender Boje und entsprechenden Geophonträgern zu wählen.

3. Die Anlage muß eine hohe Empfindlichkeit besitzen und über ein gutes Auflösungsvermögen verfügen.
4. Die Möglichkeit der Übertragung mehrerer simultan verlaufender Meßvorgänge auf einem Fernübertragungswege unabhängig voneinander muß gegeben sein.
5. Die Meßwerte müssen gespeichert werden können und jederzeit reproduzierbar sein.

Zur Erfüllung dieser Forderungen wurde das Prinzip der Frequenzumsetzung gewählt, das heißt: Das niederfrequente Meßband wird zunächst nach höheren Frequenzen hin verschoben, dann fernübertragen und am Empfangs- und Registrierort wieder in seine ursprüngliche Lage zurückverschoben.

Bei der Frequenzumsetzung wurde zwischen der Möglichkeit der Amplitudenmodulation oder Frequenzmodulation geeigneter Träger zu Gunsten der Frequenzmodulation entschieden.

Prinzip

Das Prinzip des Verfahrens liegt in folgendem: Die durch Bodenbewegung in einem elektrodynamischen Geophon erzeugte niederfrequente Wechselspannung

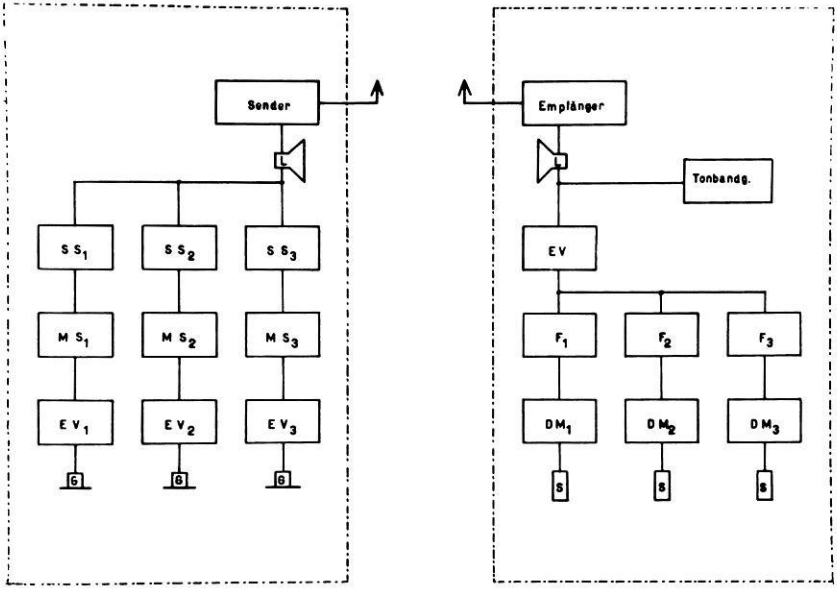


Abb. 2: Blockschaltbild der Apparatur zur drahtlosen Übertragung seismischer Meßwerte auf drei Kanälen

wird verstärkt (EV_1) und steuert die Höhe eines Tones, des sogenannten Trägers. (Abb. 2)

Der Ton wird von einem Generator geliefert (SS_1). Die Steuerung oder Modulation der Trägerfrequenz (Frequenzmodulation) geschieht durch eine Modulationsstufe (MS_1).

Das durch die Modulation der Trägerfrequenz in den Bereich der Tonfrequenz verschobene Meßband wird an einen Übermittlungssender geleitet und mit der dort erzeugten Hochfrequenz ausgestrahlt. Dieser Teil der Anlage befindet sich in der Boje.

Ein Radioempfänger, auf die Frequenz des Senders abgestimmt, fängt die Hochfrequenz auf und trennt sie von dem ihr überlagerten Trägerton. Die modulierte Trägerfrequenz gelangt vom Empfängerausgang über Vorverstärker (EV) und Filter (F_1) an einen Demodulator (DM_1), wo die niederfrequente Meßspannung, mit der der Träger moduliert wurde, zurückgewonnen wird.

Das Meßfrequenzband wird in seine ursprüngliche Lage zurückverschoben (Demodulation).

Am Ausgang des Demodulators steht wieder die vom Geophon abgegebene niederfrequente Wechselspannung zur Verfügung. Sie ist proportional der zu messenden Bodenbewegung. Die Registrierung erfolgt über eine Schleife (S) oder Direktschreiber.

Bei der Übertragung mehrerer simultan verlaufender Meßvorgänge bedient man sich der Möglichkeit, Träger verschiedener Frequenz zu modulieren und auf einem gemeinsamen Wege zu übertragen. Zu diesem Zweck moduliert sendeseitig jeder einzelne Meßvorgang eine eigene Trägerfrequenz (SS_1, SS_2, SS_3).

Auf der Empfangsseite werden diese Träger mit Hilfe der Filter (F_1, F_2, F_3) wieder voneinander getrennt. Ein Tonbandgerät dient zur Speicherung der Meßergebnisse.

Die Anwendung des Prinzips der mehrfachen Frequenzumsetzung hat unter anderem folgende Vorteile:

1. Die Übertragung tiefer Ausgangsfrequenzen, die eine besondere Konstruktion der Verstärker, des Senders und des Empfängers bedingen würde, fällt fort.
2. Alle niederfrequenzbestimmenden Teile sind leichter konstant und temperaturunabhängig zu bauen als Hochfrequenzteile, wo bei gleichen prozentualen Toleranzen die Abweichungen in KHz um Zehnerpotenzen größer werden.
3. Für die drahtlose Übermittlung der Meßwerte wird nur ein gewöhnlicher, amplitudenmodulierter Sender benötigt, der auch quarzgesteuert sein kann.

4. Durch das Verfahren der mehrfachen Frequenzumsetzung ist die Vielfachausnutzung eines Übertragungsweges, also einer Sende- und Empfangsfrequenz möglich, was bei der bestehenden Schwierigkeit, Sendelizenzen zu erhalten besonders wichtig erscheint.
5. Es besteht durch die Benutzung tonfrequenter Träger die Möglichkeit, die Meßergebnisse mehrerer Spuren auf einem Band magnetisch zu speichern und zwar auf einem handelsüblichen Magnetophongerät.

Die Nachteile der Frequenzmodulation sind in dem verhältnismäßig großen apparativen Aufwand bei der Modulation und Demodulation zu erblicken.

Beschreibung der Apparatur

Sendeanlage

Der Vorverstärker, als erster Baustein der Sendeapparatur, ist als dreistufiger, stark gegengekoppelter R.C.-Verstärker aufgebaut. Der Verstärkungsgrad beträgt 1200. Auf den Ausgang der letzten Stufe folgt eine Diodenbegrenzerschaltung, die ein eventuelles Übersteuern der nachfolgenden Modulationsstufe verhindert. Der Verstärkungsgrad des Eingangsverstärkers ist kontinuierlich regelbar.

Die Modulationsstufe arbeitet als Reaktanz, das heißt als elektrisch gesteuerter Blindwiderstand.

Der Anoden-Kathodenstrecke einer Elektronenröhre liegt eine Spannungsteilerschaltung parallel, die aus zwei Widerständen Ra und Rb gebildet wird. Ra liegt zwischen Anode und Steuergitter, Rb zwischen Steuergitter und Kathode der Röhre. (Abb. 3)

Die Bemessung des als Rückkopplungsglied dienenden Spannungsteilers – ein Teil der Anodenspannung wird über Ra und Rb wieder dem Gitter der Röhre zugeführt – ist so zu wählen, daß die Gitterwechselspannung U_g und damit auch der Anodenwechselstrom J_a gegenüber der Anodenspannung U_a um 90° phasenverschoben sind. Dadurch stellt die Anoden-Kathodenstrecke der Röhre einen Widerstand dar, der je nach Aufbau des Spannungsteilers eine induktive oder kapazitive Komponente besitzt.

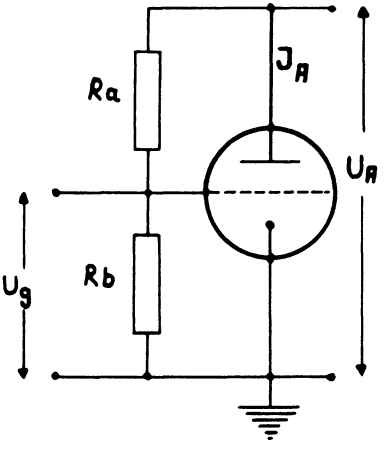


Abb. 3: Prinzipschaltbild der Reaktanzröhre

Besteht der Spannungsteiler aus einem Ohmschen Widerstand (Ra) und einer Kapazität (Rb), so ergibt die Rechnung, daß die Blindwiderstandskomponente bei einer solchen Schaltung induktiver Art ist. Die Größe der Induktivität hängt bei festliegenden Werten von Ra und Rb nur von der Röhrensteilheit S ab.

Eine Änderung der Steilheit durch eine am Steuergitter liegende Spannung – im vorliegenden Falle der verstärkten Geophonspannung – bedeutet eine Induktivitätsvariation im Sinne der Meßspannung.

Die Größe der erreichbaren Induktivitätsänderung hängt in erster Linie von der Wahl des Arbeitspunktes der Reaktanzröhre ab.

Verformt man daher durch entsprechende Wahl der Betriebsspannungen die Arbeitskennlinie der Blindröhre derart, daß innerhalb des Aussteuerbereiches ein Maximum oder Minimum auftritt, das heißt, ein Punkt der Kennlinie die Steilheit $S = 0$ hat, so ergibt sich schon bei kleiner Aussteuerung eine große Steilheitsänderung, das heißt, eine entsprechend große Induktivitätsänderung.

Als Tongenerator, der die Trägerfrequenz erzeugt, findet ein Schwebungssummer Verwendung. Die Schaltung ist einfach und bedarf keiner besonderen Erwähnung. Die Schwingfrequenz der beiden Hf-Kreise beträgt ca. 150 KHz.

Parallel zu dem einen Schwingkreis des Schwebungssummers liegt die Reaktanzstufe mit ihrer als variablen Induktivität wirkenden Anoden-Kathodenstrecke. Die Schwingfrequenz wird dadurch im Sinne der Meßspannung moduliert, das heißt auch die Schwebungsfrequenz, die den fernzuübertragenden Träger bildet, ändert ihre Frequenz im Takte der niederfrequenten Meßspannung.

Die Apparatur arbeitet mit drei Trägerfrequenzen: 700 Hz, 1 440 Hz und 2 160 Hz, die in der eben beschriebenen Weise moduliert und gemeinsam über einen Sender ausgestrahlt werden.

Die NF-Bandbreite des benutzten UKW-Senders und Empfängers (Sende- und Empfangsfrequenz 40,68 MHz) beträgt 300 Hz - 10 KHz bei einem Modulationspegel von ≈ 0 Np an 600 Ω.

Empfangs- und Registrierapparatur

Auf der Empfangsseite nach dem Hf-Empfängerausgang werden die drei Träger mit Hilfe von Bandfiltern voneinander getrennt und zwar nach Passieren einer Vorverstärkerstufe mit Schwundregelung.

Die Demodulationsstufe besteht aus zwei Röhrenkreisen (Abb. 4), deren Resonanzfrequenzen ($f_{1\,res}$ und $f_{2\,res}$) um den halben maximalen Hub von der Nullfrequenz (f_T) des Trägers abweichen (Abb. 4 oben).

Gegeneinanderschalten der Kreise und Gleichrichten der resultierenden Spannungen ergibt eine Richtcharakteristik des Diskriminators, wie sie Abb. 4 unten zeigt.

An der Flanke dieser Kurve ist es möglich, die Abweichungen des Trägers $\pm \Delta f$ von der Nullfrequenz f_T, die in Richtung und Amplitude proportional der Meßgröße sind, zu messen und über Schleife oder Direktschreiber zur Aufzeichnung zu bringen.

Die Gesamtbandbreite eines Kanales des beschriebenen Demodulators beträgt 300 Hz.

Erfährt auf der Sendeseite der Träger eine Auslenkung von $\pm$ 150 Hz, was seinem maximalen Hub bei einer Eingangsspannung von 70 μV_{SS} entspricht, so liegt am niederohmigen Abschlußwiderstand der Demodulatorstufe auf der Empfangsseite eine Spannung von 60 mV_{SS}. Der Direktschreiber (Philips Oscilloscript, System Schwarzer), der für die Aufzeichnung benutzt wird, hat eine maximale Empfindlichkeit von 3 mV_{SS}/mm, sodaß bei einer Schreibbreite von 20 mm die 60 mV_{SS} zur Aussteuerung des Gerätes ausreichen.

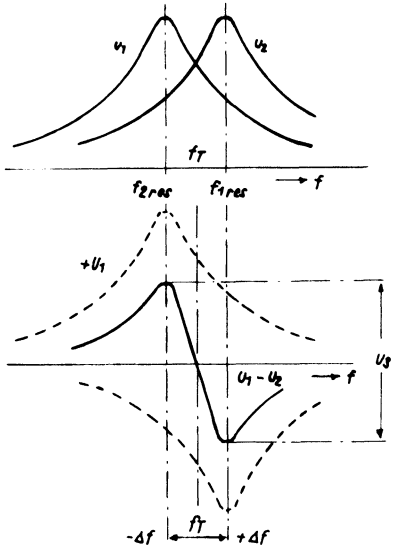


Abb. 4: Prinzipskizze zur Wirkungsweise des Gegentaktdiskriminators eines Kanales

Bei voller Ausnutzung der Bandbreite eines Kanales entspricht also eine Eingangsspannung von 70 μV_{SS} dem Vollausschlag des Schreibers von 20 mm.

Mit dieser Empfindlichkeit kommt man bei einer Schreibamplitude von 3 mm schon ins Rauschen der Eingangsröhre.

Die volle Empfindlichkeit der Apparatur wurde allerdings bisher nicht ausgenutzt, da der seismische Störpegel auf See erfahrungsgemäß sehr groß ist.

Die Frequenzüberalleskurve zeigt nach den tiefen Frequenzen hin bis zu einer Frequenz von 0,6 Hz keinen Abfall, während nach höheren Frequenzen hin ein Abfall zu verzeichnen ist, der hauptsächlich durch die Grenzfrequenz des Direktschreibers bei 165 Hz (– 3 db) bedingt ist.

Das Speichern der Aufzeichnungen auf Tonband macht bei der Benutzung tonfrequenter Träger keine Schwierigkeiten.

Beim Abspielen des Tonbandes wird so verfahren, daß an die Stelle des Hf-Empfängers das Bandgerät tritt. Die Höhe der Trägerspannung wird mit Hilfe eines Kathodenstrahloscillographen kontrolliert.

Bandgeschwindigkeitsänderungen, die als zusätzliche Frequenzmodulation wirken würden, treten nicht störend in Erscheinung.

Das benutzte Gerät ist eine handelsübliche Telefunkenmaschine KI 35 mit den Bandgeschwindigkeiten 9 cm/sec und 19 cm/sec. Bei den Messungen wurde die Geschwindigkeit 19 cm/sec verwendet.

Äußerer Aufbau der Fernmeßanlage

Der äußere Aufbau, der für den Einsatz auf der Nordsee im Sommer 1959 gewählt wurde, sah aus wie folgt:

Die Geophone waren in eisernen Grundkörpern untergebracht (Abb. 5). Kardangehänge sorgten für eine Horizontierung der zum Teil tief abgestimmten Geophone.

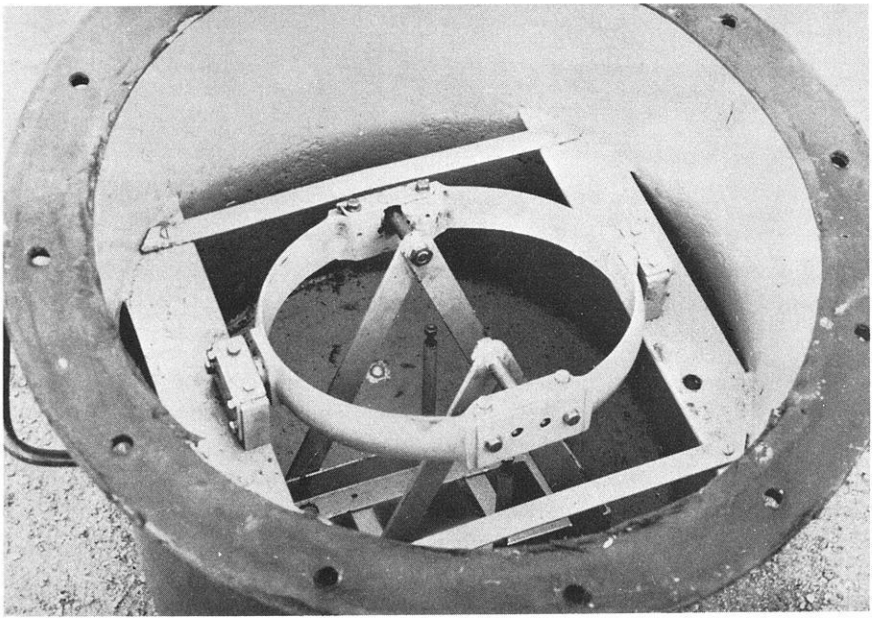


Abb. 5: Grundkörper mit Kardangehänge zur Aufnahme des Geophones

Die Boje trug – wie eingangs erwähnt – die gesamte Sendeapparatur mit ihren Energiequellen. Ein Blick in das Innere der Boje (Abb. 6) zeigt die Anordnung der einzelnen Elemente, der Akkus (im Bild ganz unten), der Anodenbatterien (Bildmitte), der Modulatoren I, II, III (unter den Anodenbatterien) und des UKW-Senders (im Bild links oben) mit der dazugehörenden Antenne.

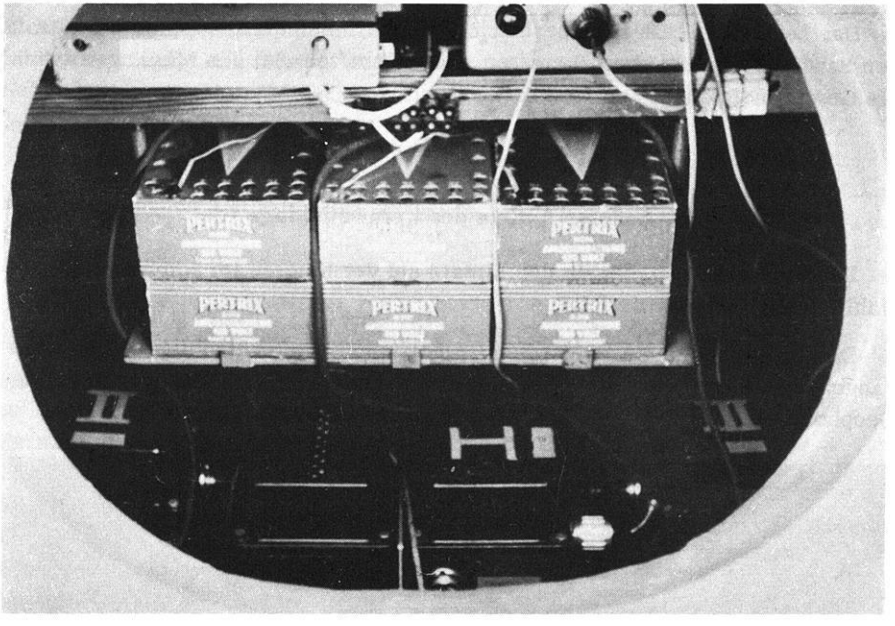


Abb. 6: Blick in das Innere der Meßboje

Die Vorverstärker, Amplitudenbegrenzer und Modulatoren eines Trägerfrequenzkanales waren zusammen in einem Gehäuse angeordnet, wobei der Röhrenteil der Wärmeentwicklung wegen für sich lag (Abb. 7).

Die Empfangs- und Registrierstation (Abb. 8) bestand aus dem UKW-Empfänger (neben dem Kathodenstrahloscillographen), dem Tonbandgerät (links oben im Bild), den Demodulatoren (in der Abbildung ganz rechts) und einem 4-Spur-Schwarzschreiber (im Vordergrund links). Die Zeitmarke (Bildmitte) bestand aus einem Transistor - RC - Generator, dessen 50 Hz oder 100 Hz - Sinusschwingung alle halbe Sekunde – durch ein Chronometer gesteuert – eine Auslenkung erfuhr.

Kathodenstrahloscillograph und Lautsprecher dienten zur Überwachung der Messungen.

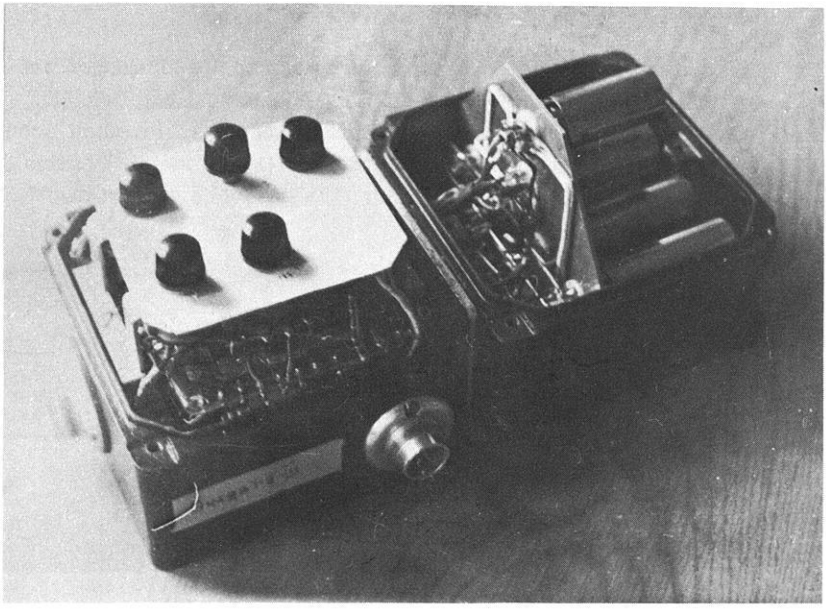


Abb. 7: Aufbau einer Einheit mit Vorverstärker, Amplitudenbegrenzer, Modulationsstufe und Trägerfrequenzgenerator

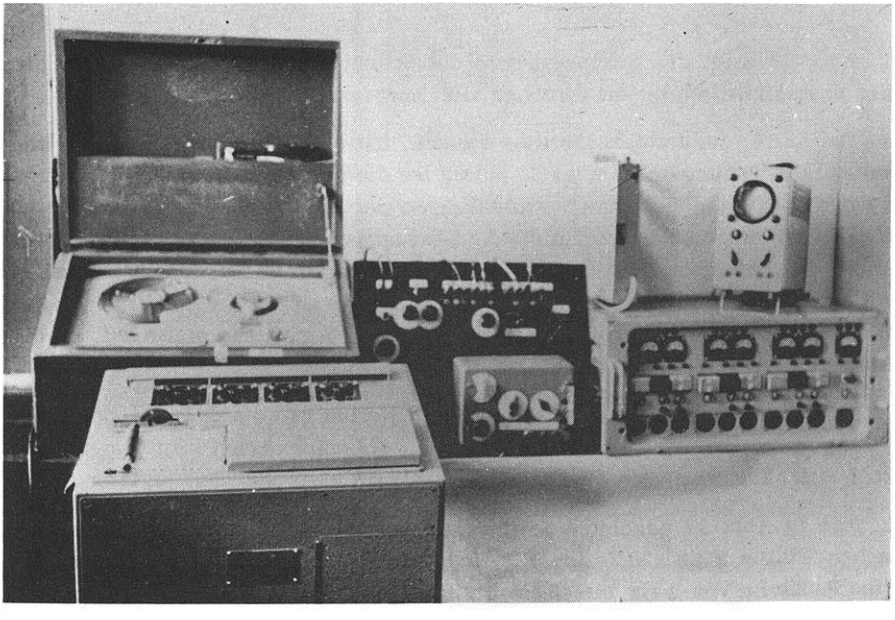


Abb. 8: Empfangs- und Registrierstation

Erste Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt sollen an Hand eines während der Messungen auf der Nordsee im Sommer 1959 geschossenen Profils ein kurzer Überblick über die Meßergebnisse gegeben werden. Abb. 9 zeigt die Lage der einzelnen Schußpunkte eines der Profile, den Standort der Sendeboje (XI a) und die Position des Refraktionsbootes mit der Empfangsapparatur (XI). Es wurde von Ost nach West auf die Boje zu geschossen.

XI

Abb. 9: Ost-Westprofil Sommer 1959

Abb. 10 zeigt die Seismogramme der Schußpunkte 2058, 2059, 2060. Sie sind charakteristisch für das Aussehen aller angefallenen Aufzeichnungen.

Der Abriß, der drahtlos übertragen wurde, hatte die Form eines scharfen Impulses. Die Papiergeschwindigkeit betrug bei diesen Seismogrammen annähernd 5 cm/sec. Zwei gleichsinnige Auslenkungen der 100 Hz-Zeitmarke markieren den Ablauf einer Sekunde. Für die Aufzeichnungen des Geophones selbst ist vor allem der Einsatz des Wasserschalles charakteristisch. Er ist durch Frequenzen von rund 250 Hz gekennzeichnet. Trotz der relativ großen Energie, mit der der Wasserschall ankommt, wird er mit sehr geringer Amplitude registriert, da die Apparatur, wie erwähnt, bei ca. 165 Hz abschneidet.

Die einzelnen Einsätze der refraktierten Wellen sind aus dem Seismogramm unschwer zu erkennen. Durch Abspielen der Aufzeichnungen vom Magnetband über Filter läßt sich noch eine wesentliche Qualitätsverbesserung erzielen.

Die in Abb. 11 gezeigten Seismogramme stellen die Aufzeichnungen derselben Schüsse 2058 - 2060 dar. Sie sind vom Band über Filter abgespielt, die eine Paßbreite von 1 Hz bis 40 Hz besitzen.

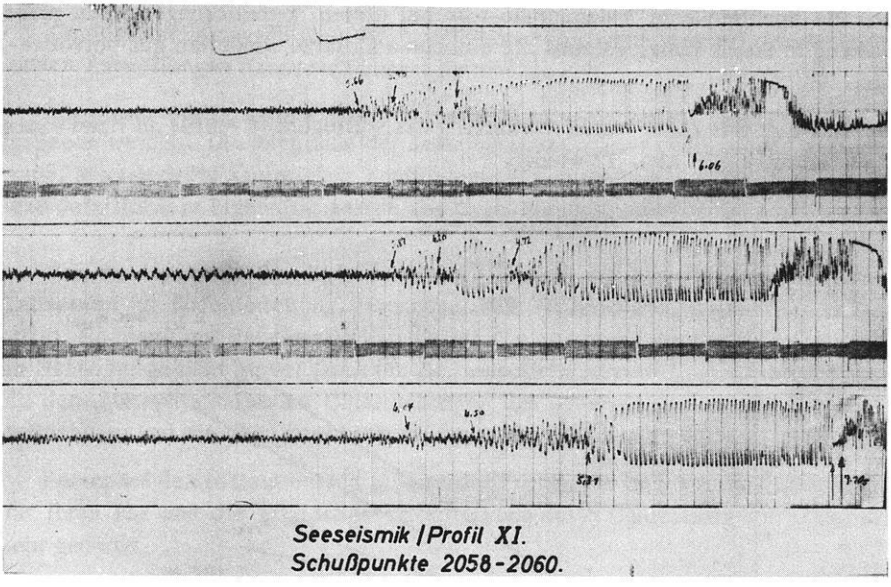


Abb. 10: Direktregistrierung der Schüsse 2058-2060

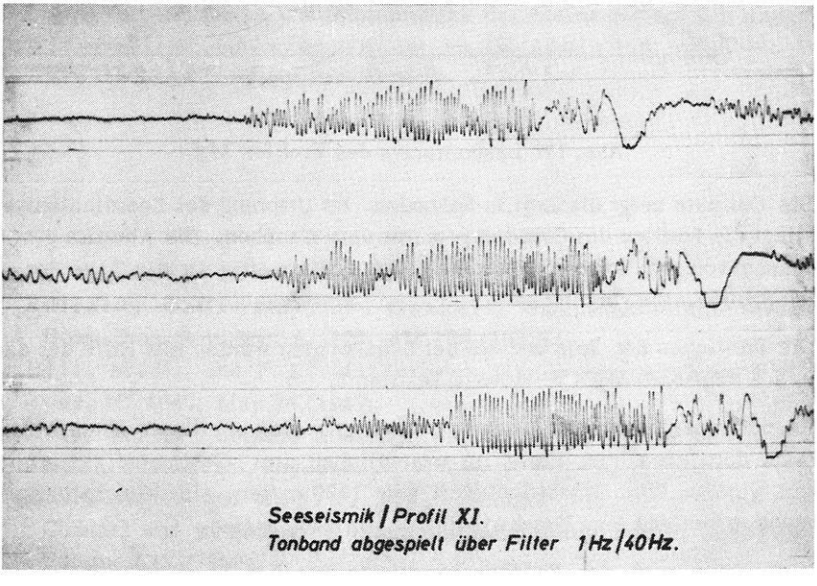


Abb. 11: Registrierungen der Schüsse 2058-2060, abgespielt vom Tonband über Filter

Die hochfrequente Bodenunruhe tritt bei diesen Registrierungen nicht mehr störend in Erscheinung, während die einzelnen Einsätze wiederum gut hervortreten.

Das Ergebnis einer ersten Auswertung des vorliegenden Profils an Hand einer Laufzeitkurve gibt Abb. 12 wieder.

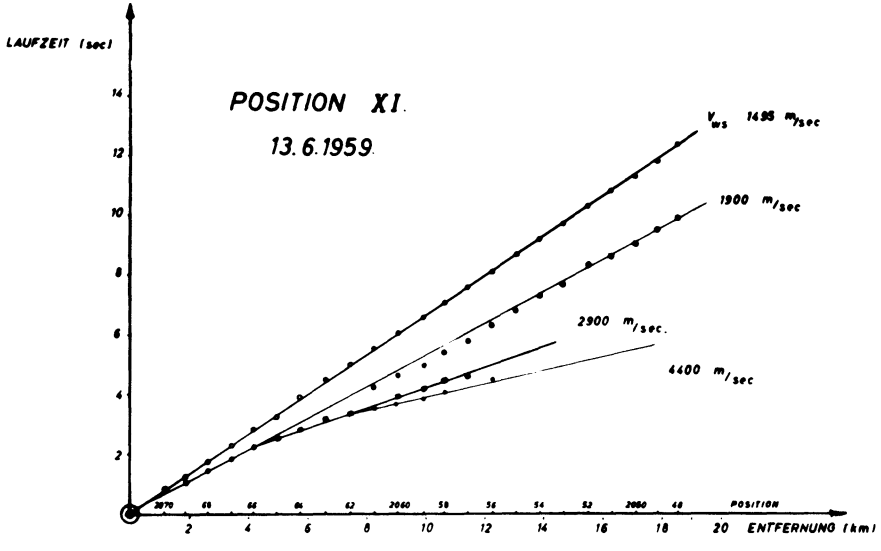


Abb. 12: Laufzeitkurve des Profiles XI

Die Ordinate zeigt die Zeit in Sekunden. Im Ursprung des Koordinatensystemes liegt die Position des Grundkörpers mit dem Geophon. Die Abszisse gibt die Entfernung von der Boje in Kilometern an. Gleichzeitig ist die Lage der einzelnen Schußpunkte verzeichnet.

Die Positionen der Boje und die der Schußpunkte wurden mit Hilfe des dänischen und deutschen DECCA-Systems bestimmt.

Zu den einzelnen Laufzeitkurven ist zu sagen, daß bei dieser ersten Auswertung auf dem erwähnten Profil im wesentlichen drei Geschwindigkeiten bestimmt wurden: Eine Geschwindigkeit von 1900 m/sec, eine Geschwindigkeit von 2900 m/sec und eine Geschwindigkeit von 4400 m/sec.

Rechnungen nach der Knickpunktmethode ergaben hierfür die Tiefe einer Schichtgrenze von 950 m für die Geschwindigkeit von 2900 m/sec und die Lage einer Schichtgrenze bei 1680 m für die Geschwindigkeit von 4400 m/sec.

Geologische Aussagen über die Art einzelner Horizonte sind auf Grund dieser ersten Auswertungen naturgemäß nicht zu machen.

An dieser Stelle konnte über die ersten Ergebnisse nur ein kurzer Überblick gegeben werden. Die Mehrzahl der Seismogramme wartet noch auf die Auswertung. Besonders die zahlreichen Tonbandaufnahmen sind noch zu untersuchen, so daß detailliertere Ergebnisse gerade aus dieser Richtung zu erwarten sind.

Der Bundesanstalt für Bodenforschung, Hannover, dem Niedersächsischen Landesamt für Bodenforschung, Hannover, dem Deutschen Hydrographischen Institut, Hamburg und der Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung GmbH. in Hannover gebührt großer Dank für die freundliche Erlaubnis, an den Messungen zu den "Geophysikalischen Untersuchungen des Untergrundes in der Nordsee" teilnehmen und die oben beschriebene Apparatur erproben zu dürfen.

Ferner sei den in Deutschland arbeitenden Firmen der angewandten Geophysik für ihren Rat und die tatkräftige Unterstützung durch Überlassung von Material sehr gedankt.

Nicht zu vergessen ist die Freundlichkeit des Marinewaffenamtes Kiel, das den ersten Einsatz auf der Ostsee im Herbst 1958 ermöglichte.

An den Vorbereitungen und Ausführungen der Messungen auf See waren die Herren A. Müller, Dipl. Geophysiker H. Hirschleber und Dipl. Geophysiker W. Weigel wesentlich beteiligt.

Literatur

[1] Bullard, E.C. and T.F. Gaskell: Submarine seismic investigations. Proc. Roy. Soc. A. 177, 476 - 99 (1941).

[2] Hill, M.N. and P.L. Willmore: Marine seismic prospecting. Nature, N° 4047, May 24 (1947).

[3] Hill, M.N.: Seismic refraction shooting in an area of the Eastern Atlantic. Phil. Trans. Roy. Soc. A, v. 244, p. 561 - 96 (1952).

[4] Hill, M.N. and W.B.R. King: Seismic prospecting in the English Channel and its geological interpretation. Quart. I. Geol. Soc. London, Volume CIX (1952).

[5] Ewing, M., A.P. Crary and H.M. Rutherford: Geophysical investigations in the emerged and submerged Atlantic Coastel Plain, Part I, Methods and results: Geol. Soc. Am. Bull., v. 48, p. 753 - 802 (1937).

[6] Ewing, M., O.P. Wollard and A.C. Vine: Geophysical investigations in the emerged and submerged Atlantic Coastel Plain, Part III., Barmgat Bay, New Jersey, section: Geol. Soc. Am. Bull., v. 50, p. 257 - 296 (1939).

[7] Officer, C.B., M. Ewing and P.C. Wuenschel: Seismic refraction measurements in the Atlantic Ocean, Part IV Bermuda, Bermuda Rise, and Marses Basin: Geol. Am. Bull., v. 63, p. 777 - 808 (1952).

[8] Officer, C.B. and M. Ewing: Geophysical investigations in the emerged and submerged Atlantic Coastel Plain, Part VII. Continental Shelf, Continental Slope, and Continental Rise South of Nova Scotia: Geol. Am. Bull., v. 65, p. 653 - 670 (1954).

[9] Officer, C.B.: Introduction of the Theory of Sound Transmission. Mebraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London (1958).

[10] Behrens, J.: Eine Apparatur zur drahtlosen Übertragung seismischer Meßwerte auf drei Kanälen. Nicht veröffentlichte Diplomarbeit. Geophysikalisches Institut der Universität Hamburg.

Erdmagnetische Messungen im Deckdiabasgebiet der Dillmulde und ihre Auswertung [1]

Von W. Bosum, Hannover [2]

(Fortsetzung)

VI. Darstellung der Auswertungsmethoden

1. Formeln für zweidimensionale Körper

Es sollen nachstehend nur zweidimensionale Körper betrachtet werden, denn entsprechend der geologischen Aufgabenstellung interessieren nur sich im Streichen weit erstreckende Körper oder Störungen. Andererseits ist der Begriff zweidimensional nicht eng zu fassen. Wie eine Abschätzung zeigt, kann für δZ Messungen ein Körper schon bei einem Verhältnis Mächtigkeit/Erstreckung wie 1/3 bis 1/4 als zweidimensional angesehen werden, wenn das Profil in der Mitte verläuft und der Aufpunktabstand von der Störkörperoberkante nicht größer als 1/4 der Erstreckung ist.

Für Stufe und Spalt sind Formeln für die Vertikal- und Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes δZ und δH entwickelt [19]. Die rechnerische Auswertung ist umständlich und langwierig. Man kann sie durch ein Diagramm vereinfachen [10]. Betrachten wir z.B. die Formel für den unendlichen schiefen Spalt

$$\delta Z = 2 \sin \alpha \, (M_{\parallel} \, \phi + M_{\perp} \ln r_2 / r_1),$$

α Einfallswinkel
$M_{\parallel}$ Komponente der Magnetisierung parallel zum Einfallen,
$M_{\perp}$ Komponente der Magnetisierung senkrecht zum Einfallen
ϕ, r_2, r_1, s. Abb. 18

---

[1] Gekürzte Fassung der gleichlautenden Dissertation des Verfassers.

[2] Dipl.-Geophys. W. Bosum, Bundesanstalt für Bodenforschung, Hannover, Wiesenstraße 1.

so erhalten wir für $M_\perp = 0$ als Kurven δZ = const. Kreise, die die Verbindungslinie der Eckpunkte des Störkörpers als Sehne haben, für $M_\parallel = 0$ als Kurven δZ = const. ebenfalls Kreise, deren Mittelpunkte so auf der Verbindungslinie der Eckpunkte liegen, daß diese in Bezug auf den betreffenden Kreis konjugierte Punkte sind. Die beiden Kreisscharen sind zueinander orthogonal.

Die Anwendung des Diagramms (Abb. 16) geschieht in folgender Weise: zunächst werden die Faktoren $2 \sin \alpha \, M_\parallel$ und $2 \sin \alpha \, M_\perp$ für das entsprechende Modell berechnet. Damit werden die an dem Diagramm stehenden Zahlen multipliziert. Für einen beliebigen Aufpunkt erhalten wir dann die δZ Störung durch Addition der Werte, die sich für die beiden ihn treffenden Kreise ergeben.

Durch wiederholtes Anlegen des Diagrammes kann man auch kompliziertere Störkörper erfassen, darunter auch durch Subtraktion unendlicher Spalte endliche. Man kann jeden Störkörper durch ein Geraden-Poligon beliebig annähern. Nur wird die Arbeit durch das häufige Anlegen des Diagrammes sehr umständlich, auch brauchte man für verschiedene Poligonlängen entsprechend viele Diagramme mit verschiedenen Basislängen.

Man kann nun für diesen Fall ein rechnerisches Verfahren angeben, das sich bei der Herleitung obiger Formeln mit Hilfe komplexer Zahlen ergibt. (s. VI, 2. c).

2. Die Verwendung komplexer Zahlen zur Berechnung der magnetischen δT-, δH- und δZ-Anomalie zweidimensionaler Körper

a) Darstellung der Grundlagen

Dem Newton'schen Potential im Raum entspricht das logarithmische Potential in der Ebene, denn so wie das Newton'sche Potential die Laplace'sche Differentialgleichung $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ im Dreidimensionalen erfüllt, erfüllt das logarithmische Potential die Laplace'sche Differentialgleichung $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ im Zweidimensionalen.

Unmittelbar läßt sich diese Entsprechung durch die Betrachtung des Potentials beim Übergang von einer dreidimensionalen zu einer zweidimensionalen Massenanordnung zeigen. Das Newtonsche Potential δW eines Körpers der Masse

$m = d \cdot v$ (d Dichte, d = const. v Volumen, $dv = dx_0 \cdot dy_0 \cdot dz_0$ Volumenelement) ist gegeben durch

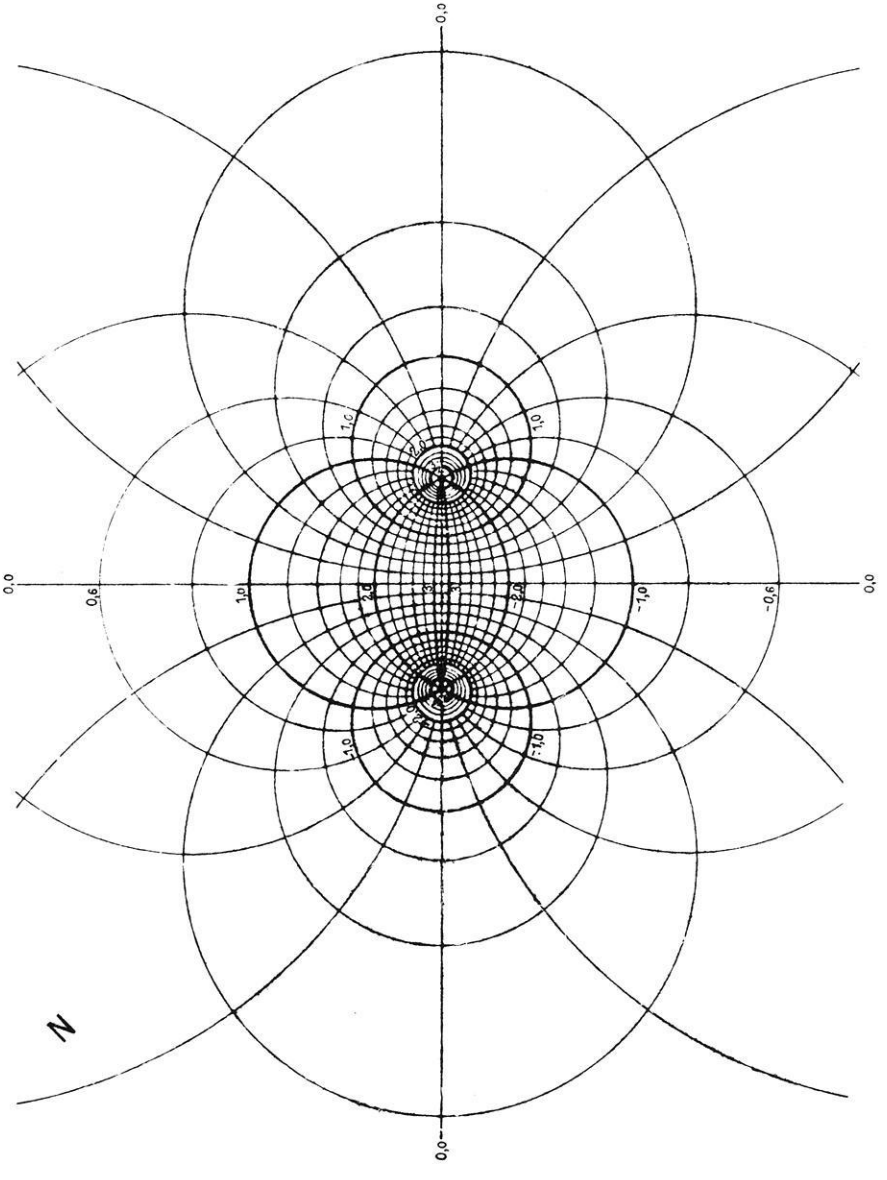


Abb. 16: Kreisscharendiagramm

(2) $$\delta W = k d \iiint_{v} \frac{dx_0 \cdot dy_0 \cdot dz_0}{[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2]^{1/2}}$$

x, y, z Aufpunktskoordinaten
y- Achse zeigt senkrecht nach unten
k Gravitationskonstante

Lassen wir den Körper in einer Richtung – wir nehmen die z-Richtung – sich nach $\pm\infty$ erstrecken, so erhalten wir einen zweidimensionalen Körper, d.h. einen Zylinder vom Querschnitt F. Sein Potential ergibt sich aus

(3)
$$\delta W = k d \int_{z_0=-\infty}^{\infty} \int_{F} \frac{dx_0 \cdot dy_0 \cdot dz_0}{[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2]^{1/2}}$$

$$= k d \iint_{F} dx_0 \cdot dy_0 \cdot \ln [(z_0-z) + [(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2]^{1/2}\Big|_{z_0=-a\to-\infty}^{a\to\infty}$$

(4)
$$= \lim_{a\to\infty} k d \iint_{F} dx_0 \cdot dy_0 \ln \frac{a-z+[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(a-z)^2]^{1/2}}{-a-z+[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(a+z)^2]^{1/2}}$$

(5)
$$\delta W = \lim_{a\to\infty} k d \iint_{F} dx_0 \cdot dy_0 \ln \frac{a-z}{a+z} \cdot \frac{\left[\frac{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}{(a-z)^2}+1\right]^{1/2}+1}{\left[\frac{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}{(a+z)^2}+1\right]^{1/2}-1}$$

Zähler und Nenner des zweiten Faktors des Logarithmus entwickeln wir in eine Reihe unter Vernachlässigung der höheren Glieder:

(6)
$$\delta W = \lim_{a\to\infty} k d \iint_{F} dx_0 \cdot dy_0 \ln \frac{a-z}{a+z} \cdot \frac{2+-\ldots}{1/2 \cdot \frac{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}{(a+z)^2} - + \ldots}$$

$$(6) \quad = \lim_{a \to \infty} k d \iint_F dx_0 \cdot dy_0 \left[\ln 4 (a^2 - z^2) + \ln \frac{1}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \right]$$

Für $a \to \infty$ wird der erste Summand des Integranden ∞. Wir können ihn als konstant mit in die Konstante des Potentials nehmen und erhalten

$$(7) \qquad \delta W = 2 k d \iint_F \ln \frac{1}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{1/2}} \, dx_0 \cdot dy_0 + K,$$

also das logarithmische Potential. Die Konstante K schreiben wir im Folgenden nicht mehr, so daß sich ergibt

(8)

$$\delta W = 2 k d \iint_F \ln 1/r \, df = -2 k d \iint_F \ln r \, df \qquad r = [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{1/2}, \quad df = dx_0 \cdot dy_0$$

Wir betrachten eine komplexe Zahl $z = re^{i\phi} = (x_0 - x) + i(y_0 - y)$ (s. Abb. 17). Es gilt allgemein

$$(9) \qquad \ln z = \ln r + i\phi$$

Ausgehend von Formel (8) für das logarithmische Potential einer zweidimensionalen Massenanordnung δW definieren wir ein "komplexes Potential"

$$\delta W_1 = -2 k d \iint_F \ln z \, df,$$

für das wir nach (9) schreiben

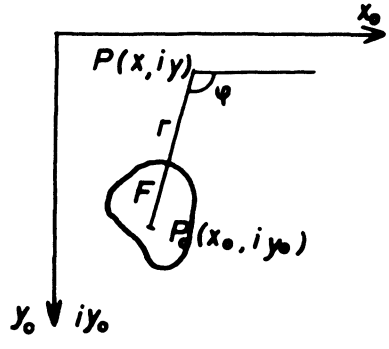


Abb. 17

$$\delta W_1 = -2 k d \iint_F (\ln r + i\phi) \, df = \delta W + i \delta W'.$$

Der Realteil des komplexen Potentials ist das logarithmische Potential δW.

Um aus δW das zweidimensionale magnetische Potential δV zu erhalten, wenden wir den Poissonschen Satz

(10) $$\delta V = 1/k\,d\,(\vec{M} \cdot \operatorname{grad} \delta W)$$

an ($\vec{M}$ Magnetisierungsvektor). Führen wir hier das komplexe Potential δW_1 ein, so ergibt sich ein komplexes magnetisches Potential δV_1, dessen Realteil δV ist.

$$\delta V_1 = 1/k\,d\,(\vec{M} \cdot \operatorname{grad} \delta W_1) = \delta V + i\,\delta V'$$

$$= -2\,(\vec{M} \cdot \operatorname{grad} \iint_F \ln z\,df = -2\left[M_x \cdot \frac{\partial \iint \ln z\,df}{\partial x} + M_y \cdot \frac{\partial \iint \ln z\,df}{\partial y}\right]$$

Da über x_0, y_0 integriert wird, dürfen wir die Differentiation nach x und y unter dem Integral ausführen und erhalten

$$\delta V_1 = -2\left(-M_x \iint_F \frac{1}{z}\,df - i\,M_y \iint_F \frac{1}{z}\,df\right)$$

(11)

$$\delta V_1 = 2\,(Mx + iMy) \iint_F \frac{df}{z} = 2\,(Mx + iMy) \iint_F \frac{dx_0 \cdot dy_0}{(x_0 - x) + i\,(y_0 - y)}$$

(s. auch v. Baranov [1]).

Wir bilden $\frac{\partial \delta V_1}{\partial x}$ und erhalten unter Anwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

(12)

$$\frac{\partial \delta V_1}{\partial x} = \frac{\partial \delta V}{\partial x} + i\,\frac{\partial \delta V'}{\partial x} = \frac{\partial \delta V}{\partial x} - i\,\frac{\partial \delta V}{\partial y} = \delta H - i\,\delta Z$$

(13)

$$\frac{\partial \delta V_1}{\partial x} = 2\,(Mx + iMy) \iint_F \frac{df}{z^2} = \delta H - i\,\delta Z = \overline{\delta T}$$

Die Differentiation liefert uns also den an der reellen Achse gespiegelten Vektor der Gesamt-Feldstärke δT, die konjugiert komplexe Feldstärke $\overline{\delta T}$ mit δH, der Horizontalkomponente der magn. (Stör-) Feldstärke, als Realteil und $-\delta Z$, der negativen Vertikalkomponente der magnetischen Feldstärke, als Imaginärteil. δH und $-\delta Z$ lassen sich nach (13) als Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $\overline{\delta T}$, der konjugiert komplexen Feldstärke, darstellen. In der Funktionentheorie wird gezeigt, daß der Realteil einer analytischen Funktion aus dem Imaginärteil und umgekehrt errechnet werden kann, wenn dieser längs einer Kurve gegeben ist. Wir können also δH aus $-\delta Z$ und umgekehrt bei zweidimensionalen Körpern nach Methoden der Funktionentheorie berechnen. (s. z.B. [3]).

b) Die Herleitung von Formeln für $\overline{\delta T}$, δH und δZ

Die Formeln für $\overline{\delta T}$ und damit für δH und δZ von bestimmten Körpern erhalten wir durch die Auswertung des Integrals in (13). Es läßt sich wesentlich leichter auswerten als die Integrale, die zur Berechnung von δZ und δH im Reellen verwendet werden und folgende Form haben

$$\delta Z = 4Mx \iint_F \frac{(x_0-x)(y_0-y)}{[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2]^2}\,df - 2My \iint_F \frac{[(x_0-x)^2-(y_0-y)^2]\cdot df}{[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2]^2} \tag{14}$$

$$\delta H = 2Mx \iint_F \frac{(x_0-x)^2-(y_0-y)^2}{[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2]^2}\,df + 4My \iint_F \frac{(x_0-x)(y_0-y)\cdot df}{[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2]^2} \tag{15}$$

Das Integral (13) stellt ein reelles Doppelintegral einer komplexwertigen Funktion dar. Es wird über die komplexe Funktion $f(z)$ erstreckt bei reellen Integrationsvariablen x_0 und y_0. Wir können daher i als konstante Zahl be-

handeln. Weiter erlaubt das Integral nach Durchführung einer Integration durch einfache Umformung oft die Darstellung als komplexes Linienintegral. Das ist deshalb von Bedeutung, weil man für die Auswertung bei komplizierteren Störkörpern oder bei komplizierterer Ortsabhängigkeit der Magnetisierung mit Vorteil die Ergebnisse der Funktionentheorie heranziehen kann, die Berechnung also z.B. über den Residuensatz oder direkt als komplexes Linienintegral durchführen kann.

Wir betrachten nun Beispiele, in denen die verschiedenen Möglichkeiten gezeigt werden sollen.

Der unendliche breite Spalt

Die unmittelbare Auswertung von (13) soll am Beispiel des unendlichen senkrechten Spaltes von homogener Magnetisierung erläutert werden. Wie aus Abb. 18 hervorgeht, nimmt (13) folgende Form an

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx+iMy)} = \int_{x_0=-a}^{a} \int_{y_0=t}^{\infty} \frac{dx_0 \cdot dy_0}{[(x_0-x)+iy_0]^2}$$

$$= -i \int_{-a}^{a} \frac{dx_0}{[(x_0-x)+it]}$$

$$= -i \ln \frac{a-x+it}{-a-x+it}$$

$$= -i \ln \frac{r_2 \cdot e^{i\phi_2}}{r_1 \cdot e^{i\phi_1}}$$

$$= -i\,[\ln r_2/r_1 + i\,(\phi_2-\phi_1)]$$

Setzen wir $\overline{\delta T} = \delta H - i\,\delta Z$, schaffen $2\,(Mx+iMy)$ auf die rechte Seite und trennen Real- und Imaginärteil, so ergibt sich als bekannter Ausdruck

$$\delta H = 2\,[Mx \cdot (\phi_2-\phi_1) + My \cdot \ln r_2/r_1]$$

$$\delta Z = 2\,[Mx \cdot \ln r_2/r_1 - My \cdot (\phi_2-\phi_1)]$$

Die Rechnung ist also im Vergleich zur Auswertung der Integrale (14) und (15) sehr vereinfacht. Wir erhalten weiter für den schrägen unendlichen Spalt

(16 a) $$\overline{\delta T} = -2 \sin\alpha \,(Mx + i\,My)\cdot e^{i\alpha}\cdot \ln\frac{r_2\cdot e^{i\phi_2}}{r_1\cdot e^{i\phi_1}}$$

(16 b) $$= -2\,i \sin\alpha \,(M_\perp + i\,M_\parallel)\cdot \ln\frac{r_2\cdot e^{i\phi_2}}{r_1\cdot e^{i\phi_1}}$$

(s. (1)),

für die schräge Stufe

(17 a) $$\overline{\delta T} = -2 \sin\alpha \,(Mx + i\,My)\cdot e^{i\alpha}\cdot \ln\frac{r_u\cdot e^{i\phi_u}}{r_0\cdot e^{i\phi_0}}$$

(17 b) $$= -2\,i \sin\alpha \,(M_\perp + i\,M_\parallel)\cdot \ln\frac{r_u\cdot e^{i\phi_u}}{r_0\cdot e^{i\phi_0}},$$

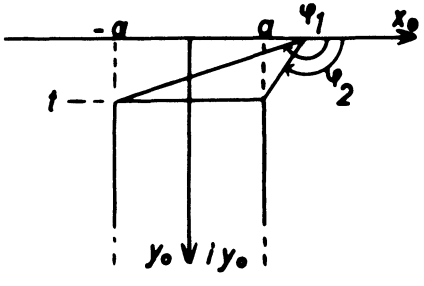


Abb. 18

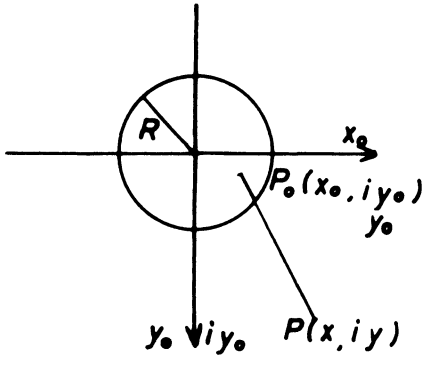


Abb. 19

Der Kreiszylinder

Die Berechnung der $\overline{\delta T}$ Störung des Kreiszylinders geschieht im allgemeinen

in der Weise, daß man zunächst das magnetische Potential desselben aus dem bekannten Schwerepotential durch Anwendung des Poissonschen Satzes berechnet. Die direkte Berechnung von $\overline{\delta T}$ (δH und δZ) ist umständlich. Im Komplexen läßt sie sich leicht über den Residuensatz herbeiführen. Wir schreiben

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx+iMy)} = \int_{-R}^{R} dx_0 \int_{-\sqrt{R^2-x_0^2}}^{\sqrt{R^2-x_0^2}} \frac{dy_0}{[(x-x_0)+i(y-y_0)]^2}$$

(s. Abb. 19). Das Ergebnis der Integration über y_0 ist

(18)

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx+iMy)} = -i \int_{-R}^{R} dx_0 \left[\frac{1}{(x-x_0)+i\,(y-\sqrt{R^2-x_0^2})} - \frac{1}{(x-x_0)+i\,(y+\sqrt{R^2-x_0^2}} \right]$$

Wir substituieren $x_0/R = \sin\alpha$ und erhalten, nachdem wir Zähler und Nenner durch R dividiert haben

(19)

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx+iMy)} = -i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\cos\alpha}{\frac{x+iy}{R} - \sin\alpha - i\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\frac{x+iy}{R} - \sin\alpha + i\cos\alpha} \right] d\alpha$$

Den ersten Summanden des Integrales formen wir um, indem wir die Integrationsgrenzen von $\pi/2$ bis $3/2\cdot\pi$ wählen. $\frac{x+iy}{R}$ setzen wir gleich a.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a - \sin\alpha - i\cos\alpha} = -\int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a - \sin\alpha + i\cos\alpha}$$

Setzen wir dieses in (19) ein, so ergibt sich

$$\frac{\overline{\delta T}}{2(Mx+iMy)} = -i\left[-\int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a-\sin\alpha+i\cos\alpha}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a-\sin\alpha+i\cos\alpha}\right]$$

(20)
$$= i\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a+i\cdot e^{i\alpha}}$$

Substituieren wir $z = e^{i\alpha}$, $\cos\alpha = 1/2\cdot(z+1/z)$, so folgt

(21)
$$\frac{\overline{\delta T}}{2(Mx+iMy)} = 1/2\oint\frac{z+1/z}{z(a+iz)}dz = 1/2\cdot 2\pi i\sum_{j=1}^{n}Re_j$$

Das geschlossene Integral ist über den Einheitskreis zu erstrecken, $\sum_{j=1}^{n}Re_j$ bedeutet die Summe der Residuen innerhalb des Einheitskreises und letzteres folgt aus dem Residuensatz. Damit ist das reelle Integral (einer komplexwertigen Funktion) (20) in ein komplexes Linienintegral verwandelt, das über den geschlossenen Einheitskreis auszuführen ist. Seine Lösung folgt aus dem Residuensatz.

Die Singularitäten des Integranden $f(z)$ liegen bei $z = 0$ und $z = -a/i$. Da $|a| = |\frac{x+iy}{R}| > 1$ ist, liegt nur die erste innerhalb des Einheitskreises. Wir bestimmen das Residuum der Funktion $f(z) = \frac{z+1/z}{z(a+iz)}$ bei $z = 0$, indem wir $f(z)$ für $z = 0$ in eine Laurentreihe entwickeln. Wie in der Funktionentheorie gezeigt wird, stellt dann der Koeffizient der ersten negativen Potenz von z das Residuum von $f(z)$ in $z = 0$ dar.

$$f(z) = (1+1/z^2)\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+iz/a} = \frac{1}{a}(1+1/z^2)(1-iz/a+(iz/a)^2-+\ldots)$$

Das Glied der ersten negativen Potenz von z lautet $\frac{1}{a}\left(-\frac{i}{az}\right)$. Es ist also $\sum_{j=1}^{n}Re = Re = -i/a^2$. Wir setzen dieses in (21) ein:

(22)

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx + iMy)} = \pi i\,(-i/a^2) = \pi/a^2 = \frac{\pi R^2}{(x+iy)^2} = \frac{\pi R^2}{(r\cdot e^{i\phi})^2} = \frac{\pi R^2}{r^2}\cdot e^{-2i\phi}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Die Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt

$$\delta H = \frac{2\pi R^2}{r^2}\cdot (Mx\cdot\cos 2\phi + My\cdot\sin 2\phi)$$

$$\delta Z = \frac{2\pi R^2}{r^2}\cdot (Mx\cdot\sin 2\phi - My\cdot\cos 2\phi)$$

Die Kurven δZ = const. (δH = const.) haben, wie v. Baranov [1] gezeigt hat, das Aussehen eines vierblättrigen Kleeblattes.

Der Sattel

Um die $\overrightarrow{\delta T}$ Störung über einem Sattel zu berechnen (s. Abb. 20), berechnen wir zuerst die des Halbkreiszylinders von Abb. 21. Es gilt

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx + iMy)} = \int_{-R}^{R} dx_0 \int_{-\sqrt{R^2-x_0^2}}^{0} \frac{dy_0}{[(x-x_0)+i\,(y-y_0)]^2}$$

(23)

$$= -i\int_{-R}^{R} dx_0 \left[\frac{1}{x-x_0+iy} - \frac{1}{x-x_0+i\,(y+\sqrt{R^2-x_0^2})}\right] = -i\,(J_1 - J_2)$$

Die Lösung von J_1 ist

(25)
$$J_1 = \int_{-R}^{R} \frac{dx_0}{x-x_0+iy} = \ln\frac{x+R+iy}{x-R+iy} = \ln\frac{r_1\cdot e^{i\phi_1}}{r_2\cdot e^{i\phi_2}}$$

Das zweite Integral J_2 behandeln wir wie oben die Formeln (18), (19), (20) und (21) und erhalten

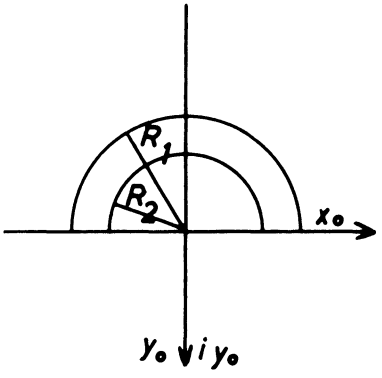


Abb. 20

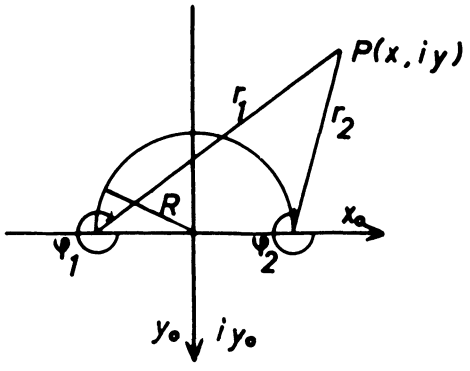


Abb. 21

$$J_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\alpha \, d\alpha}{a + i \cdot e^{i\alpha}} = \frac{1}{2i} \int_{-i}^{i} \frac{z + 1/z}{(a + iz)\, z} dz, \tag{26}$$

wo $z = e^{i\alpha}$ und $\frac{x + iy}{R} = a$ ist. Damit ist die Transformation in ein komplexes Linienintegral vollzogen. Um es zu lösen, formen wir den Integranden in folgender Weise durch Partialbruchzerlegung um

$$f(z) = \frac{z + 1/z}{z\,(a + iz)} = (z + 1/z)\left(\frac{1}{az} - \frac{i}{a^2 + iaz} \right)$$

$$= 1/a - iz/(a^2 + iaz) + 1/az^2 - i/z\,(a^2 + iaz) \tag{27}$$

$$= 1/a - iz/(a^2 + iaz) + 1/az^2 - i/a^2 z - 1/a^2 (a + iz)$$

Setzen wir (27) in (26) ein, so haben wir der Reihe nach die folgenden Integrale zu lösen. Als Integrationsweg wählen wir unter dem Gesichtspunkt der Singularitätenfreiheit und der rechnerischen Zweckmäßigkeit die imaginäre Achse oder den Einheitskreis.

$$\int_{-i}^{i} \frac{dz}{a} \tag{28}$$

Wir integrieren entlang der imaginären Achse. Hier ist $z = i\eta$, sodaß wir erhalten

(29)
$$\frac{i}{a}\int_{-1}^{1} d\eta = 2\, i/a$$

(30)
$$-\,i\int_{-i}^{i}\frac{z}{a^2+iaz}\,dz$$

Wir integrieren entlang der imaginären Achse

(31)
$$-\,i\int_{-1}^{1}\frac{i\eta}{a^2-a\eta}\;i\,d\eta = \frac{i}{a}\left[-\eta - a\ln(a-\eta)\right]\Bigg|_{-1}^{1} = -2\,i/a - i\ln\frac{a-1}{a+1}$$

(32)
$$\frac{1}{a}\int_{-i}^{i}\frac{dz}{z^2}$$

Wir integrieren über den Einheitskreis. Hier ist $z = e^{i\alpha}$

(33)
$$\frac{1}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{i\,d\alpha}{e^{i\alpha}} = \frac{i}{a}\cdot i\cdot e^{-i\alpha}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\,i}{a}$$

(34)
$$-\,i/a^2\int_{-i}^{i} dz/z$$

Wir integrieren über den Einheitskreis.

(35)
$$-\,i/a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i\,d\alpha = \pi/a^2$$

(36)
$$-\,1/a^2\int_{-i}^{i}\frac{dz}{a+iz}$$

Wir integrieren entlang der imaginären Achse.

$$(37) \qquad -1/a^2 \int_{-1}^{1} \frac{i\,d\eta}{a-\eta} = \frac{i}{a^2} \ln (a-\eta) \Big|_{-1}^{1} = \frac{i}{a^2} \ln \frac{a-1}{a+1}$$

Setzen wir die Lösungen in (26) ein, so erhalten wir

$$(38) \qquad J_2 = \frac{1}{2i}\left[2i/a - 2i/a - i \ln \frac{a-1}{a+1} + 2i/a + \pi/a^2 + \frac{i}{a^2} \ln \frac{a-1}{a+1} \right]$$

$$= 1/a - i\pi/2a^2 + 1/2 \cdot (1/a^2 - 1) \ln \frac{a-1}{a+1}$$

Für die δT Störung ergibt sich, indem wir J_1 und J_2 in (24) einsetzen

$$(39) \qquad \frac{\overline{\delta T}}{2(Mx + iMy)} = -i \left[\ln \frac{x+R+iy}{x-R+iy} \; 1/a + \frac{i\pi}{2a^2} - \frac{1}{2}(1/a^2 - 1) \cdot \ln \frac{a-1}{a+1} \right]$$

$$= i \frac{R}{x+iy} + \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{1}{(x+iy)^2} + \frac{i}{2}\left(1 + \frac{R^2}{(x+iy)^2}\right) \ln \frac{x+iy-R}{x+iy+R}$$

Als Wert für $\overline{\delta T}$ in großer Entfernung, d.h. für $|x+iy| \gg R$ erhält man

$$\lim_{|x+iy| \gg R} \frac{\overline{\delta T}}{2(Mx+iMy)} = \frac{iR}{x+iy} + \frac{\pi R^2}{2} \cdot$$

$$(40) \qquad \frac{1}{(x+iy)^2} + \frac{i}{2}\left(1 + \frac{R^2}{(x+iy)^2}\right) 2 \left(-\frac{R}{x+iy} - \dots\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{1}{(x+iy)^2} \cdots$$

In großer Entfernung wirkt der magnetisierte Halbkreiszylinder der Abb. 6 auf $|\delta T|$ wie eine Dipollinie vom magnetischen Moment $2\,(|Mx+iMy|)\frac{\pi R^2}{2}$ im Koordinatenursprung.

Nachdem wir die $\overline{\delta T}$ Störung eines Halbkreiszylinders der Abb. 21 berechnet haben, bestimmen wir die eines Sattels, indem wir die Differenz zweier Halbkreiszylinder mit den Radien R_1 und R_2 bilden (s. Abb. 20). Das Ergebnis lautet

$$\overline{\delta T} = \delta H - i\,\delta Z = 2\,(Mx + iMy)\left\{\frac{i}{x+iy}\,(R_1 - R_2) + \frac{\pi}{2\,(x+iy)^2}\,(R_1^2 - R_2^2) + \right.$$

(41)

$$\left. + \frac{i}{2}\left[\left(1 + \frac{R_1^2}{(x+iy)^2}\right)\ln\frac{x+iy-R_1}{x+iy+R_1} - \left(1 + \frac{R_2^2}{(x+iy)^2}\right)\ln\frac{x+iy-R_2}{x+iy+R_2}\right]\right\}$$

Diese Formel werten wir mit der Komplexrechenplatte (s. Abschn. c) aus und erhalten als Real- und Imaginärteil δH und $-\delta Z$. Abb. 22 zeigt $\delta H/2M$ und $\delta Z/2M$ für eine Inklination $i = 66^\circ$.

Durch Hinzufügen eines endlichen oder unendlichen Spaltes läßt sich das Modell, das ja nur den Oberteil eines Sattels liefert, weitgehend variieren und die Berechnung mit dem Kreisscharendiagramm (Abb. 16) fortführen.

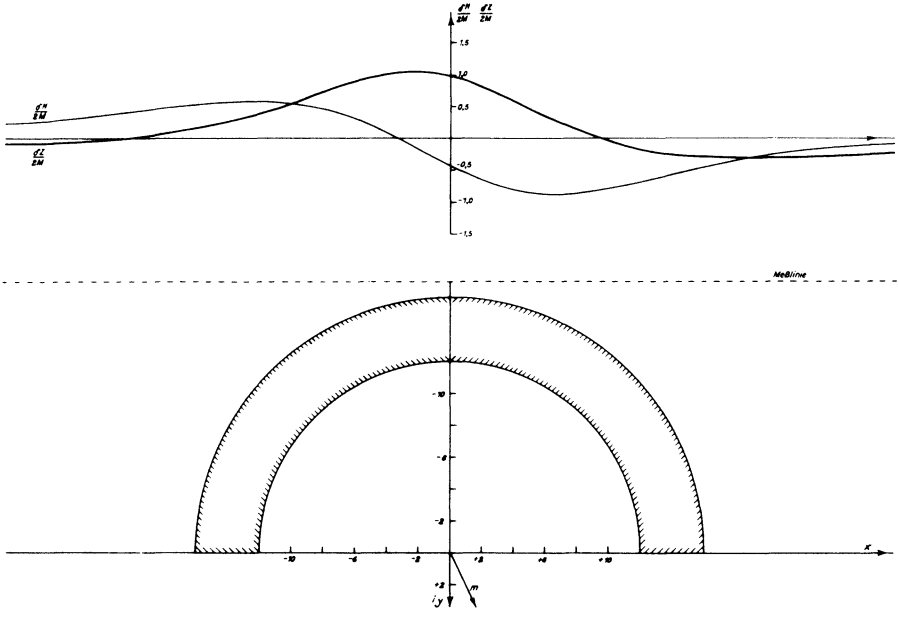


Abb. 22: δH- und δZ-Anomalie über einem Sattel

Die Mulde

Wir gehen wie oben vor und berechnen zunächst die δT Störung über einem Halbkreis, wie er in Abb. 24 gezeichnet ist.

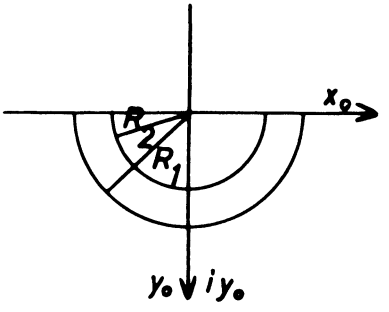


Abb. 23

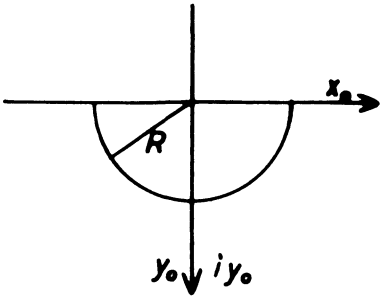


Abb. 24

Unsere Formel lautet

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx + iMy)} = \int_{-R}^{R} dx_0 \int_{0}^{\sqrt{R^2 - x_0^2}} \frac{dy_0}{[(x - x_0) + i\,(y - y_0)]^2}$$

(42)

$$= -i \int_{-R}^{R} dx_0 \left[\frac{1}{x - x_0 + i\,(y - \sqrt{R^2 - x_0^2})} - \frac{1}{x - x_0 + iy} \right]$$

(43)

$$= -i\,(J_3 - J_1)$$

J_1 haben wir in (25) gelöst, J_3 formen wir durch die Substitution

$x_0/R = \sin\alpha$, $\frac{x + iy}{R} = a$ um (s. auch (18) und (19)) und erhalten

$$J_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a - i \cdot e^{-i\alpha}}.$$

Wir substituieren $z = e^{i\alpha}$ und erhalten als komplexes Linienintegral

$$J_3 = \frac{1}{2i}\int_{-i}^{i} \frac{z + 1/z}{(a - i/z)\,z}\,dz, \tag{44}$$

das wir im Folgenden umformen

$$J_3 = \frac{1}{2i}\int_{-i}^{i} (z + 1/z)\left(\frac{1}{az - i}\right) dz = \frac{1}{2i}\int_{-i}^{i}\left[\frac{z}{az - i} + \frac{1}{z\,(az - i)}\right] dz$$

$$J_3 = \frac{1}{2i}\int_{-i}^{i}\left[\frac{z}{az - i} + i/z - \frac{ia}{az - i}\right] dz \tag{45}$$

Die einzelnen zu lösenden Integrale stimmen bis auf die Konstanten mit den oben errechneten (30), (34) und (36) überein, so daß das Ergebnis

$$J_3 = \frac{1}{2i}\left[2i/a + i/a^2 \cdot \ln\frac{1-a}{1+a} - \pi - i\ln\frac{1-a}{1+a}\right] \tag{46}$$

$$= 1/a - \pi/2i + \frac{1}{2}(1/a^2 - 1)\ln\frac{1-a}{1+a}$$

folgt. Setzen wir J_1 und J_3 in (43) ein, so erhalten wir

$$\frac{\overline{\delta T}}{2\,(Mx + iMy)} = -i\left[1/a - \pi/2i + \frac{1}{2}(1/a^2 - 1)\,ln\left(-\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln\frac{a-1}{a+1}\right]$$

$$= -i\left[1/a - \pi/2i + \frac{1}{2}\left(1/a^2 - 1\right)\left(\ln\frac{a-1}{a+1} + i\pi\right) + \ln\frac{a-1}{a+1}\right]$$

$$= -i\left[1/a + i\pi/2 + \frac{1}{2}(1/a^2 + 1)\cdot\ln\frac{a-1}{a+1} + \frac{i\pi}{2a^2} - i\pi/2\right] \tag{47}$$

$$= -i\,\frac{R}{x + iy} + \frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{1}{(x + iy)^2} - \frac{i}{2}\left(1 + \frac{R^2}{(x + iy)^2}\right)$$

$$\ln\frac{x + iy - R}{x + iy + R}$$

Für $|x+iy| \gg R$ erhalten wir, wie in (40), $\frac{\pi R^2}{2(x+iy)^2}$. Die Addition von (39) und (47), die, wie aus den Abbildungen folgt, die Anomalie eines Kreiszylinders ergeben muß, liefert

$$\frac{\overline{\delta T}}{2(Mx+iMy)} = \pi R^2 \cdot \frac{1}{(x+iy)^2},$$

was mit (22) übereinstimmt.

Die Differenz zweier Halbkreiszylinder mit den Radien R_1 und R_2 ergibt eine Mulde (s. Abb. 23), für die die $\overline{\delta T}$-Formel daher lautet

$$\overline{\delta T} = \delta H - i\delta Z = 2(Mx+iMy)\left[\frac{i}{x+iy}(R_1-R_2)+\frac{\pi}{2(x+iy)^2}(R_1^2-R_2^2)-\right.$$

(48)

$$\left.-\frac{i}{2}\left[\left(1+\frac{R_1^2}{(x+iy)^2}\right)\ln\frac{x+iy-R_1}{x+iy+R_1}-\left(1+\frac{R_2^2}{(x+iy)^2}\right)\ln\frac{x+iy-R_2}{x+iy+R_2}\right]\right]$$

(48) werten wir mit der Komplexrechenplatte aus (s. Abschn. c). Abb. 25 zeigt die δH und δZ Anomalie über einer Mulde für die Inklination $i = 66°$.

Der unendliche schmale Spalt

Ein weiteres Beispiel stellt die Herleitung der $\overline{\delta T}$ Formel für den unendlichen schmalen Spalt dar, die v. Baranov in [1] durchgeführt hat. Er erhält in unseren Bezeichnungen (s. Abb. 26)

(49) $$\overline{\delta T} = 2(Mx+iMy)\frac{b}{r\cdot e^{i\phi}}\cdot e^{i(\alpha-2\pi)}$$

(50) $$\overline{\delta T} = 2(Mx+iMy)\cdot\frac{b}{z}\cdot e^{i\alpha}\cdot e^{-i2\pi} = 2(Mx+iMy)\cdot\frac{b}{z}\cdot e^{i\alpha}$$

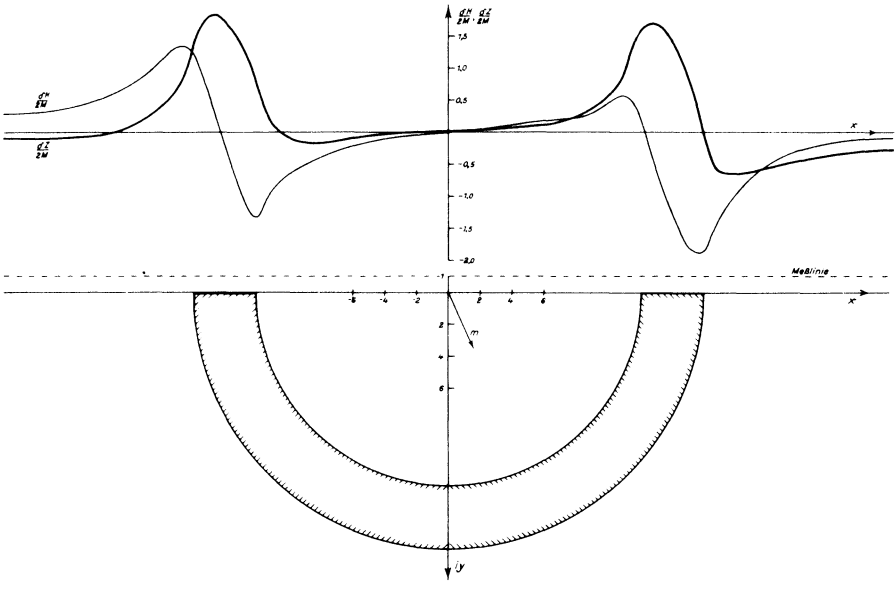


Abb. 25: δH- und δZ-Anomalie über einer Mulde

Wie v. Baranov gezeigt hat, sind die Kurven δZ = const. (damit auch δH = const.) Kreise, deren Scheitel sich im Ursprung berühren. Das Diagramm hat also das Aussehen eines Dipolfeldes [1].

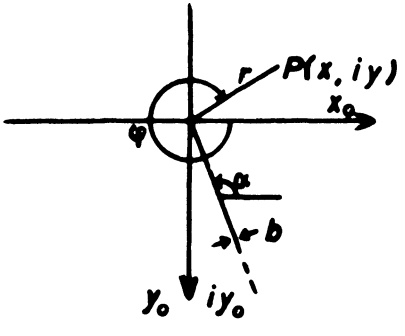


Abb. 26

c) Rechnerisches Auswerteverfahren mit Hilfe komplexer Zahlen

Neben der leichteren formelmäßigen Berechnung von $\overline{\delta T} = \delta H - i\delta Z$ für bestimmte Störkörper im Komplexen hat diese Darstellung den Vorteil, daß sie sich direkt mit Hilfe einer "Komplexrechenplatte" [9] auswerten läßt. Die Komplexrechenplatte entspricht dem Rechenschieber im Reellen und erlaubt die Multiplikation, Division usw. komplexer Zahlen. Man setzt in die gegebenen

Formeln die Werte des Modellkörpers, seine Magnetisierung, Mächtigkeit, sein Einfallen usw., und die Koordinaten des Aufpunktes ein, rechnet mit der Komplexrechenplatte und erhält als Real- und Imaginärteil, die sich direkt ablesen lassen, δH und $-\delta Z$. Daneben gewinnt man auch unmittelbar durch Ablesung Betrag und Argument von $\overline{\delta T}$, also auch die Gesamtstörfeldstärke δT. Dies ist wichtig, da bei modernen magnetischen Messungen mit Hilfe von Protonen-Präzessions-Magnetometern sowie bei Airborn-Untersuchungen δT gemessen wird (der Betrag), man also mit den abgeleiteten Formeln und der Komplexrechenplatte leicht Modelle rechnen kann.

Für einfache Körper, wie z.B. Stufe und Spalt, lassen sich die Störkurven von δZ und δH schnell aus den oben erwähnten Diagrammen ableiten, kompliziertere Körper kann man beliebig gut durch Poligone annähern. Die Anwendung der Diagramme wird dann jedoch sehr umständlich. In diesem Fall läßt sich ein rechnerisches Verfahren angeben, das auf der Anwendung der Komplexrechenplatte beruht. Es soll im Folgenden abgeleitet werden.

Eine Vorbetrachtung soll den Einfluß der Neigung der Oberkante eines Spaltes auf die Formel (16 a) behandeln.

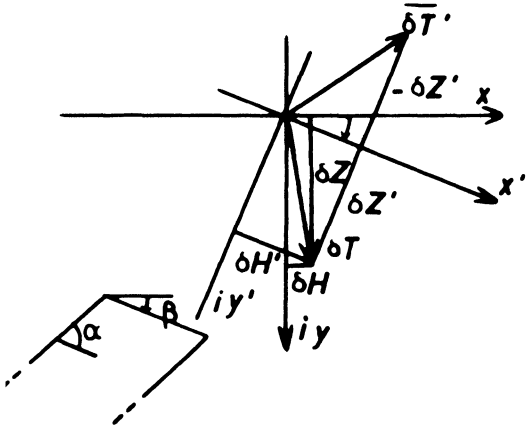


Abb. 27 a

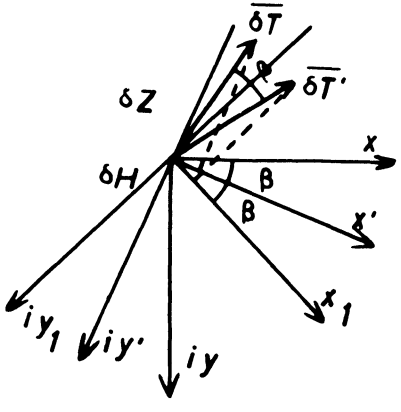


Abb. 27 b

Abb. 27 zeigt einen Störkörper, dessen Oberkante gegen die Horizontale, die x-Richtung, den Winkel β hat. Die Anomalie $\overline{\delta T}' = \delta H' - i\delta Z'$ im 'System ist gegeben durch (16 a)'

(16 a)' $$\overline{\delta T'} = -\sin\alpha \cdot e^{i\alpha} \cdot 2\,(Mx' + iMy') \cdot \ln \frac{r_2 \cdot e^{i\phi_2'}}{r_1 \cdot e^{i\phi_1'}}$$

Gefragt ist nach δT im x, y System mit den Komponenten (Real- und Imaginärteil) δH und δZ. Wir erhalten sie, indem wir das 'System um den Winkel $-\beta$ in das x, y System transformieren oder, was dasselbe bedeutet, δT um den Winkel $+\beta$ im 'System drehen (Abb. 27 a). Da in unseren Formeln δT statt $\delta T'$ steht, betrachten wir $\overline{\delta T'}$ im x_1, y_1 System (Abb. 27 b). Dies entspricht δT im x, y System. Gefragt ist dann nach den Komponenten von $\delta T'$ im x_1, y_1 System. Wir erhalten sie durch eine Drehung des 'Systems um $+\beta$ oder eine Drehung von $\delta T'$, im 'Strichsystem um $-\beta$. Die Transformationsgleichung im Komplexen geschrieben lautet daher

(51) $$\overline{\delta T} = \overline{\delta T'} \cdot e^{-i\beta}$$

Setzen wir (16 a)' in (51) ein, so erhalten wir als Ergebnis

(52) $$\overline{\delta T} = \delta H - i\delta Z = -\sin\alpha \cdot e^{i(\alpha-\beta)} \cdot 2\,(Mx' + iMy') \ln \frac{r_2 \cdot e^{i\phi_2'}}{r_1 \cdot e^{i\phi_1'}}$$

(53) $$= -i \sin\alpha \cdot e^{-i\beta} \cdot 2\,(M_\perp + iM_\parallel) \cdot \ln \frac{r_2 \cdot e^{i\phi_2}}{r_1 \cdot e^{i\phi_1}}$$

(man beachte $(\phi_2' - \phi_1') = (\phi_2 - \phi_1)$).

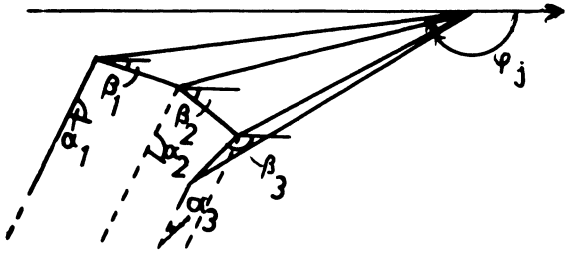


Abb. 28

Wir fragen nach der Formel für $\overline{\delta T}$ eines durch Poligone begrenzten endlichen oder unendlichen Körpers. Die Aufstellung der Formel soll an Abb. 28 erläutert werden.

Für den eingezeichneten Störkörper erhalten wir

$$\overline{\delta T} = -2i\,(M_{\perp} + iM_{\parallel}) \left[\sin\alpha_1 \cdot e^{-i\beta_1} \cdot \ln \frac{r_2 \cdot e^{i\phi_2}}{r_1 \cdot e^{i\phi_1}} + \sin\alpha_2 \cdot e^{-i\beta_2} \cdot \right.$$

(54)

$$\left. \ln \frac{r_3 \cdot e^{i\phi_3}}{r_2 \cdot e^{i\phi_2}} + \sin\alpha_3 \cdot e^{-i\beta_3} \cdot \ln \frac{r_4 \cdot e^{i\phi_4}}{r_3 \cdot e^{i\phi_3}} \right]$$

Setzen wir $\sin a_j \cdot e^{-i\beta_j} = f_j$, $r_j \cdot e^{i\phi_j} = z_j$, $(j = 1, 2 \ldots)$, so können wir auch schreiben

(55)

$$\overline{\delta T} = -2i\,(M_{\perp} + iM_{\parallel}) \left(f_1 \cdot \ln \frac{z_2}{z_1} + f_2 \cdot \ln \frac{z_3}{z_2} + f_3 \cdot \ln \frac{z_4}{z_3} \right)$$

(56)

$$= -2i\,(M_{\perp} + iM_{\parallel}) \left[-f_1 \ln z_1 + (f_1 - f_2) \ln z_2 + (f_2 - f_3) \ln z_3 + f_3 \ln z_4 \right]$$

(57)

$$= -2i\,(M_{\perp} + iM_{\parallel}) \left[\ln z_1^{-f_1} \cdot z_2^{(f_1 - f_2)} \cdot z_3^{(f_2 - f_3)} \cdot z_4^{f_3} \right]$$

(56) und (57) können wir in folgender Weise verallgemeinern

(58)

$$\overline{\delta T} = -2i\,(M_{\perp} + iM_{\parallel}) \sum_{j=1}^{n} (f_{j-1} - f_j) \cdot \ln z_j \qquad (\text{mit } f_0 = 0, f_n = 0)$$

(59)

$$= -2i\,(M_{\perp} + iM_{\parallel}) \cdot \ln \prod_{j=1}^{n} z_j^{(f_{j-1} - f_j)} \qquad (\text{mit } f_0 = 0, f_n = 0)$$

(58) oder (59) stellen die Grundlage für die Berechnung der $\overline{\delta T}$ Anomalie von Störkörpern dar, deren Begrenzung durch Poligone gegeben ist und die bis

nach ∞ reichen – in diesem Falle müssen die beiden äußersten, nach ∞ reichenden Poligonlängen parallel sein – oder endlich sein mögen (geschlossener Poligonzug). Die Auswertung geschieht mit der Komplexrechenplatte, die $\overline{\delta T}$ nach Betrag und Richtung, δH und δZ liefert.

Anm. Die Anwendungsmöglichkeit der komplexen Zahlen zur Berechnung der magnetischen Störkurven zweidimensionaler Körper läßt sich sinngemäß erweitern auf die Herleitung von Gravimeter- und Drehwaageformeln.

VII. Die Ausbildung der magnetischen Anomalie über den Ecken der Störkörper

1. Versuch zur Lösung der Aufgabe mit Hilfe der konformen Abbildung

Die in VI angegebenen Formeln zur Berechnung von Modellkurven setzen zweidimensionale, homogen magnetisierte Körper voraus. Die erste Voraussetzung stellt keine wesentliche Einschränkung dar. Es schien aber angebracht, der Frage der Magnetisierung nachzugehen. Anlaß dazu waren vor allem ausgeprägte Maxima und Minima in den theoretischen Kurven über den Ecken der Modellkörper, die in der Natur nur selten beobachtet werden. Nun ist in den Ecken die Magnetisierung sicher nicht homogen, und es wäre von Interesse, die Magnetisierung zu berechnen, die eine Ecke in einem homogenen Feld erfährt und abzuschätzen, für welche Suszeptibilitäten der Fehler merklich wird, der durch die Annahme einer homogenen Magnetisierung entsteht.

Da wir weiterhin zweidimensionale Körper betrachten wollen, liegt es nahe, das Problem mit Hilfe der konformen Abbildung anzufassen. Die Anwendung dieser Methode hat in der Strömungslehre zu guten Ergebnissen geführt. Sie ist auch zur Lösung elektrischer Aufgaben verwendet worden [7].

Grundlage für die Anwendung der Funktionentheorie zur Lösung potentialtheoretischer Aufgaben ist die Tatsache, daß Real- und Imaginärteil einer jeden analytischen Funktion Potentialfunktionen sind, d.h. die Laplace'sche Differentialgleichung $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ im Zweidimensionalen erfüllen.

Die Vereinfachung, die die Funktionentheorie bei der Lösung von Potentialaufgaben bringt, liegt darin, daß sie es oft erlaubt, die gegebene Aufgabe auf einen einfacheren Fall zu transformieren.

Gegeben sei je ein einfachzusammenhängender Bereich in der z Ebene (Bz) und in der w Ebene (Bw), sowie eine analytische Funktion $z = g(w)$ (Umkehrfunktion: $w = h(z)$), die in Bw regulär und in Bw und auf dem Rand stetig ist und die Bw schlicht auf Bz und den Rand von Bw eindeutig und stetig auf den Rand von Bz abbildet. Die Lösung einer gegebenen Randwertaufgabe in der Bz Ebene soll dargestellt werden durch eine Funktion $u(x, y)$, die der Realteil der analytischen Funktion $f(z)$ ist. Nach der Gruppeneigenschaft der analytischen Funktionen ist nun $F(w) = f(g(w))$ eine in Bw reguläre analytische Funktion. Deren Realteil $U(w) = R\, f(g(w))$ ist eine in Bw reguläre Potentialfunktion, die auf dem Rand des Bereiches Werte hat, die sich aus den Randwerwerten von $u(x, y)$ durch die Abbildung von Bz auf Bw ergeben. Es ist so die Randwertaufgabe für den Bereich Bz auf die für Bw zurückgeführt (4).

Als Bereich Bw nimmt man oft einen Kreis. Existiert für einen gegebenen Bereich eine Abbildungsfunktion mit obigen Eigenschaften, die den Bereich auf einen Kreis abbildet, – was sehr häufig der Fall ist – so ist die Randwertaufgabe auf die des Kreises zurückgeführt. Sie kann dann nach bekannten Verfahren, z.B. durch das Poissonsche Integral gelöst werden.

Diese Ausführungen stellen auch die Grundlage dar für die Berechnung der Fortsetzung des Feldes mit Hilfe der Funktionentheorie.

Die in unserem Fall vorliegende Randwertaufgabe ist folgende: Gegeben ist ein induzierendes Feld, gefragt nach dem Potential ϕ_a und ϕ_i im Äußeren und Inneren des Teilbereiches der Permeabilität μ. Für ϕ_a und ϕ_i muß gelten

außen $\quad \Delta \phi_a = 0 \qquad \mu = 1$

innen $\quad \Delta \phi_i = 0 \qquad \mu$

auf dem Rande $\quad \mu \dfrac{\partial \phi_i}{\partial n} = \dfrac{\partial \phi_a}{\partial n}$ (n : Normalenrichtung)

$$\phi_i = \phi_a$$

Die Induktionsaufgabe ist gelöst für die Induktion einer Linienladung p an dem Halbraum der Permeabilität μ (s. Abb. 29). Die Lösung lautet:

(60) $$\phi_a = -2p \ln r_1 - 2p' \ln r_2$$

(61) $$\phi_i = -2p'' \ln r_1$$

$$p' = p \frac{1-\mu}{1+\mu} \quad p'' = p \frac{2}{1+\mu}$$

Suchen wir die Lösung für einen anderen (zylindrischen) Körper, so bestimmen wir die obige Funktion $w = h(z)$, die seinen Querschnitt konform auf die Halbebene abbildet. Das nach $z = g(w)$ transformierte Potential in (60) und (61) stellt dann die Lösung der Randwertaufgabe dar. Daß diese Lösung eindeutig ist und damit die aus dem Potential abzuleitende Feldverteilung im Experiment wirklich eintreten würde, läßt sich leicht unter Anwendung des Greenschen Satzes zeigen.

Als Beispiel betrachten wir den Kreiszylinder der Permeabilität μ im Feld von zwei Ladungen p^+ und p^- (s. Abb. 30).

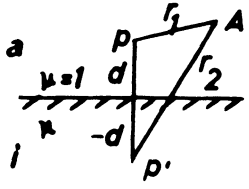


Abb. 29

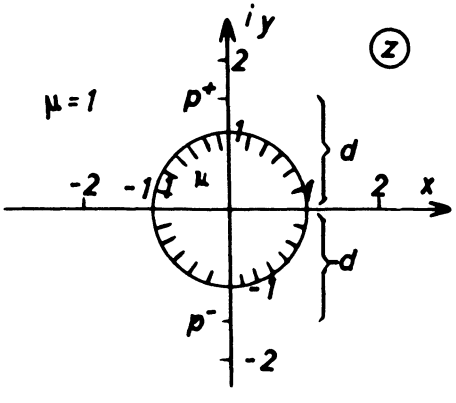


Abb. 30

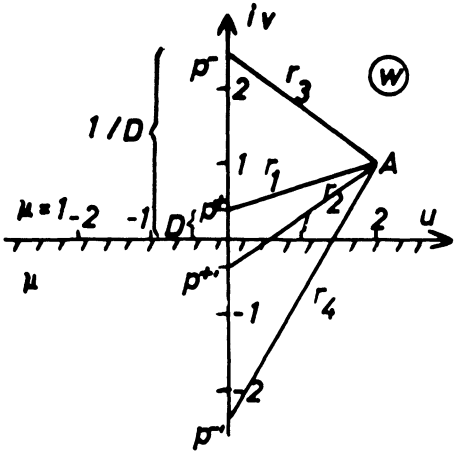


Abb. 31

Durch die lineare Abbildung $w = -\frac{i-z}{1-iz} = -i\frac{1+iz}{1-iz}$, die die erforderlichen Eigenschaften erfüllt, wird das Innere des Einheitskreises in die untere Halbebene überführt. Dabei geht der Kreisumfang in die reelle Achse über, die imaginäre Achse der z Ebene wird zur imaginären Achse der w Ebene. Die Quellpunktkoordinaten $p^+(0, d)$ und $p^-(0, -d)$ werden in der w Ebene wegen

(64) $$w = u + iv = -i\,\frac{1+iz}{1-iz},\quad z = x + iy$$

(65) $$u = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

(66) $$v = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

zu $p^+\,(0, D^+)$ und $p^-\,(0, D^-)$, wobei $D^+ = \frac{d^2-1}{d^2+2d+1} = \frac{d-1}{d+1}$,

$D^- = \frac{d^2-1}{d^2-2d+1} = \frac{d+1}{d-1}$, also $D = D^+ = 1/D^-$ ist. Beide Ladungen liegen in der w Ebene auf der positiv imaginären Achse. Die Lösung dieses Influenzproblems erhalten wir, indem wir beide Ladungen an der reellen Achse als $p^{+\prime}$ und $p^{-\prime}$ spiegeln und für das Potential im Außenraum (ϕ_a) und im Innenraum (ϕ_i) schreiben

$$\phi_a = -2p \ln r_1 - 2p' \ln r_2 + 2p \ln r_3 + 2p' \ln r_4$$

$$\phi_i = -2p'' \ln r_1 + 2p'' \ln r_3$$

$$r_1 = [(v-D)^2 + u^2]^{1/2} \qquad r_2 = [(v+D)^2 + u^2]^{1/2}$$

$$r_3 = [(v-1/D)^2 + u^2]^{1/2} \qquad r_4 = [(v+1/D)^2 + u^2]^{1/2}$$

Aus den Randbedingungen $\phi_a = \phi_i$ und $\frac{\partial \phi_a}{\partial v} = \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial v}$ folgt

$$p'' = \frac{2}{1+\mu} p \qquad \text{und} \qquad p' = \frac{1-\mu}{1+\mu} p.$$

Wie unmittelbar einzusehen ist, erfüllen ϕ_a und ϕ_i die Laplacesche Differentialgleichung im Zweidimensionalen. Nachdem damit das Randwertproblem in der w Ebene gelöst ist, erhalten wir die Lösung in der z Ebene, indem wir für u und v in den $r_j\,(j = 1, 2 \ldots 4)$ von ϕ_a und ϕ_i die Ausdrücke (65) und (66) einsetzen:

$$
\begin{aligned}
(67)\quad \phi_a = &-2p\ \ln\left[\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}-\frac{d-1}{d+1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2+y^2+2y+1}\right)^2\right]^{1/2}\\
&-2p'\ln\left[\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}+\frac{d-1}{d+1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2+y^2+2y+1}\right)^2\right]^{1/2}\\
&+2p\ \ln\left[\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}-\frac{d+1}{d-1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2+y^2+2y+1}\right)^2\right]^{1/2}\\
&+2p'\ln\left[\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}+\frac{d+1}{d-1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2+y^2+2y+1}\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(68)\quad \phi_i = &-2p''\ln\left[\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}-\frac{d-1}{d+1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2+y^2+2y+1}\right)^2\right]^{1/2}\\
&+2p''\ln\left[\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}-\frac{d+1}{d-1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2+y^2+2y+1}\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

Wir prüfen, wie sich das Potential in der Nähe der Quellpunkte p^+ und p^- verhält, denn wir müssen verlangen, daß hier $\phi_a \to -2p \ln r$ geht, unter r den Abstand vom Quellpunkt verstanden. Wir brauchen nur das erste oder dritte Glied der rechten Seite von (67) zu betrachten, denn die anderen Glieder nähern sich konstanten Ausdrücken, spielen daher für das Potential keine Rolle. Wir erhalten im ersten Fall, wenn wir $x = 0$ setzen, den Grenzübergang also auf der imaginären Achse durchführen

$$
\lim_{y\to d}\phi_a \to -2p\ \ln\left(\frac{y-1}{y+1}-\frac{d-1}{d+1}\right) = -2p\ \ln\frac{2y-2d}{yd+y+d+1}
$$

Führen wir $y = d + \epsilon$ ein, so folgt,da der Nenner ebenfalls gegen einen konstanten Wert geht,

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\phi_a \to -2p\ \ln\epsilon + \text{const.},
$$

was zu zeigen war. Entsprechend erhalten wir für $y \to -d : \phi_a \to +2p \ln\epsilon + \text{const.}$ Somit erfüllen (67) und (68) alle geforderten Bedingungen, stellen also die gesuchte Lösung des Randwertproblems dar.

Wir fragen noch nach der Potentialverteilung, die wir erhalten, wenn sich der Kreiszylinder in einem homogenen Feld befindet. Das homogene Feld erzeugen wir, indem wir die Ladungen p^+ und p^- in der z Ebene ins Unendliche rücken, sie aber gleichzeitig entsprechend verstärken. In der w Ebene rücken dann die Ladungen gegen $+1$. Ist d sehr groß (genauer: so groß, daß wir Glieder zweiter Ordnung von $1/d$ vernachlässigen können), so können wir für $D^+ = D \approx 1 - \epsilon$, für $D^- = 1/D \approx 1 + \epsilon$ schreiben. Die Ausdrücke für das Potential lauten dann

$$\phi_a \to -p \ln \frac{[v-(1-\epsilon)]^2 + u^2}{[v-(1+\epsilon)]^2 + u^2} - p' \ln \frac{[v+1-\epsilon]^2 + u^2}{[v+1+\epsilon]^2 + u^2} \tag{69}$$

$$\phi_i \to -p'' \ln \frac{[v-(1-\epsilon)]^2 + u^2}{[v-(1+\epsilon)]^2 + u^2} \tag{70}$$

(69) können wir umformen:

$$\phi_a \to -p \ln \frac{1 + \dfrac{2\epsilon(v-1)}{(v-1)^2+u^2+\epsilon^2}}{1 - \dfrac{2\epsilon(v-1)}{(v-1)^2+u^2+\epsilon^2}} - p' \ln \frac{1 - \dfrac{2\epsilon(v+1)}{(v+1)^2+u^2+\epsilon^2}}{1 + \dfrac{2\epsilon(v+1)}{(v+1)^2+u^2+\epsilon^2}}$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck in eine Reihe, so ergibt sich unter Vernachlässigung höherer Glieder

$$\phi_a \to -p\, 2 \left(\frac{2\epsilon(v-1)}{(v-1)^2+u^2+\epsilon^2} + \dots \right) + p'\, 2 \left(\frac{2\epsilon(v+1)}{(v+1)^2+u^2+\epsilon^2} + \dots \right)$$

Der Grenzwert dieses Ausdruckes für $\epsilon \to 0$, $p \to \infty$, $2\epsilon p \to m$ (m magnetisches Moment) ist

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ p \to \infty \\ 2\epsilon p \to m}} \phi_a = -2m \frac{v-1}{(v-1)^2+u^2} + 2m \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{v+1}{(v+1)^2+u^2}, \tag{71}$$

also das Potential zweier Dipollinien vom Moment $-2m$ und $2m \frac{1-\mu}{1+\mu}$, die sich auf der imaginären Achse in $v = 1$ bzw. $v = -1$ befinden. Um die Verhältnisse in der z Ebene zu erhalten, transformieren wir (71) nach (65) und (66). Das erste Glied der rechten Seite von (71), das das Potential des induzierenden

Feldes darstellt, wird dabei zu $\phi_{a1} = my + \text{const.}$, d.h. das Feld $H = -\frac{\partial \phi}{\partial y} =$

$= -m$ hat den Betrag m und ist antiparallel zur y-Achse (von $+\infty$ nach $-\infty$) gerichtet.

Für das zweite Glied von (71) folgt als Wirkung des Kreiszylinders

$$\phi_{a2} = m \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} + \text{const.}$$

Das Potential eines Kreiszylinders der Permeabilität μ in einem homogenen Feld ist demnach gleich dem einer Dipollinie vom Moment $m \frac{1-\mu}{1+\mu}$ in seinem Mittelpunkt.

Wir fragen noch nach dem Potential ϕ_i im Innenraum. Die Entwicklung geht analog zu der des ersten Ausdruckes der rechten Seite von (71). An die Stelle von p tritt p'' und damit im Ergebnis an die Stelle von $m : m \frac{2}{1+\mu}$, d.h. $\phi_i = m \frac{2y}{1+\mu} + \text{const.}$ Für das Feld im Innern $H_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial y}$ erhalten wir

$$H_i = -\frac{2m}{1+\mu}.$$

Wir interessieren uns speziell für die Magnetisierung von Ecken. Daher müssen wir eine Abbildung suchen, die eine Ecke auf einen Körper abzubilden gestattet, für den das Randwertproblem gelöst ist, z.B. den Halbraum oder den Kreiszylinder.

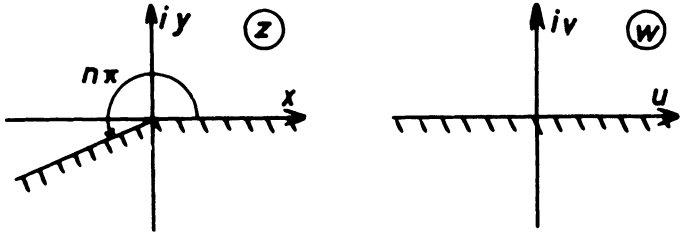


Abb. 32

Es liegt nahe, die Abbildung $w = z^{1/n}$ zu versuchen, die die Fläche vom Öffnungswinkel $n\pi$ auf die obere Halbfläche abbildet. (s. Abb. 32). Durch diese Abbildung geht aber die Fläche vom Öffnungswinkel $(2-n)\pi$ nicht in die

untere Halbebene über, sondern zu ihrer Abbildung müssen wir eine zweite Riemannsche Fläche hinzunehmen, was physikalisch keinen Sinn hat. Wir können versuchen, innere und äußere Fläche für sich auf die untere und obere Halbfläche durch

$$w = z^{\frac{1}{2-n}} \cdot e^{i\pi 2\frac{1-n}{2-n}}$$ (innere Fläche auf untere Halbfläche)

$$w = z^{1/n}$$ (äußere Fläche auf obere Halbfläche)

abzubilden. Es sind dann aber die Randbedingungen nicht mehr erfüllt. Durch eine Streckung können wir diesen nachkommen. Da diese Transformation eine Potenz von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ enthält, ist sie jedoch keine analytische Funktion und darf nicht verwendet werden.

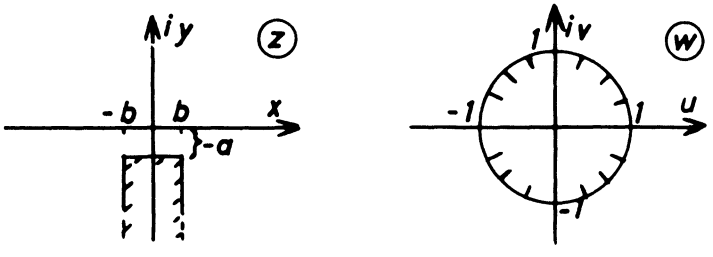


Abb. 33

Wir könnten weiter an die Abbildung $w = -e^{-\frac{i\pi}{b}(z+ia)}$ denken, die den senkrechten unendlichen Spalt auf den Einheitskreis abbildet (s. Abb. 33). Jedoch ist die Umkehrfunktion unendlich vieldeutig, so daß wir zu keiner Darstellung der Lösung im Innen- und Außenraum kommen können. Weiter wird der Rand des Spaltes nicht auf den Rand des Kreises abgebildet, so daß die Abbildungsfunktion nicht die verlangten Eigenschaften besitzt.

Eine weitere Möglichkeit stellt die Schwarz-Christoffelsche Formel dar, die das Äußere oder Innere eines Poligons auf die Halbebene abbildet. Da hierbei jedoch nur das Äußere oder Innere des Poligons auf die Halbebene abgebildet wird und bei einer Abbildung von beiden auf die obere und untere Halbebene die Randpunkte des Poligons in der w Ebene nicht zusammenfallen, sind die Randbedingungen nicht erfüllt, und die Abbildung scheidet zur Lösung unseres Problems aus.

Wir müssen eine eineindeutige Abbildungsfunktion suchen, die die volle z Ebene auf die volle w Ebene abbildet und dabei unser Randwertproblem in ein leicht zu behandelndes transformiert. Als Funktion läßt sich hierfür nur die lineare Abbildung verwenden. Als einfachste zu behandelnde Aufgabe läßt sich das Randwertproblem der Viertelebene auf das des Halbkreises transformieren, alle anderen für uns interessanten Formen wie Stufe, Spalt usw. führen auf kompliziertere Gebilde. Es läßt sich jedoch auch die Randwertaufgabe für die Viertelebene einfacher direkt ausführen als über die Abbildung auf den Halbkreis. Somit gibt die konforme Abbildung keine Vereinfachung für die Lösung unseres Problems.

2. Die spezielle Lösung der Influenzaufgabe am Viertelraum nach der Methode der Bilder

Wir betrachten noch die Lösung des Randwertproblems für den Viertelraum, wie wir sie direkt nach der Methode der Bilder durchführen können (s. Abb. 34).

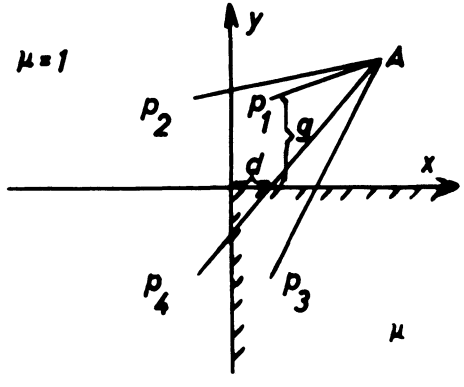


Abb. 34

A sei der Aufpunkt. In $p\,(d, g)$ befinde sich die Ladung p_1. Der 4. Quadrant werde von einem Medium der Permeabilität μ eingenommen. Gefragt ist nach der Lösung des Influenzproblems. Wir spiegeln die Ladung p_1 an der x- und y-Achse, erhalten also insgesamt vier Ladungen in $p_1\,(d, g)$, $p_2\,(-d, g)$, $p_3\,(d, -g)$ und $p_4\,(-d, -g)$ und machen für das Potential im Außenraum ϕ_a und im Innenraum ϕ_i den allgemeinen Ansatz

$$\phi_a = -2\,(p_1 \ln r_1 + p_2 \ln r_2 + p_3 \ln r_3 + p_4 \ln r_4) \tag{72}$$

(73) $$\phi_i = -2\,(p_1' \ln r_1 + p_2' \ln r_2 + p_3' \ln r_3 + p_4' \ln r_4)$$

Aus den Randbedingungen

1. $\phi_a = \phi_i$ a) für $y = 0$ $x > 0$ d.h. $r_1 = r_3, r_2 = r_4$

b) für $x = 0$ $y < 0$ d.h. $r_1 = r_2, r_3 = r_4$

2. a) $$\frac{\partial \phi_a}{\partial y} = \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \qquad y = 0 \qquad x > 0$$

b) $$\frac{\partial \phi_a}{\partial x} = \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \qquad x = 0 \qquad y < 0$$

und der Bedingung $p_3' = 0$ folgt:

$$p_1 = p_4;\ p_2 = p_3 = \frac{1-\mu}{1+\mu} p_1;\ p_2' = 0;\ p_1' = p_4' = \frac{2}{1+\mu} p_1$$

Die Ausdrücke (72) und (73) für ϕ_a und ϕ_i lauten also

(74) $$\phi_a = -2\left(p_1 \ln r_1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} p_1 \ln r_2 + \frac{1-\mu}{1+\mu} p_1 \ln r_3 + p_1 \ln r_4 \right)$$

(75) $$\phi_i = -2\left(\frac{2}{1+\mu} p_1 \ln r_1 + \frac{2}{1+\mu} p_1 \ln r_4 \right)$$

In Worte gefaßt besagt das Ergebnis: unter dem Einfluß des von den drei Ladungen $p_1\,(d, g)$, $p_2\,(-d, g)$ und $p_1\,(-d, -g)$ erzeugten Feldes verhält sich das Medium der Permeabilität μ so, als wäre im Punkte $P\,(d, -g)$ eine Ladung $p_2 = \frac{1-\mu}{1+\mu} p_1$ vorhanden.

Der Ausdruck

(76) $$\begin{aligned} \phi_{\text{ind}} &= -2\,(p_1 \ln r_1 + p_2 \ln r_2 + p_1 \ln r_4) \\ &= -2\,(p_1 \ln r_1 \cdot r_4 + p_2 \ln r_2) \end{aligned}$$

stellt das Potential des induzierenden Feldes, der Ausdruck

(77) $$\phi_{\text{an}} = -2\, p_2 \ln r_3$$

das Potential des rückwirkenden Feldes, sozusagen die Anomalie, im Außenraum dar.

Uns interessieren die Verhältnisse in der Nähe der Ecke, also für $x \approx 0$, $y \approx 0$. Bringen wir die Ladungen in eine größere Entfernung, so wird das erste Glied der rechten Seite von (76) hier angenähert konstant, da das Produkt $r_1 \cdot r_4$ in einem größeren Bereich konstant ist. Wir können also schreiben $\phi_{ind} = -2p_2 \ln r_2$. In der Nähe der Ecke ist dieses das Potential eines homogenen Feldes, wie wir es wünschen. Das Potential des rückwirkenden Feldes ist $\phi_{an} = -2p_2 \ln r_3$, das in der Nähe der Ecke auch homogen und dem induzierenden entgegengesetzt gleich ist. Das Resultat zeigt, daß der eingeschlagene Weg nicht zum gewünschten Ziel führt. Dieses wird noch deutlicher, wenn wir die Potentiale ϕ_a und ϕ_i betrachten, die beide in der Nähe der Ecke konstant werden. Die Felder im Innen- und Außenraum sind hier also gleich Null. Das Ergebnis liegt darin begründet, daß für die Ausbildung des Feldes in der Nähe der Ecke nicht nur diese und das hier wirkende induzierende Feld maßgebend sind, sondern der übrige Körper mitbetrachtet werden muß. Dieser befindet sich aber nicht in einem homogenen Feld, damit liefert dieser Weg nicht die Magnetisierung einer Ecke in einem homogenen Feld, sondern die des Viertelraumes in dem durch drei Linienladungen von entsprechender Stärke und Lage verursachten Feld.

3. Abschätzung des Bereichs einer homogenen Magnetisierung in einer Ecke

Da es uns in den vorangehenden Abschnitten weder durch konforme Abbildung noch nach der Methode der Bilder gelang, die Magnetisierung, die durch ein homogenes Feld in einer Ecke induziert wird oder das Feld im Außenraum zu berechnen, wollen wir uns hier mit der Abschätzung begnügen, wann die inhomogene Magnetisierung auf Grund des entmagnetisierenden Feldes merklich wird, d.h. für die Auswertung zu berücksichtigen ist. Die exakte Lösung des Problems ist zweckmäßig durch Modellversuche herbeizuführen, bei deren Auswertung die Methoden der Funktionentheorie mit Vorteil angewandt werden könnten.

Zur mathematischen Formulierung gehen wir folgendermaßen vor: In der positiven x-Richtung wirke das homogene magnetische Feld F [3]. In dieses

[3] Die x-Richtung des wirkenden Feldes, d.h. Inklination $i = 0^\circ$ (dem entspricht in der Abschätzung $i = 90^\circ$), wählen wir, um die Rechnung zu vereinfachen. Dies bedeutet keine Einschränkung gegenüber einem allgemeinen i, wie unmittelbar anschaulich aus dieser und (1) folgt.

bringen wir einen senkrechten unendlichen Spalt der Permeabilität μ. Wir denken uns in ihm zunächst das Feld F wirkend, das eine Magnetisierung $Mx = xF$ hervorruft, die parallel dem Feld gerichtet ist. Diese hat ihrerseits ein Feld zur Folge, das sich dem primären überlagert. Wir erhalten ein verändertes induzierendes Feld F', das nun induzierend wirkt usw.

Wir könnten so durch Iteration zur schließlich eintretenden Magnetisierungsverteilung kommen. Es wird dies jedoch langwierig und schwierig, so daß wir uns mit dem ersten Schritt begnügen wollen. Wir betrachten die homogene Magnetisierung des Spaltes und das entstehende Eigenfeld im Außenraum, wofür wir die Berechnungsverfahren entwickelt haben. Für die horizontale und vertikale Eigenfeldkomponente erhalten wir nach VI. 2. b.

$$\delta H = -2Mx \cdot \phi = -2\kappa F \cdot \phi\,;\ \delta Z = 2Mx \cdot \ln\frac{r_2}{r_1} = 2\kappa F \ln\frac{r_2}{r_1}$$

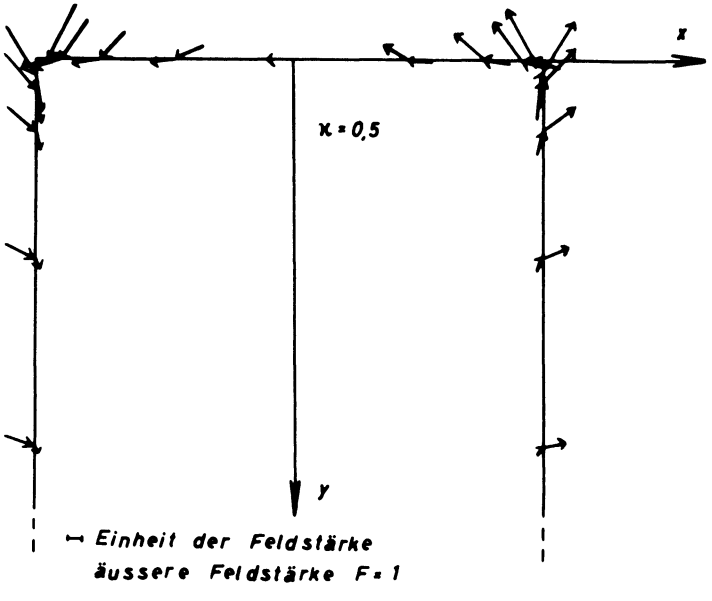


Abb. 35: Brechung der Kraftlinien an der Oberfläche des Störkörpers

In Abb. 35 ist die aus dem induzierenden Feld und aus dem Eigenfeld resultierende Feldstärke als Vektor in unmittelbarer Nähe des Randes des Körpers dargestellt. Die Suszeptibilität κ wurde gleich 0,5 gesetzt. Das Feld wurde in den

Innenraum nach den Randwertbedingungen – Stetigkeit der Normalkomponente der Induktion und der Tangentialkomponente der Feldstärke – fortgesetzt. Wie uns die Abbildung zeigt, ist für Störkörper, deren Suszeptibilität etwa gleich der des Magnetits ist, die Magnetisierung in einem großen Bereich, auf alle Fälle in den Ecken, nicht homogen. Sie wird es aber um so mehr sein, je kleiner die Suszeptibilität ist, je mehr also das induzierende Feld gegenüber dem Eigenfeld in Erscheinung tritt.

Wir müssen daher einen Zusammenhang suchen zwischen der Suszeptibilität und dem homogenen (oder inhomogenen) Bereich. Als Maß für die Homogenität der Richtung des Feldes können wir den Winkel α ansehen, den die resultierende und die induzierende Feldstärke einschließen. Wir verlangen, daß er in unmittelbarer Nähe des Körpers $|\alpha| \leq 2^\circ$ bzw. $|\alpha| \leq 5^\circ$ ist. Für ihn erhalten wir

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta Z}{F + \delta H} = \frac{2F \cdot \kappa \ln r_2/r_1}{F(1 - 2\kappa\phi)}, \tag{78}$$ [4]

also die gesuchte Beziehung zwischen der Suszeptibilität und den Koordinaten des homogenen (inhomogenen) Bereichs in der Form r_2/r_1. Die Auflösung von (78) nach κ ergibt

$$\kappa = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2 \ln \frac{r_2}{r_1} + 2\phi \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

Auf der Oberfläche des Spaltes ist $\phi = \pi$, an den Seiten $\phi < 0$, so daß wir für die Abschätzung $\phi = \pi$ nehmen dürfen.

In Abb. 36 ist $r_1/r_1 + r_2 = r_1/b$ ($r_1 + r_2$ auf der Oberfläche ist gleich b, der Breite des Spaltes) als Funktion von κ für $\alpha = 2^\circ$ und $\alpha = 5^\circ$ aufgetragen. Aus dieser Darstellung können wir entnehmen, welche Suszeptibilität der Körper haben darf, damit er bis auf den auf die Breite des Störkörpers bezogenen Abstand $r_1/r_1 + r_2$ von der Ecke homogen mit dem Fehlermaß $\alpha = 2^\circ$ bzw. $\alpha = 5^\circ$ angesehen werden kann. Dieser restliche inhomogene Bereich muß so klein gewählt werden, daß er keinen merklichen Einfluß auf das Feld hat.

Für unsere Abschätzung müssen wir einen Wert für seine Magnetisierung an-

---

[4] Die Formel (78) für allgemeines i würde lauten (s. Anm. 3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{[4\kappa^2(\phi^2 + (\ln r_2/r_1)^2 - (-\phi \cdot \cos 2i + \ln r_2/r_1 \cdot \sin 2i)^2)]^{1/2}}{1 + 2\kappa(-\phi \cos 2i + \ln r_2/r_1 \cdot \sin 2i)}$$

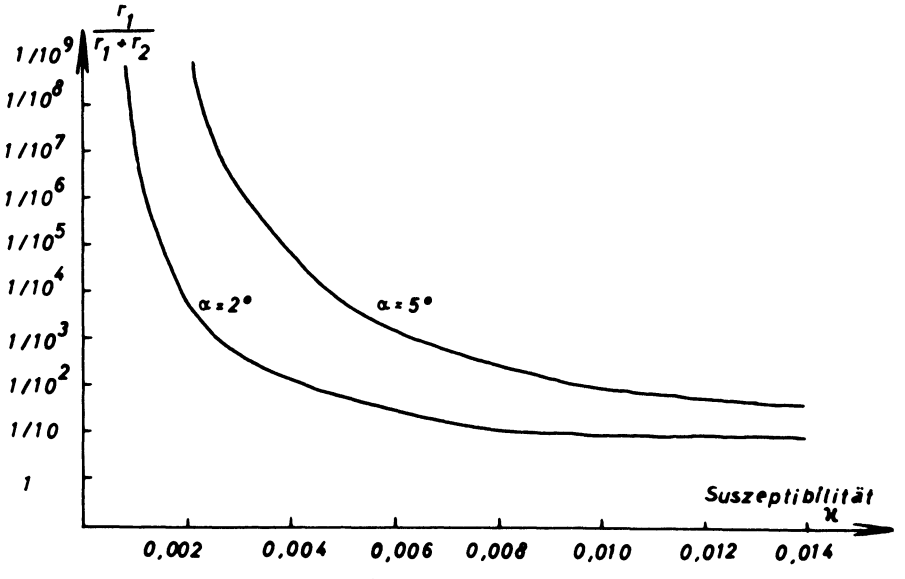


Abb. 36: Darstellung von $\frac{r_1}{r_1 + r_2}$ als Funktion der Suszeptibilität κ nach

$$\kappa = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2 \ln r_2 / r_1 + 2\pi \operatorname{tg} \alpha}$$

nehmen. Wir wählen den Wert $M = 1\,000\,\gamma$, den die Diabase maximal erreichen dürften, und errechnen den Radius des Kreiszylinders, dessen vierter Teil in einem senkrechten Abstand von 1m noch eine δZ - Anomalie von $20\,\gamma$ hervorruft. Dieser ergibt sich aus

$$\delta Z = 2 \frac{R^2 \pi}{4} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot M \qquad \text{(s. VI, 2, b)}$$

zu $R = 11{,}3$ cm. Die Breite des Störkörpers $b = r_1 + r_2$ nehmen wir zu 20 m, 50 m und 200 m an, so daß das Verhältnis $r_1 / r_1 + r_2$ gleich ist

$\frac{r_1}{r_1 + r_2}$	$r_1 + r_2 =$	20 m	50 m	200 m
$M = 1\,000\,\gamma$	:	0,00565	0,00226	0,000565

Für kleineres $r_1 / r_1 + r_2$ können wir den Einfluß des Feldes der Ecke auf das Gesamtfeld vernachlässigen, für größeres müßten wir ihn je nach der erforderlichen Genauigkeit berücksichtigen. Mit gerade diesem Wert gehen wir in die graphische Darstellung der Abb. 36 und entnehmen für die maximal zulässige

Suszeptibilität, unter der Forderung, daß der Körper als homogen magnetisiert angesehen werden kann, die folgenden Werte

	$\frac{r_1}{r_1 + r_2}$	0,00565	0,00226	0,000565
κ	$\alpha = 2^\circ$	$3\,000 \cdot 10^{-6}$		$2\,000 \cdot 10^{-6}$
	$\alpha = 5^\circ$	$\approx 7\,000 \cdot 10^{-6}$		$5\,000 \cdot 10^{-6}$

Für Gesteine, deren Suszeptibilitäten $2\,000 \cdot 10^{-6}$ bis $7\,000 \cdot 10^{-6}$ betragen, können wir die Körper daher je nach der erforderlichen Genauigkeit als homogen magnetisiert hinsichtlich der Richtung des Feldes betrachten. Dasselbe gilt, wie eine kurze Abschätzung liefert (Stetigkeit der Normalkomponente der Induktion), für den Betrag. Die uns hier vornehmlich interessierenden Diabase besitzen, wie die Labormessungen ergaben, maximal diese Magnetisierbarkeiten, so daß wir für die Berechnungen den Eckeneinfluß vernachlässigen können und für Gesteine mit konstanter Suszeptibilität und Remanenz mit homogener Magnetisierung rechnen dürfen.

4. Einfluß der Kantenabrundung auf die Form der Störkurve

Ausgang für die Betrachtung der Magnetisierungsverhältnisse in einer Ecke war die Erscheinung, daß die nach den theoretischen Kurven über den Ecken der Störkörper zu erwartenden ausgeprägten Maxima und Minima i.a. selten, häufig aber im Deckdiabas im Bereich von Störungen beobachtet werden. Nachdem wir gesehen haben, daß zu ihrer Erklärung eine inhomogene Magnetisierung der Ekken bei den übermessenen Diabasen ausscheidet, wollen wir prüfen, wie eine Abschrägung der Ecken die theoretischen Kurven beeinflußt.

In Abb. 11 sind die δZ- Anomalien dargestellt, die der unten in der Abbildung gezeichnete Körper für verschiedene Inklinationen hervorruft, wobei der Körper in der Folge der Kurven 1,2,3,4 in entsprechender Weise abgeschrägt wird. Es wird eine homogene Magnetisierung angenommen. Eine merkliche Änderung der Amplitude, sowie eine Verbreiterung und Verschiebung des Extremums tritt dann auf, wenn das Glied des natürlichen Logarithmus (s. (1)) die δZ- Anomalie maßgebend bestimmt ($i = 0^\circ$, $i = 45^\circ$). Bestimmt die Winkelfunktion die Anomalie ($i = 90^\circ$), so bleibt die Amplitude im wesentlichen erhalten, nur erfolgt der Abfall der Werte langsamer.

Als Ergebnis können wir entnehmen, daß in den gemessenen Störkurven die ausgeprägten Maxima und Minima selten beobachtet werden, weil die in der Na-

tur vorliegenden Körper vor allem magmatischer Gesteine (Diabase) i. a. abgeschrägte Ecken besitzen. Messen wir jedoch ausgeprägte Maxima und Minima, so läßt dies Schlüsse auf die Oberflächenbeschaffenheit zu. Wir dürfen annehmen, daß ebene Grenzflächen und scharfe Ecken vorliegen, die bei Diabasen wahrscheinlich durch tektonische Vorgänge bewirkt wurden, womit die Tatsache zu erklären wäre, daß Störungen im magnetischen Bild in Erscheinung treten (s. IV. 4).

Zum Schluß der Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Jung für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre Unterstützung recht herzlich danken. Für viele Anregungen danken möchte ich weiter Herrn Dr. A. Hahn und Herrn Dr. H.-J. Lippert, die in zahlreichen Diskussionen die Entwicklung der Arbeit förderten.

Dank sagen möchte ich auch der Bundesanstalt für Bodenforschung, Hannover, dem Hessischen Landesamt für Bodenforschung, Wiesbaden und den Hessischen Berg- und Hüttenwerken, Wetzlar, die die Arbeit im Rahmen eines geophysikalischen Forschungsprogramms unterstützten.

Literatur

[1] v. Baranov: Charts for the calculation and interpretation of magnetic anomalies and examples of application. Compagnie Général de Géophysique – Paris.

[2] Becker, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. I, Teubner, Leipzig 1949.

[3] Betz, A.: Konforme Abbildung. Springer Verlag, Berlin 1948.

[4] Bieberbach, L.: Einführung in die Funktionentheorie. Bielefeld 1952.

[5] Bieberbach, L.: Einführung in die konforme Abbildung. Sammlung Göschen, Berlin 1956.

[6] Bosum, W.: Diplomarbeit. Bergakademie Clausthal 1956.

[7] Kunetz, G. et J. Chastenet de Gery: Exemples D'Application de la Representation Conforme a L'Interpretation du Champ Tellurique. Compagnie Général de Géophysique – Paris.

[8] Duschek, A.: Höhere Mathematik, Bd. III, Springer Verlag, Wien 1953.

[9] Faber-Castell: Anleitung zum Gebrauch der Komplex-Rechenplatte, Castell Nr. 989.

[10] (Keilhack): Angewandte Geologie, Bd. I, (Neubearbeitung, erscheint demnächst in Stuttgart, Verlag Enke), Abschn. 4,2 Geomagnetik, A. Hahn, mit Beiträgen von G. Angenheister und W. Bosum.

[10a] Howell, L.G. und J.D. Martinez: Polar Movement als Indicated by Rock Magnetism-Geophysics, Vol. XXII, Nr. 2, 384-397, 1957.

[11] Jung, K.: Direkte Methoden zur Bestimmung plattenförmiger Störungskörper aus ihren erdmagnetischen Anomalien. Geofis. pura e applicata, Vol. XI – Fasc. 1/2, p 1-26, 1948.

[12] Kutscher, F.: Angewandte erdmagnetische Messungen in Hessen. 1.) Zusammenstellung der bisherigen speziellen erdmagnetischen Untersuchungen in Hessen. Notizbl. hess. L.-Amt Bodenforsch. 81, S. 350-367, Wiesbaden 1953.

[13] Kutscher, F. und A. Stein: Angewandte erdmagnetische Messungen in Hessen. 3.) Magnetische Vermessung eines Basaltvorkommens mit angrenzendem Eisenerzlager auf Blatt Weilburg (Lahn-Mulde) Geol. Jb., Bd. 73, S. 575-594, Hannover 1957.

[14] Kutscher, F. und G. Angenheister: Angewandte erdmagnetische Messungen in Hessen. 4.) Gesteinsphysikalische Untersuchungen an den Kernproben der Bohrung Weyer 1 (Lahnmulde, Hessen) Notizbl. hess. L.-Amt Bodenforsch. 84, S. 385-402, Wiesbaden 1956.

[15] Lippert, H.-J.: Zur Gesteins- und Lagerstättenbildung in Roteisensteingruben des östlichen Dill-Gebietes. Abhandlungen der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft Nr. 485, 1-29, 1951.

[16] Matweber, S.: Geophysikalische Aufschlußmessungen im Scheldetal (Dillkreis), ihre geologische und bergwirtschaftliche Bedeutung für den Eisenerzbergbau des Lahn-Dill-Gebietes. Diss. Clausthal 1954.

[17] Nagata, T.: Rock-Magnetism, Tokyo 1953.

[18] Neumann, W.: Praktische Untersuchungen zur Isanomalenrichtungsstatistik. Diplomarbeit Freiberg 1953.

[18a] Puzicha, K.: Die magnetischen Eigenschaften der Eruptivgesteine. Diss. Clausthal 1931.

[19] Reich, H. und R. v. Zwerger: Taschenbuch der angewandten Geophysik, Akad. Verlagsges. Leipzig 1942.

[20] Rössiger, M. und K. Puzicha: Magnetische Messungen am Oberharzer Diabaszuge. Beitr. zur Angew. Geoph. 9, 158-186, 1941.

[21] Sauer, A.: Markscheiderische Probearbeit. Wetzlar 1953/54, Hess. Berg- und Hüttenwerke.

[22] Schmucker, U.: Gesteinsmagnetische Untersuchungen und Experimente am Basalt des Steinbergs bei Barlissen. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1957.

[23] Seibel, W.: 3. Markscheiderische Probearbeit. Wetzlar 1954, Hess. Berg- und Hüttenwerke.

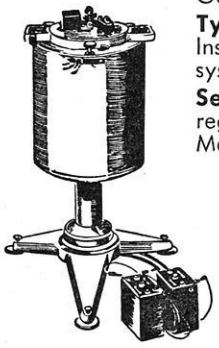
[24] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. III und VI, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden.

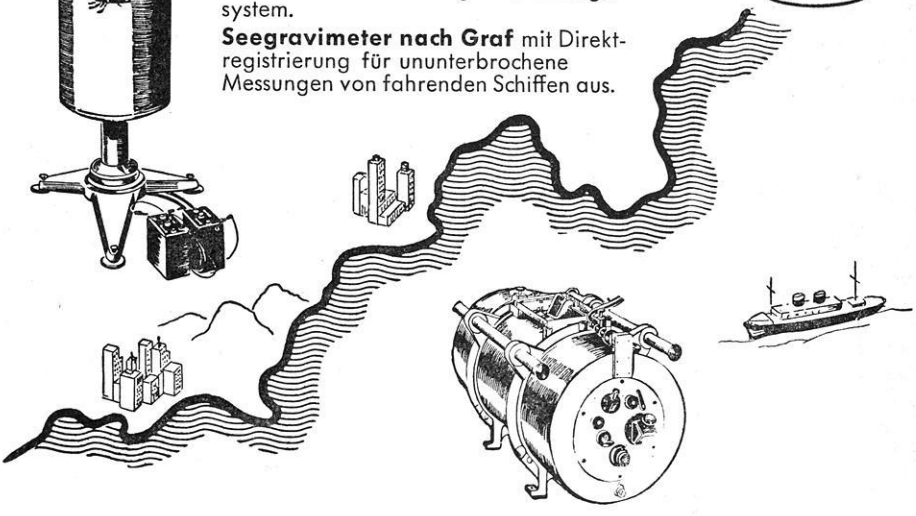
ASKANIA-GRAVIMETER

Typ Gs 11 mit Registriereinrichtung das meist benutzte Gravimeter für die Gezeitenmessungen.

Typ Gs 12 das äußerst zuverlässige Instrument mit dem eingebauten Kugelsystem.

Seegravimeter nach Graf mit Direktregistrierung für ununterbrochene Messungen von fahrenden Schiffen aus.





CONTINENTAL ELEKTROINDUSTRIE AKTIENGESELLSCHAFT

ASKANIA-WERKE · BERLIN-MARIENDORF

Wir suchen zu kaufen:

Zeitschrift für Geophysik
Jahrg. 1-18. 1924-1944
oder Jahrg. 1-25 (ggf. auch einzelne Bände u. Hefte) sowie alle anderen wissenschaftl. Zeitschriften, Sammelwerke, wie auch vollst. Bibliotheken.

U. a. suchen wir z. Zt. noch besonders:

Gerlands Beiträge z. Geophysik
vollst. u. einzeln

Geofisica pura e applicata
Vol. 1-42 u. 1-5

Geophysics Vols. 1-18 od. 1-24

Handbuch d. Geophysik
von B. Gutenberg

Zentralblatt f. Geophysik, Meteorologie u. Geodäsie Bd. 1-11 usw.

Angebote mit genauen Angaben (mögl. auch mit Preis) erbittet

"Journalfranz"

ARNULF LIEBING OHG

WÜRZBURG 2 Postfach 1136

GEOPHYSICS

A Journal of General and Applied Geophysics

Published Quarterly by

SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS

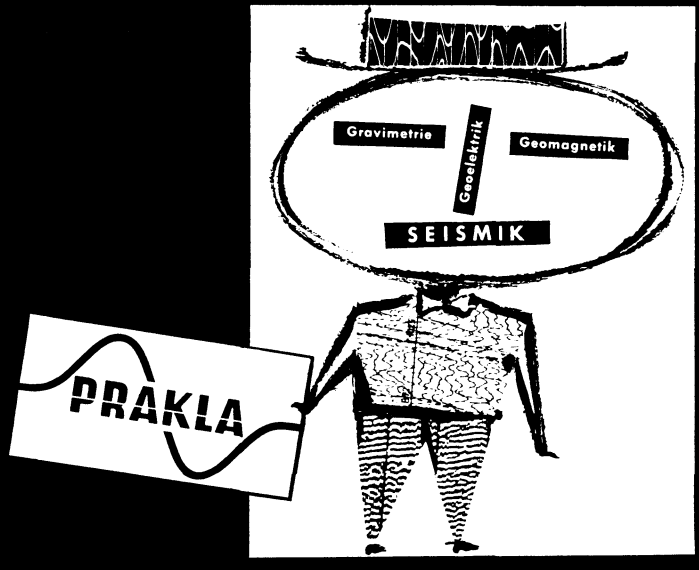
Box 1536 Tulsa, Oklahoma

- The official journal of the leading international group of prospecting geophysicists
- Devoted to current problems in seismograph, gravity, magnetic and other methods of geophysical prospecting for oil and other minerals
- Covers geophysical instrumentation

SUBSCRIPTION RATES

ONE YEAR (4 issues) $ 10.00,
foreign $ 10.50 (payment with order)

ALSO AVAILABLE ON MICROCARDS



IN DER GANZEN WELT

ERFORSCHUNG VON LAGERSTÄTTEN

PRAKLA

HANNOVER · HAARSTRASSE 5 · RUF: 86661 · FERNSCHREIBER: 922847 · DRAHT: PRAKLA