

Zeitschrift für Geophysik

Band 38

1972

Heft 2

Inhaltsverzeichnis

Übersichtsartikel: DOHR, G.: Reflexionsseismische Tiefensondierung	193
BEHLE, A., W. EHRISMANN, J. MAKRIS, H. MENZEL, O. ROSENBACH und P. STEINHAUSER: Gravimetrische Untersuchungen in den Ostalpen II (Meßgebiet Salzburg – Kärnten – Tirol)	221
GRAFARENTH, E.: Isotropietests von Lotabweichungsverteilungen in Westdeutschland II	243
WEIDELT, P.: The Inverse Problem of Geomagnetic Induction	257
BÖHM, J.: Measurements of MeV-Electrons during the Recovery-Phase of a Polar Magnetic Substorm on March 6, 1970	291
VOIGT, G.-H.: A Three Dimensional, Analytical Magnetospheric Model with Defined Magnetopause	319
<i>In memoriam KARL JUNG</i>	347
Buchbesprechungen	351



PHYSICA - VERLAG · WÜRZBURG

Z E I T S C H R I F T F Ü R G E O P H Y S I K

als zweimonatliche Publikation herausgegeben im Auftrag der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft von

W. Dieminger, Lindau/Harz

und

J. Untiedt, Münster i. W. (als Stellvertreter)

unter Mitwirkung von

A. Defant, Innsbruck — W. Hiller, Stuttgart — W. Kertz, Braunschweig — Th. Krey, Hannover — E. A. Lauter, Kühlungsborn — H. Menzel, Hamburg — O. Meyer, Hamburg — F. Möller, München — St. Müller, Zürich — H. Reich, Göttingen — U. Schmucker, Göttingen — M. Siebert, Göttingen — H. Soffel, München

Veröffentlicht werden Originalarbeiten aus dem gesamten Gebiet der Geophysik und aus den Grenzgebieten in deutscher, englischer oder französischer Sprache. Außerdem erscheinen mehrmals im Jahr auf Einladung hin verfaßte Übersichtsartikel.

Für kurze Mitteilungen, bei denen Interesse an raschem Erscheinen besteht, gibt es neben den normalen Veröffentlichungen die „Briefe an den Herausgeber“ (ohne Zusammenfassung). Sie werden nach Möglichkeit im nächsten Heft gebracht.

Jede Originalarbeit beginnt mit einer deutschen und einer englischen oder französischen Zusammenfassung. Bei deutschsprachigen Aufsätzen und Briefen werden Titel der Arbeit und Abbildungsunterschriften zusätzlich in englischer oder französischer Sprache gebracht.

Die Autoren erhalten 50 Sonderdrucke ihrer Arbeit kostenlos. Weitere Exemplare können vom Verlag gegen Berechnung geliefert werden. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Es wird gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z.B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden.

Die Zitate sollen entsprechend folgendem Beispiel angefertigt werden:

Im Text: Bei der ersten Zitierung [JUNG, MENZEL und ROSENBACH 1965], bei jeder folgenden Zitierung [JUNG et al. 1965].
Im Literaturverzeichnis: JUNG, K., H. MENZEL und O. ROSENBACH: Gravimetermessungen im Nördlinger Ries. Z. Geophys. 31, 7—26, 1965.

Manuskripte sind zu senden an Prof. Dr. WALTER DIEMINGER, Max-Planck-Institut für Aeronomie, 3411 Lindau/Harz.

Anschrift der *Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*:

2 Hamburg 13, Binderstr. 22.

Postscheckkonto: Hamburg 55983

Tel. (0411) 441972977

Bank: Neue Sparkasse, Hamburg 24/11528

Aufgenommen werden nur Arbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Nutzungsrecht an den Verlag über.

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bezugspreis je Band (6 Hefte) 112,— DM, Einzelheft je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Band, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Jahresende vorliegt.

Gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Bekanntmachung lt. Bayer. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., D 87 Würzburg, Werner-von-Siemens-Straße 5.
Pers. haft Ges.: Arnulf Liebing und Hildgund Holler, sämtlich Buchhändler in Würzburg Kommanditistin: Gertrud Liebing, Würzburg

Druckerei: R. Oldenbourg, Graph. Betriebe GmbH, München

Printed in Germany



PHYSICA-VERLAG, Würzburg 1972

Reflexionsseismische Tiefensondierung¹⁾

Reflection Methods in Deep Seismic Sounding

G. DOHR, Hannover²⁾

Eingegangen am 11. April 1972

1. Allgemeines, erste Beobachtungen von Tiefenreflexionen

Der Einsatz reflexionsseismischer Methoden zur Untersuchung des tieferen Untergrundes ist relativ jung. Während die Refraktionsseismik im großen Umfange weltweit zur Untersuchung des Baues der Erdkruste und auch des gesamten Erdkörpers aus den Erdbebenbeobachtungen entstand und sich später u. a. auf Grund der Registrierung von Großsprengungen (z. B. Steinbruchsprengungen) zu einem außerordentlich vielseitigen und nützlichen Instrument zur Untersuchung der Erdkruste entwickelte, ist die Reflexionsseismik erst in den 50er Jahren zur Untersuchung des Baues der Erdkruste herangezogen worden. JUNGER berichtete 1951 erstmalig über die Beobachtungen von Tiefenreflexionen im Rahmen routinemäßiger reflexionsseismischer Messungen in Canada [JUNGER 1951].

Von REICH [1953] wurden anlässlich einer Großbohrloch-Sprengung bei Blaubeuren Reflexionen bei Laufzeiten von ca. 5–7 Sekunden mit einer 24-spurigen PRAKLA-Feldapparatur aufgezeichnet. Wenngleich die verwendete Ladungsstärke und die Teufe, in welcher sie gezündet wurde, von den in der Feldseismik üblichen Verfahren grundsätzlich abwichen, so zeigten die Resultate doch, daß in der tieferen Erdkruste mit Reflexionsflächen zu rechnen ist, die Reflexionswellen erzeugen, welche mit normalen Reflexionsapparaturen erfaßt werden.

1957 berichtete SCHULZ über die Aufnahme von Reflexionen bei ungewöhnlich langen Laufzeiten anlässlich reflexionsseismischer Arbeiten im Gebiet der Saar-Nahe-Senke [SCHULZ 1957]. Es erschien bereits damals bemerkenswert, daß diese Reflexionsgruppen, welche zunächst dem Bereich der mutmaßlichen Conrad-Diskontinuität zugeordnet worden waren, kurze Zeit später ebenfalls bei Arbeiten im Auftrage der Erdölindustrie im Oberrheingraben südlich der Stadt Rastatt beobachtet wurden [DOHR 1957].

¹⁾ Vom Vorstand der DGG erbetener Übersichtsartikel.

²⁾ Dr. GERHARD DOHR, Preussag AG, Erdöl und Erdgas, D 3 Hannover, Postfach 4829.

REICHENBACH und SCHMIDT [1959] gaben eine Zusammenstellung der im Siegerland beobachteten Reflexionen, die sich über ein Intervall von ca. 5–12 Sekunden erstrecken. Eine spätere Untersuchung von DÜRBAUM et al. [1967] hat die Realität dieser Reflexe prinzipiell bestätigt, wenngleich eine andere geometrische Deutung der Lage der Reflexionselemente gegeben wurde.

2. Beobachtung und Auswertung von Tiefenreflexionen in der Bundesrepublik im Rahmen prospektionsseismischer Arbeiten

Nachdem die Realität der in der Prospektionsseismik registrierten Tiefenreflexe lange Zeit etwas skeptisch betrachtet worden war, konnte sie u. a. aufgrund von Beobachtungen in verschiedenen Meßgebieten unter den verschiedensten Aufnahmeverhältnissen glaubhaft gemacht werden.

Über die Existenz dieser Tiefenreflexionen ist an mehreren Stellen ausführlich diskutiert worden. Wichtig erschien vor allem der Nachweis, daß eine Deutung als Mehrfachreflexionen von höheren Horizonten ausschied. [LIEBSCHER 1962, 1964; HEHN 1964; FUCHS und DOHR 1967].

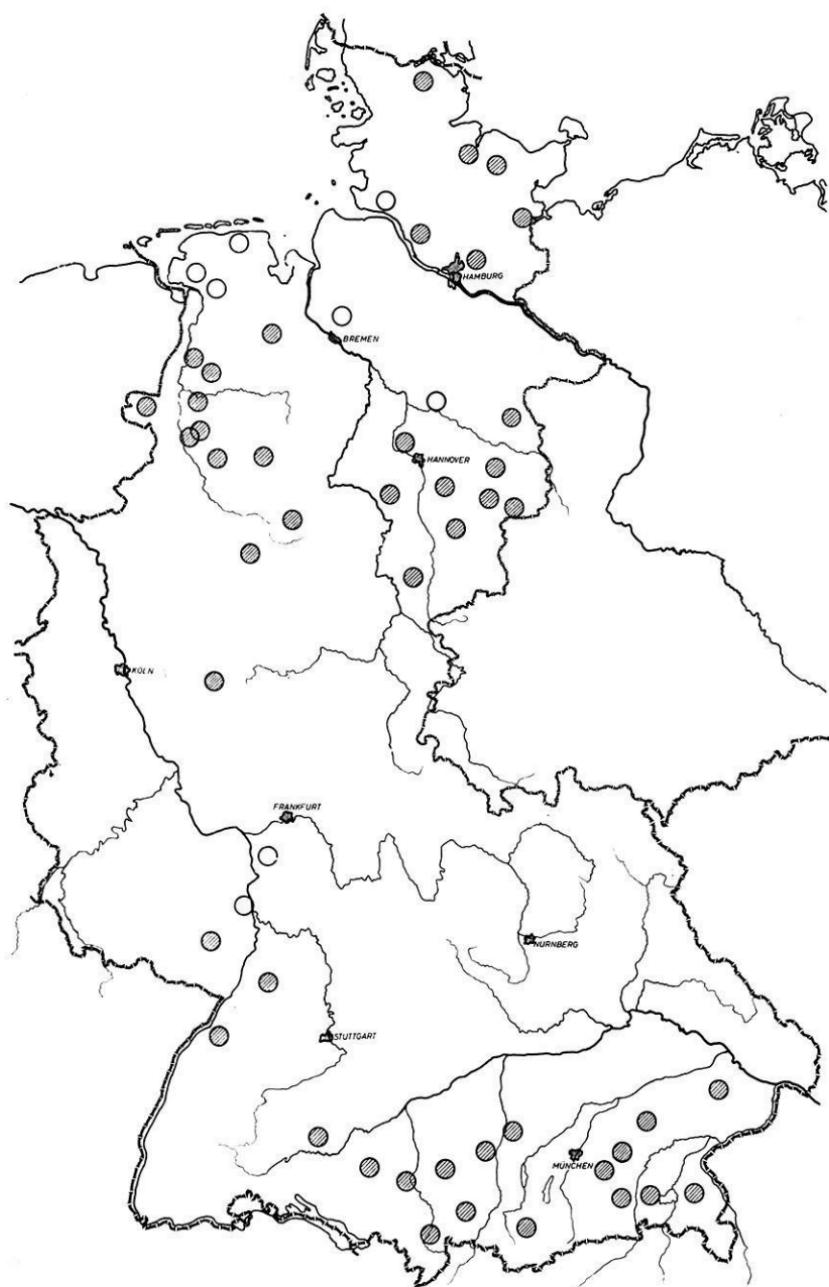
Vom Jahre 1958 an wurde mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft ein Programm ausgearbeitet, um bei verschiedenen Meßtrupps in Deutschland Langzeitregistrierungen durchzuführen. Die Aufnahmen erfolgten dergestalt, daß normale sprengseismische Schüsse mit den Feldapparaturen der PRAKLA und SEISMOS GmbH bis zu Reflexionszeiten von etwa 10 bis 12 Sekunden registriert wurden. Auf diese Weise wurden in Norddeutschland, Süddeutschland und im Oberrheingraben etwa 18000 Filme aufgenommen, von denen die Mehrzahl tatsächlich Reflexionen oder Reflexionsandeutungen bei sehr langen Laufzeiten zeigten.

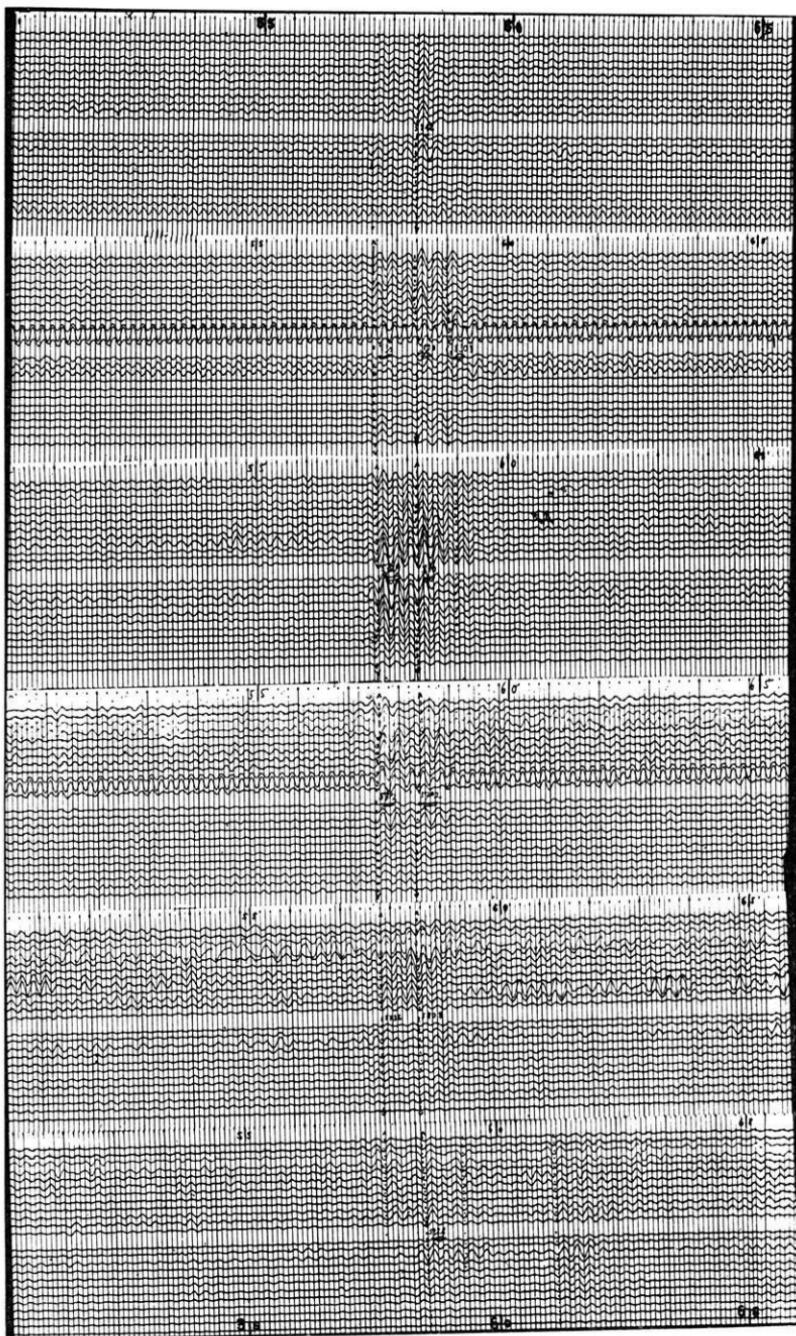
Die Auswertung dieses umfangreichen Beobachtungsmaterials wurde in den folgenden Jahren im wesentlichen von LIEBSCHER [1962, 1964], HEHN [1964], DEMNATI [1965] und HADJEBI [1967] durchgeführt.

In der Abb. 1 ist eine Karte mit den Beobachtungslokalisationen von Tiefenreflexionen im Zuge routinemäßiger reflexionsseismischer Messungen dargestellt. Man erkennt,

Abb. 1: Übersichtskarte der BRD mit den Arbeitsgebieten, in welchen Tiefenreflexionen im Zuge reflexionsseismischer Arbeiten im Auftrage der Erdölindustrie beobachtet wurden. In den durch ausgefüllte Kreise dargestellten Meßgebieten wurden gute auswertbare Reflexionen beobachtet. Die offenen Kreise kennzeichnen Gebiete ohne markante Reflexionen.

Position map of areas in Western Germany with recordings of deep crustal reflections as recorded during reflection seismic work done by order of the oil industry. The hatched circles indicate areas where fair or good reflections have been observed. The blank circles stand for regions where significant deep crustal reflections have not been established.





daß sich die Beobachtungsstationen auf drei Gebiete verteilen, nämlich:

1. den nordwestdeutschen Raum
2. das bayerische Alpenvorland und
3. im geringeren Maße auf den Oberrheingraben

Abb. 2 zeigt das Beispiel einer Registrierung. Hier ist mit einer 24spurigen normalen Reflexionsapparatur älterer Bauart (auf die heutige moderne Registriertechnik wird später eingegangen) bei langen Laufzeiten eine deutliche Gruppierung von Reflexionseinsätzen zu erkennen.

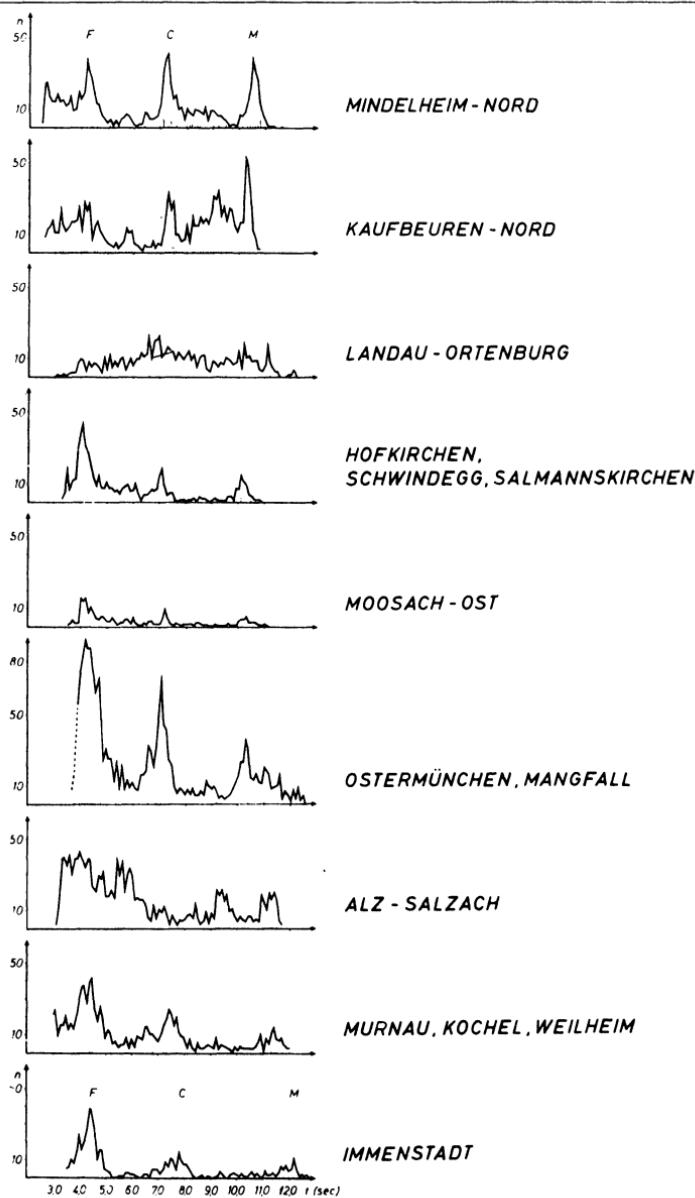
Typisch ist die Ausprägung relativ kräftiger Reflexionen, welche meist über 2 bis 5 Seismogramme durchhalten. Ihre dominierenden Frequenzen liegen bei 20 bis 40 Hz. Durchweg ist eine Verfolgung der Reflexe über längere Strecken nicht möglich. Stattdessen werden dieselben von neuen, etwas früher oder später liegenden Einsätzen abgelöst. Fast stets tritt nicht nur eine diskrete Reflexion auf. Das Band der Reflexionen verteilt sich vielmehr über ein Zeitintervall bis zu 2 sec. Reflexionszeit (vergl. Ziff. 6).

Aus der Tatsache einer solch unterschiedlichen Aufzeichnung der Reflexionselemente einerseits und ihrer innerhalb eines größeren Gebietes flächenmäßig sehr unterschiedlichen Beobachtungsdichte andererseits, bot sich zur Sichtung und Bearbeitung eines solch umfangreichen Beobachtungsmaterials eine statistische Methode an. Sie bediente sich der Auszählung der in diskreten Zeitintervallen innerhalb eines Meßgebietes oder Teilmeßgebietes beobachteten absoluten oder relativen Häufigkeiten von Reflexionen oder Reflexionsandeutungen. Ihre praktische Darstellung erfolgte in Form von Kurven, den sogenannten „Häufigkeitsverteilungen“. Hier ist die relative oder absolute Häufigkeit der Reflexionen als Funktion der Reflexionszeit aufgetragen.

Die Abb. 3 zeigt die Darstellung von Häufigkeitsverteilungen tiefer Reflexionen aus dem bayerischen Alpenvorland. In den jeweiligen Arbeitsgebieten ist die relative Häufigkeit aller Reflexionen oder Reflexionsandeutungen bei langen Laufzeiten als Funktion der Laufzeit aufgetragen. Intervallbreite dieser Auszählung war 0,2 Sekunden. Bemerkenswert ist, daß gerade bei diesen bayerischen Verteilungskurven sehr klar die Häufung der Reflexionseinsätze bei drei Gruppen zu erkennen ist, die hier mit F, C und M bezeichnet sind. Diese Buchstaben sollen an die ursprüngliche Vermutung erinnern, daß es sich bei F um eine früher von Förtsch postulierte Unstetigkeitsfläche handeln könnte, daß die C-Gruppe der sogenannten Conrad-Diskontinui-

Abb. 2: Beispiel einer Registrierung von Tiefenreflexionen in der Nähe von Hannover. Eine deutliche, nicht multiple Reflexionsgruppe ist zwischen 5,7 und 5,9 sec Reflexionszeit aufgezeichnet.

Line-up of reflection records showing deep reflections near the city Hannover. A clear, non-multiple reflection group has been recorded between 5.7 and 5.9 sec reflection time.



ABSOLUTE HÄUFIGKEIT TIEFER REFLEXIONEN
INTERVALLBREITE 0.1 sec

tät entspricht und daß die M-Reflexionen dem Bereich der Mohorovicic-Diskontinuität zuzuordnen sind.

Diese Einteilung läßt sich heute, zumindest was F und C betrifft, nicht mehr generell halten. Auf alle Fälle ist jedoch das Auftreten von Diskontinuitäten oder genauer gesagt „Unstetigkeitszonen“ über das ganze Alpenvorland hin bereits aus dieser Darstellung sehr gut zu erkennen und die Ablesung der Reflexionszeiten und Umwandlung in Teufen gibt bereits die Möglichkeit, eine erste ungefähre Vorstellung von dem Teuferverlauf der einzelnen Diskontinuitäten zu entwickeln.

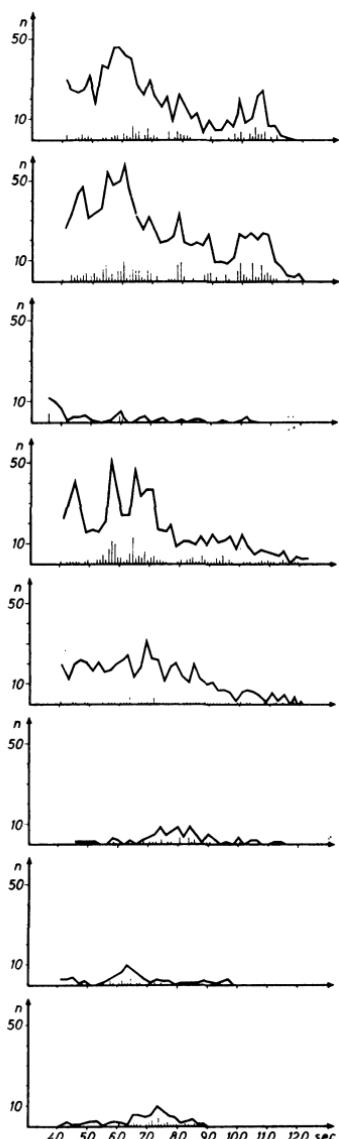
In der Abb. 4 ist eine ähnliche Zusammenstellung für Häufigkeitsverteilungen tiefer Reflexionen aus dem norddeutschen Raum gegeben. Man erkennt hier, daß die Maxima bei weitem nicht so signifikant wie im süddeutschen Raum auftreten, und in der Tat ist es in Norddeutschland schwierig, eine derart eindeutige Zuordnung von tiefen Reflexionsgruppen zueinander über weite Räume zu entwickeln. Der Grund für diese Abweichung dürfte sehr schwer zu definieren sein. Man geht wohl nicht fehl in der Annahme, daß er in erster Linie auf die geologischen Bedingungen des tiefen Untergrundes zurückzuführen ist. Dabei sei vermerkt, daß auch die oberflächennahen Schichten, in diesem Fall bis zu etwa 5000 bis 6000 m, in ihren Einflüssen auf Laufzeitverzögerungen, Absorptionen und Streuung von Wellen, sicherlich entscheidenden Einfluß mit haben.

Die Abb. 5 zeigt schließlich, daß es durchaus möglich ist, gebietsweise auf längeren Profilstücken aus den Reflexionseinsätzen profilmäßige Darstellungen zu entwickeln. Dieses im Raum Gütersloh bereits sehr früh geschossene Profil (Aufnahme PRAKLA) zeigt ein Reflexionsband zwischen 7 und 9 Sekunden, welches erstaunlich gut in der Qualität über eine lange Strecke durchhält. Bemerkenswert ist auch hier, daß die einzelnen Reflexionselemente nur eine sehr kurze horizontale Erstreckung haben, daß jedoch das gesamte Band in konstanter Breite über fast 20 km kennbar ist. Vermerkt sei, daß in diesem Meßgebiet Reflexionen aus dem höheren Stockwerk fast gar nicht oder nur sehr sporadisch aufgetreten sind.

Bereits aus den o. g. Ausarbeitungen lassen sich allein auf Grund der statistischen Auswertung der Tiefenreflexionsbeobachtungen eine Anzahl von Aussagen ableiten, welche für die Gesamtdiskussion des Problemes aufschlußreich sind.

Abb. 3: Häufigkeitsverteilungen tiefer Reflexionen aus verschiedenen Arbeitsgebieten Bayerns. Hingewiesen sei auf die in allen Gebieten erkennbaren Maxima F, C und M, welche durchgehenden Reflexionshorizonten zugeordnet werden müssen (vgl. LIEBSCHER [1964]).

Histograms of deep crustal reflections from various areas within the Bavarian foreland of the Alps (Southern Germany). Note the three peaks F, C and M visible in every area. They must be attributed to continuous reflection horizons (see LIEBSCHER [1964]).



ABSOLUTE HÄUFIGKEIT TIEFER REFLEXIONEN

Abb. 4: Häufigkeitsverteilungen tiefer Reflexionen aus norddeutschen Arbeitsgebieten. Auffällig ist, daß hier eine klare Gliederung der Maxima, wie sie in Abb. 3 erscheint, nicht erkennbar ist. Allgemein hebt sich eine Reflexionsgruppe bei 5 bis 7 und bei 10 bis 12 sec heraus.

Histograms of deep crustal reflections from various areas in Northern Germany. Note the missing of such clear set-up of the maxima as may be seen in Fig. 3. In most areas a reflection group can be distinguished in the ranges 5 to 7 and 10 to 12 sec.

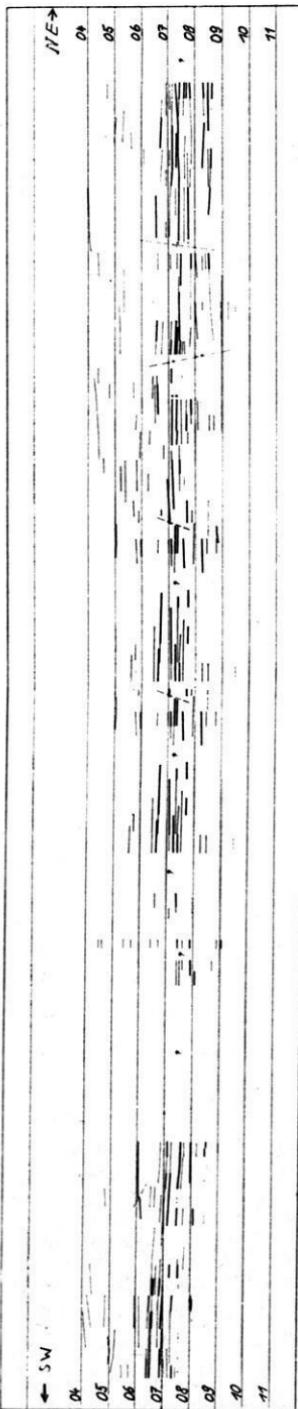


Abb. 5: Zeitenprofil eines tiefen Reflexionsbandes aus dem Gebiet des Münsterlandes. Die Reflexionen bei etwa 7 sec wurden der Conrad-Diskontinuität zugeordnet (nach HEHN [1964]).

Traveltime plot of deep crustal reflections from the Muensterland in Northern Germany. The reflections at about 7 sec are attributed to the Conrad-discontinuity (see HEHN [1964]).

1. In fast allen Gebieten zeigen die Häufigkeitsverteilungen tiefer Reflexionen eine merkliche Breite, die nicht durch Zufallseffekte bedingt sein dürfte. Ebenso, wie in einigen einzelnen guten Seismogrammen Reflexionen aus dem Bereich der o. g. Diskontinuitätszonen über eine Erstreckung von 1 bis z. T. 2 Sekunden auftreten, so zeigen die Breiten der Maxima mehr oder minder das gleiche Bild. Bemerkenswert erscheint, daß die Breite der Maxima durchaus variabel ist, und es scheint, als ob in Norddeutschland wesentlich stärker die Tendenz zu einer verwaschenen Ausbildung der Maximazonen vorhanden ist als in Süddeutschland.
2. In den meisten der Gebiete, in denen die Registrierung von Tiefenreflexionen versucht wurde, konnten auch gute bis brauchbare Reflexe gefunden werden. Das zeigt, daß schon erstaunlich kleine Schußladungen – 1 bis 20 kg – in der Lage sind, Reflexionen bis hinunter zur Moho zu erzeugen. Die früher zumeist vertretene Ansicht, daß es zur Energieanregung größerer Sprengungen bedarf, ist damit eindeutig widerlegt worden.
3. Die Verfolgung von Reflexionen über mehrere Seismogramme ist zwar möglich, jedoch zeigt sich immer wieder, daß ein Durchhalten markanter Einsätze über lange Strecken nicht beobachtet wird. Wie das Profilbeispiel aus dem Raum Gütersloh zeigt, tritt zwar das Gesamtband einer Reflexionsgruppe über viele Kilometer in kontinuierlicher Breite auf, die Einzelreflexe erscheinen jedoch nicht durchhaltend, sondern klingen aus und werden von anderen, etwas höher oder tiefer liegenden Reflexionen abgelöst.
4. Sowohl das Beispiel Bayern, wie auch einzelne Teilgebiete Norddeutschlands und die Beobachtungen im Rheintal zeigen auf, daß auch anhand der reflexionsseismischen Aussagen sehr gute Vorstellungen über den großräumigen Verlauf der Diskontinuität entwickelt werden können. Die teufenmäßige Zuordnung der Reflexionswege ist in vielen Fällen sicherer als die Teufenberechnung nach der Refraktionsmethode. Dies ist durch zweierlei bedingt.
 - a) Bei der Auswertung der Reflexionsmessungen kann der entscheidende Einfluß der obersten 4 bis 5000 m aufgrund der aus der Erdölprospektion bekannten Durchschnittsgeschwindigkeiten des Sedimentes sehr gut abgeschätzt werden (Fehlergrenze ca. 5%).
 - b) Der Einfluß der Anisotropie, welcher bisweilen recht schwer abzuschätzen ist, behaftet alle refraktionsseismischen Aussagen mit einer gewissen Unsicherheit. Bei der Beobachtung von Steilwinkelreflexionen entfällt auch dieser Unsicherheitsfaktor.
5. Die Teufenberechnungen aus den Beobachtungen der Reflexionsseismik und die Betrachtungen über den großräumigen Verlauf der Diskontinuitäten – z. B. in Bayern – fügen sich recht gut in das weiträumige, aus der Refraktionsseismik ermittelte Bild über den Bau des tieferen Untergrundes ein. Dabei soll nicht verhehlt werden, daß es sich nur um ein großräumiges Einbauen in ein anderes Konzept handeln kann. Sehr wohl, und dies wird uns später noch beschäftigen, können

lokale Besonderheiten der tieferen Grenzonen, insbesondere der Moho, durch die Reflexionsmessungen aufgezeigt werden, die mit der refraktionsseismischen Methode nicht, oder nur undeutlich, erkannt werden können.

6. Die statistische Bearbeitung der Häufigkeitsverteilungen geht auf ein Abfallprodukt der Prospektionsseismik zurück. Das bedeutet, daß die Messungen in keiner Weise für die Registrierung von Einsätzen aus großen Tiefen angelegt wurden und daß es sicherlich bei gezielten Arbeiten möglich ist, der besonderen Problemstellung wesentlich besser gerecht zu werden, als das hier gemacht werden konnte. Dennoch ist das aus diesen Nebenprodukten mit sehr geringem finanziellen Aufwand gewonnene Material außerordentlich reichhaltig und mit zunehmender Verdichtung der Meßnetze werden sich aus den alten Bearbeitungen noch eine Fülle von zusätzlichen Informationen herausholen und in das neue Konzept einbauen lassen.

3. Gezielte Beobachtungen von Tiefenreflexionen in der Bundesrepublik

Im Jahr 1965 sind erstmals gezielte seismische Messungen zur Untersuchung der tieferen Erdkruste, insbesondere der Moho, im nördlichen Bayern mit Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft durchgeführt worden. Auf einer Profillinie zwischen etwa Weißenburg im Norden und Murnau-Eschenlohe im Süden, wurden Steilwinkel- und Weitwinkelreflexionen beobachtet. Die Anlage der Messungen erfolgte derart, daß Schußpunkt- und Geophonaufstellung nach beiden Seiten in gleichen Abständen auseinanderrückten, so daß in guter Näherung immer das gleiche Reflexionselement im Untergrund erfaßt wurde. Aus einer umfassenden Bearbeitung der Steilwinkel- und Weitwinkleinsätze konnte MEISSNER [1966, 1967] zeigen, daß die hier erfaßten Reflexionseinsätze sehr gut in die Gruppen hineinpassen, wie sie in einem benachbarten Gebiet früher aus den Häufigkeitsverteilungen der statistischen Beobachtungen gewonnen worden waren. Das Reflexionselement lag in der Nähe der Stadt Augsburg. Dieser Hinweis war eine Bekräftigung der Realität der in Statistik gewonnenen Aussagen. Zugleich hat die Arbeit erstmalig einen detaillierten Versuch erlaubt, Aussagen über den Bau der Moho aus seismischen Daten abzuleiten. Eine Problemstellung, die auch heute noch in Verbindung der Reflexions- und Refraktionsseismik diskutiert wird und die noch nicht als endgültig gelöst angesehen werden kann.

In der Abb. 6 ist die Zusammenstellung der Ergebnisse nach MEISSNER dargestellt. Man erkennt hier die Korrespondenz der Steilwinkelreflexionen und der Weitwinkelreflexionseinsätze mit den früher aus dem Arbeitsgebiet in der Nähe Augsburgs beobachteten Maxima der Häufigkeitsverteilungen.

Erwähnt sei, daß das hier abgewickelte Arbeitsprogramm ein erfreuliches Zusammenspiel zwischen der Industrie und verschiedenen Hochschulinstituten gebracht hatte. Diese Zusammenarbeit hat sich in den folgenden Jahren bis heute als unerlässlich erwiesen und ist ständig weiterentwickelt worden.

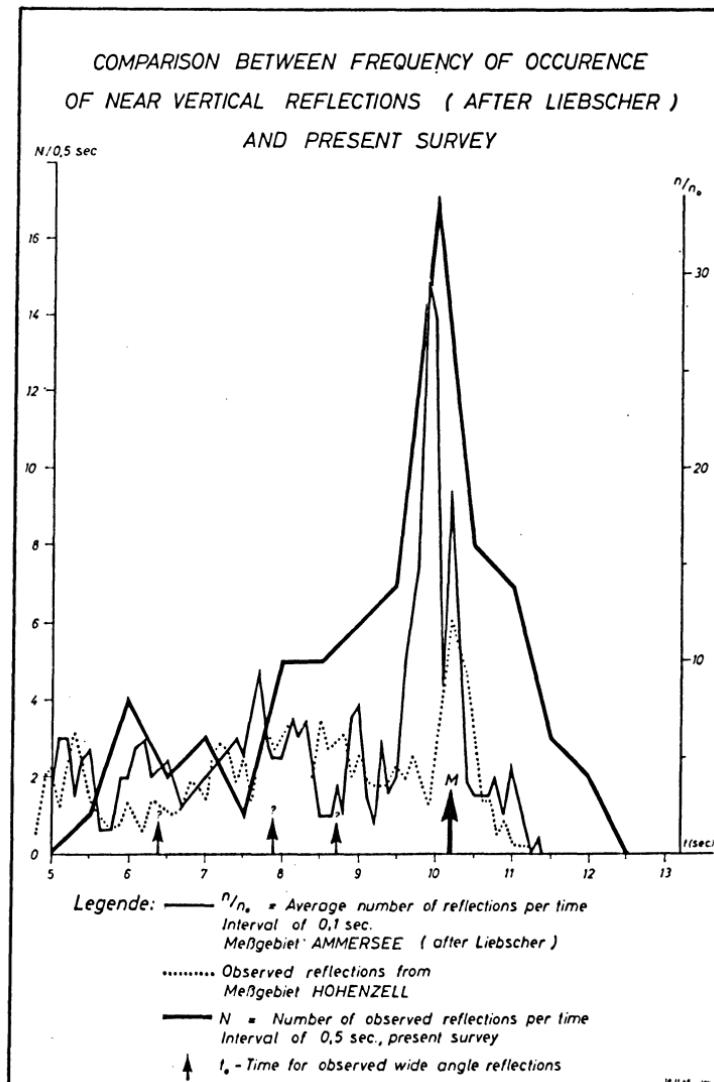


Abb. 6: Vergleich der t_0 -Reflexionszeiten aus Beobachtungen von Weitwinkelmessungen in der Nähe der Stadt Augsburg mit den Spitzen der statistisch gewonnenen Häufigkeitsverteilungskurven eines benachbarten Arbeitsgebietes. Man beachte die gute Übereinstimmung beider Beobachtungen für die Reflexionen von der M-Diskontinuität (nach MEISSNER [1966]).

Comparison of the t_0 -(zero distance) reflection times observed during wide angle reflection measurements in the area near Augsburg in Southern Germany with the peaks of statistically constructed histograms from adjacent areas. Note the excellent agreement of both observations concerning the reflections from the M-discontinuity (see MEISSNER [1966]).

4. Registrierungen von Tiefenreflexionen in anderen europäischen Ländern

Nach den bereits eingangs von A. JUNGER berichteten Beobachtungen von Tiefenreflexionen auf einem langen Profilstück am Canadischen Schild sind erst im Laufe der 60er Jahre in verschiedenen Ländern Europas – z. T. angeregt durch die in der Bundesrepublik durchgeführten Arbeiten – Versuche zur gezielten Anwendung seismischer Tiefensondierungen ausgeführt worden. Hier sind insbesondere die Arbeiten in der DDR zu nennen, über welche HOFFMANN [1964] und RISCHE [1961] berichten.

Von GALFI und STEGENA [1957] wurde schon im Jahr 1957 über Versuche zur Erfassung von Tiefenreflexionen in Ungarn berichtet. Diese Arbeiten sind in den 60er Jahren weitergeführt worden und haben ebenfalls zu schönen Ergebnissen geführt.

Tiefenseismische Untersuchungen in Jugoslawien zeigten ebenfalls Reflexionen aus großen Tiefen [DRAGASEVIC und ANDRIC 1968].

LUKIC berichtete [1971] über seismische Untersuchungen in den Dinariden.

All diese Arbeiten zeigen ganz ähnliche Ergebnisse, wie sie aus den Messungen in der Bundesrepublik genannt wurden, nämlich eine durchweg überall relativ gut reflektierende Zone der Mohorovicic-Diskontinuität, welche als verhältnismäßig breites Reflexionsband in Erscheinung tritt und eine mehr oder minder ausgeprägte von schwächeren Reflexionen begleitete Zone, welche in den Bereich der früher vielfach diskutierten Conrad-Diskontinuität gelegt wird.

Von besonderem Interesse sind umfangreiche Arbeiten, welche in der UdSSR zur Untersuchung der tieferen Erdkruste mit reflexionsseismischen Methoden vorgenommen wurden. Wenngleich es an dieser Stelle zu weit führen würde, diese Messungen im einzelnen zu schildern, so soll doch insbesondere der Versuch hervorgehoben werden, mit diesen Arbeiten

- a) zu einer profilmäßigen Verfolgung tiefer Grenzflächen, insbesondere der Moho zu kommen,
- b) eine flächenhafte Kartierung derselben vorzunehmen und
- c) Aussagen über den Tiefgang großer Störungssysteme zu gewinnen.

Gerade letztere Aufgabenstellung greift in das Gebiet der wirtschaftlichen Interessen einerseits und in die prinzipiellen Fragen der Geologie andererseits über. Hingewiesen sei besonders auf die Arbeiten in der Ukraine sowie im Bereich der Krim und des Schwarzen Meeres. Hierüber berichten SOLLOGUB, PAWLENKOWA u. a. [1968, 1970]. Bei all diesen Arbeiten wurde die Registrierung von Steilwinkel- und Weitwinkel-Reflexionen zugrunde gelegt. Die Auswertung und Interpretation des umfangreichen Materials ist noch im Fluß. Dennoch zeigen die bislang vorliegenden Darstellungen, daß die angewendeten Methoden zu außerordentlich weitreichenden Erkenntnissen führen dürfen und in ihrer Geschlossenheit innerhalb eines größeren Raumes wohl einmalig sind.

5. Erste Versuche zum Einsatz digitaler Registrierungen und EDV

Hatten die statistischen Bearbeitungen der aus der Prospektionsseismik anfallenden Langzeitseismogramme schon zu recht schönen und über weite Gebiete hin verfolgbaren Ergebnissen geführt, so war es jedoch nicht oder nur in ganz seltenen Ausnahmefällen einmal möglich gewesen, profilmäßige Konstruktionen zu versuchen. Der Grund lag in der sehr wechselnden Qualität der Aufzeichnungen und die damalige Abspieltechnik erlaubte es nicht, aus dem Material mehr herauszuholen, als auf den Feldseismogrammen aufgezeichnet war. Die Darstellungen, so wie sie von Liebscher und anderen gegeben worden waren, erstreckten sich meist über Reflexionsgruppen von 5 bis 6 Seismogrammen.

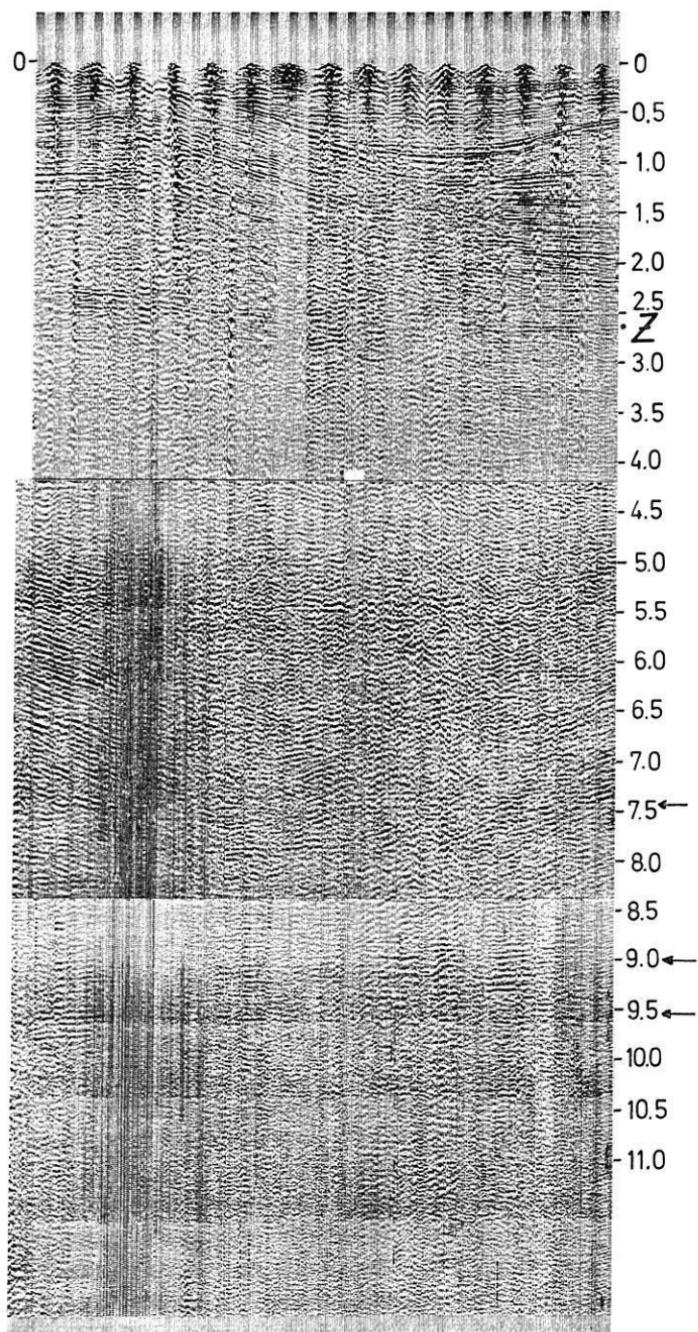
Mit dem Aufkommen der Digitalseismik boten sich jedoch auch für die reflexionseismischen Tiefensondierungen neue und ganz wesentlich erweiterte Möglichkeiten an. Die digitale Aufzeichnung der seismischen Wellen erlaubt nicht nur eine Art Konservierung zu erstellen, sie erlaubt vielmehr bei einem hohen Dynamikbereich der Aufzeichnung (ca. 84 db) und einer Weiterverarbeitung in Großrechenzentren sehr viel mehr physikalische Informationen aus dem Material herauszuholen als dies früher möglich war. Man kann vielleicht sagen, daß durch den Beginn der Digitalseismik in die Seismik wieder sehr viel mehr Physik und Mathematik hineingekommen ist, nachdem lange Zeit hindurch die möglichst exakte Zeitmessung fast ausschließlich in dem Vordergrund des Interesses gestanden hatte und die meisten Versuche zur Verbesserung des Materials in einer Hochzüchtung der zeitlichen Auflösung bestanden hatten. Mit der Entwicklung der Digitalseismik, die seit Mitte der 60er Jahre ganz rapide die seismische Meß- und Auswertetechnik gefördert hat, sind aus der Seismik Erkenntnisse gewonnen worden, wie sie früher nicht möglich waren.

Es sind hier nur zu nennen:

Eine erhöhte Auflösung bis in Details der seismischen Horizonte hinein, präzisere Aussagen über seismische Intervallgeschwindigkeiten und Durchschnittsgeschwindig-

Abb. 7: Seismischer Profilschnitt mit den ersten Versuchen zur digitalen Aufnahme und Bearbeitung östlich der Stadt Hannover. Der obere Teil der Sektion stellt eine Folge von Einzelseismogrammen dar, der tiefere Teil ist eine 6fach gestapelte Ausgabe. Tiefe Reflexionen sind zwischen 7,5 und 8 sowie zwischen 8,5 und 10 sec erkennbar. Die Schußladung ist kleiner als 10 kg und die Feldtechnik ist auf die Erfassung der oberen Reflexionshorizonte bis zu 3 sec ausgerichtet. Die tiefen Reflexionen wurden während routinemäßiger Messungen mit aufgezeichnet.

Seismic cross section showing a first test in digital recording and processing of seismic data East of the city of Hannover. The upper part of this section is a single covered profile, the deeper part is the result of a six-fold stack. Deep reflections can be seen between 7.5 to 8.0 and between 8.5 and 10 sec. The charge of the shot is less than 10 kg, and the field technique is directed towards recording of the upper horizons down to 3 sec. The deep reflections have been recorded during routine work.



keiten, und hieraus eventuelle Schlüsse über die physikalischen und elastischen Parameter der durchlaufenden Schichten; Filtertechniken mit beliebiger Flankensteilheit der Filter (Rechteckfilter), die systematische Untersuchung des Frequenzinhaltes der reflektierten Reflexionsgruppen und viele andere Spezialprobleme mehr.

Endlich erscheint in neuester Zeit als Neuentwicklung die Darstellung von teufenrichtigen und migrierten Sektionen, welche die Zeitdarstellung, so wie sie bis heute in der angewandten Seismik üblich war, immer mehr ablösen wird.

Es lag nahe, bereits mit Beginn der digitalen Technik der Aufzeichnung und Verarbeitung seismischer Daten dieses Verfahren auch für die reflexionsseismische Tiefensondierung nutzbar zu machen. Hier sind erste Versuche von der PREUSSAG AG in der Nähe von Hannover durchgeführt worden [DOHR 1970].

In einem Gebiet nördlich von Peine ist anlässlich eines routinemäßigen seismischen Meßprogrammes eine Langzeitregistrierung der digitalen Magnetbänder durchgeführt worden, ähnlich, wie es früher mit dem Papierfilm geschehen war. Der Unterschied liegt darin, daß hier gleichzeitig eine 6-fach-Überdeckung des Untergrundes erfolgte. Allerdings ist die gesamte Meßtechnik auf die Erfassung der höheren Stockwerke ausgerichtet, d. h. Gesamtauslagen, Geophongruppen-Abstände, Bündelung und Schußstärken sind nicht auf die Tiefensondierung, sondern auf die Registrierung der reflektierten Wellen aus den ersten 3000 m ausgerichtet.

Die Abb. 7 zeigt die erste Darstellung eines solchen reflexionsseismischen Profiles. Hierin ist der obere Teil bis etwa 4 Sekunden nur in Form einer Einfachüberdeckung dargestellt. Die tieferen Teile sind eine Zusammenspielung aus einer 6-fach-Überdeckung.

Man erkennt, daß neben den bereits relativ guten Ergebnissen der Einfachüberdeckung des Oberbaues die 6-fach-Überdeckung im tieferen Bereich recht gute Reflexionsandeutungen zwischen etwa 7 und 9 Sekunden gebracht hat. Hier zeigt sich, daß sich aus einer Zone mittelmäßiger Ruhe ein Reflexionsband heraushebt, welches eine bemerkenswerte Breite, jedoch keine durchgehenden Reflexionen, zeigt. Dies entspricht Beobachtungen, wie sie bereits früher erzielt worden sind. Die relative Schwäche der tiefen Reflexionsgruppen mögen dadurch erklärt werden, daß die Ladungsstärke bei diesem Auftrag im allgemeinen unter 10 bis 15 kg lag und mit dieser Registrierung der allererste Versuch einer Erfassung tiefer Horizonte mit der neuen Technik gemacht worden war.

Die hier gezeigte Sektion beinhaltet folgende Verarbeitungsschritte: Dateneingabe, Demultiplexing, True Amplitude Recovery, Stapelung und Filterung (keine Deconvolution), Multiplexing, Ausgabe einer VAR-Section.

Vermerkt sei, daß die gleichen tiefen Reflexionsgruppen auch auf Querprofilen erfaßt wurden, wobei sich die aus einer seitlich herausgeschwenkten Ebene von der Salzstockflanke kommenden Reflexionen als außerordentlich störend erwiesen.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß dieses erste Beispiel zwar keine übermäßig gute Qualität der Ergebnisse lieferte, es zeigte jedoch die prinzipielle Möglichkeit auf, die

digitale Aufzeichnung und Verarbeitung der Daten zu einem weiteren und besseren Explorationsinstrument in der reflexionsseismischen Tiefensondierung zu machen.

Die erwähnten Vorversuche waren ermutigend genug, um die Methode der reflexionsseismischen Tiefensondierung unter Verwendung digitaler Aufzeichnungs-technik- und -bearbeitung nunmehr auch gezielt für ein Projekt einzusetzen.

6. Messungen im Oberrheingraben

Im Jahre 1968 wurden mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft erstmals spezielle reflexionsseismische Messungen im Oberrheingraben südlich der Stadt Rastatt durchgeführt. Hierbei wurde ein etwa 8 km langes, annähernd in der Grabenachse der Rastatter Mulde verlaufendes Profil, mit 6-fachem Überdeckungsgrad, vermessen [DOHR 1970].

Die Arbeiten wurden von einem Meßtrupp der PRAKLA/SEISMOS GmbH (Dipl.-Ing. SIPOS) unter Einsatz einer 24-spurigen Digitalapparatur (Texas-Instruments TI 10000) ausgeführt. Dieser Teil des Oberrheingrabens wurde ausgewählt, weil hier aus früheren Beobachtungen her [DEMNATI und DOHR 1965] gute Tiefen-reflexionen zwischen etwa 7 und 9 Sekunden beobachtet worden waren. Die Auswertung und digitale Bearbeitung der aufgenommenen Magnetbänder wurde im Rechenzentrum der PRAKLA/SEISMOS GmbH und dem LEIBNIZ-Rechenzentrum, Hannover, vorgenommen. Die Ergebnisse dieses ersten Profiles sind in den Abb. 8 und 9 dargestellt.

Man erkennt (Abb. 8), daß die gut durchhaltenden Reflexionen aus dem Sediment bis zu einer Tiefe von etwa 2,6 Sekunden zu verfolgen sind. Hier tritt eine Diskordanz in Erscheinung und es liegt die Vermutung nahe, daß in diesem Bereich, welcher einer Teufe von etwa 4000 – 4500 m entsprechen dürfte, das sogenannte „Basement“ zu suchen ist. Der folgende Teil ist dann sehr stark von Multiplen durchsetzt und erst bei einer Reflexionslaufzeit von etwa 7,5 Sekunden zeichnet sich ein etwa 2 Sekunden breites, aus sehr kräftigen Reflexionen bestehendes Band ab. Dieses Reflexionsband entspricht sehr gut dem früher in den statistischen Bearbeitungen gezeigten Maximum der Häufigkeitsverteilung.

Auch in den noch tieferen Teilen, die hier aus Platzmangel nicht gezeigt werden können, traten Reflexionen bei 13,5 und 17,5 Sekunden auf, zu deren Herkommen naturgemäß vorerst nichts gesagt werden kann.

Diese Messungen wurden im Jahre 1971 durch ein querschlägiges, west/ost verlaufendes Profil im gleichen Raum ergänzt. Die Ergebnisse auch dieses Profiles zeigen unterhalb einer reflexionsfreien und im wesentlichen von multiplen Reflexionen durchsetzten Zone zwischen etwa 7 und 9,5 Sekunden ein kräftiges Reflexionsband, welches dem des Nord-Süd-Profiles genau entspricht. Es zeigt sich, daß die Reflexionen dieses Bandes einen leichten seitlichen Anstieg nach Südwesten aufweisen. Hiermit entfällt der möglicherweise aus der Betrachtung des ersten Profiles auftretende Verdacht, es könnte sich um schräge Reflexionen aus den Randstaffeln des Schwarzwaldes handeln.

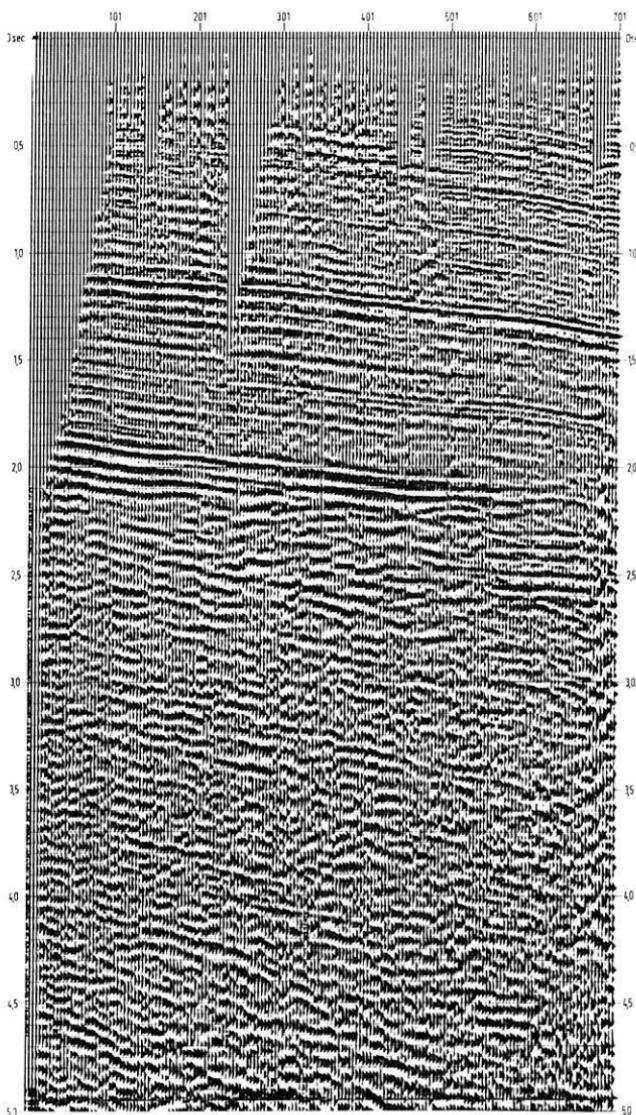


Abb. 8: Darstellung des 1968 im Oberrheingraben aufgenommenen Profiles. Dargestellt ist der Zeitbereich bis zu einer Reflexionszeit von 5 sec. Unter der Sedimentfüllung des Grabens wird bei etwa 2,6 sec das Basement vermutet. Darunter folgen im wesentlichen Mehrfachreflexionen. Die Sektion ist 6fach gestapelt, jedoch nicht gefiltert.

Representation of the reflection seismic profile recorded in the Upper Rhine Valley in 1968. This figure represents that part of the section up to 5 sec reflection time. It is supposed that the basement is situated at 2.6 sec underneath the sedimentary layers of the graben. Below this group multiple reflections appear. This section is a 6-fold, non-filtered stack.

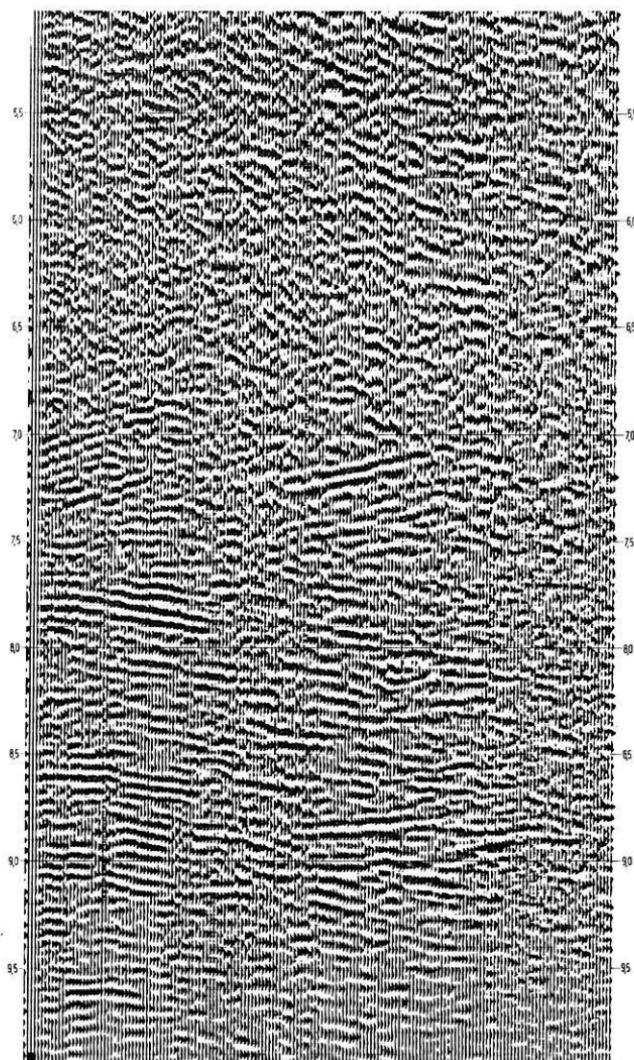


Abb. 9: Diese Abbildung zeigt aus der gleichen Profilaufnahme den Zeitbereich von 5 bis 10 sec. Hier tritt zwischen 7 und 9 sec eine Gruppe kräftiger Reflexionen auf.

This figure shows the time interval from 5 to 10 sec of the same profile as given in Fig. 8. Here a group of strong reflections is visible between 7 and 9.5 sec.

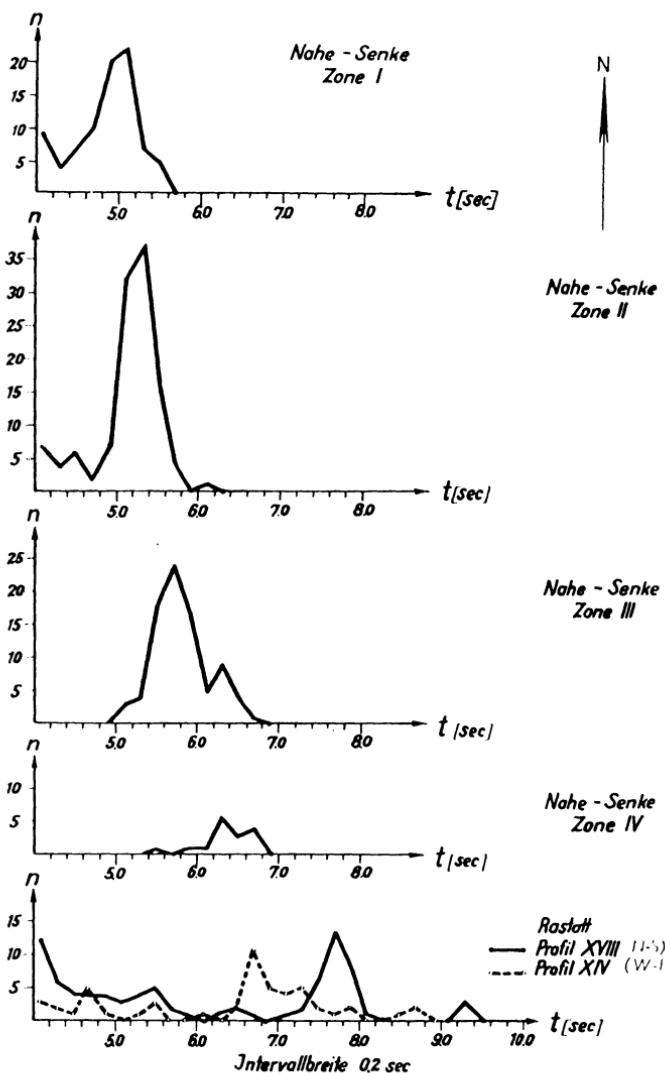


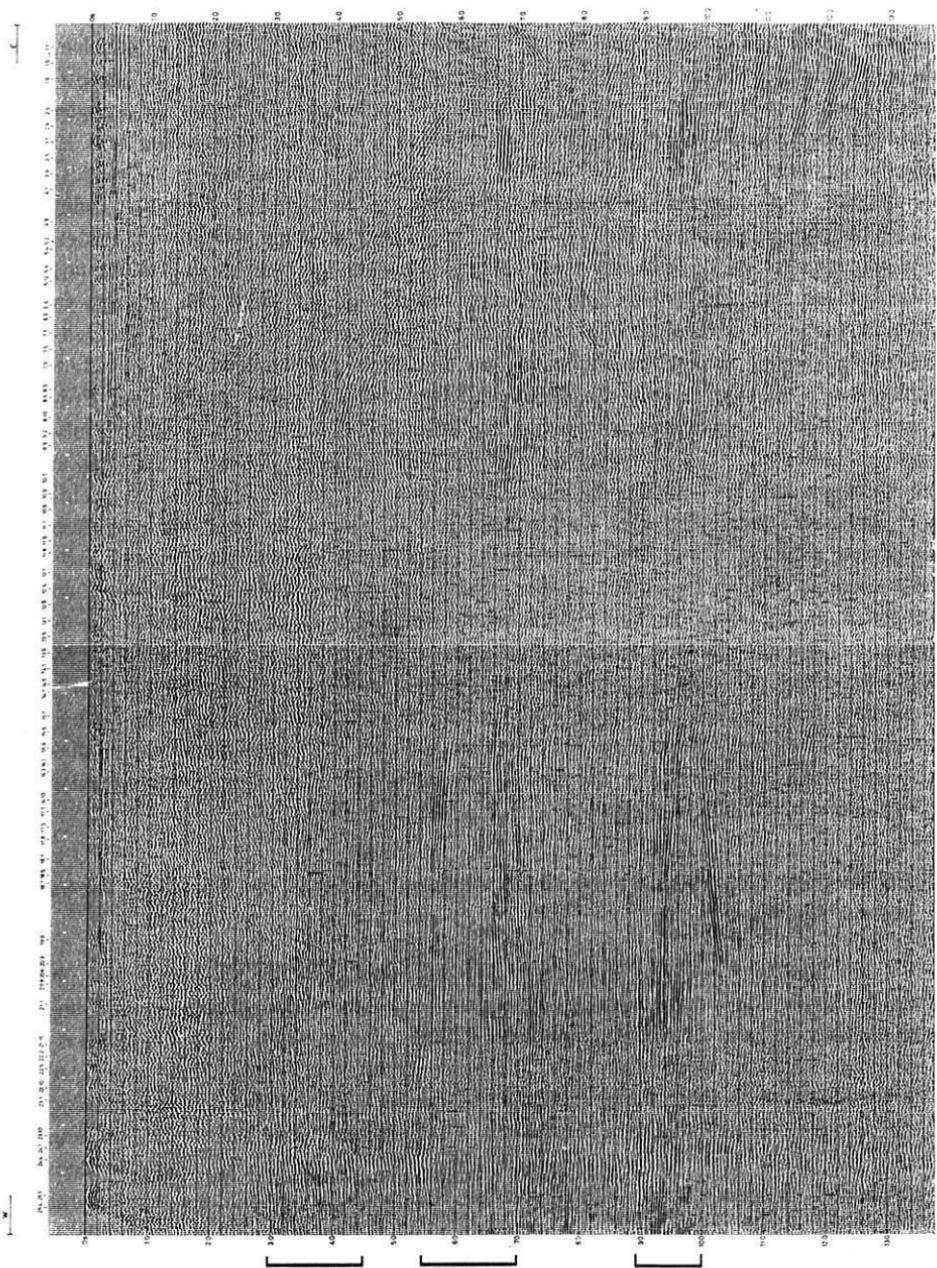
Abb. 10: Häufigkeitsverteilungen aus dem Gebiet der Nahe-Senke (nach den Beobachtungen von SCHULZ [1957]) und aus dem Gebiet Rastatt Achern im Oberrheingraben. Die Spitzen in den Häufigkeitsverteilungen sind mit Annäherung an den Rheingraben sehr klar zu längeren Laufzeiten hin verschoben.

Histograms from the Nahe-Depression (Nahe-Senke) (derived from SCHULZ's reflection observations [1957]) and from the Rastatt Achern area in the Upper Rhine Graben. The peaks in the histograms are clearly shifted to longer traveltimes as the Rhine Graben is approached.

Die beiden reflexionsseismischen Profile im Rheintalgraben haben nicht nur gezeigt, daß es prinzipiell möglich ist, eine sehr detaillierte Untersuchung der Tiefenstruktur und des Baues der Grenzflächen mit der reflexionsseismischen Methode zu erzielen, sie haben darüber hinaus die Möglichkeit aufgezeigt, in der Kombination mit statistischen Bearbeitungen, wie sie aus den früher durchgeföhrten Langzeitregistrierungen vorliegen, zu flächenhaften Aussagen über ein Gebiet zu kommen. So ist in der Abb. 10 eine früher gegebene Darstellung der Häufigkeitsverteilungen mehrerer reflexionsseismischer Profilgruppen wiedergegeben, welche im Norden ihr Pendant in der Häufigkeitsverteilung der in der Pfalz von Schulz beobachteten Reflexionen findet. Wie man erkennt, paßt die in den neuen reflexionsseismischen Profilen südlich Rastatt aufgeföndene breite Reflexionszone zwischen etwa 7 und 9,5 Sekunden sehr gut in das alte, früher aufgeföndene Maximum der Häufigkeitsverteilung und aus der zeitlichen Verfolgung dieses Maximums in den einzelnen Verteilungskurven zwischen dem Raum Kehl und der Pfalz läßt sich schließen, daß der gleiche Aufbau der Erdkruste in diesem Teufenbereich zwischen der Pfalz und dem Raum von Kehl/Straßburg anzunehmen ist. Das bedeutet, daß die hier gezeigten Profile grundsätzlich repräsentativ sind für den Bau der Grenzfläche, einerlei, wie sie vorerst noch geologisch gewertet werden darf. Der Verlauf der Grenzfläche wird darüber hinaus zeitlich verfolgbar gemacht – mit allem Vorbehalt, da die Umrechnung von geringen Zeitdifferenzen in Teufen bei diesen großen Tiefen mit einiger Vorsicht aufgenommen werden muß. Es würde zu weit föhren, an dieser Stelle auf die Problematik einzugehen, ob die hier in den reflexionsseismischen Messungen zu erkennende breite Reflexionszone, dem sogenannten und von vielen Seismikern geforderten „Kissen“, unter dem Rheingraben entspricht, oder ob hier bereits der Übergang in die Mohorovicic-Diskontinuität angedeutet ist. Erwähnt sei, daß bei plausiblen Geschwindigkeitsannahmen die Unterkante der hier gezeigten kräftigen Reflexionsgruppe in einer Tiefe von etwa 27 km zu suchen ist.

7. Profilmäßige Beobachtungen von Tiefenreflexionen im Gebiet des Nördlinger Rieses und am Alpenrand

Ein weiteres sehr schönes Beispiel für die Erfassung tiefer Reflexionsgruppen im Zuge moderner reflexionsseismischer Messungen mit Mehrfachüberdeckung und anschließender digitaler Bearbeitung der Daten, bildet das von der PRAKLA geschossene Profil über das Nördlinger Ries. Die einer Arbeit von Angenheister und POHL [1971] entnommene Darstellung (Abb. 11) zeigt das Ergebnis der 3-fach-Stapelung auf einem ost-west-verlaufenden Profilstück. Man erkennt in der Mitte zunächst eine breite, bis in die Tiefe hin reflexionslose Zone. Der Grund hierfür dürfte in dem oberflächlich liegenden Krater des Nördlinger Rieses zu suchen sein, welcher sowohl der Aussendung als auch der Aufnahme seismischer Wellen feindlich gegenübersteht. Auf beiden Seiten der Verwirrungszone unterhalb des Rieses zeigt jedoch die Registrierung sehr markante Reflexionsgruppen, die z. T. über viele Schußpunkte durch-



haltende gute Reflexionen aufweisen und ohne weiteres über den freien Raum unter dem Ries korreliert werden können.

Erinnern wir uns an die Häufigkeitsverteilungen aus dem Bayerischen Alpenvorland, so fällt sofort die Dreigliederung der tiefen Reflexionsgruppen auf, die den drei Zacken aus den Häufigkeitsverteilungen (Abb. 3) korrespondieren. In der Tat lassen sich nach Tiefe und Laufzeit diese drei Reflexionsgruppen den früher erkannten Spitzen der Häufigkeitsverteilungen zuordnen. So dürfen wir – ähnlich wie im Oberrheingraben anhand der zwei Profile südlich von Rastatt – auch hier das im Bereich des Nördlinger Rieses aufgenommene Profil als repräsentativ für den Bau des tieferen Untergrundes im Bayerischen Alpenvorland zwischen Iller und Salzach annehmen.

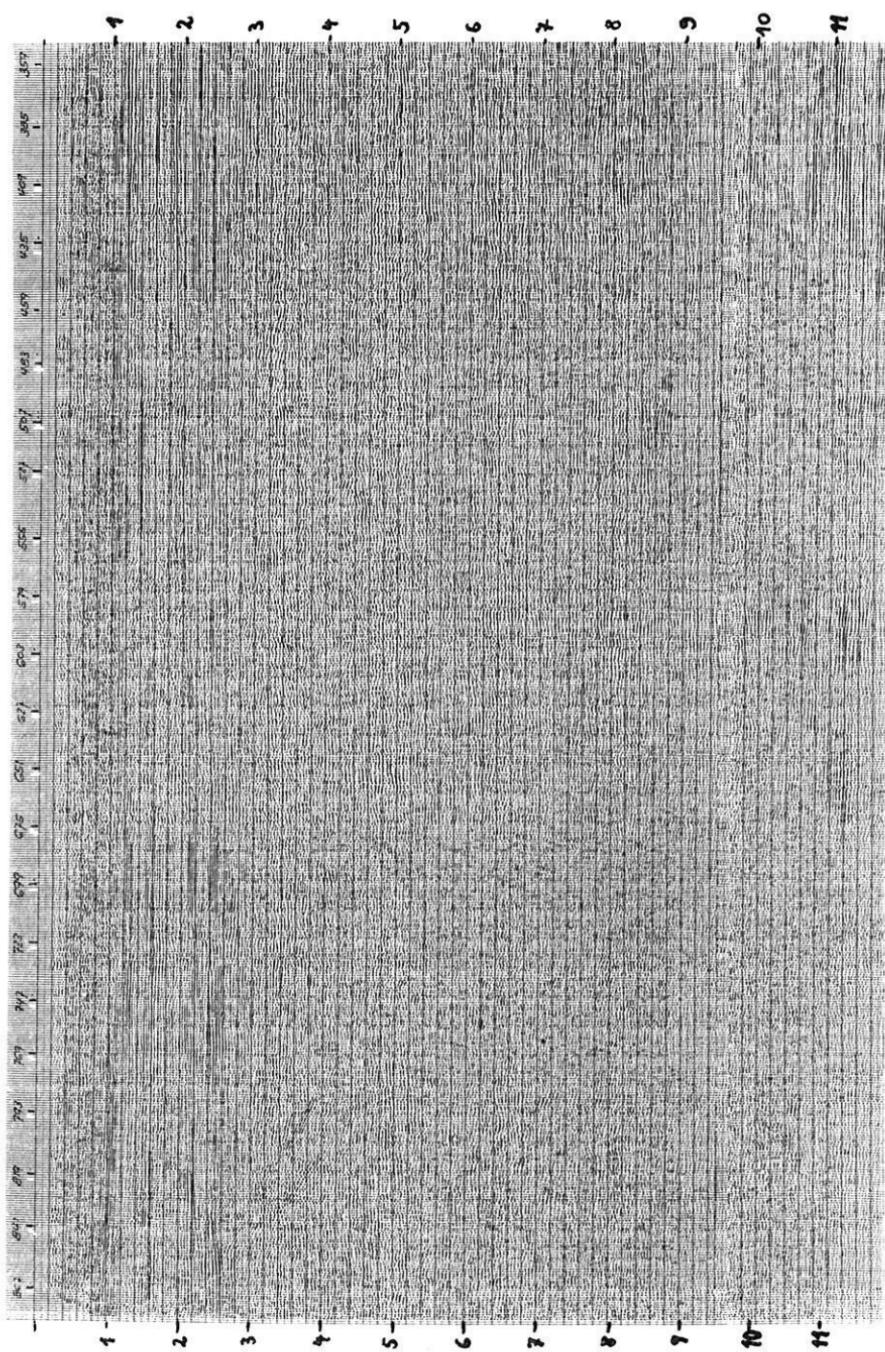
Es ist auffallend, daß die Häufigkeitsverteilungen in dem ganzen Gebiet einen fast gleichartigen Bau zeigen; daß sich überall, bis hin an den Alpenrand – nämlich bis zu den Arbeitsgebieten Immenstadt und Murnau – dieses Bild der Häufigkeitsverteilungen in gleicher Form wiederfindet. Eine einzige Ausnahme bildet das Gebiet Alz/Salzach, d. h., der Raum, der etwa durch die Salzach im Osten und die Alz im Westen und Nordwesten, begrenzt wird. Hier zeigt die Häufigkeitsverteilung tiefer Reflexion ein wesentlich verwascheneres Bild.

Im Zuge reflexionsseismischer Messungen sind von der PREUSSAG AG auch in diesem Raum Langzeitregistrierungen digitaler Feldbänder durchgeführt und das Ergebnis im LEIBNIZ-Rechenzentrum, Hannover, gestapelt worden. Die Abb. 12 zeigt einen Ausschnitt eines Profiles aus diesem Arbeitsgebiet Alz/Salzach. Auffallend ist hier, daß in dem Raum unterhalb der Sedimentbasis, welche hier bei etwa 2,5 Sekunden zu suchen ist, lediglich Störnergie vorherrscht und erst bei Laufzeiten zwischen 10 und 12 Sekunden wieder kräftige und lang durchhaltenden Reflexionen bestehende Bänder erscheinen.

D. h., dieses Profil fällt in seinem Aufbau ganz wesentlich aus dem Rahmen der im Bayerischen Alpenvorland aufgrund des Ries-Profiles anzunehmenden Dreigliederung heraus und entspricht wiederum in etwa dem unscharfen Bild der Häufigkeitsverteilungen in diesem Gebiet. Vermerkt sei übrigens, daß ja die magnetische Karte im Raum nordwestlich von Salzburg eine kräftige magnetische Anomalie zeigt, und

Abb. 11: Seismisches Profil über das Nördlinger Ries. Die Sektion stellt die Bearbeitung eines 3fach gestapelten Profiles dar, welches von der Prakla aufgenommen wurde. Unterhalb des Ries-Kraters sind keine Reflexionen erkennbar. Auf der rechten und linken Seite der Sektion treten jedoch drei markante Reflexionsgruppen auf, welche den Spitzen der Häufigkeitsverteilungen in der Abb. 3 entsprechen.

Seismic profile crossing the “Nördlinger Ries”. This section represents a three-fold cover profile, measured and processed by Prakla. No reflection is to be seen below the Ries crater. However, at the right and left part of the section three significant groups of reflections can be seen which correspond to the peaks in the histograms of Fig. 3.



bereits früher ist auf eine mögliche Korrespondenz der unklaren seismischen Ergebnisse mit den magnetischen besonderen Verhältnissen in diesem Gebiet hingewiesen worden [LIEBSCHER 1902, 1904]. Mit einiger Wahrscheinlichkeit läßt sich jedoch sagen, daß die Reflexionsgruppe zwischen etwa 10 und 12 Sekunden in diesem Gebiet der Mohorovicic-Diskontinuität zugeordnet werden darf, für welche hier eine Tiefe von ca. 30 – 32 km zu folgern wäre. Ein Wert, der in den regionalen Trend recht gut hereinpaßt.

Die hier gezeigten Beispiele zeigen, daß die Kombination der detaillierten Aussagen eines modernen digitalseismischen Profiles mit der statistischen Auswertung von Langzeitregistrierungen über flächenmäßig große Gebiete zu sehr viel weitreichenderen Ergebnissen führen kann, als die isolierte Betrachtung der einen oder der anderen Methode. Zweifellos liegen die Verhältnisse der sedimentären Schichten in Bayern besonders einfach, da hier der Bau des Alpenvorlandes bis zum kristallinen Untergrund relativ gleichmäßig und gut bekannt ist. Im Rheintal ist diese Voraussetzung schon nicht mehr im gleichen Maße gegeben, und auch hier ist die Korrespondenz zwischen den seismischen Ergebnissen eines Profiles und der flächenhaften Bearbeitung durchaus vorhanden.

Wesentlich schwerer zu durchschauen sind dagegen die Ergebnisse im norddeutschen Raum. Hier liegen leider, mit Ausnahme des einen kurzen Profiles in Osthannover, noch keine längeren modernen reflexionsseismischen Profile vor.

Wir haben aber schon darauf hingewiesen, daß die Häufigkeitsverteilungen ein sehr unterschiedliches und oftmals rasch wechselndes Bild zeigen. Mit einiger Sicherheit darf man annehmen, daß hier die Ursache nicht nur in der stark wechselnden Sedimentbedeckung, in jungen Tertiärbecken, der Salztektonik usw., zu suchen ist. Wenn wir die Gründe für ein derartiges Erscheinungsbild im tieferen Untergrund suchen, so würden uns hier nur umfangreiche reflexionsseismische Messungen weiterhelfen. Vor allem wäre die Anlage langer Profillinien dringend anzuraten.

Die Kosten solcher Arbeiten wären sicherlich erheblich, der wissenschaftliche Gewinn aber gerade in diesem Gebiet sehr bedeutend.

Abb. 12: Seismisches Profil in Süd-Ost-Bayern (Alz Salzach). Gute Tiefenreflexionen erscheinen zwischen 10 und 12 sec. Sie können der M-Diskontinuität zugeordnet werden. Zwischen der Sedimentbasis bei etwa 2,5 sec und den Moho-Reflexionen sind keine hervortretenden Reflexionen zu beobachten. Dies ist in Übereinstimmung mit der Häufigkeitsverteilungskurve dieses Gebietes in Abb. 3.

Seismic section in South-East Bavaria (Alz Salzach). Deep reflections of good quality appear at 10 to 12 sec. They may be attributed to the M-discontinuity. No striking reflections are to be seen between the base of sediments at 2.5 sec and the Moho-reflections. This conforms to the histograms of this area as presented in Fig. 3.

8. Ausblick

Mit dem Anlaufen profilmäßiger reflexionsseismischer Messungen zur Untersuchung des Baues der tieferen Erdkruste ist bereits ein Schritt in die Zukunft getan worden. Diesen Aufgaben kommt die rasche Entwicklung der Digitalseismik entgegen, mit welcher diese vornehmlich für die Prospektion von Erdöl und Erdgas eingesetzte Methode in immer größere Tiefen vorstößt und auch immer präzisere Aussagen liefern kann [BORTFELD 1971].

Faßt man die Erfahrungen aus den bisherigen Arbeiten zusammen, so zeichnen sich für die nähere Zukunft als wesentliche Aufgaben der reflexionsseismischen Tiefensondierung ab:

1. Eine profilmäßige Aufnahme von „Geotraversen“ mit den modernsten reflexionsseismischen Methoden.
2. Eine Weiterentwicklung der Techniken der digitalen Verarbeitung seismischer Daten, speziell im Hinblick auf die besonderen Probleme der seismischen Tiefensondierung.
3. Theoretische Untersuchungen über die Deutung der tiefen Reflexionsflächen.
4. Kombination profilmäßig angelegter Detailmessungen mit flächenhaft verteilten statistischen Beobachtungen.
5. Vergleich der Ergebnisse mit den Resultaten anderer Verfahren (Refraktionsseismik, Gravimetrie, Magnetik).

Literatur:

- ANGENHEISTER, G.: Struktur der tieferen Erdkruste im nördlichen Alpenvorland nach Ergebnissen der Refraktions- und Reflexions-Seismik. Beih. Geol. Jahrb. 80, 31–41, 1969.
- ANGENHEISTER, G., und J. POHL: Deep Crustal Reflections on a 17 km Digital Reflection Profile in South Germany (Nördlinger Ries). Observatoire Royal Belge Communications, XII Assemble General de la Comission Seismologique Europeene, Série A Nr. 13, 173–176, 1971.
- BORTFELD, R.: Moderne Seismik dringt in größere Tiefen vor. Erdöl und Kohle-Erdgas-Kohlechemie 24, 289–298, 1971.
- DEMNATI, A., und G. DOHR: Reflexionsseismische Tiefensondierungen im Bereich des Oberrheintalgrabens und des Kraichgaus. Z. Geophys. 31, 229–245, 1965.
- DOHR, G.: Zur reflexionsseismischen Erfassung sehr tiefer Unstetigkeitsflächen: Erdöl und Kohle 10, 278–281, 1957a.
- DOHR, G.: Ein Beitrag der Reflexionsseismik zur Erforschung des tieferen Untergrundes. Geol. Rundsch. 46, 17–26, 1957b.

- DOHR, G.: Über die Beobachtungen von Reflexionen aus dem tieferen Untergrunde im Rahmen reflexionsseismischer Messungen. *Z. Geophys.* 25, 280–300, 1959.
- DOHR, G.: Digital Recording of Reflections from Great Depth. Academy of Sciences of the USSR, Moscow 1970, Proceedings of the X Assembly of the ESC, Leningrad, 3–11, September 1968, 337–350, Volume 1.
- DOHR, G.: Ergebnisse reflexionsseismischer Messungen zur Untersuchung des Baues der Erdkruste in der Bundesrepublik. Proc. of the Eighth Assembly of the European Seismological Commission, 59–81, Akademiai Kiado, Budapest 1968.
- DOHR, G.: Reflexionsseismische Messungen im Oberrheingraben mit digitaler Aufzeichnungs-technik und Bearbeitung. Graben Problems, International Upper Mantle Project, Scientific Report No. 27, E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung (Nägele u. Obermiller), Stuttgart 1970.
- DOHR, G., und K. FUCHS: Statistical evaluation of deep crustal reflections in Germany. *Geophysics* 32, 951–967, 1967.
- DOHR, G., B. HADJEBI, und K. HEHN: Beobachtungen von Tiefenreflexionen in Norddeutsch-land. The 9th Assembly of the European Seismological Commission, 1–7 Aug. 1966 in Copenhagen, Kobenhavns Universitets Institut for Geofysik, Akademisk Forlag, 87–96, Kobenhavn 1967.
- DRAGEŠEVIĆ, T., und B. ANDRIĆ: Deep Seismic Sounding of the Earth's Crust in the Area of the Dinarides and the Adriatic Sea. *Geophys. Prospect.* 16, 54–76, 1968.
- DÜRBAUM, H. J., J. FRITSCH, und H. NICKEL: Deep seismic sounding in the eastern part of the Rhenisch Massif. The 9th Assembly of the European Seismological Commission, 1–7 Aug. 1966 in Copenhagen, Kobenhavns Universitets Institut for Geofysik, Akademisk Forlag, 265–271, Kobenhavn 1967.
- FUCHS, K.: Das Reflexions- und Transmissionsvermögen eines geschichteten Mediums mit beliebiger Tiefenverteilung der elastischen Moduln und der Dichte für schrägen Einfall ebener Wellen. *Z. Geophys.* 34, 489–513, 1968.
- FUCHS, K., und O. KAPPELMAYER: Report on reflection measurements in the Dolomites – September 1961. *Boll. Geofis. teor. ed appl.* 4, 131–141, 1962.
- GALFI, J., und L. STEGENA: Tiefenreflexionsversuche in Ungarn zum Studium der kontinen-talen Aufbauung. *Geol. Rundsch.* 46, 26–29, 1957.
- German Research Group for Explosion Seismology, Crustal Structure in Western Germany. *Z. Geophys.* 30, 209–234, 1964.
- German Research Group for Explosion Seismology, Seismic wide angle measurements in the Bavarian Molasse Basin. *Geophys. Prospect* 14, 1–6, 1966.
- HEHN, K.: Die statistische Auswertung von Reflexionen mit langen Laufzeiten aus dem nord-westdeutschen Raum und ihre Zuordnung zu den bekannten Unstetigkeitsflächen in der Erdkruste. Diplomarbeit, Techn. Universität Clausthal-Zellerfeld, 54 pp., 1964.
- HOFFMANN, H.: Zur Erreichung einer größeren Erkundungstiefe, Statistische Auswertung tieferer Reflexionen in Ostbrandenburg und der Niederlausitz. *Z. angew. Geol.* 10, 601–604, 1964.

- JUNGER, A.: Deep basement reflections in Big Horn County, Montana. *Geophysics* 16, 499–505, 1951.
- LIEBSCHER, H. J.: Reflexionshorizonte der tieferen Erdkruste im bayerischen Alpenvorland, abgeleitet aus Ergebnissen der Reflexionseismik. *Z. Geophys.* 28, 162–184, 1962.
- LIEBSCHER, H. J.: Deutungsversuche für die Struktur der tieferen Erdkruste nach reflexionseismischen und gravimetrischen Messungen im deutschen Alpenvorland. *Z. Geophys.* 30, 51–96 und 115–126, 1964.
- LUKIĆ, P.: Ein Beitrag zur Erforschung der Erdkruste im Bereich der Dinariden und in der Pannonischen Ebene, Seismische Untersuchungen und geothermische Betrachtungen, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln, 1971.
- MEISSNER, R.: An interpretation of the wide angle measurements in the Bavarian Molasse Basin. *Geophys. Prospect* 14, 7–16, 1966.
- MEISSNER, R.: Exploring deep interfaces by seismic wide angle measurements. *Geophys. Prospect* 15, 598–617, 1967.
- MEISSNER, R.: Zum Aufbau der Erdkruste. Ergebnisse der Weitwinkelmessungen im bayerischen Molassebecken. Teil I u. II. *Gerlands Beitr. Geophys.* 76, 211–254 und 295–314, 1967.
- REICH, H.: Über seismische Beobachtungen der Prakla von Reflexionen aus großen Tiefen bei den großen Steinbruch-Sprengungen in Blaubeuren am 4. März und 10. Mai 1952. *Geol. Jahrb.* 68, 225–240, 1953.
- REICHENBACH, R., und G. SCHMIDT: Results of Surface Reflection Seismic Measurements in the Siderite District of the Siegerland. *Geophys. Prospect.* 7, 291–299, 1959.
- RISCHE, J.: Zur Erfassung und Deutung tiefer Reflexionen im Thüringer Becken. *Z. angew. Geol.* 7, 105, 1961.
- SCHULZ, G.: Reflexionen aus dem kristallinen Untergrund des Pfälzer Berglandes. *Z. Geophys.* 23, 225–235, 1957.
- SOLLOGUB, W. B., u. a.: Ergebnisse und Probleme der Erforschung des Tiefenbaus der Erdkruste in der Ukraine (russ.). AN USSR, *Geofiziceskij sbornik*, No. 38, 48–63, 1970.
- SOLLOGUB, W. B., N. I. PAVLENKOVA, und A. W. CEKUNOW: Gliederungskriterien der Erdkrustenstörungen nach Daten der TSS (russ.). *Geof. issledowanija zemnoj kori Jugowostocnoj Ewropi, werchnaja mantija*, No. 5, Izd. „Nauka“, 72–83, Moskwa 1967.
- SOLLOGUB, W. B., N. I. PAVLENKOVA, und A. V. CHEKUNOW: Deep Seismic Research in Ukraine. Proceedings of the Eighth Assembly of the European Seismological Commission, 1964, 252–260, Akademiai Kiado, Budapest 1968.

Gravimetric Investigations in the Eastern Alps II (Meßgebiet Salzburg—Kärnten—Tirol)¹⁾

Gravimetric Investigations in the Eastern Alps II

**A. BEHLE²⁾, W. EHRISMANN³⁾, J. MAKRIS²⁾, H. MENZEL²⁾, O. ROSENBACH⁴⁾,
P. STEINHAUSER⁵⁾**

Eingegangen am 17. März 1972

Zusammenfassung: Es wird über gravimetrische Messungen in den Ostalpen im Bereich der österreichischen Bundesländer Salzburg, Kärnten und Tirol berichtet; die Messungen wurden in den Jahren 1965—1967 durchgeführt.

Die Ergebnisse der Feldmessungen werden in folgender Form mitgeteilt:

1. Profile der Freiluft- und Bouguer-Anomalien.
2. Liste der gravimetrischen und topographischen Daten der Meßstationen.

Die Bearbeitungsmethoden sowie die erzielten Genauigkeiten werden skizziert.

Abstract: Gravity measurements in the Eastern Alps have been carried out in the area of the Austrian federal states Salzburg, Kärnten and Tirol during the years from 1965 to 1967.

The results of the measurements are presented as follows:

1. Profiles of Free-air and Bouguer anomalies along six traverses.
2. List of gravity stations containing topographic and gravity data.

A sketch of the methods of evaluation and of the accuracy of data is given.

1. Einleitung

In Fortsetzung zu der Arbeit BEHLE, EHRISMANN, MAKRIS, MENZEL, MORELLI und ROSENBACH [1972] wird hier über gravimetrische Untersuchungen der Jahre 1965 bis 1967 berichtet. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft förderte diese Untersuchungen im Rahmen ihres Schwerpunktprogramms „Geophysikalische Erforschung des tieferen Untergrundes Mitteleuropas“.

¹⁾ Beitrag Nr. 156 zu dem Schwerpunktprogramm „Geophysikalische Erforschung des tieferen Untergrundes Mitteleuropas“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

²⁾ Institut für die Physik des Erdkörpers, Universität Hamburg, 2 Hamburg 13, Binderstr. 22.

³⁾ Preussag AG, Hannover, 3 Hannover 1, Postfach 4840, früher 4).

⁴⁾ Institut für Geophysik, Technische Universität Clausthal, 3392 Clausthal-Zellerfeld, Adolf-Römer-Straße 2A.

⁵⁾ Lehrkanzel für Geophysik, Universität Wien.

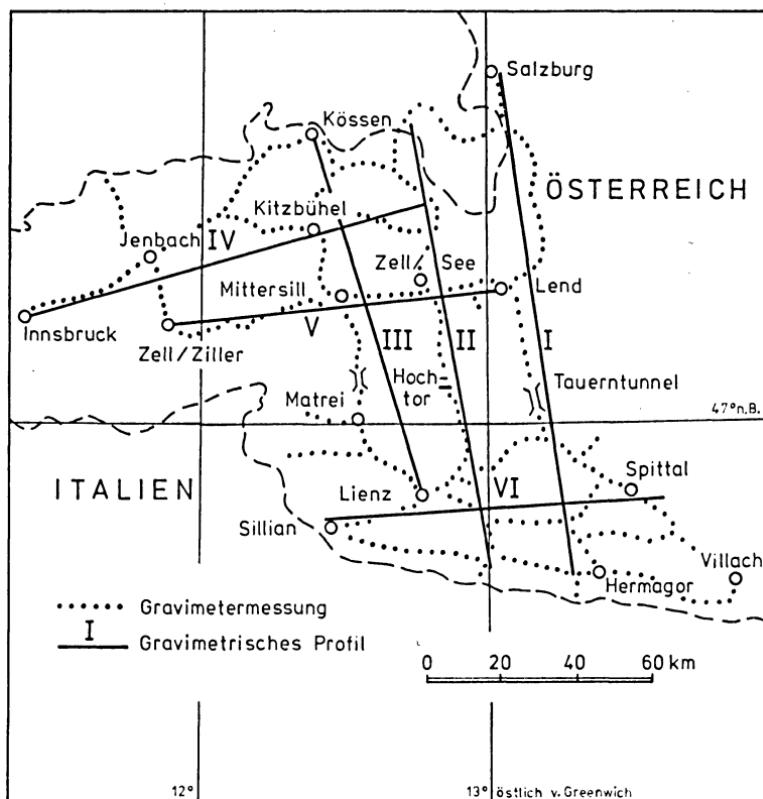


Abb. 1: Lageplan/Location map

1.1 Meßgebiet

Das Meßgebiet umfaßt das österreichische Bundesland Salzburg, den östlichen Teil Nordtirols, Osttirol und den westlichen Teil Kärntens; Abb. 1 zeigt seine Lage zwischen Achenpaß und Salzburg im Norden sowie Sillian und Villach im Süden. Die Nord-Süd Erstreckung beträgt ca. 125 km bei einer durchschnittlichen Breite von ebenfalls ca. 125 km. Die Meß- und Projektionsprofile schließen im Westen an das früher vermessene Gebiet an (vgl. [BEHLE et al., 1972]).

Die im Bereich des Untersuchungsgebietes liegenden Basispunkte 1. Ordnung des österreichischen Schwerenetzes und Stationen der europäischen Gravimetereichlinie sind in die Messungen mit aufgenommen worden.

1.2 Stand der bisherigen geophysikalischen Untersuchungen

Bereits in den 30er Jahren entwarf SCHWINNER [1931] aufgrund aller bis dahin vorliegenden Pendelmessungen vereinfachte Modelle über den Aufbau der Erdkruste in den Ostalpen. Neuere Ergebnisse, insbesondere von Gravimetermessungen, verarbeiteten HOLOPAINEN [1947] und BOTT [1954]. Ein Verzeichnis aller in Österreich durchgeführten Pendelmessungen wurde von der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung publiziert [1954].

Im Rahmen von geodätischen Untersuchungen diskutiert MADER [1954] die Ergebnisse einer großräumig angelegten gravimetrischen Schleife zwischen Bruck – Hochtor – Lienz – Möllbrücke – Tauerntunnel – Lend – Bruck im Hinblick auf orthometrische Reduktionen. Die gravimetrischen Arbeiten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien, wurden in Form einer Bouguer-Isanomalen Karte im Maßstab 1:1000000 veröffentlicht [SENFTL, 1965].

Bei den hier angeführten Interpretationen bereiteten vor allem die Inhomogenität des Ausgangsmaterials und die geringe Punktdichte der nicht für eine Bearbeitung hinsichtlich des Untergrunds der Alpen systematisch angelegten Messungen große Schwierigkeiten. Für den Bereich des vorliegenden Meßgebietes gibt es derzeit keine Publikation über detaillierte geophysikalische Untersuchungen bezüglich des Krustenaufbaus.

2. Feldmessungen und ihre Bearbeitung

Die Anlage der Feldmessungen, die Untersuchungsmethodik und die eingesetzten Geräte, sowie die Arbeitsunterlagen werden ausführlich in der Arbeit BEHLE et al. [1972] beschrieben. Alle vermessenen Profile verlaufen entlang des österreichischen Präzisionsnivelllements und der diesem nachgeordneten Nivellementlinien 2. und 3. Ordnung; Angaben über den Aufbau und die Genauigkeit dieses Netzes findet man bei MITTER [1970]. Insgesamt wurden bei einem Punktabstand von ca. 2 km 530 Meßpunkte vermessen.

Zur Auswertung gelangten folgende Schwereanomalien:

$$\Delta g' = g + \delta g_{\text{Ni}} - \gamma \quad (\text{Freiluftanomalie})$$

$$\Delta g'' = g + \delta g_{\text{Ni}} + \delta g_{\text{Top}} + \delta g_B - \gamma \quad (\text{Bougueranomalie});$$

hierbei bedeuten:

g gemessene Schwere bezogen auf den Eichpunkt Innsbruck Nr. 20344 G_{neu} der europäischen Gravimetereichlinie:

$$g_{\text{Innsbruck}} = 980569,73 \text{ [mgal]}$$

γ Normalschwere

δg_{N1} Freiluftreduktion

δg_{Top} Geländereduktion

δg_B Sphärische Bouguerreduktion

2.1 Reduktionen

Zur Bestimmung der Normalschwere wurde die internationale Schweißformel Stockholm 1930 herangezogen.

Die Freiluftreduktion wurde unter Verwendung des Normalgradienten durchgeführt. Untersuchungen von EHRISMANN, ROSENBACH und STEINHAUSER [1969a] haben jedoch gezeigt, daß hierbei größte Vorsicht geboten ist.

Bei Messungen im Zillergrund – am westlichen Rand des Meßgebietes gelegen – ergab sich ein Vertikalgradient, der um ca. 6% vom Normalgradienten abweicht; dies bedeutet für diesen Bereich und bei einem Reduktionsniveau in der Höhe des Meeresspiegels, daß die Schwereanomalien mit einem Fehler bis zu ca. 35 mgal behaftet sein können. Da derzeit jedoch keine weiteren Messungen des Vertikalgradienten vorliegen, mußte auf die Annahme des vertikalen Normalgradienten zurückgegriffen werden.

Die Geländereduktion wurde bis zur Hayfordzone O_2 nach dem von EHRISMANN, MÜLLER, ROSENBACH und SPERLICH [1966] angegebenen Verfahren mit einer konstanten Dichte von 2,67 g/cm³ durchgeführt, während bei der Berechnung der sphärischen Bouguerreduktion die Formel nach CASSINIS, DORE und BALLARIN [1937] unter Annahme der gleichen Dichte von 2,67 g/cm³ zur Anwendung kam.

2.2 Genauigkeiten

Gravimetermessungen: Alle Stationen sind voneinander unabhängig mehrfach mit einem mittleren Fehler von ca. $\pm 0,02$ bis $\pm 0,03$ mgal gemessen worden.

Höhenmessungen: Die Höhenmessungen sind mit einer derartigen Genauigkeit durchgeführt worden, daß die Unsicherheiten bei der Niveaureduktion und der Bouguerreduktion kleiner als $\pm 0,01$ mgal sind.

Geländereduktion: Die Werte der Geländereduktion erreichen bei einer Dichte von 2,67 g/cm³ bis zu 42 mgal.

Im Nahbereich bis zu 160 m um die Station werden hierbei Werte bis max. 1 mgal erreicht, im Mittelbereich zwischen ca. 160 m und ca. 3 km Werte bis zu max. 27 mgal und darüber hinaus im Fernbereich bis 167 km Werte bis zu max. 23 mgal. Unter der Annahme einer Reduktionsdichte von 2,67 betragen die Fehler in der Geländereduktion bei vorsichtiger Schätzung ca. $\pm 0,05$ mgal.

Daraus ergibt sich der mittlere Fehler der

Freiluftanomalie zu ca. $\pm 0,03$ [mgal]

Bougueranomalie zu ca. $\pm 0,06$ [mgal]

Es ist zu beachten, daß hierbei die Reduktionsdichte als fehlerfrei angesehen wird.

3. Meßergebnisse

Die Meßergebnisse werden in folgender Form vorgelegt:

1. übersichtsmäßige Schwereprofile
2. Stationsliste

3.1 Schwereprofile

Die gemäß Abb. 1 durchgeführte Vermessung der gravimetrischen Schleifen gestattet die Projektion der Meßlinien in die 6 Übersichtsprofile I – VI. Von diesen verlaufen die Profile I – III ungefähr parallel zueinander über den Alpenhauptkamm im Bereich der Hohen Tauern; die Profile IV – VI folgen ungefähr der Streichung der Alpen; die ersten beiden nördlich und das dritte südlich des Alpenhauptkamms.

Bei der Diskussion der in den Abb. 2 – 7 wiedergegebenen Schwereanomalien ist zu beachten, daß diese nur durch eine senkrechte Projektion der an den Meßstationen erhaltenen Anomaliewerte in das Profil gewonnen wurden. Änderungen des Anomalienwertes entlang des Projektionsweges sind hierbei nicht berücksichtigt.

Die Abbildungen enthalten in ihrem oberen Teil das Höhenprofil entlang der Meßlinien, in ihrem unteren Teil die gemäß Abschnitt 2.1 berechnete Freiluftanomalie $\Delta g'$, sowie die Bougueranomalie $\Delta g''$.

Profil I verläuft gem. Abb. 1 von Salzburg im Norden durch das Salzachtal am Tennengebirge und Hochkönig (Nördl. Kalkalpen) vorbei, durchzieht von Bischofs-

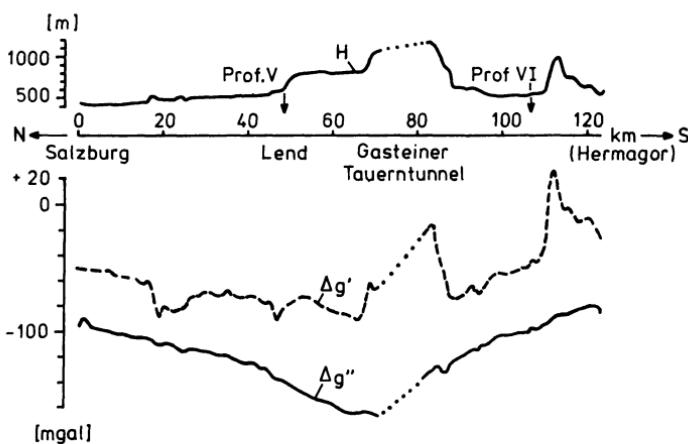


Abb. 2: Profil/Profile I: Salzburg – Hermagor

H : Höhe der Gravimeterstation/Elevation of gravity station

$\Delta g'$: Freiluftanomalie/Free air anomaly

$\Delta g''$: Bougueranomalie/Bouguer anomaly

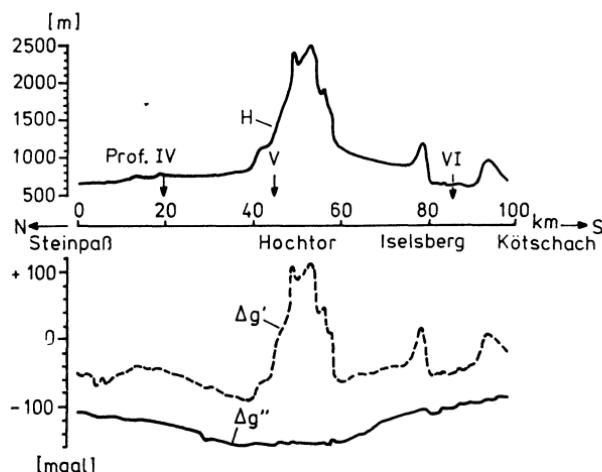


Abb. 3: Profil/Profile II: Steinpaß – Kötschach
 $H, \Delta g', \Delta g'':$ s. Abb. 2

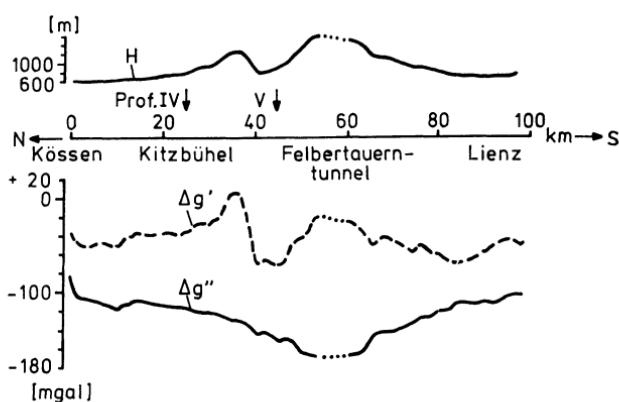


Abb. 4: Profil/Profile III: Kössen – Lienz
 $H, \Delta g', \Delta g'':$ s. Abb. 2

hofen bis Lend die Grauwackenzone und erreicht im Gasteiner Tal die geologisch gesehen tiefsten Einheiten der Alpen, das peninische Tauernfenster. Der Alpenhauptkamm wird durch den Gasteiner Tauerntunnel gequert, von wo das Profil am östlichen Rand des Kristallins der Kreuzeck-Gruppe durch das Möll- und Drautal sowie schließlich über den Kreuzberg durch die Gailtaler Alpen (Kalkgesteine des Drauzuges) nach Hermagor führt; hier kreuzt es die Störung der Pustertal—Gailtal-Linie, welche

die Trennungslinie zu den Südalpen darstellt, und endet in deren Paläozoikum am Naßfeld-Paß.

Das Profil zeigt nach Abb. 2 den für die Alpen charakteristischen Verlauf der Bougueranomalie. Sie steigt vom Zentralteil aus von ca. -160 mgal ziemlich gleichmäßig und relativ steil nach N auf ca. -90 mgal an, nach S auf ca. -80 mgal. Das Ausfallen der maximalen Anomalie im zentralen Bereich des Tauernfensters ist darauf zurückzuführen, daß hier das gravimetrische Meßprofil durch den Gasteiner Tauertunnel geht.

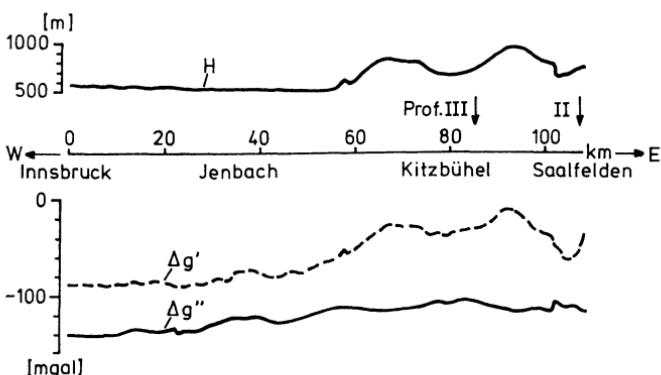


Abb. 5: Profil/Profile IV: Innsbruck – Saalfelden
 $H, \Delta g', \Delta g'':$ s. Abb. 2

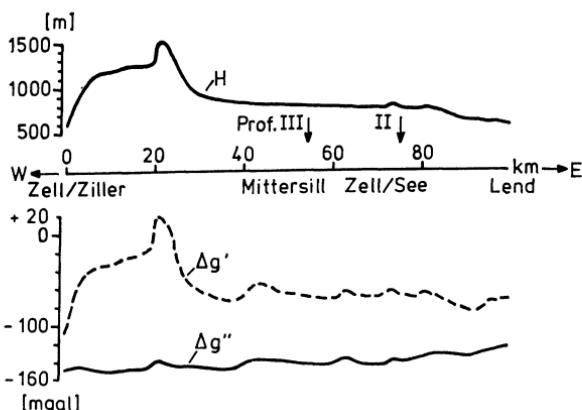


Abb. 6: Profil/Profile V: Zell/Ziller – Lend
 $H, \Delta g', \Delta g'':$ s. Abb. 2

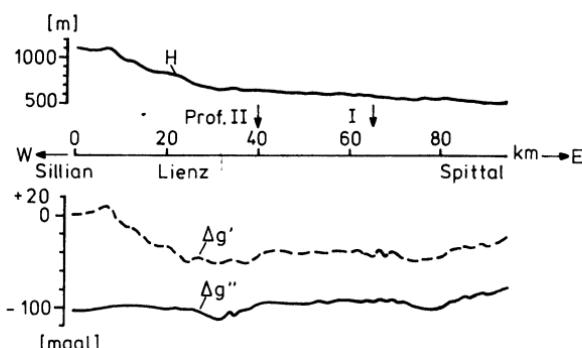


Abb. 7: Profil/Profile VI: Sillian – Spittal
 H , $\Delta g'$, $\Delta g''$: s. Abb. 2

Erwartungsgemäß zeigt die Freiluftanomalie ein wesentlich unruhigeres Verhalten als die Bougueranomalie; sie reagiert oft deutlich auf Höhenänderungen. Dies darf aber nicht im Sinne einer eindeutigen Korrelation der Freiluftanomalie mit der Höhe verstanden werden, wie aus einer genaueren Betrachtung der Abb. 2 hervorgeht. Fragen dieses Problemkreises diskutieren EHRISMANN, ROSENBACH und STEINHAUSER [1969 b] ausführlich.

Profil II verläuft etwa 20 km westlich von Profil I und beginnt im Norden am Steinpass; es geht weiter durch die Nördlichen Kalkalpen und die Grauwacke der Kitzbühler Alpen nach Zell am See, von wo die Meßlinie dem höchstelegenen Alpenübergang in den Ostalpen, der Glocknerstraße, folgt und durch das Mölltal weiter über den Iselsberg führt. Von hier ausgehend quert es die Gailtaler Alpen und endet im Drautal.

Das Profil zeigt in Abb. 3 für die Bougueranomalie einen ähnlichen Verlauf wie bei Profil I, es hat jedoch eine etwas flachere Form.

Die Freiluftanomalie nimmt hier deutlich zwischen den Profilkilometern 20 und 40 mit wachsender Höhe ab, um dann im zentralen Profilbereich mit der Höhe deutlich korreliert zu sein; sie erreicht ein Maximum von ca. 110 mgal.

Profil III ist das westlichste der Alpenquerprofile des vorliegenden Meßgebietes; seine geologische Situation entspricht in groben Zügen weitgehend derjenigen von Profil I und II. Bei Kössen beginnend führt es durch das Kaisergebirge und die Kitzbühler Alpen über den Paß Thurn nach Mittersill, quert die Hohen Tauern durch den Felbertauerntunnel und endet bei Lienz.

Profil III hat nach Abb. 4 den unruhigsten Verlauf in $\Delta g''$, wie z. B. die sekundäre Anomaliensenke am Nordende zeigt.

Die in Abb. 5, 6 und 7 wiedergegebenen Profile IV, V und VI, die in der Streichrichtung der Alpen verlaufen, geben Aufschluß darüber, wieweit die Schwereanomalie des zentralen Ostalpenbereichs als zweidimensionales Problem behandelt werden darf.

Profil IV liegt etwa parallel zum Alpenhauptkamm im Abstand von 30—40 km nach N. Es reicht von Innsbruck durch die tertiären und eiszeitlichen Ablagerungen des Inntales bis in die Kalkalpen bei Lofer.

Die Bougueranomalie entlang Profil IV ändert sich entsprechend Abb. 5 nur wenig, da es in der Hauptstreichrichtung der Alpen geführt ist.

Bei den Alpenlängsprofilen ist besonders zu beachten, daß bei der Projektion der Meßpunkte auf die Profillinien die Änderung der Anomalien senkrecht zur Hauptstreichrichtung nicht berücksichtigt ist.

Profil V liegt zwischen Zell/Ziller und Lend ebenfalls nördlich des Alpenhauptkamms, zu dem es in rund 20 km Entfernung parallel verläuft, bis Mittersill im Bereich des Tauernfensters und von dort bis Lend unmittelbar entlang der Grenze Tauernfenster—Grauwackenzone.

Die Bougueranomalie der Abb. 6 hat entgegen der Höhenverteilung einen sehr ruhigen Verlauf; dies zeigt, daß die Topographie offenbar befriedigend durch die Geländereduktion erfaßt wurde.

Profil VI stellt das südlichste Längsprofil dar und verläuft im Abstand von ca. 30 km vom Alpenhauptkamm entlang der Linie Sillian—Spittal. Es folgt somit nahezu in seiner ganzen Länge der Grenze zwischen dem Kalk des Drauzuges und dem Kristallin.

Die Bougueranomalie von Profil VI steigt leicht von Ost nach West.

Die Fortführung der Meßprofile über das österreichische Bundesgebiet hinaus war beabsichtigt, scheiterte aber daran, daß die notwendige Koordinierung mit den zuständigen italienischen Stellen nicht in angemessener Zeit durchführbar war.

Die hier diskutierten Schwerprofile zeigen deutlich, daß der regionalen Alpen-Anomalie lokale Schwerestörungen überlagert sind. Teilweise täuschen aber auch die Projektionen der Meßlinien auf die Projektionsgeraden kleinere Anomalien vor, vor allem bei einer Richtungsänderung der Meßlinien von Nord-Süd in Ost-West.

Eine ausführliche Interpretation der hier dargestellten Meßergebnisse muß im Zusammenhang mit dem im Teil 1. publizierten Datenmaterial [BEHLE et al., 1972] erfolgen. Um aber die Grenzen dieser Arbeit nicht weit zu überschreiten, wird hierauf in diesem Bericht verzichtet.

3.2 Stationsliste

Die Grundlagen für die in den Abb. 2—7 wiedergegebenen Profile bilden die in Tab. 1 zusammengestellten Angaben über die einzelnen Meßstationen. Jede Station ist innerhalb eines Jahres fortlaufend nummeriert und ist durch ihre Höhenlage sowie die geographische Länge und Breite lagemäßig fixiert.

Die Werte der Geländereduktion sind für die Reduktionsbereiche von Abschnitt 2.1 einzeln und aufsummiert wiedergegeben. Aus dem angegebenen Schwerewert wurden dann die Freiluftanomalie, die um den Betrag der Geländereduktion verbesserte Freiluftanomalie und die Bougueranomalie berechnet. Für alle Massenreduktionen wurde dabei einheitlich die Dichte $\sigma = 2,67 \text{ g/cm}^3$ verwendet. — Eine Ab-

schätzung des Einflusses abweichender Dichtewerte ist mit Hilfe der Dichtekorrekturzahl (DK) in der vorletzten Spalte von Tab. 1 möglich; diese Korrekturzahl gibt an, um welchen Betrag in migal sich die Bougueranomalie ändert, wenn die Reduktionsdichte um +0,1 gr/cm³ vom angenommenen Wert 2,67 gr/cm³ abweicht.

Sämtliche Höhen und damit auch die Schwereanomalien sind entsprechend dem derzeitigen Höhensystem des österreichischen Präzisionsnivelllements auf die Höhe des adriatischen Meeres bezogen. Gegen das auf N.N. basierende Höhensystem der Bundesrepublik Deutschland besteht die durch die Beziehung N.N. minus Adria definierte Horizontdifferenz von —0,273 m [MITTER, 1970].

Tabelle 2: Verzeichnis der Mitarbeiter

List of participants

Institut		Clausthal	Hamburg
Leiter der Forschungsarbeit	1965/66/67	O. Rosenbach	H. Menzel
Verantwortlicher Sachbearbeiter	1965 1966/67	W. Ehrismann W. Ehrismann	A. Behle J. Makris
Mitarbeiter bei den Feldmessungen	Herbst 1965	W. Ehrismann E. Ballheim B. Buttkus W. Düweke J. Fossati P. Steinhauser*)	A. Behle G. Maaß M. Rahal R. Szelwisch U. Treyde F. Wehebrink
	Herbst 1966	W. Ehrismann W. Düweke U. Krahmer H. Neumann P. Steinhauser*) R. Vees	J. Makris U. Casten/A. Behle G. Gangl*)/G. Maaß R. Kind/R. Rudloff M. Rahal/J. Samulowitz R. Szelwisch/K. Stahlschmidt
	Herbst 1967	W. Ehrismann U. Krahmer U. Lang/M. Rink O. Lettau J. Schopper P. Steinhauser*)	J. Makris B. Hadjebi P. Janle J. Samulowitz E. Wiemann J. Zimmermann

*) Lehrkanzel für Geophysik der Universität Wien

4. Danksagung

Wir danken für die wohlwollende Unterstützung und Förderung der gravimetrischen Feldmessungen folgenden Institutionen:

Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien

Felbertauern Straßen AG

Großglockner Hochalpenstraßen AG

Die Teilnehmer an der Gemeinschaftsarbeit sind in Tab. 2 namentlich aufgeführt.

Die vorliegende Arbeit stellt ein Teilergebnis von gravimetrischen Untersuchungen im Alpenraum dar, die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt werden, wofür wir sehr zu Dank verpflichtet sind.

Literatur:

BEHLE, A., W. EHRISMANN, J. MAKRIS, H. MENZEL, C. MORELLI und O. ROSENBACH: Gravimetrische Untersuchungen in den Ostalpen, Teil I. Zeitschrift für Geophysik, im Druck, 1972.

BOTT, M. H. P.: Interpretation of the gravity field of the Eastern Alps. Geological Magazine XCI (5) (91 of whole series), 337 – 383, 1954.

CASSINIS, G., P. DORE und S. BALLARIN: Fundamental tables for reducing gravity observed values. R. Commissione Geodetica Italiana Pubblicazioni, Nuovaserie 13, 1937.

EHRISMANN, W., G. MÜLLER, O. ROSENBACH und N. SPERLICH: Topographic reduction of gravity measurements by the aid of digital computers. Bollettino di geofisica teorica et applicata 8 (29), 3 – 20, 1966.

EHRISMANN, W., O. ROSENBACH und P. STEINHAUSER: Vertikalgradient und Gesteinsdichte im Schlegeisgrund (Zillertaler Alpen) auf Grund von Stollenmessungen. Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturw. Klasse, Abt. I, 178 (9), 261 – 270, Wien, 1969a.

EHRISMANN, W., O. ROSENBACH und P. STEINHAUSER: Untersuchungen zur Korrelation zwischen Freiluftanomalie und Stationshöhe im Hochgebirge. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 57, 183 – 191, 1969 b.

HOLOPAINEN, P. E.: On the gravity field and the isostatic structure of the earth's crust in the East Alps. Publ. of the Isost. Inst. of the Intern. Assoc. of Geodesy 16, 94 p, Helsinki, 1947.

MADER, K.: Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisionsnivelllements in den Hohen Tauern. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 15, 26 p, 1954.

MITTER, J.: Entwicklung, Stand und Zukunftsplanning des Österreichischen Präzisionsnivelllements. Österreichische Wasserwirtschaft 22 (5/6), 113 – 120, 1970.

Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung: Die Messungen der Schwerkraft, Bericht zur UGGI, 12. Ass. Gen. Rom, Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, 27 p, Wien, 1954.

SCHWINNER, R.: Das Schwereprofil der Tauernbahn. Gerlands Beiträge zur Geophysik 29, 352–416, 1931. .

SENF TL, E.: Schwerekarte von Österreich: Bouguer-Isanomalen. Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien, 1965.

Berichtigung

In der Publikation „Gravimetrische Untersuchungen in den Ostalpen I“ (Z. Geophysik 38, 1, 1972) ist in Tabelle 5 auf S. 72 ein Fehler unterlaufen. Im Abschnitt „Mitarbeiter bei den Feldmessungen“ ist bei „Herbst 1963“ A. BEHLE durch D. KESSEL zu ersetzen.

Die Autoren

Isotropietests von Lotabweichungsverteilungen in Westdeutschland II

Tests for Isotropy for Vertical Deflections in Western Germany II

E. GRAFARENDS, Bonn¹⁾

Eingegangen am 23. November 1971

Zusammenfassung: In Teil I wurde als Effekt erster Ordnung die Isotropie des Feldes der horizontalen Komponenten der Schwerkraft, des Lotabweichungsvektors, im Gebiet Westdeutschlands gefunden. Um eine geophysikalisch interessantere Aussage aus Lotabweichungsdaten zu gewinnen, bedarf es verfeinerter Tests, die hier entwickelt und angewandt werden. Das wirbelfreie isotrope Quellenfeld der Lotabweichungen wird genauer untersucht und eine Relation zwischen Längs- und Querkorrelation, den charakteristischen Funktionen eines isotropen Lotabweichungsfeldes, begründet. Ein dem Lotabweichungssignal aufgeprägtes isotropes und turbulentes Störsignal verändert das entscheidende Kriterium eines isotropen Vektorfeldes nicht: Kreuzkorrelationen bezüglich einer Projektionsrichtung verschwinden. Läßt man das Postulat der Isotropie fallen und geht zu anderen Symmetriegruppen über, so läßt sich in dem geophysikalisch interessanteren Fall der Multiaxialsymmetrie zeigen, daß dieses Kriterium verletzt wird. Es wird nachgewiesen, daß im Falle der Rotationsinvarianz zwei, im Falle einer Symmetriearchse fünf und im Falle zweier Symmetriearchsen zehn charakteristische Funktionen existieren. Diese Ergebnisse bilden die Grundlage eines sehr selektiven Filters, mit dem der Nachweis gelingt, daß im Gebiet Westdeutschlands als Effekte zweiter Ordnung Anisotropien des Lotabweichungsfeldes in Richtung des rheinischen, des erzgebirgischen und des herzynischen Streichens, den Bruchrichtungen der Erdkruste, auftreten.

Summary: In part I, the isotropy of the horizontal component field of gravity, the vector of vertical deflections, was found as an effect of first order in the territory of Western Germany. More sensitive tests are necessary to interpret the geogravity field in more detail. They are developed and applied, here. The vertex free isotropic potential field of vertical deflections is examined more precisely and a relation for the longitudinal and lateral correlation, the characteristic functions for an isotropic vertical deflection field, is proved. An isotropic and turbulent noise signal superposing the vertical deflection signal does not change the crucial criterion of an isotropic vector field: the cross correlations of vertical deflections related to a projection direction vanish. Dropping the postulate of isotropy and proceeding to other symmetry groups this criterion is violated for the axisymmetry and generalized axisymmetry, for geophysical interpretation a very important symmetry group. It is proved the number of characteristic functions for the rotation group is two, for one symmetry axis five and for two symmetry axis ten. These results are the fundament for very selective filters showing anisotropies within the vertical deflection field of Western Germany the effects of second order in the direction of Rhenish, Erzgebirgian and Hercynian strike, the rupture directions of the Earth crust.

¹⁾ Prof. Dr. ERIK GRAFARENDS, Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, 53 Bonn, Nußallee 17.

1. Einleitung

Der verallgemeinerten Auswertetechnik der vertikalen Komponente der Schwerkraft, der Schwerestörung δg , auf der Basis ihrer Korrelationsfunktion nach W. MUNDT [1969] stellen wir in Teil I [1970] diejenige der horizontalen Komponente der Schwerkraft, der Lotabweichungen ξ und η , gegenüber. Für sie ist die Korrelationsfunktion der Komponenten des Lotabweichungsvektors grundlegend. Sie wird aus Auto- und Kreuzkorrelationen gebildet und stellt einen Zweipunkttensor zweiter Stufe dar. Um aus einer derartigen Funktion geophysikalisch interessante Effekte ablesen zu können, mußten wir für einen Isotropietest von Lotabweichungsverteilungen die TAYLOR-KARMAN-Zerlegung heranziehen. Mit ihr konnten wir beweisen, daß der Lotabweichungsvektor in Westdeutschland in Näherung erster Ordnung isotrop verteilt ist und damit geophysikalisch zunächst keine interessante Interpretation zuläßt.

Der vorliegende Teil II dient deshalb dem Zweck, neue selektivere Testverfahren zu entwickeln, die geophysikalische Einflüsse herauszufiltern gestatten. Wir stellen dazu im ersten Abschnitt eine Strukturanalyse des isotropen Lotabweichungsfeldes vor. Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß die Lotabweichungsvektoren ein wirbelfreies Quellenfeld bilden, wodurch die charakteristischen Korrelationen eines isotropen Vektorfeldes, nämlich Längs- und Querkorrelationen, nicht mehr unabhängig wählbar sind. Um den Einfluß turbulenter Elemente auf das Lotabweichungssignal abschätzen zu können, überlagern wir dem Signal ein quellenfreies Wirbelfeld und studieren seine Wirkung. Insbesondere gelingt für beide Vektortypen der Nachweis, daß Kreuzkorrelationen von Lotabweichungskomponenten bezüglich einer Projektionsrichtung verschwinden. Der zweite Abschnitt ist der Frage gewidmet, welche Struktur ein Korrelationstensor zweiter Stufe zeigt, falls das Lotabweichungsfeld Symmetrieachsen enthält. In diesem Fall zeigt die Kreuzkorrelation von Lotabweichungen bezüglich einer Projektionsrichtung im Gegensatz zum isotropen Feld einen signifikanten Effekt. Der dritte Abschnitt referiert auf der Basis dieser Resultate Testergebnisse von Kreuz-, Längs- und Querkorrelationen aus Lotabweichungsmessungen Westdeutschlands. Die neuen selektiveren Tests zeigen als Effekte zweiter Ordnung eindeutig die Anisotropie von Lotabweichungsverteilungen Westdeutschlands in Richtung des rheinischen, erzgebirgischen und herzynischen Streichens, den hauptsächlichen Bruchrichtungen der Erdkruste.

Im Text verwenden wir folgende Konventionen:

Über zwei gleichlautende Indices ist entsprechend der EINSTEINSchen Summenkonvention zu addieren. Alle Indices laufen über alle positiven ganzen Zahlen bis zur Dimensionszahl n .

Symbole schreiben wir meist analytisch, nämlich

$$\text{grad} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i, \quad \text{grad} \cdot = \text{div} \rightarrow \partial_i \partial_i, \quad \text{grad } x = \text{rot} \rightarrow e_{ijk} \partial_j.$$

δ_{ij} ist das KRONECKER-, e_{ijk} das LEVI-CIVITA-Symbol.

Der Erwartungswert einer Größe wird $E\{\cdot\}$ geschrieben und bedeutet beispielsweise $E\{s_i(\mathbf{r}) s_j(\mathbf{r}')\} = \int d^n s(\mathbf{r}) \int d^n s(\mathbf{r}') s_i(\mathbf{r}) s_j(\mathbf{r}') f\{s_k(\mathbf{r}), s_l(\mathbf{r}')\}$ mit dem n-dimensionalen Volumenelement $d^n s(\mathbf{r})$, $f\{\cdot\}$ der Wahrscheinlichkeitsdichte und den Integralgrenzen $-\infty$ und $+\infty$.

2. Die Struktur eines isotropen Lotabweichungsfeldes

Lotabweichungen verstehen sich als ein *wirbelfreies Quellenfeld*. Um aus Korrelationsfunktionen den Quellenanteil herausfiltern zu können, muß die Struktur der Korrelationsfunktionen für Quellen- und Wirbelfelder bekannt sein. Diesem Problem möchten wir uns zunächst zuwenden.

Sei $s_i(\mathbf{r}) = \partial_i u(\mathbf{r})$ das wirbelfreie Quellenfeld der Lotabweichungen, berechnet aus dem *skalaren* Störpotential $u(\mathbf{r})$, so folgt wegen

$$\partial_i s_i(\mathbf{r}) \neq 0, \quad e_{ijk} \partial_j s_k(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

und angenommener Homogenität und Isotropie der Korrelationsfunktion des Störpotentials $\Phi_{uu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi_{uu}(r)$, $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ für die Korrelationsfunktion der Lotabweichungen

$$\Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = E\{s_i(\mathbf{r}) s_j(\mathbf{r}')\} = \partial_i \partial'_j E\{u(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}')\} = \partial_i \partial'_j \Phi_{uu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2)$$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x'_j} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi_{uu}(r)$$

nach einigen Nebenrechnungen mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{\partial r}{\partial x'_i} = \Delta x_i r^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -\delta_{ij} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{uu}(r) + \Delta x_i \Delta x_j r^{-3} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{uu}(r) - \\ & - \Delta x_i \Delta x_j r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi_{uu}(r) \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Struktur für $\Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ muß mit derjenigen für isotrop verteilte Vektoren nach G. I. TAYLOR [1935] und T. KARMAN [1938] verglichen werden.

$$\Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \psi(r) \delta_{ij} + [\Omega(r) - \psi(r)] \Delta x_i \Delta x_j r^{-2} \quad (4)$$

$\psi(r)$ bzw. $\Omega(r)$ gibt die Quer- bzw. Längskorrelation an (siehe Teil I, Anhang 2). Derartige Korrelationsfunktionen sind die Mittelwerte von Lotabweichungen, die

auf eine vorgegebene Richtung projiziert werden und in parallele und normale Komponenten bezüglich dieser Richtung zerlegt werden.

$$\begin{aligned}\psi(r) &= E\{s_n(\mathbf{r}) s_n(\mathbf{r}')\}, & \Omega(r) &= E\{s_p(\mathbf{r}) s_p(\mathbf{r}')\} \\ E\{s_p(\mathbf{r}) s_n(\mathbf{r}')\} &= 0, & E\{s_n(\mathbf{r}) s_p(\mathbf{r}')\} &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

Die TAYLOR-KARMAN-Zerlegung sagt also gerade aus, daß nur Autokorrelationen, *keine* Kreuzkorrelationen von Lotabweichungen bei dieser Projektionstechnik und isotrop verteilten Lotabweichungsvektoren existieren.

Vergleichen wir nun 2(3) und 2(4), so stellen wir fest, daß im Falle eines quellenfreien Wirbelfeldes Längs- und Querkorrelationen nicht unabhängig, vielmehr in typischer Weise miteinander verknüpft sind.

$$\psi_Q(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{uu}(r), \quad \Omega_Q(r) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi_{uu}(r) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dr}(r\psi_Q) = \Omega_Q \quad (7)$$

Wir nennen die differentielle Relation 2(7) die *fundamentale Korrelationsgleichung des isotropen Lotabweichungsfeldes*. Da jedoch Lotabweichungsmessungen andere stochastische Einflüsse überlagert sein können, studieren wir die Struktur eines quellenfreien Wirbelfeldes.

Sei $s_i(\mathbf{r}) = e_{ikl} \partial_k v_l$ das quellenfreie Wirbelfeld, berechnet aus dem *vektoriellen* Störpotential $v_l(\mathbf{r})$, so folgt wegen

$$\partial_i s_i(\mathbf{r}) = 0, \quad e_{ikl} \partial_k v_l \neq 0 \quad (8)$$

$$E\{s_i(\mathbf{r}) \partial'_j s_j(\mathbf{r}')\} = \partial'_j \Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (9)$$

und angenommener Homogenität und Isotropie für die Korrelationsfunktion der Lotabweichungen

$$\partial'_j \{\psi(r) \delta_{ij} + [\Omega(r) - \psi(r)] \Delta x_i \Delta x_j r^{-2}\} = 0 \quad (10)$$

nach einigen elementaren Zwischenrechnungen eine Abhängigkeit von Längs- und Querkorrelationen der Gestalt

$$\frac{d\Omega}{dr} W + (n-1) \frac{\Omega_W - \psi_W}{r} = 0 \quad (11)$$

mit der Dimensionszahl n. 2(11) nennen wir die *fundamentale Korrelationsgleichung des turbulenten Anteils eines isotropen Lotabweichungsfeldes*.

Wenden wir uns noch dem Allgemeinfall zu, daß nämlich ein gemessenes Lotabweichungssignal wirbelfreie Quellenanteile und quellenfreie Wirbelanteile als Turbulenzeinfluß enthält.

$$\Phi_{ij}^{QW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \partial_i u(\mathbf{r}) e_{jkl} \partial'_k v_l(\mathbf{r}') + e_{ikl} \partial_k v_l(\mathbf{r}) \quad (12)$$

Wir beweisen folgend, daß die Korrelationsfunktion eines derartigen stochastisch homogenen und isotropen Signals auch nur aus zwei Anteilen, einem Quellen- und einem Wirbelanteil, besteht. Die Kreuzkorrelation zwischen einem Quellen- und einem Wirbelsignal verschwindet.

$$\Phi_{ij}^{QW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = E\{\partial_i u(\mathbf{r}) e_{jkl} \partial'_k v_l(\mathbf{r}')\} = e_{jkl} \partial_i \partial'_k E\{u(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}')\} \quad (13a)$$

oder symbolisch

$$\Phi_{SS}^{QW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \text{grad rot}' \Phi_{uv}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (13b)$$

Daß

$$\Phi_{ij}^{QW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

ist, zeigt man am einfachsten anhand der Identität $E\{u(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}')\} = 0$ im Falle der Isotropie (T. KARMAN und L. HOWARTH 1938). Entsprechend Teil I, Anhang 2, lautet die lineare Form

$$\Phi_1(e_i, \Delta x_i) = e_i \Delta x_i a_1(r) = e_i \Phi_i \quad (14)$$

mit einer beliebigen Funktion $a_1(r)$ und dem Einheitsvektor e_i . Sei $\Phi_i = E\{u(\mathbf{r}) v_i(\mathbf{r}')\}$, so folgt aus der Quellenfreiheit des Vektorpotentials

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_i \Phi_i = \partial_i [\Delta x_i a_1(r)] = 0 \\ \frac{d}{dr} a_1(r) + \frac{n}{r} a_1(r) = 0 \end{array} \right. \blacksquare \quad (15)$$

mit der Lösung $a_1(r) = k r^{-n}$. Die beiden Regularitätsbedingungen an eine Korrelationsfunktion,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_i(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \Phi_i(r)$$

beschränkt, werden nur erfüllt, wenn die Konstante k verschwindet. Mit $a_1(r) = 0$ wird aber auch $\Phi_i(r, r') = E\{u(\mathbf{r}) v_i(\mathbf{r}')\} = 0$, was zu zeigen war.

Allgemein läßt sich mit diesem Satz die Zerlegung der Korrelationsfunktion der Lotabweichungen in einen reinen Quellen- und in einen reinen Turbulenzterm begründen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = E \{ [\partial_i u(\mathbf{r}) + e_{ikl} \partial_k v_l(\mathbf{r})] [\partial'_j u(\mathbf{r}') + e_{jmn} \partial'_m v_n(\mathbf{r}')] \} = \\ = E \{ [\partial_i u(\mathbf{r})] [\partial'_j u(\mathbf{r}')] \} + E \{ [e_{ikl} \partial_k v_l(\mathbf{r})] [e_{jmn} \partial'_m v_n(\mathbf{r}')] \} = \\ = \Phi_{ij}^{QQ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Phi_{ij}^{WW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{array} \right. \quad (16)$$

Ein Vergleich mit 2(4), 2(7) und 2(11) gibt die endgültigen Strukturgleichungen des homogenen und isotropen Lotabweichungsfeldes unter Einschluß von dem eigentlichen Signal überlagerten Rauschen an.

$$\psi = \psi_Q + \psi_W, \quad \Omega = \Omega_Q + \Omega_W \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \psi_Q(r) \delta_{ij} + \frac{d\psi_Q}{dr} \Delta x_i \Delta x_j r^{-1} + \left[\frac{d}{dr} (r \Omega_W) \right] \delta_{ij} - \frac{d\Omega_W}{dr} \Delta x_i \Delta x_j r^{-1} = \\ = \left[\psi_Q + \frac{d}{dr} (r \Omega_W) \right] \delta_{ij} + \left[\frac{d}{dr} (\psi_Q - \Omega_W) \right] \Delta x_i \Delta x_j r^{-1} \end{array} \right. \quad (18)$$

Da die Lotabweichungsverteilungen auf die Ebene projiziert werden, haben wir 2(18) im $n=2$ -dimensionalen Raum angeschrieben.

In Teil I, Formel 2(4), hatten wir Längs- und Querkorrelation als Funktion von modifizierten BESSEL-Funktionen zweiter Art nullter und erster Ordnung gefunden.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(r) = \frac{4d^2}{r^2} - 2K_0\left(\frac{r}{d}\right) - \frac{4d}{r} K_1\left(\frac{r}{d}\right) \\ \Omega(r) = -\frac{4d^2}{r^2} + 2K_0\left(\frac{r}{d}\right) + \frac{4d}{r} K_1\left(\frac{r}{d}\right) + 2\frac{r}{d} K_1\left(\frac{r}{d}\right) \end{array} \right. \quad (4)$$

d bezeichnet die charakteristische Länge der Korrelationsfunktion von Lotabweichungen etwa in der Größenordnung von 48 km. Da

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x), \quad \frac{d}{dx} K_1(x) = -K_2(x) + \frac{1}{x} K_1(x) \\ K_2(x) = +\frac{2}{r} K_1 + K_0 \end{array} \right. \quad (19)$$

nach Rekursionsformeln für modifizierte BESSEL-Funktionen gilt, siehe beispielsweise M. ABRAMOWITZ/I. A. STEGUN (1965 p. 376), bestätigt man ohne Schwierigkeiten, daß in I 2(4) der Quellenanteil dargestellt ist, der 2(7) folgt.

3. Multiaxialsymmetrisches Lotabweichungsfeld

Die Berechnungen von Korrelationsfunktionen aus Lotabweichungen Westdeutschlands zeigen als Effekt erster Ordnung statistische Isotropie. Als Effekt zweiter Ordnung sind signifikante Abweichungen in Richtung geophysikalisch besonders interessanter Störzonen überlagert. Um genauer analysieren zu können, ob diese anisotropen Effekte ihren Ursprung in turbulenten Einflüssen des vorigen Abschnittes haben oder nicht, müssen wir ein Konzept entwickeln, das gewisse Vorzugsrichtungen in der Struktur der Lotabweichungskorrelation berücksichtigt. Wir geben deshalb zunächst eine Darstellungstheorie des Zweipunkttensors $\Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für axiale Symmetrie. Darunter verstehen wir die Invarianz der zur Korrelationsfunktion gehörigen bilinearen Form nicht gegenüber der vollständigen Drehgruppe, wie wir es bei Isotropie annahmen, sondern gegenüber Rotationen um eine bevorzugte Richtung λ_i und gegenüber Spiegelungen an Ebenen, die λ_i und eine Senkrechte zu dieser Richtung enthalten. Als Verallgemeinerung lassen wir schließlich mehrere derartige Symmetrieeachsen zu.

Für das Konzept einer axialsymmetrischen Korrelationsfunktion sind die Arbeiten von G. K. BATCHELOR [1946], S. CHANDRASEKHAR [1950] und H. P. ROBERTSON [1940] grundlegend. Wie in Teil I, Anhang 2, gezeigt, ist der Ausgangspunkt einer Strukturanalyse der Korrelationsfunktion die bilineare Form. Sie ist für Axialsymmetrie eine Funktion der Basisvektoren e_i am Ort \mathbf{r} und e_j , am Ort \mathbf{r}' , der ausgezeichneten Richtung λ_i und wegen der angenommenen Homogenität des Differenzvektors $\Delta x_i = x'_i - x_i$.

$$\Phi_2(e_i, e_j, \Delta x_i, \lambda_i) \equiv e_i e_j \cdot \Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1)$$

Wie in der Invariantentheorie von Formen bewiesen wird, hängt Φ_2 von den Basisinvarianten der für das Problem charakteristischen Tensoren ab:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i e'_i, \quad e_i \Delta x_i, \quad e_i \lambda_i \\ e'_i \Delta x_i, \quad e'_i \lambda_i \\ \Delta x_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i \lambda_i \end{array} \right. \quad (2)$$

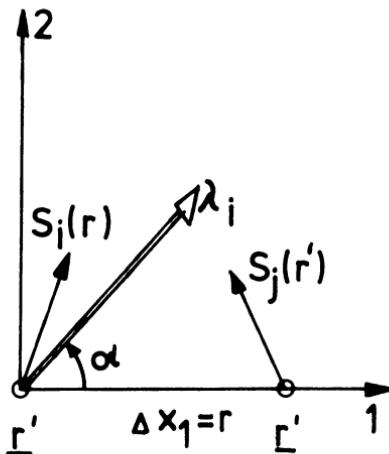
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2 = e_i e_j [\Delta x_i \Delta x_j \cdot a_1 (\Delta x_i \lambda_i) + e_i e_j \cdot a_2 (\Delta x_i \lambda_i) + \lambda_i \lambda_j \cdot a_3 (\Delta x_i \lambda_i) + \\ + \lambda_i \Delta x_j \cdot a_4 (\Delta x_i \lambda_i) + \Delta x_i \lambda_j \cdot a_5 (\Delta x_i \lambda_i)] \end{array} \right. \quad (3)$$

Mit $e_i e_j = \delta_{ij}$, $\Delta x_i \lambda_i = r \lambda \cos(\Delta x_i, \lambda_i) = r \cos \alpha$ ergibt sich die axialsymmetrische Struktur der Korrelationsfunktion mit fünf charakteristischen Funktionen a_1 bis a_5 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = a_1(r, \alpha) \Delta x_i \Delta x_j + a_2(r, \alpha) \delta_{ij} + a_3(r, \alpha) \lambda_i \lambda_j + \\ + a_4(r, \alpha) \lambda_i \Delta x_j + a_5(r, \alpha) \Delta x_i \lambda_j \end{array} \right. \quad (4)$$

Anschaulicher wird 3 (4) mit Abb. 1.

Liegen die Punkte \mathbf{r} und \mathbf{r}' , zwischen denen wir Lotabweichungskorrelationen berechnen wollen, auf der 1-Achse, der Längsrichtung, so ist es praktisch, die Vektoren

Abb. 1: Vektorskizze zur Richtung λ_i Vector-graph for the direction λ_i

der Lotabweichungen parallel und normal zu dieser 1-Achse zu projizieren. 3 (4) lautet in dieser Koordinatenlage:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi_{pp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = a_1 r^2 + a_2 + a_3 \cos^2 \alpha + (a_4 + a_5) r \cos \alpha \\ \Phi_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi_{pn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = a_3 \sin \alpha \cos \alpha + a_5 r \sin \alpha \\ \Phi_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi_{np}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = a_3 \sin \alpha \cos \alpha + a_4 r \sin \alpha \\ \Phi_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi_{nn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = a_2 + a_3 \sin^2 \alpha \end{array} \right. \quad (5)$$

Ohne auf Einzelheiten näher einzugehen, soll nur betont werden, daß im Unterschied zur isotropen Korrelationsfunktion die axialsymmetrischen Kreuzkorrelationen $\Phi_{pn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \neq 0$ und $\Phi_{np}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \neq 0$ enthält. Darauf wird sich ein Test im nächsten Abschnitt stützen.

Liegt eine zweite Symmetriearchse μ_i mit denselben Eigenschaften wie λ_i vor, so hängt die bilineare Form Φ_2 in 3 (1) zusätzlich von μ_i ab.

$$\Phi_2(e_i, e_j, \Delta x_i, \lambda_i, \mu_i) \equiv e_i e_j' \Phi_{ij'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Die Tabelle der Basisinvarianten wird hier beträchtlich umfangreicher.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i e_i', \quad e_i \Delta x_i, \quad e_i \lambda_i, \quad e_i \mu_i \\ e_j' e_j, \quad e_j' \Delta x_j, \quad e_j' \lambda_j, \quad e_j' \mu_j \\ \Delta x_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i \lambda_i, \quad \Delta x_i \mu_i \\ \lambda_i \mu_i \end{array} \right. \quad (6)$$

Kombiniert man die Invarianten wie in 3 (3), so verbleibt für biaxiale Symmetrie eine Struktur der Korrelationsfunktion mit zehn charakteristischen Funktionen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ij}(r, r') = a_1(r, \alpha_1, \alpha_2) \Delta x_i \Delta x_j + a_2(r, \alpha_1, \alpha_2) \delta_{ij} + \\ + a_3(r, \alpha_1, \alpha_2) \lambda_i \lambda_j + a_4(r, \alpha_1, \alpha_2) \lambda_i \Delta x_j + \\ + a_5(r, \alpha_1, \alpha_2) \Delta x_i \lambda_j + a_6(r, \alpha_1, \alpha_2) \mu_i \mu_j + \\ + a_7(r, \alpha_1, \alpha_2) \mu_i \Delta x_j + a_8(r, \alpha_1, \alpha_2) \Delta x_i \mu_j + \\ + a_9(r, \alpha_1, \alpha_2) \lambda_i \mu_j + a_{10}(r, \alpha_1, \alpha_2) \mu_i \lambda_j \end{array} \right. \quad (7)$$

α_1 und α_2 sind die Winkel im Skalarprodukt $\Delta x_i \lambda_i = r \cos \alpha_1$ und $\Delta x_i \mu_i = r \cos \alpha_2$. Wie im Falle einer und zwei Symmetriearchsen kann ganz allgemein bei beliebig vielen Symmetriearchsen verfahren werden. Mit einigen Vektorpfeilen in Abb. 2 sollen abschließend die Auto- und die Kreuzkorrelationen nach der geschilderten Projektions-technik veranschaulicht werden.

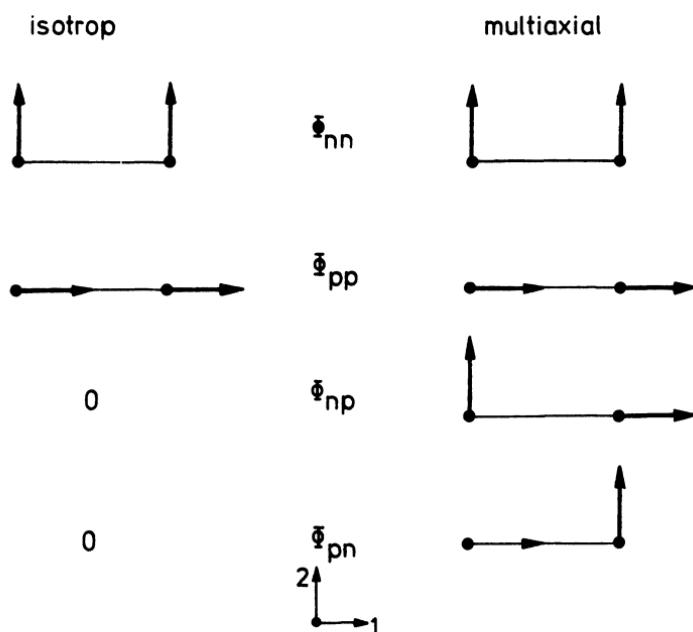


Abb. 2: Vektorskizze zur isotropen und multiaxialsymmetrischen Korrelationsfunktion der Lotabweichungen

Vector-graph of the isotropic and multi-axial-symmetric correlation function of vertical deflections

Für multiaxialsymmetrische Lotabweichungsverteilungen läßt sich natürlich wie im zweiten Abschnitt eine Potentialtheorie aufbauen. Diesem Problem wollen wir uns aber hier nicht widmen, benötigen wir doch für die im nächsten Abschnitt beschriebenen Tests nur die bisherigen Resultate.

4. Testergebnisse

Um anisotrope Effekte in der Korrelationsfunktion der Lotabweichungen sichtbar zu machen, wurden zwei Tests verwandt: Im *ersten* Testverfahren wurden Kreuzkorrelationen $E\{s_p(r)s_n(r')\}$ und $E\{s_n(r)s_p(r')\}$ für jeweils 15° -Richtungsunterschied im Gebiet von Westdeutschland berechnet und in Richtungsrosen dargestellt. Entsprechend den Ergebnissen der beiden vorherigen Abschnitte sollte im Falle der statistischen Isotropie von Lotabweichungen diese Korrelation Null sein, aber im Falle einer oder mehrerer Symmetriearchsen sich ein merkbarer Effekt, verschieden von Null, zeigen. Längs- und Querkorrelationen wurden wiederum für 15° -Richtungsunterschied beim *zweiten* Test errechnet. Für isotrop verteilte Lotabweichungen hätten sich in allen Richtungen gleiche Korrelationen ergeben müssen.

Die Ergebnisse beider Tests sind exemplarisch in den *Abb. 3* und *Abb. 4* zusammengefaßt. Es wurden Kreuz-, Längs- und Querkorrelationen in jeweils zehn Klassen vom Lag 0, 0–20, 20–30, 30–50, 50–70, 70–100, 100–140, 140–200, 200–300, 300–400 in Kilometern berechnet. In den beigefügten zwölf Richtungsrosen wurden je nach Testrichtung die entsprechenden Korrelationen aufgetragen. Insbesondere zeigen die Kreuzkorrelationen für kleine Entfernungszonen signifikant drei ausgeprägte Richtungen, für größere Entfernungszonen zwei. Sie lassen sich unschwer den *Bruchrichtungen der Erdkruste in Westdeutschland mit rheinischem, erzgebirgischem und herznischem Streichen* zuordnen. Bei den Querkorrelationen zeigen sich keine sehr ausgeprägten Einflüsse, dagegen sind signifikante Richtungen in den Längskorrelationen sehr aufgefächert. Für kleine Entfernungszonen herrschen Streichrichtungen von 20° , 60° und 150° vor, für größere Entfernungszonen nähern sich die Effekte zweiter Ordnung denen der Kreuzkorrelationen an. Mithin beinhalten auch die Längs- und Querkorrelationen den Einfluß der Krustenbrüche. Allgemein gilt, daß die Ergebnisse für größere Entfernungszonen statistisch gesicherter sind, da ihr zugrundeliegender Stichprobenumfang relativ zu kleinen Entfernungszonen beträchtlich größer ist.

Die Herren M. JANSEN und W. NIEMEIER haben die für eine Analyse von Lotabweichungsdaten maßgebenden Rechenprogramme in Fortran II/IV geschrieben. Ihnen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

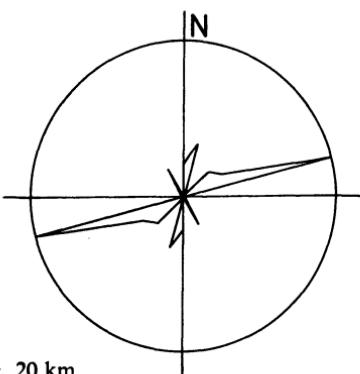
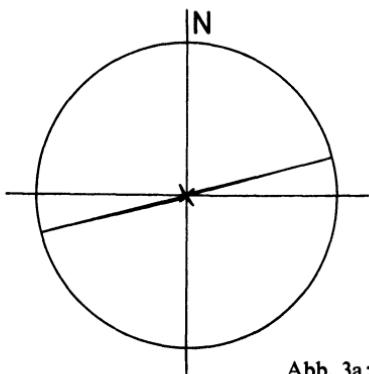


Abb. 3a: Lag 0 - 20 km

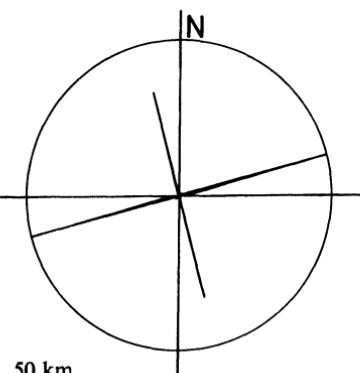
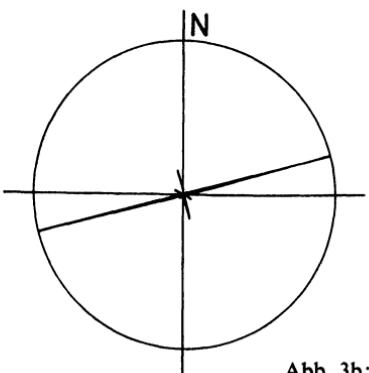


Abb. 3b: Lag 30 - 50 km

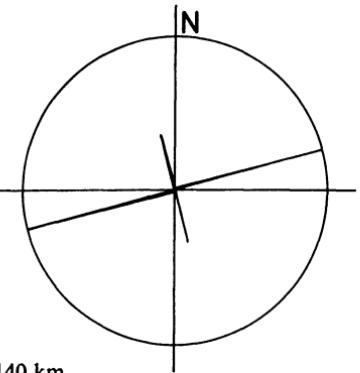
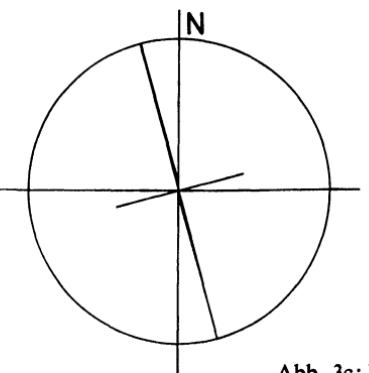
Abb. 3c: Lag 100 - 140 km
Kreuzkorrelation 1 - 2 Kreuzkorrelation 2 - 1

Abb. 3: 6 exemplarische Richtungsrosen zu Kreuzkorrelationen von Lotabweichungen Westdeutschland

6 directional facets of cross-correlations of vertical deflections in Western Germany

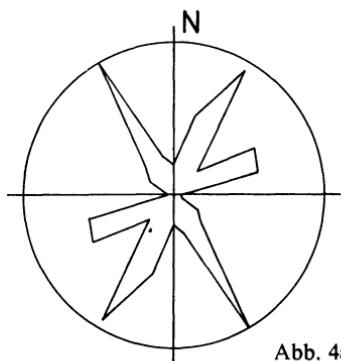


Abb. 4a: Lag 20 – 30 km

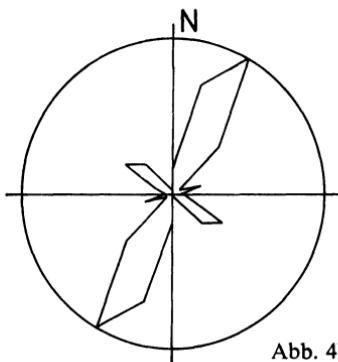
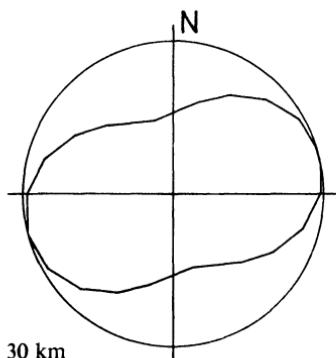


Abb. 4b: Lag 50 – 70 km

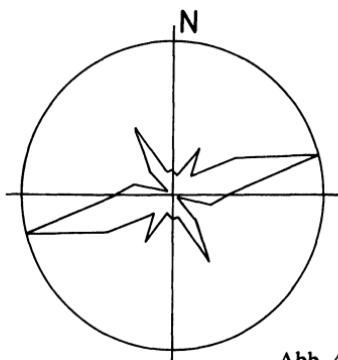
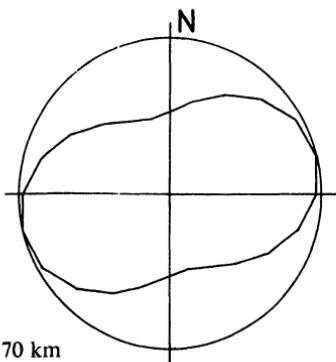
Abb. 4c: Lag 140 – 200 km
Längskorrelation Querkorrelation

Abb. 4: 6 exemplarische Richtungsrosen zu Längs- und Querkorrelation von Lotabweichungen Westdeutschlands

6 directional facets of longitudinal and lateral correlations of vertical deflections in Western Germany

Literatur

- ABRAMOWITZ, M., und I. A. STEGUN: Handbook of mathematical functions, New York 1965
- BATCHELOR, G. K.: The theory of axisymmetric turbulence, Proc. Roy. Soc. A 186, 480, 1946
- CHANDRASEKHAR, S.: The theory of axisymmetric turbulence, Proc. Roy. Soc. A 242, 557, 1950
- GRAFAREND, E.: Isotropietests von Lotabweichungsverteilungen in Westdeutschland I, Z. Geophys. 37, 1971
- KARMAN, T., und HOWARTH: On the statistical theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. A 164, 917, 1938
- MUNDT, W.: Statistische Analyse geophysikalischer Potentialfelder hinsichtlich Aufbau und Struktur der tieferen Erdkruste, Deutsche Akademie der Wissenschaften, Berlin 1969
- OBUCHOW, A. M.: Statistische Beschreibung stetiger Felder, AH CCCP 151, 3, 1954, deutsch in Goering, H.: Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz, Berlin 1958
- ROBERTSON, H. P.: The invariant theory of isotropic turbulence, Proc. Camb. Phil. Soc. 36, 209, 1940
- TAYLOR, G. I.: Statistical theory of turbulence, Proc. Roy. Soc. A 151, 421, 1935, A 164, 15, 1938

The Inverse Problem of Geomagnetic Induction

P. WEIDELT, Göttingen¹⁾

Eingegangen am 24. März 1972

Summary: The problem of revealing the electrical conductivity profile of a layered earth from geomagnetic induction data is solved using a modified version of the method of GEL'FAND and LEVITAN, originally devised for the solution of inverse Sturm-Liouville problems. The inversion procedure is applied to empirical data, which previously have been interpreted by a different method. — Since extensive use is made of the analytic properties of the response function in the complex frequency plane, these properties and related features of the response function are discussed at some length in an introductory section. Further it is shown that the inverse problem for a spherical earth can be transformed to the simpler problem for a flat earth and a uniform inducing field.

Zusammenfassung: Für die Umkehraufgabe der erdmagnetischen Tiefensondierung für horizontal geschichtete Leiter wird eine exakte Lösung angegeben. Es handelt sich dabei um eine modifizierte Fassung der Methode von GEL'FAND und LEVITAN zur Umkehrung Sturm-Liouvillescher Eigenwertaufgaben. Als Anwendungsbeispiel wird das Umkehrverfahren auf experimentelle Daten angewendet, die zuvor bereits nach einer anderen Methode interpretiert worden waren. — Das Umkehrverfahren macht wesentlich von den analytischen Eigenschaften der Beobachtungsdaten in der komplexen Frequenzebene Gebrauch. Deshalb werden in einem einleitenden Abschnitt ausführlich diese Eigenschaften und ihre Konsequenzen behandelt. Ferner wird gezeigt, daß sich die Umkehraufgabe für eine kugelförmige Erde auf den einfacheren Fall einer ebenen Erde mit einem homogenen induzierenden Feld reduzieren läßt.

1. Introduction

Geomagnetic induction data are generally interpreted by assuming an electrical conductivity model with several free parameters, which in turn are adjusted to the data either by curve fitting or by analytic methods. However, if the conductivity changes with depth only, direct inversion without recourse to model calculations becomes possible. This inverse problem has been solved first by SIEBERT [1964], and in a slightly modified version by ČETAEV [1966], both using the WBK-approximation. The shortcoming of their method is that the whole conductivity profile is recovered only from the asymptotic behaviour of the response function for high frequencies. Therefore highly precise data are required in this frequency range, whereas the valuable information of the low frequency part is not exhausted. However, by giving an algo-

¹⁾ Dr. PETER WEIDELT, Institut für Geophysik der Universität Göttingen, 34 Göttingen, Herzberger Landstraße 180.

rithm it was implicitly shown that the conductivity distribution can be inferred uniquely from the response function. The question of uniqueness has been treated explicitly by TICHONOV [1965], and more recently by BAILEY [1970], who formulated an integral constraint in the frequency domain, from which the conductivity profile can be deduced uniquely.

The present paper is concerned with an alternative solution of the inverse problem, which is essentially a modified version of the method of GEL'FAND & LEVITAN [1951a, b] for the solution of the inverse Sturm-Liouville problem. The Gel'fand-Levitan procedure has found much attention in connection with the inverse problem in quantum-mechanical scattering theory (cf. the review article of FADDEEV [1963]), and has quite recently been applied by JOHNSON & SMYLIE [1971] to reveal the conductivity distribution in the lower mantle, assuming a knowledge of the time constants, which govern the diffusion of magnetic fields from the core-mantle boundary upwards. Although JOHNSON & SMYLIE and the present author refer to the same sources, their approaches differ significantly both in the information assumed and in the method.

At a first glance a direct inversion procedure appears to be very attractive, since it is less biased by preconceived models than parameter adjustment techniques. In practice, however, it loses much of its appeal by the fact that the inverse problem of geomagnetic induction belongs to the large class of improperly posed problems [STRACHOV 1969, ANDERSEN 1970], where small changes in the data can cause large changes in the results. Due to the inherent scatter of the data a result obtained by direct inversion represents just one element of the set of feasible solutions, and cannot deserve more attention than any other feasible solution obtained by different means. Often approximate methods are fully adequate to the quality of the data. A quite simple but powerful approximate solution of this kind has been proposed by SCHMUCKER [1970, p. 69].

Despite the proviso mentioned above, a treatment of the inverse problem of geomagnetic induction appears to be justified by the fact that it is one of the rare geophysical inverse problems, which allows an exact solution. Moreover, in the course of this study some general properties of the response function can be derived, which are of interest for any inversion procedure. Since these results are not well known (although the underlying theory is essentially the theory of ordinary linear second order differential equations), Secs. 2 and 3 contain a detailed investigation of these properties. The inversion procedure itself is described in Secs. 4 and 5, and is illustrated by examples in Secs. 6 and 7.

2. Properties of the response function

For simplicity, only a flat earth and a uniform inducing magnetic field are considered here. Effects of a non-uniform magnetic field and the curvature of the earth are afterwards taken into account by simple transformations (cf. Sec. 3). As a basic limitation the (isotropic) electrical conductivity σ is assumed to vary with depth z only

(z positive downwards). Neglecting the displacement current, assuming vacuum permeability and a harmonic time factor $e^{+i\omega t}$ throughout, the complex amplitudes $E(z, \omega)$ and $H(z, \omega)$ of the horizontal electric and magnetic field (in y and x direction, respectively) are interconnected by

$$H'(z, \omega) = \sigma(z) E(z, \omega), \quad (2.1)$$

$$E'(z, \omega) = i\omega\mu_0 H(z, \omega), \quad (2.2)$$

SI-units being used. The prime always denotes differentiation with respect to the (first) argument. Elimination of H leads to

$$E''(z, \omega) = i\omega\mu_0\sigma(z) E(z, \omega). \quad (2.3)$$

The response function $c(\omega)$ is defined as

$$c(\omega) = -\frac{E(0, \omega)}{E'(0, \omega)} = -\frac{E(0, \omega)}{i\omega\mu_0 H(0, \omega)}. \quad (2.4)$$

Its relation to the apparent resistivity ϱ_a of magnetotellurics [CAGNIARD 1953] is

$$\varrho_a(\omega) = \omega\mu_0 |c(\omega)|^2. \quad (2.5)$$

Let z_m be the greatest depth to which the electromagnetic field can penetrate, i. e.

$$z_m = \begin{cases} \infty, & \text{if there is no perfect conductor} \\ \text{else the depth of the perfect conductor} & \end{cases}. \quad (2.6)$$

Then the problem to be solved may be stated as follows:

Given $c(\omega)$ in $0 < \omega < \infty$, wanted $\sigma(z)$ in $0 \leq z < z_m$.

In principle the necessary information can be reduced, since $c(\omega)$ turns out to be an analytic function, which is completely specified by its values in an arbitrary small interval.

Some properties of the response function $c(\omega)$ are now listed for later reference.

a) Analytic properties in the complex frequency plane

The response function $c(\omega)$ is zero-free and analytic in the whole ω -plane except on the positive imaginary axis. Here it has either an infinite series of interlacing simple poles and zeros, or a finite number (which may be null) of poles and zeros and two

branch points (one at $\omega = +i\infty$), according whether the integral

$$\lim_{z \rightarrow z_m} \int_0^z \sqrt{\sigma(t)} dt \quad (2.7)$$

converges or not. The same applies to the normalized electric field $E(z, \omega)/E(0, \omega)$. A possible perfect conductor at $z = z_m$ is not to be included in (2.7).

The proofs follow from general theorems on second order linear differential equations (e.g. TITCHMARSH 1962) and are only indicated here. Let $w_1(z, \omega)$ and $w_2(z, \omega)$ be two solutions of (2.3) with the initial conditions

$$w_1(0, \omega) = 1, \quad w'_1(0, \omega) = 0, \quad w_2(0, \omega) = 0, \quad w'_2(0, \omega) = 1. \quad (2.8)$$

Since their Wronskian

$$w_1(z)w'_2(z) - w_2(z)w'_1(z) = 1 \quad (2.9)$$

does not vanish, the solutions are linearly independent for all z , and the actual solution E is a linear combination of them:

$$E(z, \omega)/E(0, \omega) = w_1(z, \omega) - w_2(z, \omega)/c(\omega). \quad (2.10)$$

Away from the positive imaginary ω -axis $E(z_m, \omega)$ is a constant, which differs from zero only, if $\sigma(z)$ decreases for $z \rightarrow \infty$ faster than z^{-2} . Since in this case $w_1(z, \omega)$ tends to infinity, Eq. (2.10) yields for any conductivity profile

$$c(\omega) = \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{w_2(z, \omega)}{w_1(z, \omega)}. \quad (2.11)$$

The nature of the singularities of $c(\omega)$ can be investigated as follows. The solutions w_1 and w_2 are entire functions of ω , i.e. they are free of singularities in the finite ω -plane (e.g. [TITCHMARSH 1962], p. 6). Multiply the differential equation (2.3) for $E = w_m$, $m = 1, 2$, by the complex-conjugate solution w^*_m , integrate over z , and obtain after integration by parts (on using (2.8))

$$w_m^*(z)w'_m(z) = \int_0^z \{ |w'_m(t)|^2 + i\omega\mu_0\sigma(t)|w_m(t)|^2 \} dt, \quad m = 1, 2. \quad (2.12)$$

Hence, all zeros of w_1 and w_2 lie on the positive imaginary ω -axis, where they constitute the poles and zeros of the meromorphic function

$$c(z, \omega) = w_2(z, \omega)/w_1(z, \omega), \quad (2.13)$$

which is the response function for the case that the conductivity at depths greater than z is replaced by a perfect conductor at depth z . On the positive imaginary axis put $\omega = i\lambda$, $\lambda > 0$. Denote the n -th zero of $w_m(z, i\lambda)$ by λ_{mn} and $\partial w_m / \partial \lambda$ by \dot{w}_m . Then multiply on one hand (2.3) for $E = w_m$ by \dot{w}_m , differentiate on the other hand (2.3) with respect to λ and multiply by w_m , integrate the difference over z , and obtain after integration by parts (on using (2.8) and the fact that $w_m(z, i\lambda_{mn})$ is real)

$$\dot{w}_m(z, i\lambda_{mn}) \cdot w'_m(z, i\lambda_{mn}) = \int_0^z \mu_0 \sigma(t) w_m^2(t, i\lambda_{mn}) dt > 0,$$

or in virtue of (2.9)

$$\dot{w}_1(z, i\lambda_{1n})/w_2(z, i\lambda_{1n}) < 0, \quad \dot{w}_2(z, i\lambda_{2n})/w_1(z, i\lambda_{2n}) > 0. \quad (2.14)$$

Since $\dot{w}_m(z, i\lambda_{mn})$ does not vanish, the zeros are simple. Further it is easily deduced from (2.14) that between two successive zeros of w_1 there must be an odd number of zeros of w_2 , and vice versa. Hence, the zeros interlace.

The distance $\Delta\lambda_n$ between two successive zeros of w_1 or w_2 is for large n asymptotically given by

$$\Delta\lambda_n = 2n [\pi/J(z)]^2, \quad J(z) = \int_0^z \sqrt{\mu_0 \sigma(t)} dt$$

(e.g. MORSE & FESHBACH 1953, p. 739). Therefore, the density of poles and zeros increases when z is enhanced, and the analytic behaviour of

$$c(\omega) = \lim_{z \rightarrow z_m} c(z, \omega) \quad (2.15)$$

depends on the behaviour of $J(z)$ for $z \rightarrow z_m$. If $J(z)$ remains finite, there is an infinite series of poles and zeros; if $J(z)$ diverges the isolated poles and zeros beyond a certain limit point merge into a branch cut from that point to $\omega = +i\infty$, whereas below the lower branch point a finite number of poles and zeros may subsist. – The analytic properties of $E(z, \omega)/E(0, \omega)$ follow from the properties of $c(\omega)$ and (2.10).

Poles and branch cut of $c(\omega)$ define the discrete and continuous spectrum of decay constants of freely decaying horizontally uniform current systems within the conductor. This is a consequence of (2.4) and the fact that the associated magnetic field, which cannot be observed outside the conductor [PRICE 1950], has to vanish at $z=0$.

Two examples will illustrate the preceding results. First consider the uniform half-space with $\sigma(z) = \sigma_0$. Let

$$k = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma_0}.$$

Then $w_1 = \cosh kz$, $w_2 = k^{-1} \sinh kz$, both being entire functions of ω , since their power series representations contain only even powers of k . The poles and zeros of $c(z, \omega) = k^{-1} \tanh kz$ lie at

$$\omega_{1n} = \frac{i}{\mu_0 \sigma_0} \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{z} \right)^2 \quad \text{and} \quad \omega_{2n} = \frac{i}{\mu_0 \sigma_0} \left(n \frac{\pi}{z} \right)^2, \quad n=1, 2, \dots$$

For $z \rightarrow \infty$ they cluster at $\omega = +i0$, which gets a branch point of $c = k^{-1}$. The other branch point is $\omega = i\infty$.

Next consider the conductivity profile

$$\sigma(z) = \sigma_0 \{1 - 2bz + (b^2 - a^2)z^2\}^{-2}, \quad a > 0 \quad (2.16)$$

treated by WEIDELT [1970, p. 30]. For $b \geq 0$ there is a monotone increase of σ , getting infinite at $z_m = 1/(a+b)$, and

$$c(\omega) = (b + \sqrt{a^2 + k^2})^{-1}, \quad k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0}. \quad (2.17)$$

The singularities of c are two branch points at $\omega = ia^2/\mu_0\sigma_0$ and $\omega = i\infty$. For $-a < b < 0$ the conductivity first decreases to a minimum, and then increases to infinity. Again c is given by (2.17), but now an additional pole at $\omega = i(a^2 - b^2)/\mu_0\sigma_0$ occurs. Finally let $b < -a$. Then there is a monotone decrease of conductivity, $J(z)$ remains finite for $z \rightarrow \infty$, and

$$c(\omega) = [b - \sqrt{a^2 + k^2} \coth \{\sqrt{1 + k^2/a^2} \operatorname{arccoth}(b/a)\}]^{-1}$$

has an infinite series of poles and zeros (but no branch points!).

In Sec. 5 and Appendix A a representation of the response function in terms of its singularities is required. If $J(z_m)$ is finite, $c(\omega)$ is a meromorphic function with simple poles at $\omega = i\lambda_{1n}$ and permits by the Mittag-Leffler theorem (e.g. MORSE & FESHBACH 1953, p. 383) an expansion in partial fractions:

$$c(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_{1n} + i\omega}, \quad a_n > 0, \quad \lambda_{1n} > 0. \quad (2.18)$$

This representation is justified due to

$$a_n = \lim_{z \rightarrow z_m} \lim_{\omega \rightarrow i\lambda_{1n}} (\lambda_{1n} + i\omega) c(z, \omega) = -w_2(z_m, i\lambda_{1n})/w_1(z_m, i\lambda_{1n}) > 0$$

(on using (2.14) and (2.15)), and $\lambda_{1n} = O(n^2)$, $a_n = O(1)$ for $n \rightarrow \infty$ (cf. MORSE & FESH-BACH 1953, p. 739). In the general case (2.18) must be replaced by

$$c(\omega) = \int_0^\infty \frac{a(\lambda) d\lambda}{\lambda + i\omega}, \quad a(\lambda) \geq 0, \quad (2.19)$$

where $a(\lambda)$ is a generalized function to include both the discrete and the continuous part of the spectrum. (Alternatively Stieltjes integral notation would be appropriate.) The non-decreasing function $\int a(\lambda) d\lambda$ is known as the *spectral function*.

b) Symmetry relation for $c(\omega)$

$c(\omega)$ satisfies

$$c(-\omega^*) = c^*(\omega), \quad (2.20)$$

i.e. it takes conjugate values at two points symmetric to the axis of imaginaries. Eq. (2.20) follows with (2.11) from the fact that $w_m^*(z, \omega)$ and $w_m(z, -\omega^*)$, $m = 1, 2$, satisfy the same differential equations and initial conditions. Hence, they are identical.

c) Limiting values for large and small frequencies

For large frequencies

$$c(\omega) = k^{-1} - \frac{1}{4} \sigma'(0)/\sigma(0) k^{-2} + O(k^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad k^2 = i\omega\mu_0\sigma(0), \quad (2.21)$$

which may be obtained by a WBK-approximation (e.g. KAMKE 1959, p. 138, SIEBERT 1964), and for small frequencies

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c(\omega) = z_m, \quad (2.22)$$

following from (2.11) with $w_1 = 1$, $w_2 = z$.

d) Dispersion relations

Because of the analytic properties of $c(\omega)$, its real and imaginary part are not independent functions of frequency. Let ω_0 be a point in the upper ω -plane and C be a closed contour consisting of the real axis and a large semicircle in the lower half-plane. Then

$$\frac{1}{\pi i} \int_C \frac{c(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega_0} = 0,$$

since the integrand is analytic in C . Due to (2.21) the large semicircle does not contribute, and the contour can be confined to the real axis. Here put $\omega' = x$ and let $\omega_0 = \omega + i\epsilon$ (ω real, $\epsilon > 0$) tend to the real axis. Then

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(x) dx}{x - \omega - i\epsilon} = c(\omega) + \frac{1}{\pi i} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(x) dx}{x - \omega}, \quad (2.23)$$

where

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x - \omega)^2 + \epsilon^2} = \delta(x - \omega)$$

has been used. \oint denotes the Cauchy principal value. Let for real frequencies

$$c(\omega) = g(\omega) - ih(\omega), \quad (2.24)$$

where in virtue of (2.20) $g(-\omega) = g(\omega)$, $h(-\omega) = -h(\omega)$. Hence, a separation of (2.23) in its real and imaginary part yields

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x) dx}{x - \omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x h(x) dx}{x^2 - \omega^2}, \quad (2.25a)$$

$$h(\omega) = -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x) dx}{x - \omega} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega g(x) dx}{x^2 - \omega^2}. \quad (2.25b)$$

Relations of this kind, occurring in many branches of physics, are well known as *dispersion relations*. They are a consequence of the causality requirement (e.g. LANDAU & LIFSHITZ 1966/67, v. 3 § 129, v. 5 § 125, v. 8 § 62 and 67; BAILEY 1970; WEIDELT 1970, p. 23). Relations corresponding to (2.25a, b) also exist for modulus and phase of $c(\omega)$. Since c is free of zeros in the lower half-plane, the function

$$\log \{ \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma(0)} c(\omega) \}$$

is analytic there and vanishes for $|\omega| \rightarrow \infty$ due to (2.21). Put

$$c(\omega) = |c(\omega)| e^{-i\psi(\omega)} \quad (2.26)$$

and assume $\omega > 0$. Then the relation corresponding to (2.25b) is

$$\psi(\omega) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \log \{ \sqrt{x \mu_0 \sigma(0)} |c(x)| \} \frac{dx}{x^2 - \omega^2},$$

or introducing the apparent resistivity $\varrho_a(\omega)$ by (2.5):

$$\psi(\omega) = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty \log \left\{ \varrho_a(x)/\varrho_0 \right\} \frac{dx}{x^2 - \omega^2}, \quad (2.27)$$

where $\varrho_0 = 1/\sigma(0)$. By (2.27) the phase of experimental data can be deduced from the apparent resistivity, which is often better accessible. There exists a simple approximate version of (2.27). Integration by parts yields

$$\begin{aligned} \psi(\omega) - \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d \log \varrho_a(x)}{dx} \cdot \log \left| \frac{\omega-x}{\omega+x} \right| dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d \log \varrho_a(x)}{d \log x} \cdot \log \left| \frac{\omega-x}{\omega+x} \right| \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

or since $x^{-1} \log |(\omega-x)/(\omega+x)|$ almost behaves like a δ -function

$$\psi(T) \approx \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + d \log \varrho_a(T) / d \log T \right\}, \quad (2.28)$$

where T is the period, and the result

$$\int_0^\infty \log \left| \frac{\omega-x}{\omega+x} \right| \frac{dx}{x} = 2 \int_0^1 \log \left(\frac{1-t}{1+t} \right) \frac{dt}{t} = -\frac{\pi^2}{2}$$

has been applied. Since double-logarithmic plots of $\varrho_a(T)$ are used, a first approximation of the phase can immediately be obtained from the slope of the sounding curve. Fig. 1 gives two examples.

It should be noted that relations corresponding to (2.25a, b) exist for all realizable linear systems, whereas relations between modulus and phase can be given only for the restricted class of transfer functions, which are free of zeros in the lower frequency plane (minimal phase systems).

e) Inequalities

Let $\omega > 0$ and define an operator D by

$$Df = \omega df/d\omega = df/d \log \omega = -df/d \log T. \quad (2.29)$$

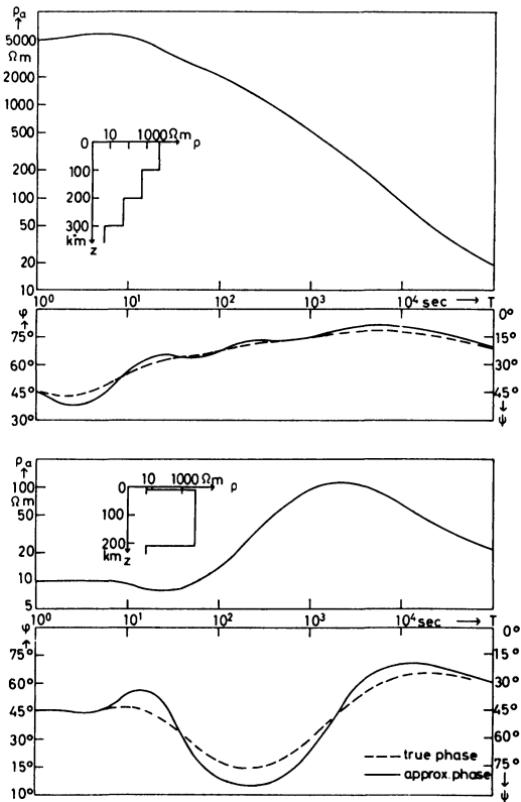


Fig. 1: Two examples for the determination of the phase from the ρ_a -curve using the approximation (2.28). The angle $\varphi = 90^\circ - \psi$ is the phase angle between electric and magnetic field.

Then (recalling the definition (2.24)) the following inequalities apply:

$$g \geq 0, \quad h \geq 0, \quad (2.30 \text{ a, b})$$

$$Dg \leq 0, \quad (2.31)$$

$$0 \leq -D|c| \leq |c|, \quad (2.32 \text{ a, b})$$

$$|Dc| \leq h, \quad |c + Dc| \leq g, \quad (2.33 \text{ a, b})$$

$$|D^2c| \leq h, \quad |c + 2Dc + D^2c| \leq g. \quad (2.34 \text{ a, b})$$

Alternatively these constraints can be expressed in terms of apparent resistivity ϱ_a (cf. (2.5)) and phase ψ (cf. (2.26)). For example (2.30a, b), (2.32a, b), (2.33a, b) then read:

$$0 \leq \psi \leq \pi/2, \quad (2.30 \text{ a, b})'$$

$$-\varrho_a \leq D\varrho_a \leq \varrho_a, \quad (2.32 \text{ a, b})'$$

$$\frac{1}{4}(1 - D\varrho_a/\varrho_a)^2 + (D\psi)^2 \leq \sin^2 \psi, \quad (2.33 \text{ a})'$$

$$\frac{1}{4}(1 + D\varrho_a/\varrho_a)^2 + (D\psi)^2 \leq \cos^2 \psi. \quad (2.33 \text{ b})'$$

Hence, (2.33) implies (2.32). (The quantity $-D\varrho_a/\varrho_a$ is the slope of the sounding curve $\varrho_a(T)$ in a double-logarithmic plot.)

The proofs of (2.30)–(2.34) follow almost immediately from the representation (2.19). Together with additional constraints they are given in Appendix A. If experimental data do not fit these inequalities, some of the underlying assumptions on conductivity and external field are definitely wrong. In this case we are able to compute a set of “corrected” data, which satisfy the inequalities thereby deviating least (in a given norm) from the original data. This leads to a problem in convex programming, which is easily solved by the cutting-plane method (e.g. COLLATZ & WETTERLING 1971, p. 124). An example is given in Fig. 2. The original data, response values for the first four Sq-harmonics, were obtained by SCHMUCKER [1971, private communication] as an average for South East Europe. – Derivatives were determined from the

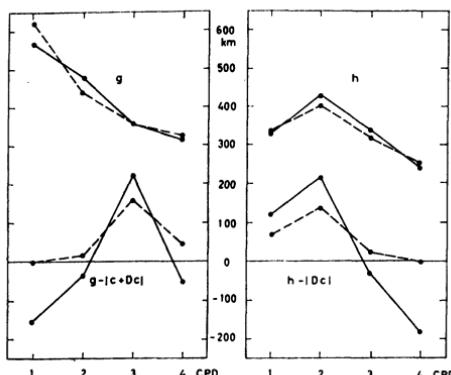


Fig. 2: An example for the optimal correction of experimental data, which do not satisfy the constraints (2.33a, b) everywhere. Input data and corrected data are connected by full and dashed lines, respectively. CPD means “cycles per day”.

slope of a parabola through three successive points, and the least squares norm for the relative deviations has been used. Any interpretation of the original data g and h can give no better fit than that indicated by the broken lines. The application of the above constraints, which were obtained for a flat earth and a uniform external field, to problems with spherical symmetry is justified due to the results of Sec. 3.

f) Computation of the response function

When the conductivity is recovered by any inversion scheme, the response function $c(\omega)$ has to be computed for check with the input data. This can be done by (2.11), where w_1 and w_2 are obtained by numerical integration of (2.3) with the initial values from (2.8). The integration has to proceed downward until the ratio w_2/w_1 tends to a limit. For real frequencies the moduli of w_1 and w_2 steadily increase with depth, since

$$\frac{d}{dz} |w_m(z, \omega)|^2 = 2 \operatorname{Re} \{ w_m^*(z, \omega) w'_m(z, \omega) \}, \quad m=1,2$$

is positive in virtue of (2.12). Let $f=w_2/w_1$. Then $f'=w_1^{-2}$, using (2.9). Hence, (2.11) can be replaced by

$$c(\omega) = \int_0^{z_m} \frac{dz}{w_1^2(z, \omega)}. \quad (2.35)$$

Thus only w_1 is required. An alternative method has been proposed by ECKARDT [1968], who reduced (2.3) to a Riccati equation, which was solved by upward integration with an arbitrary initial value at a sufficiently deep starting point. The fastest method, however, is the approximation of the conductivity profile by a set of homogeneous layers, for which $c(\omega)$ can be computed by well-known recurrence formulae.

g) Physical meaning of the real part of $c(\omega)$

The real part $g(\omega)$ of the response function admits a simple physical interpretation. Let

$$j(z, \omega) = \sigma(z) E(z, \omega) \quad (2.36)$$

be the density of the induced currents. Then

$$\int_0^{z_m} j(z, \omega) dz = H(0, \omega), \quad \int_0^{z_m} z j(z, \omega) dz = -\frac{1}{i\omega\mu_0} E(0, \omega),$$

which is easily verified by partial integration on using (2.36), (2.1), and (2.2). Hence, taking the phase of $H(0, \omega)$ as reference phase and applying (2.4),

$$g(\omega) = \int_0^{z_m} z \operatorname{Re} \{ j(z, \omega) \} dz / \int_0^{z_m} \operatorname{Re} \{ j(z, \omega) \} dz.$$

Thus, in a mechanical analogy, the positive length $g(\omega)$ can be interpreted as the depth of the "centre of gravity" of the in-phase induced current system. In accordance with well established ideas regarding the induction process, $g'(\omega) < 0$ (Eq. 2.31) shows that the mean depth of the current system increases if the frequency is diminished. Limiting values are $g(\infty) = 0$ and $g(0) = z_m$ (cf. (2.21) and (2.22)). The present interpretation of $g(\omega)$ is basic for the inversion procedure of SCHMUCKER [1970, p. 69].

3. Arbitrary external field and spherical earth

So far only a uniform inducing field and a flat earth have been considered. Retaining the assumption that the conductivity shall vary with depth only, the electric field vector \mathbf{E} remains a tangential solenoidal vector for any solenoidal inducing field and for both a flat and a spherical earth [LAHIRI & PRICE 1939, PRICE 1950, YUKUTAKE 1967, ECKARDT 1968]. \mathbf{E} satisfies

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (3.1)$$

where \mathbf{r} is the vector of position. Its representation as a superposition of the particular solutions of (3.1) is

a) for a flat earth:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} a(\boldsymbol{\kappa}, \omega) w(z, \boldsymbol{\kappa}, \omega) \hat{\mathbf{z}} \times \operatorname{grad} \{ e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} \} d\boldsymbol{\kappa}_x d\boldsymbol{\kappa}_y d\omega, \quad (3.2 \text{ a})$$

b) for a spherical earth:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_n^m(\omega) w_n(r, \omega) \hat{\mathbf{r}} \times \operatorname{grad} \{ P_n^m(\cos \theta) e^{i(m\phi + \omega t)} \}. \quad (3.2 \text{ b})$$

Here $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_x \hat{\mathbf{x}} + \kappa_y \hat{\mathbf{y}}$ is the horizontal wave vector, $\kappa = \sqrt{\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}$ the wave number, θ the colatitude, ϕ the longitude, P_n^m the associated Legendre function, and $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{r}}$ unit vectors in the direction of increasing x, y, z, r . The functions $a(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ and $a_n^m(\omega)$ represent the spectral density of the inducing field in the space and time domain. The response of the conductor to the corresponding harmonics is described by $w(z, \omega, \boldsymbol{\kappa})$ and $w_n(r, \omega)$, which satisfy

$$w''(z, \omega, \boldsymbol{\kappa}) = \{ \kappa^2 + i\omega\mu_0\sigma(z) \} w(z, \omega, \boldsymbol{\kappa}) \quad (3.3 \text{ a})$$

and

$$w_n''(r, \omega) = \left\{ \frac{n(n+1)}{r^2} + i\omega\mu_0\sigma(r) \right\} w_n(r, \omega). \quad (3.3 \text{ b})$$

The response functions

$$c(\omega) = -\frac{w(0, \omega, \kappa)}{w'(0, \omega, \kappa)} \quad \text{and} \quad c(\omega) = +\frac{w_n(R, \omega)}{w'_n(R, \omega)} \quad (3.4a, b)$$

(R being the radius of the earth) can be obtained after harmonic analysis – both in space and time – of the electromagnetic field at the surface of the earth on three different ways:

1. from the ratio of orthogonal tangential electric and magnetic field components,
2. from the ratio of normal and tangential magnetic field components,
3. from the ratio of internal and external parts of the magnetic field.

Moreover, there is the possibility to determine the response function from the ratio of the vertical gradient of a horizontal magnetic field component just beneath the surface to the component at the surface [MEYER 1966].

The inverse problem is reduced to the inverse problem for a flat earth and a uniform external field by the transformations

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{z} = \kappa^{-1} \tanh \kappa z \\ \tilde{w}(\tilde{z}, \omega) = w(z, \omega) / \cosh \kappa z \\ \tilde{\sigma}(\tilde{z}) = \sigma(z) \cdot \cosh^4(\kappa z) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{z} = R \frac{\varrho^{-n} - \varrho^{n+1}}{(2n+1)f(\varrho)}, \\ \tilde{w}(\tilde{z}, \omega) = w_n(r, \omega) / f(\varrho), \\ \tilde{\sigma}(\tilde{z}) = \sigma(r) \cdot f^4(\varrho), \end{array} \right. \quad (3.5a, b)$$

where $\varrho = r/R$ and $f(\varrho) = \{(n+1)\varrho^{-n} + n\varrho^{n+1}\}/(2n+1)$. They transform (3.2a, b) into

$$\tilde{w}''(\tilde{z}, \omega) = i\omega\mu_0\tilde{\sigma}(\tilde{z})\tilde{w}(\tilde{z}, \omega),$$

which is (2.3) for a flat earth and a uniform external field, and do not affect the response functions, i.e.

$$-\tilde{w}(0, \omega)/\tilde{w}'(0, \omega) = -w(0, \omega)/w'(0, \omega) = w_n(R, \omega)/w'_n(R, \omega).$$

Hence, any $c(\omega)$ produced by an external field with wave number κ or spherical harmonic of degree n (where κ and n are assumed to be independent of ω) can first be interpreted by a uniform field and a flat earth, and the resulting profile $\tilde{\sigma}(\tilde{z})$ is then transformed into the true distribution by

$$\sigma(z) = \cosh^{-4} \kappa z \cdot \tilde{\sigma}(\kappa^{-1} \tanh \kappa z), \quad (3.6a)$$

$$\sigma(r) = f^{-4}(\varrho) \cdot \tilde{\sigma}\left(R \frac{\varrho^{-n} - \varrho^{n+1}}{(2n+1)f(\varrho)}\right). \quad (3.6b)$$

The physical basis of the preceding transformations is the fact that damping by a perfect conductor and geometrical attenuation are equivalent, enter into the response function in the same way, and cannot be separated without additional information. Consider for illustration a perfect conductor at $z=z_m$ and an inducing field with wave number κ . Then $c(\omega)=\kappa^{-1} \tanh \kappa z_m = c_0 = \text{const.}$, for the solutions w_1 and w_2 of (3.3a) are $\cosh \kappa z$ and $\kappa^{-1} \sinh \kappa z$. Hence, given a response function $c(\omega)=c_0$, it can be interpreted by a perfect conductor at $z_m=\kappa^{-1} \tanh^{-1} \kappa c_0$ with $0 \leq \kappa \leq 1/c_0$. In the limit $\kappa=0$, $c(\omega)$ is explained by a uniform external field and a perfect conductor at $z_m=c_0$, whereas in the limit $\kappa=1/c_0$ there is only geometrical attenuation and no perfect conductor.

Consequently, the profile $\tilde{\sigma}(\tilde{z})$ for a uniform field always includes a perfect conductor, which is lowered, when passing by (3.6a) to the profile $\sigma(z)$, thereby replacing electromagnetic damping fully or in part by geometrical damping. Interpretation of a response function $c(\omega)$ by external fields with wave number κ or degree n is subject to the restriction

$$c(0) \leq \kappa^{-1} \quad \text{or} \quad c(0) \leq R/(n+1), \quad (3.7)$$

a consequence of (3.4a, b) and the fact that the relevant solutions of (3.3a, b) in the limit $\omega \rightarrow 0$ are given by $e^{-\kappa z}$ and r^{n+1} (provided that there is no perfect conductor).—The transformations (3.5) are special cases of a more general class, which is given in Appendix B.

4. Solution of the inverse problem

In this section it is shown, how the conductivity profile $\sigma(z)$ can be deduced from the response function $c(\omega)$. The adopted procedure is essentially based on the method of GEL'FAND & LEVITAN [1951a, b] for the solution of the inverse Sturm-Liouville problem. The special needs of the inverse geomagnetic induction problem, however, introduce substantial modifications of the original approach.

Let $\sigma(z)$ have discontinuities only in its derivatives. Then by the substitutions

$$\omega \rightarrow k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma(0)}, \quad (4.1)$$

$$z \rightarrow x = \int_0^z \sqrt{\sigma(t)/\sigma(0)} dt, \quad (4.2)$$

$$E(z, \omega) \rightarrow f(x, k) = \sqrt[4]{\sigma(z)/\sigma(0)} E(z, \omega)/E(0, \omega), \quad (4.3)$$

$$\sigma(z) \rightarrow u(x) = \sqrt[4]{\sigma(z)/\sigma(0)} \quad (4.4)$$

the differential equation (2.3) is transformed into

$$f''(x, k) = \{k^2 + V(x)\} f(x, k), \quad (4.5)$$

where

$$V(x) = u''(x)/u(x) \quad (4.6)$$

The new variable k has the dimension of a reciprocal length. Choose that branch of (4.1), which maps the upper sheet of the ω -plane into the right half of the k -plane. Then the positive and negative ω -axis is mapped into the bisectors of the first and fourth quadrant, respectively. Since $c(\omega)$ and $E(z, \omega)/E(0, \omega)$ are analytic outside the positive imaginary ω -axis (cf. Sec. 2), the quantities

$$c(k) \equiv c(\omega) \quad (4.7)$$

and $f(x, k)$ are analytic to the right of the imaginary k -axis. With respect to (4.1) the symmetry relation (2.20) now reads

$$c(k^*) = c^*(k), \quad (4.8)$$

i.e. symmetry about the real k -axis.

Let $f_+(x, k)$ and $f_-(x, k)$ be two solutions of (4.5) with initial conditions

$$f_{\pm}(0, k) = 1, \quad f'_{\pm}(0, k) = u'(0) \pm k. \quad (4.9)$$

These functions can be represented by

$$f_{\pm}(x, k) = e^{\pm kx} + \int_{-x}^{+x} A(x, t) e^{\pm kt} dt, \quad (4.10)$$

where A is real and independent of k . This representation is justified as follows: Insert f_+ , say, into (4.5), integrate the term

$$k^2 \int_{-x}^{+x} A(x, t) e^{kt} dt = \int_{-x}^{+x} A(x, t) \frac{d^2}{dt^2} e^{kt} dt,$$

occurring at the right-hand side of (4.5), two times by parts, and use the identity

$$\left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{t=\pm x} \pm \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{t=\pm x} = \frac{d}{dx} A(x, \pm x).$$

The final result is

$$e^{kx} \left\{ 2 \frac{d}{dx} A(x, x) - V(x) \right\} + e^{-kx} \frac{d}{dx} A(x, -x) + \\ + \int_{-x}^{+x} \left\{ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - V(x) A \right\} e^{kt} dt = 0. \quad (4.11)$$

Since $A(x, t)$ shall be independent of k , each of the three terms in (4.11) vanishes separately. The second initial condition of (4.9) yields

$$A(0, 0) = \frac{1}{2} u'(0).$$

Hence, A is subject to the conditions

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = V(x) A, \quad (4.12)$$

$$A(x, x) = \frac{1}{2} \left\{ u'(0) + \int_0^x V(t) dt \right\}, \quad (4.13)$$

$$A(x, -x) = \frac{1}{2} u'(0), \quad (4.14)$$

which determine A uniquely, if $u(x)$ is given, since the solution of the hyperbolic equation (4.12), whose characteristics are the lines $x \pm t = \text{const.}$, is completely specified by its values on a pair of intersecting characteristics [here $x - t = 0$ (4.13) and $x + t = 0$ (4.14)]. If f_- instead of f_+ is used, the same conditions are obtained. Hence, the kernels for f_+ and f_- are identical. $A(x, t)$ vanishes for $|t| > x$; its domain of definition is illustrated in Fig. 3.

The kernel A is the link between the data $c(k)$ and the unknown function $\sigma(z)$. The relation between A and σ is quite simple. First it is seen from (4.5), (4.6), (4.4), and (4.9) that in the limit $k \rightarrow 0$ the functions u and f_{\pm} satisfy identical differential equations and initial conditions. Hence,

$$u(x) = \lim_{k \rightarrow 0} f_{\pm}(x, k) = 1 + \int_{-x}^{+x} A(x, t) dt. \quad (4.15)$$

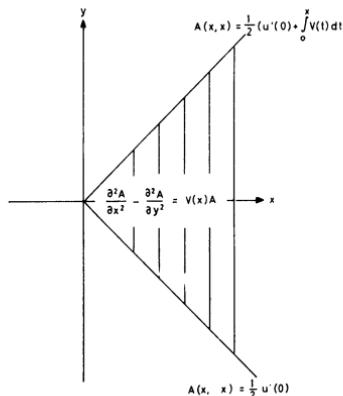


Fig. 3: Definition of the function $A(x, y)$.

Then in virtue of (4.2) and (4.4) the expression of $\sigma(z)$ in terms of $u(x)$ leads to the parameter representation

$$\sigma(z) = \sigma(0) u^4(x), \quad (4.16)$$

$$z = \int_0^x u^{-2}(x) dx. \quad (4.17)$$

A second solution of (4.6) is $g(x) = u(x) \cdot z(x)$ with $g(0) = 0$ and $g'(0) = 1$. Hence, the depth z is alternatively determined by

$$z = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_+(x, k) - f_-(x, k)}{2ku(x)} = \left\{ x + \int_{-x}^{+x} A(x, t) t dt \right\} / u(x). \quad (4.17a)$$

Eq. (4.17a) has the advantage that only $u(x)$ is needed instead of all values of u with arguments less than x , as in (4.17).

The relation between $A(x, t)$ and $c(k)$ is more complicated and leads to an integral equation. The representation of f by f_+ and f_- yields

$$kc(k)f(x, k) = f_-(x, k) - b(k)\{f_+(x, k) + f_-(x, k)\}, \quad (4.18)$$

where

$$b(k) = \frac{1}{2}\{1 - kc(k)\}, \quad (4.19)$$

and the initial conditions (4.9) and the result

$$f'(0, k) = E'(0, \omega)/E(0, \omega) + u'(0) = -1/c(k) + u'(0)$$

have been applied. Insertion of (4.10) into (4.18) leads to

$$\begin{aligned} kc(k)f(x, k) - e^{-kx} &= \int_{-x}^x A(x, t)e^{-kt} dt - b(k)(e^{kx} + e^{-kx}) - \\ &- b(k) \int_{-x}^x A(x, t)(e^{kt} + e^{-kt}) dt. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Now multiply (4.20) by $e^{ky}/(2\pi i)$, $|y| < x$, and integrate over k along the line $k = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. The result is abbreviated as

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4, \quad (4.21)$$

where I_1 to I_4 denote the integrals resulting from the four terms of (4.20). Their values are determined as follows.

I_1 : For $k \rightarrow \infty$ the asymptotic representation of f is

$$f(x, k) = \exp \left\{ -kx + \frac{1}{2k} \int_0^x V(t) dt + O(k^{-2}) \right\},$$

provided that $\sigma(z)$ is continuous [KAMKE 1959, p. 138]. Hence, the integrand behaves like $\exp \{-k(x-y)\}$, and because of $|y| < x$ the contour can be closed by a large semicircle in the right half-plane without affecting the value of the integral. In the interior the integrand is analytic. Hence,

$$I_1 = 0.$$

I_2 : The two-sided Laplace transform

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{-kt} dt, \quad G(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} g(k) e^{ky} dk \quad (4.22)$$

yields immediately

$$I_2 = A(x, y).$$

I₃: In the sequel the “frequency” function $b(k)$, which is computed from the data, is replaced by the “position” function

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} b(k) e^{kx} dk. \quad (4.23)$$

Eqs. (4.19) and (4.8) imply $b(k^*) = b^*(k)$. Hence, $B(x)$ is real. Moreover,

$$B(x) = 0 \text{ for } x < 0, \quad (4.24)$$

since in this case the contour can be closed by a large semicircle in the right half of the k -plane, and the integral is analytic in its interior. – From (4.19), (2.21), (4.4), and (4.2) follows

$$b(k) = \frac{1}{2} u'(0) k^{-1} + O(k^{-2}) \quad (4.25)$$

for $k \rightarrow \infty$. Hence,

$$B(+0) = \frac{1}{2} u'(0).$$

Consequently, B is in general discontinuous across $x=0$. The calculation of $B(x)$ turns out to be the crucial step in practical applications. Since experimental data are known only on the bisectors $k=|k| \exp(\pm i\pi/4)$ and a deformation of the contour in (4.23) in direction to the bisectors is not possible, Eq. (4.23) involves analytic continuation of the data in direction to the singularities on the imaginary k -axis and in the left half-plane, which is an unstable process. Practicable methods are discussed in Sec. 5. – The provisional result is

$$I_3 = -B(x+y),$$

since the term containing e^{-kx} would give $-B(-x+y)$, which vanishes in virtue of $|y| < x$ and (4.24).

I₄: The convolution theorem for the two-sided Laplace transform

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} g_1(k) g_2(k) e^{ky} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(t) G_2(y-t) dt$$

(using the notation of (4.22)) yields at once

$$I_4 = - \int_{-x}^{+x} A(x, t) \{B(y+t) + B(y-t)\} dt,$$

since $A(x, t) = 0$ for $|t| < x$.

Hence, (4.21) reads explicitly

$$A(x, y) = B(x+y) + \int_{-x}^{+x} A(x, t) \{B(y+t) + B(y-t)\} dt, \quad |y| < x, \quad (4.26)$$

which is a linear integral equation for $A(x, y)$. The variable x enters as a parameter only, the proper variables are y and t . Eq. (4.26) has to be solved for all x , e.g. by decomposition into a linear system on using Gauss' integration method. When A is found, the conductivity profile is obtained from (4.15)–(4.17a).

Since the solution of the inverse geomagnetic induction problem is known to be unique [TICHONOV 1965, BAILEY 1970], the uniqueness of a solution of (4.26) will not be proved here.

Finally it should be mentioned that an alternative integral equation could have been obtained by introducing in (4.18) instead of $b(k)$ the function

$$r(k) = \frac{1 - kc(k)}{1 + kc(k)} \text{ with } R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} r(k) e^{kx} dk, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.27)$$

leading to

$$A(x, y) = R(x+y) + \int_{-y}^x A(x, t) R(y+t) dt, \quad (4.28)$$

which is formally simpler than (4.26). However, the formulation in terms of $B(x)$ is preferred here, since the determination of $B(x)$ has computational advantages, as will become apparent in the next section. Moreover, numerical experiments have shown that, given exact values of $R(x)$ and $B(x)$, the results obtained from (4.26) were slightly better than those from (4.28).

So far no physical meaning can be attributed to the somewhat abstract functions A , B , and R . Only if the physical situation is changed a simple interpretation of B and R is possible. Consider a non-absorbing elastic medium with wave velocity

$$v(z) = v_0 \cdot \sqrt{\sigma(0)/\sigma(z)}$$

in $z \geq 0$, where v_0 is arbitrary, and assume that a unit δ -impulse is released at time $t=0$ at $z=+0$, propagating downwards. Then the reflected amplitude recorded at $z=0$ between t and $t+dt$ is $v_0 R(v_0 t) dt$ or $v_0 B(v_0 t) dt$, according whether the wave

velocity in $z < 0$ is v_0 or infinite. In the former case there is no reflection at $z=0$, whereas in the latter case the impulse is multiply reflected at the surface (reflection coefficient -1). This is illustrated by the discontinuity model $\sigma(z)=\sigma_0$, $0 \leq z < d$, $\sigma(z)=\sigma_1$, $z > d$ (which, however, is not tractable by the present inversion procedure, cf. [WEIDELT 1970], p. 66). Then

$$R(x) = r_0 \delta(x - 2d), \quad B(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-r_0)^n \delta(x - 2nd),$$

where

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{\sigma_0/\sigma_1}}{1 + \sqrt{\sigma_0/\sigma_1}}$$

is the reflection coefficient at $z=d$.

5. Computation of $B(x)$

When $B(x)$ is known the solution of the integral equation (4.26) presents almost no numerical difficulties. The really difficult step in the solution of the inverse problem is the computation of $B(x)$ from the data $b(k)$. Two practicable methods are described in this section; neither, however, turns out to be completely satisfactory.

a) The inversion of (4.23) yields

$$b(k) = \int_0^{\infty} B(x) e^{-kx} dx, \quad (5.1)$$

i.e. a Laplace integral equation, which can be solved using the values of $b(k)$ on the line $k=|k| e^{i\pi/4}$ (cf. [TITCHMARSH 1948], p. 316). Let

$$s = \sigma + i\tau$$

be a new complex variable, multiply (5.1) by $k^{-s}/\Gamma(1-s)$, and integrate along the line $k=|k| e^{i\pi/4}$. The resulting left-hand integral

$$M(s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty e^{i\pi/4}} b(k) k^{-s} dk \quad (5.2)$$

exists in $0 < \sigma < 1$, since the integrand is $O(k^{-s})$ for $k \rightarrow 0$ and $O(k^{-s-1})$ for $k \rightarrow \infty$, a consequence of (4.25). In the resulting right-hand integral the order of integration

can be changed. Hence, on using the result

$$\int_0^{\infty e^{i\pi/4}} k^{-s} e^{-kx} dk = x^{s-1} \Gamma(1-s)$$

and the Mellin transform

$$g(s) = \int_0^{\infty} G(x) x^{s-1} dx, \quad G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(s) x^{-s} ds,$$

the solution of (5.1) is

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} M(s) x^{-s} ds, \quad (5.3)$$

where $\sigma=1/2$ is taken, although any value in $0 < \sigma < 1$ is permitted. Deforming the contour in (5.2) to the positive real axis it is seen that $M(s^*)=M^*(s)$. Hence, $B(x)$ is real. Eq. (5.2) is suitable for $\tau < 0$, since it leads to a decrease $e^{-\pi|\tau|/4}$ of k^{-s} for $\tau \rightarrow -\infty$, whereas $M(\sigma + i\tau)$ for $\tau > 0$ is obtained either from $M(\sigma + i\tau) = M^*(\sigma - i\tau)$ or by rotating the line of integration through $-\pi/2$.

A comment on (5.2) and (5.3) is necessary. In (5.3) $M(s)$ is required for large imaginary argument τ , for which $1/\Gamma(1-s)$ in (5.2) is $O\{\exp(\pi|\tau|/2)\}$. This exponential increase is cancelled *in theory* by the integral in (5.2), which is $O\{\exp(-\pi|\tau|/2)\}$, as becomes evident, when the line of integration in (5.2) is rotated through $+\pi/4$ for $\tau < 0$ and $-3\pi/4$ for $\tau > 0$, using the fact that $b(k)$ is regular for $\operatorname{Re} k > 0$. *Experimental data*—in particular, if they are not very smooth—will not always lead to a $b(k)$, which is regular for $\operatorname{Re} k > 0$. Hence, in practical applications the possible exponential increase of $M(s)$ for $|\tau| \rightarrow \infty$, which prevents the convergence of (5.3), must be replaced by a suitable decrease. This method is not without bias, but it enables the interpretation of data, which do not correspond to any conductivity profile.

b) An alternative approach takes into account particular properties of the response function. Introduce into (2.19) the new variable

$$\mu = \sqrt{\mu_0 \sigma(0) \lambda}$$

and let $g(\mu) = \pi \mu a(\lambda)$. Then (2.19) reads

$$c(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(\mu) d\mu}{\mu^2 + k^2}, \quad g(\mu) \geq 0. \quad (5.4)$$

For a uniform half-space $g(\mu) \equiv 1$, for any other profile $g(\mu) \rightarrow 1$ for $\mu \rightarrow \infty$. The expression of $B(x)$ in terms of $g(\mu)$ is

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{1 - g(\mu)\} \cos \mu x \, d\mu, \quad (5.5)$$

which is easily verified by solving (5.5) for $g(\mu)$, inserting the result into (5.4), changing the order of integration, and integrating over μ . The resulting equation agrees with (5.1).

When $g(\mu)$ is known, the determination of $B(x)$ from (5.5) presents no difficulty. Hence, the actual problem in the inversion procedure is the solution of the integral equation (5.4). The decomposition of (5.4) into linear equations leads to a system, which is badly ill-conditioned. But much of the non-uniqueness of its solution is removed, when it is taken into account that the unknown function $g(\mu)$ must be real and non-negative. A linear system of equations with linear constraints can be solved by quadratic programming techniques, e. g. by the method of Wolfe [COLLATZ & WETTERLING 1971]. Quadratic programming has been proved useful already in the solution of the inverse problem of geoelectrical sounding [KUNETZ & ROCROI 1970], where in fact the same properties of the spectral function are used to advantage (although in a different context).

6. An analytical example

In this section the inversion procedure is summarized by a simple analytical example. The general operations are listed on the left-hand side of Table 1, the corresponding outcome is given on the right-hand side. J_1 and I_1 denote the ordinary and modified Bessel function of the first order, respectively. In applications the inversion ends up with the parameter representation for σ and z ; in this analytical example after elimination of the parameter x a closed expression for $\sigma(z)$ can be obtained. The dependence of the conductivity profile on the wave number κ of the inducing field is given in the last line. For $\kappa=0$ there is a perfect conductor at $z=1/a$, whereas for the largest wave number $\kappa=a$ (cf. Eq. (3.7)) the conductivity is uniform. – The function $g(\mu)$ (cf. Eqs. (5.4) and (5.5)) is

$$0 \text{ for } 0 \leq \mu \leq a \text{ and } \mu/\sqrt{\mu^2 - a^2} \text{ for } \mu > a.$$

7. Inversion of experimental data

The inversion procedure has been applied to a sounding curve obtained by WIESE [1965] at Ückermünde ($53^{\circ}45' N$, $14^{\circ}04' E$). The data cover the broad period range from 50 sec to 24 h. The disadvantage of the data is the fact that the station is situated in the region of the EW-striking North German conductivity anomaly leading to a

Table 1

$c(k)$	$= 1/\sqrt{a^2 + k^2}, \quad a \geq 0$
$b(k) = \frac{1}{2} \{1 - kc(k)\}$	$= \frac{1}{2} \{1 - k/\sqrt{a^2 + k^2}\}$
$M(s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty e^{i\pi/4}} b(k) k^{-s} dk$	$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^{1-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}$
$Re s = \frac{1}{2}; \quad Im s < 0; \quad M(s) = M^*(s^*) \quad \text{for} \quad Im s > 0$	
$B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} M(s) x^{-s} ds$	$= \frac{a}{2} J_1(ax)$
$x > 0; \quad B(x) = 0 \quad \text{for} \quad x < 0$	
Solve the integral equation (4.26)	
$A(x, y) = B(x+y) + \int_{-x}^{+x} A(x, t) \{B(y+t) + B(y-t)\} dt, \quad y < x:$	
$A(x, y)$	$= \frac{a}{2} \frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}} I_1(a\sqrt{x^2-y^2})$
$u(x) = 1 + \int_{-x}^{+x} A(x, t) dt$	$= \cosh ax$
$\sigma(z)/\sigma(0) = u^4(x)$	$= \cosh^4 ax$
$z = \left\{ \int_0^x u^{-2}(t) dt \right. \\ \left. x + \int_{-x}^{+x} A(x, t) t dt \right\} / u(x)$	$= a^{-1} \tanh ax$
$\sigma(z)/\sigma(0)$	$= (1 - a^2 z^2)^{-2}$
$\sigma_x(z) = \cosh^{-4} \kappa z \cdot \sigma(\kappa^{-1} \tanh \kappa z)$	$= \sigma(0) \{ \cosh^2 \kappa z - (a/\kappa)^2 \sinh^2 \kappa z \}^{-2}$
$0 \leq \kappa c(0) \leq 1$	$0 \leq \kappa/a \leq 1$

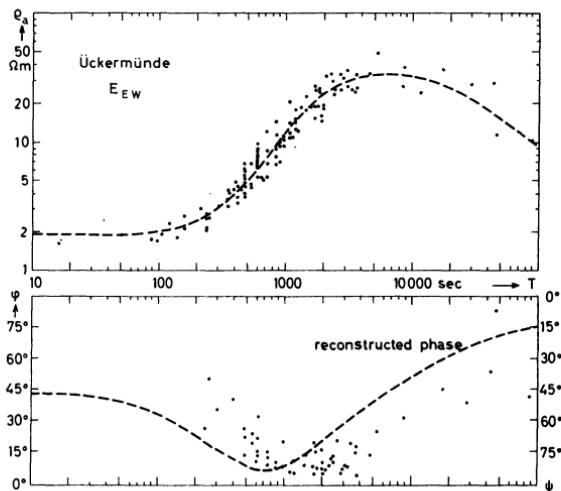


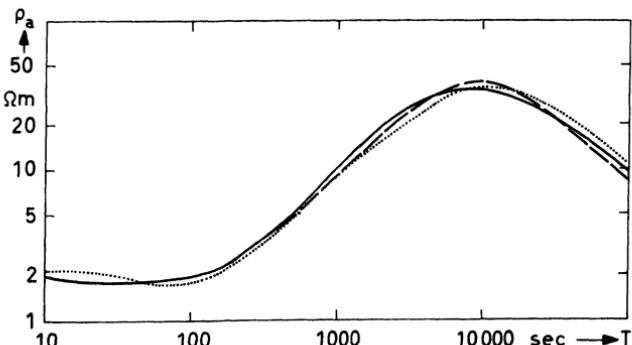
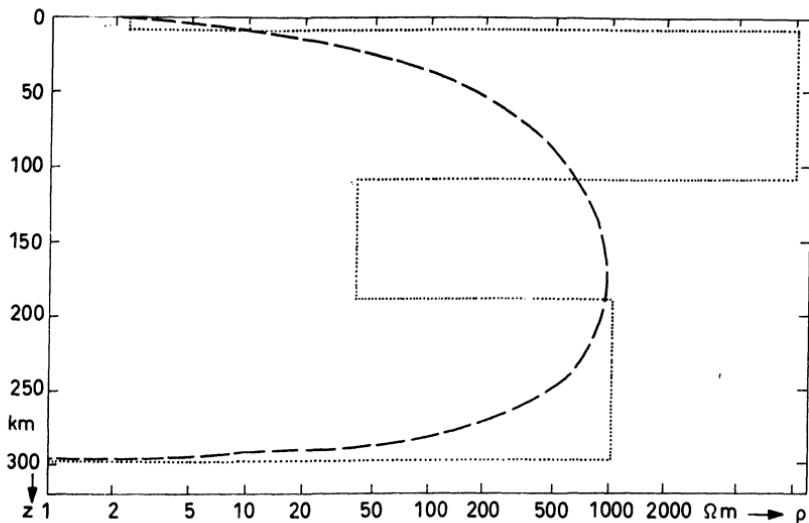
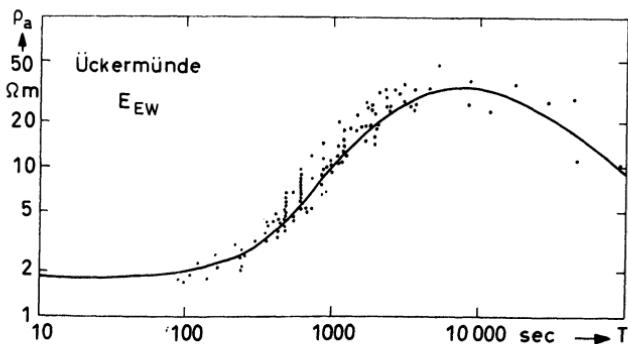
Fig. 4: Input data (top) and reconstruction of phase by (2.27) (bottom).

pronounced directivity in the apparent resistivity (cf. Figs. 12 and 13 in the paper of WIESE). Since the electric field component parallel to the strike is less influenced by the anomaly than the perpendicular component, the ρ_a -curves computed from E_{EW} and H_{NS} will give the most reliable results when interpreted as the sounding curve of a laterally uniform earth. The data are shown in Fig. 4 (top).

WIESE has also determined the phases, which are compared in Fig. 4 (bottom) with those computed from ρ_a by (2.27). The phase curves are in qualitative agreement, but there is a systematical phase shift. The reconstructed phase is used for the following inversion. The results of it are shown in Fig. 5 (centre), where they are compared with the results of FOURNIER [1968], who interpreted the same data by a five-layer model postulating a low-resistivity layer in the upper mantle as magnetotelluric evidence for the low-velocity layer of seismic waves. The ρ_a -curves corresponding to the two resistivity profiles are given at the bottom of Fig. 5.

The present example clearly displays the lack of uniqueness of the magnetotelluric method, when a poor conductor, which is electrodynamically little effective, is embedded between two good conductors. To fit the data the resistivity of the poor conductor has to be beyond a certain limit, but can be almost arbitrary otherwise. In the present case the sounding curve essentially fixes only three parameters of the resistivity profile: The horizontal part for short periods specifies the surface resistivity, the 45-degree

Fig. 5: Results of the inversion compared with those of FOURNIER.



— Input data

— — reconstruction

..... Fournier's interpretation

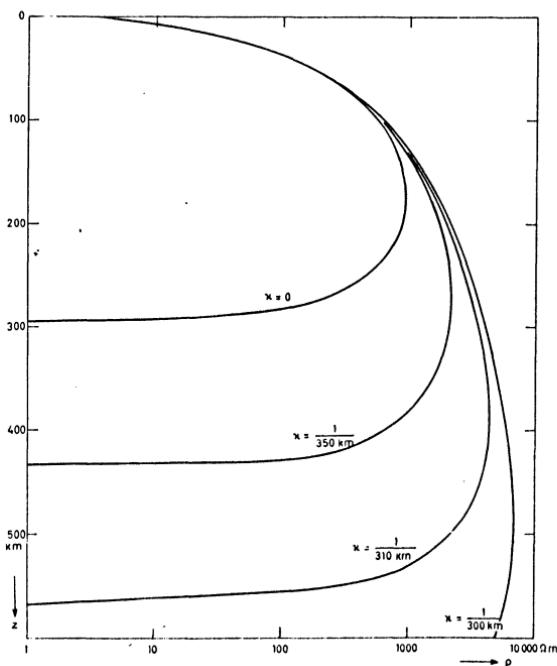


Fig. 6: The dependence of the resistivity profile on the wave number of the external field. (The depth of the perfect conductor for $\varkappa=0$ is slightly less than 300 km.)

ascent for intermediate periods determines the integrated conductivity τ of the surface layers. Here, approximately,

$$\log \varrho_a(T) = \log T - \log(2\pi\mu_0\tau^2). \quad (7.1 \text{ a})$$

The 45-degree descent for long periods stipulates the depth z_m of a perfect conductor:

$$\log \varrho_a(T) = -\log T + \log(2\pi\mu_0z_m^2), \quad T \rightarrow \infty. \quad (7.1 \text{ b})$$

The integrated conductivity as determined from the ϱ_a -curve is $\tau = 3.5 \cdot 10^3 \Omega^{-1}$, in agreement with FOURNIER's result and close to $\tau = 3.8 \cdot 10^3 \Omega^{-1}$ of the continuous model (integrated as far as the resistivity maximum).

Finally the dependence of the resistivity profile on the wave number \varkappa (cf. Sec. 3) is illustrated in Fig. 6. There is an appreciable influence only, if $1/\varkappa$ is slightly greater than $z_m \approx 300$ km, corresponding to a wave length of approximately 2000 km. The natural inducing fields probably have a much greater wave length [SCHMUCKER 1970, p. 92].

8. Conclusion

The procedure given in this paper is a practicable way to solve the inverse problem of geomagnetic induction. The results of the previous section, however, cast serious doubts on the usefulness of this method. It just results a smooth resistivity curve compatible with the data, which may be far from other feasible resistivity profiles postulated for physical reasons. Besides, the procedure is rather awkward and needs precise data over a broad frequency range. Hence, it appears that the best way to handle geomagnetic induction data is still to interpret them by a set of homogeneous layers and to introduce, if necessary, further preconceived model assumptions. The merit of the proposed method, however, is that it offers some insight into the nature of the inverse problem.

The real problem in the inversion of geomagnetic induction data is not the method of obtaining a feasible resistivity profile, but the method of finding a reliable estimate of the accuracy and resolving power of the results when the errors of the data are taken into account. A first step in this direction has been done recently by PARKER [1970].

Acknowledgement

I am grateful to Prof. Dr. M. SIEBERT for stimulating and supporting the research laid down in this paper, which is essentially based on a thesis prepared at the Institut für Geophysik at Göttingen.

Appendix A

Proofs of the inequalities given in Sec. 2

For simplicity $\int \sqrt{\sigma} dz$ is assumed to be finite. Then according to (2.18) $c(\omega)$ can be represented as

$$c(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n + i\omega}, \quad a_n > 0, \quad b_n \geq 0. \quad (\text{A } 1)$$

The following results, however, apply to the general case (2.19) as well.

Assume $\omega \geq 0$. Then separation of (A1) into real and imaginary parts leads immediately to (2.30a, b). Now let

$$s_k = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n^{3-k} \omega^k}{(b_n^2 + \omega^2)^2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{A } 2)$$

where all s_k are non-negative. Then with the operator D, defined by (2.29),

$$\begin{aligned} s_0 &= 2g + Dg, & s_1 &= h + Dh, \\ s_2 &= -Dg, & s_3 &= h - Dh. \end{aligned} \quad (\text{A } 3)$$

The inequality of Schwarz yields

$$s_1^2 \leq s_0 s_2, \quad s_2^2 \leq s_1 s_3, \quad (\text{A } 4)$$

from which (2.33) is obtained after inserting (A3) and rearranging the terms. Eq. (2.31) follows directly from (A3), and (2.32) is a consequence of (2.5) and

$$\begin{aligned} -|c| D|c| &= -\frac{1}{2} D|c^2| = s_0 s_2 + 2 s_2^2 + 2 s_3^2 + (s_0 s_2 - s_1^2) = \\ &= |c^2| - s_0^2 - 2 s_1^2 - s_1 s_3 - (s_1 s_3 - s_2^2). \end{aligned}$$

For inequalities involving derivatives up to the second order let

$$t_k = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n^{5-k} \omega^k}{(b_n^2 + \omega^2)^3}, \quad k = 0, \dots, 5.$$

Again all t_k are non-negative. It is easily verified that

$$\begin{aligned} t_0 &= 8 g + 6 Dg + D^2 g, & t_1 &= 3 h + 4 Dh + D^2 h, \\ t_2 &= -2 Dg - D^2 g, & t_3 &= h - D^2 h, \\ t_4 &= -2 Dg + D^2 g, & t_5 &= 3 h - 4 Dh + D^2 h. \end{aligned} \quad (\text{A } 5)$$

The following seven inequalities apply:

$$\begin{aligned} t_0 t_2 - t_1^2 &\geq 0, \\ t_0 t_4 - t_1 t_3 &\geq t_1 t_3 - t_2^2 \geq 0, \\ t_0 t_5 - t_1 t_4 &\geq t_1 t_4 - t_2 t_3 (\geq 0), \\ t_1 t_5 - t_2 t_4 &\geq t_2 t_4 - t_3^2 \geq 0, \\ t_3 t_5 - t_4^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A } 6)$$

Four of them are an immediate consequence of Schwarz's inequality, the remaining follow from the fact that $f(k) = t_{2p-k} t_k$ is a convex function (i.e. $f'' \geq 0$) implying $f(k+1) - f(k) \geq f(k) - f(k-1)$. Insertion of (A5) into (A6) leads to seven strong but involved inequalities. From these the simple, but rather weak constraints (2.34a, b) are derived by linear combination:

$$\begin{aligned} 4(h^2 - |D^2 c|^2) &= (t_1 t_3 - t_2^2) + 2(t_2 t_4 - t_3^2) + (t_3 t_5 - t_4^2) \geq 0, \\ 4(g^2 - |c + 2 Dc + D^2 c|^2) &= (t_0 t_2 - t_1^2) + 2(t_1 t_3 - t_2^2) + (t_2 t_4 - t_3^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A } 7)$$

In (A4), (A6), and (A7) (or (2.33) and (2.34)) equality holds over the full frequency range if (and only if) the sum (A1) consists of one term only. For real conductors the number of terms is always infinite, but in the degenerate case of the thin sheet approximation of PRICE [1949] one single term occurs for the model consisting of a thin sheet of integrated conductivity τ at $z=0$ and a perfect conductor at depth $z=z_m$ yielding

$$c(\omega) = \frac{z_m}{1 + i\omega\mu_0\tau z_m}.$$

Appendix B

Conductivity transformations

The transformations given in Sec. 3 are special cases of a more general class, which is stated in this appendix. Let $w(z)$ be a solution of (3.3a), i. e.

$$w''(z) = \{\kappa^2 + i\omega\mu_0\sigma(z)\} w(z), \quad (\text{B } 1)$$

and let $f(z)$ be a solution of

$$f''(z) = \kappa^2 f(z). \quad (\text{B } 2)$$

Then the two types of transformations

Type I	Type II
$\tilde{z} = \int_0^z f^{-2}(t) dt$	$\tilde{z} = \int_0^z f^2(t) \sigma(t) dt,$
$\tilde{w}(\tilde{z}) = w(z)/f(z)$	$\tilde{w}'(\tilde{z}) = w(z)/f(z),$
$\tilde{\sigma}(\tilde{z}) = f^4(z) \sigma(z)$	$\tilde{\sigma}(\tilde{z}) = f^{-4}(z) \sigma^{-1}(z)$

reduce (B1) to

$$\tilde{w}''(\tilde{z}) = i\omega\mu_0\tilde{\sigma}(\tilde{z})\tilde{w}(\tilde{z}), \quad (\text{B } 3)$$

where the new response function $\tilde{c}(\omega)$ is given by

$$\tilde{c}(\omega) = \begin{cases} \{f^2(0)/c(\omega) + f(0)f'(0)\}^{-1} & \text{for Type I} \\ \{f^2(0)/c(\omega) + f(0)f'(0)\}/(i\omega\mu_0) & \text{for Type II.} \end{cases}$$

The invariant of all transformations is the differential $\sqrt{\sigma} dz$.

The transformations of Sec. 3, leaving $c(\omega)$ unchanged, belong to Type I with $f(0)=1, f'(0)=0$, i. e. $f(z)=\cosh \alpha z$. If the constant α^2 in (B1) and (B2) is replaced by any function of z , the same formulae apply. Hence, after the appropriate change of the independent variable, the function $f(\varrho)$ used in (3.5b) for a spherical earth is the solution of $f''(\varrho)=\varrho^{-2}n(n+1)f(\varrho)$ with $f(1)=1, f'(1)=0$.

The transformations of Type II reverse the conductivity profile replacing well conducting regions by poor conductors, and vice versa. If $f'(0)=0$ and $f(0)=1/\sqrt{\sigma(0)}$, then $k\tilde{c}(k)=\{kc(k)\}^{-1}$, $k=\sqrt{i\omega\mu_0\sigma(0)}$, and the reflection coefficient $r(k)$, Eq. (4.27), only reverses sign. Moreover, the transformations of Type II form the basis for the well-known duality relations of magnetotelluric sounding curves (e. g. [SRIVASTAVA] 1967). Also the relations (2.30a, b), (2.32a, b), (2.33a, b), and (7.1a, b) are dual. One relation of each pair can be derived from the other by a transformation of Type II.

References

- ANDERSEN, R. S.: The character of non-uniqueness in the conductivity modelling problem for the earth. Pure and Appl. Geophys. 80, 238–259, 1970
- BAILEY, R. C.: Inversion of the geomagnetic induction problem. Proc. Roy. Soc. London 315, 185–194, 1970
- CAGNIARD, L.: Basic theory of the magnetotelluric method. Geophysics 18, 605–635, 1953
- ČETAEV, D. N.: On the solution of the inverse problem in the theory of magnetotelluric prospecting. Bull. (Izv.) Acad. Sci. USSR, Earth Physics, No. 9, 610–611, 1966
- COLLATZ, L., & W. WETTERLING: Optimierungsaufgaben (2nd ed.). Heidelberger Taschenbücher 15, Springer, Berlin [etc.] 1971
- ECKARDT, D. H.: Theory and interpretation of the electromagnetic impedance of the earth. J. Geophys. Res. 73, 5317–5326, 1968
- FADDEEV, L. D.: The inverse problem in the quantum theory of scattering. J. Math. Phys. 4, 72–104, 1963
- FOURNIER, H. G.: Proposition d'une méthode pour déterminer la structure du premier millier de kilomètres de la terre d'après la résistivité apparente. Acta Geophys. Polonica 16, 215–248, 1968
- GEL'FAND, I. M., & B. M. LEVITAN: On the determination of a differential equation from its spectral function [Russ.]. Dokl. Akad. Nauk SSSR 77, 557–560, 1951a
- GEL'FAND, I. M., & B. M. LEVITAN: On the determination of a differential equation from its spectral function [Russ.]. Izv. Akad. Nauk SSSR, mat. ser. 15, 309–360, 1951b. Engl. transl. in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1, 253–304, 1955
- JOHNSON, I. M., & D. E. SMYLYE: An inverse theory for the calculation of the electrical conductivity of the lower mantle. Geophys. J. 22, 41–53, 1971

- KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Vol. 1. Akad. Verlagsges., Leipzig 1959
- KUNETZ, G., & J. P. ROCROI: Traitement automatique des sondages électriques. Geophys. Prospect. 18, 157–198, 1970
- LAHIRI, B. N., & A. T. PRICE: Electromagnetic induction in non-uniform conductors, and the determination of the conductivity of the earth from terrestrial magnetic variations. Phil. Trans. Roy. Soc. London 237, 509–540, 1939
- LANDAU, L. D., & E. M. LIFSHITZ: Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademie Verlag, Berlin 1966/67
- MEYER, J.: Die magneto-tellurische Tiefensondierung und ihr erdmagnetisches Analogon. Gerlands Beitr. Geophys. 75, 289–300, 1966
- MORSE, P. M., & H. FESHBACH: Methods of theoretical physics, Vol. 1, McGraw-Hill, New York [etc.] 1953
- PARKER, R. L.: The inverse problem of electrical conductivity in the mantle. Geophys. J. 22, 121–138, 1970
- PRICE, A. T.: The induction of electric currents in non-uniform thin sheets and shells. Quart. J. Mech. Appl. Math. 2, 283–310, 1949
- PRICE, A. T.: Electromagnetic induction in a semi-infinite conductor with a plane boundary. Quart. J. Mech. Appl. Math. 3, 385–410, 1950
- SCHMUCKER, U.: Anomalies of geomagnetic variations in the southwestern United States. Bull. Scripps Inst. Ocean. Univ. Calif. 13, 1970
- SIEBERT, M.: Ein Verfahren zur unmittelbaren Bestimmung der vertikalen Leitfähigkeitsverteilung im Rahmen der erdmagnetischen Tiefensondierung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., Nr. 2, 1964
- SRIVASTAVA, S. P.: Magnetotelluric two- and three-layer master curves. Publ. Dom. Observ. Ottawa 35, 309–316, 1967
- STRACHOV, V. N.: Approximate solution of incorrectly posed linear problems in Hilbert space with applications to exploration geophysics. Bull. (Izv.) Acad. Sci. USSR, No. 8, 495–506; No. 9, 581–595, 1969
- TICHONOV, A. N.: Mathematical basis of the theory of electromagnetic soundings. USSR Comput. Math. and Math. Phys. 5, 207–211, 1965
- TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the theory of Fourier integrals (2nd ed.). Oxford University Press, London 1948
- TITCHMARSH, E. C.: Eigenfunction expansions associated with second order differential equations (2nd ed.). Oxford University Press, London 1962
- WEIDELT, P.: Die Umkehraufgabe der erdmagnetischen Tiefensondierung für horizontal geschichtete Leiter. Diss. Math.-Naturw. Fak. Univ. Göttingen, 1970
- WIESE, H.: Geomagnetische Tiefentellurik. Dt. Akad. Wiss. Berlin, Geomagn. Inst. Potsdam, Abh. 36, 1965
- YUKUTAKE, T.: Electromagnetic induction in a conductor bounded by an inclined surface. Publ. Dom. Observ. Ottawa 35, 317–353, 1967

Measurements of MeV-Electrons during the Recovery-Phase of a Polar Magnetic Substorm on March 6, 1970¹⁾

J. BÖHM, Kiel²⁾

Eingegangen am 10. März 1972

Summary: In connection with the SPAZ rocket program electrons with energies E of 2.5 to 3.5 MeV have been measured on March 6, 1970, during a rocket flight from Andenes (Norway) in heights between 80 and 217 km. The rocket was launched into the recovery phase of a magnetic substorm. The measured integral electron spectrum averaged over the flight was $I(> E) \cong 1.1 \cdot 10^6 \exp(-E/0.22) \text{ e}/(\text{cm}^2\text{sec ster})$, E in MeV. The strong riometer absorption measured at the launching site was accompanied by scarcely any variation of the horizontal component of the magnetic field. One can conclude by a comprehensive analysis of this ionospheric substorm by means of magnetometer and riometer measurements, satellite measurements of electrons and protons in the outer radiation belt, and interplanetary magnetic field measurements that the MeV-electron precipitation of this ionospheric substorm was caused by an expansion of the earth's magnetic field, correlated with a turn of the interplanetary magnetic field to the north. The appearance of similar ionospheric substorms in the recovery phase of other polar magnetic substorms suggests a fundamental importance of this process.

Zusammenfassung: Im Rahmen des Raketenprogramms SPAZ wurden am 6. März 1970 während eines Raketenfluges von Andenes (Norwegen) aus Elektronen mit Energien E von 2,5–3,5 MeV in einer Höhe zwischen 80 und 217 km nachgewiesen. Der Raketenflug fand in der Erholphase eines magnetischen Teilsturms statt. Das über den Flug gemittelte integrale Elektronenspektrum war $I(> E) \cong 1,1 \cdot 10^6 \exp(-E/0,22) \text{ e}/(\text{cm}^2\text{sec ster})$, E in MeV. Die während des Raketenfluges am Startort gemessene starke Riometerabsorption war von fast keinen Änderungen der Horizontalkomponente des dortigen Magnetfelds begleitet. Eine umfassende Analyse dieses ionosphärischen Teilsturms mit Hilfe von Magnetometer- und Riometermessungen, Satellitenmessungen von Elektronen und Protonen im äußeren Strahlungsgürtel und interplanetaren Magnetfeldmessungen lässt darauf schließen, daß die MeV-Elektronen-Ausfällung dieses ionosphärischen Teilsturms durch eine Expansion des Erdmagnetfelds verursacht wurde, die mit einer Drehung des interplanetaren Magnetfelds nach Norden zusammenhing. Das Auftreten ähnlicher ionosphärischer Teilstürme in der Erholphase anderer polärer magnetischer Teilstürme legt die Vermutung nahe, daß diesem Prozeß grundsätzliche Bedeutung zukommt.

¹⁾ Herrn Prof. Dr. E. BAGGE zu seinem 60. Geburtstag freundlichst gewidmet.

²⁾ Dr. JÜRGEN BÖHM, Institut für Reine und Angewandte Kernphysik der Universität Kiel, 23 Kiel, Olshausenstr. 40–60.

1. Introduction

During recent years great progress has been made in the comprehension of polar substorms. Substorms are the generally explosive elementary geophysical processes which can be observed for example as magnetic fluctuations and electron precipitation in polar regions [AKASOFU 1968].

Though there is a variety of different substorm phenomena one can come to a definition of a "standard substorm" [AUBRY 1971] with the following characteristic features:

The substorm begins with the *expansion phase*. The onset of this phase is marked by the beginning of a negative bay at an auroral ground station near midnight, fast magnetic variations called Pi 2 bursts, and a sudden brightening and northward motion of auroral arcs. A strong current, the auroral electrojet, develops during the expansion phase and causes magnetic fluctuations of typically several hundred gammas at auroral ground stations [KISABETH and ROSTOKER 1971].

The expansion phase is followed by the *recovery phase* with decaying auroral and magnetic disturbances. The expansion phase is sometimes preceded by a *growth phase*. The nature of the growth phase is still more or less unsolved [MC PHERRON 1970, HONES 1971].

Electrons responsible for visible auroras in substorms have energies of about 2–20 keV. There is a lot of rocket measurements of these electrons, see e.g. the summaries of PFISTER [1967] and REES [1969]. Typical electron intensities in auroras at pitch angles of about 85° are 10^7 and 10^6 e/(cm² sec ster) for energies > 1 and > 10 keV, respectively. MeV-electrons contain only a very little fraction of the whole energy of the precipitating auroral particles as they are very seldom if they are precipitating at all. It is very difficult for many theories to explain the occurrence of such high energy electrons in polar substorms [see e.g. CHAMBERLAIN 1969].

In order to search for auroral electrons > 0.55 MeV a spectrometer has been developed. During SPAZ rocket program [BERAN et al. 1970] supporting the measurements of the German research satellite AZUR [KEPPLER 1970] MeV-electrons have been detected in the recovery phase of a polar magnetic substorm. These electron measurements have been compared with riometer and magnetometer registrations of high latitude stations and satellite measurements of AZUR, ESRO IA and Explorer 35. Combining all these data one can conclude as to why the precipitation of MeV-electrons occurred in the recovery phase of the magnetic substorm.

2. Instrumentation

The instrumentation has been described in detail previously [BÖHM 1972]. Briefly, the electron spectrometer consists of two semiconductor counters shown schematically in Figure 1. Detector A, with a thickness of 5.2 mm and a sensitive area of 200 mm², measures the energies of the incoming electrons. By means of detector B, which has a thickness of 2.1 mm and a sensitive area of 500 mm², one can conclude

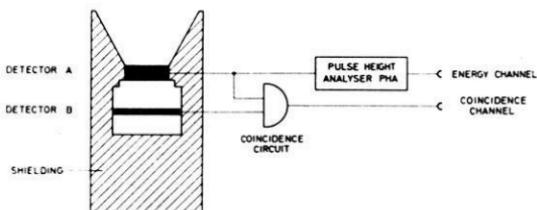


Fig. 1: Schematic picture showing the detector arrangement of the electron spectrometer.

whether a particle has penetrated through detector A or not. The opening angle of the spectrometer is defined by a shielding of brass of more than 5 g/cm^2 and leads to a geometrical factor of $2.8 \text{ cm}^2 \text{ ster}$ for the apparatus. The pulse height analyser for detector A has 16 channels. The energy calibration of the channels is different for electrons and protons, as the time constant of the charge sensitive preamplifier of detector A is only 500 nsec and therefore the charge collection in detector A is not quite complete. The short time constant has been used to avoid pile-up effects.

Caused by a defect in the rocket system the nosecone release of the rocket did not work, and so each experiment of the payload was shielded by the skin of the nosecone. The skin consisted of epoxy resin and glass fiber, and it had a thickness of 1.238 g/cm^2 with an averaged atomic weight of 14.5. Electrons with energies $\leq 2.2 \text{ MeV}$ could not penetrate through the nosecone, and electrons $\geq 2.5 \text{ MeV}$ could be analysed by the pulse height analyser of detector A. One may regard the detector telescope and the skin together as one experiment. Shielded detector arrangements have been used frequently in rockets or satellites; e.g. the experiments EI 93 and EI 101 of AZUR are of this type and will be mentioned later in other context.

Table 1: Calibration of the Pulse Height Analyser (PHA) Channels of the Electron Spectrometer. The Calculated Cosmic Proton Background is also Shown.

PHA-Channel	Electron-Channel (MeV)	Proton-Channel (MeV)	Calculated Cosmic Proton Background/sec
0 + 1	0.55 - 1.08	0.76 - 1.53	0.28
2	1.08 - 1.58	1.53 - 2.21	0.24
3	1.58 - 1.84	2.21 - 2.57	0.13
4	1.84 - 2.50	2.57 - 3.28	0.35
5	2.50 - 3.42	3.28 - 4.15	0.37
6		4.15 - 4.56	
7		4.56 - 4.92	
8		4.92 - 5.94	
9		5.94 - 6.79	
≥ 10		≥ 6.79	

Protons with energies ≥ 34 MeV could penetrate through the skin. As there was no solar proton event in the days before the rocket measurement and there were no protons with such high energies in the place of measurement in the outer radiation belt [HOVESTADT and HÄUSLER 1971], all protons contributing to the counting rates are only cosmic ray protons. Because of their high energies they mostly penetrate through detector A. Table 1 contains the calibration of the PHA-channels for elec-

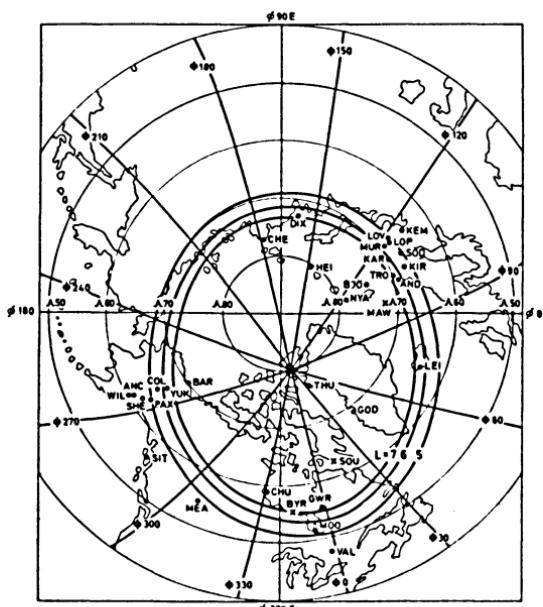


Fig. 2: Locations of high latitude stations whose data are used in this study. Points indicate stations of the northern hemisphere and crosses stations of the southern hemisphere at their geomagnetically conjugated locations. The magnetic coordinate system is taken from EVANS, NEWKIRK and McCORMAC [1969]. Abbreviations: λ =geographic latitude, φ =geographic longitude, Φ =corrected magnetic longitude, L =McIlwains L -value.

ANC Anchorage	HEI Heiss Island	NYA Ny-Ålesund
AND Andenes	KAR Karasjok	PAX Paxson
BAR Bar I	KEM Kem	SHE Sheep Mountain
BJÖ Björnöya	KIR Kiruna	SIT Sitka
BYR Byrd	LEI Leirvogur	SOD Sodankylä
CHE Cape Chelyuskin	LOP Loparskaya	SOU South Pole
CHU Fort Churchill	LOV Lovozero	THU Thule
COL College	MAW Mawson	TRO Tromsö
DIX Dixon	MEA Meanook	VAL Val D'Or
GOD Godhavn	MOO Moosonee	WIL Wildwood
GWR Great Whale River	MUR Murmansk	YUK Fort Yukon

trons and penetrating cosmic ray protons. Besides this calibration the table shows the calculated cosmic proton background per sec for the electron channels assuming a cosmic proton flux of $0.35 \text{ p}/(\text{cm}^2 \text{ sec ster})$ for energies $> 3 \text{ MeV}$ [KIRSCH 1971].

3. Measurements of the Electron Spectrometer

On March 6, 1970, the electron spectrometer was started at 02:12:50 UT from Andenes in northern Norway into an aurora showing strong temporal and spatial fluctuations. The location of Andenes (AND) and other high latitude stations mentioned below are shown in Figure 2. During the electron measurement the riometer absorption recorded at the launching site fluctuated between 4.5 and 1.6 db while the horizontal component of the magnetic field did not show any characteristic variation (see Figure 3). The absorption varied considerably in Andenes after the onset of the ionospheric substorm at about 0200 UT and stayed above the quiet level for several hours.

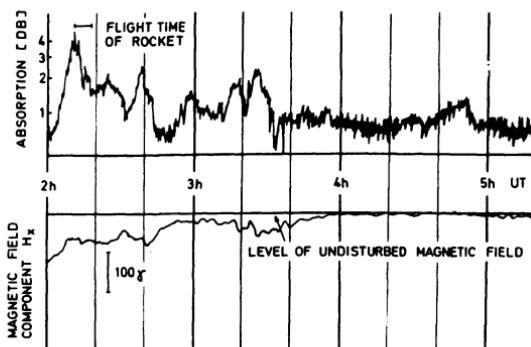


Fig. 3: Measurements of the riometer absorption at 27.6 MHz and the horizontal component of the magnetic field in Andenes during the rocket flight on March 6, 1970.

The flight data of the rocket are summarized in Figure 4. The whole flight time of the rocket was 448 sec; 225 sec after launch the rocket reached its peak altitude of 217 km. In order to avoid corona effects in the detector telescope the experiment was switched on 101.89 sec after launch at a height of 147 km. The spin of the rocket was 3.78 Hz, and the precession period was 33.7 sec with a precession half-angle of 4.3° . During the measuring time the L-value varied between 6.45 and 6.65.

The total counting rate (counts/10 sec) of the spectrometer behind the shielding of 1.238 g/cm^2 is shown in Figure 5 in connection with the riometer absorption at the launching area. The intensity variation of the MeV-electron flux is correlated with the strength of the riometer absorption. The correlation decreases with increasing flight

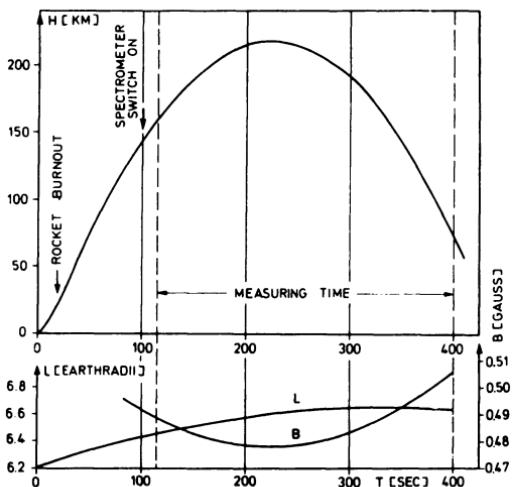


Fig. 4: Variation of flight height H , magnetic field strength B and L -value during the flight time T of the rocket.

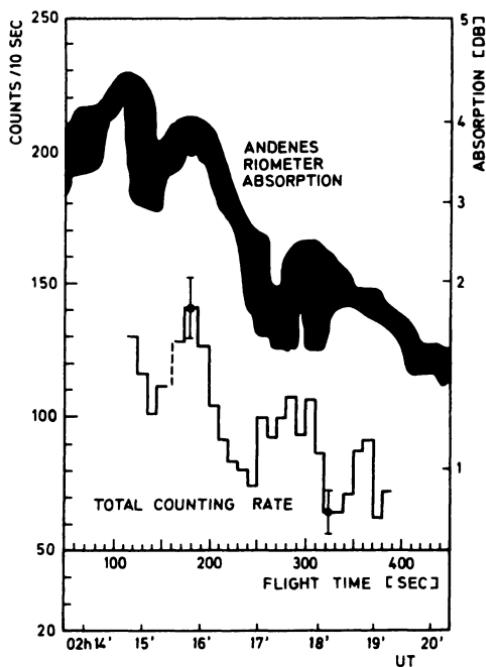


Fig. 5: The total counting rate of the electron spectrometer and the riometer absorption at 27.6 MHz measured in Andenes.

time. This decrease may be explained by the fact, that the sensitive area of riometer measurement is directly above the launching site, and the distance between the center of the riometer sensitivity and the rocket grew with increasing flight time.

The time variation of the counting rate of the single events in detector A (see Figure 6) is similar to the total counting rate. These time variations can not be explained by statistical fluctuations. The correlation with the riometer absorption decreases to higher PHA-channels; in channel 5 one can see only a constant counting rate with statistical fluctuations. The counting rate of detector A and B coincidences (1.23 counts/sec) and the counting rates of the high PHA-channels can be completely explained by high energy cosmic protons. All counting rates have to be corrected for this proton background.

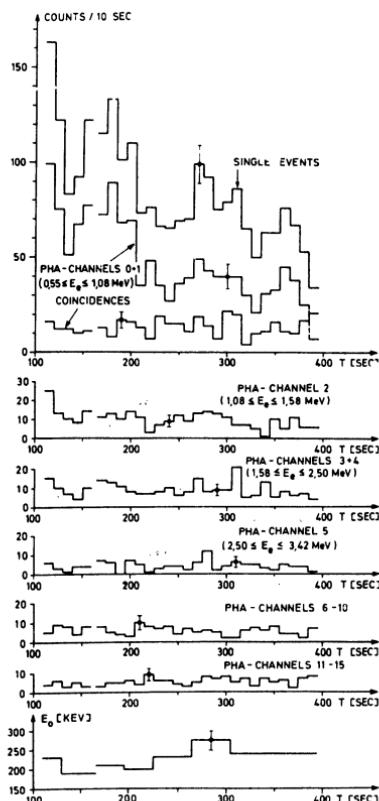


Fig. 6: Counting rates of the various channels of the electron spectrometer measured behind a shielding of 1.238 g/cm^2 during the flight time T . E_0 is a calculated spectral parameter (see text).

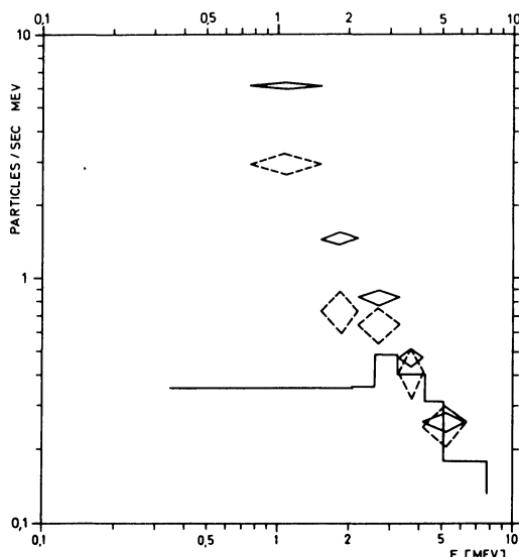


Fig. 7: Calculated cosmic proton background (—) compared with two measured particle spectra (E =particle energy):

- a) spectrum averaged over the total time of measurement (◇).
- b) spectrum averaged over 50 sec with lowest counting rate (◇).

The importance of this proton background can be seen in Figure 7. It shows the calculated background together with two measured spectra. One spectrum contains the 50 sec of flight with minimum total counting rate (i. e. $\leq 7.5/\text{sec}$). The other spectrum is averaged over the whole time of measurement. In the energy scale of Figure 7 the proton calibration of table 1 has been used for a better estimate of the proton portion in the counting rate. It is clear that the 50-sec-spectrum contains relatively more cosmic protons than the other spectrum. The kink in the 50-sec-spectrum points to the fact that the spectrum consists of a power spectrum of electrons which is overlayed by the proton background. All energy losses $\lesssim 4 \text{ MeV}$ in detector A may be explained by cosmic protons. For the calculated numerical values of the background see table 1.

Other numerical calculations showed that the generation of bremsstrahlung in the absorber can be neglected in good approximation. Attempts have been made to calculate the primary electron spectrum in front of the absorber. The calculations are somewhat difficult because the multiple scattering of the electrons is large in the absorber. Therefore electron transmission measurements with nosecone foils have been made at an electron accelerator. Assuming isotropic incidence of the primary electrons on the absorber one can calculate the incident primary electron spectrum

between 2.5 and 3.5 MeV approximately. In this energy range the spectrum can be fitted by an exponential law for the integral electron flux $I(>E)$:

$$I(>E) = I_0 \cdot \exp(-E/E_0).$$

Averaged over the total time of measurement one gets $I_0 \cong 1.1 \cdot 10^6$ electrons/(cm²sec ster) and $E_0 \cong 220$ keV. This means an integral flux > 2.5 MeV of 13 e/(cm²sec ster) and > 3.5 MeV of 0.14 e/(cm²sec ster).

Figure 6 contains the variation of E_0 during the rocket flight. The primary spectrum flattens somewhat during the flight.

There are only few measurements of MeV-electrons in auroras compared with the large number of keV-electron measurements [MOZER 1965, VAN GILS et al. 1969, KIRSCH 1970]. These few MeV-electron measurements are done under different geo-physical conditions and a comparison of the measurements is therefore very difficult. The precipitating MeV-electron fluxes seem to vary considerably at high L -values.

4. Origin of the Measured MeV-Electrons

The measured riometer absorption during the rocket measurement was not caused by the precipitation of MeV-electrons, whose intensity was too low. Electrons with lower energies but with energies ≤ 40 keV are most probably responsible for the absorption. This suggests the same precipitation mechanism for high and low energy electrons from a reservoir very close to the place of measurement.

The *solar origin* of the MeV-electrons can be denied as no high energy solar electrons have been measured outside the magnetosphere by IMP-5 before the substorm [LIN 1971].

The *origin from the tail* seems to be unlikely. The evidence of electron acceleration to about 1 MeV and injection near local midnight has been reported by HONES et al. [1971] only during the substorm expansion phase and not during the recovery phase in which the electrons are measured here. Moreover an impulsive electron injection from the tail near midnight leads to dispersion effects in the morning sector by reason of different drift velocities of electrons with different energies. The observed correlation of riometer absorption and MeV-electron counting rate does not support an injection near midnight.

On account of the long duration of the precipitation *plasma instabilities* also seem unlikely to be responsible for the electron precipitation. Rather it is supposed that an *expansion of a large part of the earth's magnetic field* during the recovery phase led to the precipitation of the MeV-electrons from the outer radiation belt.

Additional measurements reported in the next chapters will give further information about the supposed expansion.

5. Ground Measurements: Riometer and Magnetometer Data

One can get a good survey of the gross features of a substorm by the data of a net of high latitude stations continually measuring the earth's magnetic field and riometer absorption. The stations of the northern hemisphere used in this work are shown in Figure 2 (points). Stations of the southern hemisphere are shown at their corresponding geomagnetic latitudes and are marked by crosses. The variation of the horizontal (H_x) and vertical (H_z) components of the magnetic field are collected in Figures 8–12 together with the riometer data. All the data are arranged in the sequence of decreasing L -values. Dividing the L -values into four sections $L > 7$, $7 \geq L > 6$, $6 \geq L > 5$ and $L \leq 5$ helps to realize the significant changes in latitude. The magnetic local time MLT

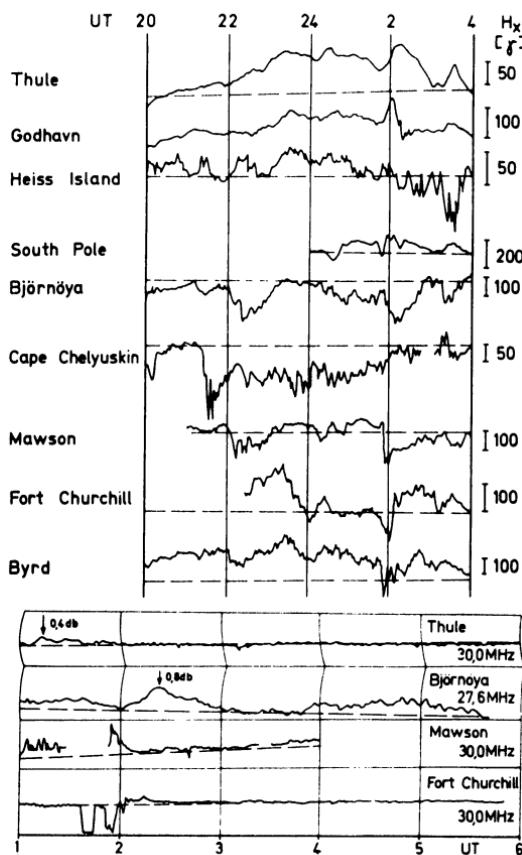


Fig. 8.

of the stations is also of importance for the data. The MLT-values of some stations at 0200 UT are given in brackets: Leirvogur (2.2), Andenes (5.3), Dixon (8.0), College (14.6), Moosonee (17.4). MLT-values of the other stations can be approximately interpolated by means of the magnetic coordinate system of Figure 2 (see also table 1 in HONES et al. [1971]).

From the magnetic data one can recognize a magnetic substorm beginning gradually in Sodankylä at about 2215 UT on March 5, 1970. At 0040 UT on March 6 the magnetic depression of H_x in Sodankylä was strongest with a value of -500γ . At this time a westward flowing electrojet was almost exactly over Sodankylä as one can see from the zero value of H_z . Similar but somewhat lower H_x -variations as in Sodankylä have been recorded in Kiruna and Murmansk. The maximal H_x -depression at Andenes

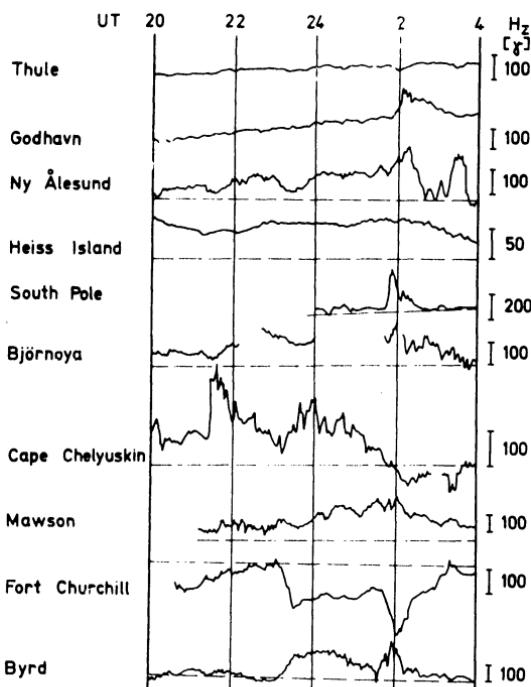


Fig. 8: Magnetometer and riometer measurements of a number of ground stations (locations see Figure 2) on March 5–6, 1970, for $L > 7$. The dashed curves are the quiet day curves. The absolute values of the variations of the horizontal (H_x) and the vertical (H_z) component of the magnetic field can be obtained by using the scales in gamma for the stations. The frequency of measurement is given for each riometer station. The ordinates are approximately linearly divided in db. For special points the absorption values are given numerically. Note the different scales of the curves.

The riometer measurement of Ft. Churchill is disturbed by solar radio bursts.

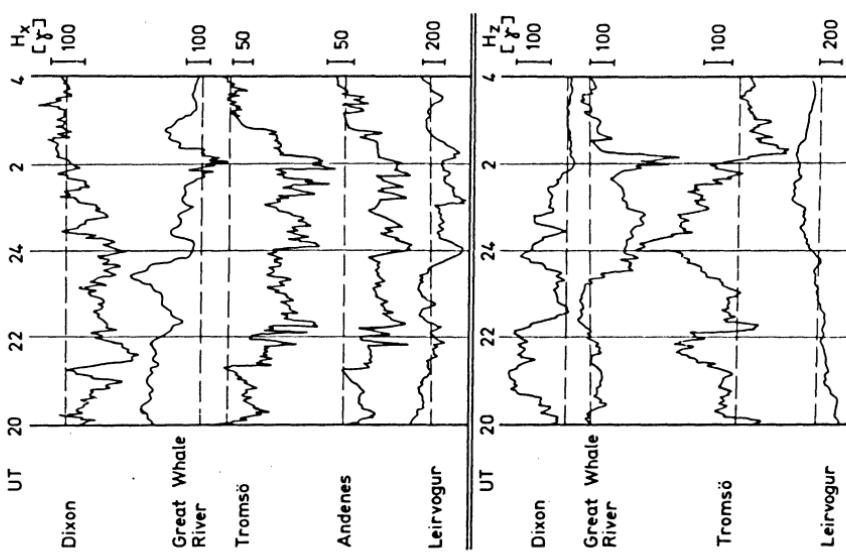
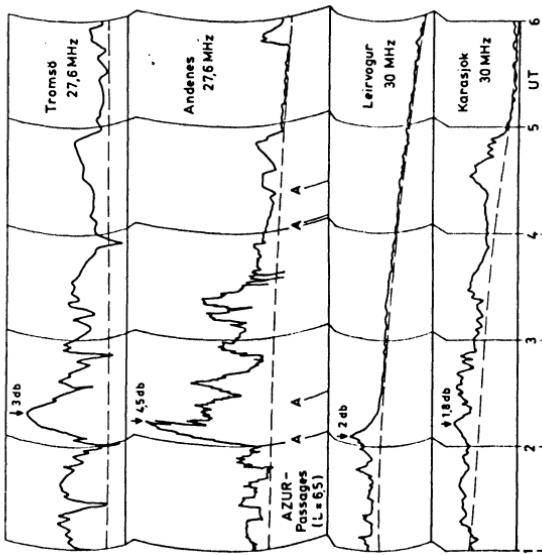


Fig. 9: Magnetometer and riometer measurements of a number of ground stations between $L=6$ and $L=7$ on March 5–6, 1970 (further explanations see Figure 8).



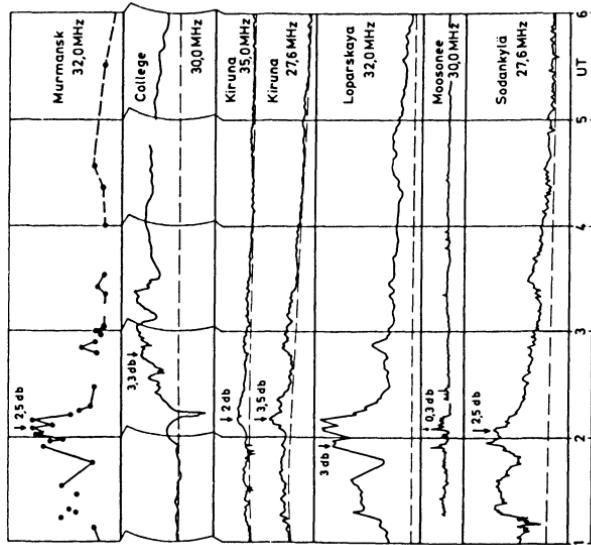
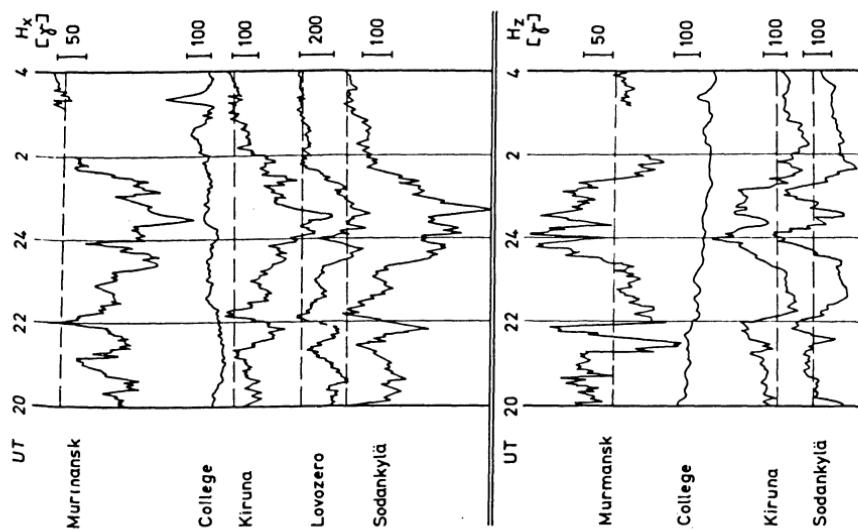


Fig. 10: Magnetometer and riometer measurements of a number of ground stations between $L = 5$ and $L = 6$ on March 5–6, 1970. The riometer measurement of College is partially disturbed by solar radio bursts. The data of Loparskaya are taken from BRUNELLI et al. [1971]. Further explanations see Figure 8.



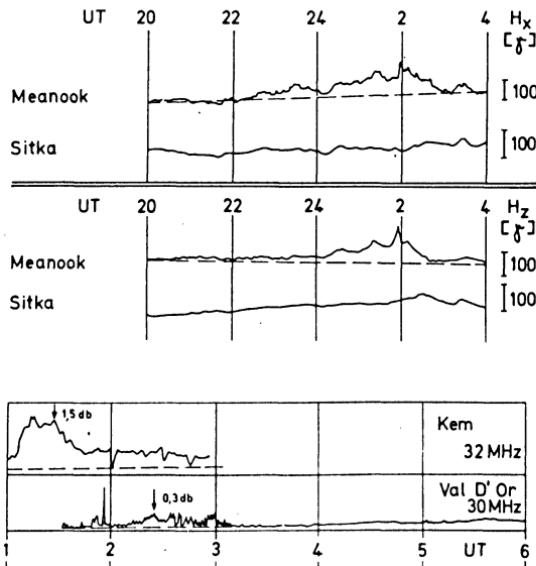


Fig. 11: Magnetometer and riometer measurements of a number of ground stations on March 5–6, 1970, for $L \leq 5$. The data of Kem are taken from BRUNELLI et al. [1971]. Further explanations see Figure 8.

and Tromsö, both stations at $L = 6.2$, was about -200γ . The H_x -curves of the Scandinavian stations do not show special features in the initial phase of the enhanced riometer absorption near 0200 UT.

The magnetic substorm described here has many similar magnetic variations to the "typical" substorm described in AKASOFU's book (p. 53). Though the expansion phase had a rather complex nature one can say that the recovery phase began at about 0040 UT on March 6. Total recovery to quiet day level occurred at about 0300 UT.

In the diagrams showing the riometer measurements during the recovery phase the ordinates are approximately linearly divided in db. Note the different scales of the curves. Characteristic points of the curves are provided with numerical absorption values. The dashed lines represent the quiet day curves. The registration of Andenes contains time marks indicating the position of the satellite AZUR at $L = 6.5$ over the northern polar cap. $L = 6.5$ is the average value of the rocket measurement. The riometer curves of Ft. Churchill and the Alaskan riometer chain are partially disturbed by solar radio bursts. The riometer data of Ny Ålesund ($L = 15.7$) are not shown because there was no significant absorption.

From the data one can see a strong ionospheric substorm occurring over Scandinavia at about 0200 UT March 6. The most intense riometer absorption was registered at Andenes in a spike of 4.5 db at 0214 UT. This spike corresponds to a maximum of

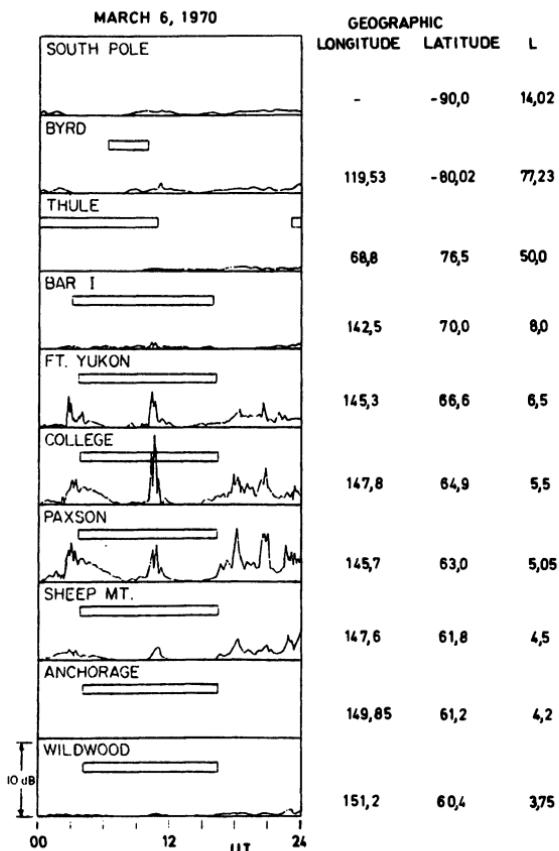


Fig. 12: Riometer absorption measurements of the Alaskan riometer chain and the stations Thule, Byrd and South Pole on March 6, 1970 [ECKLUND and SAUER 1971].

3 db at 0217 UT in Tromsö. The absorption in Sodankylä showing two maxima at 0158 and 0205 UT was stronger than during the deep depression of H_x at 0040 UT. It is remarkable that the stations Sodankylä and Loparskaya, both at the same L -value of 5.1 but 300 km remote from one another, had very similar time fluctuations of the absorption.

From the different times of the absorption maxima at the Scandinavian stations one may conclude a rapid poleward movement of the precipitation event over Scandinavia. The intense precipitation which is decaying in a more or less complex manner can not be seen in a special depression of the horizontal component of the magnetic field.

The precipitation in Alaska which was in the noon sector covered a L -range from $L=4.2$ to $L=8$ with a strong slowly varying absorption event in the region of $5 \gtrsim L \gtrsim 6$.

Such SVA-events are described e. g. by BEWERSDORFF et al. [1968]. Notice that the onset of absorption in College occurred also near 0200 UT though there is a distance of several thousand km between College and Scandinavia.

6. Particle Measurements of AZUR and ESRO IA

AZUR and ESRO IA are polar orbiting satellites whose measurements are important in order to interpret the rocket measurement. The advantage of the rocket is the rather long time of measurement in the small L -range of 6.45 – 6.65. The satellites pass through this region in about 10 sec, but they give knowledge of the particle population in a large L -range measured in a short time period.

Table 2 summarizes some properties of the two satellites and those experiments whose data are discussed below. For more details see KEPPLER [1970] and DOMINGO et al. [1971].

A detailed analysis shows that the measured particles of EI 93, EI 101 and the GM-counter are mostly electrons in the outer radiation belt.

The north polar passages of AZUR and ESRO IA, during which the measurements shown in Figures 14 – 15 have been made, lie in the shaded areas of Figure 13. The position of the rocket launched from Andenes is marked by "ROCKET". In the middle of the measuring time of the rocket-borne spectrometer AZUR was situated at "A" in Figure 13.

The three orbits 1393 – 1395 of AZUR are shown in Figure 14 [MORITZ and LAMMERS 1971, HOVESTADT and HÄUSLER 1971, KIRSCH 1971]. Orbit 1393 took place

Table 2: Characteristics of Various Experiments Flown on AZUR and ESRO IA, which are Used in this Study.

	AZUR			ESRO IA
Date of Launch	8/11/1969			3/10/1968
Apogee (km)	3145			800
Perigee (km)	384			240
Experiments	EI 92	EI 93	EI 101	GM-Counter
Particle Channels Used in this Study	K3	K1	K1	
	Protons 0.25 – 1.65 MeV	$e > 1.5 \text{ MeV}$ $p > 20 \text{ MeV}$	$e > 0.7 \text{ MeV}$ $p > 12 \text{ MeV}$	
	K4	K2	K2	$e > 40 \text{ keV}$ $p > 500 \text{ keV}$
	Protons 0.50 – 1.65 MeV	$e > 4.0 \text{ MeV}$ $p > 40 \text{ MeV}$	$e > 3.2 \text{ MeV}$ $p > 30 \text{ MeV}$	
Type of Measurement	Directional	Omnidirectional	Omnidirectional	Directional

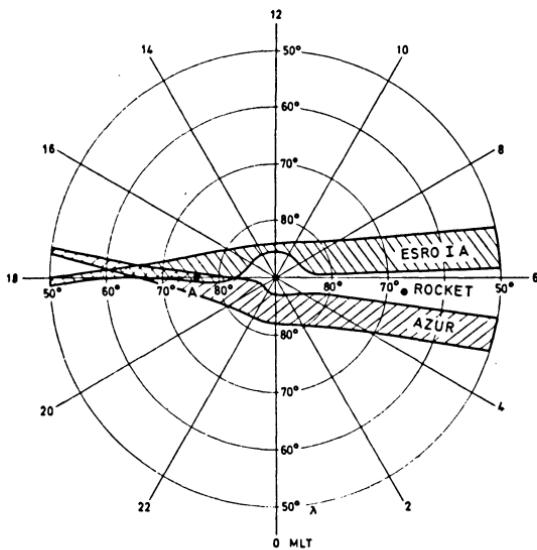


Fig. 13: The north polar passages of AZUR and ESRO IA, during which the measurements of Figures 14–15 have been made, lie in the shaded areas. The position of the rocket launched from Andenes on March 6, 1970, is marked by "ROCKET". In the middle of the time of measurement of the rocket-borne spectrometer AZUR was situated at "A". Abbreviations: λ =invariant latitude, MLT=magnetic local time.

Table 3: Measured Integral Electron Intensities in Units $e/(cm^2 \text{sec ster})$ of the Experiments EI 101 and EI 93 on Board of AZUR [KIRSCH 1971, HOVESTADT and HÄUSLER 1971] at $L=6.5$ on March 6, 1970 and the Measured Electron Fluxes of the Rocket. The Fluxes in Brackets are the Background over the Polar Cap. The Measurements Show an Enhanced Flux of High Energy Electrons at $L=6.5$ in the Course of this Event (B =Magnetic Field Strength at the Place of Measurement).

	$e > 0.7 \text{ MeV}$ EI 101	$e > 1.5 \text{ MeV}$ EI 93	$e > 2.5 \text{ MeV}$ Rocket	$e > 3.2 \text{ MeV}$ EI 101	$e > 3.5 \text{ MeV}$ Rocket	B (Gauss)
02:00:25	2.0	3.4	—	0.33	—	0.249
02:17:00	—	—	13	—	0.14	0.49
02:22:15	49.3	48	—	0.34	—	0.179
04:00:55	34.0	15.5	—	0.32	—	0.252
04:21:15	59.8	52.5	—	0.42	—	0.183
	(0.31 ± 0.03)	(1.4 ± 1.3)	—	(0.31 ± 0.03)	—	—

about 2 hours before the rocket measurement and represents relatively "quiet" conditions. The strong ascent of riometer absorption in Andenes appeared just, as AZUR crossed the northern polar cap. The measurements of orbit 1395 were made at a later stage of the event. As AZUR did not move exactly over the magnetic pole no data have been obtained in a defined λ -range around $\lambda = 90^\circ$. Statistical fluctuations are marked in orbit 1393 by quadrangles. The counting rates of the channels EI 93/K1 and EI 93/K3 are lowered by a factor 10 for reasons of clarity.

Orbit 1393 is characterized by a sharp drop of the electron and proton counting rates toward the polar cap at about $\lambda = 64 - 65^\circ$. This may be interpreted as the edge of the

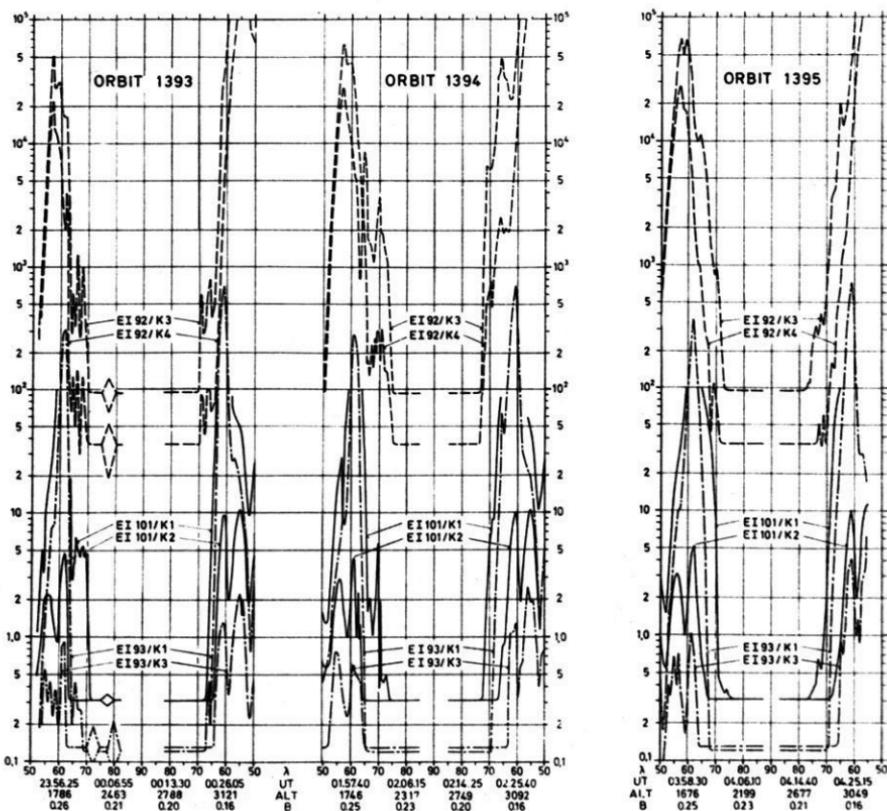


Fig. 14: Measurements of proton and electron intensities (in units particles/(cm²sec ster)) of AZUR on March 5–6, 1970 [MORITZ and LAMMERS 1971, HOVESTADT and HÄUSLER 1971, KIRSCH 1971], at the universal time UT, altitude ALT (km), invariant latitude λ (degree) and magnetic field strength B (gauss). The energy channels are summarized in table 2. The channels EI 93/K1 and EI 93/K3 are lowered by a factor 10 to provide more clarity. The satellite moves from the morning to the evening sector.

stable trapping region. A region of low counting rate and complex structure reaches to about $\lambda = 70^\circ$ for protons of 0.25–1.65 MeV. In the morning hours MLT of orbit 1394 the sharp drop of the counting rates can also be recognized, but in the evening sector protons of 0.25–1.65 MeV and electrons > 0.7 MeV have been detected up to $\lambda \cong 73^\circ$ ($L \cong 12$). Electrons > 1.5 MeV have been found up to $\lambda \cong 69^\circ$ ($L \cong 8$).

The electron measurements of this orbit can be regarded as an indirect confirmation of the measured electrons during the rocket flight at $L = 6.5$. Table 3 contains the counting rates of EI 93, EI 101 and the rocket spectrometer. The given values must be regarded only as an order of magnitude of the electron fluxes but do not allow the construction of an integral spectrum. One can see a strong increase of the electron flux at ener-

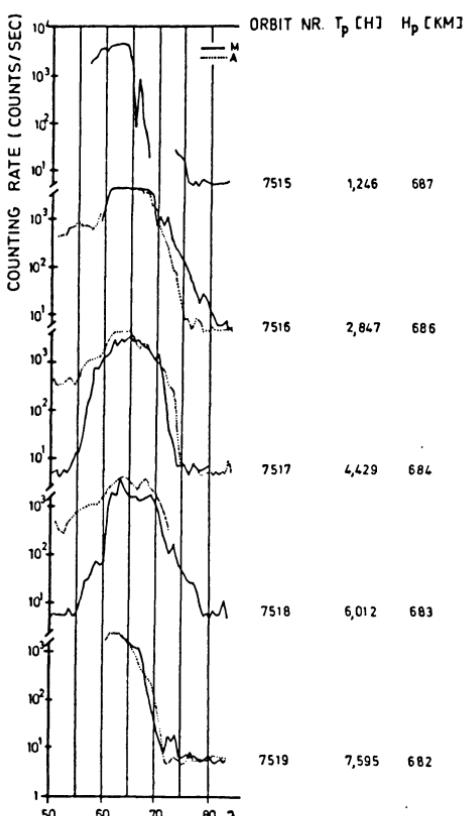


Fig. 15: The counting rate of electrons > 40 keV and protons > 500 keV measured by ESRO IA on March 6, 1970. Abbreviations: λ =invariant latitude; H_p and T_p are height and time of the satellite, respectively, when it was nearest to the north pole; M and A indicate the morning and evening side of the satellite passage [DOMINGO et al. 1971].

gies >0.7 and >1.5 MeV from 0200 to 0222 UT. An increased flux has also been measured in orbit 1395.

The AZUR measurements in the outer radiation belt of orbit 1395 took place about 2 hours after the onset of the strong ionospheric substorm at Andenes. No sharp drop towards the polar cap of the proton and electron counting rates like that of orbit 1393 can be recognized. Protons of $0.25 - 1.65$ MeV and electrons >0.7 MeV have been found up to $\lambda \cong 72^\circ$ ($L \cong 9$).

From the AZUR data one can clearly see the movement of the border of the electron flux >0.7 MeV and >1.5 MeV and the proton flux of $0.25 - 1.65$ MeV towards high L -values during the development of the ionospheric substorm.

Figure 15 contains the measurements of the GM-counter during the ESRO IA orbits 7515 - 7519. The GM-counter is saturated at a counting rate of $4.7 \cdot 10^3$ counts/sec. The data of the morning side of orbit 7515 represent the "quiet" conditions with a sharp drop of the counting rate at $\lambda = 65^\circ$ and a spike at $\lambda = 67^\circ$. For $\lambda \gtrsim 76^\circ$ only a constant background counting rate has been found. On the morning side of orbit 7516 during the ionospheric substorm one can no longer see a sharp drop but a gradual decrease of the counting rate towards the polar cap. The background counting rate begins at about $\lambda = 82^\circ$. Similar gradual decreases can be recognized during the next orbits as well. In orbit 7519 the polar border of the background counting rate has gone back to $\lambda \cong 72^\circ$.

In addition to the AZUR-data one gets from ESRO IA the information of a strong enhancement of the electron flux $\gtrsim 40$ keV at high L -values in the course of the event.

7. Interplanetary Field Measurements of Explorer 35

NESS [1972] made interplanetary magnetic field measurements of Explorer 35 available. The data shown in Figure 16 are averaged values over periods of 81.808 sec and are displayed in solar ecliptic coordinates [NESS, SCEARCE and SEEK 1964] with representation as magnitude F_{ipl} and two angles, φ_{ipl} being longitude and θ_{ipl} being latitude. The approximate radial distance of the spacecraft from the earth was $57 R_E$ (R_E = earth radius).

In the time interval shown in Figure 16, i.e. 2100 UT March 5 until 0600 UT March 6, 1970, F_{ipl} varied only very little around 6γ . φ_{ipl} showed only slight variations near $\varphi_{\text{ipl}} = 300^\circ$ from 2100 UT March 5 till 0224 UT March 6. Then one can see more drastic variations which led to a turn around of φ_{ipl} of about 180° to $\varphi_{\text{ipl}} \cong 120^\circ$ around 0400 UT.

The variation of θ_{ipl} is of special interest for substorm development [FORSTER et al. 1971]. Two sudden southward turns have been reported at 2246 UT and 2359 UT March 5, and these are marked by arrows. After the two sudden southward turns gradual turn back toward the ecliptic plane occurred. After 0107 UT the interplanetary magnetic field stayed northward till 0600 UT, only interrupted by minor southward spikes. For better orientation two marks are added in Figure 16 indicating the time

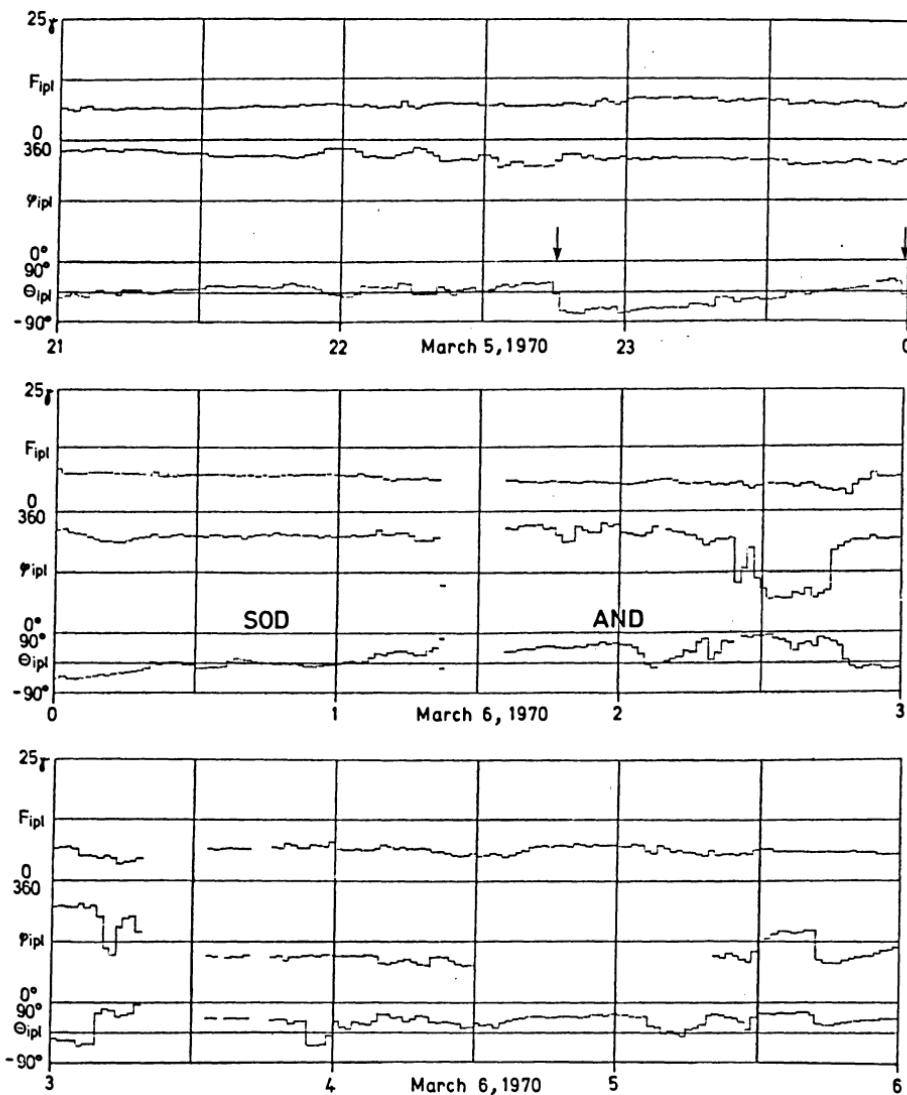


Fig. 16: Interplanetary magnetic field measurements of Explorer 35 on March 5–6, 1970, in solar ecliptic coordinates [NESS 1972]: F_{ipl} =magnitude of the magnetic field, φ_{ipl} =longitude, Θ_{ipl} =latitude. Explorer 35 moved in the shown time interval from the solar ecliptic coordinates $X_{\text{SE}}=51.6 R_E$, $Y_{\text{SE}}=-25.5 R_E$, $Z_{\text{SE}}=-1.9 R_E$ to $X_{\text{SE}}=53.1 R_E$, $Y_{\text{SE}}=-25.5 R_E$, $Z_{\text{SE}}=-1.5 R_E$ (R_E =earth radius).

of strongest depression of the horizontal magnetic field component in Sodankylä (SOD) and the onset time of riometer absorption in Andenes (AND).

8. Summary and Discussion

Most of the papers dealing with substorm characteristics stress the importance of the expansion phase and not of the recovery phase because of less significant and less uniform features during the recovery phase. The observations of one rocket, three satellites, and many riometer and magnetometer stations during the substorm on March 5–6, 1970, indicate the existence of a special type of ionospheric substorm, much different from the "standard substorm" mentioned in the introduction of this paper. This type of ionospheric recovery substorm shall be named below as IRS-event because of its appearance in the recovery phase of a standard magnetic substorm.

The IRS-event of March 6, 1970, began at about 0150 UT in the recovery phase of a polar magnetic substorm which showed maximum activity over Scandinavia at 0040 UT on March 6. The observations can be summarized as follows:

Riometers. At about 0150 UT an increase of riometer absorption started at nearly all stations in the polar zone between $L=5$ and $L=6$. The Scandinavian net of riometers showed a rapid poleward movement of the precipitation zone starting near $L=5$. The absorption measured in Scandinavia decayed with a time constant of about 0.5 hours. The nearly simultaneous onset of riometer absorption at stations with similar L -values and local distances of several thousand km excludes the validity of the "drifting raincloud concept" [ARNOLDY and CHAN 1969] in this case. It is unlikely that electrons injected near local midnight caused the absorption events by drifting eastward because of the long drift times; e. g. 300 keV electrons have drift times of about 40 min at $L=6$.

The data show that the precipitation of the IRS-event occurred in the polar zone and not in the auroral oval. This indicates that the event was much more related to the outer radiation belt as a whole, and not to the tail.

The SVA-event starting near local noon at about 0150 UT is also most probably a characteristic feature of the IRS-event.

Magnetometers. The strong precipitation of the IRS-event in the morning sector, similar to breakup, was not accompanied by a strong negative magnetic bay as one could expect in a breakup. A small negative bay of $\sim -100 \gamma$ was observed in the evening sector.

Rocket measurements. The rocket measurements of 2.5–3.5 MeV electrons in the morning sector showed a time variation of the counting rate which was correlated to the intensity of the riometer absorption at the launching site. This indicates simultaneous precipitation of 2.5–3.5 MeV electrons and low energy electrons $\lesssim 40$ keV. The flatness of the measured electron spectrum is typical for the population of the outer radiation belt.

Satellite observations. AZUR and ESRO IA measured a strong increase of electrons from >40 keV to >1.5 MeV and protons of 0.25–1.65 MeV on high L -shells lasting several hours. This points to an expansion of the earth's magnetic field: LEZNAIK and WINCKLER [1970] very often found on ATS-1 a strong correlation of the variation of the magnetic field with the variation of the electron flux between 0.5 and 1.0 MeV.

The Explorer 35 data show a turn of the interplanetary magnetic field to the north somewhat before the onset of the IRS-event.

It is concluded that an expansion of a large part of the earth's outer magnetic field led to the precipitation described above. This expansion in the recovery phase is probably the counterpart of the "erosion" of day-side boundary field lines. The erosion is caused by the interaction of the southward interplanetary magnetic field with the earth's magnetic field [AUBRY and MCPHERRON 1971, FOSTER et al. 1971].

From the Vela 3 measurements [LEIGHTON and LINCOLN 1970] the average solar wind velocity during the magnetic substorm has been found to be ~ 455 km/sec. Magnetic field changes in the solar wind, measured on Explorer 35, at this speed would reach the position of the earth in ~ 11.5 min. Perhaps the somewhat complex expansion phase of the magnetic substorm over Scandinavia (see e. g. Sodankylä) may be explained by the two sudden southward turns of the interplanetary magnetic field at 2246 UT and 2359 UT on March 5.

IRS-events may well be recognized if the interplanetary field turns northward quickly enough. From the increase of the MeV-electrons it is suggested that the northward turn leads to an increasing amplitude of the magnetic field B in a large part of the outer radiation belt. From the gradual magnetic field increase an eastward electric field E results ($\partial B / \partial t = -c \oint E ds$), driving protons and electrons outward and accelerating them. If particle drift times are long in comparison to the time of magnetic field increase one can use the picture of the outward motion of field lines (expansion of the magnetic field) taking particles with them. The first adiabatic invariant is conserved in this process. This leads to the following relation valid for the mirror points:

$$p^2/B_m = \text{const.}$$

p is the particle momentum and B_m is the field strength at the mirror point. The increase of p in the course of the event and the resulting increase of B_m will cause a lowering of the mirror point heights, and therefore cause particle precipitation. The particle precipitation stops if $\partial B / \partial t \leq 0$ (see Figure 17) and pitch angle diffusion does not act on the particles. But the riometer measurements show an exponential decay after the time T_0 of magnetic field increase ($T_0 \sim 15$ min) with time constants $\tau \sim 0.5$ h. This time is of the same order of magnitude as the life time owing to pitch angle diffusion for 40 keV electrons at $L=6$ [WILLIAMS 1970]. As the electron life times owing to pitch angle diffusion increase with increasing electron energy a hardening of the spectrum of precipitating electrons in the course of the event is expected.

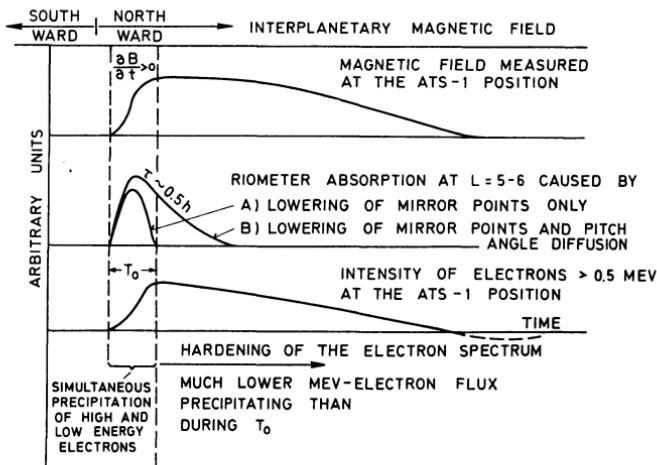


Fig. 17: Qualitative sketch of some characteristic features in an IRS-event. The measurements inside the magnetosphere are done in the morning/noon sector.

It is further suggested that the electron flux $\gtrsim 0.5$ MeV measured at the ATS-1 position (Figure 17) is lower if the magnetic field decreases slowly to its value before the event, as electrons have been lost by the increase of the magnetic field.

A hardening of the electron spectrum in the course of SVA-events has been found during many X -ray measurements in balloon heights (see e. g. BEWERSDORFF et al. [1968]). But it must be stressed here that the SVA-event reported here as a typical feature of the IRS-event is quite different from a particle precipitation event produced by a "drifting raincloud" of electrons injected near midnight. The drifting raincloud concept is normally used to explain SVA-events. It may not always be easy to recognize the precipitation belonging to IRS-events because drifting particles from the expansion phase of the magnetic substorm and local interactions [PARKS 1970] may mask it.

As one can see from the riometer records the magnetic field expansion seems to be most intense in the morning and noon sectors.

A very similar IRS-event occurred in the recovery phase of the substorm of August 25–26, 1967, described in detail by HONES et al. [1971]. At 0007 UT on August 26 the interplanetary magnetic field turned slightly northward in the recovery phase. At about 0025 UT a rapid poleward movement of an absorption event, similar to break-up, has been measured at Byrd and Great Whale River. Almost simultaneously at 0017 UT the onset of riometer absorption due to an IRS-event was recorded at Leirvogur, Kiruna and Moosonee. At Ft. Yukon a SVA-event began at about 2330 UT on August 25. The onset and the early phase of the SVA-event can be well explained by electron drift from the midnight sector, but the absorption after ~ 0100 UT on

August 26 is believed to be partly due to another SVA-event starting \sim 0017 UT on August 26.

In another detailed study of AUBRY et al. [1971] the outward expansion of the magnetopause has been directly measured by OGO-5 satellite on March 28, 1968, in the recovery phase of a magnetic substorm. At 0650 UT the onset of the expansion phase of this substorm has been reported at Great Whale River. In the recovery phase of the substorm the interplanetary magnetic field turned northward with a predicted earliest arrival of this field variation at the earth at 0752–0758 UT. In Kiruna a typical SVA-event started at \sim 0753 UT with a maximum absorption of about 2.9 db at 0830 UT. Also at 0753 UT a somewhat minor event started in College.

It is felt that the IRS-events described here are of general importance in understanding the complex substorm mechanism, though more study has to be made in order to ensure the general character of this type of event. The IRS-events are suggested to be the results of the interaction of the northward interplanetary magnetic field with the magnetosphere. A typical kind of precipitation with well defined onsets over a large area marks these events.

Acknowledgements

I am grateful to Prof. Dr. E. BAGGE, Director of the Institut für Reine und Angewandte Kernphysik in Kiel, for his support during this work. I thank Dr. G. WIBBERENZ for useful comments during this study and for critical reading of the manuscript. I greatly appreciate the assistance of Dr. H. FISCHER, G. FLEISSNER and all the other persons of the institute contributing to this work.

It is a pleasure to thank Dr. E. KEPLER, project scientist of the SPAZ rocket program, and all the other persons associated with SPAZ for their contribution to the success of this program.

I greatly acknowledge the assistance of the following people providing riometer and magnetometer data used in this study: W. PAULISHAK, World Data Center A, Rockville, Maryland, USA; V. P. GOLOVKOV, World Center of Geophysical Data B2, Izmiran, Moskaw, USSR; W. M. RETALLACK, U.S. Department of Commerce, Boulder, Colorado, USA; E. W. RANCE, National Research Council of Canada, Ottawa, Canada; D. H. JELLY, DRB/DRTE, Ottawa, Canada; K. HENDRIKSEN, The Auroral Observatory, Tromsö, Norway; A. GUNDERSEN, NTNF, Andenes, Norway; T. JESSELSEN, ESRANGE, Scientific Instrumentation Centre, Kiruna, Sweden; A. THEANDER, Kiruna Geophysical Observatory, Kiruna, Sweden; T. SAEMUNDSSON, Science Institute of the University of Iceland, Dunhaga, Iceland; P. TANSKANEN, University of Oulu, Department of Physics, Finland; S.-I. AKASOFU, M. J. YOUNG, Geophysical Institute, University Alaska, College, Alaska; L. S. PRIOR, Department of National Development, Canberra, Australia; F. R. BOND, Antarctic Division, Melbourne, Australia; R. J. CORMIER, Department of Air Force, Bedford, Massachusetts, USA.

I thank J. MORITZ, E. LAMMERS, D. HOVESTADT, B. HÄUSLER and E. KIRSCH for the data of AZUR; V. DOMINGO for the data of ESRO IA; N. F. NESS for use of Explorer 35 magnetic field data. This work was supported by the German Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft contract WRK 145.

References

- AKASOFU, S.-I.: Polar and Magnetic Substorms. Reidel Publ. Co., Holland 1968.
- ARNOLDY, R. L., and K. W. CHAN: Particle Substorms Observed at the Geostationary Orbit. *J. Geophys. Res.* 74, 5019–5028, 1969.
- AUBRY, M. P.: A Short Review of Magnetospheric Substorms. Paper presented at Summer Advanced Institute on Earth's Particles and Fields, Cortina, 1971.
- AUBRY, M. P., and R. L. MCPHERRON: Magnetotail Changes in Relation to the Solar Wind Magnetic Field and Magnetospheric Substorms. *J. Geophys. Res.* 76, 4381–4401, 1971.
- BERAN, D., J. BÖHM, H. FISCHER, H. HEINRICH, E. KEPPLER, W. LANDENSPERGER, H. RAETH-JEN, M. SCHNELL, H. SCHÜTZ, W. STÜDEMANN, G. WIBBERENZ, and K. WILHELM: Das Zusatzzraketenprogramm zum Satellitenprojekt AZUR, Projekt SPAZ, Teil 1: Die wissenschaftliche Nutzlast. Forschungsbericht BMBW 70-59, 1970.
- BEWERSDORFF, A., G. KREMSE, J. STADSNES, H. TREFALL, and S. ULLALAND: Simultaneous Balloon Measurements of Auroral X-rays during Slowly Varying Absorption Events. *J. Atmosph. Terr. Phys.* 30, 591–607, 1968.
- BÖHM, J.: Der Aufbau eines Elektronenspektrometers und Messungen von MeV-Elektronen im Morgensektor der Polarlichtzone. Forschungsbericht BMBW 72-02, 1972.
- BRUNELLI, B. E., L. S. EVLASHIN, S. I. ISAEV, L. L. LAZUTIN, G. A. LOGINOV, V. K. ROLDUGIN, G. V. STARKOV, N. V. SHULGINA, and G. F. TOTUNOVA: Auroral-Zone Events of March 1970 on Data of Cola Peninsula Stations. World Data Center A, Report UAG-12, Part 3, 325–336, 1971.
- CHAMBERLAIN, J. W.: Electric Acceleration of Auroral Particles. *Rev. Geophys.* 7, 461–482, 1969.
- DOMINGO, V., D. E. PAGE, and M. L. SHAW: Trapped Particles over the Northern Polar Cap between 6 and 10 March 1970. World Data Center A, Report UAG-12, Part 1, 150–155, 1971.
- ECKLUND, W. L., and H. H. SAUER: Riometer Observations during the Period 6–9 March, 1970. World Data Center A, Report UAG-12, Part 2, 233–235, 1971.
- EVANS, J. E., L. L. NEWKIRK, and B. M. MCCORMAC: North Polar, South Polar, World Maps and Tables of Invariant Magnetic Coordinates for Six Altitudes: 0, 100, 300, 600, 1000 and 3000 km. Lockheed Palo Alto Research Lab., DASA 2347, 1969.
- FOSTER, J. C., D. H. FAIRFIELD, K. W. OGILVIE, and T. J. ROSENBERG: Relationship of Interplanetary Parameters and Occurrences of Magnetic Substorms. *J. Geophys. Res.* 76, 6971–6975, 1971.
- HONES, E. W. JR.: Substorm Behaviour of Plasma Sheet Particles. Paper presented at Summer Advanced Institute on Earth's Particles and Fields, Cortina, 1971.
- HONES, E. W. JR., S. SINGER, L. J. LANZEROTTI, J. D. PIERSON, and T. J. ROSENBERG: The Magnetospheric Substorm of August 25–26, 1967. *J. Geophys. Res.* 76, 2977–3009, 1971.
- HOVESTADT, D., and B. HÄUSLER: Private Communication 1971.

- KEPPLER, E.: Der Forschungssatellit AZUR. *Z. Geophys.* 36, 457–476, 1970.
- KIRSCH, E.: Raketenexperiment zur Untersuchung von Nordlichtern. *Z. Geophys.* 36, 165–173, 1970.
- KIRSCH, E.: Private Communication 1971.
- KISABETH, J. L., and G. ROSTOKER: Development of the Polar Electrojet during Polar Magnetic Substorms. *J. Geophys. Res.* 76, 6815–6828, 1971.
- LEIGHTON, H. I., and J. V. LINCOLN (Editors): ESSA-Solar-Geophysical-Data 308, Part 1, 1970.
- LEZNIAK, T. W., and J. R. WINCKLER: Experimental Study of Magnetospheric Motions and the Acceleration of Energetic Electrons during Substorms. *J. Geophys. Res.* 75, 7075–7098, 1970.
- LIN, R. P.: Private Communication 1971.
- MCPHERRON, R. L.: Growth Phase of Magnetospheric Substorms. *J. Geophys. Res.* 75, 5592–5599, 1970.
- MORITZ, J., and E. LAMMERS: Private Communication 1971.
- MOZER, F. S.: Rocket Measurements of Energetic Particles. 2. Electron Results. *J. Geophys. Res.* 70, 5709–5716, 1965.
- NESS, N. F., C. S. SCEARCE, and J. B. SEEK: Initial Results of the Imp 1 Magnetic Field Experiment. *J. Geophys. Res.* 69, 3531–3569, 1964.
- NESS, N. F.: Private Communication 1972.
- PARKS, G. K.: The Acceleration and Precipitation of Van Allen Outer Zone Energetic Electrons. *J. Geophys. Res.* 75, 3802–3816, 1970.
- PFISTER, W.: Auroral Investigations by means of Rockets. *Space Sci. Rev.* 7, 642–688, 1967.
- REES, M. H.: Auroral Electrons. *Space Sci. Rev.* 10, 413–441, 1969.
- VAN GILS, J. N., H. F. VAN BEEK, L. D. DE FEITER, and R. V. HENDRICKX: A Measurement of Auroral Electrons in the 1–10 MeV Range. *Planet. Space Sci.* 17, 255–260, 1969.
- WILLIAMS, D. J.: Sources, Losses and Transport of Magnetospheric Trapped Particles. ESSA Techn. Rep. ERL 180-SDL 16, 1970.

A Three Dimensional, Analytical Magnetospheric Model with Defined Magnetopause

G.-H. VOIGT, Braunschweig¹⁾

Eingegangen am 3. Februar 1972

Summary: The three-dimensional magnetospheric model is based on a given magnetopause geometry assumed to be parallel to the magnetic field. Accordingly no connection exists to the interplanetary magnetic field which is assumed to be zero.

The magnetopause is represented as a half-sphere on the dayside and a semi-infinite cylinder with constant radius on the nightside (geomagnetic tail).

The neutral sheet is assumed to be an infinitesimal thin current sheet with a constant current distribution. These currents are limited by the diameter of the tail.

The Chapman-Ferraro currents on the dayside and the neutral sheet return-currents on the nightside of the magnetopause result as the solution of the second boundary value problem of potential theory. The result is an analytical solution within the whole magnetospheric cavity with respect to the chosen geometry of the magnetopause.

The magnetic field of these boundary currents together with the earth's dipole field and the field of the neutral sheet currents form the final magnetic field configuration within the magnetosphere.

Magnetic disturbances and shifting of the polar oval can be simulated by variation of the model parameters. The model parameters are: the stand-off distance to the subsolar point, the location of the inner edge of the neutral sheet, the magnetic field produced by the neutral sheet currents and the radius of the magnetosphere.

The field-line configuration of the model has been computed in the noon-midnight meridian plane for several sets of model parameters. It is shown that the location of the neutral points depends strongly on the stand-off distance.

The resulting day-night asymmetry of the magnetic field in the equatorial plane of the model has been verified by ATS-1 measurements.

Zusammenfassung: Das drei-dimensionale Modell der Magnetosphäre beruht auf einer vorgegebenen Magnetopause und der Annahme, daß diese Grenzfläche gleichzeitig Feldfläche ist. Daher besteht keine Verbindung zum interplanetaren Magnetfeld, welches vernachlässigt wird. Die Magnetopause ist auf der Tagseite durch eine Halbkugel, auf der Nachtseite (Magnetosphärenschweif) durch einen unendlich langen Zylinder mit konstantem Radius vorgegeben.

Die neutrale Schicht ist eine infinitesimal dünne Stromschicht mit konstanter Stromverteilung, deren Ströme durch den Durchmesser des Schweifes begrenzt werden.

Die Chapman-Ferraro-Ströme auf der Tagseite und die Rückströme der neutralen Schicht auf der Nachtseite der Magnetopause ergeben sich aus der Lösung des Neumannschen Randwertproblems der Potentialtheorie. Wegen der einfachen Geometrie der Magnetopause läßt sich das Problem für das gesamte Magnetosphärengebiet analytisch lösen.

¹⁾ Dipl.-Phys. GERD-HANNES VOIGT, Lehrstuhl B für Theoretische Physik der Technischen Universität, 33 Braunschweig, Mendelssohnstraße 1A, Germany.

Das Magnetfeld dieser Oberflächenströme bestimmt zusammen mit dem Feld des Erd-dipols und dem der neutralen Schicht die Magnetfeldkonfiguration im Inneren der Magnetosphäre.

Durch Variation der Modellparameter lassen sich magnetische Störungen und Verschiebungen des Polarlichtovals simulieren. Die Modellparameter sind: Die stand-off Distanz des subsolaren Punktes, die Entfernung zwischen dem Erddipol und dem Beginn der neutralen Schicht, das Magnetfeld der neutralen Schicht und der Radius der Magnetosphäre.

Durch numerische Lösung der Feldliniengleichung werden die Feldliniendarstellungen in der Mittags-Mitternachts-Meridianebene der Magnetosphäre für verschiedene Sätze der Modellparameter dargestellt. Es zeigt sich, daß die Lage der neutralen Punkte am stärksten von der Lage des subsolaren Punktes abhängt.

Die Tag-Nacht-Asymmetrie des Magnetfeldes in der Äquatorebene des Modells wird von ATS-1-Messungen bestätigt.

1. Introduction

Investigations of magnetic disturbances, shifting of the polar oval, and related phenomena in the earth's polar region require information about the magnitude of the different contributions to the total magnetic field configuration at any point within the magnetosphere.

Thus it is the purpose of this paper to propose a three dimensional, analytical description of the magnetospheric magnetic field which allows to take into consideration the Chapman-Ferraro currents due to the earth's dipole main field and the return-currents of the neutral sheet current distribution.

By defining the magnetopause boundary in a mathematically convenient way it is possible to calculate at the same time both the dayside and the nightside of the magnetosphere. A variation of the model parameters does affect distinct magnetospheric parts in a different way. Hence one can decide which effect a certain parameter or region of the magnetosphere has on magnetic variations and disturbances.

The model assumes a static magnetic field configuration. Therefore time-dependent phenomena can be simulated only by a successive variation of the model parameters.

Another aspect of this paper is to get an easy to handle model of the magnetic field in order to trace the field-line configuration in a few seconds of computer time.

On the other hand this advantage is paid for by some rigorous physical and mathematical simplifications (chapter 2). With these simplifying assumptions and with respect to the chosen magnetospheric boundary (chapter 3) one can find the magnetic fields from the magnetopause current system in the whole magnetospheric cavity. These fields result from an analytical solution of the second boundary value problem of potential theory (chapter 4).

The resulting magnetic field within the magnetosphere consists of three parts (chapter 5): The earth's dipole field H_d , the field of the neutral sheet current distribution in the tail H_s , and the field due to the magnetopause current system H_{bc} which depends on both H_d and H_s , as well as on the geometry of the magnetopause.

Finally some numerical results and effects due to the variation of model parameters will be presented and discussed (chapter 6).

Electromagnetic cgs-units are used throughout this paper unless stated different.

2. Simplifying assumptions for model calculation

The following assumptions allow an analytical description of the magnetospheric magnetic field. The analytical solution provides to keep track of the individual terms of the calculation in detail so that the effect of the model parameters can be estimated easily with respect to the final result.

Moreover one can avoid numerical procedures taking up much computer time in order to solve the boundary value problem and to trace the field lines.

- a) The earth's main magnetic field is assumed to be a pure dipole field.
- b) Both the geomagnetic and the geographic axes of the earth are identical and perpendicular to the solar ecliptic plane.
- c) Ring current effects and all effects due to charged particle motions are neglected.
- d) The magnetopause is not the result of the selfconsistent boundary problem [MEAD and BEARD 1964], but it is defined by a simple geometry which approximates roughly the realistic boundary found by experimental data [NESS 1971, FAIRFIELD 1971].
- e) Field line merging with the interplanetary magnetic field is not considered. The interplanetary field is assumed to be zero so that the magnetospheric field component perpendicular to the magnetopause vanishes on the boundary.
- f) The neutral sheet inside the geomagnetic tail is an infinitesimal thin current sheet with a constant current distribution. Therefore compression and expansion effects of the plasma sheet cannot be taken into account.

3. Coordinate-system, geometry, and parameters

Figures 1 – 3 show the coordinate-system, the geometry of the magnetopause, and the parameters of the model.

The x - z -plane ($y=0$) is identical with the noon-midnight meridian plane, and the y - z -plane ($x=0$) represents the equatorial plane.

In the region $z \geq 0$ the problem is described by cylindrical coordinates:

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cdot \cos \varphi \\y &= \varrho \cdot \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}\tag{3.1}$$

and in the region $z \leq 0$ spherical coordinates are used:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \\y &= r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\z &= r \cdot \cos \theta\end{aligned}\quad (3.2)$$

At the plane $z=0$ both systems (3.1) and (3.2) merge.

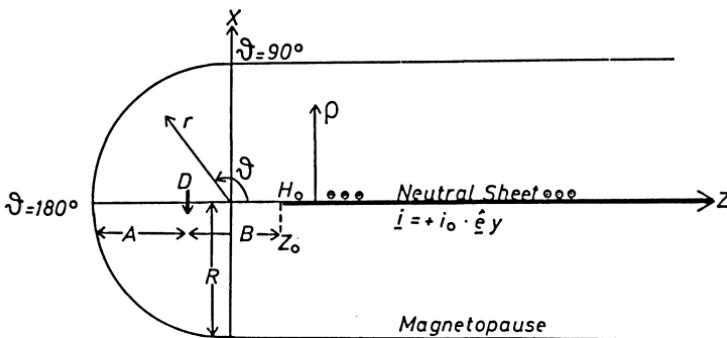


Fig. 1: Coordinate-system and parameters of the model. The earth's dipole D is located on the negative z -axis at $z=-(R-A)=-b$. The dipole moment is $M=-M \cdot \hat{e}_x$. The parameters for magnetic quiet conditions are:

$R=16 R_e$, radius of the magnetosphere,

$A=10 R_e$, stand-off distance to the subsolar point,

$B=10 R_e$, distance to the inner edge of the neutral sheet.

The current density i_0 implies a magnetic field $H_0=20 \gamma$ close to the neutral sheet.

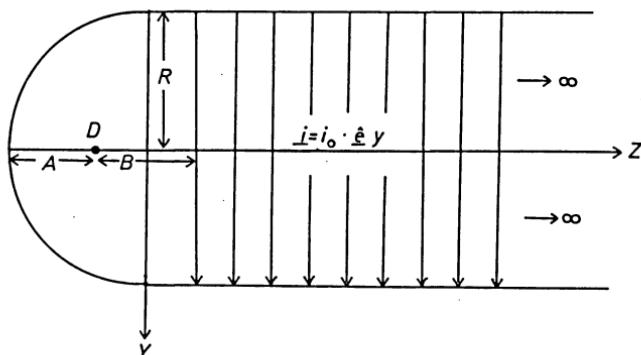


Fig. 2: Equatorial plane of the model. The current sheet is defined from $z_0=(A+B-R)$ up to infinity. The current density of the sheet is constant because of the constant radius of the tail and the conservation of the magnetic flux.

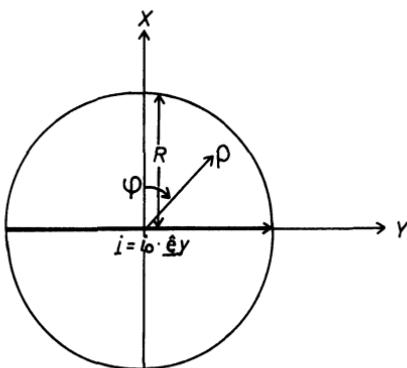


Fig. 3: Diameter of the tail looking from the earth. The neutral sheet currents are flowing in the y - z -plane (i. e. the equatorial plane) in y -direction. They are limited by the diameter of the tail.

The magnetopause is represented as a half-sphere on the dayside ($z \leq 0$) and a semi-infinite cylinder with constant radius R on the nightside ($z \geq 0$) of the magnetosphere. The center of the sphere is identical with the origin of the coordinate-system.

The earth's dipole D is located excentrically relative to the center of the sphere on the negative z -axis at $z = -(R - A) = -b$. Its moment is

$$\mathbf{M} = -M \cdot \hat{\mathbf{e}}_x.$$

The parameters of the model are:

R = the radius of the magnetosphere,

A = the stand-off distance to the subsolar point measured from the earth's dipole,

B = the distance to the inner edge of the neutral sheet measured from the earth's dipole,

H_0 = the magnetic field very close to the neutral sheet produced by its corresponding currents.

Typical values for magnetic quiet conditions are [SPEISER and NESS 1967, ROEDERER 1969, SPREITER and ALKSNE 1969]:

$$R = 16 R_e, \quad A = 10 R_e, \quad B = 10 R_e, \quad H_0 = 15 - 20 \gamma.$$

Unlike the model of WILLIAMS and MEAD [1965], the neutral sheet currents are not infinite, but limited by the diameter of the cylinder (fig. 2 and 3). The currents are closed over the upper and lower cylindrical magnetopause boundaries (chapter 4).

The neutral sheet is an infinitesimal thin current sheet in the equatorial plane with a constant current density

$$\mathbf{i} = i_0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (3.3)$$

and is defined from $z_0 = (A + B - R)$ up to infinity (fig. 2). i_0 is related to a magnetic field by

$$i_0 = H_0 / 2\pi. \quad (3.4)$$

Field line merging does not occur in this model, therefore the current density of the sheet must be constant because of the constant radius of the tail and the conservation of the magnetic flux in the tail tubes.

4. The boundary value problem

The following gives the scalar potential representation of the magnetic fields generated by the Chapman-Ferraro currents and the neutral sheet return-currents with respect to the chosen geometry of the magnetopause.

The result is valid within the whole magnetospheric cavity.

4.1 General aspects

Suppose that $u(\mathbf{x})$ is a scalar potential consisting of the earth's dipole potential u_d , the potential u_s of the neutral sheet field, and the potential u_{bc} of the field from the magnetopause currents.

$$u(\mathbf{x}) = u = u_d + u_s + u_{bc} \quad (4.1)$$

The magnetopause is parallel to the total magnetic field, i. e. the field component perpendicular to the magnetopause vanishes on the boundary:

$$\frac{\partial}{\partial n} u \Big|_{\text{boundary}} = \frac{\partial}{\partial n} (u_d + u_s + u_{bc}) \Big|_{\text{boundary}} = 0 \quad (4.2)$$

u_{bc} is the only unknown term. Hence it follows

$$\frac{\partial}{\partial n} u_{bc} = - \frac{\partial}{\partial n} (u_d + u_s)$$

so that the boundary conditions for u_{bc} are given by the corresponding magnetic fields:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial n} u_{bc} = + \hat{n} \cdot (\mathbf{H}_d + \mathbf{H}_s) \Big|_{\text{boundary}}} \quad (4.3)$$

Moreover the potential u_{bc} must obey Laplace's equation

$$\boxed{\Delta u_{bc} = 0} \quad (4.4)$$

anywhere in the magnetosphere. In other words we have to solve the second boundary value problem of potential theory for u_{bc} . We see the singularities (the earth's dipole and the neutral sheet currents) entering the boundary conditions (4.3). Therefore the field of the magnetopause current system is essentially determined by both the magnetic field of the earth and the field from the neutral sheet currents.

Furthermore we can distinguish between the contributions of the boundary currents being due to the dipole field \mathbf{H}_d and due to the neutral sheet field \mathbf{H}_s . Because of the linearity of Laplace's equation the potentials $u(\mathbf{x})$ and u_{bc} split up in two parts:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= u = u_1 + u_2 \\ u_{bc} &= u_{cf} + u_{rc} \end{aligned} \quad (4.5)$$

where u_1 and u_2 are subdivided as follows:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_d + u_{cf} \\ u_2 &= u_s + u_{rc}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

In analogy with (4.2) the boundary conditions are

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} u_1 &= \frac{\partial}{\partial n} (u_d + u_{cf}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} u_2 &= \frac{\partial}{\partial n} (u_s + u_{rc}) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

In this way it is possible to solve the boundary value problem separately for the dipole and the neutral sheet.

Hence according to (4.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} u_{cf} &= + \hat{n} \cdot \mathbf{H}_d \\ \frac{\partial}{\partial n} u_{rc} &= + \hat{n} \cdot \mathbf{H}_s \end{aligned} \quad (4.8)$$

In this case both u_{cf} and u_{rc} must meet Laplace's equation

$$\begin{aligned}\Delta u_{cf} &= 0 \\ \Delta u_{rc} &= 0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

The related magnetic fields

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{cf} &= -\operatorname{grad} u_{cf} \\ \mathbf{H}_{rc} &= -\operatorname{grad} u_{rc}\end{aligned}\tag{4.10}$$

can be interpreted as the field of the Chapman-Ferraro currents and the field of the neutral sheet return-currents.

Due to the combination of two different coordinate-systems, Laplace's equation is not separable in general. The separation is only possible for either the sphere or the cylinder. The two solutions must meet the boundary conditions (4.3) and on the other hand Laplace's equation (4.4). Consequently a discontinuity of the magnetic field occurs at the plane $z=0$.

Since the sphere and the cylinder have a common region of intersection it is possible to remove the discontinuity of the field components at the plane $z=0$ by an iterative process. This alternating process converges under certain conditions. (See appendix 1 for detail.)

The first step of the iterative process will be represented analytically as follows:

The components of the magnetic field (respectively the relating scalar potential) will be expanded in spherical harmonics in the region $z \leq 0$ (sphere) and in Fourier-Bessel series in the region $z \geq 0$ (cylinder).

It should be mentioned that in the present case the discontinuities at the plane $z=0$ after the first step are small compared with the absolute value of the magnetic field. Therefore a simple compensating computation is used in order to reduce these discontinuities.

4.2 General solution for the sphere

The boundary values of (4.3), at $r=R$, are functions of the two angles ϑ and φ so that we can find an expansion in spherical harmonics:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_d + \mathbf{H}_s) = f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi)\tag{4.11}$$

where

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = a_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cdot P_n^m(\cos \vartheta)\tag{4.12}$$

The coefficients of the series are determined by the orthogonality-relations:

$$\left. \begin{aligned} a_n^m &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \cdot \int_{\sigma} f(\vartheta, \varphi) \cdot P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} d\sigma \\ b_n^m &= \frac{(2n+1)}{4\pi} \cdot \int_{\sigma} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) d\sigma \\ d\sigma &= \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

According to (4.3) and (4.11) the solution of the second boundary value problem is given by

$$u_{bc}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Y_n(\vartheta, \varphi) \frac{r^n}{R^{n-1}} + C \quad (4.14)$$

The summation begins with $n=1$ because (4.14) requires the condition

$$Y_0 = a_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\sigma} f(\vartheta, \varphi) d\sigma = 0.$$

Even here it is possible to carry out the procedure (4.11) to (4.14) separately for the dipole and the neutral sheet. For example the potential u_{cf} due to u_d is calculated in detail in chapter 4.4.

4.3 General solution for the cylinder

There are two different types of solutions for the cylinder, according as a distribution of boundary values $f(\varrho, \varphi)$ is given on the "lid" of the cylinder ($z=0$), or a distribution $g(\varphi, z)$ is given on the lateral boundary of the cylinder ($\varrho=R$).

- a) In order to extend the potential u_1 in (4.6) from the sphere into the cylinder it can be expanded in Fourier-Bessel series on the plane $z=0$ as follows:

$$u_1 = f(\varrho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_{m,i} \cos m\varphi + b_{m,i} \sin m\varphi) \cdot J_m(x_{m,i} \varrho/R) \quad (4.15)$$

The normal derivation of u_1 must vanish on the surface $\varrho=R$ according to (4.7). Therefore the $x_{m,i}$ are the solutions of

$$J'_m(x_{m,i}) = 0 \quad (4.16)$$

arranged by ascending values.

The coefficients of the series are given by the orthogonality-relations:

$$\frac{a_{m,i}}{b_{m,i}} = \frac{\varepsilon_m}{\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{x_{m,i}^2}{(x_{m,i}^2 - m^2) [J_m(x_{m,i})]^2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cdot \int_0^R f(\varrho, \varphi) J_m(x_{m,i} \varrho / R) \varrho d\varrho d\varphi \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_{m \neq 0} = 2$$

With respect to (4.15) the final result is given by

$$u_1(\varrho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_{m,i} \cos m\varphi + b_{m,i} \sin m\varphi) \cdot J_m(x_{m,i} \varrho / R) \cdot e^{-x_{m,i} z / R}$$

(4.18)

$J_m(x)$ are the Bessel-Funktions of integer order.

In this expansion the z -dependence cannot be chosen in an arbitrary manner so that by passing the plane $z=0$ the discontinuity appears in the z -component of the magnetic field.

In contrast to chapter 4.2 the solution (4.18) does not allow to separate u_d and u_{cf} .

- b) The following double Fourier series will be used in order to get an expansion for the boundary values of u_{rc} on the lateral boundary of the cylinder.

With respect to (4.8) we need the radial derivation of the neutral sheet field $\hat{n} \cdot \mathbf{H}_s$.

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \mathbf{H}_s &= g(\varphi, z) = F(\varphi) \cdot G(z) \\ F(\varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \\ G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi}{c} z + D_n \sin \frac{n\pi}{c} z \right) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (4.19)$$

The coefficients of the series are given by the orthogonality-relations:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi g(\varphi, z) d\varphi \\ B_m &= \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi g(\varphi, z) d\varphi \\ C_n &= \frac{\varepsilon_n}{c} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \frac{n\pi}{c} z g(\varphi, z) dz \\ D_n &= \frac{\varepsilon_n}{c} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \frac{n\pi}{c} z g(\varphi, z) dz \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (4.20)$$

For the z -dependence of $g(\varphi, z)$ an arbitrary period of $2c$ is assumed in order to realize the series expansion (4.19). The upper limit of integration c is not critical since

the normal component of the neutral sheet field vanishes as z approaches infinity. The lower limit is located a little bit on the negative z -axis in order to avoid Gibbs's phenomenon at $z=0$.

With respect to (4.19) the final result is given by

$$\begin{aligned} u_{rc}(\varrho, \varphi, z) &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \left(C_n \cos \frac{n\pi}{c} z + D_n \sin \frac{n\pi}{c} z \right) \cdot f_{m,n}(\varrho) \\ f_{m,n}(\varrho) &= \frac{I_m\left(\frac{n\pi}{c}\varrho\right)}{\frac{n\pi}{c} \cdot I'_m\left(\frac{n\pi}{c}R\right)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$I_m(x)$ are the modified Bessel-Functions with the relation

$$I_m(x) = i^{-m} \cdot J_m(ix).$$

4.4 Spherical-harmonics expansion for u_d and u_{cf}

The boundary values for u_{cf} require, according to (4.8), the normal derivation of the dipole potential u_d at the magnetopause $r=R$.

Referring to chapter 3 the potential of the dipole is

$$u_d = -M \frac{x}{[(z+b)^2 + x^2 + y^2]^{3/2}} \quad (4.22)$$

Hence with (3.2) we obtain

$$u_d = -M \cos \varphi \sin \vartheta \cdot \frac{r}{[r^2 + b^2 + 2br \cos \vartheta]^{3/2}} \quad (4.23)$$

The following relations are used in order to get a spherical-harmonics expansion for (4.23).

$$\begin{aligned} \frac{r^2 - b^2}{[r^2 + b^2 + 2br \cos \vartheta]^{3/2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \cdot \frac{b^n}{r^{n+1}}; \quad (b < r) \\ (r^2 - b^2)^{-1} &= \frac{1}{r^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{2i}; \quad (b < r) \\ (2n+1) \cdot \sin \vartheta \cdot P_n(\cos \vartheta) &= P_{n+1}^1(\cos \vartheta) - P_{n-1}^1(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Then the earth's dipole potential is given by

$$u_d = -M \cos \varphi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot P_n^1(\cos \vartheta) \cdot \frac{b^{n-1}}{r^{n+1}}; \quad (b < r) \quad (4.24)$$

With (4.8) the boundary values are

$$\hat{n} \cdot \mathbf{H}_d = f(\vartheta, \varphi) = -M \cos \varphi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n+1) P_n^1(\cos \vartheta) \cdot \frac{b^{n-1}}{R^{n+2}} \quad (4.25)$$

Referring to the equations in chapter 4.2 the final result is given by

$$u_{cf}(r, \vartheta, \varphi) = -M \cos \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot P_n^1(\cos \vartheta) \frac{b^{n-1}}{R^{2n+1}} \cdot r^n \quad (0 \leq r \leq R) \quad (4.26)$$

b is the displacement of the earth's dipole on the negative z -axis.

A comparison with (4.12) shows a φ -dependence in (4.24) and (4.26) only for $m=1$. By this the Fourier-Bessel expansion of u_1 (chapter 4.3) needs only the Bessel-Functions $J_1(x_{1,i} \cdot \varrho/R)$. We enter (4.18) with the definitions

$$a_{1,i} = -2 M / R^2 \cdot a_i \quad \text{and} \quad x_{1,i} = x_i.$$

The new coefficients a_i in (4.18) are dimensionless but depend on the model parameters b and R . For practical use the potential (4.18) may be written as follows:

$$u_1(\varrho, \varphi, z) = -M \cdot \cos \varphi \cdot \frac{2}{R^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_1(x_i \varrho / R) \cdot e^{-x_i |z| / R} \quad (4.18')$$

5. Magnetic field components

The magnetic field of the Chapman-Ferraro currents \mathbf{H}_{cf} and the field of the neutral sheet return-currents \mathbf{H}_{rc} together with the earth's dipole field \mathbf{H}_d and the field of the neutral sheet \mathbf{H}_s determine the total field configuration within the magnetospheric cavity.

The field components are given by $\mathbf{H} = -\nabla u$. The nabla-operator is in spherical and cylindrical coordinates

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

respectively.

5.1 The earth's dipole field

a) Sphere

Referring to (4.23) the field components are:

$$\left. \begin{aligned} H_{d,r} &= +M \cos \varphi \sin \theta \cdot \left[\frac{1}{W_1} - \frac{3 \cdot r}{W_2} (r + b \cos \theta) \right] \\ H_{d,\theta} &= +M \cos \varphi \left[\cos \theta \cdot \frac{1}{W_1} + \sin^2 \theta \cdot \frac{3}{W_2} r b \right] \\ H_{d,\varphi} &= -M \sin \varphi \cdot \frac{1}{W_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

with

$$W_1 = [r^2 + b^2 + 2br \cos \theta]^{3/2}$$

$$W_2 = [r^2 + b^2 + 2br \cos \theta]^{5/2}.$$

b) Cylinder

After a transformation of (4.22) by (3.1) the field components are:

$$\left. \begin{aligned} H_{d,\rho} &= +M \cos \varphi \left[\frac{1}{V_1} - \frac{3 \rho^2}{V_2} \right] \\ H_{d,\varphi} &= -M \sin \varphi \cdot \frac{1}{V_1} \\ H_{d,z} &= -M \cos \varphi \cdot \frac{3 \rho}{V_2} (z + b) \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

with

$$V_1 = [(z + b)^2 + \rho^2]^{3/2}$$

$$V_2 = [(z + b)^2 + \rho^2]^{5/2}.$$

5.2 The Chapman-Ferraro field

a) Sphere

From (4.26) we get

$$\left. \begin{aligned} H_{cf,r} &= +M \cos \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot P_n^1(\cos \vartheta) \cdot \frac{b^{n-1}}{R^{2n+1}} \cdot r^{n-1} \\ H_{cf,\vartheta} &= +M \cos \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos \vartheta) \cdot \frac{b^{n-1}}{R^{2n+1}} \cdot r^{n-1} \\ H_{cf,\varphi} &= -M \sin \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right) \frac{P_n^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \cdot \frac{b^{n-1}}{R^{2n+1}} \cdot r^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

The derivation of $P_n^1(\cos \vartheta)$ can be written as

$$\frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos \vartheta) = \frac{1}{\sin \vartheta} [n \cdot P_{n+1}^1(\cos \vartheta) - (n+1) \cos \vartheta \cdot P_n^1(\cos \vartheta)].$$

b) Cylinder

The Chapman-Ferraro contribution is given by

$$u_{cf}(\varrho, \varphi, z) = u_1(\varrho, \varphi, z) - u_d(\varrho, \varphi, z)$$

The field components of u_d are given by (5.2), and by the relations

$$\begin{aligned} J'_1(x) &= 1/2 [J_0(x) - J_2(x)] \\ \frac{1}{x} J_1(x) &= 1/2 [J_0(x) + J_2(x)] \end{aligned}$$

we find the field components of u_1 from (4.18'):

$$\left. \begin{aligned} H_{1,\varrho} &= +M \cos \varphi \cdot 1/R^3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i [J_0(x_i \varrho/R) - J_2(x_i \varrho/R)] \cdot e^{-x_i z/R} \\ H_{1,\varphi} &= -M \sin \varphi \cdot 1/R^3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i [J_0(x_i \varrho/R) + J_2(x_i \varrho/R)] \cdot e^{-x_i z/R} \\ H_{1,z} &= -M \cos \varphi \cdot 2/R^3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i J_1(x_i \varrho/R) e^{-x_i z/R} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

5.3 The neutral sheet field

The magnetic field of the current sheet can be obtained by calculating at first the field of one filament of stream with a linear extension of $2R$ (fig. 2 and 3) using Biot-Savart's law. Subsequently this field will be integrated over all filaments of the current sheet from $z=z_0$ to $z=\infty$.

The final result has no y -component since the currents flow in the y -direction.

According to (3.3) and (3.4) the field components of the neutral sheet are:

$$\begin{aligned} H_{s,x} &= -\frac{1}{2\pi}H_0 \cdot \frac{1}{2} \left[\ln \frac{Q_1 + (y+R)}{Q_1 - (y+R)} - \ln \frac{Q_2 + (y-R)}{Q_2 - (y-R)} \right] \\ H_{s,z} &= -\frac{1}{2\pi}H_0 \left[\operatorname{arctg} \frac{y+R}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y-R}{x} + \operatorname{arctg} \frac{(z-z_0)(y+R)}{x \cdot Q_1} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \frac{(z-z_0)(y-R)}{x \cdot Q_2} \right] \end{aligned}$$

with

$$Q_1 = [(z-z_0)^2 + x^2 + (y+R)^2]^{1/2}$$

$$Q_2 = [(z-z_0)^2 + x^2 + (y-R)^2]^{1/2}$$

a) Sphere

With the transformation (3.2) we find:

$$\left. \begin{aligned} H_{s,r} &= +H_{s,x} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + H_{s,z} \cos \vartheta \\ H_{s,\vartheta} &= +H_{s,x} \cos \vartheta \cdot \cos \varphi - H_{s,z} \sin \vartheta \\ H_{s,\varphi} &= -H_{s,x} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

b) Cylinder

With the transformation (3.1) we find:

$$\left. \begin{aligned} H_{s,\varrho} &= +H_{s,x} \cos \varphi \\ H_{s,\varphi} &= -H_{s,x} \sin \varphi \\ H_{s,z} &= +H_{s,z} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

5.4 The field of the neutral sheet return-currents

For the $\cos \varphi$ -dependence of the neutral sheet's radial magnetic field component only terms of order $m=1, 3, 5, \dots$ with alternating sign are of importance for both the

cylinder and the sphere. If we take only $m=1$ the result is accurate within an error of 6.8 per cent relative to H_{rc} , but in comparison with both H_s and H_{rc} the error is less than 3 per cent.

For the numerical results (chapter 6) the functions $P_n^1(\cos \vartheta)$ (sphere) and $I_1(\varrho n \pi / c)$ (cylinder) have been used, but it should be mentioned that physical investigations close to the magnetopause require a higher accuracy by using the expansions which involve $m=3$ and $m=5$.

As demonstrated in chapter 4.2 and 4.3 b, the magnetic field components within the sphere and the cylinder are determined by (4.14) and (4.21). By restriction to $m=1$ the coefficients in (4.12) and (4.21) may be written as

$$a_n^1 = -H_0 \cdot a_n$$

in (4.12), and

$$A_1 C_n = -H_0 \cdot A_n \quad \text{and} \quad A_1 D_n = -H_0 \cdot B_n$$

in (4.21).

The a_n , A_n , and B_n are dimensionless but depend on the model parameters R and z_0 .

a) Sphere

We find the field components of u_{rc} from (4.12) and (4.14):

$$\left. \begin{aligned} H_{rc,r} &= +H_0 \cos \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n^1(\cos \vartheta) \cdot (r/R)^{n-1} \\ H_{rc,\vartheta} &= +H_0 \cos \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos \vartheta) \cdot (r/R)^{n-1} \\ H_{rc,\varphi} &= -H_0 \sin \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \frac{P_n^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \cdot (r/R)^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

b) Cylinder

By the relations

$$I'_1(x) = 1/2 [I_0(x) + I_2(x)]$$

$$\frac{1}{x} I_1(x) = 1/2 [I_0(x) - I_2(x)]$$

we find the field components of u_{rc} from (4.21):

$$\left. \begin{aligned}
 H_{rc,\varrho} &= +H_0 \cos \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{c} z + B_n \sin \frac{n\pi}{c} z \right) \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{c}\varrho\right) + I_2\left(\frac{n\pi}{c}\varrho\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{c}R\right) + I_2\left(\frac{n\pi}{c}R\right)} \\
 H_{rc,\varphi} &= -H_0 \sin \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{c} z + B_n \sin \frac{n\pi}{c} z \right) \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{c}\varrho\right) - I_2\left(\frac{n\pi}{c}\varrho\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{c}R\right) + I_2\left(\frac{n\pi}{c}R\right)} \\
 H_{rc,z} &= -H_0 \cos \varphi \cdot 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi}{c} z - B_n \cos \frac{n\pi}{c} z \right) \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{c}\varrho\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{c}R\right) + I_2\left(\frac{n\pi}{c}R\right)}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

6. Numerical results

This concluding chapter points out a few aspects and physical consequences due to the variation of the model parameters:

The computed field-line pictures (figures 4–7) give an impression of a quiet and pre-substorm configuration of the magnetosphere.

Furthermore it is of importance that the magnetic field of the boundary currents is explicitly known everywhere within the magnetosphere. For example the different contributions to the total field are demonstrated at the synchronous orbit, the sub-solar point, and the plane $z=0$ close to the magnetopause.

Finally the dependence of the neutral points on the variation of the current density of the neutral sheet is shown.

The values of the angles stated in this chapter are measured from the earth's dipole axis (i. e. the polar distance).

6.1 Magnetic field-line configuration

Figures 4 and 5 show a typical quiet-time magnetosphere with the corresponding values of the parameters $R=16\text{ Re}$, $A=10\text{ Re}$, $B=10\text{ Re}$, and $H_0=10\gamma$ or 20γ respectively, as mentioned in chapter 3.

The polar oval is limited by the last field line extending into the tail at noon, and by the last open field line at midnight (looking from the north-pole). With respect to this definition the values of angles, belonging to the limit of the polar oval, indicate the polar distance where the corresponding field lines intersect the earth (tables 1 and 2).

The more the tail field increases, the more the polar oval extends southward. This corresponds with the fact that the tail field configuration is formed by the field lines originating within the polar oval [DESSLER and JUDAY 1965], and that the magnetic flux must be conserved.

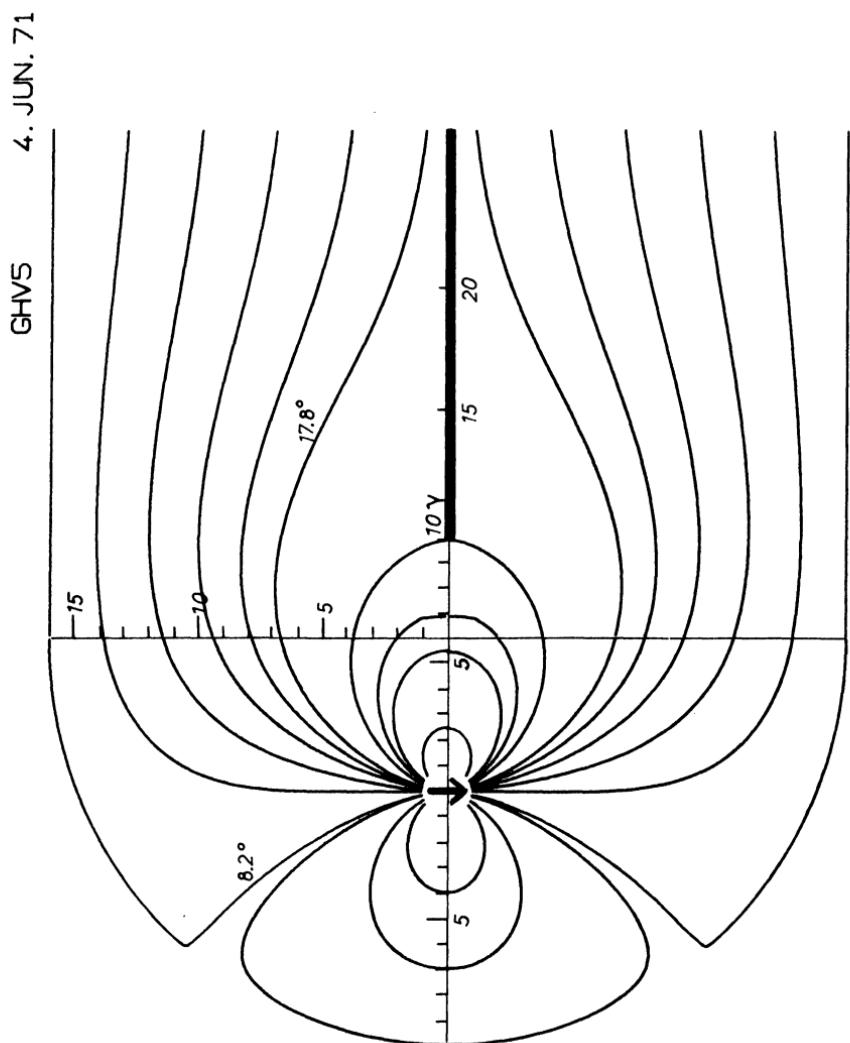


Fig. 4: Quiet-time magnetosphere. The model parameters are: $R=16 \text{ } Re$, $A=10 \text{ } Re$, $B=10 \text{ } Re$, $H_0=10 \gamma$. The polar oval is limited by 8.2° (noon), 17.8° (midnight), and the polar distance of the neutral point is 31.18° (see table 1).

4. JUN. 71

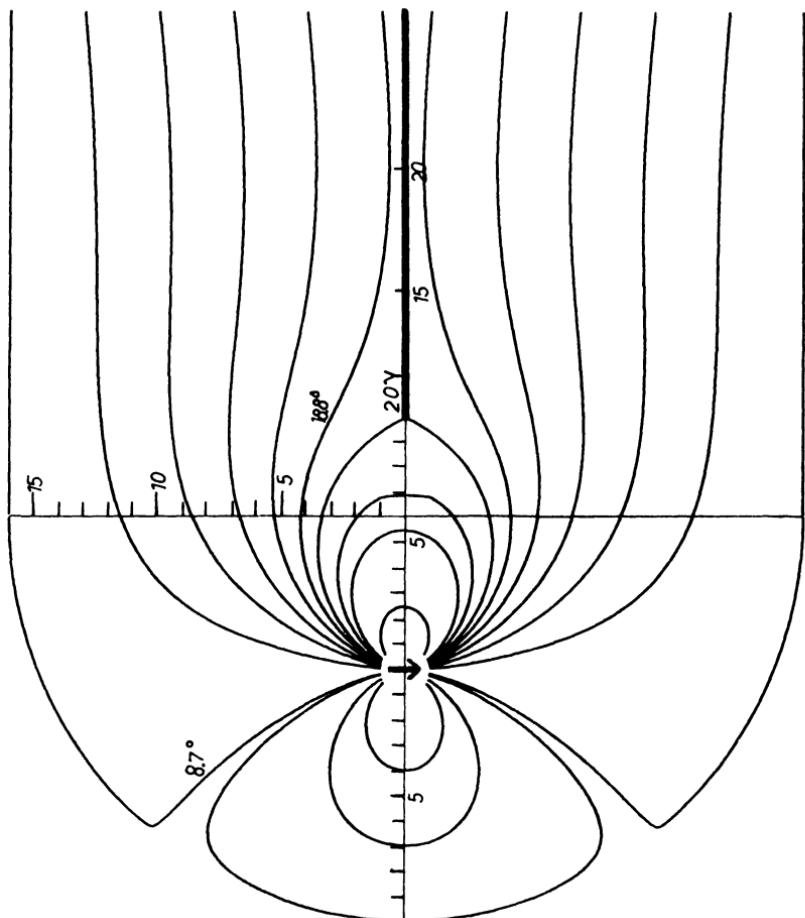


Fig. 5: Quiet-time magnetosphere with the same model parameters as in fig. 4, except $H_0 = 20\gamma$. The polar oval is limited by 8.7° (noon), 18.8° (midnight), and the polar distance of the neutral point is 33.09° (see table 1).

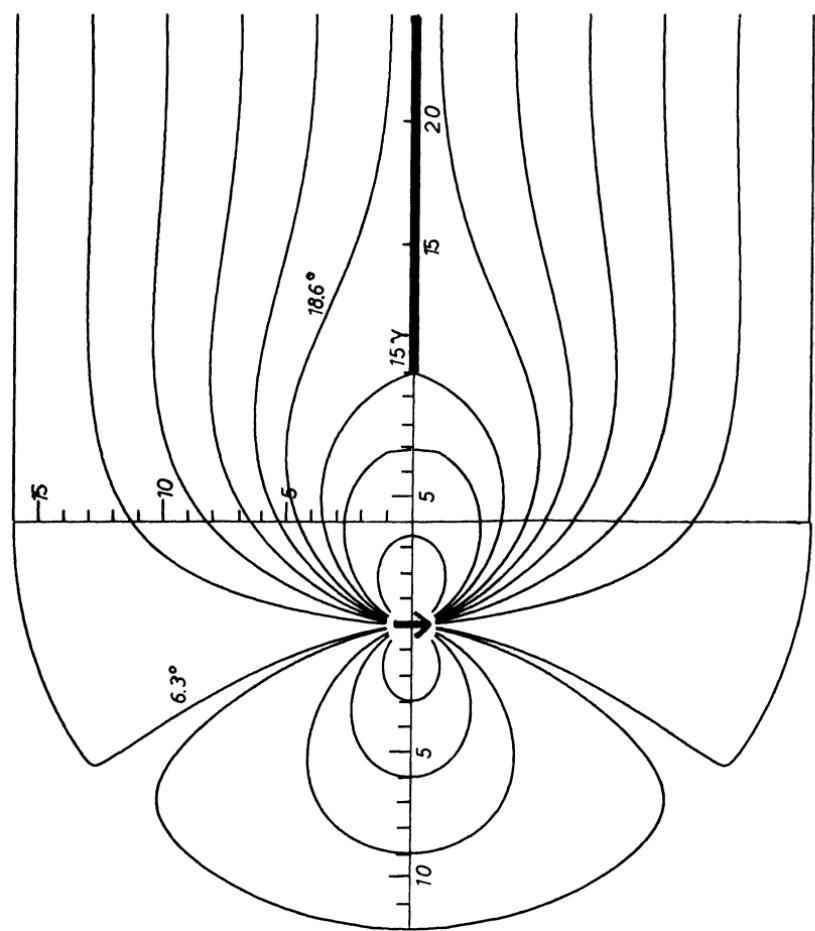
GHV2
4. JUN. 71

Fig. 6: Quiet-time magnetosphere. The model parameters are: $R=16 \text{ Re}$, $A=12 \text{ Re}$, $B=10 \text{ Re}$, $H_0=15 \gamma$. The polar oval is limited by 6.3° (noon), 18.6° (midnight), and the polar distance of the neutral point is 23.64° (see table 2).

4. JUN. 71

GHA

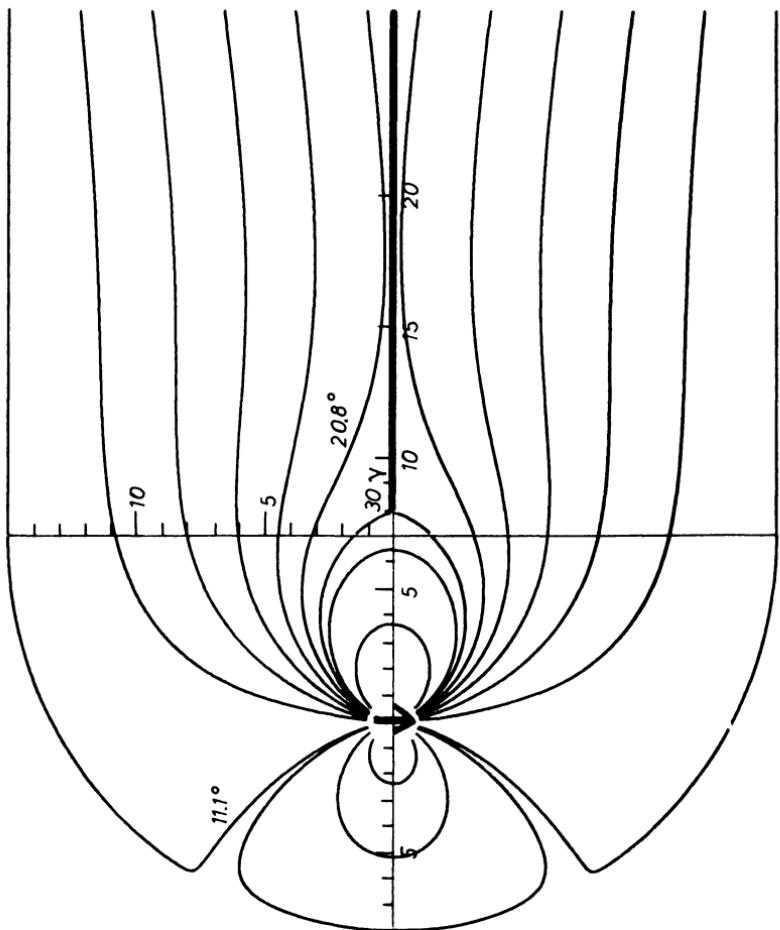


Fig. 7: Pre-substorm magnetosphere. The field-line configuration is caused by an inward motion of the magnetopause and the neutral sheet's inner edge ($\Delta R = -1 \text{ Re}$, $\Delta A = -4 \text{ Re}$, $\Delta B = -2 \text{ Re}$), and an increase of the sheet field ($\Delta H_0 = +15 \gamma$), compared with figure 6. The polar oval is limited by 11.1° (noon), 20.8° (midnight), and the polar distance of the neutral points is 36.35° (see table 2).

Table 1: Dependence of the location of the polar oval and the neutral points on the neutral sheet field H_0 for quiet conditions: $R=16 \text{ Re}$, $A=10 \text{ Re}$, $B=10 \text{ Re}$.

H_0	polar oval		neutral points
	noon	midnight	
10γ	8.2°	17.8°	31.18°
20γ	8.7°	18.8°	33.09°

Table 2: Quiet and pre-substorm polar distance of the polar oval and the neutral points. The pre-substorm configuration is caused by an inward motion of the magnetopause and the neutral sheet's inner edge ($\Delta R = -1 \text{ Re}$, $\Delta A = -4 \text{ Re}$, $\Delta B = -2 \text{ Re}$), and an increase of the sheet field ($\Delta H_0 = +15 \gamma$).

configuration:		quiet	pre-substorm
parameters:	R	16 Re	15 Re
	A	12 Re	8 Re
	B	10 Re	8 Re
	H_0	15γ	30γ
polar oval:	noon	6.3°	11.1°
	midnight	18.6°	20.8°
neutral points:		23.64°	36.35°

A comparison of figures 4 and 5 shows a more tail-like field configuration, quasi a compression close to the neutral sheet, by increasing the neutral sheet currents.

Figure 6 shows another example of a quiet-time magnetosphere formed by the parameters $R=16 \text{ Re}$, $A=12 \text{ Re}$, $B=10 \text{ Re}$, and $H_0=15 \gamma$. Proceeding from this configuration some effects characterizing a strong substorm growth-phase are combined in figure 7 by variation of the model parameters as follows:

- Inward motion of the dayside magnetopause by 4 Re corresponding to a general decrease of the magnetospheric radius by 1 Re .
- Earthward motion of the neutral sheet's inner edge by 2 Re .
- Increase of the neutral sheet's magnetic field by 15γ resulting from an increase of the current density.

These effects generate further phenomena:

- Depression of the nightside magnetic field due to b) and c), and increase of the dayside magnetic field due to a) in the equatorial plane (see table 5).

2. Increase of the tail magnetic field due to c).
3. Equatorward expansion of the polar oval (see table 2).
4. Southward shifting of the neutral points (see table 2).
5. Compression of the plasma sheet.

The compression connected plasma effects cannot be described by this model, but the corresponding magnetic field configuration is computed in figure 7.

Table 3: Contributions to the total magnetic field at the magnetopause. The parameters are $R = 16 \text{ Re}$, $A = 10 \text{ Re}$, $B = 10 \text{ Re}$, $H_0 = 20 \gamma$ (see fig. 5).

field-components		plane $z=0$		subsolar point*)
		$\varphi = 0^\circ$ *)	$\varphi = 90^\circ$ **)	
		noon-midnight-meridian-plane	equatorial-plane	
H_d	[γ]	+ 6.16	- 6.25	- 31.18
H_{cf}	[γ]	+ 9.80	- 13.38	- 47.02
H_s	[γ]	+ 5.86	+ 13.25	+ 6.99
H_{rc}	[γ]	+ 5.64	- 14.69	+ 0.15
H_{total}	[γ]	+ 27.46	- 21.07	- 71.06

*) The sign states the ϑ -direction of the magnetic field.

**) The sign states the φ -direction of the magnetic field. (In both cases the other components do not exist.)

Table 4: Contributions to the total magnetic field at synchronous orbit (6.6 Re). For parameters see table 3. The field of the boundary-currents increases from 0.0 L.T. to 12.0 L.T., and the field of the neutral sheet decreases.

Local-Time	H_{dipol} [γ]	$H_{\text{boundary currents}}$ [γ]	$H_{\text{neutral sheet}}$ [γ]	H_{total} [γ]
0.0	108.46	12.98	- 15.24	106.20
2.0	108.46	13.54	- 12.83	109.18
4.0	108.46	15.36	- 9.28	114.54
6.0	108.46	18.76	- 6.88	120.34
8.0	108.46	23.97	- 5.56	126.87
10.0	108.46	29.91	- 4.93	133.44
12.0	108.46	32.84	- 4.74	136.56

The most important effect for the shifting of the neutral points is the variation of the stand-off distance (parameter A).

The extension of the polar oval is determined by the location of the neutral sheet's inner edge (parameter B) and the neutral sheet field (parameter H_0) on the nightside, and by the stand-off distance on the dayside.

6.2 Contributions to the total magnetic field

Tables 3 and 4 summarize the contributions to the total magnetic field. As mentioned above, the total field consists of the dipole field H_d , the field of the Chapman-Ferraro currents H_{cf} , the neutral sheet field H_s , and the field of the neutral sheet return-currents H_{rc} .

For magnetic quiet-time parameters (see figure 5), table 3 shows these fields at three different points at the magnetopause: At the subsolar point, and at the plane $z=0$ (in the noon-midnight meridian plane and the equatorial plane). It is evident that the fields of the boundary current-system must necessarily be taken into account in order to interpret magnetospheric processes near the magnetopause.

In table 4 the field contributions at the synchronous orbit (6.6 Re) are presented. The small difference between a self-consistent boundary calculation [MEAD and BEARD 1964] and the geometry of the magnetopause used in this model can be neglected.

The magnetic field of the boundary-currents increases from local midnight to noon, whereas the field of neutral-sheet currents decreases. (The Chapman-Ferraro currents have a maximum at the subsolar point because of the influx of solar particles being perpendicular to the magnetopause.)

Table 5: Total magnetic field at synchronous orbit for a quiet and pre-substorm magnetosphere compared with ATS-1 measurements [CUMMINGS, et al. 1968].

Local-Time	configuration		ATS-1 [γ^*])
	quiet [γ]	pre-substorm [γ]	
0.0	106.20	98.19	105
2.0	109.18	104.08	108
4.0	114.54	114.63	112
6.0	120.34	126.34	119
8.0	126.87	141.22	127
10.0	133.44	159.59	133
12.0	136.56	169.88	136

*) see fig. 8.

6.3 Magnetic field at synchronous orbit and comparison with ATS-1 measurements

In table 5 the total magnetic field from table 4 at the ATS-1 orbit (6.6 Re) is compared with values derived from a pre-substorm magnetospheric configuration (parameters: $R=15\text{ Re}$, $A=8\text{ Re}$, $B=8\text{ Re}$, $H_0=35\gamma$). The third column contains the ATS-1 quiet-time measurements [CUMMINGS, BARFIELD, and COLEMAN 1968] (fig. 8) which are well in accordance with the quiet-time model configuration shown in fig. 5.

The pre-substorm configuration (substorm growth-phase) yields a nightside depression and a dayside increase of the magnetic field due to an inward motion and a

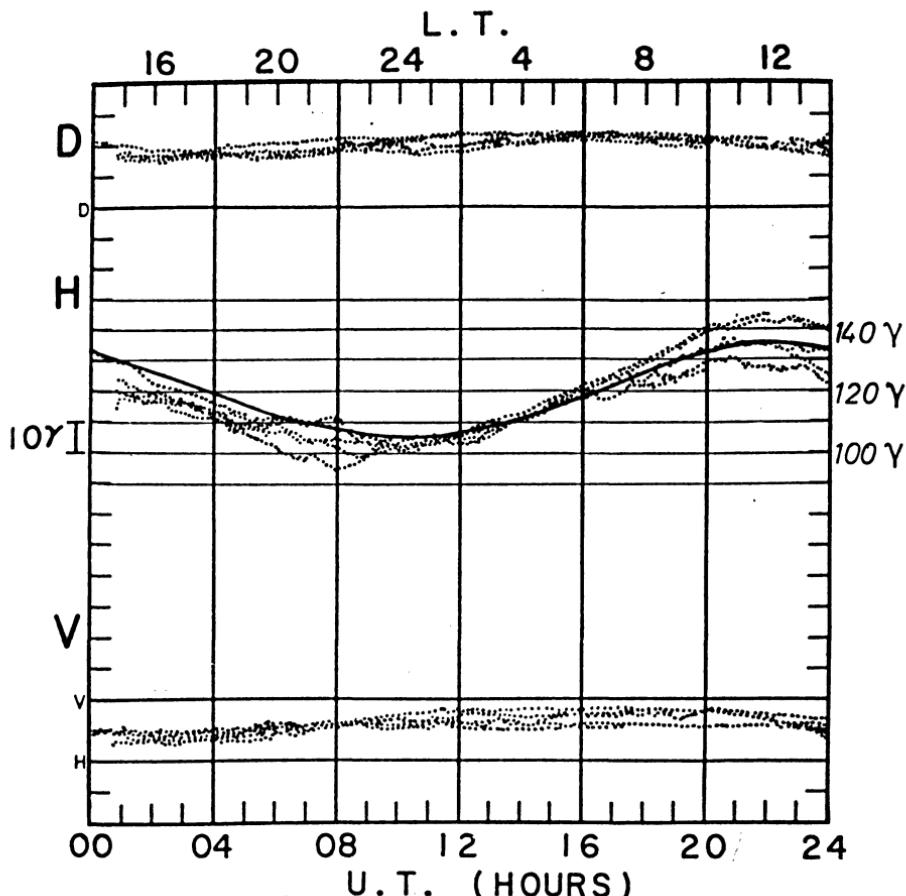


Fig. 8: Field strength measured by the ATS-1 spacecraft in an equatorial orbit at 6.6 Re [CUMMINGS, et al. 1968]. H is equal to the total field in the model presented in this paper.

current increase of the neutral sheet, and an earthward motion of the subsolar point respectively (see chapter 6.1).

In general, the dayside field of the magnetosphere is essentially determined by the distance to the subsolar point, whereas the nightside configuration depends on the location and the current density of the neutral sheet.

A decrease of R affects, approximately, both the dayside and the nightside of the magnetosphere in the same way, but this effect is not significant compared with a variation of the other model parameters.

Magnetic field variations in the morning- and evening-sector are caused by both dayside and nightside conditions.

6.4 Effect of the neutral-sheet currents on the location of the neutral points

In order to demonstrate an influence of the nightside of the magnetosphere on the location of the neutral points table 6 shows the dependence of the polar distance of the neutral points on the variation of the neutral-sheet field H_0 for two distances of the inner edge.

Table 6: Dependence of the polar distance of the neutral points on the neutral sheet field H_0 for $B=10 \text{ Re}$ and $B=6 \text{ Re}$.

Neutral sheet $H_0 [\gamma]$	$B=10 \text{ Re}$ polar distance [$^\circ$]	$B=6 \text{ Re}$ polar distance [$^\circ$]
0	29.14	29.14
10	31.18*)	31.60
20	33.09*)	33.88
30	34.90	36.01
40	36.63	38.03
50	38.28	39.96

*) see table 1 and figures 4 and 5.

It is shown that the location of the neutral sheet's inner edge has only a very small effect on the neutral points, whereas their shifting southward is mostly due to an increase of H_0 .

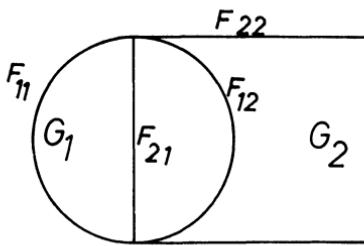
It should be mentioned that the shifting reaches this magnitude also by an inward motion of the subsolar point by 2 Re .

Appendix 1

Description of an alternating process for solution of the potential-equation

The determination of the potential function for complex geometries is possible by splitting the volume in separate regions which allow an analytical solution of Laplace's equation (i.e. the regions have to be bounded by surfaces being coordinate planes of systems which allow to separate the potential-equation).

We want to restrict ourselves to the description of the alternating process without entering into convergence problems. For discussion see KANTOROWITSCH and KRYLOW [1956], p. 561ff.



Suppose that the boundary F_1 of the area G_1 consists of F_{11} and F_{12} at which F_{12} is located within the area G_2 . Analogous F_{21} is the part of the boundary F_2 which is situated within G_1 .

1. First continuous boundary values will be defined on the boundary $F_{11} + F_{22}$ of the joint area $G_1 + G_2$.
2. Then the boundary values given on F_{11} will be extended continuously into F_{12} .
3. This makes possible to get a solution of the boundary value problem concerning G_1 .
4. The potential function $f_1^{(1)}$ has boundary values on the surface F_{21} of G_2 which join continuously the boundary values on F_{22} .
5. This allows to solve the boundary value problem for G_2 with the solution $f_2^{(1)}$.
6. The potential function $f_2^{(1)}$ yields an improvement of the values given first on F_{12} .

A reiteration of this process with this improved boundary values determines two new functions $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}$, and so on. It can be shown that both sequences of

$$f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_1^{(3)}, \dots \quad \text{and}$$

$$f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, f_2^{(3)}, \dots$$

converge toward potential functions f_1 and f_2 being identical within the area of intersection of $G_1 + G_2$.

Convergence calculations have been made with simple boundary values. It could be shown that the process converges very quickly.

On the other hand it remains a problem to verify in general the convergence of this process for Neumann's boundary conditions (i.e. for arbitrary boundaries and boundary values).

Acknowledgements

I would like to thank Prof. Dr. W. KERTZ for suggesting this work.

I am grateful to the Max-Planck-Institut für Extraterrestrische Physik (München) for granting hospitality and computer-time during the evaluation of numerical results.

References

- CUMMINGS, W. D., J. N. BARFIELD, and P. J. COLEMAN: Magnetospheric substorms observed at the synchronous orbit, *J. Geophys. Res.* 73, 6687–6698, 1968
- DESSLER, A. J., and R. D. JUDAY: Configuration of auroral radiation in space, *Planet. Space Sci.* 13, 63–72, 1965
- FAIRFIELD, D. H.: Average and unusual locations of the earth's magnetopause and bow shock, *J. Geophys. Res.* 76, 6700–6716, 1971
- KANTOROWITSCH, L. W., and W. L. KRYLOW: *Näherungsmethoden der höheren Analysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956
- MEAD, G. D., and D. B. BEARD: Shape of the geomagnetic field solar wind boundary, *J. Geophys. Res.* 69, 1169–1179, 1964
- NESS, N. F.: Review of magnetic field observations, preprint X-690-71-465 (Goddard Space Flight Center), 1971
- ROEDERER, J. G.: Quantitative models of the magnetosphere, *Rev. Geophys.* 7, 77–96, 1969
- SPEISER, T. W., and N. F. NESS: The neutral sheet in the geomagnetic tail: Its motion, equivalent currents, and field line connection through it, *J. Geophys. Res.* 72, 131–142, 1967
- SPREITER, J. R., and A. Y. ALKSNE: Effect of neutral sheet currents on the shape and magnetic field of the magnetospheric tail, *Planet. Space Sci.* 17, 233–246, 1969
- WILLIAMS, D. J., and G. D. MEAD: Nightside magnetosphere configuration as obtained from trapped electrons at 1100 kilometers, *J. Geophys. Res.* 70, 3017–3029, 1965

Subsequent Note

Right after submission of the present paper to the *Zeitschrift für Geophysik* the author noticed a similar treatment of the same problem published by I. I. ALEKSEEV and V. P. SHABANSKY and titled "A Model of a Magnetic Field in the Geomagnetosphere" (*Planet. Space Sci.*, 20, 117–133, 1972). ALEKSEEV and SHABANSKY assumed a paraboloid of revolution for the shape of the magnetopause. The mathematical method employed is identical in both papers.



In memoriam

KARL JUNG
(1902—1972)

Am 28. 4. 1972, wenige Monate vor Vollendung seines 70. Lebensjahres, verstarb em. Prof. Dr. Dr. e. h. KARL JUNG, Ehrenmitglied der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft. Mit ihm ist ein ungemein vielseitiger und unermüdlich tätiger Forscher und akademischer Lehrer dahingegangen.

KARL JUNG wurde am 8. Oktober 1902 in Frankfurt am Main geboren und legte dort 1921 an der Sachsenhäuser Oberrealschule die Reifeprüfung ab. Anschließend studierte er Mathematik, Physik, Geophysik an den Universitäten Frankfurt a. M. (1921—1922), Tübingen (1922—1924) und Göttingen (1924—1926). Den Studienabschluß bildete die Promotion zum Dr. phil. im Februar 1927 bei Geheimrat Prof. Dr. E. WIECHERT, Göttingen, mit einer gravimetrischen Dissertation, die in drei selbständigen Teilen in der Zeitschrift für Geophysik, Band 3, 1927, erschien.

Bereits vor Abschluß der Promotion ging KARL JUNG 1926 zum Geodätischen Institut Potsdam und war dort zunächst als Assistent, später als Observator bis 1941 tätig. In diesen Zeitraum fallen folgende Stationen seiner akademischen Laufbahn an der Technischen Hochschule Berlin:

- 1930: Habilitation für das Fach Geophysik,
- 1937: Nichtbeamter a. o. Professor,
- 1939: apl. Professor

KARL JUNG hat während der 15 Jahre in Potsdam eine äußerst rege wissenschaftliche Tätigkeit entfaltet und grundlegende Untersuchungen zu den Themenkreisen „Schwerkraft und Figur der Erde“ sowie „Auswertung von Drehwaagmessungen“ durchgeführt, die ihn in sehr kurzer Zeit in der Fachwelt des In- und Auslandes bekannt

machten. Über 40 Publikationen geben Zeugnis von der Vielseitigkeit der behandelten Probleme sowie ihrer gründlichen Bearbeitung in theoretischer und praktischer Hinsicht. Viele dieser Arbeiten sind auch heute noch für die Forschung von grundlegender Bedeutung.

Im Jahre 1941 wurde KARL JUNG zum o. Professor und Direktor des Geophysikalischen Instituts der Universität Straßburg ernannt. Wegen der kriegsbedingten Behinderung der Arbeitsmöglichkeiten war ihm eine volle Entfaltung in Lehre und Forschung nicht vergönnt, zumal er für längere Zeit zum Heeresdienst eingezogen war. Mit Kriegsende 1945 fiel das Elsaß an Frankreich zurück und damit ging für KARL JUNG sein Straßburger Ordinariat verloren.

Im November 1945 folgte KARL JUNG einem Angebot der Bergakademie Clausthal, bei der er zunächst als Vertreter, später als Nachfolger seines im Kriege verschollenen Zwillingsbruders apl. Professor HEINRICH JUNG die Leitung der Abteilung Geophysik des Physikalischen Instituts übernahm. Wegen der damaligen schwierigen Verhältnisse der Nachkriegszeit konnte seine Stellung nur schrittweise verbessert werden, so daß erst 1953 seine Ernennung zum a.o. Professor und Direktor des neu geschaffenen Geophysikalischen Instituts erfolgte; 1954 wurde er zum persönlichen Ordinarius ernannt.

Ein eindrucksvolles Bild von Umfang und Intensität der Clausthaler Tätigkeit von KARL JUNG vermitteln die Nachrichten der Bergakademie, Heft 10–12 (1946–1958), und die Vorlesungsverzeichnisse von WS 1946/47 bis SS 1957. Hiernach sind besonders hervorzuheben:

- (1) Systematischer Ausbau der Geophysik zum Vollstudium;
- (2) Übernahme der Vorlesungen in Physik sowie Mathematik und Mechanik während der mehrfachen und lang dauernden Vakanzen der zuständigen Lehrstühle in den Aufbaujahren 1946–1951. Die damit verbundenen physischen Belastungen waren so groß, daß KARL JUNG eines Tages während einer Vorlesung ohnmächtig zusammenbrach;
- (3) Behandlung vieler Themen der Forschung und Ausbildung in zahlreichen Publikationen und Vorträgen anlässlich von Tagungen, Kolloquien usw.

Neben dieser so vielfältigen Tätigkeit im Rahmen seines Faches und der Nachbarfächer hat KARL JUNG sich auch für allgemeine Hochschulinteressen eingesetzt; so hat er z. B. mehrere Semester ein musikalisches Seminar abgehalten, mit kompositorischen Analysen, die durch Interpretationen am Klavier eindrucksvoll ergänzt wurden, u. a. auch durch eine von ihm selbst im strengen Stil von Bach komponierte dreistimmige Fuge.

Zu der Clausthaler Tätigkeit von KARL JUNG kann zusammenfassend gesagt werden, daß er an Aufbau und Ausbau der Hochschule im ersten Dezennium nach dem 2. Weltkrieg entscheidend mitgewirkt hat, und zwar mit rückhaltlosem Einsatz seines ganzen Könnens und seiner Person.

KARL JUNG gehörte der Bergakademie Clausthal bis 1956 an, um dann einem Ruf an die Universität Kiel zu folgen, an der er bereits seit 1951 sein Fachgebiet im Rahmen eines Lehrauftrages von Clausthal aus vertreten hatte.

Ab Oktober 1956 gehörte KARL JUNG dem Lehrkörper der Universität Kiel an, zunächst als a. o. Professor und persönlicher Ordinarius und ab 1962 als o. Professor. Er hat auch dort das Fach Geophysik, das vorher nicht durch einen Lehrstuhl vertreten war, in Lehre und Forschung im Rahmen eines neuen Instituts zu großer Blüte geführt. Bis zu seiner Emeritierung hat er unermüdlich mit seinen Mitarbeitern am Ausbau des Instituts, insbesondere der Lehre gearbeitet.

Die nahezu 50jährige wissenschaftliche Tätigkeit von KARL JUNG ist durch eine große Zahl von Veröffentlichungen gekennzeichnet, die hier nur andeutungsweise gewürdigt werden können:

Seine tiefsschürfenden Untersuchungen

- über die Erdabplattung und die Geoidgestalt in ihrer Beziehung zum Schwerfeld,
- über die Beziehung zwischen der Massenverteilung im Erdinnern und dem Schwerfeld an der Erdoberfläche,
- über den isostatischen Gleichgewichtszustand der Erdkruste

sind von grundlegender Bedeutung und haben eine Basis für weitere Forschungen geschaffen.

Seine Arbeiten zur gravimetrischen Prospektion haben einen wesentlichen Beitrag zur theoretischen Fundierung und Entwicklung der Angewandten Geophysik geleistet.

Seine umfassende Sachkenntnis hat ihren Niederschlag in einer Reihe von Handbuchartikeln und Büchern gefunden, die für jeden Geophysiker — ob Praktiker oder Wissenschaftler — von höchstem Wert sind.

Die Technische Universität Clausthal verlieh KARL JUNG am 17. Mai 1967 im Rahmen der feierlichen Eröffnungssitzung der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft den Grad und die Würde eines Doktors der Naturwissenschaften Ehrenhalber „in Anerkennung seiner grundlegenden Arbeiten für die Entwicklung der Physik des Erdkörpers und seiner bedeutenden Verdienste um die hiesige Hochschule in der Zeit des Wiederaufbaues nach dem letzten Kriege“.

Der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft widmete sich KARL JUNG mit großer Aktivität. Er besuchte regelmäßig die Tagungen der Gesellschaft, und seine wissenschaftlichen Vorträge wurden wegen ihrer Originalität und wegen der lebhaften Vortragsweise von den Tagungsteilnehmern stets gerne gehört. Von 1955 bis 1958 war KARL JUNG 1. Vorsitzender der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, die ihm im November 1971 die Ehrenmitgliedschaft verlieh.

Das letzte Lebensjahrzehnt von KARL JUNG wurde durch eine immer stärker werdende Gehbehinderung überschattet, die er mit bewundernswerter Selbstbeherrschung ertrug. Auch während dieser langen Zeit schwerer gesundheitlicher Belastung

zeigte er sich seinen Freunden, Kollegen und Schülern wie auch in allen früheren Lebensjahren als der bescheidene Mensch, der von seiner Person kein Aufhebens machte.

Dem verstorbenen, hochgeachteten Kollegen KARL JUNG werden die Deutsche Geophysikalische Gesellschaft und alle seine Freunde im In- und Ausland ein ehrendes Gedenken bewahren.

O. ROSENBACH

Buchbesprechungen

Physics and Chemistry in Space, Herausgegeben von J. G. ROEDERER und J. ZÄHRINGER Vol. 1: J. A. JACOBS, Geomagnetic Micropulsations, VIII und 179 Seiten, 81 Abbildungen, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, Titel Nr. 3210, DM 36.—.

In diesem Buch wird versucht, eine Zusammenfassung aller bisher (1969) über Pulsationen gewonnenen Erkenntnisse zu geben. Die große Zahl der in den letzten Jahren diesem Thema gewidmeten Veröffentlichungen hat den Autor damit vor eine schwierige Aufgabe gestellt. Es ist ihm dennoch gelungen, fast alle wesentlichen Beiträge zur Beobachtung und Theorie geomagnetischer Pulsationen in verständlicher Form zusammenzufassen. Dabei liegt der Schwerpunkt, wie der Umfang des Buches nicht anders erwarten läßt, auf der Mitteilung von Ergebnissen; die Interpretation oder Diskussion durch den Autor wird weitgehend unterlassen.

Das Buch ist in sechs Kapitel gegliedert: 1. Das Magnetfeld der Erde, 2. Morphologie geomagnetischer Mikropulsationen, 3. Magnetohydrodynamische Wellen, 4. Theorie der Herkunft von Pc 1 Pulsationen, 5. Theorien der PC 2—5 Pulsationen und 6. Mikropulsationen und die Diagnostik der Magnetosphäre. Jedem Kapitel folgt eine ausführliche Bibliographie. Ein Stichwortverzeichnis erleichtert das Auffinden von Begriffen.

Das Buch ist gut geeignet zur Einarbeitung in die Pulsationsforschung, da es bei einem Umfang eine abgerundete Abhandlung des Themas bietet, die den Anfänger vor einem „Untergehen“ in Originalarbeiten bewahrt. Wer eine ausführlichere Darstellung sucht, kann mit Hilfe dieses Buches sehr leicht entsprechende Originaltexte finden.

B. THEILE

Physics and Chemistry in Space, Herausgegeben von J. G. ROEDERER und J. ZÄHRINGER Vol. 2: J. G. ROEDERER, Dynamics of Geomagnetically Trapped Radiation, XIV und 166 Seiten, 94 Abbildungen, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, Titel No. 3211, DM 36,—.

Diese Monographie, die aus einer Vorlesung des Autors an der Universität Denever hervorgegangen ist, ist für Studenten und Wissenschaftler zum Verständnis der physikalischen Grundlagen der Teilchenspeicherung im Erdmagnetfeld geschrieben. Wie man schon aus dem Titel (*trapped radiation* und nicht *particles*) schließen kann, ist dieses Buch sehr praxisbezogen und daher nicht für den Theoretiker gedacht. Das Buch ist in fünf Kapitel und einen Anhang gegliedert: 1. Teilchendrift und die erste adiabatische Invariante, 2. Spiegelung, die zweite adiabatische Invariante und Drift-Schalen, 3. Periodische Driftbewegung und Erhaltung der dritten adiabatischen Invariante, 4. Verteilung gespeicherter Teilchen und Flusskartierung, 5. Verletzung der adiabatischen Invarianten und Teilchendiffusion. Die Herleitung einiger wichtiger Gleichungen und einzelne Beweise sind im Anhang zusammengestellt, um den eiligen Leser nicht mit zu vielen Einzelheiten zu belasten. Die Darstellung des Stoffes erfolgt in sehr anschaulicher Weise, wozu viele Skizzen beitragen. Den theoretischen Betrachtungen werden Ergebnisse aus Satellitenmessungen zur Seite gestellt, womit eine gute Anleitung zur Interpretation von Teilchenmessungen gegeben wird.

Ein Stichwortverzeichnis und die Verwendung durchweg gleicher Symbole, die in einer Zusammenstellung aufgeführt sind, erleichtern das Nachlesen einzelner Teilkapitel.

B. THEILE

RUDOLF SCHULZE: „Strahlenklima der Erde“. Mit 108 Abbildungen in 217 Einzeldarstellungen und 36 Tabellen. 217 Seiten. Wissenschaftliche Forschungsberichte Band 72. Dr. Dietrich Steinkopff Verlag Darmstadt 1970 DM 66,-.

Das Buch ist aus Vorlesungen über „Strahlungsphysik“ und „Strahlungsbioökologie“ entstanden. Diese Titel beschreiben den Inhalt des Buches besser als der Buchtitel: die physikalischen und bioökologischen (medizinischen) Aspekte stehen gegenüber den geographischen im Vordergrund. Es werden also nicht die Klimaregionen der Erde nach Strahlungsgesichtspunkten betrachtet, sondern der Klimafaktor Strahlung in seiner Variabilität.

Rund ein Viertel des Buches beschäftigt sich mit der Definition der Strahlungsarten, ihren Maßeinheiten sowie ihrer Messung und ihren biologischen Wirkungen. Der Hauptteil des Buches, etwa die Hälfte dem Umfange nach, befaßt sich mit der zeitlichen, räumlichen und spektralen Verteilung der Strahlungsarten und der Strahlungsbilanz. Zur Illustration greift Schulze vielfach auf die Messungen seines Meteorologischen Observatoriums in Hamburg zurück, von dem langjährige Beobachtungsreihen auch vieler Detailaspekte zur Verfügung stehen. Die Darstellung der globalen Aspekte stützt sich z. T. auf eigene Rechnungen, z. T. auf die globalen Betrachtungen von Albrecht und Budyko. Hier ist ein Wort der Kritik am Platze, das wohl hauptsächlich den Verlag trifft: Weltkarten im Format 7 cm × 4,5 cm dienen nur noch zur Illustration, eine Entnahme von Werten für andere Untersuchungen ist kaum möglich.

Ein weiteres Viertel des Buches bespricht verschiedenartige Anwendungen. Weil diese vielleicht besonderes Interesse finden werden, seien einige Themen hier aufgeführt: Vorhersage der Globalstrahlung für die Landwirtschaft, Globalstrahlung und natürliche Beleuchtung, Sonnenstrahlung und Kühlleistung im Büraum, künstliche Beleuchtung im Gewächshaus, Strahlenwirkung auf die menschliche Haut und Strahlenschutz, Infrarottechnik. Der potentielle Benutzer sollte noch etwas über den Charakter des Buches erfahren. Es enthält sehr viele Einzelangaben in Form von Tabellen, Diagrammen, Zusammenstellungen und Zitaten und ist in dieser Weise eine Fundgrube. Sollte man etwa die Frage haben, wie man für einen Ort bekannter Lage und ggf. Bewölkung das Strahlungsklima bestimmen kann, so wird man diese Frage nicht direkt beantwortet finden, wohl aber viele Einzelheiten und Hinweise im Text.

Das Buch hat viel von der Frische und Anregung erhalten, welche die Vorlesungen Prof. Schulzes auszeichneten. Diese Tatsache allein würde bereits seine Existenz auf Dauer rechtfertigen. Es war nicht die Absicht des Autors, ein weiteres Buch über Atmosphärische Strahlung zu schreiben, sondern eine Ergänzung zu den vorhandenen. So wurden hier die vielen Forschungsergebnisse festgehalten, die sonst in der Spezialliteratur verborgen bleiben würden. Damit wird das Buch in Zukunft eine unentbehrliche Ergänzung zu den anderen Strahlungsbüchern sein. Die Ausstattung ist, abgesehen von dem Format einiger Abbildungen, sehr gut, der Preis, verglichen mit anderen Lehrbüchern, akzeptabel: ein guter Kauf. L. HASSE

SKOVLI, GUNNAR: (ed.), *The Polar Ionosphere and Magnetospheric Processes*, Gordon and Breach, New York, 1970.

Während des 9. bis 18. April 1969 wurde ein NATO Advanced Study Institute in Kjeller (Norwegen) von dem Norwegian Defence Research Establishment veranstaltet. Das o. genannte Buch enthält alle Übersichtsvorträge, die zur Einführung in die verschiedenen Themen gehalten wurden. Das Oberthema lautete: „Die Erzeugung und Erhaltung der polaren Ionosphäre“. Es sollte versucht werden, einem besseren Verständnis über die Wechselwirkung Ionosphäre-Magnetosphäre näherzukommen. Um dieses Ziel zu erreichen, wurden namhafte Wissenschaftler – Theoretiker und Praktiker – eingeladen, Einführungsvorträge zu halten.

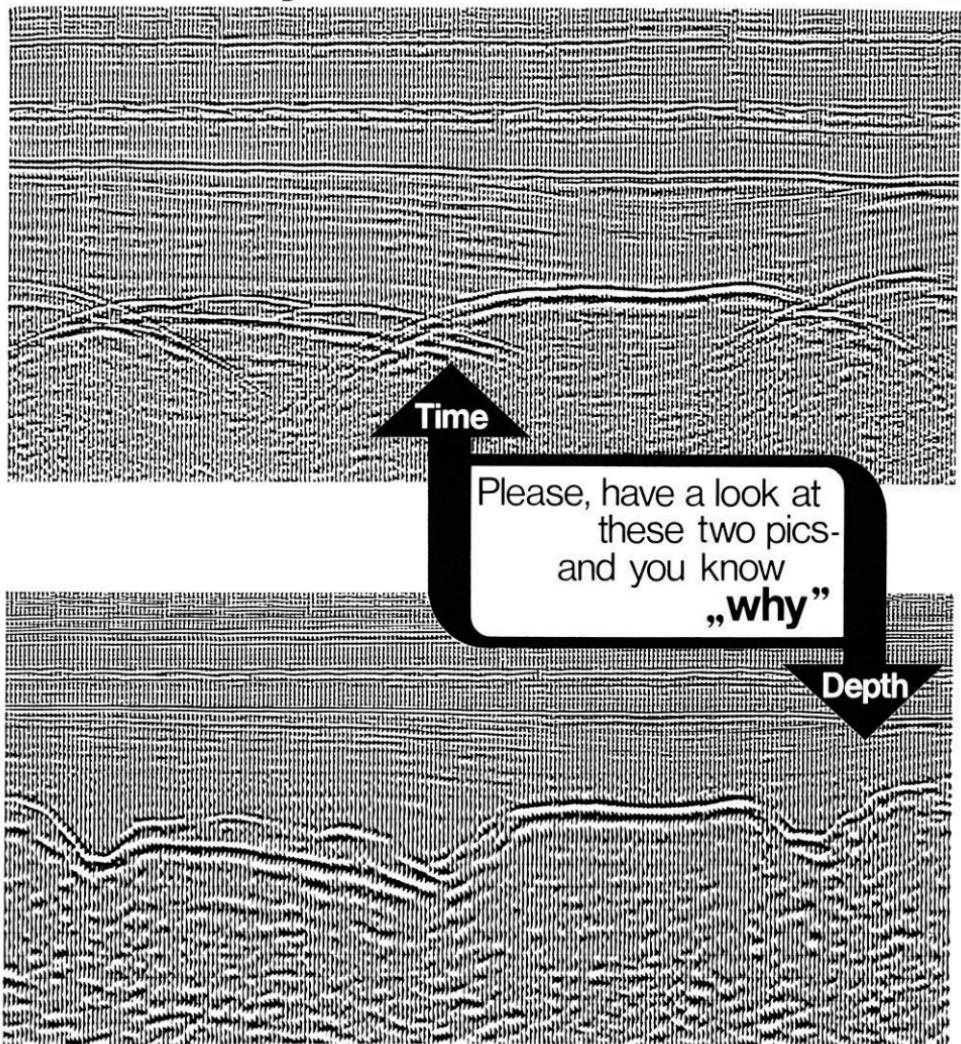
Nun zu den einzelnen Artikeln:

Das Buch beginnt mit einem Vortrag von H. D. FAIRFIELD über die Magnetosphäre, wobei die bis dahin vorliegenden Magnetfeldmessungen von Erdsatelliten und die daraus resultierende Magnetfeldkonfiguration der Magnetosphäre (einschl. des Schweifes) diskutiert werden. Es folgt ein Artikel von V. M. VASYLIUNAS über den niederenergetischen Teilchenfluß im erdmagnetischen Schweif und von B. J. O'BRIEN über den niederenergetischen Teilchenfluß über der Polkappe. Diese Vorträge werden durch 2 Berichte über Teilchenmessungen mit den Satelliten AURORA I (J. L. BURCH) und OGO 5 (R. A. HOFFMAN) ergänzt. Daran schließt sich ein umfangreicherer Artikel von Juan G. ROEDERER an, der eine Einführung in die Bewegung geladener Teilchen im Erdmagnetfeld gibt. Es werden die drei adiabatischen Invarianten erläutert und die damit verbundenen Teilchendriften im Erdmagnetfeld. Weitere Themen sind: Der Einfluß des erdmagnetischen Schweifes auf den Teilcheneinfall in die polare Ionosphäre (G. C. REID) sowie eine Abhandlung von M. H. REES, welche die physikalischen Prozesse untersucht, die beim Einfall niederenergetischer Elektronen in die obere Atmosphäre auftreten. Niederfrequente Emissionen, gemessen mit ALOUETTE II, werden von T. R. HARTZ behandelt, einen Bericht über Elektronentemperaturen in der polaren Ionosphäre (Messungen mit EXPLORER 31) gibt J. S. BAUER. H. RISHBETH betrachtet die physikalischen Prozesse in der polaren F-Region, wobei besonderes Gewicht auf Fragen der Erhaltung der polaren Ionisation und der Variationen der polaren F1- und F2-Schicht gelegt wurden. Probleme der Plasmabewegungen in der Ionosphäre unter Berücksichtigung von Dichte- und Geschwindigkeitsprofilen werden von P. M. BANKS und T. E. HOLZER behandelt. Ergebnisse über Messungen mit „Topside Sounders“ der Satelliten ALOUETTE, ISIS, EXPLORER 20 werden in den folgenden Artikeln dargestellt. (J. O. THOMAS, M. K. ANDREWS, G. L. NELMS). Über Irregularitäten der Elektronendichte der polaren Ionosphäre und deren zeitliche Variation berichten J. FRIHAGEN sowie J. S. BELROSE et al.. Mit einem Bericht über optische Emissionen über der Polarkappe von B. P. SANDFORD werden die Vorträge abgeschlossen.

Man sieht an dieser kurzen Zusammenfassung, daß der Rahmen des Buches sehr weit gespannt ist. Alle Autoren haben in ihren klar geschilderten Vorträgen, die z. T. durch sehr ausführliche Literaturlisten vervollständigt wurden, den damaligen Wissensstand dargeboten. Besonders durch die Verbindung von theoretischen Betrachtungen und experimentellen Beobachtungen wurde das Ziel erreicht, zu einem besseren Verständnis über die Wechselwirkung Ionosphäre-Magnetosphäre beizutragen. Lobenswert ist außerdem das umfangreiche Sach- und Namensregister am Schluß des Buches. Bedauerlich, daß dieses Buch erst zwei Jahre nach der Tagung erschienen ist.

H. MAURER

Don't always believe in time-sections



Please, have a look at
these two pics-
and you know
„why”

More than 35 geoscientists and mathematicians
are responsible
for the development
of our sophisticated software



PRAKLA-SEISMOS GMBH · 3000 HANNOVER · HAARSTRASSE 5
P.O.BOX 4767 · PHONE: 80721 · TELEX: 922847 · CABLE: PRAKLA
GERMANY

Amsterdam · Ankara · Brisbane · Djakarta · Lima · London · Madrid
Milan · Rangoon · Rio de Janeiro · Singapore · Teheran · Tripoli · Vienna

