TELMA	Band 50	Seite 87 - 92		Hannover, November 2020

Ergänzende Vermerke in Bezug auf meinen Artikel in TELMA 47 über „Grundlagen zur Wasserbewegung nach Darcy in Moor und Torf“

Supplementary notes relating to my article in TELMA 47 on “Basic knowledge on water movement according to Darcy in mire and peat”

VOLKER SCHWEIKLE

Schlüsselwörter: Negative Drücke, Winkel und Wasservolumina; Transmissivität; Äquivalenz von Druck und Potenzial in Strömungsgesetzen; Geometrie linearer und quadratischer Strömungsgleichungen

Kurzfassung

Im Gesetz von Darcy wird die Richtung des Drucks mit „+“ und „–“definiert. Diese mathematischen Operatoren bedeuten keine Zahlenwerte, da die Richtung eine trigonometrische Funktion darstellt. Die Transmissivität kann aus dem Gesetz von Darcy nicht abgeleitet werden; ein anderweitiger Beweis fehlt. Das Einfügen der Energiedichte ψ in das Gesetz von Darcy ist falsch, da die Einheiten nicht bilanzierbar sind. Mathematisch ist das lineare Gesetz von Darcy ein Spezialfall des galilei-/newtonschen Fallgesetzes.

Abstract

In the Darcy’s law, the direction of the pressure gradient is defined by „+“ and „–“. These mathematical signs may also represent mathematical operators, but not here. It is not possible to derive the transmissivity from the Darcy’s law; another prove does not exist. The introduction of the density of energy ψ in Darcy’s law is wrong, because it is impossible to balance the units. The linear law of Darcy is mathematically a special case of the Galileian/Newtonian law of gravitation.

1. Einleitung

Einige Punkte wurden zu knapp in meinen Arbeiten in der Telma (SCHWEIKLE 2017, 2019) dargestellt, weshalb ich sie im Folgenden aufgreife, behandle und kommentiere. Im Einzelnen sind dies negative Drücke beim Bodenwasser (2.1), Transmissivität bzw. Abhängigkeit der Wasserleitfähgkeit von der Strömungsstrecke (2.2), die Äquivalenz von Druck·und Potenzial (2.3) und die Geometrie der Wasserströmung (2.4).

2. Methodik und Ergebnisse

Darstellung und Vergleich einschlägiger physikalischer Gesetze mit daraus abgeleiteten Folgerungen.

2.1 Negative Drücke und Winkel

Das Strömungsgesetz von Darcy in moderner Form lautet

$$q = \frac{V}{A \cdot t} = v = k_{\mathrm{DV}} \cdot \frac{\Delta p}{s} = \frac{r^2}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{h_{\mathrm{p}} \cdot \rho \cdot g}{s} = k_{\mathrm{D0}} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \sin\alpha \cdot \rho \cdot g \qquad (1)$$

und das Fallgesetz, erweitert mit dem Bezugsvolumen V_{bo},

$$\frac{1}{2 \cdot V_{\mathrm{bo}}} \cdot m \cdot v^2 = \frac{m \cdot g \cdot h_{\mathrm{pot}}\left(1-\mu_{\mathrm{f,m}}\right)}{V_{\mathrm{bo}}} = \frac{m \cdot g \cdot s\left(1-\mu_{\mathrm{f,m}}\right)(1-\cos\alpha)}{V_{\mathrm{bo}}} \qquad (2)$$

umgestellt und gekürzt:

$$v^2 = 2g \cdot h_{\mathrm{pot}}\left(1-\mu_{\mathrm{f,m}}\right) = 2g \cdot s\left(1-\mu_{\mathrm{f,m}}\right)(1-\cos\alpha) \qquad (2a)$$

mit der Strömungsrate q/m³·m⁻²·s⁻¹, dem Wasservolumen $V_{\mathrm{w}} = \rho_{\mathrm{w}} \cdot$ g/m³, der durchströmten Torfbodenfläche A/m², der Zeit t/s, der Strömungsgeschwindigkeit v/m·s⁻¹, der Wasserleitfähigkeit k_{DV}/m³·s·10⁻⁴ kg⁻¹, dem Druck p/Pa, der durchströmten Strecke s/m, dem Leitfähigkeitsbeiwert der Matrix $k_{\mathrm{D0}} = \frac{1}{8} \cdot r^2$/m², der Viskosität des Wassers η_{w}/mPa·s, der Höhe einer Wassersäule h_{p}/m, der Masse m/kg, der Energiehöhe von Wasser h_{pot}/m, der Dichte des Wassers ρ/10³ kg·m⁻³, dem Reibungsbeiwert von Fluid und Matrix $\mu_{\mathrm{f,m}}$/- und der Erdbeschleunigung g/9,81m·s⁻² (vereinfacht 10 m·s⁻²).

Da es weder negative Drücke noch negative Winkel, geschweige denn negative Wasservolumina gibt, bedeuten hier die Vorzeichen bei trigonometrischen Funktionen „+“ = Gefällewinkel, bzw. Drücke nach unten, und „–“ = Steigungswinkel, bzw. Drücke nach

oben. Es sind also Richtungsangaben, die mit subtrahieren oder addieren nichts zu tun haben (THOMANN, 2004). Es sei denn, es könnte bewiesen werden, dass in $p = \frac{\mathrm{m \cdot g}}{\mathrm{A}} = h \cdot \rho \cdot g$, m, g oder ρ negativ ist.
Da der Kapillarhub den hohen Wasserbedarf von Pflanzen nicht decken kann und Wasser unter artesischem Druck eher selten vorkommt, wurden negative Steigungswinkel nicht berücksichtigt. Für $v \sim h_{pot}$ (SCHWEIKLE 2019) kann das darcysche Gesetz angewandt und für $v^2 \sim h_{pot}$ muss das Fallgesetz mit den Wurfgesetzen, wenn denn Wasser artesisch fließt, kombiniert werden. Energien sind als skalare Größen zu addieren und subtrahieren, was auch nicht bedeutet, dass es negative Energien gibt.

Das Strömungsmuster von Wasser kippt bei

$$v^2 = v = 1 = \sqrt{1} = \sqrt{2g \cdot s\left(1 - \mu_{\mathrm{f,m}}\right)(1 - \cos\alpha)}$$

von hyperboloid (bzw. paraboloid) zu paraboloid (bzw. hyperboloid). Bestimmende Variable sind die Strömungsstrecke s/m, das Gefälle cos α/-,die interne Reibung des Wassers μ_f (= temperaturabhängige Viskosität) und die externe Reibung μ_m des Wassers an der Gerinne- und/ oder Matrixwand (SCHWEIKLE 2019). In Torfmatrices müsste s ggfls. noch mit der Tortuosität korrigiert werden.

2.2 Transmissivität

Bei der Transmissivität wird unterstellt, dass der Proportionalitätskoeffizient (= Wasserleitfähigkeit) κ_{DV} von der Strömungsstrecke s abhängt; es sei also $q \sim (\kappa_{DV} \cdot s^{-1})$. Damit verliert der Druckgradient $\frac{\Delta p}{s} = \frac{h_p \cdot \rho \cdot g}{s}$ seine Richtung, ist also kein Vektor mehr, sondern nur noch eine skalare Größe, was zwar mathematisch möglich, physikalisch aber nicht sinnvoll ist. In einem Rohr ist der Druckgradient sin $\alpha \cdot \rho \cdot g$ über die gesamte Länge eines Rohres und auch in jedem beliebigen Rohrabschnitt gleich groß und konstant. Damit ist auch das darin transportierte Wasservolumen konstant und eine von der Strömungsstrecke abhängige Wasserleitfähigkeit aus dem linearen, darcyschen Gesetz nicht ableitbar. Wenn doch, müsste letztlich bewiesen werden, dass der spezifische Widerstand eines Rohres bzw. einer Matrix

$\rho_\mu \sim \frac{8 \cdot \eta \cdot \pi}{s} / \frac{8 \cdot 10^4 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s^2}}$ beträgt (KUCHLING 2014).

Wird allerdings für die Wasserbewegung in Torfen das Fallgesetz angewandt, ist eine von der Strömungsstrecke abhängige Wasserleitfähigkeit analog zur Wärme- bzw. Stromleitung ableitbar.

2.3 Zur Äquivalenz von Druck·und Potenzial

In BACHMANN et al. (2014; Seite 158, Gleichung (6-9) und nachfolgendem Text) und Stahr et al. (2016) wird der Eindruck erweckt, dass die Energiedichte ψ/J·m^{-3} auch ausgedrückt werden könne als Druck p/Pa, bzw. Meter Wassersäule = mWS/m = h_p/m. Nach

Kuchling (2014) ist ein Druck definiert mit $p = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{A \cdot h_p \cdot \rho \cdot g}{A} = h_p\, \rho \cdot g$ aus $\rho = \frac{m}{A \cdot h_p}$, mit der Masse m/kg, der Erdbeschleunigung g/ca.10 $m \cdot s^{-2}$, der Aufstandsfläche A/m^2 und der Dichte des Wassers $\rho/10^3 kg \cdot m^{-3}$. h_p ist physikalisch kein Druck sondern eine Strecke.

Der Druckgradient $\frac{p}{s} = \frac{h_p \cdot \rho \cdot g}{s} = \sin\, \alpha \cdot \rho \cdot g$ mit der Strömungsstrecke s/m·und dem Gefälle sinα mit α/°. Gleichungen aus Kapitel 2.1 umgestellt, ergibt für (1) nach v aufgelöst $v = \rho \cdot g \cdot \kappa_{DV} \frac{h_p}{s}$ oder $v = \rho \cdot g \cdot \kappa_{DV} \cdot \sin\, \alpha$ (1a) und aus (2a) $v^2 = 2g(1 - \mu_{f,m})\, h_{pot}$ $= 2g \cdot s \cdot (1 - \mu_{f,m}) \cdot (1 - \cos\, \alpha)$ (2b).
Die Bilanz der Einheiten von h_p (1a) = h_{pot} (2b) beträgt $\sin\, \alpha = 4{,}5\sqrt{1 - \mu_{f,m}}$ mit $\sin\, \alpha \geq -1$ und $< +1$ (Zahlenwerte!) und $\mu_{f,m} \geq 0 \leq 1$ und ist ungleich (außer für $\mu_{f,m} = 1$ und $\sin\, \alpha = 0$ bei einem Gefälle von 0°, bzw. 180°), weil aus einer quadratischen Gleichung die Energiedichte ψ in eine lineare Gleichung transplantiert wird und weil Druck h_p als f(p) und Energiehöhe h_{pot} als f(ψ) verschiedenen, voneinander unabhängigen Bezugssystemen zugeordnet sind. Was allerdings mit der bernouillischen Gleichung in einer wassergesättigten, porösen Matrix (Torf- oder Mineralboden) mit 2-phasiger Strömung (gleichzeitige darcysche und newtonsche Strömung innert einer Matrix) überwunden werden könnte, wenn denn sowohl statischer als auch dynamischer Druck <u>und</u> die Veränderung der kinetischen Energie der Wasserbindung messbar wären.

Hinweise:

- Beim Bilanzieren von Einheiten physikalischer Gleichungen müssen auch deren Zahlenwerte berücksichtigt werden.
- Eine Energiemenge $W = m \cdot g \cdot h_{pot}$/J, volumenbezogen hat die Einheit J/m^3, bzw. massebezogen J/kg. Daraus einen Druck, bzw. eine Geschwindigkeit abzuleiten ist falsch, wie am Beispiel eines Käses (0,1 kg bzw. 0,1 L Käse ≙ 1,8 MJ) leicht nachzuweisen.

2.4 Geometrie der Strömung von Wasser in Moor und Torf

Die Gleichungen (1a) und (2b) umgestellt und anders definiert ergibt für das Gesetz von Darcy eine lineare Gleichung der Form

$$x = \rho \cdot g \cdot \kappa_{DV} \cdot y$$

mit y = sinα und x = v (1b)

und für das Fallgesetz eine quadratische Gleichung einer Parabel der 2. Hauptlage mit

$$x^2 = 2g \cdot (1 - \mu_{f,m})y$$

mit y = $h_{pot} = (1 - \cos\alpha) \cdot s$ und $x^2 = v^2$ (2c).

Beide Gleichungen entsprechen Kegelschnitten wobei

- (1a) an der Kegelspitze beginnend, auf der Mantelfläche geradlinig verläuft und eine tangentiale Berührungsfläche bildet und
- (2b) den Kegel parallel zur o. a. Berührungsfläche schneidet.

Damit ist die Froude-Zahl mathematisch nur nachvollziehbar, wenn der Öffnungswinkel eines Kegels klein ist und/oder Messwerte eine Varianz besitzen, die dafür sorgt, dass sich (1a) (bzw. 1b) und (2b) (bzw. 2c) ununterscheidbar überlappen.

3. Literaturverzeichnis

BACHMANN, J., HORN, R. & PETH, St. (2014; 4. Auflage): Hartge/Horn – Einführung in die Bodenphysik; – Stuttgart (Schweizerbart).

KUCHLING, H. (2014): Taschenbuch der Physik; – Hanser (München).

SCHWEIKLE, V. (2017): Grundlagen der Wasserbewegung nach Darcy in Moor und Torf. – Telma **47**: 129 - 138; Hannover.

SCHWEIKLE, V. (2019): Allgemeine und spezielle Strömungsgesetze mit ihren Proportionalitätskoeffizienten in Torfen. – Telma **49**: 101-108; Hannover.

STAHR, K., KANDELER, E., HERMANN, L & STRECK, Th. (2016; 4. Auflage): Bodenkunde und Standortlehre; – UTB (Stuttgart).

THOMANN, J. (2004): EinFach Mathe: Trigonometrie – Jahrgangsstufe 10; Schöningh (Paderborn).

Prof. Dr. V. Schweikle
Ebertstraße 12a
D-69190 Walldorf
E-Mail: volker.schweikle@gmail.com

Manuskript eingereicht am 20. März 2020