

# Instabilitäten und Teilchentransport in stoßfreien astrophysikalischen Plasmen



DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften

in der

Fakultät für Physik und Astronomie  
der Ruhr-Universität Bochum

von

ROBERT C. TAUTZ  
Institut für Theoretische Physik IV  
Ruhr-Universität Bochum

Bochum, 2006



*Für meine Mutter*  
*+ 1992*

1. Auflage  
9. August 2006

- Gutachter:
  1. Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser
  2. Priv.-Doz. Dr. Horst Fichtner
- Disputation: 28. 11. 2006

# Danksagung

Mein Dank gilt zunächst Herrn Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser für die Beschäftigung als wissenschaftlicher Mitarbeiter an seinem Lehrstuhl sowie vielerlei Beratung und Unterstützung. Die großartige Arbeitsatmosphäre am Institut für Theoretische Physik IV, in der ich mich überaus wohlgeföhlt habe, hat nicht zuletzt auch ihren Teil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für den mir zum Abschluss meiner Promotionszeit ermöglichten zweimonatigen Forschungsaufenthalt in Japan, sowie bei Prof. Dr. Jun-Ichi Sakai für die Möglichkeit, an der Toyama University mitzuarbeiten, bedanken.

Weiterhin möchte ich mich bedanken: bei Prof. Dr. Ian Lerche für gemeinsame, extrem produktive Arbeit auf dem Gebiet der Plasmainstabilitäten sowie für ständiges Anspornen durch „morgen, 6 Uhr!“ und „bist du fertig?“; bei Dr. Andreas Shalchi für eine sehr gute und angenehme Zusammenarbeit sowie vielfache Unterstützung auf dem Gebiet der Transporttheorie; bei Angelika Schmitz für Hilfe bei allen großen und kleinen organisatorischen Dingen sowie Ablenkung durch Urlaubsfotos und vielerlei Geschichten aus dem Leben; bei Dipl.-Phys. Urs Schaefer-Rolffs für tägliches gemeinsames Mittagessen und angeregte Diskussionen über Fußball und hypergeometrische Funktionen verschiedenster Dimensionen; bei Lieutenant H. Packard für treue Dienste und, *last but not least*, bei meinem Vater, Dr. Anselm Tautz, für Geduld beim Zuhören sowie vielfältigen Rat und Unterstützung jeglicher Art.

Darüber hinaus gilt mein Dank allen, die durch Korrekturlesen zum Gelingen und zur Abrundung dieser Arbeit beigetragen haben; insbesondere möchte ich mich bei Priv.-Doz. Dr. Horst Fichtner für viele wertvolle Anmerkungen bedanken. Alle verbliebenen Fehler gehen jedoch selbstverständlich auf mein Konto.



# Inhaltsverzeichnis

Danksagung	iii
Abbildungsverzeichnis	ix
Einleitung	1
Übersicht . . . . .	2
<b>1. Einführung und Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1. Plasma-Instabilitäten . . . . .	3
1.2. Transport kosmischer Strahlung . . . . .	6
1.3. Testwellen- kontra Testteilchen-Bild . . . . .	9
1.4. <i>Particle-in-Cell</i> -Simulationen . . . . .	10
<b>I. Das Testteilchen-Bild</b>	<b>13</b>
<b>2. Transport-Theorie</b>	<b>15</b>
2.1. Einleitung . . . . .	15
2.2. Quasilineare Theorie . . . . .	16
2.3. Nichtlineare Führungszentrums-Theorie . . . . .	22
<b>3. Magnetostatische Turbulenz</b>	<b>25</b>
3.1. Einleitung . . . . .	25
3.2. Isotrope Turbulenz . . . . .	27
3.3. <i>Slab</i> - und <i>composite</i> -Geometrie . . . . .	34
3.4. Testteilchen-Simulationen . . . . .	36
3.5. Zusammenfassung . . . . .	44
<b>4. Plasmawellen-Turbulenz</b>	<b>47</b>
4.1. Einleitung . . . . .	47
4.2. Die Simulationen von Michałek . . . . .	48
4.3. Analytische Ergebnisse für parallelen und senkrechten Transport . . . . .	50
4.4. Ein neues Alfvénwellen-Turbulenzmodell . . . . .	58
4.5. Zusammenfassung . . . . .	61
<b>II. Das Testwellen-Bild</b>	<b>63</b>
<b>5. Kinetische Plasma-Instabilitäten</b>	<b>65</b>
5.1. Einleitung . . . . .	65

5.2.	Kinetische Vlasov-Theorie . . . . .	66
5.3.	Nichtrelativistische Dispersionsrelationen . . . . .	69
<b>6.</b>	<b>Magnetisierte Gegenstrom-Plasmen</b>	<b>71</b>
6.1.	Einleitung . . . . .	71
6.2.	Parallele Wellenausbreitung . . . . .	73
6.3.	Numerische Auswertung . . . . .	78
6.4.	Senkrechte Wellenausbreitung . . . . .	80
6.5.	Numerische Auswertung . . . . .	87
6.6.	Zusammenfassung . . . . .	93
<b>7.</b>	<b>Das Neutralpunkt-Konzept</b>	<b>95</b>
7.1.	Einleitung . . . . .	95
7.2.	Konstruktion der Dispersionsrelation . . . . .	96
7.3.	Manipulation der Dispersionsrelation . . . . .	100
7.4.	Effekte des resonanten Nenners . . . . .	107
7.5.	Zusammenfassung . . . . .	113
<b>8.</b>	<b>Moden-Kopplung</b>	<b>115</b>
8.1.	Einleitung . . . . .	115
8.2.	Technische Herleitung . . . . .	116
8.3.	Beispiele für symmetrische Verteilungsfunktionen . . . . .	120
8.4.	Numerische Darstellungen . . . . .	127
8.5.	Zusammenfassung . . . . .	132
<b>9.</b>	<b>Instabilitäten in <math>\gamma</math>-ray Bursts</b>	<b>137</b>
9.1.	Einleitung . . . . .	137
9.2.	Instabilitäten . . . . .	140
9.3.	Technische Herleitung . . . . .	141
9.4.	Beispiele zur Veranschaulichung . . . . .	143
9.5.	Zusammenfassung . . . . .	147
<b>III.</b>	<b>Diskussion &amp; Anhänge</b>	<b>151</b>
<b>10.</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>153</b>
10.1.	Ergebnisse . . . . .	153
10.2.	Ausblick . . . . .	156
<b>A.</b>	<b>Ergänzungen zu Teil I</b>	<b>157</b>
A.1.	Quasilinearer paralleler Transport in magnetostatischer Turbulenz . . . . .	157
A.2.	Quasilinearer senkrechter Transport in magnetostatischer Turbulenz . . . . .	161
A.3.	Quasilinearer paralleler Transport in Alfvénwellen-Turbulenz . . . . .	164
A.4.	Quasilinearer senkrechter Transport in Alfvénwellen-Turbulenz . . . . .	167
<b>B.</b>	<b>Ergänzungen zu Teil II</b>	<b>169</b>
B.1.	Vergleich mit Bornatici und Lee . . . . .	169



B.2. Vereinfachung der Dispersionsrelation (8.1) . . . . .	171
B.3. Die Ausdrücke $E(k_{\perp})$ und $F(k_{\perp})$ . . . . .	176
<b>C. Mathematischer Anhang</b>	<b>179</b>
C.1. Besselfunktionen . . . . .	179
C.2. Reihen von Besselfunktionen . . . . .	180
C.3. Kapteyn-Reihen . . . . .	181
C.4. Die Eulersche Beta-Funktion . . . . .	186
C.5. Die Riemannsche Zeta-Funktion . . . . .	186
C.6. Die hypergeometrische Funktion . . . . .	187
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>a</b>
<b>Publikationen</b>	<b>i</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>k</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1.	Von Mariner 2 gemessenes Turbulenzspektrum . . . . .	7
1.2.	Das Turbulenzspektrum nach HELIOS 2 . . . . .	8
2.1.	Simulierte Teilchenbahnen in einem turbulenten Magnetfeld . . . . .	18
2.2.	Veranschaulichung der Annahme „Führungszentren folgen Feldlinien“ . . . . .	22
3.1.	Der Fokker-Planck-Koeffizient $D_{\mu\mu}$ aus Gl. (3.10) . . . . .	30
3.2.	Vergleich der Simulationen für $\lambda_{\parallel}$ miteinander . . . . .	36
3.3.	Vergleich der Simulationen für $\lambda_{\perp}$ miteinander . . . . .	37
3.4.	NLGC-Verhältnis $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel}$ als Funktion von $R$ . . . . .	38
3.5.	NLGC-Verhältnis $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel}$ als Funktion von $(\delta B/B_0)^2$ . . . . .	39
3.6.	Ungültigkeit der NLGC-Theorie für $\lambda_{\parallel} \lesssim \lambda_{\perp}$ . . . . .	40
3.7.	Vergleich $\lambda_{\parallel}$ (QLT) mit Simulationen in <i>slab</i> -Turbulenz . . . . .	41
3.8.	Vergleich $\lambda_{\parallel}$ (QLT/WNLT) mit Simulationen in <i>composite</i> -Geometrie . . . . .	42
3.9.	Vergleich $\lambda_{\perp}$ (zeitabhängig) mit Simulationen . . . . .	43
3.10.	Vergleich $\lambda_{\perp}$ (NLGC/WNLT) mit Simulationen . . . . .	44
4.1.	Vergleich der Simulationen für $\kappa_{\parallel}$ miteinander . . . . .	50
4.2.	Der Fokker-Planck-Koeffizient $D_{\mu\mu}$ . . . . .	52
4.3.	Vergleich $\kappa_{\parallel}$ aus den Gln. (4.10) und (4.11a) mit Simulationen . . . . .	54
4.4.	Vergleich $\kappa_{\parallel}$ aus Gl. (4.13) mit Simulationen . . . . .	55
4.5.	Vergleich $\kappa_{\gamma\gamma}$ aus Gl. (4.21) mit Simulationen für $\kappa_{\perp}$ . . . . .	56
4.6.	Vergleich $\kappa_{\perp}$ aus Gl. (4.23) mit Simulationen . . . . .	57
5.1.	Die Landau-Kontur . . . . .	68
6.1.	Die nichtrelativistische Gegenstrom-Verteilungsfunktion (6.1) . . . . .	72
6.2.	Geometrie im Falle paralleler Wellenausbreitung . . . . .	73
6.3.	Die <i>two-pole</i> -Approximation der Plasma-Dispersionsfunktion . . . . .	77
6.4.	Realteil der Dispersionsrelation (6.30) . . . . .	78
6.5.	Imaginärteil der Dispersionsrelation (6.30) . . . . .	79
6.6.	Dispersionsrelation der Zweistrom-Instabilität . . . . .	80
6.7.	Geometrie im Falle senkrechter Wellenausbreitung . . . . .	82
6.8.	Die hypergeometrische Funktion ${}_2F_2$ . . . . .	87
6.9.	Relative Abweichung der Näherung von Bornatici und Lee <sup>7</sup> . . . . .	88
6.10.	Realteil $\omega_r(k)$ aus Gl. (6.72) . . . . .	89
6.11.	Wachstumsrate $\Gamma(k)$ aus Gl. (6.76) . . . . .	90
6.12.	Wachstumsrate $\Gamma(k)$ aus Gl. (6.76) . . . . .	91

6.13. Realteil $\omega_r(k)$ der Bernstein-Mode . . . . .	92
6.14. Realteil $\omega_r(k)$ der außerordentlichen EM-Mode . . . . .	93
8.1. Der untere Zweig von Gl. (8.43) . . . . .	128
8.2. Der obere Zweig von Gl. (8.43) . . . . .	129
8.3. Variation von $\omega^2/\Omega_p^2$ aus Gl. (8.48) . . . . .	130
8.4. Einfluss der Polstelle (Elektron-Proton-Plasma) . . . . .	131
8.5. Neutralpunkte eines ultrarelativistischen Elektron-Positron-Plasmas . . . . .	132
8.6. Neutralpunkte eines nichtrelativistischen Elektron-Positron-Plasmas . . . . .	133
8.7. Variation von $\omega^2/\Omega_p^2$ aus Gl. (8.37) . . . . .	134
8.8. Einfluss der Polstelle (Elektron-Positron-Plasma) . . . . .	135
9.1. Neutralpunkte mit und ohne Kopplung für Fall I . . . . .	144
9.2. Neutralpunkte mit und ohne Kopplung für Fall II . . . . .	145
9.3. Die Frequenz aus Gl. (9.10) für Fall I . . . . .	146
9.4. Die Frequenz aus Gl. (9.10) für Fall II . . . . .	147
9.5. Einfluss der Kopplung für kleine Wellenzahlen . . . . .	148
9.6. Die Frequenz aus Gl. (9.10) für ein Elektron-Positron-Plasma . . . . .	149
A.1. Die Funktionen $\mathcal{J}(s, \epsilon)$ aus den Gln. (A.50) und (A.60) . . . . .	167
C.1. Die Kapteyn-Reihe (C.24) . . . . .	183
C.2. Die Kapteyn-Reihe (C.31) . . . . .	184
C.3. Die Kapteyn-Reihe (C.35) . . . . .	185
C.4. Die Eulersche Beta-Funktion . . . . .	187

# Einleitung

Zur kosmischen Strahlung gehören die energiereichsten Teilchen, die wir auf der Erde empfangen. Zusammen mit dem sichtbaren Licht und anderen Frequenzen des elektromagnetischen Spektrums sowie Neutrinos stellen sie die einzige Informationsquelle aus den Tiefen des Weltraumes dar, sieht man einmal von den bisher nicht direkt beobachteten und erst zukünftig möglicherweise an Bedeutung gewinnenden Gravitationswellen ab. Bei ihrer Reise zur Erde werden die Teilchen der kosmischen Strahlung von den Magnetfeldern des intergalaktischen Mediums und unserer Galaxie und zuletzt auch durch das Magnetfeld der Sonne abgelenkt, das den interplanetaren Raum ausfüllt. Obwohl die Berechnung des Transportes geladener Teilchen selbst durch nur schwach turbulente elektromagnetische Felder ein Arbeitsgebiet ist, das noch immer einer vollständigen Lösung entbehrt, wird die Situation durch das zusätzlich Vorhandensein von instabilen und gedämpften Plasmawellen aller Art, die für sich genommen bereits ein faszinierendes Arbeitsgebiet darstellen, noch erheblich komplizierter.

Eines der Ziele dieser Arbeit soll es daher sein, die Gültigkeit und Genauigkeit verschiedener Transporttheorien zu überprüfen, sie auf unterschiedliche Modelle zur Beschreibung der Turbulenz besonders im interplanetaren Medium anzuwenden und ihre Übereinstimmung mit den aus numerischen Simulationen gewonnen Vorhersagen zu vergleichen. Dabei wird sich zeigen, dass die bislang am häufigsten zur Beschreibung des Transportes herangezogene, so genannte quasilineare Theorie – welche gleichzeitig die größten Näherungen verwendet – mit noch gravierenderen Schwierigkeiten behaftet ist als bislang angenommen.

Darüber hinaus sollen umfassende Untersuchungen der in verschiedenen Situationen angeregten Plasmawellen vorgenommen werden, die letztendlich in zukünftigen Arbeiten wieder in die Theorien zur Beschreibung des Transportes der kosmischen Strahlung mitbezogen werden müssten. Diese instabilen Plasmawellen, unter denen besonders die nur anwachsenden und sich dabei nicht ausbreitenden – die sog. „aperiodischen“ Fluktuationen beispielsweise der Weibel-Instabilität – zu nennen sind, haben überaus vielfältige Anwendung und treten in vielen unterschiedlichen Szenarien auf, darunter gegenströmende Plasmen, Jets von Aktiven Galaktischen Kernen, Ausbrüche von Gammastrahlung (die sog. „ $\gamma$ -ray Bursts“), aber auch Laborplasmen und Fusionsreaktoren. Dabei spielt insbesondere der Fall eines von außen vorgegebenen, räumlich homogenen Magnetfeldes eine Rolle.

Diese Arbeit ist daher in zwei Teile gegliedert. In Teil I wird das in Kapitel 1 noch näher erläuterte Testteilchen-Bild verwendet, um Untersuchungen des Transportes der kosmischen Strahlung in der Heliosphäre durchzuführen, während Teil II das Testwellen-Bild zu Grunde liegt und in der Betrachtung instabiler Plasmawellen in astrophysikalischen Szenarien seine Anwendung findet. Auch wenn diese beiden „Bilder“ nur unterschiedliche

Aspekte desselben Problems sind, so haben sie sehr komplementäre Anwendungsbereiche und werden in dieser Arbeit daher getrennt betrachtet.

## Übersicht

Im ersten Teil der Arbeit wird zunächst in Kapitel 3 die quasilineare Theorie für den Fall isotroper Turbulenz einem kritischen Test unterzogen, bei dem untersucht wird, für welche Turbulenzgeometrien die Theorie zuverlässige, mit numerischen Simulationen übereinstimmende Ergebnisse liefert, und für welche dies nicht der Fall ist. Die nichtlineare Führungszentrums-Theorie (*nonlinear guiding center theory*) wird als ein Beispiel einer nichtlinearen Theorien ebenfalls diskutiert. In Kapitel 4 wird dies auf den Fall einer durch magnetohydrodynamische Plasmawellen manifestierten Turbulenz angewandt, wobei anhand der quasilinearen Theorie grundlegende Probleme aufgezeigt werden, die unter anderem mit der Einbindung der Plasmawellen in die Theorie zusammenhängen. Im letzten Abschnitt des Kapitels wird daher eine neue Methode der Einbeziehung von – ungedämpften – Alfvénwellen aufgezeigt. Grundsätzlich müssten auch Dämpfungs- und Wachstumsprozesse von Plasmawellen berücksichtigt werden; diese sind jedoch ein eigenes komplexes Gebiet und daher Gegenstand von Teil II.

Darin ist zunächst Kap. 6 im Wesentlichen die Fortführung einer bereits in der Diplomarbeit<sup>102</sup> des Autors begonnenen Untersuchung über die Stabilitätseigenschaften gegenströmender Plasmen. Während in der Diplomarbeit jedoch das Verhalten anfänglich unmagnetisierter relativistischer Plasmen untersucht wurde, das für die Frage nach der Erzeugung kosmologischer Magnetfelder von Bedeutung ist, wird in der vorliegenden Arbeit der vielfach in der Astrophysik gegebene Fall entlang eines Magnetfeldes gegenströmender Plasmen betrachtet. Dabei werden sowohl Wellen parallel und senkrecht zum Hintergrundmagnetfeld untersucht. Daran anschließend wird in den Kapiteln 7 und 8, um die durch die Festlegung auf parallele und senkrechte Wellenausbreitung auferlegten Einschränkungen zu lockern und sogar ganz aufzuheben, ein anderer Zugang gewählt, dessen ursprüngliche Formulierung in Kapitel 7 zunächst relativistisch verallgemeinert wird, und dessen weitere Beschränkungen dann im darauf folgenden Kapitel 8 aufgehoben werden, so dass auf diese Weise die volle dreidimensionale Struktur prinzipiell erschlossen wird. In Kapitel 9 wird die zuvor entwickelte allgemeine Theorie dann auf das konkrete Beispiel eines  $\gamma$ -ray Bursts angewandt, wobei insbesondere die Zeitskalen der anwachsenden Plasmafluktuationen untersucht werden und aus den Rechnungen Schlussfolgerungen über die Zusammensetzung der Jets unter Berücksichtigung der mikrophysikalischen Mechanismen zur Entwicklung von Schockwellen gezogen werden.

Kapitel 10 schließlich fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und bietet einen Ausblick auf noch offene Themen und Fragestellungen. Daran anschließend folgen die Anhänge, in denen ausführliche und teilweise längliche Rechnungen dargestellt sind. Darüber hinaus wird in einem eigenen Kapitel ein Überblick über Reihen insbesondere von Besselfunktionen sowie über spezielle Funktionen wie die hypergeometrische Funktion, die Eulersche Beta-Funktion und die Riemannsche Zeta-Funktion gegeben.

---

# 1 Einführung und Grundlagen

*Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Physik der Plasma-Instabilitäten und des Transportes kosmischer Strahlung, erklärt kurz die grundlegende Einteilung der Theorien in das Testwellen- und das Testteilchen-Bild und gibt einen Einblick in die insbesondere zur Untersuchung von Plasma-Instabilitäten verwendeten Particle-in-Cell-Simulationen.*

## 1.1 Plasma-Instabilitäten

Durch anisotrope relativistische Teilchenverteilungen erzeugte elektrostatische Plasmaswellen sind eine Schlüsselzutat für die Erzeugung von Plasmastrahlung in solaren und stellaren Ausbrüchen im Radiobereich. Mehr noch, in vielen astrophysikalischen Ausfluss-Quellen, wie etwa den Schockwellen von Supernova-Überresten (*supernova remnants*) und Jets von Aktiven Galaktischen Kernen (AGN) dienen solche Wellen als *Target* für die inverse Compton-Streuung von relativistischen Elektronen und Positronen, wobei hochenergetische transversale elektromagnetische Wellen erzeugt werden.

Die in Kapitel 5 beschriebene Weibel-Instabilität, die sich in anisotropen Geschwindigkeitsverteilungen abspielt, ist in letzter Zeit häufiger als Prozess zur Erzeugung kosmologischer Magnetfelder diskutiert worden (z. B. Sakai et al.<sup>76</sup>, Schlickeiser<sup>82</sup>, Schlickeiser und Shukla<sup>84</sup>). Diese Instabilität und die fluktuierenden, aperiodischen Magnetfelder, die durch sie erzeugt werden, können als Basis für die Erzeugung großskaliger, geordneter Magnetfelder mit Hilfe des Dynamo-Prinzips verstanden werden. Die korrekte Beschreibung dieser Situation im Falle relativistischer Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten erfordert die Anwendung kovarianter Dispersionsrelationen (Schlickeiser<sup>81</sup>), im Grenzfall nichtrelativistischer Temperaturen kann man jedoch Näherungen zu den kovarianten Gleichungen herleiten. Zwar stimmen diese nur im (unphysikalischen) mathematischen Grenzfall einer unendlich hohen Lichtgeschwindigkeit mit den nichtrelativistischen, nichtkovarianten Gleichungen überein; von Schaefer-Rolffs und Schlickeiser<sup>78</sup> wurde hingegen gezeigt, dass die quantitativen Unterschiede in den Wachstumsraten minimal sind. Daher bieten die nichtrelativistischen Gleichungen – trotz ihrer Unterschiede zum nichtrelativistischen Grenzfall der kovarianten Ergebnisse – eine gute Beschreibung, solange die thermischen Geschwindigkeiten und Strömungsgeschwindigkeiten klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind.

Relativistische Überlegungen sind dagegen von genereller Bedeutung für zahlreiche physikalische Situationen, in denen sich signifikante Anisotropien in der Geschwindigkeitsverteilung einer Teilchenpopulation einstellen. Die Rechnungen sind von besonderer Bedeutung für Fälle, in denen sich zusätzlich zu einer relativistischen Gesamtbewegung (*bulk motion*) eine beträchtliche relativistische Geschwindigkeitsdispersion einstellt. Der

Effekt der relativistischen Gesamtbewegung auf elektrostatische Instabilitäten ist dagegen normalerweise dann nicht relevant, wenn man auf das Ruhesystem der Gesamtbewegung Lorentz-transformiert. Solch eine breite relativistische Geschwindigkeitsdispersion tritt sowohl in lasergenerierten relativistischen Elektronenstrahlen wie auch in astrophysikalischen Quellen auf, darunter Pulsarwindnebel, Aktive Galaktische Kerne und den Quellen von  $\gamma$ -ray Bursts. Im Kontext von Pulsen ultrahoher Intensität haben sowohl Experimente als auch Teilchensimulationen gezeigt, dass die einfallende Laserenergie in relativistische Elektronen transferiert wird, deren kinetische Energie von hunderten von keV bis hin zu einigen zehn MeV reicht.

Für Aktive Galaktische Kerne ist beobachtet worden, dass die nichtthermische Strahlung emittierenden Jet-Regionen sich mit relativistischen Bulk-Lorentzfaktoren<sup>a</sup> von bis zu  $\Gamma = 25$  bewegen, jedoch im Ruhesystem des Jets die individuellen Lorentzfaktoren der Elektronen und Positronen gemäß einem Potenzgesetz mit Werten bis zu  $\Gamma = 10^5$  verteilt sein müssen, um die beobachteten spektralen Energieverteilungen reproduzieren zu können. Im Falle von  $\gamma$ -ray Bursts sind sogar noch höhere Bulk-Lorentzfaktoren nötig.

Allgemein kommen Anisotropien einer Plasmateilchenverteilung in praktisch allen natürlichen und Maschinenplasmen vor. Im astrophysikalischen Kontext sind diese Anisotropien verantwortlich für Impuls- und Energieumsetzungsprozesse, von kosmischer Strahlung in der Galaxie bis hin zu Instabilitäten in den Jets Aktiver Galaktischer Kerne, und weiter zu Heizungs- und Kühlungsprozessen des interstellaren Mediums (vgl. Spanier<sup>96</sup>). Zwei kritische Faktoren sind bei der Diskussion solcher potenziell instabilen Situationen zu beachten: 1. welche Klassen von Verteilungsfunktionen erlauben Instabilitäten einer gegebenen Wellenart? 2. Wie verhält sich die Wachstumsrate jeder dieser instabilen Wellenmoden? Der erste Faktor ist kritisch, da er die Art der Szenarien bestimmt, in denen eine bestimmte Instabilität stattfinden kann, und hilft daher beim Verständnis der Entwicklung einer bestimmten Plasmakonfiguration. Der zweite Faktor ist kritisch, da er bestimmt, ob eine Instabilität so schnell im Vergleich zu anderen, vernachlässigten Prozessen ist, dass diese Instabilität voraussichtlich langlebig und dominant ist, oder ob die Instabilitätsrate so langsam ist, dass andere Prozesse die Entwicklung des betrachteten Plasma dominieren.

In Laborplasmen sind es beispielsweise energiereiche geladene Teilchenstrahlen mit großen Temperaturanisotropien, in denen Instabilitäten unter anderem des in Kapitel 7 beschriebenen Harris-Typs auftreten (z. B. Davidson et al.<sup>17</sup>). Diese Effekte sind unter anderem in periodisch fokussierenden Beschleunigern, Transportsystemen und Speicherringen wichtig. Von besonderem Interesse ist dabei der Effekt der starken Eigenfelder (*self-fields*), die von den Raumladungen und Strömen des Strahls stammen. Die Untersuchung der Stabilitätseigenschaften solcher Strahlen ist deswegen wichtig, weil geladene Teilchenstrahlen kollektiven Prozessen unterliegen, welche die Strahlqualität verschlechtern können. In Teilchenstrahlen mit einer hohen Temperaturanisotropie kann Energieaustausch zwischen longitudinaler und transversaler Bewegung auftreten – dieser Prozess ist verknüpft mit der Harris-Instabilität, die auf einer Anisotropie im Geschwindigkeitsraum beruht. In den genannten Beispielen ist normalerweise die endliche Strahlgröße von

---

<sup>a</sup>Bulk-Eigenschaften sind solche Eigenschaften, die durch die Gesamtheit des Plasma bedingt werden, wie etwa Temperatur, durchschnittliche Geschwindigkeit u. a.



erheblicher Bedeutung, und meistens wird das Ruhesystem des Strahles für die Berechnungen verwendet. Unter der Voraussetzung, dass die thermischen Geschwindigkeiten der Teilchen – insbesondere der Elektronen – relativistisch sind, können relativistische Effekte aber dennoch eine Rolle spielen, sogar im Ruhesystem des Strahles.

Astrophysikalische Situationen, in denen relativistische Effekte eine dominante Rolle spielen, erlangen immer größere Bedeutung, da Beobachtungen Verhaltensweisen aufdecken, die komplexer und bizarrer sind, als durch das bloße Einbinden relativistischer Parameter erklärt werden könnte, sei es in den Bulk-Eigenschaften (wie etwa relativistische Bündelungseffekte in Pulsaren, Aktiven Galaktischen Kernen oder  $\gamma$ -ray Bursts) oder in den intrinsischen Teilchenverteilungen selbst (wie bei kosmischer Strahlung).

Plasma-Instabilitäten entstehen entweder aus Resonanzen von Wellen mit einer ausgewählten Gruppe von Teilchen, oder aus Bulk-Effekten, die nicht auf Resonanz-Eigenschaften beruhen – wie dies zum Beispiel für die Weibel-Instabilität gilt. Darüber hinaus deuten die Beobachtungen vieler astrophysikalischer Plasmen auf die Anwesenheit eines homogenen Hintergrundmagnetfeldes hin, so dass jegliche Welle-Teilchen-Instabilitäten innerhalb der durch dieses umgebende Magnetfeld vorgegebenen Rahmenbedingungen berechnet werden müssen. Die Komplexität des zu verwendenden Formalismus' verbietet es sogar in nichtrelativistischen Szenarien, gänzlich allgemeine Lösungen aufzustellen; daher beschränken sich viele Untersuchungen auf sich entlang des Hintergrundmagnetfeldes ausbreitende Wellen. In der relativistischen Situation kommen noch weitere Schwierigkeiten hinzu, da zwar die Teilchengeschwindigkeit durch die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit beschränkt ist, nicht jedoch die Phasengeschwindigkeiten der Wellen. Daher gibt es eine klare Unterteilung in sub- und superluminale Wellen, wobei letztere in Abwesenheit eines räumlich homogenen Magnetfeldes nicht resonanten Wechselwirkungen mit Teilchen unterliegen. Reaktionen des Plasmas können daher durch relativistische Effekte erklärt werden, die in nichtrelativistischen Rechnungen gar nicht auffindbar sind – die aber dennoch bestehen bleiben, wenn man, ausgehend von einer vollkommen relativistischen Beschreibung, die nichtrelativistischen Grenzfälle der Teilchenverteilungsfunktionen betrachtet. Dieser besondere Aspekt ist einer verblüffendsten Faktoren, welche die Untersuchung relativistischer Plasmen so überaus faszinierend machen.

Grundsätzlich werden auftretende Welle-Teilchen-Wechselwirkungen entweder als longitudinale Wellen ( $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ) oder als transversale Wellen ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ) klassifiziert. Sind sie instabil, so neigen longitudinale Wellen dazu, wesentlich höhere Wachstumsraten als transversale Wellen zu haben, da sie durch die um einen Faktor  $v/c$  stärkere und nur mit  $r^{-2}$  abfallende Coulomb-Kraft getrieben werden. Eine vollständige Diskussion aller Instabilität hervorrufenden Welle-Teilchen-Wechselwirkungen für sich mit beliebigen Winkeln zu einem Hintergrund-Magnetfeld ausbreitenden Wellen steht noch aus, auch weil sowohl resonante als auch nicht-resonante Instabilitäten auftreten können. Solche Arten von Plasma-Instabilitäten sind Gegenstand der Kapitel 7 und 8.

### 1.1.1 Gegenstrom-Plasmen

Gegenstrom-Plasmen entstehen in vielen kosmischen Szenarien. Von einem geeigneten Bezugssystem aus betrachtet, kann jeder Ausfluss in ein umgebendes Medium – darun-

ter Sonnenwind, stellare und galaktische Winde sowie relativistische Jets – als gegenströmende Plasmaverteilung beschrieben werden. Ebenso können Schockwellen als sich durchdringende Fluide mit Prä- und Postschock-Geschwindigkeitsverteilungen betrachtet werden.

Beispielsweise wurden in magnetisierten Wolken in einer Entfernung von etwa 5 Astronomischen Einheiten (AU) gegenströmende Elektronen in den Daten der Raumsonde Ulysses identifiziert (Crooker et al.<sup>15</sup>). Im Bugschock von Jupiter, der unter anderem von der Cassini-Raumsonde vermessen wurde, wurden Elektron-Plasmawellen festgestellt (z. B. Goldstein et al.<sup>27</sup>); früher im Jovian-Bugschock entdeckte magnetohydrodynamische Plasmawellen großer Amplitude wurden als von einem relativistischen Elektronenstrahl angeregt, der entlang des Magnetfeldes von Jupiter wegströmt, interpretiert. Cassini hat ebenfalls neuere Messungen von energiereichen Teilchen in der Nähe von Jupiter durchgeführt (Krupp et al.<sup>40</sup>). Weiterhin ist gezeigt worden, dass die Strömung eines nichtrelativistischen Elektronenstrahles durch einen aus Wasserstoff und Helium bestehenden solaren *Flare* (wörtl.: Fackel) eine Reihe von Plasmawellen angeregt werden können, darunter elektromagnetische  $H^+$ -Ionen-Zyklotron- und Scher-Alfvénwellen sowie R-X-Wellen. Gegenstrom-Plasmen in Anwesenheit eines Hintergrundmagnetfeldes sind Inhalt des Kapitels 6.

### 1.1.2 $\gamma$ -ray Bursts

Gammastrahlungsausbrüche ( *$\gamma$ -ray bursts*, abgekürzt als GRB) sind vor allem in Sternentstehungsregionen beobachtete Phänomene, die mit dem Tod massiver Sterne und der Geburt eines kompakten Objekts wie etwa eines schwarzen Loches in Verbindung stehen. Dabei wird zunächst durch interne Dissipation eines relativistischen Materiestroms in einer Entfernung von etwa  $10^{13} - 10^{15}$  cm von der zentralen Quelle Gammastrahlung erzeugt. Daran anschließend erzeugt die Wechselwirkung des Stroms mit dem umgebenden Medium Röntgenstrahlung bis hin zu optischer, Infrarot- und Radiostrahlung – das sog. Nachleuchten (*afterglow*). GRB sind Inhalt des Kapitels 9. Darin werden die in den Kapiteln 7 und 8 entwickelten Methoden auf die in den Jets der GRB auftretenden Plasma-Instabilitäten angewendet, mit deren Hilfe die kinetische Energie dissipiert wird, woraufhin sich Schockwellen bilden; diese wiederum sind für die beobachtete Strahlung verantwortlich.

## 1.2 Transport kosmischer Strahlung

Bislang gibt es anscheinend noch keine umfassende Theorie, die den Transport energiereicher Teilchen durch turbulente elektromagnetische Felder vollständig und korrekt beschreiben könnte. Obwohl die Beschreibung dieses Transportvorgangs in der Heliosphäre für das Verständnis des Ursprungs und der Herkunft der kosmischen Strahlung essenziell ist und dies als eines der führenden Probleme der modernen Astrophysik kosmischer Strahlung angesehen wird (vgl. Bieber et al.<sup>5</sup>), gibt es nach wie vor vielerlei Unsicherheit. Die Anpassung von im Sonnenwind durchgeführten Beobachtungen an Diffusionsmodelle

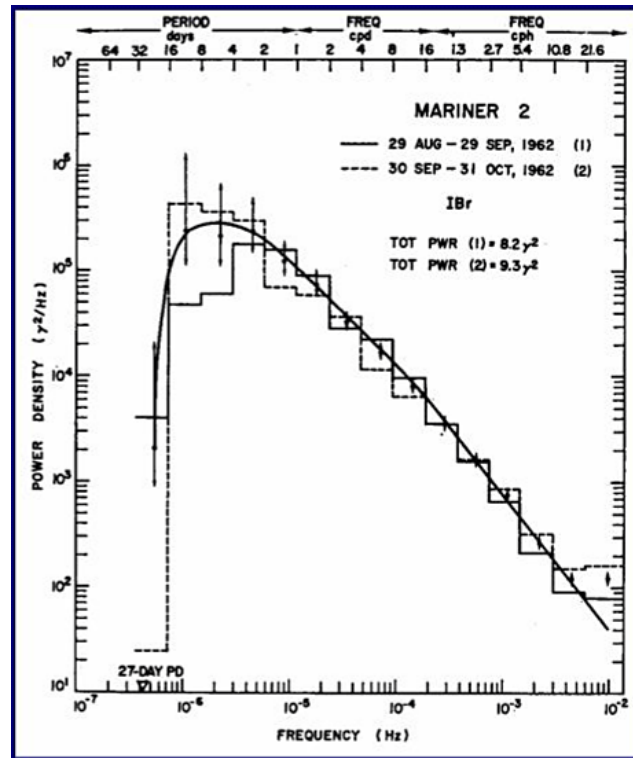


Abbildung 1.1: Von der Raumsonde Mariner 2 im Jahre 1962 gemessenes Turbulenzspektrum in der Heliosphäre. Der radiale Abstand von der Sonne betrug 0,87 bis 1 AU. Aus Bruno und Carbone<sup>10</sup>.

hat es erlaubt, repräsentative Werte für die mittleren freien Weglängen der Streuung zu bestimmen sowie einige Hinweise darauf zu erhalten, wie die freien Weglängen von der Energie der Teilchen abhängen. Jokipii<sup>34</sup> schrieb 1966, dass „ein detailliertes Verständnis der kosmischen Strahlung vom präzisen Verständnis der Effekte von interplanetaren und interstellaren Magnetfeldern auf die Bewegung geladener Teilchen“ abhängt. Die in seiner Arbeit entwickelte „quasi-lineare“ Theorie (QLT) ist ein eleganter Weg, im Gegensatz zu den vorher auf phänomenologische Diskussionen beschränkten Theorien erstmals durch Vereinfachungen die analytische Lösbarkeit des Problems zu ermöglichen. Für bestimmte Situationen lieferte diese Theorie dann auch korrekte Vorhersagen der Transportparameter, darunter insbesondere die mittleren freien Weglängen der in turbulenten elektromagnetischen Feldern gestreuten Teilchen. Dies galt jedoch nur für einige Spezialfälle, welche insbesondere die Geometrie der turbulenten elektromagnetischen Felder betrafen. Des Weiteren zeigte sich, dass die quasilineare Theorie drei fundamentale Probleme aufweist: Zum einen ist sie ungültig für Anstellwinkel-Streuung nahe bei 90°, bei der die Teilchen fast ausschließlich senkrecht zu einem auch Führungsfeld genannten homogenen Hintergrund-Magnetfeld ihre Gyrationbewegung durchführen; weiterhin kann sie nicht den Transport senkrecht zum Führungsfeld beschreiben und liefert überdies für Diffusion parallel zum Führungsfeld nur dann korrekte Ergebnisse, wenn die Wellenzahlvektoren der turbulenten Felder ausschließlich parallel zu diesem Führungsfeld ausgerichtet sind (dies ist die in Kap. 3 näher beschriebene „slab-Geometrie“).

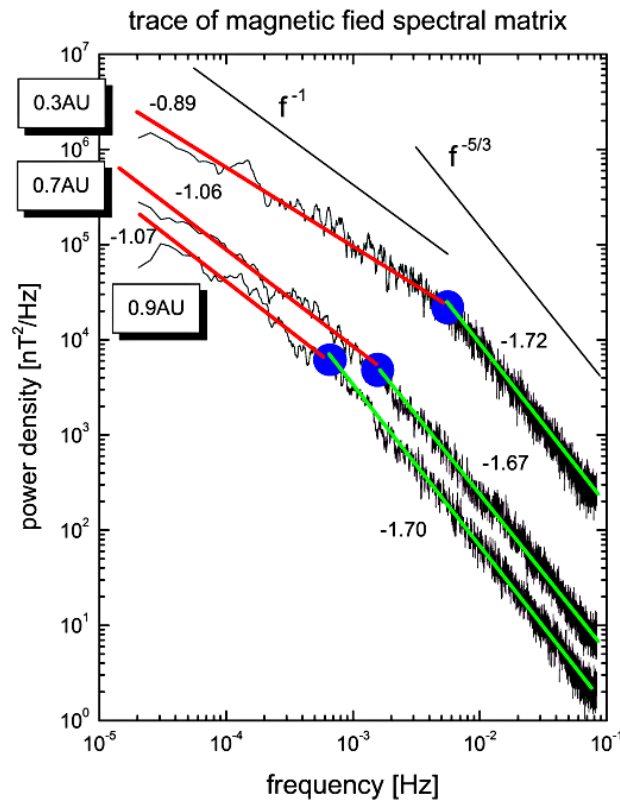


Abbildung 1.2: Das auf Messungen der Raumsonde HELIOS 2 im Jahre 1967 basierende Turbulenzspektrum der Heliosphäre. Dargestellt sind die verschiedenen Messungen für radiale Abstände zwischen 0,3 und 0,9 AU. Die Punkte bezeichnen die Grenze zwischen Energie- und Inertialbereich des Spektrums. Aus Bruno und Carbone<sup>10</sup>.

Zur Lösung dieser Probleme wurden bereits in der Vergangenheit und auch aktuell verschiedene nichtlineare Theorien aufgestellt, an denen derzeit intensiv gearbeitet wird. Ein grundlegendes Problem besteht jedoch auch darin, dass die Prozesse der Turbulenz noch nicht genau verstanden sind. Weiterhin bringen es die mit der Beschreibung des Transportes durch turbulente elektromagnetische Felder verbundenen Schwierigkeiten mit sich, dass die Reichhaltigkeit der verschiedenen möglichen Oszillationen und Instabilitäten in einem Plasma zum größten Teil außer Acht gelassen werden muss. Daher wird im ersten Teil dieser Arbeit zunächst die quasilineare Theorie vorgestellt und demonstriert, dass selbst unter einfachsten Voraussetzungen keine mit den Simulationen oder Beobachtungen übereinstimmenden Resultate erzielt werden können. Die Verbesserung der Theorien wird – wie ausführlich gezeigt werden wird – die Einbeziehung von Plasmawellen und Dämpfungs- und Anregungsprozessen beinhalten, welche daraufhin im zweiten Teil dieser Arbeit für eine Reihe von Szenarien ausführlich untersucht werden. Das große Ziel zukünftiger Arbeiten wird es nun sein, daraus eine konsistente Theorie zu formulieren.

Unsicherheit besteht jedoch allein schon in der Beschreibung der Turbulenz des interplanetaren Mediums. Aus Messungen der Raumsonde Mariner 2 (Abb. 1.1) hatte man bereits 1962 eine gute Vorstellung, dass die Fluktuationen in einem radialen Abstand von

0,87 bis 1 AU von der Sonne über einen weiten Frequenzbereich einem Potenzgesetz mit einem Spektralindex von etwa 1,2 bis 1,5 folgen (siehe den Übersichtsartikel von Bruno und Carbone<sup>10</sup> und darin enthaltene Verweise). Messungen der HELIOS 2-Raumsonde (Abb. 1.2) ergaben jedoch in einem Abstand von 0,3 bis 0,9 AU auch Werte für den Spektralindex bis 1,72. Für kleine Frequenzen ist der Spektralindex kleiner, mit einem Wert etwa um 1 – dies wird als *Energiebereich* bezeichnet; von dem kolomogorov-artigen (Spektralindex  $5/3$ ) *Inertialbereich* ist er deutlich durch das sog. „Knie“ getrennt, welches je nach radialem Abstand bei unterschiedlichen Frequenzen auftritt. Das Turbulenzspektrum ist somit nicht nur eine Funktion der Frequenz  $\nu$ , sondern auch des Abstandes  $r$ . Ein genaues analytisches Verständnis der Spektralindizes in magnetohydrodynamischer Turbulenz steht jedoch noch immer aus.

### 1.3 Testwellen- kontra Testteilchen-Bild

Die einfachste Beschreibung eines Plasmas bieten die Fluid-Gleichungen der Magneto-hydrodynamik (MHD), wobei das Plasma als kontinuierliche Flüssigkeit behandelt wird. Dieses Verfahren ist jedoch nur dann praktikabel, wenn das Plasma von Zweierstößen dominiert ist, wodurch sich eine durch die Temperatur des Plasmas charakterisierte Maxwell-Verteilung einstellt. Dies ist jedoch in vielen astrophysikalischen Plasmen gerade *nicht* der Fall und es muss somit das kinetische Modell verwendet werden, bei dem ausgehend von der aus der statistischen Mechanik bekannten Boltzmann-Gleichung in Verbindung mit den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik das Verhalten sowohl der elektromagnetischen Felder als auch der Teilchen-Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum untersucht wird. Einmal abgesehen von externen Ladungs- und Stromverteilungen werden die elektromagnetischen Felder durch die Ladungs- und Stromdichten der sich bewegenden Plasmapartikel selbst erzeugt (vgl. Schlickeiser<sup>80</sup>), und somit bestimmt das strömende Plasma die Feldverteilung. Das elektrische Feld und das Magnetfeld können daher durch Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung des Plasmas bestimmt werden. Umgekehrt erfordert die Lösung der stoßfreien Boltzmann-Gleichung, aus der sich die Verteilungsfunktion des Plasmas berechnen lässt, jedoch Kenntnis der elektromagnetischen Felder. Man erkennt also sofort die Nichtlinearität des Problems: um die Phasenraumverteilung des Plasmas bestimmen zu können, benötigt man die Kenntnis des elektromagnetischen Feldes; um jedoch die Felder aus den Maxwell-Gleichungen bestimmen zu können, müsste man bereits um die Geschwindigkeitsverteilung der Plasmateilchen wissen, da diese unmittelbar die Strom- und Ladungsdichten bestimmen. Anschaulich bedeutet dies, dass die geladenen Teilchen eines Plasmas durch eine nicht-gleichförmige Bewegung elektromagnetische Wellen generieren, welche wiederum durch die Lorentz-Kraft auf die Teilchen zurückwirken und deren Geschwindigkeit beeinflussen. Man hat es also mit einem hochgradig gekoppelten Problem zu tun.

Es gibt an dieser Stelle nun drei grundsätzliche Ansätze, um trotz dieser Schwierigkeiten zu einer Lösung zu gelangen:

- Der Testteilchen-Zugang nimmt die elektromagnetischen Felder als fest vorgegeben an und vernachlässigt somit die Wirkung der Teilchenverteilung auf die Felder.

Diese Methode wird genutzt, um den Transport von geladenen Teilchen durch turbulente Magnetfelder zu untersuchen und insbesondere Transportparameter wie mittlere freie Weglänge bzw. Diffusionskoeffizienten zu bestimmen.

- Beim Testwellen-Zugang wird für die Teilchen-Verteilungsfunktion ein vorgegebener Anfangszustand meist in Form einer Gleichgewichts-Verteilung angenommen, dessen Wirkung auf die elektromagnetischen Felder betrachtet wird. Diese Methode wird meist zur Untersuchung einer bestimmten bzw. Klassen von Teilchenverteilungsfunktionen auf Instabilität und zur Bestimmung der Eigenschaften von Plasmawellen verwendet.
- Die dritte Möglichkeit besteht in numerischen Simulationen, wozu die in Abschnitt 1.4 näher beschriebenen PIC-, also *Particle-in-Cell*-Simulationen, zählen. Dabei werden die gekoppelten Gleichungen *selbstkonsistent* gelöst, es müssen also im Gegensatz zu den beiden zuvor genannten Herangehensweisen weder an die Teilchenverteilungsfunktion noch an die elektromagnetischen Felder Vorgaben gemacht werden.

Gegenstand dieser Arbeit sind die beiden zuerst genannten analytischen Methoden und deren Anwendung auf eine Reihe von Beispielen. Die dritte Methode der numerischen Simulationen stellt – neben ihrer Anwendung als eigenständige Methode – nicht zuletzt auch eine Möglichkeit zur Kontrolle und zum Vergleich mit analytischen Rechnungen dar. Insbesondere in Teil I werden die dort durchgeführten Rechnungen mit einer Vielzahl unterschiedlicher Simulationen verglichen, deren Einzelheiten aus diesem Grund an der jeweiligen Stelle noch genauer erläutert werden.

### 1.4 *Particle-in-Cell*-Simulationen

Grundsätzlich können mit numerischen Simulationen im Rahmen numerischer Ungenauigkeiten und unter Berücksichtigung der durch die zur Verfügung stehende Rechenleistung limitierten Auflösung exakte, selbstkonsistente Lösungen erhalten werden. Der benötigte Speicher (vgl. Pritchett<sup>68</sup> und darin enthaltene Verweise) für ein dreidimensionales Gitter mit einer Auflösung von  $30 \times 30 \times 30$  im Geschwindigkeitsraum und  $128 \times 128 \times 128$  im Ortsraum erfordert schon etwa ein Terabyte. Die nötige Rechenleistung lässt sich anhand der früher verwendeten Modelle illustrieren: So wurden anfangs die elektromagnetischen Kräfte eines von  $N$  Teilchen explizit durch Aufsummation der Coulomb-Wechselwirkungen mit den anderen  $N - 1$  Teilchen bestimmt; die Anzahl dieser Zweiteilchen-Wechselwirkungen liegt bei  $N(N - 1)/2$ , wächst also quadratisch mit der Teilchenzahl. Zur Veranschaulichung: Für  $10^7$  Teilchen, bei denen die Wechselwirkung beispielsweise in 10 arithmetischen Operationen bestimmt wird, beläuft sich die Gesamtzahl der Rechenoperationen etwa auf  $5 \cdot 10^8$ . Erfordert jede Operation etwa 1 ns, so beträgt die Gesamtzeit immer noch ungefähr 160 Jahre. Dieses Vorgehen ist also offenkundig nicht praktikabel.

*Particle-in-Cell*-Simulationen gehen daher einen anderen Weg: Dabei wird ein räumliches Gitter eingeführt, auf welchem die durch die Teilchen gebildeten Ladungs- und Stromdichten aufsummiert werden. Sowohl dabei als auch bei der – nach erfolgter Lösung der Feldgleichungen auf dem Gitter – durchgeführten Berechnung der auf die Teilchen

wirkenden Kräfte kommen Interpolationsverfahren zum Einsatz. Durch dieses Prinzip reduziert sich der Rechenaufwand für  $N$  Teilchen pro Zeitschritt auf  $N \log N$ . Die begrenzte räumliche Auflösung des Gitters bringt es mit sich, dass Fluktuationen auf kleineren Skalen als der Gitterabstand eliminiert werden. Dagegen müssen PIC-Modelle mit – auf der räumlichen Skala des Gitters – langsam variierenden Fluktuationen in den Feldern fertig werden, so dass die Normalmoden des Plasmas räumlich aufgelöst werden können.

Im ersten Schritt werden nun zunächst aus den Maxwell-Gleichungen die Quellterme bestimmt, wobei je nach Dimensionalität des betrachteten Problems über zwei, vier, beziehungsweise acht Gitterpunkte linear interpoliert wird. Als nächster Schritt erfolgt die Zeitintegration der Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j} \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.1b)$$

wobei das sog. *Leapfrog*-Verfahren<sup>b</sup> verwendet wird.

Das räumliche Gitter verwendet ebenfalls eine versetzte Darstellung der elektromagnetischen Felder. Dabei werden das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}$  jeweils am Mittelpunkt der Zellenränder definiert, während das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  am Mittelpunkt der Zellenoberfläche definiert wird. Ein solches Schema erfüllt die Maxwell-Gleichung  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  bis zur Maschinengenauigkeit. Jedoch gilt dies nicht für die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.2)$$

deren Verletzung bei der Zeitintegration der Maxwell-Gleichungen (1.1) zu unphysikalischen Feldern führt, welche die Poisson-Gleichung  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$  nicht erfüllen. Um dieses Problem zu lösen, kann man entweder ein aufwändigeres Interpolationsverfahren einführen, das die Kontinuitätsgleichung explizit erfüllt, oder aber zum elektrischen Feld einen Korrekturterm  $\delta\mathbf{E}$  addieren, der durch Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 (\delta\Phi) = -(4\pi\rho - \nabla \times \mathbf{E}) \quad (1.3)$$

als  $\delta\mathbf{E} = -\nabla\delta\Phi$  bestimmt wird; diese zweite Möglichkeit ist wesentlich leichter zu implementieren.

Neben der Lösung der vollen Maxwell-Gleichung und damit der selbstkonsistenten Bestimmung sowohl des elektrischen als auch des magnetischen Feldes gibt es Näherungsverfahren, bei denen entweder das magnetische Feld als von außen gegeben und zeitlich wie räumlich konstant angesehen wird (das sog. elektrostatische Modell), oder, basierend auf einer Entwicklung bis zur Ordnung  $(v/c)^2$ , elektromagnetische Strahlung vernachlässigt wird (Darwin- oder magnetoinduktive Approximation). Letzteres hat Vorteile in

<sup>b</sup>wörtlich: „Bocksprung“-Verfahren, auch als Zweischrittverfahren bezeichnet. Dabei wird eine Differenzialgleichung der Form  $\partial u/\partial t = F(u)$  gemäß  $u_{n+1} = u_{n-1} + 2\Delta t F(u_n)$  gelöst, wobei  $\Delta t$  die zeitliche Schrittweite bezeichnet. Dieses Verfahren ist zeitzentriert und erfüllt somit zum Beispiel die Forderung nach der Erhaltung der Energie besser als zeitlich nicht zentrierte Verfahren; weiterhin ist es bis zur zweiten Ordnung in  $\Delta t$  korrekt.

zweidimensionalen Simulationen, weil hier die elektromagnetischen Felder allein durch die senkrecht zur betrachteten Ebene liegende Komponente des Vektorpotenzials beschrieben werden können; in dreidimensionalen Simulationen gibt es diesen Vorteil nicht mehr.

Zuletzt sei noch kurz auf den Unterschied zwischen expliziten und impliziten Verfahren eingegangen. Das bisher beschriebene Vorgehen, bei dem die neuen Felder und Quellterme ausschließlich aus den vorherigen berechnet werden, wird als explizites Verfahren bezeichnet. Um stabil zu sein, muss ein solches Verfahren die CFL-Bedingung<sup>c</sup> erfüllen. Im Gegensatz dazu erfordert die Berechnung der neuen Größen Kenntnis dieser Größen zu eben diesem neuen Zeitpunkt. Diese Kenntnis erlangt man entweder durch einen Momenten-Zugang (*moment approach*), bei dem ein impliziter Satz von Momenten-Gleichungen verwendet wird, um die Felder zum nächsten Zeitpunkt zu bestimmen. Am nächsten Zeitschritt werden die Momenten-Gleichungen mit der neuen Information reinitialisiert, was den Vorteil hat, dass etwaige Fehler nicht transportiert werden. Der kinematische Zugang dagegen sagt die zukünftigen Felder direkt durch Extrapolation voraus. Implizite Verfahren haben den Vorteil, dass sie stets stabil sind, also nicht auf die CFL-Bedingung geachtet werden muss, und sie zudem um einen Faktor 50-100 größere zeitliche Schrittweiten erlauben. Aufgrund ihrer inhärent größeren Komplexität entstehen jedoch oft Bedenken bezüglich der Zuverlässigkeit.

---

<sup>c</sup>Die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung besagt, dass für Zeitschritte  $\Delta t$  und räumliche Schrittweiten  $\Delta x$  die Bedingung  $\Delta x/\Delta t \geq c$  gelten muss, wobei  $c$  die physikalische Geschwindigkeit der Informationsausbreitung (in diesem Fall die Lichtgeschwindigkeit) bezeichnet. Das bedeutet, dass alle Punkte, die den zu berechnenden Punkt aufgrund des von der Differenzialgleichung beschriebenen physikalischen Mechanismus beeinflussen *können*, dazu auch im Rahmen des numerischen Algorithmus' in der Lage sein *müssen* (vgl. Computational Physics I: Grundlagen, Martin Neumann, Institut für Experimentalphysik der Universität Wien).



# Teil I

## Das Testteilchen-Bild



---

## 2 Transport-Theorie

*In diesem Kapitel wird die quasilineare Theorie (QLT) hergeleitet, zunächst in Anlehnung an Schlickeiser<sup>80</sup> und Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup> sowie – skizzenhaft – mit Hilfe des Green-Taylor-Kubo-Formalismus'. Im weiteren Verlauf werden die Grundideen der nichtlinearen Führungszentrums-Theorie (NLGC) von Matthaeus et al.<sup>54</sup> dargestellt.*

### 2.1 Einleitung

Wie bereits in vielen Arbeiten beschrieben – beispielhaft erwähnt seien hier Bieber et al.<sup>5</sup>, Jokipii<sup>34</sup>, Parker<sup>64</sup> –, ist der Transport kosmischer Strahlung parallel und senkrecht zu einem homogenen, großskaligen Hintergrundmagnetfeld ein interessantes und wichtiges Arbeitsgebiet innerhalb der theoretischen wie auch der beobachtenden Astrophysik. Mit Recht wird dies als eines der Schlüsselprobleme der Astrophysik kosmischer Strahlung bezeichnet.

Als Standardwerkzeug zur Berechnung von Transport- und Diffusionskoeffizienten wurde bislang überwiegend die quasilineare Theorie – als QLT abgekürzt – verwendet, die ursprünglich auf Kennel und Engelmann<sup>38</sup>, Vedenov et al.<sup>110, 111</sup> und Lerche<sup>46</sup> zurückgeht und unter anderem von Jokipii<sup>34</sup> erstmals auf das Problem des Teilchentransportes in der Heliosphäre angewandt wurde. Darin werden die wahren Teilchenbahnen für die Berechnung der Diffusionskoeffizienten durch die „ungestörten“ Trajektorien ersetzt, also durch die gedachten Bahnen, die sich in Abwesenheit des turbulenten Magnetfeldes und nur durch die Gyrationbewegung in einem homogenen Feld ergäben. Auch wenn eine gewisse Unsicherheit aufgrund des störungstheoretischen Charakters der QLT unausweichlich erscheint, so wurde doch für eine lange Zeit angenommen, dass eine lineare Beschreibung des Teilchentransportes in turbulenten Magnetfeldern zumindest qualitativ korrekt ist und prinzipiell brauchbare Ergebnisse liefern würde.

Da die Richtigkeit und die Genauigkeit der quasilinearen Theorie schon für die verschiedensten Anwendungen vorausgesetzt wurde, ist es essenziell, die Gültigkeit der QLT für verschiedene Modelle zu überprüfen. Dies wird Inhalt des ersten Teils dieser Arbeit sein. Während wir uns in Kapitel 3 auf statische, zeitunabhängige Turbulenz konzentrieren, werden wir uns in Kapitel 4 der Plasmawellen-Turbulenz zuwenden, die eine Möglichkeit darstellt, ein realistischeres Turbulenzmodell zu konstruieren. Beide Male werden wir die Ergebnisse mit numerischen Testteilchen-Simulationen vergleichen und Übereinstimmungen wie auch Abweichungen aufzeigen und erklären.

Vorher werden wir in diesem Kapitel aber zunächst die Grundlagen der quasilinearen Theorie herleiten. Da diese Theorie von den mathematischen Einzelheiten her sehr komplex ist, werden wir nicht alle Schritte von der Vlasov-Gleichung über die Fokker-Planck-

Gleichung bis hin zu den letztlich benötigten Transportkoeffizienten – den mittleren freien Weglängen und den Diffusionskoeffizienten – im Detail ausführen. Die wesentlichen Ideen sollen hier jedoch zusammengefasst beschrieben werden – da gerade diese in den detaillierten Herleitungen manchmal etwas untergehen.

Darüber hinaus werden wir die Grundzüge der nichtlinearen Führungszentrums-Theorie erläutern, die wir in Kapitel 3 ebenfalls verwenden werden, um Vergleiche mit numerischen Simulationen anzustellen.

## 2.2 Quasilineare Theorie

Für die im Wesentlichen aus Schlickeiser<sup>80</sup> übernommene Herleitung der quasilinearen Theorie gehen wir zunächst von der als Vlasov-Gleichung bekannten stoßfreien relativistischen Boltzmann-Gleichung aus, die durch die totale Zeitableitung der Phasenraum-Verteilungsfunktion  $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  gegeben ist,

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} + q_a \left[ \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} + \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right] \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (2.1)$$

wobei der Index  $a$  für die unterschiedlichen Teilchensorten steht.

Die zeitliche Änderung der Teilchenzahl in einem Volumen  $V$  wird durch eine Quell- und Senkenfunktion  $S_a$  beschrieben:

$$S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{d}{dt} N_a(t) = \int_V d^3x \int d^3p \frac{d}{dt} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (2.2)$$

Zusammen mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_a q_a \int d^3p f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sum_a q_a \int d^3p \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (2.3b)$$

in denen die Ladungs- und Stromdichten selbstkonsistent durch die Phasenraum-Verteilungsfunktion zu berechnen sind, sowie den beiden homogenen Maxwell-Gleichungen,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.3d)$$

wodurch insgesamt die elektrischen und magnetischen Felder festgelegt werden, haben wir es bei den Vlasov-Maxwell-Gleichungen daher mit einem gekoppelten System nichtlinearer inhomogener Integro-Differenzialgleichungen zu tun, dessen Lösung bis auf wenige einfache Spezialfälle analytisch nicht möglich ist.

Zur Vereinfachung dieses Gleichungssystem gibt es zwei prominente Vorgehensweisen. Die in Teil I dieser Arbeit vorgestellten Verfahren transformieren die Gyrationbewegung

der Teilchen aus den Gleichungen heraus und verwenden verschiedene Annahmen über die Bewegung der Führungszentren der Teilchen, während die in Teil II verwendeten Methoden allesamt auf einer Linearisierung der Vlasov-Gleichung (2.1) basieren.

Die Bewegungsgleichungen eines Teilchen im elektromagnetischen Feld lauten

$$\dot{\mathbf{p}} = q \left[ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right] \quad (2.4a)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_a}. \quad (2.4b)$$

Im Folgenden sind wir, aufgrund der Gyrationbewegung der Teilchen, nicht so sehr an der tatsächlichen Position des Teilchens interessiert, sondern vielmehr am Verhalten des Führungszentrums (*guiding center*), dessen Position durch

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z) = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_z}{\Omega} \quad (2.5)$$

gegeben ist, wobei  $\Omega$  die relativistische Gyrofrequenz bezeichnet. Dabei haben wir vorausgesetzt, dass das homogene Hintergrundmagnetfeld  $\mathbf{B}_0$  in  $z$ -Richtung liegt und dass die Zyklotronbewegung der Teilchen durch die Anwesenheit eines turbulenten Magnetfeldes nicht wesentlich verändert wird. In Abb. 2.1 sind zur Verdeutlichung der Tragweite dieser Annahme die simulierten Bahnen von Protonen verschiedener Energie in einem Magnetfeld mit einer Turbulenzstärke  $\delta B = B_0$  dargestellt. Von einer ungestörten Helixbahn, wie sie durch Gl. (2.5) für ein homogenes Magnetfeld beschrieben wird, ist hier lediglich noch eine gewisse Bevorzugung der  $z$ -Richtung zu erkennen.

Als nächstes führen wir Kugelkoordinaten ein mit  $\mu = p_{\parallel}/p = \cos \angle(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{e}}_z)$ , so dass wir für die Koordinaten des Impulsvektors erhalten

$$p_x = p \cos \phi \sqrt{1 - \mu^2}, \quad p_y = p \sin \phi \sqrt{1 - \mu^2}, \quad p_z = p\mu. \quad (2.6)$$

Die Koordinate  $\mu$  wird auch als der „Anstellwinkel“ (*pitch angle*) bezeichnet und beschreibt den Winkel zwischen der helixartigen Gyrationbewegung des Teilchens und dem Hintergrund-Magnetfeld. Damit folgt für die Koordinaten des Führungszentrums

$$X, Y = x, y \pm \frac{v \sqrt{1 - \mu^2}}{\Omega} \sin \phi, \quad Z = z. \quad (2.7)$$

Transformieren wir mit diesen Vorbereitungen die Vlasov-Gleichung (2.1) auf das Koordinatensystem  $x_{\sigma} = (p, \mu, \phi, X, Y, Z)$ , so folgt

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f_a}{\partial Z} - \Omega \frac{\partial f_a}{\partial \phi} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} (p^2 g_{x_{\sigma}} f_a) = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (2.8)$$

wobei gemäß der Einsteinschen Summationskonvention über gleiche Indizes summiert wird. Dabei sind  $g_{x_{\sigma}}$  die aus den Gleichungen (2.4) folgenden Kraftterme (s. Schlickeiser<sup>80</sup>). Die räumlichen Kraftterme sind für rein magnetische Fluktuationen durch

$$g_X = \dot{X} = -v \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi \frac{\delta B_{\parallel}}{\delta B_0} + \frac{\mu v}{\sqrt{2} B_0} (\delta B_R + \delta B_L) \quad (2.9a)$$

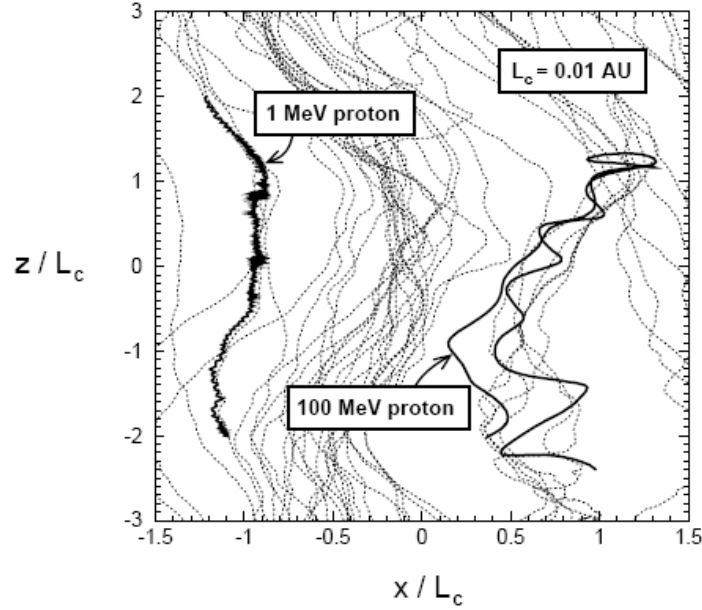


Abbildung 2.1: Simulierte Teilchenbahnen für Protonen mit Energien zwischen 1 und 100 MeV in einem statischen turbulenten Magnetfeld, wobei einem homogenen Führungsfeld  $\mathbf{B}_0$  in  $z$ -Richtung ein turbulentes Feld der Stärke  $\delta B = B_0$  überlagert ist. Aus Giacalone und Jokipii<sup>25</sup>.

$$g_Y = \dot{Y} = -v\sqrt{1-\mu^2}\sin\phi\frac{\delta B_{\parallel}}{\delta B_0} + \frac{i\mu v}{\sqrt{2}B_0}(\delta B_R - \delta B_L) \quad (2.9b)$$

gegeben sowie  $g_Z = 0$ . Dabei haben wir zur späteren Verwendung (Kapitel 3 und 4) helikale Koordinaten eingeführt, die gegeben sind durch

$$\delta B_{L,R} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta B_x \pm i\delta B_y), \quad \delta B_{\parallel} = \delta B_z. \quad (2.10)$$

Nun spalten wir die Verteilungsfunktion  $f_a$  in einen gemittelten und einen fluktuierenden Anteil auf,

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = F_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (2.11)$$

wobei  $F_a = \langle f_a \rangle$  den (isotropen) Mittelwert über ein *Ensemble* von Verteilungsfunktionen bezeichnet. Aus  $\langle \delta \mathbf{B} \rangle = \langle \delta \mathbf{E} \rangle = 0$  folgt dann, dass  $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_0$  und  $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$  gilt. Dies ausnutzend, erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + v\mu \frac{\partial F_a}{\partial Z} - \Omega \frac{\partial F_a}{\partial \phi} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \langle p^2 g_{x_{\sigma}} \delta f_a \rangle. \quad (2.12)$$

Ziehen wir dies von der Vlasov-Gleichung (2.8) ab, so ergibt sich eine Gleichung für die Fluktuationen

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f_a + v\mu \frac{\partial}{\partial Z} \delta f_a - \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \delta f_a = -g_{x_{\sigma}} \frac{\partial F_a}{\partial x_{\sigma}} - g_{x_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \delta f_a + \left\langle g_{x_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \delta f_a \right\rangle, \quad (2.13)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass sich folgendes zeigen lässt (Urch<sup>109</sup>):

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (p^2 g_{x_\sigma}) = 0. \quad (2.14)$$

Nähern wir Gl. (2.13) durch den führenden Term, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f_a + v\mu \frac{\partial}{\partial Z} \delta f_a - \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \delta f_a \simeq -g_{x_\sigma} \frac{\partial F_a}{\partial x_\sigma}. \quad (2.15)$$

Dies wiederum lässt sich mittels der Methode der Integration entlang des ungestörten Orbits (*method of characteristics*) lösen, woraus man durch Einsetzen in Gl. (2.12) die *Fokker-Planck-Gleichung* erhält (s. Rosenbluth et al.<sup>74</sup>), die sich als

$$0 = \frac{\partial F_a}{\partial t} + v\mu \frac{\partial F_a}{\partial Z} - \Omega \frac{\partial F_a}{\partial \phi} - S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{1}{p^2} \sum_{\sigma, \nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left( p^2 D_{x_\sigma x_\nu} \frac{\partial F_a}{\partial x_\nu} \right) \quad (2.16)$$

schreiben lässt. Im Falle einer nicht vom Phasenwinkel  $\phi$  abhängigen Verteilungsfunktion lauten ihre führenden Terme

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial F_a}{\partial t} + v\mu \frac{\partial F_a}{\partial z} - S_a(z, p, t) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ D_{\mu\mu} \frac{\partial F_a}{\partial \mu} + D_{\mu p} \frac{\partial F_a}{\partial p} \right] \\ & + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left[ D_{\mu p} \frac{\partial f}{\partial \mu} + D_{pp} \frac{\partial F_a}{\partial p} \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ D_{XX} \frac{\partial F_a}{\partial X} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Man kann nun zeigen (z. B. Schlickeiser<sup>80</sup>), dass die insgesamt 25 möglichen Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{x_\sigma x_\nu}$  geschrieben werden können als

$$D_{x_\sigma x_\nu} = \Re \int_0^\infty d\xi \langle \bar{g}_{x_\sigma}(t) \bar{g}_{x_\nu}^*(t + \xi) \rangle. \quad (2.18)$$

Eine andere Formulierung beschreibt die Fokker-Planck-Koeffizienten mit Hilfe des Quadrates beispielsweise der räumlichen Verschiebung  $\Delta X$  bzw. der Verschiebung des Anstellwinkels  $\Delta\mu$  (Hall und Sturrock<sup>29</sup>) als

$$D_{XX} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle}{2t} \quad (2.19a)$$

$$D_{\mu\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta\mu)^2 \rangle}{2t}, \quad (2.19b)$$

wobei die Teilchenbewegung als *diffusiv* bezeichnet wird, sofern die in den Gleichungen (2.19) definierten Grenzwert endlich sind.

### 2.2.1 Herleitung der Fokker-Planck-Koeffizienten

Im Folgenden werden wir zunächst eine der verschiedenen Herleitung zur konkreten Berechnung der Fokker-Planck-Koeffizienten am Beispiel des senkrechten Diffusionskoeffizienten  $D_\perp = D_{XX} + D_{YY}$  in sieben Schritten skizzieren; dies lehnt sich eng an eine

Veröffentlichung von Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup> an. Die benötigten Rechnungen sind sehr umfangreich und an einigen Stellen etwas trickreich, insgesamt jedoch nicht schwer nachzuvollziehen. Auf die ausführliche Angabe der mathematischen Details wird daher hier verzichtet. Stattdessen soll der Versuch gemacht werden, die Herleitung in kurzen Worten zu beschreiben, da genau dieser Überblick in den ausführlichen mathematischen Herleitungen oftmals verloren geht.

**1. Die quasilineare Approximation:** Zunächst wird als wichtigste approximative Annahme die wahre Bahn der Teilchen,  $\mathbf{x}(t)$ , durch die *ungestörte* Teilchenbahn ersetzt, deren Azimuth gegeben ist durch  $\phi(t) = \phi_0 - \Omega t$ , wobei  $\Omega$  die Gyrofrequenz der Teilchen im Hintergrund-Magnetfeld bezeichnet. In den Fourier-Darstellungen der fluktuierenden magnetischen Felder wird daher der Faktor  $\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)]$  durch die *ungestörte Bahn* ersetzt; für die Geschwindigkeiten wird weiterhin  $\mu = \text{const}$  vorausgesetzt. Aufgrund des auftretenden Sinus' ist es zweckmäßig, den Exponentialfaktor in eine Summe über Besselfunktionen zu entwickeln (siehe hierzu Gl. C.4e in Anhang C.1).

**2. Formale Integration der Bewegungsgleichung:** Durch Integration der Bewegungsgleichung von 0 bis  $t$  über  $t'$  erhält man mit der Anfangsbedingung  $X(t=0) = X_0$  einen Ausdruck zum Beispiel für die Verschiebung  $\Delta X = X(t) - X_0$ , der anschließend quadriert wird, um  $(\Delta X)^2$  zu erhalten. Dies bedingt eine Doppelsumme über Besselfunktionen. Für die Berechnung des Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{XX}$  nach Gl. (2.19a) wird genau dieses Verschiebungsquadrat benötigt.

**3. Annahme homogener Turbulenz:** Es wird die Annahme verwendet, dass die turbulenten Magnetfelder homogen verteilt seien. Daraus folgt, dass die turbulenten Felder stets unkorreliert sind, sofern sich ihre Wellenvektoren unterscheiden; genauer gilt

$$\langle \delta B_l(\mathbf{k}, t') \delta B_m^*(\mathbf{k}', t'') \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot P_{lm}(\mathbf{k}, t' - t''). \quad (2.20)$$

**4. Zufallsphasen-Approximation:** Mit der Annahme, dass die anfängliche Phase der Teilchen,  $\phi_0$ , zwischen den Werten 0 und  $2\pi$  zufallsverteilt ist, reduziert sich die Doppelsumme über Besselfunktionen im Ausdruck für  $(\Delta X)^2$  zu einer einfachen Summe.

**5. Zeitliches Verhalten des Korrelationstensors:** Als nächstes wird nun die Annahme gemacht, dass alle Komponenten des Korrelationstensors die gleiche Zeitabhängigkeit haben, so dass diese als skalare Funktion separiert werden kann gemäß

$$P_{lm}(\mathbf{k}, t' - t'') = P_{lm}^0 \cdot F(\mathbf{k}, t' - t''). \quad (2.21)$$

Dies führt auf die sog. *Resonanzfunktion*  $T$ , deren Verhalten für große Zeiten bestimmt, ob der Teilchentransport diffusiv oder aber sub- bzw. superdiffusiv verläuft:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T \propto \begin{cases} t, & \text{diffusiv} \\ t^\beta \text{ mit } \beta < 1, & \text{subdiffusiv} \\ t^\beta \text{ mit } \beta > 1, & \text{superdiffusiv} \end{cases} \quad (2.22)$$



**6. Bedingungen für diffusiven senkrechten Transport:** Es kann (allerdings nur im Rahmen der QLT selbst) gezeigt werden, dass der Teilchentransport unter zwei Bedingungen diffusiv verläuft. Diese sind:

- a) Die zeitliche Abhängigkeit des Korrelationstensors darf nur vom Absolutwert der Differenz  $|t' - t''|$  abhängen, wobei  $t'$  und  $t''$  die Variablen in der Integration der Bewegungsgleichung der beiden Faktoren im Ausdruck  $(\Delta X)^2$  bezeichnen.
- b) Es gibt eine endliche *Korrelationszeit*  $t_c(\mathbf{k})$ , jenseits derer die Korrelationsfunktion  $F$  auf einen vernachlässigbaren Wert abfällt.

Eine bestimmte Wahl der Korrelationsfunktion, die beispielsweise durch das Verhalten von Plasmawellen-Turbulenz (siehe Kap. 4) gerechtfertigt ist, ist eine Exponentialfunktion der Form

$$F(\mathbf{k}, |t' - t''|) = \exp[-\eta(\mathbf{k}) |t' - t''|], \quad (2.23)$$

wobei  $\eta = t_c^{-1} \geq 0$  mit dem Betrag der Dämpfungsrate der Plasmawellen identifiziert werden kann. Zum Begriff der Dämpfung (bzw. des Anwachsens) von Plasmawellen sei auf Teil II verwiesen.

**7. Die Resonanzfunktion:** Die Resonanzfunktion  $T$ , definiert als das zeitliche Integral der Korrelationsfunktion über  $t'$  und  $t''$  zusammen mit einem Exponentialfaktor, lässt sich für große Zeiten  $t \gg \eta^{-1}$  schreiben als

$$T(t \gg \eta^{-1}) \sim \frac{2\eta t}{\eta^2 + \beta_n^2}, \quad (2.24)$$

wobei  $\beta_n$  die sog. Resonanzbedingung bezeichnet. Dadurch ist bewiesen, dass der Transport für große Zeiten diffusiv verläuft.

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn man von einer unendlichen Korrelationszeit  $t_c = \infty$  entsprechend  $\eta = 0$  ausgeht. In diesem Fall ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(\eta = 0) \sim 2\pi\delta(\beta_n). \quad (2.25)$$

Im Falle magnetostatischer Turbulenz – dabei geht also die zusätzliche Annahme ein, dass die räumliche Verteilung der turbulenten Magnetfelder zeitunabhängig sei – gilt für die Resonanzbedingung  $\beta_n = k_{\parallel}v\mu + n\Omega$  bzw.  $\beta_n = k_{\parallel}(v\mu \pm V_A) + n\Omega$  im Fall von Plasmawellen-Turbulenz, wobei  $V_A$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Alfvénwellen bezeichnet. Die Resonanzfunktion, die sich mit Hilfe des Ausdruckes für  $T$  aus Gl. (2.25) ergibt, wird in den folgenden Kapiteln zur Berechnung der Fokker-Planck-Koeffizienten zugrunde gelegt.

Eine alternative Herleitung wird durch den *Green-Taylor-Kubo-Formalismus* beschrieben (z. B. Kubo<sup>41</sup>), bei dem nur noch vier Schritte benötigt werden, nämlich die quasilineare Approximation sowie die Annahme quasistationärer Turbulenz, d. h. dass Korrelationen der Form  $\langle \dot{\mu}(t)\dot{\mu}^*(t + \tau) \rangle$  nur von  $\tau$  abhängen. Weiterhin wird von der Existenz einer Korrelationszeit  $\tau_c$  ausgegangen, so dass  $\langle \dot{\mu}(0)\dot{\mu}^*(s) \rangle$  für  $s \rightarrow \infty$  verschwindet. Damit lässt sich ebenfalls zeigen, dass der Transport diffusiv wird. Zusammen mit den Annahmen homogener Turbulenz und der Zufallsphasen-Approximation erhält man schließlich die gleiche Form der Fokker-Planck-Koeffizienten wie mit Hilfe der oben beschriebenen sieben Schritte.

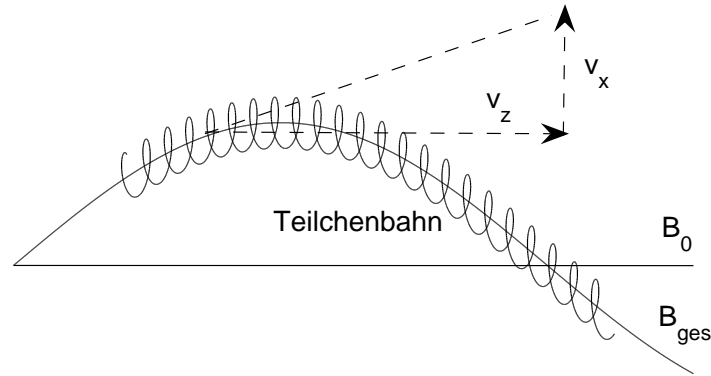


Abbildung 2.2: Unter der Annahme „Führungszentren folgen Feldlinien“ besteht die Bewegung der Teilchen aus einer Überlagerung der Bewegung des Führungszentrums und einer durch das Hintergrund-Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  verursachten Gyrationbewegung senkrecht zur  $z$ -Achse. Aus Tautz et al.<sup>104</sup>.

## 2.3 Nichtlineare Führungszentrums-Theorie

Die nichtlineare Führungszentrums-Theorie (*nonlinear guiding center theory*, NLGC) ist weniger eine strenge Herleitung allgemeiner Transportkoeffizienten als vielmehr eine auf einer Basis- und unterschiedlichen Zusatzannahmen basierende Herleitung ausschließlich der senkrechten mittleren freien Weglänge in Abhängigkeit von der parallelen mittleren freien Weglänge; letztere muss also bereits bekannt sein. Im Rahmen ihrer Gültigkeit und unter Beachtung dieser Einschränkungen ist die NLGC-Theorie aber, wie wir noch zeigen werden, sehr erfolgreich – letztendlich ist sie sogar die einzige Theorie, die für isotrope Turbulenz akzeptable Ergebnisse für die senkrechte Diffusion liefert.

Die Theorie basiert wesentlich auf der Annahme, dass die Führungszentren der Teilchen den magnetischen Feldlinien folgen – eine Annahme, die möglicherweise nur in schwacher Turbulenz gerechtfertigt ist. In der ursprünglichen Arbeit von Matthaeus et al.<sup>54</sup> war die Theorie für den Fall zweidimensionaler Turbulenz entworfen worden, und die eben genannte Bedingung wurde daher mit  $\delta B_z = 0$  durch

$$\tilde{v}_x = a \tilde{v}_z \frac{\delta B_x}{B_0} \quad (2.26)$$

beschrieben, wobei  $\tilde{\mathbf{v}}$  die Geschwindigkeit des Führungszentrums bezeichnet. Gl. (2.26) besitzt zusätzlich noch einen freien Parameter  $a$ , der als im Nachhinein zu bestimmen („*to be determined after the fact*“, Matthaeus et al.<sup>54</sup>) beschrieben wurde. Der Einfluss von  $a$  ist z.B. in Abb. 3.10 auf S. 44 veranschaulicht. Man kann jedoch aus anderen Überlegungen zeigen, dass  $a = 1$  gelten muss.

Im Folgenden werden wir die NLGC-Theorie nun erstmals für den Fall isotroper Turbulenz herleiten. Mit der zusätzlichen Bedingung, dass das turbulente Magnetfeld isotrop sei, gilt im Gegensatz zu obigem Ansatz  $\delta B_z \neq 0$ .

Mit der Annahme, dass die Führungszentren der Teilchen den Magnetfeldlinien folgen,

erhalten wir

$$\frac{dz}{dx} = \frac{B_z}{B_x}, \quad (2.27)$$

wobei  $dx$  und  $dz$  die Verschiebung des Führungszentrums in  $x$ - und  $z$ -Richtung und  $B_x$  und  $B_z$  die Komponenten des Gesamt-Magnetfeldes bezeichnen. Dies ist in Abb. 2.2 dargestellt. Ersetzen wir  $B_x = \delta B_x$  und  $B_z = B_0 + \delta B_z$ , wobei wir also wieder annehmen, dass das Hintergrund-Magnetfeld in  $z$ -Richtung liegt, und teilen Gl. (2.27) durch  $dt$ , erhalten wir

$$\frac{dz}{dt} \delta B_x = \frac{dx}{dt} (B_0 + \delta B_z). \quad (2.28)$$

Identifizieren wir  $dz/dt$  und  $dx/dt$  mit den Geschwindigkeitskomponenten  $\tilde{v}_z$  und  $\tilde{v}_x$  des Führungszentrums und damit – abgesehen von der Gyrationbewegung – mit denen des Teilchens, so ergibt sich sofort

$$\tilde{v}_x (B_0 + \delta B_z) = \tilde{v}_z \delta B_x, \quad (2.29)$$

was der Modifikation von Gl. (2.26) für nichtverschwindendes  $\delta B_z$  entspricht, wenn wir zusätzlich  $a = 1$  festlegen. Wir werden darauf in Kapitel 3.2.1 noch näher eingehen. Schreibt man Gl. (2.29) für zwei Zeiten,  $t$  und  $0$ , an, und bildet die Korrelation, so folgt mit  $i, j \in \{x, y\}$ , da Gl. (2.29) genauso für  $v_y$  und  $\delta B_y$  gilt:

$$\langle \tilde{v}_i(t) \tilde{v}_j^*(0) \rangle [B_0^2 + \langle \delta B_z(t) \delta B_z^*(0) \rangle] = \langle \tilde{v}_z(t) \tilde{v}_z^*(0) \rangle \langle \delta B_i(t) \delta B_j^*(0) \rangle. \quad (2.30)$$

Dabei ist die Annahme verwendet worden, dass Geschwindigkeit und Magnetfeldfluktuationen nicht korreliert sind und sich somit auf der rechten Seite der Gleichung die Korrelation vierter Ordnung durch ein Produkt zweier Korrelationen zweiter Ordnung ersetzen lässt. Um fortzufahren, nehmen wir, wie in Matthaeus et al.<sup>54</sup>, eine isotrope und exponentielle Form der Geschwindigkeits-Korrelationsfunktion an,

$$\langle \tilde{v}_i(t) \tilde{v}_j^*(0) \rangle = \frac{v^2}{3} e^{-vt/\lambda_{ij}}. \quad (2.31)$$

Damit wird eine mittlere freie Weglänge  $\lambda_{ij}$  in den Formalismus eingeführt. Obwohl dieser Ansatz konsistent mit der Green-Taylor-Kubo-Formel (Gl. 3.9 in Kap. 3) ist, gibt es Fälle (Kóta und Jokipii<sup>39</sup>, Shalchi<sup>88</sup>), in denen die Geschwindigkeits-Korrelationsfunktion einen nicht-exponentiellen Ausläufer hat.

Weiterhin ist die Korrelation der Magnetfeldkomponenten unter Verwendung der Corrsin'schen Unabhängigkeitshypothese<sup>14</sup> (*Corrsin independence hypothesis*) durch

$$\langle \delta B_i(t) \delta B_j^*(0) \rangle = \int d^3k \int d^3k' \langle \delta B_i(\mathbf{k}) \delta B_j^*(\mathbf{k}') \rangle \cdot \Gamma(\mathbf{k}, t) \quad (2.32)$$

gegeben, wobei  $\Gamma(\mathbf{k}, t) = \Gamma_T(\mathbf{k}, t) \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rangle$  sowohl dynamische Dekorrelationseffekte der Teilchenbahnen (durch die charakteristische Funktion  $\langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rangle$ ) als auch Dissipationseffekte der Turbulenz (durch die Funktion  $\Gamma_T(\mathbf{k}, t)$ ) beschreibt.

Im Falle homogener Turbulenz wird die Korrelation der Magnetfeld-Fluktuationen im Fourier-Raum durch den zeitunabhängigen Korrelationstensor beschrieben, der durch

$$\langle \delta B_i(\mathbf{k}) \delta B_j^*(\mathbf{k}') \rangle = P_{ij}(\mathbf{k}) \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.33)$$

definiert ist. Weiterhin benötigen wir die Annahmen achsensymmetrischer Turbulenz und einer Gaußschen Statistik,

$$\Gamma(\mathbf{k}, t) = e^{-\gamma(\mathbf{k})t} \equiv \exp \left[ - \left( \kappa_{\perp} k_{\perp}^2 + \kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 \right) t \right], \quad (2.34)$$

wobei  $\kappa$  die Diffusionskoeffizienten bezeichnet und Dämpfungs- und Dissipationseffekte vernachlässigt wurden. Diese Form für  $\gamma(\mathbf{k})$  gilt jedoch nur im Falle eines für alle Zeiten diffusiven parallelen und senkrechten Transportes. Damit erhalten wir für Gl. (2.30) unter Verwendung der Gleichungen (2.31) bis (2.34):

$$\frac{v^2}{3} e^{-vt/\lambda_{ij}} \left[ B_0^2 + \int d^3k P_{zz} e^{-\gamma(\mathbf{k})t} \right] = \frac{v^2}{3} e^{-vt/\lambda_{\parallel}} \int d^3k P_{ij} e^{-\gamma(\mathbf{k})t}, \quad (2.35)$$

wobei  $P_{xx}$  und  $P_{zz}$  die Komponenten des Korrelationstensors  $P_{ij}$  bezeichnen. Integrieren wir dies über alle Zeiten  $t$ , so folgt

$$\frac{\lambda_{ij}}{v} B_0^2 + \int d^3k P_{zz} \int_0^{\infty} dt e^{-vt/\lambda_{ij} - \gamma(\mathbf{k})t} = \int d^3k P_{ij} \int_0^{\infty} dt e^{-vt/\lambda_{\parallel} - \gamma(\mathbf{k})t}. \quad (2.36)$$

Nach Ausführen der verbliebenen Zeitintegrale ergibt sich daraus für die  $x$ - und  $y$ -Komponenten des Diffusionstensors unter Verwendung von  $\kappa_{lm} = v\lambda_{lm}/3$

$$\frac{\kappa_{ij}}{v^2} B_0^2 = \int d^3k \left( \frac{P_{ij}}{v^2/\kappa_{\parallel} + 3\gamma(\mathbf{k})} - \frac{P_{zz}}{v^2/\kappa_{ij} + 3\gamma(\mathbf{k})} \right). \quad (2.37)$$

Unter der Annahme isotroper Turbulenz erhalten wir hieraus für die Diagonalelemente  $\lambda_{xx} = \lambda_{yy} \equiv \lambda_{\perp}$  schließlich eine implizite Integralgleichung, welche somit die senkrechte mittlere freie Weglänge als Funktion der parallelen mittleren freien Weglänge liefert:

$$\frac{\lambda_{\perp}}{v} B_0^2 = \int d^3k \left( \frac{P_{xx}}{v/\lambda_{\parallel} + \gamma(\mathbf{k})} - \frac{P_{zz}}{v/\lambda_{\perp} + \gamma(\mathbf{k})} \right). \quad (2.38)$$

Im Gegensatz zur quasilinearen Theorie werden mit der nichtlinearen Führungszentrums-Theorie also keine Fokker-Planck-Koeffizienten berechnet, aus denen dann wiederum – darauf werden wir im nächsten Kapitel genauer eingehen – durch Mittelung über den Anstellwinkel  $\mu$  die freien Weglängen und Diffusionskoeffizienten bestimmt werden. Statt dessen wird die senkrechte mittlere freie Weglänge direkt aus der Turbulenz berechnet.

---

## 3 Magnetostatische Turbulenz

*In diesem Kapitel werden mittels quasilinearer Theorie und NLGC-Theorie in magnetostatischer Turbulenz berechnete mittlere freie Weglängen mit Ergebnissen aus Testteilchen-Simulationen verglichen. Die Gültigkeitsbereiche der quasilinearen Theorie werden damit weiter eingeschränkt.*

### 3.1 Einleitung

Wie in Kapitel 1 bereits bemerkt, besteht eines der Probleme in der Transporttheorie in den unsicheren Eingangsparametern der analytischen Modelle. Obwohl es in letzter Zeit Fortschritte im Verständnis astrophysikalischer Turbulenz gab, so gibt es immer noch keinen Konsens über das korrekte Turbulenzmodell. Daher wurde in der Vergangenheit bereits eine Anzahl verschiedener Modelle aufgestellt; deren prominenteste sind

- magnetostatische Turbulenz kombiniert mit *slab*, 2D, *composite*- oder isotroper Turbulenz (z. B. Giacalone und Jokipii<sup>25</sup>, Jokipii<sup>34</sup>, Qin et al.<sup>70,71</sup>, Shalchi<sup>87,88</sup>),
- gedämpfte oder ungedämpfte Plasmawellen-Turbulenz für verschiedene Geometriemodelle (siehe das Kapitel 4),
- dynamische Turbulenzmodelle mit einer exponentiellen Form der Dekorrelationsfunktion (z. B. in der wegweisenden Arbeit von Bieber et al.<sup>5</sup>)
- sowie erst kürzlich Kombinationen zwischen Plasmawellen- und dynamischen Turbulenzmodellen (z. B. Shalchi et al.<sup>92</sup>).

Diese Modelle in Verbindung mit der quasilinearen Theorie erlauben die unmittelbare Bestimmung der parallelen und senkrechten mittleren freien Weglängen geladener Teilchen aus den Fokker-Planck-Koeffizienten.

In der obigen Aufzählung bezeichnet „*slab*“<sup>a</sup> eine Turbulenzgeometrie, bei welcher der Wellenvektor des turbulenten magnetischen Feldes exakt entlang des Hintergrundmagnetfeldes ausgerichtet ist, während „2D“ sich auf darauf bezieht, dass der Wellenvektor des turbulenten Magnetfeldes exakt senkrecht zum Hintergrundmagnetfeld liegt. Im sog. „zusammengesetzten“ Modell (im Folgenden wird der englische Begriff „*composite*“ verwendet) wurde ursprünglich eine Superposition aus *slab*- und 2D-Geometrie angesetzt, deren jeweilige Anteile anhand von Beobachtungen von Bieber et al.<sup>5</sup> auf 20% *slab*- und 80% 2D-Anteil festgelegt wurde. In der Folgezeit haben neuere Methoden zur Herleitung dieses Verhältnisses aus Daten des Magnetometers der HELIOS 1- und HELIOS 2-Raumsonden, die in radialen Abständen von 0,3 bis 1 AU aufgenommen wurden (Bieber und Matthaeus<sup>3</sup>), die Werte auf 15% *slab*- und 85% 2D-Anteil verändert.

---

<sup>a</sup>wörtlich: *slab* – Platte, Scheibe; *slab geometry* – Plattengeometrie

Darüber hinaus gibt es erweiterte Modelle wie etwa das anisotrope Goldreich-Sridhar-Modell<sup>26,98</sup>; hierbei wird starke, anisotrope MHD-Turbulenz angenommen, und Werte merklich verschieden von Null treten auf kleinen Skalen nur für  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$  auf. Das Turbulenzspektrum ergibt sich in diesem Fall zu (vgl. Chandran<sup>13</sup>)

$$g(k_{\perp}, k_{\parallel}, \tau) \propto \frac{e^{-|\tau|/\tau_{\mathbf{k}}}}{k_{\perp}^{10/3} \ell^{1/3}} \Theta \left( 1 - \left| \frac{k_{\parallel} \ell^{1/3}}{k_{\perp}^{2/3}} \right| \right), \quad (3.1)$$

wobei  $\Theta(x)$  die Heaviside-Stufenfunktion bezeichnet und  $\tau_{\mathbf{k}} = (\ell/V_A)(k_{\perp} \ell)^{-2/3}$  die Lagrange-Korrelationszeit bezeichnet. Dabei wird angenommen, dass Fluktuationen auf einer Skala  $\ell$  die magnetische Energie dominieren und die Korrelation zweier Feldkomponenten an verschiedenen Orten mit einem Zeitunterschied  $\tau$  genommen werden.

In diesem Kapitel erfolgt jedoch die Beschränkung auf die einfachsten Geometrien; teilweise weil, wie wir zeigen werden, die quasilineare Theorie sogar in diesen einfachen Fällen ungeeignet ist, aber hauptsächlich, weil die isotrope wie auch die *slab*- und *composite*-Geometrie in verschiedenen Testteilchen-Simulationen verwendet wurden, mit denen wir unsere analytischen Ergebnisse vergleichen wollen.

Über die Geometrie der Turbulenz hinaus unterscheidet man, neben anderen Eigenschaften, vor allem magnetostatische, dynamische (wie etwa das neue NADT-Modell; vgl. Shalchi et al.<sup>92</sup>) und Plasmawellen-Turbulenz. Ersteres bezieht sich auf zeitunabhängige turbulente Magnetfelder, während sich im letzteren Fall die Turbulenz wie zeitlich propagierende Plasmawellen verhält. Dabei werden meistens hydrodynamische Plasmawellen wie Alfvén- oder (schnelle) magnetosonische Wellen verwendet.

Neben analytischen Studien stellen Testteilchen-Simulationen ein zweites wichtiges Werkzeug zur Beschreibung des Transportes kosmischer Strahlung dar. Viele frühere Testteilchen-Programme waren auf statische und *slab*-Turbulenz begrenzt, es konnte aber gezeigt werden, dass quasilineare Theorie zumindest in zwei Fällen nicht gültig ist:

- Für senkrechten Transport liefert die quasilineare Theorie diffusives Verhalten, während in Simulationen Subdiffusion gefunden wurde,
- die QLT kann Anstellwinkel-Diffusion nahe bei 90° nicht beschreiben.

In kürzlich durchgeführten Simulationen (Qin<sup>69</sup> und Qin et al.<sup>70,71</sup>) wurde gezeigt, dass im Falle der *composite*-Geometrie für senkrechten Transport die Diffusion wiederhergestellt wurde, quasilineare Rechnungen ergaben jedoch Superdiffusion (s. Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup>). Weiterhin ist die QLT auch für parallele Diffusion ungenau, wenn man von *slab*-ähnlichen zu 2D-Modellen übergeht. Die Ungültigkeit der QLT für „nicht-*slab*-Modelle“ kann als das dritte Problem definiert werden:

- Die QLT kann parallelen Transport nicht beschreiben, wenn die Geometrie nicht *slab*-artig ist; insbesondere für isotrope Geometrie ergeben sich im Falle statischer Turbulenz unendliche mittlere freie Weglängen, was als Versagen der quasilinearen Näherung zu werten ist. Dies liegt sowohl an dem hier genannten „Geometrie-Problem“ als auch am vorher schon angeführten 90°-Problem.

In Übereinstimmung damit wurde ein unendlicher paralleler Diffusionskoeffizient in isotroper Turbulenz durch verschiedene andere theoretische Überlegungen angedeutet (Bieber et al.<sup>6</sup>, Fisk<sup>22</sup>).

Die Verbindung der QLT mit ungedämpften Plasmawellen (z.B. Schlickeiser<sup>80</sup>, Teufel et al.<sup>105</sup>) wird Inhalt des Kapitels 4 sein. Die Resultate wurden mit der Annahme gerechtfertigt, dass die Gültigkeit der QLT zurückerlangt wird, wenn das einfache (und unrealistische) magnetostatische Modell durch Plasmawellenmodelle ersetzt wird. Der Vergleich mit Simulationen – soviel sei vorweggenommen – wird aber zeigen, dass die QLT auch unter Einbeziehung von Plasmawellen keine Übereinstimmung liefert.

Dieses Kapitel ist nun wie folgt aufgebaut: Zunächst werden in Abschnitt 3.2.1 die quasilinearen Rechnungen für die parallele und senkrechte mittlere freie Weglänge in isotroper magnetostatischer Turbulenz vorgestellt und gezeigt, dass sie als Ergebnis unendlich liefern. Wie erwähnt, war dies für die parallele mittlere freie Weglänge bereits durch frühere Überlegungen von Fisk<sup>22</sup> und Bieber et al.<sup>6</sup> angedeutet worden, in welchen Hinweise auf diese Singularitäten gefunden worden waren. Jedoch wurden in den genannten Arbeiten nur qualitative Argumente gegeben; im Gegensatz dazu zeigen wir hier erstmals explizit, warum und für welche Spektralindizes die mittleren freien Weglängen in der quasilinearen Theorie unendlich werden.

In Abschnitt 3.2.2 wird die senkrechte mittlere freie Weglänge mit der bereits in Kapitel 2.3 vorgestellten, für den Fall isotroper Turbulenzgeometrie neu formulierten nicht-linearen Führungszentrums-Theorie (NLGC-Theorie) von Matthaeus et al.<sup>54</sup> berechnet, um isotrope magnetostatische Turbulenz beschreiben zu können. Wie wir sehen werden, stimmen die Ergebnisse gut mit Simulationen überein – letztlich basiert diese Theorie aber auf diversen qualitativen Argumenten und ist daher keine *grundlegende* Theorie.

Während in Abschnitt 3.2 ausschließlich isotrope Turbulenz untersucht wird, werden in Abschnitt 3.3 Ergebnisse anderer Autoren zur parallelen mittleren freien Weglänge in magnetostatischer *slab*- und *composite*-Geometrie herangezogen und die Grundzüge der schwach-nichtlinearen Theorie WNLT (*Weakly Nonlinear Theory*, Shalchi et al.<sup>91</sup>) vorgestellt. Da diese Theorie jedoch analytisch nur sehr schwer auf den Fall isotroper Turbulenz anwendbar ist, werden wir nur die Resultate für *composite*-Geometrie zeigen. Für ein neuartiges nichtlineares, anisotropes dynamisches Turbulenzmodell (NADT-Modell) in *composite*-Geometrie wurde dies bereits von Shalchi et al.<sup>92</sup> berechnet; weiter gehende Anwendungen der schwach-nichtlinearen Theorie für isotrope Turbulenz werden daher Aufgabe zukünftiger Arbeiten sein.

In Abschnitt 3.4 werden wir zunächst Einzelheiten der numerischen Testteilchen-Simulationen von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> und Qin<sup>69</sup> beschreiben. Andere Simulationen von Casse et al.<sup>11</sup> und Candia und Roulet<sup>12</sup> werden ebenfalls kurz erwähnt. Danach werden wir die analytischen Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte mit den Simulationen vergleichen und Übereinstimmungen und Unterschiede diskutieren.

## 3.2 Isotrope Turbulenz

In diesem Abschnitt leiten wir die parallelen und senkrechten mittleren freien Weglängen in magnetostatischer isotroper Turbulenz mit Hilfe der quasilinearen Theorie (QLT) und der nichtlinearen Führungszentrums-Theorie (NLGC-Theorie) her. Wir werden im Detail zeigen, dass die QLT ungeeignet für die Kombination aus magnetostatischer und

isotroper Turbulenz in Verbindung mit einem Spektralindex  $s \geq 1$  ist, da – im Widerspruch zu Testteilchen-Simulationen – die mittleren freien Weglängen der Teilchen beide Male unendlich sind. Während Fisk<sup>22</sup> und Bieber et al.<sup>6</sup> nur qualitativ die Unendlichkeit der parallelen mittleren freien Weglänge bemerkten, werden wir dies explizit anhand von analytischen Herleitungen nachweisen und zeigen, dass der Grund im 90°-Problem liegt. Das bedeutet, dass der Fokker-Planck-Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  für kleine  $\mu$  (entsprechend Anstellwinkeln nahe bei 90°) verschwindet und daher die parallele mittlere freie Weglänge, die durch Mittelung über den Kehrwert von  $D_{\mu\mu}$  bestimmt wird, unendlich groß wird. Anschaulich entspricht dies dem Auftreten von Superdiffusion, was durch zeitabhängige Simulationen der Fokker-Planck-Koeffizienten bestätigt werden könnte.

#### 3.2.1 Quasilineare Herleitung

Für das isotrope Turbulenzspektrum nehmen wir eine Kappa-Verteilung der Form

$$G(k) = G_0 g(k) \equiv G_0 (1 + \ell_0^2 k^2)^{-\nu}, \quad \nu = s/2 \quad (3.2)$$

an, wobei  $\ell_0$  die Abknicklänge (*bend-over scale*) der Turbulenz bezeichnet. Wir wählen diese Form des Spektrums, da sie der des Turbulenzspektrums ähnelt, das in den Testteilchen-Simulationen von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> verwendet wurde.

Für den Spektralindex setzen wir  $1 < s < 2$  voraus, wobei  $s = 5/3$  ein vernünftiger Wert zumindest innerhalb der Heliosphäre ist (z. B. Denskat et al.<sup>19</sup>, siehe auch Abb. 1.2 auf S. 8). Die Form des Spektrums aus Gl. (3.2) ist weiterhin auch durch Beobachtungen in der Heliosphäre motiviert (s. Bieber et al.<sup>5</sup>, Denskat und Neubauer<sup>18</sup>), wobei der Energiebereich durch den konstanten Wert  $G_0$  angenähert wird und der Dissipationsbereich vernachlässigt wird (vgl. auch den Abschnitt 1.2).

Die Normierungskonstante  $G_0$  in Gl. (3.2) berechnet sich aus der Bedingung

$$(\delta B)^2 = \int d^3k \sum_{i=1}^3 P_{ii} \quad (3.3)$$

zu

$$G_0 = 4 (\delta B)^2 \ell_0 C(\nu), \quad (3.4)$$

wobei es üblich ist, die Abkürzung

$$C(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - \frac{1}{2})} \quad (3.5)$$

einzuführen.

Für den Korrelationstensor, der die Komponenten des fluktuierenden Magnetfeldes miteinander in Beziehung setzt, gilt die folgende Form

$$\langle \delta B_l(\mathbf{k}) \delta B_m^*(\mathbf{k}') \rangle = P_{lm}(\mathbf{k}) \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.6)$$

wenn isotrope und homogene Turbulenz vorausgesetzt wird. Für verschwindende magnetische Helizität (zur Definition siehe Abschnitt 4.4) hängt der Korrelationstensor dann



mit dem Turbulenzspektrum über die Beziehung

$$P_{lm}(\mathbf{k}) = \frac{G(k)}{8\pi k^2} \left[ \delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} \right] \quad (3.7)$$

zusammen.

Im Falle dynamischer Turbulenz ist der Turbulenztensor zudem noch zeitabhängig, wobei die Zeitabhängigkeit, die meist in Form einer Exponentialform angesetzt wird, als eine skalare Funktion  $\Gamma(t)$  von der tensoriellen Wellenzahlabhängigkeit separiert wird. Für die beiden in Bieber et al.<sup>5</sup> aufgestellten dynamischen Modelle ergab sich jeweils eine exponentielle Form  $\Gamma = e^{-\alpha V_A k t}$  bzw.  $\Gamma = e^{-(\alpha V_A k t)^2}$  mit  $\alpha$  als Parameter zum Anpassen der dynamischen Effekte, während für ein (ungedämpftes) Plasmawellenmodell (vgl. Kapitel 4)  $\Gamma = e^{\pm i V_A k_{\parallel} t}$  gilt; dabei bezeichnet  $V_A$  die Alfvén-Geschwindigkeit. Für magnetostatische Turbulenz gilt dagegen einfach  $\Gamma = 1$  (vgl. Shalchi et al.<sup>92</sup>). Der Reihe nach werden wir nun die QLT und eine Erweiterung der vor einiger Zeit aufgestellten NLGC-Theorie (s. Kapitel 2.3) anwenden, um die mittleren freien Weglängen für das isotrope magnetostatische Turbulenzmodell analytisch zu bestimmen.

Zunächst werden wir die quasilineare parallele Diffusion behandeln. In der QLT wird die mittlere freie Weglänge allgemein durch Mittelung über den Anstellwinkel-Cosinus des inversen Fokker-Planck-Koeffizienten für den Anstellwinkel,  $D_{\mu\mu}$ , berechnet (z. B. Earl<sup>21</sup>, Hasselmann und Wibberenz<sup>31</sup>, Jokipii<sup>34</sup>):

$$\lambda_{\parallel} = \frac{3}{v} \kappa_{\parallel} = \frac{3v}{8} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}(\mu)}, \quad (3.8)$$

wobei  $\kappa_{\parallel}$  den *parallelen räumlichen Diffusionskoeffizienten* bezeichnet. In Shalchi<sup>89</sup> wurde gezeigt, dass diese Relation auch direkt durch Kombination von  $\kappa_{\parallel} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle (\Delta z)^2 \rangle / 2t$  mit der zweidimensionalen Fokker-Planck-Gleichung erhalten werden kann. Diese Definition wird generell in Testteilchen-Simulationen zur Bestimmung des parallelen räumlichen Diffusionskoeffizienten verwendet.

Wir beschränken uns hier auf den Fokker-Planck-Koeffizienten für den Anstellwinkel,  $D_{\mu\mu}$ . Wie in Abschnitt 2.2.1 bereits gezeigt, wird dieser aus den über ein Ensemble gemittelten Korrekturen erster Ordnung der Teilchenbahnen in einem schwach turbulenten Magnetfeld berechnet (s. Hall und Sturrock<sup>29</sup>):

$$D_{\mu\mu}(\mu) = \Re \int_0^{\infty} d\xi \langle \dot{\mu}(t) \dot{\mu}^*(t + \xi) \rangle. \quad (3.9)$$

Wie in Anhang A.1 ausführlich dargestellt ist, ergeben unsere Rechnungen für kleine Steifigkeiten  $R \ll 1$ , wobei die Steifigkeit als das Verhältnis von Impuls pro Ladung eines Teilchens definiert ist<sup>b</sup>:

$$D_{\mu\mu} = \frac{2\pi v}{\ell_0} C(\nu) \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \mu^{s-1} (1 - \mu^2) R^{s-2} \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}(u, s) + \mathcal{B}(u, s) \right], \quad (3.10)$$

<sup>b</sup>Für die Steifigkeit (engl. *rigidity*) gilt allgemein  $R = pc/e$ . SI-Einheit der Steifigkeit ist das Volt.

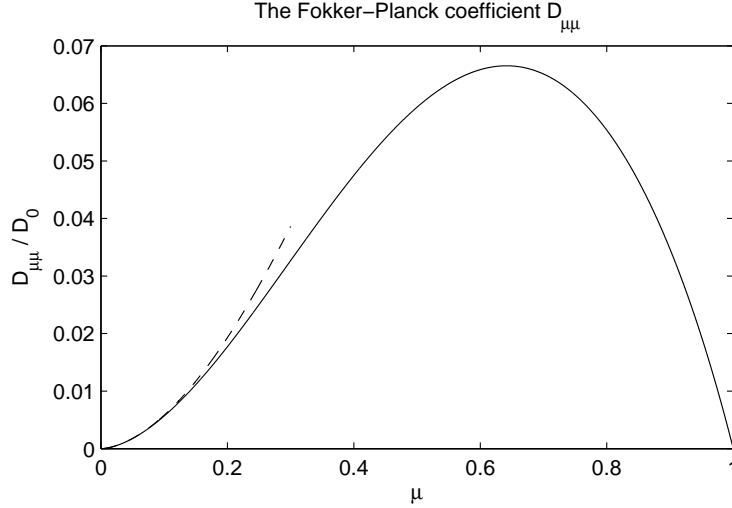


Abbildung 3.1: Der Fokker-Planck-Koeffizient für die Anstellwinkel-Streuung aus Gl. (3.10), normiert auf  $D_0$  aus Gl. (3.12) (durchgezogene Linie), zusammen mit den Näherungen für kleine  $\mu$  aus den Gln. (3.15a) und (3.15b) (gestrichelte Linie). Man beachte, dass  $D_{\mu\mu}$  eine symmetrische Funktion in  $\mu$  ist, es gilt daher  $D_{\mu\mu}(\mu) = D_{\mu\mu}(-\mu)$ .

wobei  $\zeta(z)$  die Riemannsche Zeta-Funktion (s. Anhang C.5) bezeichnet. Weiterhin bezeichnet  $u = \sqrt{1 - \mu^2}$  den Sinus des Anstellwinkels. Die Funktionen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  werden in Anhang A.1 (Gleichungen A.21a und A.24a) hergeleitet, und sind definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, s) = & \frac{|\mu|}{2u} B_{u^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{1}{2} \right) - \frac{|\mu^3|}{2u^3(u^2-1)} \left[ (2u^2 + s(u^2-1) - 3) \right. \\ & \left. \times B_{u^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{1}{2} \right) + (4+s) B_{u^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{3}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{B}(u, s) = \frac{2(s+1) - (s+2)u^s - su^{s+2}}{4s(s+2)} - \frac{u^2}{\mu^2} \frac{su^{s+2} - (s+2)u^s + 2}{8s(s+2)}, \quad (3.11b)$$

wobei  $B_z(a, b)$  die unvollständige Eulersche Beta-Funktion (s. Anhang C.4) bezeichnet.

Der Fokker-Planck-Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  aus Gl. (3.10) ist in Abb. 3.1 dargestellt, normiert auf

$$D_0 = \frac{2\pi\nu}{\ell_0} C(\nu) \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 R^{s-2}. \quad (3.12)$$

Zunächst einmal wäre es naheliegend und sicherlich interessant, diese analytische Form des Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$  mit Simulationsergebnissen vergleichen zu können. Jedoch gibt es, soweit uns bekannt ist, für  $D_{\mu\mu}$  nur Simulationen im Falle von *slab*-Turbulenz.

Für die parallele mittlere freie Weglänge berechnen wir daraus gemäß Gl. (3.8)

$$\lambda_{\parallel} = \frac{3}{8} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{-2} \frac{\ell_0 R^{2-s}}{\pi C(\nu)} \int_0^1 d\mu \frac{u^2}{\mu^{s-1}} \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}(u, s) + \mathcal{B}(u, s) \right]^{-1}. \quad (3.13)$$

Wir sehen hier bereits die aus *slab*-Rechnungen bekannte Steifigkeits-Abhängigkeit  $R^{2-s}$  der mittleren freien Weglänge. Unglücklicherweise ist jedoch das Integral

$$\mathcal{J}(s) = \int_0^1 d\mu \frac{u^2}{\mu^{s-1}} \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}(u, s) + \mathcal{B}(u, s) \right]^{-1} \quad (3.14)$$

aufgrund des Verhaltens des Integranden bei  $\mu = 0$  divergent; dies ist leicht einzusehen, denn für  $\mu \ll 1$  gilt in niedrigster Ordnung

$$\mathcal{A}(u, s) \simeq \frac{3\sqrt{\pi}}{14} \frac{\Gamma([3+s]/2)}{\Gamma([4+s]/2)} \mu \quad (3.15a)$$

$$\mathcal{B}(u, s) \simeq \frac{7}{16} \frac{1+s/2}{2+s} \mu^2. \quad (3.15b)$$

Daher erhalten wir  $D_{\mu\mu} \propto \mu^{-s}$  für  $\mu \ll 1$ , was bei der Integration über  $\mu$  nicht konvergiert, falls – wie vorausgesetzt –  $s \geq 1$  gilt. Die Näherung des Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$ , basierend auf den Gleichungen (3.15a) und (3.15b), ist in Abb. 3.1 ebenfalls dargestellt. Für  $1 < s < 2$  ergibt die mittlere freie Weglänge, die in Einheiten von  $\ell_0$  ausgedrückt werden kann, daher

$$\frac{\lambda_{\parallel}}{\ell_0} = \frac{3}{8} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{-2} \frac{\mathcal{J}(s)}{\pi C(\nu)} R^{2-s} \quad (3.16)$$

und somit unendlich. An dieser Stelle sollte bemerkt werden, dass die Unbeschränktheit der parallelen mittleren freien Weglänge aus zwei Gründen entstanden ist:

1. Die quasilineare Näherung wurde angewendet. In nichtlinearen Theorien ergibt sich im Gegensatz dazu  $D_{\mu\mu}(\mu = 0) \neq 0$  (z. B. Shalchi<sup>87</sup>)
2. Das magnetostatische Modell wurde verwendet. Sogar mit dem einfachsten Modell ungedämpfter Plasmawellen verschwinden die Singularitäten und man erhält einen endlichen Wert für die parallele mittlere freie Weglänge (z. B. Schlickeiser et al.<sup>79</sup>).

In Kapitel 4 werden wir daher den Plasmawellen-Ansatz im Rahmen der QLT betrachten und dies mit entsprechenden Simulationen vergleichen, um der Frage nachzugehen, ob die QLT unter Verwendung solcher realistischerer Turbulenzmodelle ihre Gültigkeit zurückerlangt oder nicht.

Wie in Anhang A.2 im Detail hergeleitet wird, finden wir innerhalb der QLT gleichfalls  $\lambda_{\perp} \rightarrow \infty$ . Dies kann als superdiffusives Verhalten interpretiert werden und befindet sich daher in Übereinstimmung mit quasilinearen Ergebnissen für *composite*-Geometrie (Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup>). Unseres Wissens nach ist jedoch bisher noch nicht ausdrücklich gezeigt worden, dass auch in isotroper Turbulenz die senkrechte mittlere freie Weglänge für alle Spektralindizes unendlich ist – auch unabhängig von der Frage, ob das Turbulenzspektrum für kleine Wellenzahlen  $k$  abgeschnitten ist oder einen endlichen Wert für  $k \rightarrow 0$  hat, wie beispielsweise das aus Gl. (3.2).

Wir schließen daher, dass für alle Turbulenzgeometrien, die nicht *slab*-artig sind, die quasilineare Theorie zu Superdiffusion und damit zu unbeschränkten mittleren freien Weglängen führt.

### 3.2.2 Nichtlineare Führungszentrums-Theorie

Aufgrund der Ungültigkeit der QLT für senkrechten Transport sind in der Vergangenheit bereits mehrere nichtlineare Theorien entworfen worden (z. B. Bieber und Matthaeus<sup>4</sup>), doch bisher haben nur die NLGC-Theorie (Matthaeus et al.<sup>54</sup>) und die schwach-nichtlineare Theorie (WNLT, siehe Shalchi et al.<sup>91</sup>) Übereinstimmung mit numerischen Testteilchen-Simulationen gezeigt. Während für die WNLT zwar einige der Näherungen der NLGC-Formulierung nicht benötigt werden (z. B. die Vernachlässigung der Gyrationbewegung der Teilchen), ist die NLGC-Theorie weitaus leichter handhabbar als die WNLT. Da aufgrund gravierender mathematischer Probleme (gekoppelte dreidimensionale Integralgleichungen) die WNLT auf den Fall isotroper Turbulenz nur sehr schwer anzuwenden ist, werden wir an dieser Stelle nur die NLGC-Herangehensweise betrachten.

Wie in Abschnitt 2.3 bereits beschrieben, gründet sich die nichtlineare Führungszentrums-Theorie auf die *Hypothese*, dass die Führungszentren der Teilchen den Magnetfeldlinien folgen. Mit Hilfe einiger Eigenschaften von Korrelationsfunktionen wurde daraus eine implizite Integralgleichung für die senkrechte mittlere freie Weglänge hergeleitet, die noch von der parallelen mittleren freien Weglänge abhängt.

Für die explizite Auswertung dieser Integralgleichung gehen wir von Gl. (2.38) in Abschnitt 2.3 aus,

$$\frac{\lambda_{\perp}}{v} B_0^2 = \int d^3k \left( \frac{P_{xx}}{v/\lambda_{\parallel} + \gamma(\mathbf{k})} - \frac{P_{zz}}{v/\lambda_{\perp} + \gamma(\mathbf{k})} \right) \quad (3.17)$$

und verwenden die Komponenten  $P_{xx}$  und  $P_{zz}$  des Korrelationstensors, die gegeben sind durch

$$P_{xx} = \frac{G(k)}{8\pi k^2} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi) \quad (3.18a)$$

$$P_{zz} = \frac{G(k)}{8\pi k^2} \sin^2 \theta, \quad (3.18b)$$

wobei wir für den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  Kugelkoordinaten  $(k, \theta, \psi)$  verwendet haben. Mit der Substitution  $\eta = \cos \theta$  erhalten wir für die senkrechte mittlere freie Weglänge

$$\lambda_{\perp} = \frac{v}{8B_0^2} \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{\infty} dk G(k) \left( \frac{1 + \eta^2}{v/\lambda_{\parallel} + \gamma(\mathbf{k})} - \frac{2(1 - \eta^2)}{v/\lambda_{\perp} + \gamma(\mathbf{k})} \right). \quad (3.19)$$

Unter Verwendung des Turbulenzspektrums aus Gl. (3.2) zusammen mit der Normierungskonstante  $G_0$  ergibt dies die Integralgleichung

$$\lambda_{\perp} = \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \frac{\ell_0 v C(\nu)}{2} \int_0^{\infty} dk g(k) \mathcal{I}(k, \lambda_{\parallel}, \lambda_{\perp}), \quad (3.20)$$

wobei wir das elementare Integral

$$\mathcal{I}(k, \lambda_{\parallel}, \lambda_{\perp}) = \int_{-1}^1 d\eta \left( \frac{1 + \eta^2}{a\eta^2 + b} - 2 \frac{1 - \eta^2}{a\eta^2 + c} \right) \quad (3.21a)$$

$$= \frac{2(a-b)}{a^{3/2}\sqrt{b}} \arctan \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{6}{a} - \frac{4(a+c)}{a^{3/2}\sqrt{c}} \arctan \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (3.21b)$$

eingeführt haben sowie

$$a(\lambda_{\parallel}, \lambda_{\perp}) = (\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}) k^2 \quad (3.22a)$$

$$b(\lambda_{\parallel}, \lambda_{\perp}) = \kappa_{\perp} k^2 + \frac{v}{\lambda_{\parallel}} \quad (3.22b)$$

$$c(\lambda_{\perp}) = \kappa_{\perp} k^2 + \frac{v}{\lambda_{\perp}}. \quad (3.22c)$$

Als Nächstes substituieren wir  $x = \ell_0 k$  und erhalten damit schließlich für die senkrechte mittlere freie Weglänge

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\ell_0} = \frac{3}{2} C(\nu) \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \int_0^{\infty} dx (1+x^2)^{-\nu} \mathcal{K} \left( x, \frac{\lambda_{\parallel}}{\ell_0}, \frac{\lambda_{\perp}}{\ell_0} \right), \quad (3.23)$$

wobei wir jetzt

$$\mathcal{K} \left( x, \frac{\lambda_{\parallel}}{\ell_0}, \frac{\lambda_{\perp}}{\ell_0} \right) = \frac{2(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{\mathbf{a}^{3/2}\sqrt{\mathbf{b}}} \arctan \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} + \frac{6}{\mathbf{a}} - \frac{4(\mathbf{a}+\mathbf{c})}{\mathbf{a}^{3/2}\sqrt{\mathbf{c}}} \arctan \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}} \quad (3.24)$$

verwenden, mit den dimensionslosen Parametern

$$\mathbf{a}(\lambda_{\parallel}, \lambda_{\perp}) = \frac{\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}}{\ell_0} x^2 \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{b}(\lambda_{\parallel}, \lambda_{\perp}) = 3 \frac{\ell_0}{\lambda_{\parallel}} + \frac{\lambda_{\perp}}{\ell_0} x^2 \quad (3.25b)$$

$$\mathbf{c}(\lambda_{\perp}) = 3 \frac{\ell_0}{\lambda_{\perp}} + \frac{\lambda_{\perp}}{\ell_0} x^2, \quad (3.25c)$$

unter Verwendung von  $\lambda_{\parallel,\perp} = 3\kappa_{\parallel,\perp}/v$ .

Zur Veranschaulichung betrachten wir den Grenzfall niedriger Energien entsprechend  $R \rightarrow 0$ , was  $\gamma(\mathbf{k}) \rightarrow 0$  und  $v/\lambda_i \propto R^{2/3} \gg \gamma(\mathbf{k})$  bedeutet; damit erhalten wir aus Gl. (3.17):

$$\frac{\lambda_{\perp}}{v} B_0^2 \simeq \frac{\lambda_{\parallel}}{v} \int d^3k P_{xx} - \frac{\lambda_{\perp}}{v} \int d^3k P_{zz}. \quad (3.26)$$

Setzen wir hier die Komponenten des Korrelationstensors aus Gl. (3.18) ein, so ergibt dies

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp} B_0^2 &\simeq \frac{\lambda_{\parallel}}{8\pi} \int_0^{\infty} dk G(k) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi) \\ &\quad - \frac{\lambda_{\perp}}{4} \int_0^{\infty} dk G(k) \int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \end{aligned} \quad (3.27a)$$

$$= \frac{(\delta B)^2}{3} (\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}), \quad (3.27b)$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\int_0^{\infty} dk G(k) = G_0 \int_0^{\infty} dk g(k) = (\delta B)^2 \quad (3.28)$$

gilt. Daher kann die senkrechte freie Weglänge näherungsweise durch

$$\lambda_{\perp} \simeq \frac{\lambda_{\parallel}}{3(B_0/\delta B)^2 + 1} \quad (3.29)$$

ausgedrückt werden.

In Abschnitt 3.4 werden wir Ergebnisse für die senkrechte mittlere freie Weglänge zeigen, die aus der impliziten Integralgleichung (3.20) numerisch berechnet wurden. Weiterhin werden wir sie mit Testteilchen-Simulationen von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> vergleichen und dabei generelle Übereinstimmung feststellen.

### 3.3 Slab- und composite-Geometrie

In diesem Abschnitt werden wir einige den Arbeiten von Shalchi et al.<sup>90</sup> und Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup> entstammende analytische Ergebnisse für die mittleren freien Weglängen in *slab*- und *composite*-Turbulenz darstellen sowie die Grundzüge der schwach-nichtlinearen Theorie (WNLT) von Shalchi et al.<sup>91</sup> umreißen, die als Vereinigung der NLGC-Theorie und der quasilinearen Theorie verstanden werden kann (vgl. Shalchi et al.<sup>92</sup>). In Abschnitt 3.4 werden wir dann die Ergebnisse dieses Abschnittes mit Testteilchen-Simulationen von Qin<sup>69</sup> und Qin et al.<sup>70,71</sup> vergleichen.

Im *composite*-Modell ist der – wie in der Einleitung erwähnt im Falle magnetostatischer Turbulenz stets zeitunabhängige – Korrelationstensor für die Komponenten des Magnetfeldes durch

$$P_{lm}(\mathbf{k}) = P_{lm}^{\text{slab}}(\mathbf{k}) + P_{lm}^{2D}(\mathbf{k}) \quad (3.30a)$$

gegeben, wobei sich dieser einfach als Überlagerung des *slab*-Beitrags

$$P_{lm}^{\text{slab}}(\mathbf{k}) = g^{\text{slab}}(k_{\parallel}) \frac{\delta(k_{\perp})}{k_{\perp}} \left( \delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} \right) \quad (3.30b)$$

und des 2D-Beitrags

$$P_{lm}^{2D}(\mathbf{k}) = g^{2D}(k_{\perp}) \frac{\delta(k_{\parallel})}{k_{\perp}} \left( \delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} \right) \quad (3.30c)$$

darstellen lässt.

Für die Turbulenzspektren  $g^{\text{slab}}$  und  $g^{2D}$  wird angenommen, dass sie die gleiche Form haben wie in den Simulationen von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup>.

### 3.3.1 Analytische Ergebnisse

Für *composite*-Geometrie finden wir unter Verwendung des magnetostatischen Modells und mit Hilfe der QLT

$$D_{\mu\mu}^{\text{comp.}} = D_{\mu\mu}^{\text{slab}} + D_{\mu\mu}^{2\text{D}} = D_{\mu\mu}^{\text{slab}}, \quad (3.31)$$

da nach der statischen quasilinearen Theorie exakt  $D_{\mu\mu}^{2\text{D}} = 0$  gilt. Das *slab*-Ergebnis kann analytisch exakt berechnet werden (siehe z. B. Shalchi et al.<sup>90</sup>), und es ergibt sich für den Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$

$$D_{\mu\mu}^{\text{slab}} = \frac{\pi C(\nu)\Omega^2 (1 - \mu^2) \ell_{\text{slab}} \delta B_{\text{slab}}^2}{v\mu B_0^2} [1 + (\mu R)^{-2}]^{-\nu} \quad (3.32)$$

und damit für die parallele mittlere freie Weglänge

$$\lambda_{\parallel} = \frac{3\ell_{\text{slab}}}{8\pi C(\nu)} \left( \frac{B_0}{\delta B_{\text{slab}}} \right)^2 R^{2-2\nu} \left[ \frac{1}{1-\nu} {}_2F_1(1-\nu, -\nu; 2-\nu; -R^2) - \frac{1}{2-\nu} {}_2F_1(2-\nu, -\nu; 3-\nu; -R^2) \right]. \quad (3.33)$$

Weil es keinen 2D-Beitrag zur parallelen Streuung gibt ( $D_{\mu\mu}^{2\text{D}} = 0$ ), skaliert die parallele mittlere freie Weglänge wie

$$\lambda_{\parallel} \propto \left( \frac{B_0}{\delta B_{\text{slab}}} \right)^2. \quad (3.34)$$

Daher kann der parallele Diffusionskoeffizient durch Verkleinerung des *slab*-Anteils vergrößert werden. Da die gesamte Turbulenzstärke  $\delta B/B_0$  aus Beobachtungen bekannt ist, kann die Wahl eines kleineren *slab*-Anteils die heliosphärische parallele mittlere freie Weglänge vergrößern – dies wurde von Bieber et al.<sup>5</sup> verwendet, um die aus Beobachtungen resultierenden zu erklären.

Die quasilineare Berechnung des senkrechten Transport im *composite*-Modell resultiert in Superdiffusion (siehe Gl. 34 mit Gl. 19 in Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup>):

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t^2, \quad (3.35)$$

woraus  $\lambda_{\perp} = \infty$  folgt. Da dieses zeitliche Verhalten im Widerspruch zu den Simulationen steht (hier sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen), scheinen nichtlineare Theorien besser geeignet, um den senkrechten Transport zu beschreiben. Neben der NLGC-Theorie wurde noch eine andere vielversprechende Herangehensweise vorgeschlagen: Die schwach nichtlineare Theorie (Shalchi et al.<sup>91</sup>) beschreibt den parallelen und senkrechten Transport als ein gekoppeltes Problem; beide Diffusionskoeffizienten können darüber hinaus – anders als in der NLGC-Theorie – unabhängig voneinander berechnet werden. Formal geht die WNLT durch die Substitution der Resonanzfunktion gemäß

$$\begin{aligned} \text{QLT} &\longrightarrow \text{WNLT} \\ \pi\delta(k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega) &\longrightarrow \frac{D_{\perp}k_{\perp}^2 + \omega}{(D_{\perp}k_{\perp}^2 + \omega)^2 + (k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega)^2} \end{aligned}$$

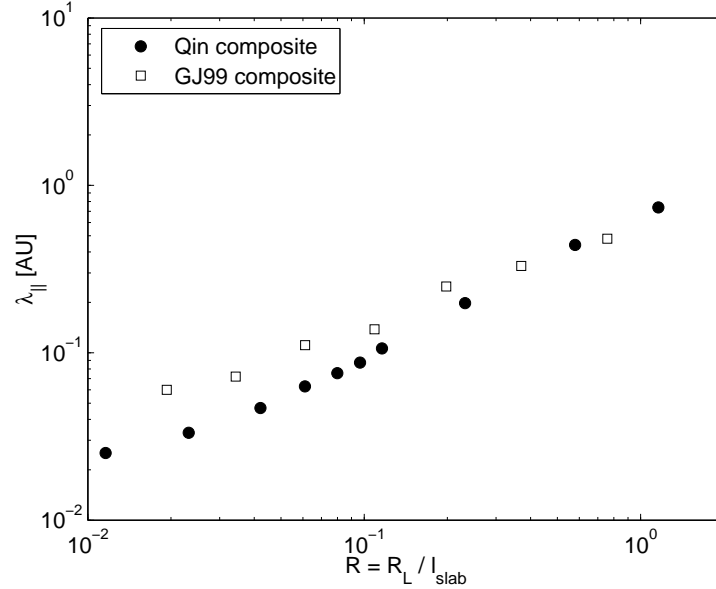


Abbildung 3.2: Vergleich der Simulationen von Qin<sup>69</sup> und Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> für die parallele mittlere freie Weglänge  $\lambda_{\parallel}$  [AU] als Funktion des Larmorradius' der Teilchen,  $R_L$ , in Einheiten der *slab*-Abknicklänge  $l_{\text{slab}}$ . In beiden Simulationen wurde magnetostatische *composite*-Turbulenz verwendet.

aus der QLT hervor, mit

$$\omega = \begin{cases} 0, & \text{Anstellwinkel-Diffusion} \\ \frac{2D_{\mu\mu}}{1 - \mu^2}, & \text{senkrechte Diffusion.} \end{cases} \quad (3.36)$$

Das sich daraus ergebende gekoppelte Gleichungssystem der beiden Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$  und  $D_{\perp}$  kann jedoch nur noch numerisch gelöst werden. Einige Ergebnisse und mathematische Details finden sich in Shalchi et al.<sup>91</sup>.

### 3.4 Testteilchen-Simulationen

In Abb. 3.2 haben wir zunächst die Simulationen für parallelen Transport von Qin<sup>69</sup> mit denen von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> verglichen. In beiden Simulationen wird eine zusammengesetzte *slab*/2D-Geometrie mit 20% *slab*- und 80% 2D-Anteil angenommen. Wie die Datenpunkte zeigen, ist die Steigung in den Simulationsdaten von Qin etwas größer. Die Absolutwerte dagegen stimmen für  $R \simeq 1$  sehr gut überein. Die kleinen Abweichungen zwischen beiden Simulationen entstehen durch die Verwendung verschiedener Wellenspektren und unterschiedlicher Turbulenzparameter – darauf werden wir später noch einmal genauer eingehen.

Wir sind uns bewusst, dass wir im Begriff sind, analytische Resultate mit Simulationen zu vergleichen, die untereinander bereits nicht genau übereinstimmen. Daher können



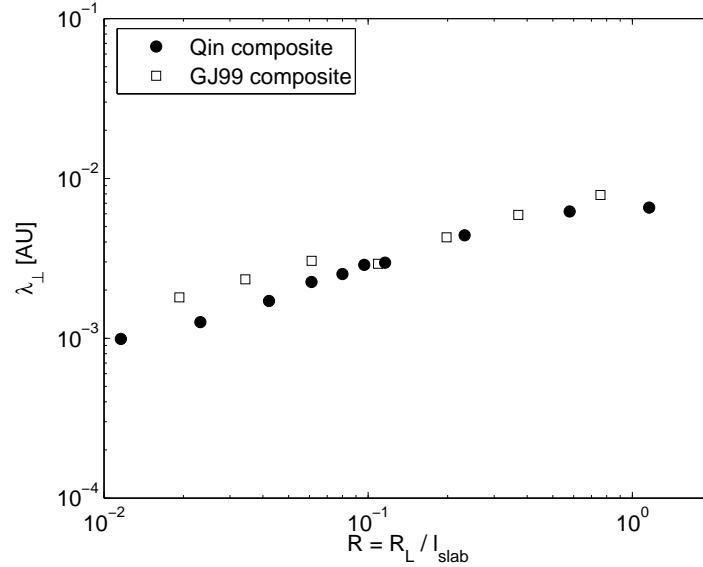


Abbildung 3.3: Vergleich der Simulationen von Qin<sup>69</sup> und Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> für die senkrechte mittlere freie Weglänge  $\lambda_{\perp}$  [AU] als Funktion des Larmorradius' der Teilchen,  $R_L$ , in Einheiten der *slab*-Abknicklänge  $l_{\text{slab}}$ . In beiden Simulationen wurde magnetostatische *composite*-Turbulenz verwendet.

diese Diskrepanzen innerhalb der Simulationen nur als Fehlergrenzen für die Vergleiche verstanden werden. Als Arbeitshypothese nehmen wir daher an, dass innerhalb dieser Unsicherheit die Simulationen korrekt sind und als Bezugsmarke für die analytischen Ergebnisse dienen können.

### 3.4.1 Die Simulationen von Giacalone und Jokipii

In den Simulationen von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> (auf die wir uns als GJ99 beziehen werden) werden zwei hauptsächliche Szenarien betrachtet: das isotrope und das zusammengesetzte (*composite*) Modell. Die Trajektorien der Teilchen werden durch die numerische Integration der Lorentzkraft jedes einzelnen Teilchens erhalten, basierend auf der Burlish-Stoer-Methode (Press et al.<sup>67</sup>). In allen Simulationen werden 2500 Teilchen sowie 50 unterschiedliche, zufällig generierte Realisierungen der turbulenten Felder betrachtet. Es ist jedoch nicht unsere Absicht, die Details der Simulationen zu bewerten, so beispielsweise die Frage, ob die Anzahl von 2500 Teilchen ausreichend ist – da wir lediglich, vom Standpunkt der analytischen Untersuchung aus, die Resultate der Simulationen für den Vergleich heranziehen. Die sich in den Simulationen ergebenden Teilchenbahnen sind am Beispiel von Protonen mit Energien zwischen 1 und 100 MeV für eine Turbulenzstärke  $\delta B = B_0$  in Abb. 2.1 auf S. 18 dargestellt.

In den Simulationen werden die (statischen) turbulenten Magnetfelder aus der Summation über eine große Anzahl ebener Wellen mit sphärisch-symmetrischer Propagationsrichtung berechnet, was also eine zeitunabhängige Fourier-Darstellung im Wellenzahlraum beschreibt. Allgemein ist die Turbulenz, die aus der Überlagerung einer unendlichen

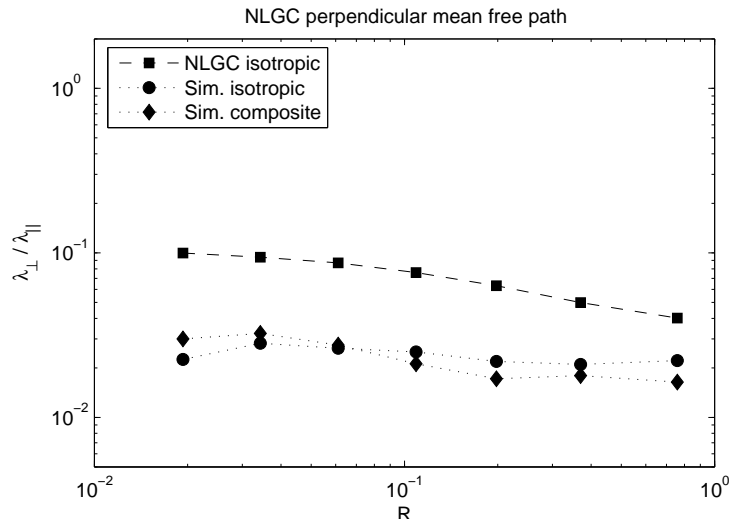


Abbildung 3.4: Das Verhältnis  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel}$  als Funktion des normierten Larmorradius  $R = R_L/l_0$  für  $\delta B = B_0$ , unter der Annahme isotroper magnetostatischer Turbulenz. Wir vergleichen analytische Ergebnisse für die senkrechte mittlere freie Weglänge, berechnet mit der NLGC-Theorie, mit den Simulationen von GJ99. Die parallele mittlere freie Weglänge aus den Simulationen wird als Eingangsparameter für die NLGC-Rechnung verwendet.

Anzahl von Wellenmoden resultiert, isotrop. Im isotropen Szenario der Simulationen haben alle Wellen zufällig verteilte Phasen und Polarisierungen, während in der *composite*-Turbulenz 20% *slab*- und 80% strikt zweidimensionale Fluktuationen angenommen werden. Das Energiespektrum der magnetischen Fluktuationen ist weiterhin begrenzt auf Wellenlängen zwischen  $\lambda_{\min} = 10^{-4}$  AU und  $\lambda_{\max} = 1$  AU. Die Parameter  $\lambda_{\min}$  und  $\lambda_{\max}$  sind für die Simulationen sowohl in isotroper als auch in *composite*-Geometrie gleich. Diese und die anderen Parameter sind für Bedingungen gewählt, wie sie typischerweise in einem Abstand von 1 AU von der Sonne auftreten. Daher wird für das Hintergrundmagnetfeld eine mittlere Stärke von 5 nT angenommen. In den nächsten Abschnitten werden wir die Simulationsergebnisse mit den Theorien vergleichen, welche diese reproduzieren sollen.

### 3.4.2 Vergleich mit analytischen Ergebnissen

Hier vergleichen wir die in den letzten Abschnitten erhaltenen Ergebnisse aus den linearen und nichtlinearen Theorien mit den Simulationen von GJ99, die wir zu Beginn dieses Abschnittes diskutiert haben.

Wie wir in Abschnitt 3.2.1 gezeigt haben, liefert die quasilineare Theorie in isotroper Turbulenz für die parallele mittlere freie Weglänge unendlich. Im Gegensatz dazu ergeben die Simulationen aber  $\lambda_{\parallel} < \infty$  für das isotrope Modell (siehe Abb. 3.2): Offensichtlich ist die QLT für den parallelen Transport in isotroper, magnetostatischer Turbulenz ungültig. Es sollte jedoch beachtet werden, dass GJ99 in ihrem Artikel schlussfolgern, dass die Übereinstimmung zwischen ihren Simulationen und der QLT auch im Falle *isotroper* Fluktuationen ziemlich gut sei. Diese Schlussfolgerung basiert jedoch auf einem unzu-

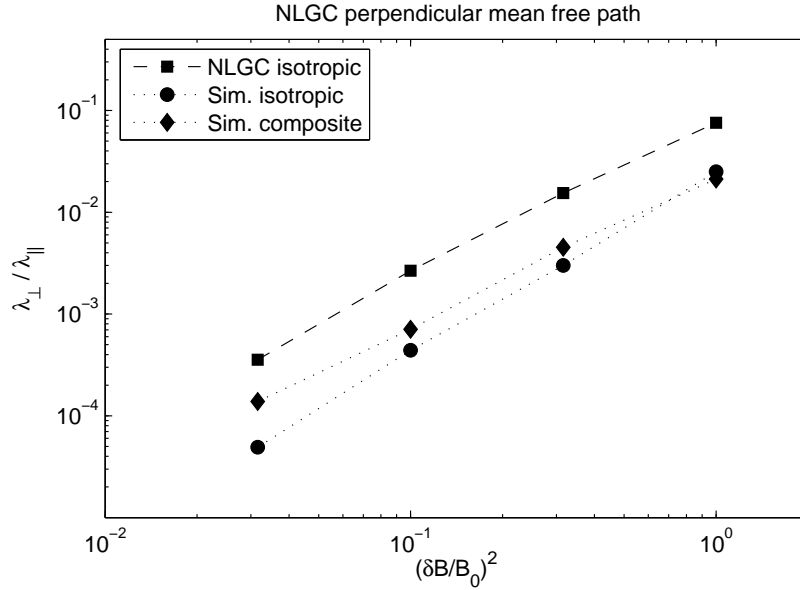


Abbildung 3.5: Das Verhältnis  $\lambda_\perp/\lambda_\parallel$  als Funktion des Verhältnisses von turbulentem zu Hintergrundmagnetfeld für Teilchen mit Steifigkeit  $R = 0,109$ , wie in den Simulationen von GJ99 verwendet. Verglichen sind Ergebnisse der NLGC-Theorie mit den Simulationen.

lässigen Vergleich, da die isotropen Simulationen mit den Ergebnissen der QLT in *slab*-Turbulenz verglichen werden.

Für senkrechten Transport erhalten GJ99 im Falle isotroper Turbulenz ebenfalls endliche mittlere freie Weglängen. Das Ergebnis der QLT ist im Gegensatz dazu  $\lambda_\perp = \infty$  (siehe Abschnitt 3.2.1). Daher – unter der Annahme, dass die Simulationen korrekt sind – ist die QLT auch nicht geeignet, um senkrechten Transport in statischer und isotroper Turbulenz zu beschreiben.

Als nächstes stellen wir nun die Ergebnisse der NLGC-Theorie vor. Lösen wir die implizite Integralgleichung (3.20) für die senkrechte mittlere freie Weglänge, so haben wir zunächst noch die parallele mittlere freie Weglänge zu spezifizieren – hierfür nehmen wir die Ergebnisse der Simulationen von GJ99 und erhalten damit einige diskrete Werte für  $\lambda_\perp$ . Das daraus resultierende Verhältnis aus senkrechter und paralleler mittlerer freier Weglänge als Funktion des Verhältnisses von turbulentem Feld und Hintergrundmagnetfeld,  $\delta B/B_0$ , ist in Abb. 3.5 dargestellt, im Vergleich mit den Simulationsdaten von GJ99. Unsere Ergebnisse sind durchgehend um einen mittleren Faktor 5,4 zu hoch. Weiterhin zeigen wir in Abb. 3.4 das Verhältnis  $\lambda_\perp/\lambda_\parallel$  als Funktion der dimensionslosen Steifigkeit  $R = R_\perp/\ell_0$  für  $\delta B = B_0$ . Um dies zu tun, nehmen wir wieder die Werte für die parallele mittlere freie Weglänge von GJ99 und werten damit Gleichung (3.20) aus. Im Vergleich mit den Simulationsdaten sind unsere Ergebnisse ebenfalls um einen mittleren Faktor 3 zu hoch.

Eine Schwierigkeit trat bei dem Versuch auf, die senkrechte mittlere freie Weglänge für hohe Werte des turbulenten Magnetfeldes mit der NLGC-Theorie zu berechnen: Für wachsendes  $(\delta B/B_0)^2$  wird die parallele mittlere freie Weglänge kleiner, bis schließlich

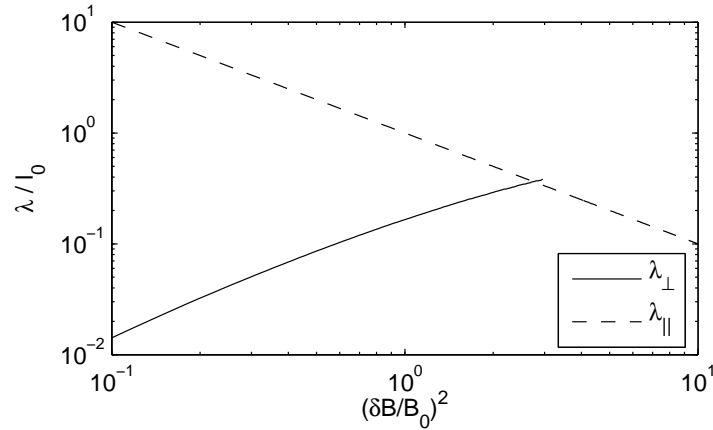


Abbildung 3.6: Das Verhältnis  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel}$ , wobei  $\lambda_{\parallel} \propto (\delta B/B_0)^{-2}$  angenommen wird, wie dies *slab*-Ergebnisse und die Simulationen andeuten. Dies erklärt die Ungültigkeit der NLGC-Theorie, sobald  $\lambda_{\parallel} \lesssim \lambda_{\perp}$  gilt.

$\lambda_{\parallel} \lesssim \lambda_{\perp}$  gilt (siehe Abb. 3.6). Ab diesem Punkt gibt es keine Lösung mehr für  $\lambda_{\perp}$ , da in die implizite Integralgleichung der dann imaginäre Faktor  $(\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp})^{1/2}$  eingeht. Die NLGC-Theorie wird in diesem Bereich also ebenfalls ungültig und kann die senkrechte mittlere freie Weglänge nicht mehr beschreiben. Man beachte jedoch, dass die NLGC-Theorie unter der Prämisse entwickelt wurde, dass die Führungszentren der Teilchen den Magnetfeldlinien folgen – eine Annahme, die für starke Turbulenz wahrscheinlich nicht mehr erfüllt ist (siehe hierzu auch Abb. 2.1 auf S. 18).

#### 3.4.3 Die Simulationen von Qin

Vor einiger Zeit wurden Testteilchen-Simulationen von Qin<sup>69</sup> (s. auch Qin et al.<sup>70,71</sup>) vorgestellt. In diesen Simulationen werden die Diffusionskoeffizienten durch Integration der Newton-Lorentz-Gleichung

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.37)$$

berechnet (man beachte, dass im magnetostatischen Modell  $\gamma = \text{const}$  gilt). Um die Trajektorien der 1000 Testteilchen zu berechnen, wird eine Anzahl von ca. 4 Millionen *slab*-Wellenmoden gewählt; das Auftreten periodischer Effekte wurde dadurch unterdrückt, dass die Box etwa zehntausend Mal größer als die Korrelationslänge der *slab*-Turbulenz gewählt wurde. Der 2D-Beitrag ist achsensymmetrisch in der Ebene senkrecht zur  $z$ -Achse verteilt; für die 2D-Korrelationslänge wird darüber hinaus angenommen, dass sie 10% der *slab*-Korrelationslänge beträgt. Für die Wellen in  $x$ - und  $y$ -Richtung werden  $4096 \times 4096$  Wellenmoden verwendet. Weiterhin wird im *composite*-Modell ein Verhältnis von 20:80 für die Beiträge aus *slab*- und 2D-Fluktuationen betrachtet; für die Amplitude des fluktuierenden Magnetfeldes gilt  $\delta B = B_0$ . Genau wie in den Simulationen von GJ99 wird auch hier ein magnetostatisches Modell verwendet, in welchem die elektrischen Felder

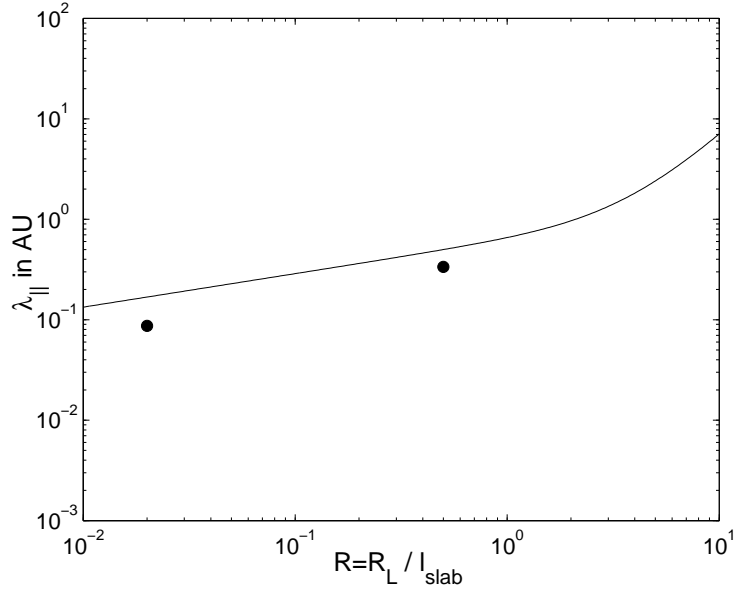


Abbildung 3.7: Die simulierte parallele mittlere freie Weglänge (Punkte) im Vergleich mit den Ergebnissen der quasilinearen Theorie (durchgezogene Linie) für magnetostatische *slab*-Turbulenz.

vernachlässigt werden. Die Untersuchung des Teilchentransportes wurde von Qin sowohl in reiner *slab*-Turbulenz wie auch im *slab/2D-composite*-Modell durchgeführt.

Zwei wichtige Unterschiede zwischen den Simulationen von Qin und denen von GJ99 sollten erwähnt werden. Auf der einen Seite verwenden GJ99 eine maximale Wellenlänge von  $\lambda_{\text{max}} = 1 \text{ AU}$ , während Qin  $\lambda_{\text{max}} = 10^4 \cdot \ell_{\text{slab}} = 300 \text{ AU}$  verwendet. Dies entspricht größeren (bzw. kleineren) Werten für die Abschneide-Wellenzahl  $k_{\text{min}}$  in GJ99 (bzw. Qin). Diese Differenz bei kleinen Wellenzahlen hat jedoch gravierende Auswirkungen, insbesondere für den senkrechten Transport. Zweitens werden in den Simulationen von Qin verschiedene Korrelationslängen für den *slab*- und den 2D-Beitrag verwendet, nämlich  $\ell_{2D} = 0,1 \cdot \ell_{\text{slab}}$ , während in GJ99  $\ell_{2D} = \ell_{\text{slab}}$  verwendet wird. Mit Hilfe des Formalismus' der WNLT kann gezeigt werden, dass die parallele mittlere freie Weglänge sehr empfindlich vom Verhältnis zwischen *slab*- und 2D-Abknicklänge abhängt. Beispielsweise gilt für Teilchen mit der dimensionslosen Steifigkeit  $R = 0,01$

$$\frac{\lambda_{||}(\ell_{2D} = \ell_{\text{slab}})}{\lambda_{||}(\ell_{2D} = 0,1 \cdot \ell_{\text{slab}})} \approx 2, \quad (3.38)$$

wie man aus Abbildung 10 in Shalchi et al.<sup>91</sup> ersehen kann. Offenbar erklärt dieses Verhalten die Diskrepanzen zwischen den Simulationen von GJ99 und Qin in den Abbildungen 3.2 und 3.3.

### 3.4.4 Vergleich mit analytischen Ergebnissen

In diesem Abschnitt vergleichen wir die Ergebnisse aus QLT, NLGC-Theorie und WNLT mit den Testteilchen-Simulationen von Qin und betrachten sowohl parallele wie auch

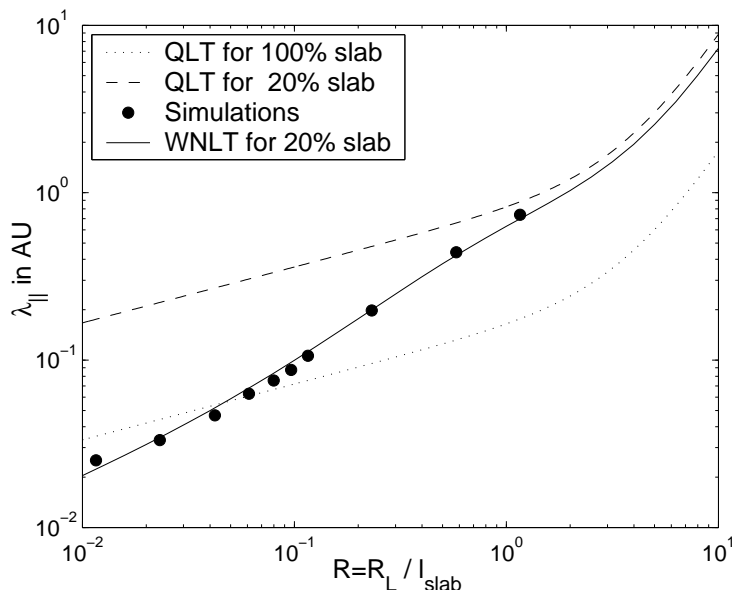


Abbildung 3.8: Die simulierte parallele mittlere freie Weglänge von  $Q_{in}$  (Punkte) in *composite*-Geometrie mit 20% slab- und 80% 2D-Anteil, im Vergleich mit quasilinearen Ergebnissen für reine *slab*- (punktierte Linie), quasilinearen Ergebnissen für *composite*- (gestrichelte Linie) und WNLT-Ergebnissen für *composite*-Geometrie (durchgezogene Linie). Die letztere Geometrie liegt auch in den Simulationen zugrunde.

senkrechte räumliche Diffusion für *slab*- und *composite*-Geometrie. Der vorangegangene Abschnitt diente dabei als kurze Einführung in die Thematik der Simulationen, die von uns zum Vergleich mit den analytischen Rechnungen herangezogen werden.

Das *slab*-Ergebnis der QLT für  $\delta B/B_0 = 0,5$  ist in Abb. 3.7 gezeigt. Wie zu sehen ist, stimmt die QLT sehr gut mit den Simulationen überein; die kleinen Abweichungen treten auf, weil die QLT darin versagt, Anstellwinkel-Diffusion nahe bei  $90^\circ$  zu beschreiben (siehe z. B. Shalchi<sup>87</sup>). Aufgrund dieses Verhaltens wird die quasilineare Theorie für steile Wellenspektren mit einem Spektralindex größer als 2 ebenfalls ungültig. Für kolmogorov-artige Spektren (d. h. mit einem Spektralindex von  $5/3$ ) ist die QLT jedoch für parallelen Transport in *slab*-Turbulenz die richtige Theorie. Gehen wir dagegen von der *slab*- zur *composite*-Geometrie über, so finden wir eine zu große quasilineare parallele mittlere freie Weglänge (siehe Abb. 3.8). Sogar in Fällen, wo die  $90^\circ$ -Streuung weniger wichtig ist, kann die QLT die Simulationen nicht reproduzieren. Dieses dritte Problem (neben dem  $90^\circ$ -Problem und dem Problem des senkrechten Transportes) wurde bereits in Shalchi et al.<sup>91</sup> beschrieben und kann als das sog. *Geometrie-Problem* bezeichnet werden. Gegenwärtig ist einzig die kürzlich aufgestellte WNLT in der Lage, dieses Problem zu lösen.

Abbildung 3.9 zeigt die senkrechte mittlere freie Weglänge als Funktion der Zeit. Offensichtlich finden wir in den Simulationen Subdiffusion, da  $\lambda_\perp(t) \propto 1/\sqrt{t}$ . Weiterhin ist das QLT-Ergebnis gezeigt, auch bezeichnet als der Grenzfall der Feldlinien-Zufallsbewegung (*field line random walk limit*). Dieses Ergebnis lautet (siehe Shalchi<sup>88</sup>)

$$\lambda_\perp = \frac{3\pi}{2} C(\nu) \ell_{\text{slab}} \left( \frac{\delta B_{\text{slab}}}{B_0} \right)^2 \equiv \lambda_{\perp, \text{FLRW}}. \quad (3.39)$$

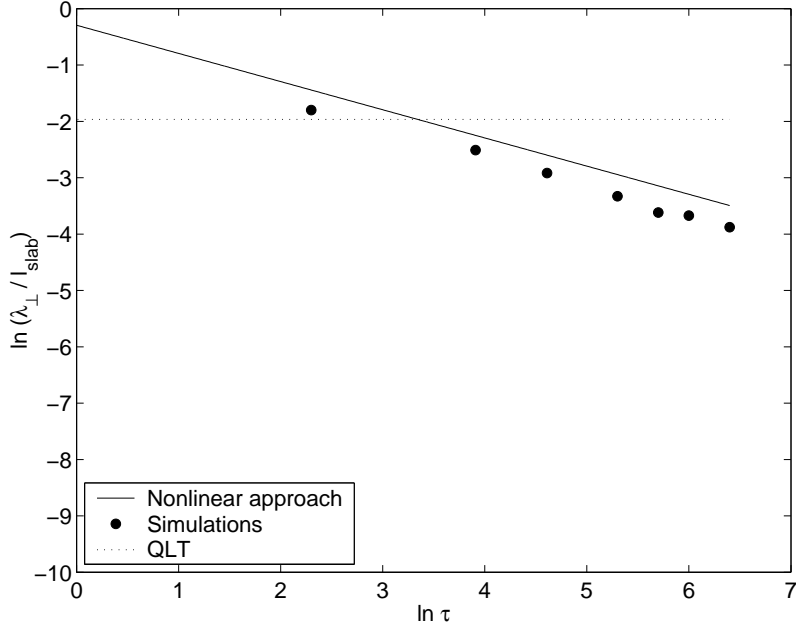


Abbildung 3.9: Die zeitabhängige senkrechte mittlere freie Weglänge in Einheiten der *slab*-Abknicklänge  $\ell_{\text{slab}}$  aus den Simulationen (Punkte), der QLT (punktierter Linie) und den nichtlinearen Berechnungen von Shalchi<sup>88</sup> (durchgezogene Linie), wobei  $\tau = vt/\ell_{\text{slab}}$ .

Wird die Quasilinearität dagegen fallen gelassen, so findet man (vgl. Shalchi<sup>88</sup>)

$$\lambda_{\perp}(\tau) \approx \frac{\lambda_{\perp,\text{sub}}}{\sqrt{\tau}} \quad (3.40)$$

mit dem Subdiffusions-Koeffizienten

$$\lambda_{\perp,\text{sub}} \equiv 4 \lambda_{\perp,\text{FLRW}} \sqrt{\frac{\lambda_{\parallel}}{3\pi\ell_{\text{slab}}}}, \quad (3.41)$$

wobei die *slab*-Abknicklänge  $\ell_{\text{slab}}$  und die dimensionslose Zeit  $\tau = vt/\ell_{\text{slab}}$  verwendet wurde. Dieses nichtlineare Resultat stimmt mit dem aus dem zusammengesetzten Diffusionsmodell von Kóta und Jokipii<sup>39</sup> berechneten Ergebnis überein. Die quasilineare Theorie kann Simulationen für senkrechten Transport also nicht reproduzieren. Es ist noch wichtig festzuhalten, dass das Phänomen der Subdiffusion vor allem, wenn nicht sogar ausschließlich, in *slab*-Turbulenz auftritt (s. Jokipii et al.<sup>35</sup>, Kóta und Jokipii<sup>39</sup>). In isotroper magnetostatischer Turbulenz gibt es nur für kleine Steifigkeiten der Teilchen Hinweise auf Subdiffusion (Casse et al.<sup>11</sup>, Candia und Roulet<sup>12</sup>); ansonsten ist ebenso für *composite*-Geometrie die Diffusion wiederhergestellt (s. Qin et al.<sup>71</sup>). In Abb. 3.10 sind die Simulationen von Qin mit den Ergebnissen der NLGC-Theorie und der WNLT für die senkrechte mittlere freie Weglänge verglichen; beide nichtlineare Theorien stimmen mit den Simulationen sehr gut überein. Innerhalb der QLT finden wir dagegen  $\lambda_{\perp} \propto t \rightarrow \infty$  (Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup>), im Widerspruch zu den Simulationen.

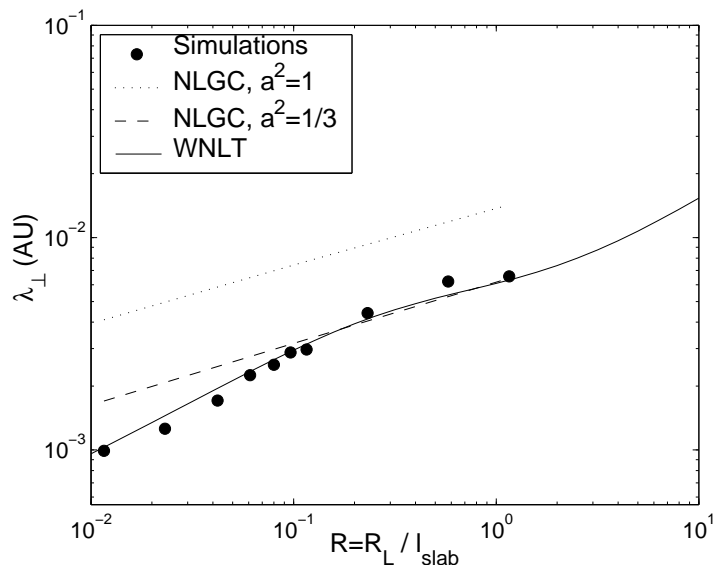


Abbildung 3.10: Die simulierte senkrechte mittlere freie Weglänge (Punkte) als Funktion des normierten Larmorradius  $R$  im Vergleich mit NLGC-Ergebnissen (gestrichelte und Strichpunkt-Linie) und WNLT-Ergebnissen (durchgezogene Linie). Der Parameter  $a$  ist eine im Nachhinein zu bestimmende Proportionalitätskonstante (vgl. Matthaeus et al.<sup>54</sup>) in der Gleichung, die beschreibt, dass die Führungszentren der Teilchen den Feldlinien folgen.

### 3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde erstmals ein strenger Vergleich zwischen existierenden Testteilchen-Simulationen und theoretischen Ergebnissen in magnetostatischer Turbulenz durchgeführt. Verglichen wurden analytische Rechnungen in quasilinearer Theorie (Abschnitt 3.2.1) und der NLGC-Theorie (Abschnitt 3.2.2) – beide für isotrope Turbulenz – sowie quasilineare Rechnungen in *slab*- und *composite*-Geometrie (Shalchi et al.<sup>90</sup>, Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup> entnommen, siehe Abschnitt 3.3) und der WNLT (vgl. Shalchi et al.<sup>91</sup>) mit den Testteilchen-Simulationen von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> und Qin<sup>69</sup> für verschiedene (statische) Turbulenzmodelle. Dabei ergaben sich die folgenden Ergebnisse:

- *Paralleler Transport im magnetostatischen slab-Modell*: Hier stimmt die QLT sehr gut mit den Testteilchen-Simulationen überein, da die  $90^\circ$ -Streuung weniger wichtig ist. Wir wissen jedoch, dass für steilere Wellenspektren (mit einem Spektralindex im Inertialbereich größer als 2) die QLT auch für diesen Fall ungültig wird.
- *Paralleler Transport im magnetostatischen composite-Modell*: Hier stimmt die QLT mit den Simulationen nicht überein. Obwohl die  $90^\circ$ -Streuung auch hier vernachlässigbar ist, ist die quasilineare parallele mittlere freie Weglänge viel zu groß. Die Begründung hierfür liefert die WNLT: Die statistische senkrechte Bewegung, beschrieben durch die mittleren quadratischen Abweichungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung, verursacht eine Resonanzverbreiterung, welche den gesamten Fokker-Planck-Koeffizienten stark verkleinert, da der 2D-Anteil des Fokker-Planck-Koeffizienten für den Anstellwinkel den gesamten Koeffizienten dominiert.



- *Senkrechter Transport im magnetostatischen slab-Modell:* Aus der QLT ergibt sich hier diffusives Verhalten, während demgegenüber die Simulationen Subdiffusion zeigen. Mit einer kürzlich erfolgten direkten Untersuchung der Bewegungsgleichung kann der senkrechte Diffusionskoeffizient direkt zur parallelen Bewegung der Teilchen in Beziehung gesetzt werden. Wird die Teilchenbewegung als diffusiv angenommen (also  $\lambda_{\parallel}(t) = \text{const}$ ), findet man für den senkrechten Transport sofort subdiffusives Verhalten.
- *Senkrechter Transport im magnetostatischen composite-Modell:* In diesem Modell wird das diffusive Verhalten wiederhergestellt, und eine Diffusionstheorie – wie die NLGC-Theorie oder die WNLT – kann angewendet werden. Obwohl beide Herangehensweisen auf sehr verschiedenen Annahmen und Näherungen beruhen, können sie die Simulationen reproduzieren. Weitere Simulationen können Hinweise darauf geben ob diese Übereinstimmung auch für größere Parameterbereiche gefunden werden kann. Die quasilineare Theorie kann in keinem Fall zur Beschreibung senkrechten Transportes verwendet werden.
- *Paralleler Transport in isotroper magnetostatischer Turbulenz:* Aufgrund des  $90^\circ$ -Problems liefert die QLT eine unendlich große parallele mittlere freie Weglänge, im Widerspruch zu den Simulationen. Um den parallelen Transport in isotroper Turbulenz beschrieben zu können, muss eine (nichtlineare) Theorie angewendet werden, die in der Lage ist, das  $90^\circ$ -Problem zu lösen – wie dies die kürzlich aufgestellte quasilineare Theorie zweiter Ordnung (*Second-Order QLT*) von Shalchi<sup>87</sup> vermag. Bis jetzt ist die SOQLT jedoch nur auf den Fall der *slab*-Turbulenz angewendet worden.
- *Senkrechter Transport in isotroper magnetostatischer Turbulenz:* Auch hier liefert die QLT eine unendliche mittlere freie Weglänge, was als superdiffusives Verhalten interpretiert werden kann. Daher ziehen wir die Schlussfolgerung, dass die quasilineare Theorie für alle Turbulenzmodelle darin versagt, den senkrechten Transport zu beschreiben.

Die kürzlich aufgestellte NLGC-Theorie (Matthaeus et al.<sup>54</sup>) scheint dagegen in der Lage zu sein, die Simulationen ungefähr zu reproduzieren, sogar wenn die Turbulenz isotrop ist. Diese Theorie, die eine Integralgleichung für die senkrechte mittlere freie Weglänge liefert, ist aber nur anwendbar, wenn die parallele mittlere freie Weglänge bereits als Funktion der Steifigkeit der Teilchen und der Stärke des turbulenten Magnetfeldes bekannt ist.

Wie dieses Kapitel gezeigt hat, ist die quasilineare Theorie – mit einer Ausnahme für das *slab*-Modell, bei dem der Wellenvektor des turbulenten Magnetfeldes ausschließlich in der Richtung des Hintergrund-Magnetfeldes ausgerichtet ist – nicht geeignet, um den Teilchentransport in magnetostatischen Turbulenzmodellen zu beschreiben. Für Turbulenzgeometrien, die nicht *slab*-artig sind, für steile Wellenspektren und für senkrechten Transport kann die QLT im Falle magnetostatischer Turbulenz daher nicht angewendet werden, da für alle diese Fälle die mittleren freie Weglängen jeweils unendlich ergeben. Zukünftige Arbeiten auf dem Feld der Transporttheorie sollten sich somit auf die Entwicklung nichtlinearer Theorien wie der NLGC-Theorie, der WNLT und der SOQLT

konzentrieren, so dass letztlich Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation erzielt werden kann.

Die in diesem Kapitel betrachteten Simulationen sind alle auf magnetostatische Turbulenz beschränkt. Dieses Modell mag als grobe Näherung gesehen werden; es gibt realistischere Modelle, wie etwa das dynamische Turbulenzmodell oder das Plasmawellenmodell. Aufgrund der starken Resonanzverbreiterung, die durch dynamische und Effekte der Plasmawellendämpfung verursacht werden, können nichtlineare Effekte unterdrückt werden und die Gültigkeit der quasilinearen Theorie kann möglicherweise wiederhergestellt werden. Wir erwarten, dass zumindest für dynamische Turbulenz die QLT korrekt sein sollte, da zwischen Ergebnissen der QLT und Beobachtungen in der Heliosphäre (Bieber et al.<sup>5</sup>, Shalchi et al.<sup>92</sup>) Übereinstimmung gefunden wurde. Die Aussage, dass die Gültigkeit der QLT in dynamischer und gedämpfter Plasmawellen-Turbulenz wiederhergestellt wird, muss jedoch durch Vergleiche mit Testteilchen-Simulationen in solchen realistischen Turbulenzmodellen erst noch bewiesen werden. Bis jetzt haben nur Michałek und Ostrowski<sup>60</sup> und Michałek<sup>59</sup> den Teilchentransport in nicht-statischer Turbulenz simuliert; dabei wurden jedoch ausschließlich ungedämpfte Scher-Alfvénwellen und ungedämpfte schnelle magnetosonische Wellen betrachtet. Im nächsten Kapitel werden wir daher untersuchen, ob die Gültigkeit der quasilinearen Theorie unter Einbeziehung dieser Wellentypen wiederhergestellt wird.

---

## 4 Plasmawellen-Turbulenz

*Dieses Kapitel führt einen Vergleich von mit Hilfe der quasilinearen Theorie in ungedämpfter Plasmawellen-Turbulenz berechneten Diffusionskoeffizienten mit Testteilchen-Simulationen durch und bietet einen Ausblick darauf, wie isotrope Plasmawellen-Turbulenz neu beschrieben werden könnte.*

### 4.1 Einleitung

In diesem Kapitel führen wir die Überlegungen des vorangegangenen Kapitels fort und erweitern die Theorie durch die Einbeziehung magnetohydrodynamischer Plasmawellen, die, wie Beobachtungen gezeigt haben, maßgeblich an der Turbulenz des interplanetaren Mediums beteiligt sind. Dazu werden wir in diesem Abschnitt zunächst einmal die bislang etwas problematische Einbeziehung von Plasmawellen-Turbulenz in die quasilineare Theorie (QLT) darstellen.

In der Herleitung der Fokker-Planck-Koeffizienten in isotroper Alfvénwellen-Turbulenz (vgl. Schlickeiser<sup>80</sup>) wird der Wellenvektor auf die  $x$ - $z$ -Ebene beschränkt und hat damit die Form  $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel) = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$  beschränkt. Aufgrund der Polarisations-eigenschaften für sich in einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$  ausbreitende Alfvénwellen sind die fluktuierenden elektrischen und Magnetfelder der Wellen durch (Schlickeiser<sup>80</sup>, Abschnitt 13.1)

$$\delta \mathbf{E} = (E_x, 0, 0) \quad (4.1a)$$

$$\delta \mathbf{B} = \frac{ck}{\omega} E_x (0, \cos \theta, 0) \quad (4.1b)$$

gegeben. Dabei ist  $\omega = \omega(\mathbf{k}) = \pm V_A k_\parallel$  die Dispersionsrelation der Alfvénwellen, worin

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi(m_p + m_e)n_e}} \quad (4.2)$$

die Alfvén-Geschwindigkeit bezeichnet; weiterhin beschreibt  $\theta$  den Winkel zwischen Wellenvektor und Hintergrundmagnetfeld. Da das turbulente Magnetfeld auf die  $y$ -Richtung beschränkt ist, findet man daraufhin  $D_{XX} = D_{XY} = D_{YX} = 0$  und lediglich  $D_{YY} \neq 0$ , wobei  $D_{XX}$ ,  $D_{XY}$ ,  $D_{YX}$  und  $D_{YY}$  die jeweiligen räumlichen Fokker-Planck-Koeffizienten bezeichnen.

Mit diesen Vorgaben an die turbulenten Magnetfelder,  $\delta \mathbf{B} = ck/\omega (0, E_x \cos \theta, 0)$ , berechnet man die Elemente des magnetischen Korrelationstensors gemäß

$$P_{lm} = \langle \delta B_l(\mathbf{k}) \delta B_m^*(\mathbf{k}') \rangle \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (4.3)$$

Dies ergibt zum Beispiel  $P_{xi} = P_{zi} = 0$ , mit  $i \in \{x, y, z\}$ . Dies widerspricht jedoch direkt der allgemeinen Form des isotropen Turbulenztensors, welcher für die obige Festlegung der Wellenausbreitung auf die  $x$ - $z$ -Ebene gegeben ist durch

$$P_{lm}(\mathbf{k}) = \frac{G(k)}{8\pi k^2} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Abgesehen von dieser rein mathematischen Widersprüchlichkeit in der Herleitung ist bekannt (Lee und Völk<sup>44</sup>), dass ein isotropes Turbulenzspektrum physikalisch nicht allein aus Alfvénwellen konstruiert werden kann. Da dies dennoch in den Simulationen getan wurde, gehen wir hier den gleichen Weg und weisen lediglich auf die Widersprüche hin.

Darüber hinaus kann die resultierende Größe  $\kappa_{YY}$  – der *einzig*e nichtverschwindende räumliche Diffusionskoeffizient – nicht als *senkrechter, isotroper* Diffusionskoeffizient bezeichnet werden, da aufgrund der Wahl für den Wellenvektor der Alfvénwellen,  $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$ , nur Transportparameter in  $y$ -Richtung berechnet werden können. Des Weiteren werden wir zeigen, dass sogar der parallele räumliche Diffusionskoeffizient, der aus dem Fokker-Planck-Koeffizient für die Anstellwinkel-Diffusion,  $D_{\mu\mu}$ , berechnet wird, keine Übereinstimmung mit Simulationen zeigt.

In Abschnitt 4.4 werden wir daher einen Ansatz entwickeln, wie dieser Missstand zumindest für den Fall von Alfvénwellen grundsätzlich behoben werden kann, indem sowohl der Isotropie der Wellenvektoren Rechnung getragen wird, als auch die elektrischen Fluktuationen mit einbezogen werden.

## 4.2 Die Simulationen von Michałek

Bevor wir zu den Simulationen von Michałek<sup>59</sup> kommen (im weiteren Verlauf als M01 bezeichnet), diskutieren wir zunächst die Simulationen von Michałek und Ostrowski<sup>60</sup>, in denen für die Turbulenzgeometrie ein einfaches *slab*-Modell unter Einbeziehung von Plasmawellen-Turbulenz verwendet wurde. Die Ergebnisse der Simulationen wurden bereits von ihnen selbst und von Schlickeiser<sup>80</sup> mit Ergebnissen der QLT verglichen und die wesentliche Schlussfolgerung bestand darin, dass die QLT für parallele räumliche und für Impuls-Diffusion sehr gut mit den simulierten Werten übereinstimmt, sogar im Falle starker Turbulenz ( $\delta B > B_0$ ). Mit Hilfe des Formalismus' der QLT ist es leicht zu zeigen (z.B. Teufel et al.<sup>105</sup>), dass die statische Lösung (Gleichung 3.33 in Kapitel 3) für Teilchengeschwindigkeiten  $v \gg V_A$  zurückerlangt werden kann. Daher bestand die hauptsächliche Schlussfolgerung aus allen in Michałek und Ostrowski<sup>60</sup> betrachteten Simulationen darin, dass die QLT für parallelen Transport mit flachen Wellenspektren in Verbindung mit einem *slab*-Modell gültig ist, unabhängig von der Frage ob ein (magneto-)statisches oder ein Plasmawellen-Modell verwendet wird.

Für senkrechten Transport konstatieren Michałek und Ostrowski, dass die Diffusionsbedingung wiederhergestellt wird, da die Senkrechtdiffusion zeitunabhängig wird. Es sind jedoch bei der numerischen Berechnung lange Integrationszeiten erforderlich, um dies für ein Plasmawellenmodell mit *slab*-Geometrie zu erreichen.

Angesichts dieser Ergebnisse wenden wir uns nun der Frage zu, ob die quasilineare Theorie auch im Falle isotroper Plasmawellen-Turbulenz mit den Simulationen übereinstimmt. In den Simulationen von M01 wird anstelle des *slab*-Modells ein isotropes Plasmawellen-Modell verwendet, wobei in einer unendlich großen Region eines dichten Plasmas ein durch propagierende magnetohydrodynamische (MHD) Plasmawellen gestörtes gleichförmiges Hintergrund-Magnetfeld angenommen wird. In den numerischen Rechnungen von M01 werden die Trajektorien von normalerweise 200 Teilchen mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung durch Integration der Bewegungsgleichungen in den Phasenraum-Koordinaten berechnet; dabei ergab die Verwendung einer größeren Anzahl von Teilchen zu Testzwecken keine signifikanten Unterschiede.

Die Plasmawellen-Turbulenz selbst wurde durch die Superposition isotroper Alfvén- und/oder schneller magnetosonischer Wellen repräsentiert. Für jedes einzelne Teilchen wurde ein separater Satz von Feldparametern ausgewählt; daher bedeutet die Mittelung über die Teilchen implizit auch die Mittelung über vielfältige Konfigurationen der turbulenten magnetischen Felder. Da die Teilchenbewegung nur für ein stetiges Wellenspektrum diffusiv verlaufen kann, wurden zunächst Simulationen durchgeführt, mit denen die minimale Anzahl der erforderlichen Wellen ermittelt wurde. Für lediglich „ein paar hundert“ (vgl. Michałek<sup>59</sup>) konnte die erzeugte Teilchen-Verteilungsfunktion gut durch eine Gaußfunktion angepasst werden, bei der keine diskreten Resonanzen auftraten. In den Simulationen wurde daher mit der Wahl der noch größeren Zahl von 768 Wellenmoden ein ausreichender Spielraum geschaffen. Wie schon im vorherigen Kapitel ist es jedoch nicht unsere Absicht, die Details der Simulationen zu beurteilen, beispielsweise ob die Zahl von 768 Wellenmoden tatsächlich ausreichend ist, da wir lediglich die Simulationsergebnisse für den Vergleich mit unseren analytischen Ergebnissen heranziehen.

Für jede Wellenmode wurde dabei der Vektor der Magnetfeldfluktuation gewählt als

$$\delta \mathbf{B}^{(i)} = \delta B_0^{(i)} \sin(\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r} - \omega^{(i)} t + \Phi^{(i)}). \quad (4.5)$$

Der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und die Amplitude  $\delta B_0$  werden dabei per Zufall aus dem Kolmogorov-Spektrum bestimmt; weiterhin sind die Phasenwinkel  $\Phi$  skaliert, um den quadratischen Mittelwert (*root mean square*) der Wellenamplituden konstant zu halten, die durch den auch in den analytischen Herleitungen auftretenden Parameter  $\delta B$  beschrieben werden. Elektrische Felder werden innerhalb der Simulationen gänzlich vernachlässigt.

### 4.2.1 Das Turbulenzmodell

In Abb. 4.1 sind die Simulationen für parallelen räumlichen Transport von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> (GJ99) mit denen von M01 verglichen, welche beide isotrope Turbulenz verwenden. Die Absolutwerte wie auch die Steigungen sind nicht in Übereinstimmung – außer für die höchsten betrachteten Steifigkeiten ( $R \gtrsim 10^4$  MV), wo die Datenpunkte dieselben Werte zu erreichen scheinen. Diese Diskrepanz kann jedoch verstanden werden, wenn man berücksichtigt, dass 1. GJ99 magnetostatische Turbulenz verwenden, während M01 (isotrope) Alfvénwellen- und schnelle magnetosonische Turbulenz wie auch eine Mischung der beiden Wellentypen verwendet, und 2. den Simulationen verschiedene Wellenspektren zugrunde liegen: GJ99 verwenden die durch Gleichung (3.2) in Kapitel 3 beschriebene

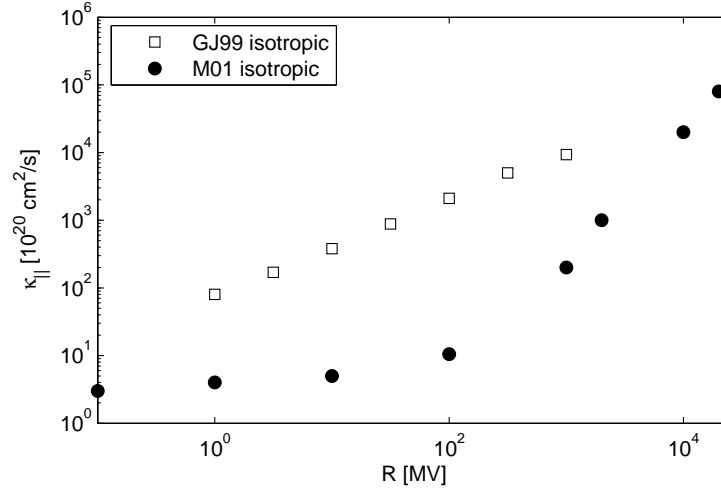


Abbildung 4.1: Vergleich der Simulationen für den parallelen räumlichen Diffusionskoeffizienten von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> und Michalek<sup>59</sup>, wobei nur in letzteren Simulationen Alfvénwellen-Turbulenz verwendet wird. Beide Simulationen verwenden einen Spektralindex von  $s = 5/3$ .

Kappa-Verteilung, wobei Wellenlängen größer als 1 AU abgeschnitten sind, während M01 das einfache kolmogorov-artige Potenzgesetz aus Gl. (4.6) in diesem Kapitel verwenden. Die resultierenden Diffusionskoeffizienten sind daher prinzipiell zwar nicht quantitativ vergleichbar; jedoch illustriert Abbildung 4.1 qualitativ die sich durch die Anwesenheit von Alfvénwellen ergebenden Unterschiede.

Für die analytischen Herleitungen der Diffusionskoeffizienten verwenden wir dasselbe isotrope Turbulenzspektrum, das auch in den Simulationen von M01 verwendet wurde und das gegeben ist durch

$$G(k) = G_0 k^{-s}, \quad k_{\min} \leq k \leq k_{\max}, \quad (4.6)$$

mit  $k_{\min} = B_0 c / R_{\max}$  und  $k_{\max} = B_0 c / R_{\min}$ . Hier bezeichnen  $R_{\max}$  und  $R_{\min}$  die jeweiligen maximalen und minimalen Steifigkeiten der betrachteten Teilchen, wobei die Steifigkeit wieder durch  $R = pc/e$  definiert ist. Die Normierungskonstante  $G_0$  in Gl. (4.6) ergibt sich zu

$$G_0 = (\delta B)^2 \frac{s-1}{k_{\min}^{1-s} - k_{\max}^{1-s}} \simeq (\delta B)^2 (s-1) k_{\min}^{s-1}. \quad (4.7)$$

Für die numerischen Auswertungen verwenden wir die in den Gleichungen (4.14) gegebenen Parameter.

### 4.3 Analytische Ergebnisse für parallelen und senkrechten Transport

In diesem Abschnitt berechnen wir den Fokker-Planck-Koeffizienten der Anstellwinkel-Streuung,  $D_{\mu\mu}$ , und den parallelen räumlichen Diffusionskoeffizienten  $\kappa_{\parallel}$  unter Verwen-

dung des isotropen Plasmawellen-Modells und des Turbulenzspektrums aus Gl. (4.6). Der Hauptteil der Rechnungen ist dabei in Anhang A.3 ausführlich dargestellt.

Allgemein wird, wie in den Kapiteln 2 und 3 hergeleitet, der Fokker-Planck-Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  aus den über ein Ensemble gemittelten Korrekturen erster Ordnung der Teilchenbahnen in einem schwach turbulenten Magnetfeld gemäß

$$D_{\mu\mu}(\mu) = \Re \int_0^{\infty} d\xi \langle \dot{\mu}(t) \dot{\mu}^*(t + \xi) \rangle. \quad (4.8)$$

berechnet (s. Hall und Sturrock<sup>29</sup>).

Der parallele räumliche Diffusionskoeffizient wird dann durch Mittelung über den Anstellwinkel des inversen Fokker-Planck-Koeffizienten als

$$\kappa_{\parallel} = \frac{v^2}{8} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}(\mu)} \quad (4.9)$$

bestimmt.

In Abbildung 4.2 ist der Fokker-Planck-Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  aus Gl. (A.44) in Anhang A.3 für vorwärts- und rückwärtslaufende Alfvénwellen gleicher Intensität und mit  $\epsilon \equiv V_A/v = 0,15$  dargestellt, normiert auf  $D_0$  aus Gl. (A.45).

Aus der Tatsache, dass für nur vorwärtslaufende (oder nur rückwärtslaufende) Alfvénwellen der Fokker-Planck-Koeffizient bei  $\mu = \pm\epsilon$  verschwindet, ist unmittelbar klar, dass in diesem Fall der parallele räumliche Diffusionskoeffizient ebenfalls unendlich ergibt, wie dies schon für den Fall eines magnetostatischen Turbulenzmodells der Fall war (siehe hierzu Kapitel 3). Die Annahme gleicher Intensität für vorwärts- und rückwärtslaufende Wellen ist durch die Isotropie des Turbulenzspektrums gerechtfertigt, da diese das gleiche Vorhandensein von sich in jeder Richtung gleich ausbreitenden Wellen impliziert (vgl. auch den Abschnitt 4.1).

Für sich vorwärts und rückwärts ausbreitende Alfvénwellen findet man dagegen immer  $D_{\mu\mu} \neq 0$ , außer bei  $\mu = \pm 1$ . Diese Tatsache verhindert, dass das Integral über den inversen Fokker-Planck-Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  unendlich groß wird; somit ergibt sich im Falle von Plasmawellen-Turbulenz  $\kappa_{\parallel} < \infty$ . Daher stellt sich sofort die Frage, ob die quasilineare Theorie korrekte Ergebnisse liefert, wenn man von der magnetostatischen zu Plasmawellen-Turbulenz übergeht. Um darauf eine Antwort zu finden, vergleichen wir die Ergebnisse wieder mit Simulationen: Wie in Anhang A.3 gezeigt, finden wir für den parallelen räumlichen Diffusionskoeffizienten

$$\kappa_{\parallel}^A [10^{20} \text{cm}^2/\text{s}] = \frac{\mathcal{J}[\epsilon(R)]}{40\pi B_0} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{-2} \frac{R_{\max}^{s-1} - R_{\min}^{s-1}}{s-1} \frac{R^{3-s}}{\sqrt{R^2 + R_0^2}}, \quad (4.10)$$

wobei  $B_0$  die Stärke des Hintergrund-Magnetfeldes bezeichnet,  $\epsilon = V_A/v$  ist und  $R_0 = 938$  MV wieder die sog. „Ruhe-Steifigkeit“ des Protons bezeichnet. Die Parameter  $B_0$  und  $R$  sind dabei in Einheiten von nT und MV gegeben. Die Funktion  $\mathcal{J}(s, \epsilon)$  ist in Gl. (A.50) definiert und in Abb. A.1 dargestellt.

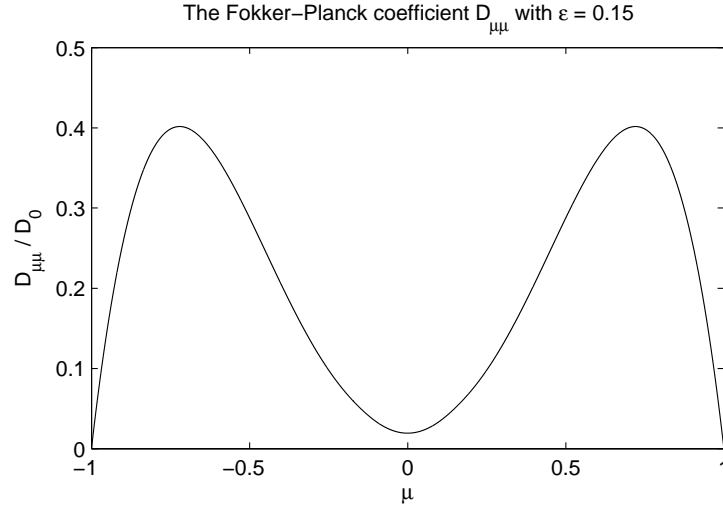


Abbildung 4.2: Der Fokker-Planck-Koeffizient für Anstellwinkel-Diffusion,  $D_{\mu\mu}$ , normiert auf  $D_0$  aus Gl. (A.45), unter Verwendung von Alfvénwellen mit verschwindender Kreuz-Helizität, also gleicher Intensität von vorwärts- und rückwärts-laufenden Wellen. Nur in diesem Fall gilt  $D_{\mu\mu}(\mu) = D_{\mu\mu}(-\mu)$ .

Der Fall isotroper Plasmawellen-Turbulenz wurde ebenfalls in Teufel et al.<sup>105</sup> betrachtet, wobei für den parallelen Diffusionskoeffizienten

$$\kappa_{\parallel}^i = \frac{g^i(\epsilon, s)}{2\pi(s-1)} \left( \frac{B_0}{\delta B} \right)^2 \frac{vR_L}{(R_L k_{\min})^{s-1}} \quad (4.11a)$$

mit

$$g^i \left( \epsilon, s = \frac{5}{3} \right) \simeq \begin{cases} 0,75 \epsilon^{-s}, & \text{Scher-Alfvénwellen, } i=A \\ 1,04 \epsilon^{1-s}, & \text{schnelle magnetosonische Wellen, } i=F \end{cases} \quad (4.11b)$$

hergeleitet wurde. Die analytische Form dieses Ergebnisses unterscheidet sich von Gleichung (4.10) aufgrund unterschiedlicher Vorgehensweisen bei den mathematischen Näherungen. Diese sind in analytischen Rechnungen für Diffusionskoeffizienten in Turbulenzgeometrien, die komplexer als das einfache *slab*-Modell sind, stets notwendig. Für die in Gl. (4.14) aufgelisteten Parameter sind die jeweiligen Ergebnisse in den Abbildungen 4.3 (für Alfvénwellen) und 4.4 (für schnelle magnetosonische Wellen) dargestellt. Für Alfvénwellen erkennt man, dass die Berechnungen aus Gl. (4.11a) von Gl. (4.10) lediglich um einen maximalen Faktor  $\sim 2$  abweicht. Diese Differenz mag als Fehlergrenze für das analytische Ergebnis betrachtet werden, das jedoch auch unter Berücksichtigung dieser Unsicherheit dramatisch vom Simulationsergebnis abweicht.

Parallele räumliche Diffusion für schnelle magnetosonische Wellen in isotroper Turbulenz ist von Schlickeiser und Miller<sup>83</sup> untersucht worden. Für die parallele mittlere freie Weglänge wurde dort näherungsweise berechnet

$$\lambda_{\parallel}^F (R_L k_{\min} \ll 1) \simeq \frac{2}{\pi(s-1)\zeta(s+1)} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{-2} R_L (k_{\min} R_L \epsilon)^{1-s}, \quad (4.12)$$



wobei  $\zeta(x)$  die Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet (s. Anhang C.5). Ausgedrückt durch die Steifigkeit  $R$  ergibt dies für den Diffusionskoeffizienten

$$\kappa_{\parallel}^F [10^{20} \text{cm}^2/\text{s}] = \frac{2}{30\pi(s-1)\zeta(s+1)} \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^{-2} \frac{R_{\max}^{s-1}}{B_0} \left(\frac{V_A}{c}\right)^{1-s} \frac{R^2}{(R^2 + R_0^2)^{s/2}}. \quad (4.13)$$

mit  $B_0$  [nT] und  $R$  [MV]. Dieses Ergebnis ist in Abb. 4.4 ebenfalls für die Parameter aus Gl. (4.14) dargestellt. Man beachte, dass, obwohl in den jeweiligen Herleitungen zu den Gleichungen (4.13) und (4.11a) verschiedene Näherungen verwendet wurden, die Ergebnisse für den in Abb. 4.4 betrachteten Steifigkeitsbereich perfekt übereinstimmen und in der Abbildung daher nur eine analytische Kurve zu sehen ist.

### 4.3.1 Vergleich mit Simulationsergebnissen

In den Simulationen verwendet M01 drei unterschiedliche Wellenspektren, die sich einzig durch ihre minimalen und maximalen Wellenvektoren unterscheiden, welche den Resonanz-Wellenvektoren für Teilchen mit der minimalen und maximalen betrachteten Steifigkeit entsprechen. Wir haben das Spektrum mit dem breitesten Bereich („wide range spectrum“) ausgewählt, in dem das größte Intervall an Wellenzahlen zugelassen wird und das wir als den realistischsten Fall betrachten. In M01 ist dieses Spektrum beschrieben als „das vernünftigste für Turbulenz in einem Sonnenwind“. Für das Spektrum sind die resonanten Wellenvektoren für Teilchen mit Steifigkeiten von 0,09 MV bis  $2 \cdot 10^4$  MV berücksichtigt.

Um in der Lage zu sein, unsere analytischen Ergebnisse mit den Simulationsergebnissen von M01 zu vergleichen, verwenden wir den folgenden Satz von Parametern, der auch in den Simulationen zugrunde gelegt wurde:

$$\begin{aligned} s &= 5/3 \\ R_{\max} &= 2 \cdot 10^4 \text{ MV} \\ R_{\min} &= 0,09 \text{ MV} \\ B_0 &= 5 \text{ nT} \\ V_A/c &= 5 \cdot 10^{-4} \\ \delta B/B_0 &= 0,3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Das Ergebnis für den parallelen räumlichen Diffusionskoeffizienten in isotroper Turbulenz ist in Abb. 4.3 gezeigt, wo es mit den Simulationen von Michałek<sup>59</sup> verglichen wird. Oberhalb der Ruhe-Steifigkeit der Protonen von 938 MV sehen wir das Verhalten von  $\kappa_{\parallel} \propto R^{1/3}$ , das typisch für mit der quasilinearen Theorie berechnete Ergebnisse ist. Die Steigung der Simulationsdaten in diesem Bereich ist jedoch steiler und beträgt ungefähr  $\kappa_{\parallel} \propto R^{0,8}$  (Minnie<sup>61</sup>). Wie man aus Abb. 4.3 ersieht, weichen Theorie und Simulation bei  $R \simeq 1000$  MV mit einem maximalen Faktor von  $6 \cdot 10^4$  drastisch voneinander ab. Der Grund für diese Nichtübereinstimmung liegt, wie wir in Abschnitt 3.2.1 von Kapitel 3 bereits demonstriert haben, darin begründet, dass die QLT für Anstellwinkel nahe  $90^\circ$  nicht korrekt ist. Der Fokker-Planck-Koeffizient für Scher-Alfvénwellen verhält sich näherungsweise wie

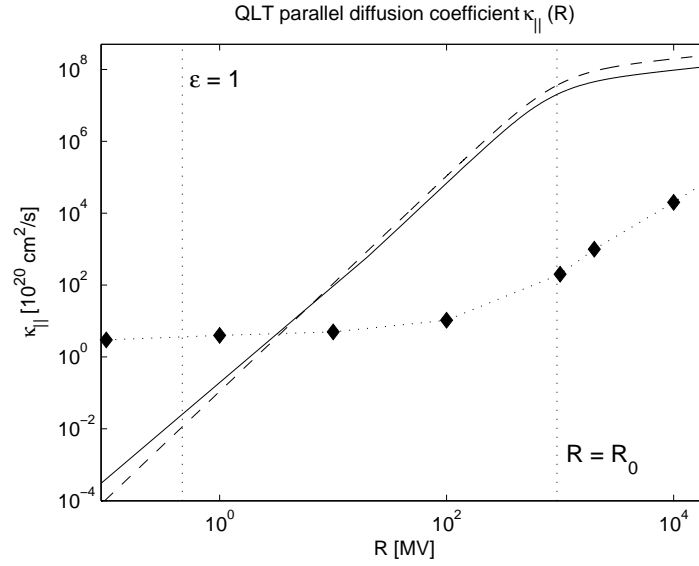


Abbildung 4.3: Der für Protonen in Alfvénwellen-Turbulenz berechnete parallele räumliche Diffusionskoeffizient,  $\kappa_{||}$ , aus Gl. (4.10) (durchgezogene Linie), zusammen mit Gl. (4.11a) aus Teufel et al.<sup>105</sup> (gestrichelte Linie) und den Simulationen von Michałek<sup>59</sup> (Punkte). Die mit  $\epsilon = 1$  bezeichnete vertikale Punktlinie entspricht Teilchen mit der Alfvén-Geschwindigkeit aus Gl. (4.2); die anderen Parameter sind durch Gl. (4.14) gegeben.

$$D_{\mu\mu}^A(\mu = 0) \propto \epsilon^s \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2. \quad (4.15)$$

Um die Ungültigkeit der QLT zu verstehen, vergleichen wir dieses Verhalten mit in *slab*-Turbulenz berechneten Ergebnissen, die mit der kürzlich aufgestellten SOQLT (quasilineare Theorie zweiter Ordnung, s. Shalchi<sup>87</sup>) berechnet wurden: dort findet man

$$D_{\mu\mu}^{\text{SOQLT}}(\mu = 0) \propto \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{s+1}. \quad (4.16)$$

Im linearen Plasmawellen-Modell tritt nichtverschwindende 90°-Streuung auf, da  $\epsilon \neq 0$  ist, wohingegen in der magnetostatischen SOQLT die 90°-Streuung durch  $\delta B/B_0 \neq 0$  verursacht wird. Der Vergleich dieser beiden Herangehensweisen ergibt

$$\frac{D_{\mu\mu}^A(\mu = 0)}{D_{\mu\mu}^{\text{SOQLT}}(\mu = 0)} \propto \epsilon^s \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{-s+1}. \quad (4.17)$$

Für  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$  und  $\delta B/B_0 = 0,3$  ergibt sich daraus

$$\frac{D_{\mu\mu}^A(\mu = 0)}{D_{\mu\mu}^{\text{SOQLT}}(\mu = 0)} \simeq 7 \cdot 10^{-6} \quad (4.18)$$

und die in zweiter Ordnung berechnete parallele mittlere freie Weglänge ist somit um einen Faktor  $10^6$  kleiner als das unter Einbeziehung von Plasmawellen erhaltene quasilineare Ergebnis. Anhand dieser sehr groben Überlegungen kann man die Ungültigkeit der

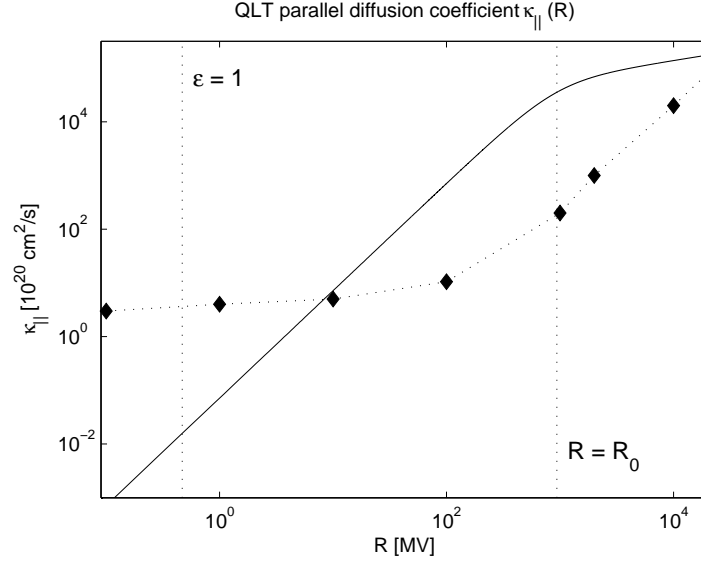


Abbildung 4.4: Der für Protonen in schnellen magnetosonischen Wellen berechnete parallele räumliche Diffusionskoeffizient,  $\kappa_{||}$ , aus Gl. (4.13) von Schlickeiser und Miller<sup>83</sup> (durchgezogene Linie, dies stimmt mit Gl. (4.11a) aus Teufel et al.<sup>105</sup> überein), zusammen mit den Simulationen von Michałek<sup>59</sup> (Punkte). Die verwendeten Parameter sind in Gl. (4.14) gegeben.

QLT im Plasmawellen-Modell nun verstehen: Die nichtlinearen Effekte für Anstellwinkel nahe bei  $90^\circ$  sind sehr viel stärker als jegliche Plasmawellen-Effekte. Jedoch ist die quasilineare Theorie zweiter Ordnung bislang nur für den einfachen Fall der *slab*-Geometrie formuliert worden; aufgrund schwerwiegender mathematischer Schwierigkeiten wird die Anwendung der SOQLT auf den Fall isotroper Turbulenz erst in zukünftigen Arbeiten durchgeführt. Andere nichtlineare Theorien wie etwa die schwach-nichtlineare Theorie (WNLT) von Shalchi et al.<sup>91</sup> unterliegen ebenfalls dem  $90^\circ$ -Problem und wurden daher in diesem Kapitel nicht betrachtet. Darüber hinaus ist die Anwendung dieser Theorie für isotrope Turbulenz ebenfalls mit großen mathematischen Problemen behaftet.

Um den senkrechten Diffusionskoeffizienten in isotroper Alfvénwellen-Turbulenz zu berechnen, gehen wir – wobei nochmals auf die Bemerkungen zu Beginn dieses Kapitels verwiesen sei – von Gl. (13.1.46) in Schlickeiser<sup>80</sup> aus,

$$\begin{aligned}
 D_{YY}^A &= \frac{\pi V_A^2}{4B_0^2} \sum_{\iota=\pm 1} (1 - \iota\mu\epsilon)^2 \int_{-1}^1 d\eta (1 + \eta^2) \\
 &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \delta(\eta k[v\mu - \iota V_A] + n\Omega) G(k) J_n^2(w). \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Für den senkrechten Diffusionskoeffizienten gilt

$$\kappa_{\perp} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu (D_{XX} + D_{YY}) = \kappa_{XX} + \kappa_{YY}, \quad (4.20)$$

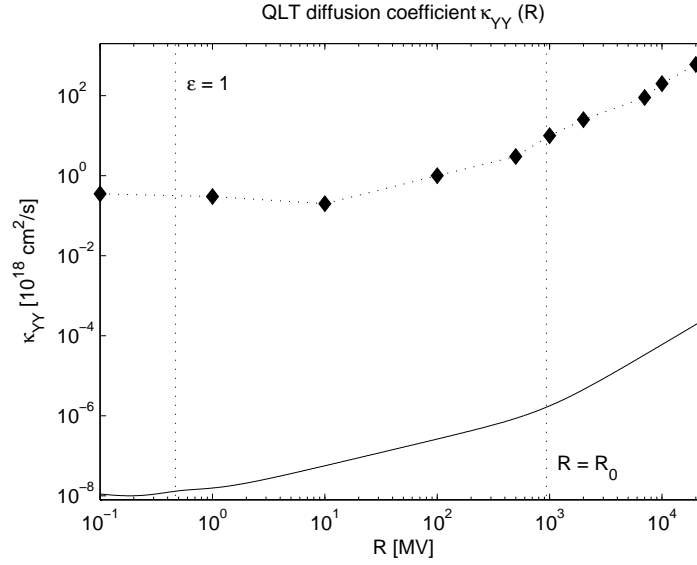


Abbildung 4.5: Der für Protonen in Alfvénwellen berechnete senkrechte Diffusionskoeffizient  $\kappa_{YY}$  aus Gl. (4.21) (durchgezogene Linie), zusammen mit den Simulationen von Michałek<sup>59</sup> (Punkte). Die verwendeten Parameter sind in Gl. (4.14) aufgeführt.

wobei  $\kappa_{XX}$  und  $\kappa_{YY}$  die räumlichen Diffusionskoeffizienten in  $XX$ - und  $YY$ -Richtung bezeichnen. Die Summe über  $\iota$  (das kleine griechische „iota“) berücksichtigt dabei die beiden Polarisierungen der vorwärts- und rückwärtslaufenden Wellen. Aufgrund von  $D_{XX} = \kappa_{XX} = 0$  muss  $\kappa_{YY}$  mit dem senkrechten Diffusionskoeffizienten  $\kappa_{\perp}$  identifiziert werden, wobei in diesem Zusammenhang die in Abschnitt 4.1 angesprochenen Schwierigkeiten zu berücksichtigen sind.

In Anhang A.4 wird  $\kappa_{YY}$  für das Turbulenzspektrum aus Gl. (4.6) berechnet, und es ergibt sich damit

$$\kappa_{YY}^A [10^{18} \text{cm}^2/\text{s}] = \left(\frac{V_A}{c}\right)^2 \frac{10\pi}{4B_0} \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^2 \frac{s-1}{R_{\max}^{s-1} - R_{\min}^{s-1}} \mathcal{J}(s, \epsilon) R^{s-1} \sqrt{R^2 + R_0^2}, \quad (4.21)$$

wobei die Funktion  $\mathcal{J}(s, \epsilon)$  aus Gl. (A.60) ebenfalls in Abb. A.1 auf S. 167 dargestellt ist.

Das Ergebnis ist in Abbildung 4.5 für die Parameter in Gl. (4.14) dargestellt. Das qualitative Verhalten von Simulation und analytischem Ergebnis ist für  $R \gtrsim 10$  MV nahezu identisch, während in quantitativer Hinsicht die Ergebnisse über den gesamten betrachteten Steifigkeitsbereich um einen Faktor  $\sim 10^6$  voneinander abweichen.

Zur Berechnung des Transportkoeffizienten in schnellen magnetosonischen Wellen verwenden wir Gl. (6.20) in Stawicki<sup>100</sup>,

$$\kappa_{\perp}^F = \frac{s-1}{4s} \ell_c v \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^2 + \frac{(s-1)K(s)}{4} \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^2 \ell_c v \left(\frac{2\pi R_L}{\ell_c}\right)^s \ln\left(\frac{v}{V_A}\right), \quad (4.22a)$$

wobei  $\ell_c = 2\pi/k_{\min}$  und

$$K(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s/2)}{2^{s-3}s^2(2+s)\Gamma^3(s/2)}. \quad (4.22b)$$

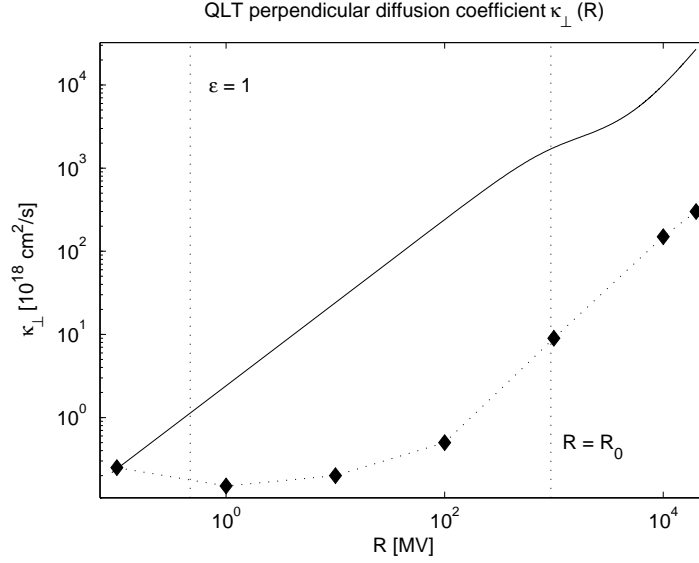


Abbildung 4.6: Der für Protonen in schnellen magnetosonischen Wellen berechnete senkrechte Diffusionskoeffizient,  $\kappa_{\perp}$ , aus Gl. (4.23) (durchgezogene Linie), zusammen mit den Simulationen von Michałek<sup>59</sup> (Punkte). Dafür wurden die Parameter aus Gl. (4.14) verwendet.

Drücken wir diese Formel für den senkrechten Diffusionskoeffizienten durch die Steifigkeit  $R = R_L/B_0c$  aus, wobei  $R_L$  den Larmorradius der Teilchen bezeichnet, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \kappa_{\perp}^F &= \frac{\pi R_{\max}(s-1)}{2B_0} \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 + R_0^2}} \\ &\times \left[ \frac{1}{s} + K(s) \left(\frac{R}{R_{\max}}\right)^s \ln \left( \frac{c}{V_A} \frac{R}{\sqrt{R^2 + R_0^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dies ist in Abb. 4.6 für die Parameter aus Gl. (4.14) dargestellt, wieder im Vergleich mit den Simulationen von M01 für schnelle magnetosonische Wellen. Für  $R \gtrsim 100$  stimmt die Steigung der Simulationen und des analytischen Ergebnisses sehr gut überein. Für hohe Steifigkeiten weichen jedoch die analytischen Ergebnisse und die der Simulationen um einen Faktor 100 voneinander ab. Der erste Term in Gleichung (4.22a) stimmt qualitativ mit Gl. (B5) von Giacalone und Jokipii<sup>25</sup> überein. Es sollte jedoch beachtet werden, dass in Stawicki<sup>100</sup> die Beiträge der Gyroresonanz zu  $\kappa_{\perp}^F$  vernachlässigt wurden und nur der Beitrag der Durchgangszeit-Dämpfung (*transit-time damping*) berücksichtigt wurde. Mathematisch entspricht dies der Tatsache, dass von der unendlichen Reihe in den Definitionen der Fokker-Planck-Koeffizienten lediglich der Term mit  $n = 0$  berechnet wurde und alle anderen Terme mit  $n \neq 0$  vernachlässigt wurden. Der volle quasilineare senkrechte Diffusionskoeffizient für eine aus schnellen magnetosonischen Wellen bestehende Turbulenz würde daher noch größer werden, was die Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation jedoch noch schlechter machen würde; daher genügt die in Gl. (4.23) gegebene Abschätzung, um die Nichtübereinstimmung mit den Simulationen festzustellen.

## 4.4 Ein neues Alfvénwellen-Turbulenzmodell

Die in diesem Kapitel verwendeten Ausdrücke für die Fokker-Planck-Koeffizienten in Plasmawellen-Turbulenz, die stark vereinfacht waren und einschränkende Voraussetzungen für die Geometrie der Wellenausbreitung verwendet hatten, lieferten, wie gesehen, von den Simulationen qualitativ und quantitativ stark abweichende Ergebnisse. In diesem Abschnitt werden wir daher am Beispiel einer aus Alfvénwellen bestehenden Turbulenz allgemeinere Ausdrücke für die zur Berechnung der Fokker-Planck-Koeffizienten benötigten Korrelationstensoren herleiten. Dabei werden wir insbesondere die Einschränkung aufgeben, dass die elektrischen Feldfluktuationen komplett vernachlässigt wurden.

Der in aller Allgemeinheit unter Berücksichtigung von elektrischen, magnetischen sowie gemischten Fluktuationen nach der in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten Methode der sieben Schritte hergeleitete Fokker-Planck-Koeffizient beispielsweise für die Anstellwinkel-Diffusion (*pitch-angle diffusion*),  $D_{\mu\mu}$ , lautet (vgl. Schlickeiser<sup>80</sup>)

$$\begin{aligned}
D_{\mu\mu} = & \frac{\Omega^2 (1 - \mu^2)}{B_0^2} \sum_{\iota=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \mathcal{R}_{\iota}(\mathbf{k}, \omega_{\iota}) \left\{ \frac{c^2 (1 - \mu^2)}{v^2} J_n^2(w) R_{\parallel\parallel} \right. \\
& + \frac{J_{n+1}^2(w)}{2} \left[ P_{\text{RR}} + \frac{\mu^2 c^2}{v^2} R_{\text{RR}} + i \frac{\mu c}{v} (Q_{\text{RR}} - T_{\text{RR}}) \right] \\
& + \frac{J_{n-1}^2(w)}{2} \left[ P_{\text{LL}} + \frac{\mu^2 c^2}{v^2} R_{\text{LL}} - i \frac{\mu c}{v} (Q_{\text{LL}} - T_{\text{LL}}) \right] \\
& - \frac{J_{n+1}(w) J_{n-1}(w)}{2} \left[ e^{2i\psi} \left( P_{\text{RL}} - \frac{\mu^2 c^2}{v^2} R_{\text{RL}} + i \frac{\mu c}{v} (T_{\text{RL}} + Q_{\text{RL}}) \right) \right. \\
& + e^{-2i\psi} \left( P_{\text{LR}} - \frac{\mu^2 c^2}{v^2} R_{\text{LR}} - i \frac{\mu c}{v} (T_{\text{LR}} + Q_{\text{LR}}) \right) \left. \right] + i \frac{c}{v} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{2}} J_n(w) \\
& \times \left[ J_{n+1}(w) \left( e^{i\psi} T_{\text{R}\parallel} - e^{-i\psi} Q_{\parallel\text{R}} + i \frac{\mu c}{v} (R_{e^{i\psi}\text{R}\parallel} + e^{-i\psi} R_{\parallel\text{R}}) \right) \right. \\
& \left. + J_{n-1}(w) \left( e^{i\psi} Q_{\parallel\text{L}} - e^{-i\psi} T_{\text{L}\parallel} + i \frac{\mu c}{v} (e^{i\psi} R_{\parallel\text{L}} + e^{-i\psi} R_{\text{L}\parallel}) \right) \right] \left. \right\}, \quad (4.24)
\end{aligned}$$

wobei die Summe über  $\iota$  allgemein alle  $N$  Wellenmoden umfasst, die man in der Turbulenz betrachten will. In den vorherigen Abschnitten waren dies die beiden „vorwärts“- und „rückwärts“-laufenden Alfvénwellen.

Wir sind daran interessiert, die Korrelationstensoren für das elektrische Feld,  $R_{ij} = \langle \delta E_i \delta E_j^* \rangle$ , und diejenigen von elektrischem und magnetischem Feld,  $Q_{ij} = \langle \delta E_i \delta B_j^* \rangle$  und  $T_{ij} = \langle \delta B_i \delta E_j^* \rangle$ , allein durch den Korrelationstensor für das magnetische Feld,  $P_{ij} = \langle \delta B_i \delta B_j^* \rangle$ , auszudrücken. Dieser – und unseres Wissens nach bislang *nur* dieser – kann durch weiter gehende Überlegungen hergeleitet werden und lautet allgemein für die Fälle isotroper und *slab*-Turbulenz

$$P_{lm}^{\text{iso}}(\mathbf{k}) = \frac{G(k)}{8\pi k^2} \left[ \delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} + i\sigma(k) \epsilon_{lmn} \frac{k_n}{k} \right] \quad (4.25a)$$

$$P_{lm}^{\text{slab}}(\mathbf{k}) = \begin{cases} G(k_{\parallel}) \frac{\delta(k_{\perp})}{k_{\perp}} [\delta_{lm} + i\sigma(k_{\parallel}) \epsilon_{lmz}], & l, m \in \{x, y\} \\ 0 & l, m = z \end{cases} \quad (4.25b)$$

wobei  $\sigma \in \mathbb{R}$  die in diesem allgemeinen Ausdruck berücksichtigte magnetische Helizität, und  $\epsilon_{ijk}$  das Levi-Civita-Symbol (Permutationsoperator) bezeichnet.

Wir gehen nun zunächst von der Fourier-Schreibweise des Faradayschen Induktionsgesetzes aus,

$$\delta \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}. \quad (4.26)$$

Der Betrag dieser Gleichung lässt sich nach

$$|\mathbf{k}| |\delta \mathbf{E}| = k \delta E = \frac{\omega}{c} \frac{\delta B}{\sin \psi} \quad (4.27)$$

umstellen, wobei  $\psi = \angle(\mathbf{k}, \delta \mathbf{E})$ .

Mit

$$\mathbf{k} \times \delta \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}) - k^2 \delta \mathbf{E}] \quad (4.28)$$

und  $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E} = k \delta E \cos \psi$  erhalten wir daraus

$$\delta \mathbf{E} = \frac{\omega}{ck^2} (\mathbf{k} \delta B \cot \psi - \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B}). \quad (4.29)$$

Für Alfvénwellen gilt allgemein die Polarisierungseigenschaft (z. B. Schlickeiser<sup>80</sup>)

$$\frac{\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}}{k \delta E} = \sin \theta, \quad (4.30)$$

mit  $\theta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$ . Es gilt also  $\cos \psi \stackrel{!}{=} \sin \theta$  und damit folgt  $\psi = \pi/2 - \theta$ , was  $\cot \psi = \tan \theta$  bedingt.

Somit erhalten wir daher für Alfvénwellen aus dem Faradayschen Gesetz die Gleichung für die Fluktuationen des elektrischen Feldes:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{\omega}{ck^2} (\mathbf{k} \delta B \tan \theta - \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B}). \quad (4.31)$$

Um die Korrelation dieses Ausdruckes mit seinem komplex Konjugierten sowie mit den Magnetfeldkomponenten berechnen zu können, benötigen wir die beiden plausiblen *ad-hoc*-Annahmen  $\langle |\delta \mathbf{B}| \cdot \delta B_i^* \rangle = \langle \delta B_i \cdot |\delta \mathbf{B}| \rangle = 0$  und  $\langle |\delta \mathbf{B}| \cdot |\delta \mathbf{B}| \rangle = (\delta B)^2$ . Für die beiden gemischten Korrelationstensoren von elektrischen und Magnetfeld-Komponenten erhalten wir damit die Gleichungen

$$Q_{ij} = \langle \delta E_i \delta B_j^* \rangle = -\frac{\omega}{ck^2} \epsilon_{ilm} k_l P_{mj} \quad (4.32a)$$

$$T_{ij} = \langle \delta B_i \delta E_j^* \rangle = -\frac{\omega}{ck^2} \epsilon_{ilm} k_l P_{jm}, \quad (4.32b)$$

wobei wie immer über gleiche Indizes summiert wird.

Somit gilt also  $Q_{ij} = Q_{ji} = T_{ij} = T_{ji}$ , falls  $P_{ij}$  symmetrisch ist, wie dies etwa für den isotropen Korrelationstensor aus Gl. (4.25a) der Fall ist.

Der Ausdruck für den Korrelationstensor des elektrischen Feldes ist allerdings etwas komplizierter:

$$R_{ij} = \langle \delta E_i \delta E_j^* \rangle = \frac{\omega^2}{c^2 k^4} \left[ k_i k_j (\delta B)^2 \tan^2 \theta + \epsilon_{ilm} \epsilon_{jrs} k_l k_r P_{ms} \right]. \quad (4.33)$$

Um diese Gleichung weiter berechnen zu können, benötigen wir zunächst die Eigenschaft, dass für das Produkt zweier Levi-Civita-Symbole gilt

$$\epsilon_{klm} \epsilon_{pqn} = \begin{vmatrix} \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kn} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{ln} \\ \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{mn} \end{vmatrix}, \quad (4.34)$$

wobei die senkrechten Striche die Determinantenbildung der Matrix bezeichnen.

Als Beispiel folgt damit für das erste Element des Korrelationstensors der elektrischen Feldfluktuationen

$$R_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2 k^4} \left[ k_x^2 (\delta B)^2 \tan^2 \theta + k_y^2 P_{zz} + k_z^2 P_{yy} - k_y k_z (P_{zy} + P_{yz}) \right]. \quad (4.35)$$

Die in helikalen Koordinaten ausgedrückten Elemente  $R_{RR} = R_{LL}$ ,  $R_{RL}$  und  $R_{LR}$  ergeben sich damit zu

$$R_{RR} = \frac{\omega^2}{c^2 k^4} \left\{ (k_x^2 + k_y^2) [(\delta B)^2 \tan^2 \theta + P_{\parallel\parallel}] + k_z^2 (P_{LL} + P_{RR} - P_{LR} - P_{RL}) - ik_z [k_y (P_{\parallel L} - P_{\parallel R} + P_{R\parallel} - P_{L\parallel}) + k_x (P_{L\parallel} - P_{R\parallel} + P_{\parallel R} - P_{\parallel L})] \right\} \quad (4.36a)$$

$$R_{RL} = \frac{\omega^2}{2c^2 k^4} \left\{ (k_x - ik_y)^2 [(\delta B)^2 \tan^2 \theta + P_{\parallel\parallel}] - k_z^2 (P_{RL} - P_{LR}) - 2ik_z [k_y (P_{\parallel L} + P_{L\parallel}) - k_x (P_{R\parallel} - P_{\parallel R})] \right\} \quad (4.36b)$$

$$R_{LR} = \frac{\omega^2}{2c^2 k^4} \left\{ (k_x - ik_y)^2 [(\delta B)^2 \tan^2 \theta + P_{\parallel\parallel}] + k_z^2 (P_{RL} - P_{LR}) + 2ik_z [k_y (P_{\parallel R} + P_{R\parallel}) + k_x (P_{L\parallel} - P_{\parallel L})] \right\}. \quad (4.36c)$$

Für die des Weiteren benötigten Elemente  $R_{R\parallel} = R_{L\parallel}^*$  und  $R_{L\parallel} = R_{R\parallel}^*$  gilt, dass sie sich zweckmäßiger in kartesischen Koordinaten ausdrücken lassen:

$$R_{R\parallel} = \frac{1}{2} (R_{xz} - iR_{yz}) \quad (4.36d)$$

$$= \frac{\omega^2}{2c^2 k^4} \left[ k_z (k_x - ik_y) (\delta B)^2 \tan^2 \theta - k_y^2 P_{zx} + ik_x^2 P_{zy} + k_x k_y (P_{zy} - iP_{zx}) - k_x k_z (P_{yy} + iP_{xy}) + k_y k_z (P_{yx} + iP_{xx}) \right] \quad (4.36e)$$

$$R_{L\parallel} = \frac{1}{2} (R_{zx} + iR_{zy}) \quad (4.36f)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega^2}{2c^2k^4} \left[ k_z (k_x + ik_y) (\delta B)^2 \tan^2 \theta - k_y^2 P_{xz} - ik_x^2 P_{yz} \right. \\
&\quad \left. + k_x k_y (P_{yz} + iP_{xz}) - k_x k_z (P_{yy} - iP_{yx}) + k_y k_z (P_{xz} - iP_{xx}) \right], \tag{4.36g}
\end{aligned}$$

wobei für  $\omega^2$  gemäß der Dispersionsrelation der Alfvénwellen  $V_A^2 k_{\parallel}^2$  einzusetzen ist.

Wir haben somit gezeigt, dass sich alle Komponenten der verschiedenen Korrelations-tensoren  $Q_{lm}$ ,  $T_{lm}$  und  $R_{lm}$  einzig durch den Korrelationstensor für die Magnetfeldkomponenten,  $P_{lm}$ , ausdrücken lassen. Dieser wiederum ist – im Gegensatz zu den anderen Tensoren; genau dies hat die Schwierigkeiten ursprünglich verursacht – durch andere Überlegungen bekannt und hat für isotrope Turbulenz die Form aus Gl. (4.25a). Damit lässt sich also durch Kenntnis des Korrelationstensors  $P_{lm}$  unter anderem der Fokker-Planck-Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  in Gleichung (4.24) berechnen. Zugrunde gelegt war dabei der Fall sich in beliebiger Richtung ausbreitender Alfvénwellen unter Berücksichtigung der Fluktuationen sowohl des Magnetfeldes wie auch des elektrischen Feldes.

Beachtet werden sollte dabei jedoch, dass der einzige Weg, um ein isotropes Spektrum aus unkorrelierten Alfvén- und schnellen magnetosonischen Wellen zu konstruieren, darin besteht, beide Wellentypen mit gleicher Intensität zu mischen (vgl. Lee und Völk<sup>44</sup>). Aus der grundlegenden Definition der Dispersionsrelation für Alfvénwellen,  $\omega^2 = V_A^2 k_{\parallel}^2$ , ist klar, dass diese Wellenmoden sich nicht isotrop in alle Richtungen propagieren können. Daher können Alfvénwellen allein auch kein isotropes Turbulenzspektrum erzeugen, aufgrund ihrer bevorzugten Ausbreitungsrichtung parallel zum Hintergrund-Magnetfeld.

## 4.5 Zusammenfassung

Mit diesem und Kapitel 3 wurde erstmals ein strenger Vergleich zwischen Testteilchen-Simulationen und theoretischen Ergebnissen durchgeführt. Dafür haben wir die quasilineare Theorie mit Testteilchen-Simulationen in verschiedenen Turbulenzmodellen verglichen. In Kapitel 3 haben wir uns auf magnetostatische Turbulenz konzentriert, während in diesem Kapitel der Vergleich für ungedämpfte Plasmawellen-Turbulenz durchgeführt wurden. Dabei haben wir die folgenden Ergebnisse gefunden:

- *Paralleler und senkrechter Transport in slab-artiger Plasmawellen-Turbulenz:* Für diesen Fall sind die Simulationen von Michałek und Ostrowski<sup>60</sup>, in denen *slab*-Turbulenz betrachtet wurde, in Übereinstimmung mit quasilinearen statischen *slab*-Ergebnissen. Für senkrechten Transport findet man, dass im Vergleich zur statischen Turbulenz die Diffusion in der Plasmawellen-Turbulenz wiedererlangt wird.
- *Paralleler Transport in isotroper Plasmawellen-Turbulenz:* Ebenso wie in Kapitel 3 ist die quasilineare Theorie sogar unter Einbeziehung von ungedämpften Scher-Alfvénwellen oder schnellen magnetosonischen Wellen nicht in Übereinstimmung mit Simulationsergebnissen. Die quasilineare mittlere freie Weglänge ist viel größer als in den Simulationen; verantwortlich hierfür ist der zu kleine Wert des Fokker-Planck-Koeffizienten nahe bei 90°.
- *Senkrechter Transport in isotroper Plasmawellen-Turbulenz:* Sowohl für ungedämpfte Scher-Alfvénwellen als auch für schnelle magnetosonische Wellen sind – im Ge-

gensatz zur magnetostatischen Turbulenz – die Transportparameter nun endlich. Jedoch kann allenfalls qualitative Übereinstimmung erlangt werden: Die Absolutwerte weichen von den Simulationen um einen Faktor  $10^6$  (für Alfvénwellen) bzw.  $10^2$  (für schnelle magnetosonische Wellen) ab.

Der Vergleich von quasilinearen Rechnungen mit Testteilchen-Simulationen für Plasmawellen-Turbulenz ergab, wie gezeigt, dass die Gültigkeit der QLT durch die Berücksichtigung von Plasmawellen *nicht* wiedererlangt wird. Wir schließen daraus also nun, dass die QLT nicht gültig ist, um den Teilchentransport entlang und senkrecht zu einem Hintergrund-Magnetfeld zu beschreiben, und eine nichtlineare Formulierung der Transporttheorien bevorzugt werden muss. Beachtet werden sollte hingegen, dass die QLT wieder gültig werden könnte, wenn eine dynamische Turbulenz (Bieber et al.<sup>5</sup>, Shalchi et al.<sup>92</sup>) oder gedämpfte Plasmawellen-Modelle angenommen werden, da beides Resonanzverbreiterung erzeugt – dies ist ebenso bei nichtlinearen Effekten der Fall (z. B. Shalchi<sup>87</sup>). Daher findet man, genau wie auch in der SOQLT, für solche Turbulenzmodelle starke  $90^\circ$ -Streuung. Eine detaillierte Diskussion der möglichen Wiederherstellung der Gültigkeit der QLT ist in Shalchi et al.<sup>92</sup> dargestellt. Die Aussage, dass die QLT für dynamische Turbulenz oder für gedämpfte Plasmawellen-Turbulenz korrekt ist, kann derzeit jedoch nicht bewiesen werden, da frühere Simulationen nicht in der Lage waren, solche komplizierteren Turbulenzmodelle zu behandeln.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass es vor allem zwei Gründe für das Versagen der QLT in ungedämpfter Plasmawellen-Turbulenz gibt: 1. das in der Formulierung der QLT inhärent enthaltene  $90^\circ$ -Problem (siehe hierzu auch Kap. 3), und 2. die in Abschnitt 4.1 beschriebene problematische Einbeziehung insbesondere der Alfvénwellen aufgrund des Ansatzes, dass diese Wellen einerseits ein isotropes Turbulenzspektrum generieren sollen, andererseits jedoch auf die Propagation in zwei Raumrichtungen eingeschränkt wurden. Dem ersten Problem könnte in Prinzip mit einer nichtlinearen Theorie wie der quasilinearen Theorie zweiter Ordnung (Shalchi<sup>87</sup>) begegnet werden; dies würde jedoch zunächst erfordern, dass die Theorie für den Fall einer nicht *slab*-artigen Turbulenzgeometrie formuliert würde. Zur Lösung des zweiten Problems wurden in Abschnitt 4.4 erste Ansätze entwickelt, die – dies wird in zukünftigen Arbeiten untersucht – weiter ausgeführt und auf konkrete Fälle angewendet werden müssten, um zu sehen, inwieweit die Ergebnisse damit besser mit Simulationsergebnissen übereinstimmen.

In Teil II dieser Arbeit wenden wir uns nun der Frage zu, welche Prozesse zur Dämpfung und insbesondere zur Anregung von Plasmawellen beitragen; dies führt auf das weitläufige Gebiet der Plasma-Instabilitäten, insbesondere solche, die durch kollektive Prozesse und durch Anisotropien der gesamten Teilchenpopulationen angeregt werden.

# Teil II

## Das Testwellen-Bild



---

## 5 Kinetische Plasma-Instabilitäten

*Dieses Kapitel gibt nach einem Überblick über den Ursprung der Weibel-Instabilität eine kurze Einführung in die nichtrelativistische Theorie kinetischer Plasma-Instabilitäten. Ausgehend von der Vlasov-Gleichung werden die Dispersionsrelationen für parallele und senkrechte Wellenausbreitung hergeleitet.*

### 5.1 Einleitung

Zusammen mit den – auf dem von Harris<sup>30</sup> eingeführten Konzept des Neutralpunktes im Wellenzahlraum basierenden – Instabilitäten, die wir in den Kapiteln 7 und 8 betrachten werden, stellt die Weibel-Instabilität<sup>113</sup> eine wichtige Klasse von rein anwachsenden, so genannten „aperiodischen“ Plasma-Oszillationen dar. Ohne auf Techniken wie das Nyquist-Diagramm (z. B. Spatschek<sup>97</sup>) zurückgreifen zu müssen, mit denen nur das grundsätzliche Vorhandensein der Instabilität einer gegebenen Verteilungsfunktion bestimmt werden kann, ist es hier möglich, die Wachstumsrate der betrachteten Verteilungsfunktion direkt aus den Dispersionsrelationen abzuleiten. Ursprünglich wurde die Weibel-Instabilität für eine Verteilungsfunktion der Form

$$f_0 \propto \exp \left[ -\frac{v_x^2 + v_y^2}{w_\perp^2} - \frac{v_z^2}{w_\parallel^2} \right] \quad (5.1)$$

hergeleitet, wobei  $w_\perp$  und  $w_\parallel$  die thermischen Geschwindigkeiten bezeichnen. Unter der Voraussetzung  $w_\perp \neq w_\parallel$  beschreibt Gl. (5.1) somit eine Verteilungsfunktion mit stationären Teilchen und anisotropen Temperaturen. Darüber hinaus hat Fried<sup>23</sup> (eine ausführlichere Darstellung findet sich in Schlickeiser<sup>82</sup>) die Methode von Weibel auch auf eine in den Geschwindigkeiten anisotrope Verteilungsfunktion der Form

$$f_0 \propto \delta(v_x) \delta(v_y^2 - a^2) \delta(v_z) \quad (5.2)$$

für ein kaltes Plasma ( $T = 0$ ) angewendet, und dabei ebenfalls anwachsende aperiodische Fluktuationen gefunden. Hier bezeichnet  $\delta(v)$  die Diracsche Delta-Distribution, wohingegen im folgenden Abschnitt  $\delta$  jeweils eine infinitesimale Störung bezeichnet.

Qualitativ läuft dieser Mechanismus folgendermaßen ab: Wir gehen von Elektronen aus, die sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \pm a \hat{\mathbf{e}}_y$  bewegen. Eine anfänglich kleine und in einem quasineutralen Plasma stets vorhandene Störung des Magnetfeldes der Form  $B_z = B_1 e^{ikz}$  verursacht im Zeitintervall  $\delta t$  eine  $x$ -Komponente in der Bewegung der Elektronen mit  $\delta v_x = \pm \delta t \Omega a$ , wobei  $\Omega = eB_z/(m_e c)$  die Gyrofrequenz in der Magnetfeldstörung bezeichnet. Somit tragen die sich in beide Richtungen bewegenden Elektronen gleichermaßen

zum Impulsfluss bzw. zur Spannung  $\partial\langle v_x v_y \rangle / \partial t = -a^2 \Omega$  bei. Dies wiederum verursacht eine durch die Impulserhaltung gegebene Änderung der mittleren Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung  $\partial\langle v_y \rangle / \partial t = -\partial\langle v_x v_y \rangle / \partial x$ . Mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes lässt sich  $\langle v_y \rangle$ , das proportional zur Stromdichte in  $y$ -Richtung ist, durch die Magnetfeldstörung  $B_z$  ausdrücken. Damit erhält man eine Differenzialgleichung  $\partial B_z^2 / \partial t^2 = \Omega^2 a^2 B_z$  mit einer anwachsenden Lösung der Form  $B_z = e^{\Gamma t}$ , wobei  $\Gamma = \omega_p^2 a / c$  die Wachstumsrate beschreibt. Somit wirkt also der durch die Magnetfeldstörung veränderte Impulsfluss auf den Strom in  $y$ -Richtung dergestalt, dass das fluktuierende Magnetfeld verstärkt wird.

In diesen stark vereinfachten Überlegungen sind der Effekt des zeitlich veränderlichen Magnetfeldes (das damit ein elektrisches Feld induziert) sowie thermische Geschwindigkeiten der Teilchen in  $x$ - und  $z$ -Richtung vernachlässigt. Berücksichtigt man dies in einer Verteilungsfunktion der Form  $\delta(v_x^2 - a_1^2) \delta(v_y^2 - a_2^2) \delta(v_z^2 - a_1^2)$ , so ergibt sich Instabilität für den Fall  $a_2 > a_1$ . Mit Hilfe des Nyquist-Diagrammes lässt sich weiterhin nachweisen, dass Instabilität nur für Wellenzahlen  $k < [(a_2/a_1)^2 - 1]^{1/2} \omega_p / a$  möglich ist.

Anschaulich bedeutet dies also, dass sich durch das fluktuierende Magnetfeld Stromfilamente ausbilden, deren induziertes Magnetfeld die ursprünglichen Fluktuationen gerade verstärkt. Durch die anziehende Kraft, die zwei parallel verlaufende Ströme aufeinander ausüben (und die abstoßende Kraft im antiparallelen Fall), fließen im Folgenden die kleinen Filamente zusammen. Letztendlich kommt es zu einer Sättigung der Instabilität, wenn das sich ausbildende Magnetfeld so stark wird, dass die Bewegung der Teilchen senkrecht zu diesem Magnetfeld unterdrückt wird. Eine genauere Analyse der nichtlinearen Bereiche, in denen das Magnetfeld durch das Zusammenfließen der einzelnen Stromfilamente noch anwächst – wenn auch nicht mehr exponentiell – und der Sättigungsmechanismen der Weibel-Instabilität findet sich z. B. in Kato<sup>37</sup>.

## 5.2 Kinetische Vlasov-Theorie

Den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen, die sich an Kapitel 2 aus der Diplomarbeit<sup>102</sup> des Autors anlehnen, bildet wieder die relativistische Vlasov-Gleichung

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (5.3)$$

Im Unterschied zum Vorgehen in Abschnitt 2.2 wird nun eine Linearisierung der Vlasov-Gleichung in der Phasenraum-Verteilungsfunktion  $f_a = f_{a,0} + \delta f_a$  vorgenommen, wobei  $f_0$  eine Gleichgewichts-Verteilungsfunktion und  $\delta f \ll f_0$  eine kleine Störung beschreibt, sowie in den elektrischen und magnetischen Feldern  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  – wobei aufgrund der hohen Leitfähigkeit des interstellaren und intergalaktischen Mediums das elektrische Feld als im Mittel verschwindend angenommen wird. Unter Berücksichtigung der Terme bis zur ersten Ordnung führt dies auf

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{q_a}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x})] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ & = -q_a \left[ \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right] \cdot \frac{\partial f_{a,0}}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Das weitere Vorgehen (für eine ausführliche Herleitung siehe Schlickeiser<sup>80</sup>, Kap. 8) sei hier nur kurz skizziert. Zunächst führt man eine Fourier-Laplace-Transformation der Verteilungsfunktion sowie der elektromagnetischen Felder durch, woraufhin die linearisierte Vlasov-Gleichung die Form

$$(-i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_{a,1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega) = -q_a \left[ \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right] \cdot \frac{\partial f_{a,0}}{\partial \mathbf{p}} \quad (5.5)$$

erhält, wobei  $f_{a,1}$ ,  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{B}_1$  die Fourier-Laplace-Darstellungen der Störungen in der Verteilungsfunktion und in den Feldern bezeichnen.

Löst man Gleichung (5.5) nach  $f_{a,1}$  auf und setzt dies anschließend in das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz,

$$\mathbf{j}_1 = \sum_a n_a q_a \int d^3p \mathbf{v} f_{a,1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{E}_1 \quad (5.6)$$

ein, kann man den Leitfähigkeitstensor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  explizit als Funktion der Hintergrund- bzw. Gleichgewichts-Verteilungsfunktion  $f_0$  berechnen. Dies wurde ursprünglich von Trubnikov<sup>108</sup> hergeleitet.

Das Ergebnis lautet (Schlickeiser<sup>80</sup>)

$$\sigma_{rs}(k_{\parallel}, k_{\perp}, \omega) = \frac{2\pi}{i} \sum_a q_a^2 n_a \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_{rs}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega'_a}, \quad (5.7a)$$

mit

$$T_{rs} = \begin{pmatrix} \frac{n^2 J_n^2(z)}{z^2} v_{\perp} \hat{U} f_{a,0} & \frac{in J_n(z) J'_n(z)}{z} v_{\perp} \hat{U} f_{a,0} & \frac{n J_n^2(z)}{z} v_{\perp} \hat{W} f_{a,0} \\ -\frac{in J_n(z) J'_n(z)}{z} v_{\perp} \hat{U} f_{a,0} & J_n'(z)^2 v_{\perp} \hat{U} f_{a,0} & -i J_n(z) J_n'(z) v_{\perp} \hat{W} f_{a,0} \\ \frac{n J_n^2(z)}{z} v_{\parallel} \hat{U} f_{a,0} & i J_n(z) J_n'(z) v_{\parallel} \hat{U} f_{a,0} & J_n^2(z) v_{\parallel} \hat{W} f_{a,0} \end{pmatrix} \quad (5.7b)$$

und den Differenzialoperatoren

$$\hat{U} = \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma m_a \omega} \left( p_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \right) \quad (5.7c)$$

$$\hat{W} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} - \frac{n\Omega'_a}{\omega p_{\perp}} \left( p_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \right). \quad (5.7d)$$

Hier bezeichnet  $\Omega'_a = \Omega_a/\gamma$  die relativistische Gyrofrequenz.  $J_n(z)$  bezeichnet die Besselfunktion erster Art (s. Anhang C.1) der Ordnung  $n$  mit dem Argument  $z = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega'_a$ , und  $J'_n(z)$  ihre erste Ableitung nach  $z$ . Weiterhin wird für die Verteilungsfunktion vorausgesetzt, dass sie unabhängig vom Azimutwinkel in der Ebene senkrecht zum Hintergrundmagnetfeld (also „gyrotrop“) sei; das bedeutet, die Verteilungsfunktion hat die Form  $f = f(v_{\perp}^2, v_{\parallel})$  und hängt somit nur von den Parallel- und Senkrechtkomponenten des Geschwindigkeits- bzw. des Impulsvektors ab. Dabei gilt  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m$ .

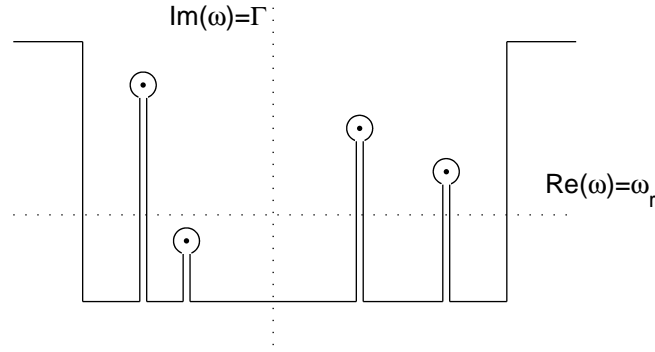


Abbildung 5.1: Die Landau-Kontur, für die der Integrationsweg unter die reelle Achse verschoben wird, wobei er um die Polstellen herumgeführt werden muss. Die Integrationswege hin zu den Polstellen und zurück heben sich dabei gegenseitig auf. Aus der Diplomarbeit<sup>102</sup> des Autors.

Eine weitere Herleitung des relativistischen Leitfähigkeitstensors wurde in Bekefi<sup>2</sup> angegeben und von Schlickeiser<sup>80</sup> modifiziert, um relativistische Effekte wie etwa die relativistische Gyrofrequenz in  $z$  korrekt zu berücksichtigen. Damit fiel der zusätzliche Faktor  $\gamma^{-1}$  in  $T_{rs}$  weg, und im Nenner trat  $\Omega_{a,0}/\gamma$  anstatt  $\Omega_{a,0}$  auf, wie es beides in Bekefi<sup>2</sup> der Fall war (in den dortigen Gleichungen 7.14 und 7.15).

Die inverse Laplace-Transformation ist nun gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} d\omega \bar{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (5.8)$$

Der Vektor  $\mathbf{A}$  ist dabei nur von den anfänglichen Feldern zum Zeitpunkt 0 bestimmt:

$$A_n(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} E_n(\mathbf{k}, 0) - \frac{ic}{\omega^2} \epsilon_{nrs} k_r B_s(\mathbf{k}, 0), \quad (5.9)$$

wobei  $\epsilon_{nrs}$  das Levi-Civita-Symbol (Permutationsoperator) bezeichnet.

Der Integrationsweg  $\mathcal{L}$  entspricht der so genannten *Landau-Kontur* (siehe Abb. 5.1) und ist um die Nullstellen der Determinante des Maxwell-Operators herumzuführen, welcher durch

$$A_{nj} = N^2 \frac{k_n k_j}{k^2} + \delta_{nj}(1 - N^2) + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{nj}, \quad (5.10)$$

definiert ist. Damit lässt sich nun Folgendes zeigen (z. B. Schlickeiser<sup>80</sup>): Die Nullstellen der Determinante des Maxwell-Operators aus Gl. (5.10) entsprechen allen Dispersionsrelationen  $\omega(\mathbf{k})$ , welche die erlaubten Wellenmoden beschreiben. Der Leitfähigkeitstensor ist dabei durch Gleichung (5.7) gegeben.

Da wir in der Situation astrophysikalischer Plasmen im Allgemeinen nicht an Randwerte gebunden sind, nehmen wir den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  als reell an und erhalten damit komplexe Lösungen  $\omega_m(\mathbf{k})$ , für die wir die Notation

$$\omega_m = \Re(\omega_m) + i \cdot \Im(\omega_m) \equiv \omega_{r,m} + i\Gamma_m \quad (5.11)$$



einführen.

Für große Zeiten, also  $t \rightarrow \infty$ , erhält man dann insgesamt für die Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$  eine sinusoidale Oszillation mit exponentiellem Anwachsen (im Falle  $\Gamma_m > 0$ ) oder exponentiellem Abfallen (im Falle  $\Gamma_m < 0$ ) – der sog. *Landau-Dämpfung*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \propto \sum_{m=1}^N \text{Res}_m \cdot \exp[-i\omega_{r,m}(\mathbf{k})t + \Gamma_m(\mathbf{k})t]. \quad (5.12)$$

Dabei bezeichnet

$$\text{Res}_m = i \lim_{\omega \rightarrow \omega_m(\mathbf{k})} [\omega - \omega_m(\mathbf{k})] \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.13)$$

das Residuum von  $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, t)$  an der Stelle  $\omega_m(\mathbf{k})$ .

Interessant sind vor allem die Lösungen  $\Gamma > 0$ , da dies anwachsenden Störungen und somit instabilen Lösungen entspricht – dies werden wir später in den Kapiteln 6-8 noch genauer untersuchen.

## 5.3 Nichtrelativistische Dispersionsrelationen

Im folgenden Kapitel werden wir Dispersionsrelationen für die Grenzfälle paralleler ( $k_\perp = 0$ ) und senkrechter ( $k_\parallel = 0$ ) Wellenausbreitung benötigen. Die Angaben „parallel“ und „senkrecht“ beziehen sich dabei auf die durch das Hintergrundmagnetfeld  $\mathbf{B}_0$  vorgegebene Richtung. In diesem Abschnitt werden wir daher andeuten, wie sich aus dem Maxwell-Operator (5.10) zusammen mit dem Leitfähigkeitstensor aus Gl. (5.7) unter den genannten Annahmen für die Geometrie der Wellenausbreitung relativ einfache Dispersionsgleichungen herleiten lassen.

### 5.3.1 Parallele Wellenausbreitung

Im Fall paralleler Wellenausbreitung gilt  $k_\perp = 0$  und damit gleichzeitig  $z = 0$ . Für die Besselfunktionen in Gl. (5.7) bedeutet dies  $J_n(0) = \delta_{n0}$ , wobei  $\delta$  das Kronecker-Symbol bezeichnet. Damit kann man unmittelbar zeigen (siehe z. B. Stawicki<sup>100</sup>), dass die Determinante des Maxwell-Operators in die Form

$$\det \mathbf{A} = D_\ell D_t^+ D_t^- \quad (5.14)$$

gebracht werden kann, wobei

$$D_\ell = 1 + \frac{2\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp \frac{p_\perp p_\parallel}{\gamma(\omega - k_\parallel v_\parallel)} \frac{\partial f_a}{\partial p_\parallel} \quad (5.15a)$$

die longitudinale und

$$D_t^\pm = 1 - N^2 + \pi \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp \frac{p_\perp^2}{\gamma(\omega - k_\parallel v_\parallel) \pm \Omega_a} \hat{U} f_a \quad (5.15b)$$

die beiden transversalen elektromagnetischen Moden bezeichnet. Der Differenzialoperator  $\hat{U}$  ist dabei durch

$$\hat{U} = \omega \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k \left( v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) = (\omega - kv_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + kv_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \quad (5.16)$$

gegeben; weiterhin bezeichnet  $\Omega_a$  die nichtrelativistische Gyrofrequenz.

Genauer gesagt werden durch  $D_t^+$  und  $D_t^-$  zirkular polarisierte elektromagnetische Wellen mit rechtshändiger ( $\delta E_x/\delta E_y = -i$ ) und linkshändiger ( $\delta E_x/\delta E_y = +i$ ) Polarisation beschrieben (vergleiche z. B. Davidson<sup>16</sup>).

Im Falle nichtrelativistischer Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten, also  $\gamma \simeq 1$ , wobei  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  den relativistischen Lorentz-Faktor bezeichnet, lassen sich die Dispersionsrelationen noch weiter vereinfachen; zudem ist es zweckmäßig, statt Impuls- wieder Geschwindigkeitskoordinaten zu verwenden. Dies führt auf die Dispersionsrelationen (6.5a) und (6.5b), mit denen wir in Abschnitt 6.2 das Verhalten einer Gegenstrom-Verteilungsfunktion untersuchen werden.

### 5.3.2 Senkrechte Wellenausbreitung

Ist man stattdessen an Wellenausbreitung senkrecht zu  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$  interessiert, so ist man aufgrund der gyrotropen Situation, d. h. dass die Hintergrund-Verteilungsfunktion  $f_0$  nicht vom Winkel um die  $z$ -Achse abhängt, frei darin, den Wellenvektor als in  $x$ -Richtung liegend anzunehmen, also  $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_x$ . Zusammen mit der Annahme eines verschwindenden Teilchenflusses in  $z$ -Richtung – darauf werden wir in Abschnitt 6.4 noch genauer eingehen – führt dies direkt auf  $\Lambda_{xz} = \Lambda_{zx} = \Lambda_{yz} = \Lambda_{zy} = 0$  (siehe z. B. Davidson<sup>16</sup>). Der Maxwell-Operator hat damit nun die Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} D_x & \Lambda_{xy} & 0 \\ \Lambda_{yx} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

wobei, wie wir noch zeigen werden, die Nicht-Diagonalelemente  $\Lambda_{xy}$  und  $\Lambda_{yx}$  unter bestimmten Bedingungen ebenfalls vernachlässigt werden können.

In Abschnitt 6.4 werden wir nun der Reihe nach die verschiedenen Dispersionsrelationen untersuchen, die sich aus der Determinante des Maxwell-Operators aus Gl. (5.17) ergeben. Wir werden zeigen, dass diese von der Form  $D_z = 0$  (die ordentliche Wellenmode bzw. „ordinary-wave mode“),  $D_x = 0$  (die Bernstein-Wellenmode), und  $D_y = 0$  (die außerordentliche elektromagnetische Wellenmode bzw. „extra-ordinary electromagnetic wave mode“) sind. Die beiden letzteren sind dabei jedoch nur näherungsweise für den Fall eines dichten bzw. dünnen Plasmas – letzteres dann in Verbindung mit hochfrequenten Oszillationen – gültig.

---

# 6 Magnetisierte Gegenstrom-Plasmen

*In diesem Kapitel wird die Instabilität von Maxwell'schen Gegenstrom-Plasmen für die beiden Fälle der Wellenausbreitung parallel und senkrecht zu einem homogenen Hintergrundmagnetfeld untersucht. Dies ist eine Fortführung der bereits in Kapitel 4 der Diplomarbeit<sup>102</sup> des Autors behandelten nichtrelativistischen, unmagnetisierten Gegenstrom-Plasmen.*

## 6.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden mit Hilfe der in Abschnitt 5.3 des vorangegangenen Kapitels hergeleiteten nichtrelativistischen Dispersionsrelationen Wachstums- und Dämpfungsraten in Gegenstrom-Plasmen berechnet; untersucht wird dabei die Wellenausbreitung parallel und senkrecht zu einem räumlich homogenen, als in  $z$ -Richtung liegend angenommenen Hintergrundmagnetfeld  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ . Aus mathematischen Gründen werden dabei für die parallele und die senkrechte Wellenausbreitung gänzlich unterschiedliche Wege gewählt, die sich in der Formulierung der Dispersionsrelationen mit Hilfe der Plasma-Dispersionsfunktion von Fried und Conte<sup>24</sup> einerseits und der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_2$  andererseits (s. Anhang C.6) widerspiegeln.

Wir betrachten eine Verteilungsfunktion, die in  $x$ - und  $y$ -Richtung Maxwell'sch ist, in  $z$ -Richtung dagegen aus zwei gegenströmenden Maxwell-Verteilungen unterschiedlicher Temperaturen und unterschiedlicher relativer Intensitäten besteht,

$$f_a(v_\perp^2, v_\parallel) = C e^{-v_\perp^2/w_\perp^2} \left[ \varepsilon e^{-(v_\parallel - v_r)^2/w_r^2} + \varepsilon' e^{-(v_\parallel + v_\ell)^2/w_\ell^2} \right], \quad (6.1)$$

wobei wir Polarkoordinaten verwendet haben gemäß

$$(v_x, v_y, v_z) = (v_\perp \cos \phi, v_\perp \sin \phi, v_\parallel). \quad (6.2)$$

Diese Verteilungsfunktion ist gyrotrop, also nicht vom Azimutwinkel  $\phi$  abhängig. Der Index  $a$  bezeichnet die Teilchensorte; wir werden ihn in den meisten Fällen jedoch der Übersichtlichkeit halber nicht anschreiben. In Gl. (6.1) hängen im Allgemeinen sowohl die Normierungskonstante  $C$ , die thermischen Geschwindigkeiten  $w_\parallel$  und  $w_\perp$  wie auch die relativen Intensitäten  $\varepsilon$  und die Strömungsgeschwindigkeiten  $v_r$  und  $v_\ell$  von  $a$  ab.

Die thermischen Geschwindigkeiten sind durch

$$w_\perp = \sqrt{\frac{2 k_B T_\perp}{m_\perp}} \quad (6.3a)$$

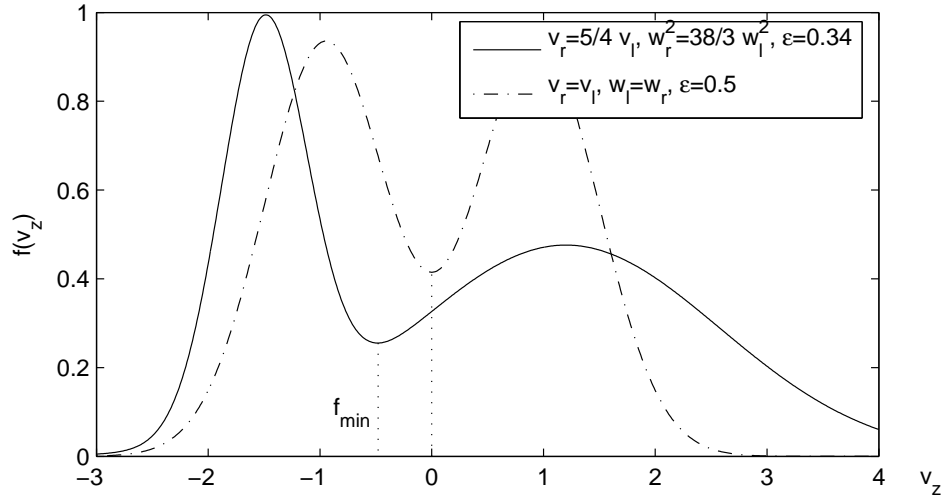


Abbildung 6.1: Zwei Beispiele für die nichtrelativistische Maxwell'sche Gegenstrom-Verteilungsfunktion aus Gl. (6.1), von denen eine symmetrisch ist (Strichpunkt-Linie), während die andere aus einer wärmeren und einer kälteren Komponente besteht. Die Grafik zeigt die Projektion der Verteilungsfunktion entlang der  $v_z$ -Achse.

$$w_{\ell,r} = \sqrt{\frac{2 k_B T_{\ell,r}}{m_{\ell,r}}} \quad (6.3b)$$

gegeben.

Genau wie die Strömungsgeschwindigkeiten können die thermischen Geschwindigkeiten der gegenströmenden Komponenten unterschiedlich sein; dabei muss jedoch die grundsätzliche Ladungsneutralität gewährleistet bleiben. Im Prinzip ist die Zusammensetzung der Strömungen aber beliebig – es ist nicht einmal notwendig, das Ruhesystem der Strömungen zu verwenden. Ist eine der beiden Strömungsgeschwindigkeiten gleich null, führt dies auf *Bump-on-tail*-Verteilungen<sup>a</sup> und Strömungs-Instabilitäten. Falls beide Strömungsgeschwindigkeiten verschwinden, liegt der spezielle Fall einer bi-Maxwell-Verteilungsfunktion vor, welche auf die klassische Weibel-Instabilität führt. Da in diesem Fall kein Gegenstrom mehr vorliegt, ist es zweckmäßig, nur noch einen der Terme in der eckigen Klammer in Gl. (6.1) zu behalten.

Wichtig ist es noch zu bemerken, dass die hier vorgestellte Untersuchung nur im nichtrelativistischen Bereich gültig ist – Strömungs- und thermische Geschwindigkeiten müssen daher im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit klein sein.

Die Normierungskonstante  $C$  ergibt sich zu

$$C^{-1} = \pi^{3/2} w_{\perp}^2 (\varepsilon w_r + \varepsilon' w_{\ell}) \equiv \pi^{3/2} w_{\perp}^2 \hat{w}, \quad (6.4)$$

wobei wir  $\hat{w}$  als die Summe der parallelen thermischen Geschwindigkeiten eingeführt haben, gewichtet mit den relativen Intensitäten der beiden Strömungskomponenten. Diese relative Intensität der beiden gegenströmenden Komponenten ist durch den Faktor  $\varepsilon$

<sup>a</sup>sinngemäß: „Erhebung auf dem Ausläufer“, gemeint sind breite Verteilungen, die auf ihrem auslaufenden Ende eine Erhebung aufweisen, so dass dort lokal eine invertierte Verteilung vorliegt.

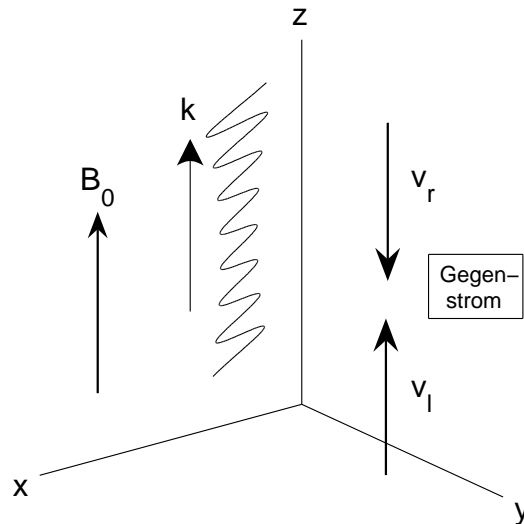


Abbildung 6.2: Die Geometrie der untersuchten Situation, bei der Wellenausbreitung, Hintergrundmagnetfeld und Gegenstrom alle parallel in  $z$ -Richtung angeordnet sind.

beschrieben, wobei wir aus Normierungsgründen  $\varepsilon \in [0, 1]$  annehmen und  $\varepsilon' \equiv 1 - \varepsilon$  definieren. Für beispielsweise  $\varepsilon = 1$  gibt es also nur noch eine strömende Komponente; die Dispersionsrelationen, die in diesem Kapitel hergeleitet werden, sind jedoch auch dann noch immer gültig.

Die Verteilungsfunktion aus Gl. (6.1) ist in Abb. 6.1 dargestellt. Die durchgezogene Linie zeigt eine aus zwei Komponenten unterschiedlicher Temperatur, unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeiten und unterschiedlicher relativer Intensitäten bestehende Verteilungsfunktion. Im Gegensatz dazu zeigt die Strichpunkt-Linie eine symmetrische Verteilungsfunktion, in der alle genannten Werte jeweils gleich sind. Im Falle paralleler Wellenausbreitung sind sowohl symmetrische als auch nicht-symmetrische Verteilungsfunktionen gestattet; für senkrechte Wellenausbreitung (s. Abschnitt 6.4) ist dagegen im Rahmen des hier beschriebenen Vorgehens nur der symmetrische Fall zulässig, da ansonsten die Herleitungen nicht in einer vergleichsweise einfachen Form erfolgen können.

## 6.2 Parallele Wellenausbreitung

In diesem Abschnitt betrachten wir parallele Wellenausbreitung in Bezug auf ein homogenes Hintergrundmagnetfeld  $\mathbf{B}_0$  d. h.  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ . Gemäß unseres Ansatzes für die Verteilungsfunktion liegt der Gegenstrom also in  $z$ -Richtung. Daher sind alle drei die Geometrie des Systems bestimmenden Richtungen – Wellenausbreitung, Hintergrundmagnetfeld und Gegenstrom – parallel; die Parallelität von Hintergrundmagnetfeld und Gegenstrom ist gleichzeitig auch die wahrscheinlichste Geometrie, da die Teilchen bevorzugt entlang magnetischer Feldlinien strömen. Die Geometrie ist in Abb. 6.2 illustriert.

Für Wellenausbreitung parallel zum Hintergrundmagnetfeld haben wir die nichtrelativistischen Dispersionsrelationen der longitudinalen und transversalen Moden bereits in

Abschnitt 5.3 hergeleitet. Sie lauten

$$D_{\ell,\infty} = 1 + \frac{2\pi}{\omega} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} \frac{\partial f_a}{\partial v_{\parallel}} = 0 \quad (6.5a)$$

für die longitudinale Mode und für die beiden transversalen Moden:

$$D_{t,\infty}^{\pm} = 1 - N^2 + \frac{\pi}{\omega^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{v_{\perp}^2}{\omega - kv_{\parallel} \pm \Omega_a} \hat{U} f_a = 0. \quad (6.5b)$$

Dabei bezeichnet

$$\Omega_a = \frac{q_a B_0}{m_a c} \quad (6.6)$$

die nichtrelativistische Gyrofrequenz und der Differentialoperator  $\hat{U}$  ist durch

$$\hat{U} = \omega \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k \left( v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) = (\omega - kv_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + kv_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \quad (6.7)$$

gegeben.

Darüber hinaus bezeichnet der Index  $\infty$  den asymptotischen Fall  $c \rightarrow \infty$ , den wir als erfüllt voraussetzen.

Von Schaefer-Rolffs und Schlickeiser<sup>78</sup> ist bereits für die Dispersionsrelationen einer bi-Maxwellschen Verteilungsfunktion gezeigt worden, dass es im nichtrelativistischen Grenzfall keine signifikanten Unterschiede zwischen kovarianten und nicht-kovarianten Rechnungen gibt. Daher beschränken wir unsere Rechnungen auf den Fall nicht-kovarianter Dispersionsrelationen mit nichtrelativistischen Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten.

Um die Dispersionsrelationen (6.5a) und (6.5b) berechnen zu können, benötigen wir die partiellen Ableitungen der Verteilungsfunktion (6.1):

$$\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = -2C e^{-v_{\parallel}^2/w_{\parallel}^2} \left[ \varepsilon \frac{v_{\parallel} - v_r}{w_r^2} e^{-(v_{\parallel} - v_r)^2/w_r^2} + \varepsilon' \frac{v_{\parallel} + v_{\ell}}{w_{\ell}^2} e^{-(v_{\parallel} + v_{\ell})^2/w_{\ell}^2} \right] \quad (6.8a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} = -2C \frac{v_{\perp}}{w_{\perp}^2} e^{-v_{\perp}^2/w_{\perp}^2} \left[ \varepsilon e^{-(v_{\parallel} - v_r)^2/w_r^2} + \varepsilon' e^{-(v_{\parallel} + v_{\ell})^2/w_{\ell}^2} \right]. \quad (6.8b)$$

Mit diesen Voraussetzungen sind wir nun imstande, die Dispersionsrelationen auszuwerten.

### 6.2.1 Die longitudinale Mode

Setzt man die Gleichungen (6.8a) und (6.8b) in die Dispersionsfunktion für die longitudinale Mode aus Gl. (6.5a) ein, so ergibt sich

$$D_{\ell,\infty} = 1 - \frac{4\pi}{\omega} C \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} e^{-v_{\perp}^2/w_{\perp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{v_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}}$$

$$\times \left[ \varepsilon \frac{v_{\parallel} - v_r}{w_r^2}, e^{-(v_{\parallel} - v_r)^2/w_r^2} + \varepsilon' \frac{v_{\parallel} + v_{\ell}}{w_{\ell}^2} e^{-(v_{\parallel} + v_{\ell})^2/w_{\ell}^2} \right] \quad (6.9)$$

Nach einer etwas länglichen, aber einfach durchzuführenden Rechnung erhält man die folgende Form für die Dispersionsrelation

$$D_{\ell,\infty}^{\pm} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{k^2 \hat{w}} \left[ \frac{\varepsilon}{w_r} Z' \left( \frac{\omega - v_r k}{k w_r} \right) + \frac{\varepsilon'}{w_{\ell}} Z' \left( \frac{\omega + v_{\ell} k}{k w_{\ell}} \right) \right] = 0. \quad (6.10)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $Z(f)$  die wohlbekannte Plasma-Dispersionsfunktion von Fried und Conte<sup>24</sup>, welche definiert ist durch

$$Z(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x - f} = 2i e^{-f^2} \int_{-\infty}^{if} dx e^{-x^2}, \quad (6.11)$$

wobei die erste Form nur im Falle  $\Im m(f) > 0$  gültig ist. Die Ableitung der  $Z$ -Funktion nach ihrem Argument ist gegeben durch

$$Z'(f) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-x^2}}{x - f}. \quad (6.12)$$

Sind die thermischen Geschwindigkeiten der beiden gegenströmenden Komponenten gleich, so reduziert sich Gl. (6.10) zu

$$D_{\ell,\infty}^{\pm} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{k^2 w_{\parallel,a}^2} \left[ \varepsilon Z' \left( \frac{\omega - v_r k}{k w_{\parallel,a}} \right) + \varepsilon' Z' \left( \frac{\omega + v_{\ell} k}{k w_{\parallel,a}} \right) \right] = 0. \quad (6.13)$$

Gleichung (6.13) ist bereits von Tautz und Schlickeiser<sup>103</sup> hergeleitet worden, allerdings nur für den Fall gleicher Strömungsgeschwindigkeiten, d. h.  $v_r = v_{\ell} \equiv v_0$ .

## 6.2.2 Die transversalen Moden

Die Dispersionsrelationen der beiden transversalen Moden haben die Form

$$D_{t,\infty}^{\pm} = 1 - N^2 + \pi \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{v_{\perp}^2}{\omega - k v_{\parallel} \pm \Omega} \hat{U} f = 0, \quad (6.14)$$

wobei wir die Summe über die Teilchensorten der Plasmafrequenz abgekürzt haben durch  $\omega_0^2 \equiv \sum_a \omega_{p,a}^2$  und den Index  $a$  im Folgenden weglassen. Einige einfache Umformungen der Dispersionsrelation führen auf

$$D_{t,\infty}^{\pm} = 1 - N^2 + \pi \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (k \mathcal{A} + \mathcal{B}) = 0, \quad (6.15)$$

wobei wir

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty dv_\perp v_\perp^3 \int_{-\infty}^\infty \frac{dv_\parallel}{\omega - kv_\parallel \pm \Omega} \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} \quad (6.16)$$

$$\mathcal{B} = \int_0^\infty dv_\perp v_\perp^2 \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \frac{\omega - kv_\parallel}{\omega - kv_\parallel \pm \Omega} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \quad (6.17)$$

eingeführt haben.

Beide Integrale können mit Hilfe der Plasma-Dispersionsfunktion gelöst werden, und wir erhalten damit für das erste Integral:

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2\pi^{3/2}k} \frac{w_\perp^2}{\hat{w}} \left[ \frac{\varepsilon}{w_r} Z'(f_1^\pm) + \frac{\varepsilon'}{w_\ell} Z'(f_2^\pm) \right], \quad (6.18)$$

mit

$$f_1^\pm = \frac{\omega - kv_r \pm \Omega}{kw_r} \quad (6.19a)$$

$$f_2^\pm = \frac{\omega + kv_\ell \pm \Omega}{kw_\ell}. \quad (6.19b)$$

Für das zweite Integral ergibt sich

$$\mathcal{B} = \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{w_r}{\hat{w}} \left[ \frac{1}{2} Z'(f_1^\pm) + \frac{\omega - kv_r}{kw_r} Z(f_1^\pm) \right] + \frac{\varepsilon'}{\pi} \frac{w_\ell}{\hat{w}} \left[ \frac{1}{2} Z'(f_2^\pm) + \frac{\omega + kv_\ell}{kw_\ell} Z(f_2^\pm) \right]. \quad (6.20)$$

Verwenden wir die folgende Eigenschaft der Dispersionsfunktion,

$$\frac{1}{2} Z'(f) = -[fZ(f) + 1], \quad (6.21)$$

so lässt sich das Integral aus Gl. (6.20) umformen zu

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{\pi\hat{w}} \left[ \hat{w} \pm \frac{\Omega}{k} (\varepsilon Z(f_1) + \varepsilon' Z(f_2)) \right]. \quad (6.22)$$

Stellen wir nun alle Terme zusammen, so erhalten wir schließlich für die beiden transversalen Dispersionsrelationen

$$\begin{aligned} D_{t,\infty}^\pm &= 1 - \frac{c^2k^2 + \omega_0^2}{\omega^2} \mp \frac{\omega_0^2}{\omega^2\hat{w}} \frac{\Omega}{k} \left[ \varepsilon Z \left( \frac{\omega - kv_r \pm \Omega}{kw_r} \right) + \varepsilon' Z \left( \frac{\omega + kv_\ell \pm \Omega}{kw_\ell} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \frac{w_\perp^2}{\hat{w}} \left[ \frac{\varepsilon}{w_r} Z' \left( \frac{\omega - kv_r \pm \Omega}{kw_r} \right) + \frac{\varepsilon'}{w_\ell} Z' \left( \frac{\omega + kv_\ell \pm \Omega}{kw_\ell} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Natürlich muss auch diese Gleichung über die Teilchensorten  $a$  summiert werden, was hier zugunsten besserer Übersichtlichkeit weggelassen wurde. Das bedeutet, dass die volle Dispersionsrelation geschrieben werden kann als

$$D_{t,\infty}^\pm = 1 - \frac{c^2k^2 + \sum_a \omega_{p,a}^2}{\omega^2} + \sum_a D(\omega_{p,a}^2, \varepsilon, w_r, w_\ell, w_\perp, \Omega_a) = 0, \quad (6.24)$$



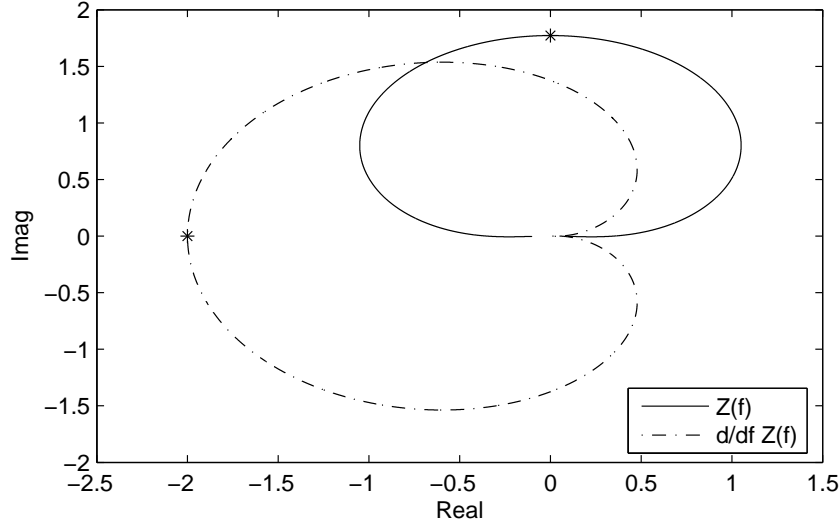


Abbildung 6.3: Die *two-pole*-Approximation der Plasma-Dispersionsfunktion. Die mit einem Stern markierten Punkte bezeichnen  $Z(0)$  und  $Z'(0)$ .

wobei  $D$  durch den dritten und vierten Term in Gl. (6.23) gegeben ist.

Im Falle eines nicht vorhandenen Hintergrundmagnetfeldes,  $B_0 = \Omega = 0$ , verschwindet der dritte Term in Gl. (6.23) komplett, und  $D_{t,\infty}^\pm$  ergibt

$$D_{t,\infty}^\pm = 1 - \frac{c^2 k^2 + \omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \frac{w_\perp^2}{\hat{w}} \left[ \frac{\varepsilon}{w_r} Z' \left( \frac{\omega - kv_r}{kw_r} \right) + \frac{\varepsilon'}{w_\ell} Z' \left( \frac{\omega + kv_\ell}{kw_\ell} \right) \right] = 0. \quad (6.25)$$

Nehmen wir zusätzlich noch an, dass die thermischen Geschwindigkeiten der beiden gegenströmenden Komponenten gleich seien,  $w_r = w_\ell \equiv w_\parallel$ , so erhalten wir für die Dispersionsrelation  $D_{t,\infty}$ , wobei wir auch hier die Summation über  $a$  weglassen:

$$D_{t,\infty} = 1 - \frac{c^2 k^2 + \omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \frac{w_\perp^2}{w_\parallel^2} \left[ \varepsilon Z' \left( \frac{\omega - kv_r}{kw_\parallel} \right) + \varepsilon' Z' \left( \frac{\omega + kv_\ell}{kw_\parallel} \right) \right] = 0. \quad (6.26)$$

Setzen wir für die Strömungsgeschwindigkeiten wieder  $v_r = v_\ell = v_0$  voraus, so stimmt dies mit dem Resultat von Tautz und Schlickeiser<sup>103</sup> überein.

Andererseits ergibt sich für ein nicht-verschwindendes Hintergrundmagnetfeld unter der Annahme isotroper Temperaturen (d. h.  $w_\parallel = w_\perp$ ), und einer Gegenstromgeschwindigkeit  $v_\ell = v_r = v_0 = 0$ , aus Gl. (6.23)

$$D_{t,\infty}^\pm = 1 - N^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} Z'(f^\pm) \right] \mp \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\Omega}{kw_\parallel} Z(f^\pm) \quad (6.27a)$$

$$= 1 - N^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega} \frac{1}{kw_\parallel} Z(f^\pm), \quad (6.27b)$$

mit

$$f^\pm = \frac{\omega \pm \Omega}{kw_\parallel}. \quad (6.28)$$

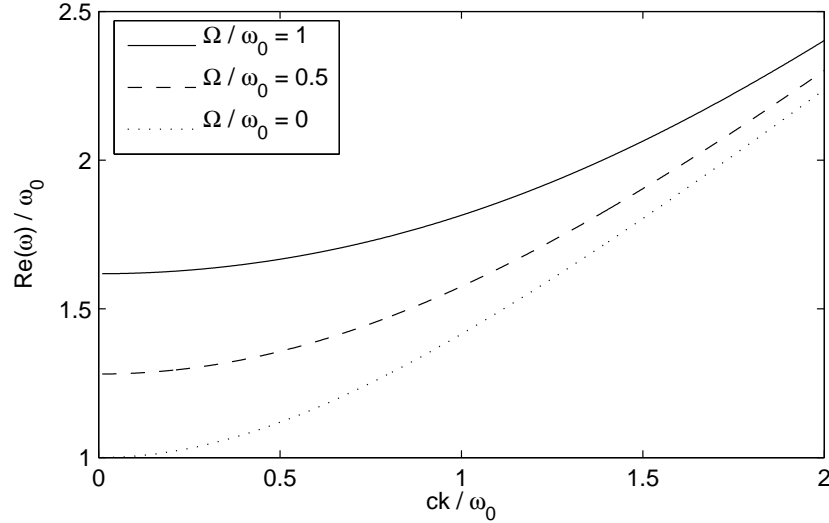


Abbildung 6.4: Realteil  $\Re\omega(k)$ , berechnet aus der Dispersionsrelation (6.30) für verschiedene Werte des Hintergrundmagnetfeldes.

Dies ist das Standard-Ergebnis der transversalen Moden im Falle paralleler Wellenausbreitung in einem magnetisierten Plasma mit isotropen Temperaturen (siehe z.B. Brambilla<sup>9</sup>).

### 6.3 Numerische Auswertung

In diesem Abschnitt werden wir aus der transversalen Dispersionsrelation, Gl. (6.23), für konkrete Werte der Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit die Frequenz  $\omega(k)$  numerisch berechnen. Dafür normieren wir zunächst die thermischen Geschwindigkeiten und die Strömungsgeschwindigkeiten auf die Lichtgeschwindigkeit (bezeichnet durch eine Tilde), und definieren  $w^2 = w_{\perp}^2/w_{\parallel}^2 = T_{\perp}/T_{\parallel}$ . Weiterhin führen wir die dimensionslosen Variablen ein

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (6.29a)$$

$$\kappa = \frac{ck}{\omega_0} \quad (6.29b)$$

$$\mathfrak{U} = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (6.29c)$$

mit deren Hilfe wir die Dispersionsrelation (6.23) ausdrücken können als

$$x^2 = 1 + \kappa^2 \pm \frac{\mathfrak{U}}{\tilde{w}_{\parallel}\kappa} [\varepsilon Z(f_1) + \varepsilon' Z(f_2)] + \frac{w^2}{2} [\varepsilon Z'(f_1) + \varepsilon' Z'(f_2)], \quad (6.30)$$

wobei nun  $f_{1,2}^{\pm}$  gegeben sind durch

$$f_1^{\pm} = \frac{x - \kappa\tilde{v}_0 \pm \mathfrak{U}}{\kappa\tilde{w}_{\parallel}} \quad (6.31a)$$

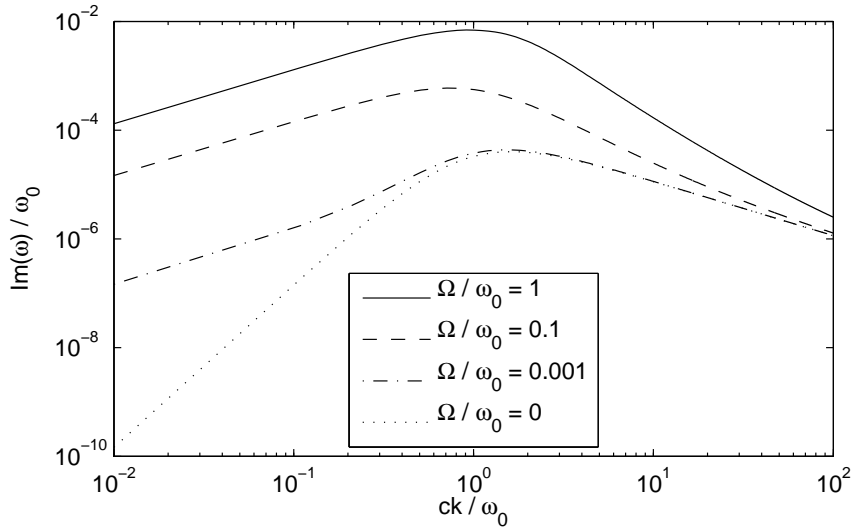


Abbildung 6.5: Imaginärteil  $\Im \omega(k)$ , berechnet aus der Dispersionsrelation (6.30) für verschiedene Werte des Hintergrundmagnetfeldes.

$$f_2^\pm = \frac{x + \kappa \tilde{v}_0 \pm \tilde{U}}{\kappa \tilde{w}_\parallel}. \quad (6.31b)$$

Zur Vereinfachung nehmen wir für die beiden gegenströmenden Komponenten gleiche relative Intensitäten ( $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ) und gleiche thermische Geschwindigkeiten ( $v_0 = 0,1 c$ ) an.

Im Allgemeinen ist man daran interessiert, die reellen und imaginären Lösungen der Dispersionsrelation getrennt zu finden, da diese Oszillationsfrequenzen (reelle Lösung) sowie Wachstums- bzw. Dämpfungsraten (imaginäre Lösungen) beschreiben. Jedoch liefert die Plasma-Dispersionsfunktion für reelle (d. h.  $x$  rein reell) und komplexe (d. h.  $x$  rein imaginär) Argumente Werte mit nicht-verschwindendem Imaginärteil. Daher muss man die Dispersionsrelation als implizite Gleichung für die normierte komplexe Frequenz  $x(\kappa) \in \mathbb{C}$  lösen und anschließend Real- und Imaginärteil betrachten. Abb. 6.3 zeigt die Plasma-Dispersionsfunktion und ihre Ableitung für reelle Argumente; beide nähern wir durch die verbesserte *two-pole*-Approximation von Martín und González<sup>53</sup>, die durch

$$Z(f) = \frac{b}{a - f} - \frac{b^*}{a^* + f} \quad (6.32)$$

gegeben ist, mit

$$a = \frac{\sqrt{23\pi - 32 - 4\pi^2}}{2(4 - \pi)} - i \frac{\sqrt{\pi}}{2(4 - \pi)} \simeq 0,5138 - 1,0324 i \quad (6.33a)$$

$$b = \frac{1}{2} + i \frac{2\pi - 5}{2} \sqrt{\frac{\pi}{23\pi - 32 - 4\pi^2}} \simeq 0,5 + 1,2891 i. \quad (6.33b)$$

Die resultierenden Real- und Imaginärteile von  $x(\kappa)$  sind in den Abbildungen 6.4 und 6.5 gezeigt. Der Realteil beschreibt dabei die Wellenfrequenz, während der Imaginärteil der Frequenz die jeweiligen Wachstums- und Dämpfungsraten bezeichnet.

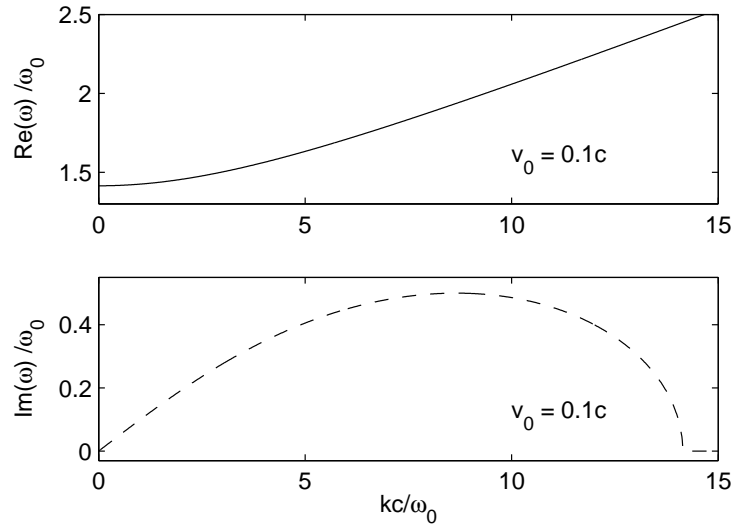


Abbildung 6.6: Real- und Imaginärteil der Dispersionsrelation  $\omega(k)$ , berechnet mit einer Zweistrom-Verteilungsfunktion mit Driftgeschwindigkeit  $v_0 = 0,1c$ . Dies stellt die klassische magnetohydrodynamische „Zweistrom-Instabilität“ dar.

Wie man aus Abb. 6.4 ersehen kann, erzeugt die mit einer Gegenstrom-Verteilungsfunktion berechnete Dispersionsrelation hochfrequente elektromagnetische Plasmawellen, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus PIC-Simulationen von Saito und Sakai<sup>75</sup>.

Zum Vergleich zeigt Abb. 6.6 die Frequenz und Wachstumsrate eines Systems zweier kalter Plasmaströme, berechnet aus der MHD-Dispersionsrelation (vgl. auch Liu<sup>48</sup>)

$$1 - (x + \kappa \tilde{v}_0)^{-2} - (x - \kappa \tilde{v}_0)^{-2} = 0, \quad (6.34)$$

welche zwei imaginäre Lösungen besitzt, falls  $\kappa < \sqrt{2}/\tilde{v}_0$ . Der direkte Vergleich der Abbildungen 6.4 und 6.6 ist jedoch nicht möglich, da Gl. (6.34) aus einem eindimensionalen Problem resultiert, wohingegen unsere Dispersionsrelation (6.30) dreidimensional ist und Weibel-ähnliche stabilisierende Effekte mit einschließt (siehe z. B. Humphries<sup>33</sup>, Kap. 14).

## 6.4 Senkrechte Wellenausbreitung

Um die einfache Form des Maxwell-Operators aus Gl. (5.17) in Abschnitt 5.3.2 und somit die drei relativ einfachen Dispersionsrelationen zu erhalten, handeln wir uns die Forderung ein, dass der mittlere Teilchenfluss in  $z$ -Richtung verschwinden muss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} v_{\parallel} f_a(v_{\parallel}, v_{\perp}^2) \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.35)$$

Aufgrund der einschränkenden Bedingung (6.35) müssen die relativen Intensitäten sowie die thermischen Geschwindigkeiten und die Strömungsgeschwindigkeiten der beiden

gegenströmenden Komponenten gleich sein. Die Gegenstrom-Verteilungsfunktion hat damit die Form

$$f_a(v_\perp^2, v_\parallel) = C e^{-v_\perp^2/w_{\perp,a}^2} \left[ e^{-(v_\parallel - v_0)^2/w_{\parallel,a}^2} + e^{-(v_\parallel + v_0)^2/w_{\perp,a}^2} \right], \quad (6.36)$$

mit der Normierungskonstante

$$C = (2\pi^{3/2} w_{\perp,a}^2 w_{\parallel,a})^{-1}. \quad (6.37)$$

Zur späteren Verwendung führen wir noch die beiden Abkürzungen ein

$$f_\parallel = e^{-(v_\parallel - v_0)^2/w_\parallel^2} + e^{-(v_\parallel + v_0)^2/w_\parallel^2}, \quad (6.38a)$$

$$f_\perp = e^{-v_\perp^2/w_\perp^2}. \quad (6.38b)$$

Obwohl die Verteilungsfunktion (6.36) im Vergleich zu Gl. (6.1) aus dem Abschnitt 6.2 weit weniger allgemein ist, so ist diese Einschränkung dennoch unausweichlich, da die Rechnungen sonst in einer relativ einfachen Form nicht durchführbar wäre.

In den folgenden Abschnitten werden wir der Reihe nach die drei Dispersionsrelationen berechnen, die sich für senkrechte Wellenausbreitung unter gewissen Voraussetzungen aufstellen lassen.

### 6.4.1 Dispersionsrelation der gewöhnlichen Wellenmode

Die Dispersionsrelation der gewöhnlichen Wellenmode ist die einzige, die für die Untersuchung von Gegenstrom-Plasmen von Bedeutung ist. Wie wir noch zeigen werden, sind die beiden anderen Wellenmoden von der Anwesenheit sowohl des Gegenstroms wie auch einer Temperatur-Anisotropie nicht beeinflusst.

Die Dispersionsrelation der gewöhnlichen Wellenmode,  $D_z = 0$ , ist gegeben durch (s. Davidson<sup>16</sup>):

$$D_z = 1 - \frac{c^2 k^2 + \sum_a \omega_{p,a}^2}{\omega^2} + \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{n \Omega_a J_n^2(z_a)}{\omega - n \Omega_a} \frac{v_\parallel^2}{v_\perp} \frac{\partial f_a}{\partial v_\perp} = 0, \quad (6.39)$$

wobei

$$z_a = \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_a} \quad (6.40)$$

und  $J_n(z)$  die Besselfunktion erster Art der Ordnung  $n$  bezeichnen (s. Anhang C.1). Die Polarisation dieser Wellenmode ist transversal, da  $\mathbf{k} = k_\perp \hat{\mathbf{e}}_x$  und  $\delta \mathbf{E} = \delta E_z \hat{\mathbf{e}}_z$ . Dies ist der Grund dafür, dass diese Wellenmode den Gegenstrom „bemerkt“ – da Gegenstrom und das Hintergrund-Magnetfeld in  $z$ -Richtung liegen, gemeinsam mit den elektrischen Fluktuationen der Welle. Die Geometrie dieser Wellenmode ist in Abb. 6.7 veranschaulicht.

Bezüglich der unendlichen Reihe verwenden wir (s. beispielsweise Lerche<sup>45, 47</sup>)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n J_n^2(z)}{n - \alpha} = 1 + \alpha S(\alpha, z), \quad (6.41)$$

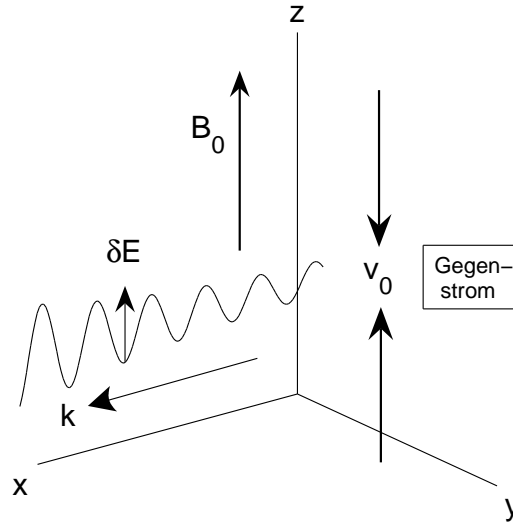


Abbildung 6.7: Die Geometrie der gewöhnlichen Wellenmode, wobei die Welle in  $x$ -Richtung propagiert, während Hintergrundmagnetfeld, Gegenstrom und die Fluktuationen des elektrischen Feldes alle in  $z$ -Richtung liegen.

wobei wir  $\alpha = \omega/\Omega_a$  eingeführt haben sowie

$$S(\alpha, z) = -\frac{\pi}{\sin(\pi z)} J_{-\alpha}(z) J_{\alpha}(z). \quad (6.42)$$

Die Vereinfachung dieses Ausdruckes, das Abkürzung der Summe über die Plasmafrequenzen gemäß  $\omega_0^2 = \sum_a \omega_{p,a}^2$  sowie die Verwendung von Zylinderkoordinaten führen auf

$$D_z = 1 - \tilde{N}^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int d^3v [1 + \alpha S(\alpha, z)] \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}, \quad (6.43)$$

wobei der Index  $a$  unterdrückt wurde, und worin

$$\tilde{N}^2 = \frac{c^2 k^2 + \sum_a \omega_{p,a}^2}{\omega^2}. \quad (6.44)$$

einen modifizierten Brechungsindex bezeichnet. Setzen wir die Gegenstrom-Verteilungsfunktion aus Gl. (6.36) ein, so erhalten wir mit  $\xi_a = w_{\perp,a} k_{\perp} / \Omega_a$ :

$$D_z = 1 - \tilde{N}^2 - 2\pi C \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} v_{\parallel}^2 f_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} [1 + \alpha S(\alpha, z)] \frac{\partial f_{\perp}}{\partial v_{\perp}} \quad (6.45a)$$

$$= 1 - \tilde{N}^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel}^2 + 2v_0^2}{w_{\perp}^2} \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\xi^2} \int_0^{\infty} dz z e^{-z^2/\xi^2} S(\alpha, z) \right]. \quad (6.45b)$$

Das verbleibende Integral (siehe z. B. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup>) führt auf die regulierte hypergeometrische Funktion  ${}_2F_2$  (Gl. C.48 in Anhang C.6), und damit ergibt sich

die Dispersionsrelation  $D_z = 0$  schließlich als

$$D_z = 1 - \tilde{N}^2 + \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel,a}^2 + 2v_0^2}{w_{\perp,a}^2} \left[ 1 - \hat{F}_a(1) \right] = 0. \quad (6.46)$$

Dabei haben wir die Abkürzung eingeführt

$$\hat{F}_a(n) = {}_2F_2 \left( \frac{1}{2}, n; 1 + \alpha_a, 1 - \alpha_a; -\xi_a^2 \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.47)$$

wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist. Dieser geschlossene Ausdruck für die Dispersionsrelation der gewöhnlichen Wellenmode ist das erste Hauptergebnis dieses Kapitels.

Verwenden wir die Taylor-Entwicklung der hypergeometrischen Funktion, die durch Gl. (C.49) gegeben ist, für kleine Argumente

$$\xi = \frac{k_{\perp} w_{\perp}}{\Omega} \ll 1,$$

was dem Fall entspricht, dass die thermische Geschwindigkeit  $w_{\perp}$  und/oder die Wellenzahl  $k_{\perp}$  sehr viel kleiner als die Gyrofrequenz  $\Omega$  ist, so ergibt sich für die Dispersionsrelation näherungsweise

$$\frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} \simeq 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp}^2 (w_{\parallel}^2 + 2v_0^2)}{4(\omega^2 - \Omega^2)}, \quad (6.48)$$

wobei wir zur besseren Übersichtlichkeit die Summation über die Teilchensorten  $a$  weggelassen haben. Gl. (6.48) kann leicht nach  $\omega$  aufgelöst werden und ergibt damit

$$2\omega^2 \simeq c^2 k_{\perp}^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) \pm \sqrt{[c^2 k_{\perp}^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)]^2 + \omega_0^2 k_{\perp}^2 (w_{\parallel}^2 + 2v_0^2)}. \quad (6.49)$$

Dies entspricht der klassischen Weibel-Mode<sup>113</sup>. In einem Plasma mit zwei kalten Plasmaströmungen, was durch die Verteilungsfunktion

$$f_c(v_{\perp}, v_{\parallel}) \propto \frac{\delta(v_{\perp})}{2\pi v_{\perp}} [\delta(v_{\parallel} - v_0) + \delta(v_{\parallel} + v_0)] \quad (6.50)$$

beschrieben wird, hat die Weibel-Mode die Form

$$\frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{2\omega_p^2 k_{\perp}^2 v_0^2}{\omega^2 (\omega^2 - \Omega^2)}. \quad (6.51)$$

Da sich die senkrechte thermische Geschwindigkeit herausgekürzt hat, ist Gl. (6.49) jedoch nur so lange eine gute Näherung, wie die Temperatur-Anisotropie für die Untersuchung nicht von Bedeutung ist.

Unter dieser Einschränkung sind rein imaginäre Lösungen (d. h. mit  $\omega = i\Gamma$ ) von Gleichung (6.49) möglich, falls<sup>b</sup>

$$c^2 k_{\perp}^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) \lesssim \sqrt{[c^2 k_{\perp}^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)]^2 + \omega_0^2 k_{\perp}^2 (w_{\parallel}^2 + 2v_0^2)}, \quad (6.52a)$$

<sup>b</sup>Die Zeichen  $\lesssim$  und  $\gtrsim$  bedeuten, dass es sich um strikte Ungleichungen handelt, die jedoch nur näherungsweise gültig sind.

was gleichbedeutend ist mit

$$v_0^2 \gtrsim \frac{1}{2k_\perp^2 \omega_0^2} [4(c^2 k_\perp^2 + \omega_0^2) - \omega_0^2 k_\perp^2 w_\parallel^2] \quad (6.52b)$$

beziehungsweise

$$k_\perp^2 \gtrsim \frac{4\omega_0^2 \Omega^2}{\omega_0^2 (w_\parallel^2 + 2v_0^2) - 4c^2}. \quad (6.52c)$$

Diese Bedingungen an  $v_0$  bzw.  $k_\perp$  müssen erfüllt werden, damit die Existenz von aperiodischen Fluktuationen möglich ist.

## 6.4.2 Bernstein-Wellen

Im Falle eines großen senkrechten Brechungsindex',

$$\frac{c^2 k_\perp^2}{|\omega^2|} \gg 1 \quad (6.53)$$

kann man leicht zeigen, dass

$$D_x = 1 + \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v v_\perp \frac{n^2}{z_a^2} \frac{J_n^2(z_a)}{\omega - n\Omega_a} \frac{\partial f_a}{\partial v_\perp} = 0 \quad (6.54)$$

eine gute Näherung der Dispersionsrelation  $D_x D_y - A_{xy} A_{yx} = 0$  darstellt, da  $|D_y| \gg 1$  gilt. Verwenden wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n^2(z) = 0,$$

so sehen wir, dass die Dispersionsrelation ausgedrückt werden kann durch

$$D_x = 1 + \frac{\omega_0^2}{k_\perp^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{n\Omega}{v_\perp} \frac{J_n^2(z)}{\omega - n\Omega} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} = 0. \quad (6.55)$$

Für diese Wellenmode gilt  $\delta E_y \simeq 0$ . Daher ist die Welle vorzugsweise longitudinal, da der Vektor des fluktuierenden elektrischen Feldes,  $\delta \mathbf{E} = \delta E_x \hat{\mathbf{e}}_x$ , die gleiche Ausrichtung hat wie der Wellenvektor  $\mathbf{k} = k_\perp \hat{\mathbf{e}}_x$  (vgl. Davidson<sup>16</sup>).

Daher ergibt sich – nach kurzer Rechnung – eine ähnliche Gleichung wie für  $D_z$ :

$$D_x = 1 - \frac{\omega_0^2}{k_\perp^2} \int d^3v [1 + \alpha S(\alpha, z)] \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} = 0, \quad (6.56)$$

woraus folgt

$$D_x = 1 + \sum_a \frac{2\omega_{p,a}^2}{k_\perp^2 w_{\perp,a}^2} [1 - \hat{F}_a(1)] = 0. \quad (6.57)$$

Man beachte, dass die Dispersionsrelation  $D_x = 0$  von der Anwesenheit eines Gegenstroms und vom Wert der parallelen thermischen Geschwindigkeit nicht beeinflusst wird.



Weiterhin hängt  $D_x$  nur schwach von der Wellenzahl  $k_\perp$  ab. Dies wird deutlich, wenn man die Taylor-Entwicklung der hypergeometrischen Funktion für kleine  $w_\perp$ , die durch Gl. (C.49) gegeben ist, anwendet. In diesem Fall lässt sich die Dispersionsrelation annähern durch

$$D_x \simeq 1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2 (1 + \omega/\Omega) (1 - \omega/\Omega)} = 0, \quad (6.58)$$

woraus sich ergibt

$$\omega^2 \simeq \sum_a \Omega_a^2 + \omega_{p,a}^2, \quad (6.59)$$

auch bekannt als die *obere Hybrid-Resonanz* (siehe z. B. Abschnitt 9.2.4 in Schlickeiser<sup>80</sup>).

### 6.4.3 Die außerordentliche EM-Mode

In diesem Abschnitt gehen wir von einem sehr dünnen Plasma aus, was dem Grenzfall

$$\frac{\omega_{p,e}^2}{c^2 k_\perp^2} \ll 1 \quad (6.60)$$

entspricht, und betrachten hochfrequente Störungen, was bedeutet, dass

$$\frac{|\omega^2|}{c^2 k_\perp^2} \propto 1 \quad (6.61)$$

von der Größenordnung Eins ist; die Frequenz der betrachteten Wellen liegt also weit oberhalb der Elektronen-Plasmafrequenz. In diesem Fall kann man zeigen, dass  $A_{xy}A_{yx}$  nur einen kleinen Beitrag im Vergleich zu  $D_x D_y$  liefert (vgl. Davidson<sup>16</sup>). Daher erhält man zwei Wellenmoden, wobei die eine,  $D_x = 0$ , wieder auf die in Abschnitt 6.4.2 betrachteten Bernstein-Wellen führt, und die andere durch die Dispersionsrelation  $D_y = 0$  beschrieben wird, mit

$$D_y = 1 - N^2 + \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v v_\perp \frac{J_n'^2(z_a)}{\omega - n\Omega_a} \frac{\partial f_a}{\partial v_\perp}. \quad (6.62)$$

Verwenden wir wieder die Abkürzung  $\omega_0^2$  für die Summe über die Quadrate der Plasmafrequenzen und ordnen die Summation um, so ergibt sich

$$D_y = 1 - N^2 - \frac{\omega_0^2}{\Omega\omega^2} \int d^3v v_\perp \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n'^2(z)}{n - \alpha}. \quad (6.63)$$

Dies beschreibt die elektromagnetischen Wellen der außerordentlichen Mode. Da  $\delta\mathbf{E} = \delta E_y \hat{\mathbf{e}}_y$  senkrecht zum Wellenvektor liegt, sind diese transversal polarisiert.

Dieses Mal erhalten wir für die unendliche Reihe (s. Lerche<sup>45,47</sup>)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n'^2(z)}{n - \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(\alpha, z)}{\partial z^2} + \frac{1}{2z} \frac{\partial S(\alpha, z)}{\partial z} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) S(\alpha, z) - \frac{\alpha}{z^2}. \quad (6.64)$$

Daher ergibt sich für die Dispersionsfunktion  $D_y$

$$D_y = 1 - N^2 - 2\pi C \frac{\omega_0^2}{\Omega\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} f_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp}^2 \frac{\partial f_{\perp}}{\partial v_{\perp}} \quad (6.65a)$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{1}{2z} \frac{\partial S}{\partial z} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) S - \frac{\alpha}{z^2} \right]$$

$$= 1 - N^2 - \frac{2\Omega}{k_{\perp}^2 w_{\perp}^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} dz z^2 \frac{\partial f_{\perp}}{\partial z} \left[ -\frac{\alpha}{z^2} - \frac{\alpha^2}{z^2} S + S + \frac{1}{2z} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right], \quad (6.65b)$$

wobei jetzt

$$f_{\perp}(z) = e^{-z^2/\xi^2}. \quad (6.66)$$

Wir werden nun nacheinander die Integrale berechnen, die sich durch Auflösen der eckigen Klammern in Gleichung (6.65b) ergeben. Die ersten beiden Integrale sind trivial; die nächsten beiden, in denen der Ausdruck  $S(\alpha, z)$  auftritt, können gemäß Gl. (C.48) gelöst werden und ergeben

$$-\alpha^2 \int_0^{\infty} dz \frac{\partial f_{\perp}}{\partial z} S(\alpha, z) = -\alpha \hat{F}(1) \quad (6.67a)$$

$$\int_0^{\infty} dz z^2 \frac{\partial f_{\perp}}{\partial z} S(\alpha, z) = \frac{\xi^2}{\alpha} \hat{F}(2). \quad (6.67b)$$

Für das vierte Integral verwenden wir

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz \left( z \frac{\partial f_{\perp}}{\partial z} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \stackrel{\text{p.I.}}{=} -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz \left( \frac{\partial f_{\perp}}{\partial z} + z \frac{\partial^2 f_{\perp}}{\partial z^2} \right) S(\alpha, z) \quad (6.67c)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left[ \hat{F}(2) - \frac{1}{2} \hat{F}(1) \right]. \quad (6.67d)$$

Das letzte Integral erfordert wiederholte partielle Integrationen

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz \left( z^2 \frac{\partial f_{\perp}}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz \left( 2 \frac{\partial f_{\perp}}{\partial z} + 4z \frac{\partial^2 f_{\perp}}{\partial z^2} + z^2 \frac{\partial^3 f_{\perp}}{\partial z^3} \right) S(\alpha, z) \quad (6.67e)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \left[ 4\hat{F}(3) + 4\hat{F}(2) + \hat{F}(1) \right]. \quad (6.67f)$$

Stellen wir alle Terme zusammen, so erhalten wir schließlich für die Dispersionsrelation  $D_y = 0$  der außerordentlichen elektromagnetischen Wellenmode:

$$D_y = 1 - N^2 + \sum_a \frac{2\omega_{p,a}^2}{\xi_a^2 \omega^2} \left[ 4\hat{F}_a(3) - (5 + \xi_a^2) \hat{F}_a(2) + \left( \frac{3}{2} + \alpha_a^2 \right) \hat{F}_a(1) + \alpha_a^2 \right] = 0. \quad (6.68)$$

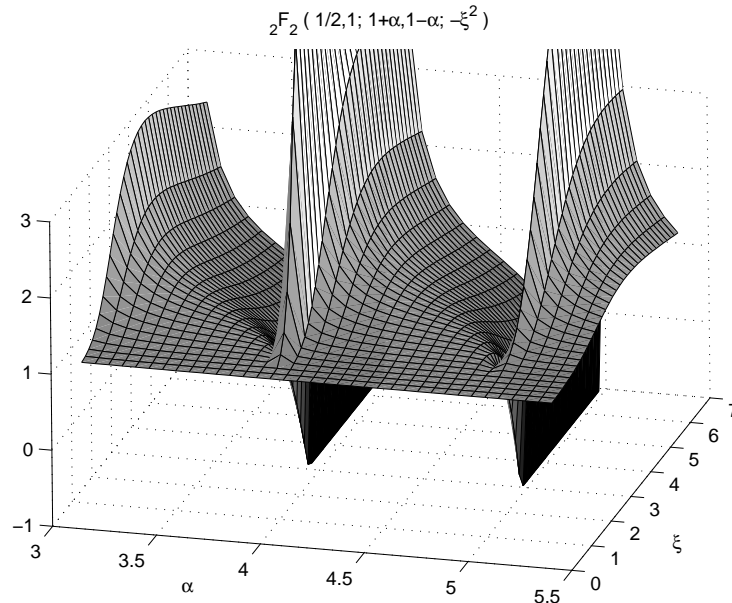


Abbildung 6.8: Die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; 1 + \alpha, 1 - \alpha; -\xi^2\right)$ , dargestellt für  $\xi \in [0, 5; 7]$  und  $\alpha \in [3; 5, 5]$ .

Zu beachten ist, dass  $D_y$  ebenso wie schon die Dispersionsrelation der Bernstein-Wellen vom Vorhandensein sowohl des Gegenstroms als auch einer Anisotropie zwischen paralleler und senkrechter thermischer Geschwindigkeit nicht beeinflusst wird.

## 6.5 Numerische Auswertung

In diesem Abschnitt werden wir numerisch die Wellenzahlabhängigkeit der Frequenz gemäß den drei Dispersionsrelationen auswerten, die wir in den vorangegangenen Abschnitten berechnet haben. Um mit dimensionslosen Variablen arbeiten zu können, normieren wir zunächst wieder alle thermischen Geschwindigkeiten und Strömungsgeschwindigkeiten auf die Lichtgeschwindigkeit und bezeichnen dies mit einer Tilde. Ebenfalls führen wir wieder ein:

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (6.69a)$$

$$\kappa = \frac{ck}{\omega_0} \quad (6.69b)$$

$$\mathcal{U} = \frac{\Omega}{\omega_0}. \quad (6.69c)$$

Um die numerischen Berechnungen einfach zu halten, nehmen wir durchgehend die Existenz eines aus Elektronen und Positronen bestehenden Paarplasmas an (um die Ladungsneutralität zu gewährleisten), wie es etwa in Jets von astrophysikalischen Objekten diskutiert wird. Es gilt daher  $\omega_0 = \sqrt{2}\omega_{p,e}$ .

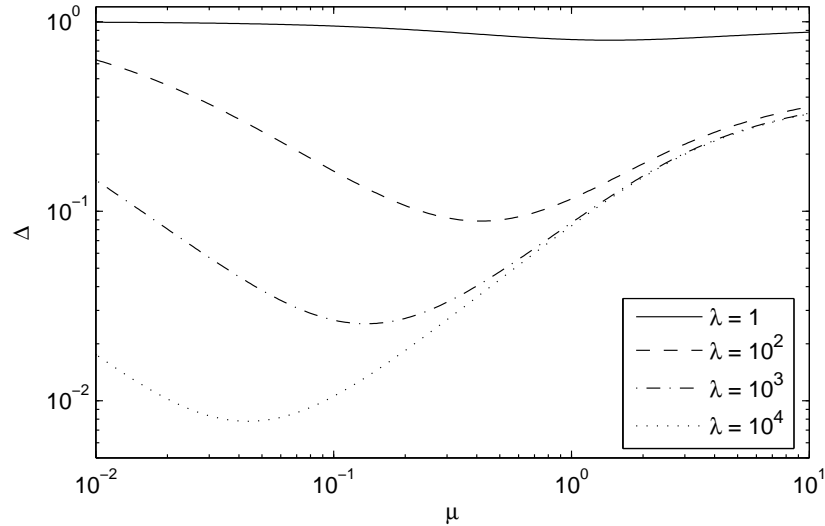


Abbildung 6.9: Die relative Abweichung der von Bornatici und Lee<sup>7</sup> zur Berechnung der Wachstumsraten verwendeten Näherung aus Gl. (6.71) zum exakten Ergebnis. Die weiteren Parameter sind  $\Omega = 1,021$  und  $\Gamma = 0,8$ .

Die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; 1 + \alpha, 1 - \alpha; -\xi^2\right)$  ist für variierende  $\xi$  und  $\alpha$  in Abb. 6.8 dargestellt.

### 6.5.1 Die gewöhnliche Wellenmode

Sowohl Bornatici und Lee<sup>7</sup> (von hier an mit BL abgekürzt) als auch Lee und Armstrong<sup>43</sup> haben die Stabilitätseigenschaften der Dispersionsrelation für die gewöhnliche Wellenmode für eine Reihe von Temperaturbereichen und Werten der Strömungsgeschwindigkeit studiert. Weiterhin wurden relativistische Effekte z.B. von Lakhina und Buti<sup>42</sup> untersucht. Die in den beiden zuerst genannten Arbeiten verwendete Dispersionsrelation stimmt mit unserer Gleichung (6.46) überein, falls

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(z)}{\alpha^2 - n^2} = \frac{e^z}{\alpha^2} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; 1 + \alpha, 1 - \alpha; -2z\right), \quad (6.70)$$

gilt. Dies wird in Anhang B.1 bewiesen.

Die numerische Auswertung der Dispersionsrelation der gewöhnlichen Wellenmode, wie sie von BL durchgeführt wurde, beinhaltetete als wesentliche Näherung

$$1 + \lambda \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{I_n(\mu) e^{-\mu}}{(n\Omega)^2 + \Gamma^2} \simeq 2\lambda \frac{I_1(\mu) e^{-\mu}}{\Omega^2 + \Gamma^2}. \quad (6.71)$$

Diese war notwendig, um einen einfachen analytischen Ausdruck für die Wachstumsrate  $\Gamma$  zu erhalten, wobei  $I_n$  die modifizierten Besselfunktionen der Ordnung  $n$  bezeichnet (s. Anhang C.1). Die Näherung ist jedoch nur so lange akzeptabel, wie  $\lambda =$

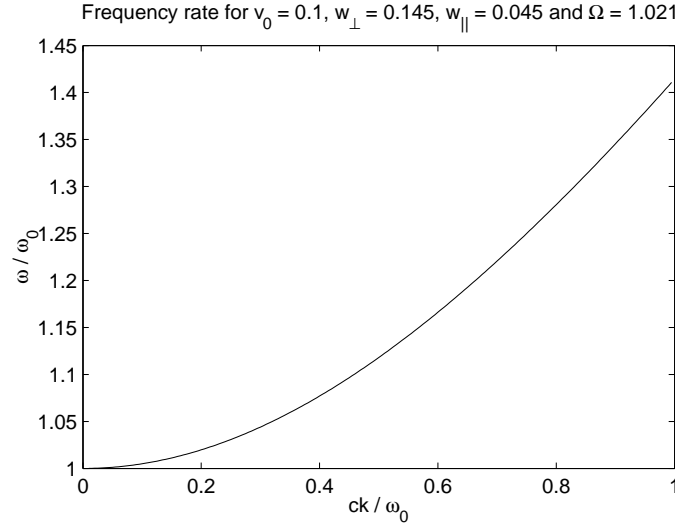


Abbildung 6.10: Realteil  $\omega_r(k)$ , berechnet aus der Dispersionsrelation Gl. (6.72).

$\omega_p^2(1 + 2v_0^2/w_\parallel^2)T_\parallel/T_\perp \gg 1$  zusammen mit  $\mu \ll 1$  erfüllt ist; in Abb. 6.9 ist die relative Abweichung als Funktion von  $\mu$  dargestellt. Im Gegensatz dazu verwenden wir in diesem Kapitel das exakte Resultat, ausgedrückt durch die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_2$  (s. Anhang B.1).

Verwenden wir die in den Gleichungen (6.69) definierten dimensionslosen Variablen, können wir die Dispersionsrelation (6.46) ausdrücken durch

$$x^2 = 1 + k^2 - \frac{\tilde{w}_\parallel^2 + 2v_0^2}{\tilde{w}_\perp^2} \left[ 1 - {}_2F_2 \left( \frac{1}{2}, 1; 1 + \frac{x}{\tilde{U}}, 1 - \frac{x}{\tilde{U}}; - \left( \frac{\kappa \tilde{w}_\perp}{\tilde{U}} \right)^2 \right) \right]. \quad (6.72)$$

Der Realteil der Frequenz ist in Abb. 6.10 dargestellt, wobei wir für die Gyrofrequenz  $\Omega = 1,021 \omega_0$  annehmen.

$T_\perp/T_\parallel$	$\beta_\parallel$	$v_0^2/w_\parallel^2$	$\Gamma_{\max}/\Omega$	bei $\mu_{\max}$	$\Delta\Gamma_{\max}/\Omega$	$ \Delta\Gamma/\Gamma _{\max}$	bei $\mu_{\max}$
0,5	2	2	1,0248	0,866	0,1376	14,5%	1,438
0,8	2	2	0,7891	1,007	0,0747	10,2%	1,388
1,0	2	2	0,6529	1,074	0,0506	8,3%	1,5
1,2	2	2	0,5219	1,26	0,034	7%	1,503
0,8	1	3	0,69	0,709	0,0694	5,5%	0,212
0,8	1	5	1,2348	0,837	0,2501	21,5%	1,397

Tabelle 6.1: Maximale Wachstumsraten und Unterschiede zu BL

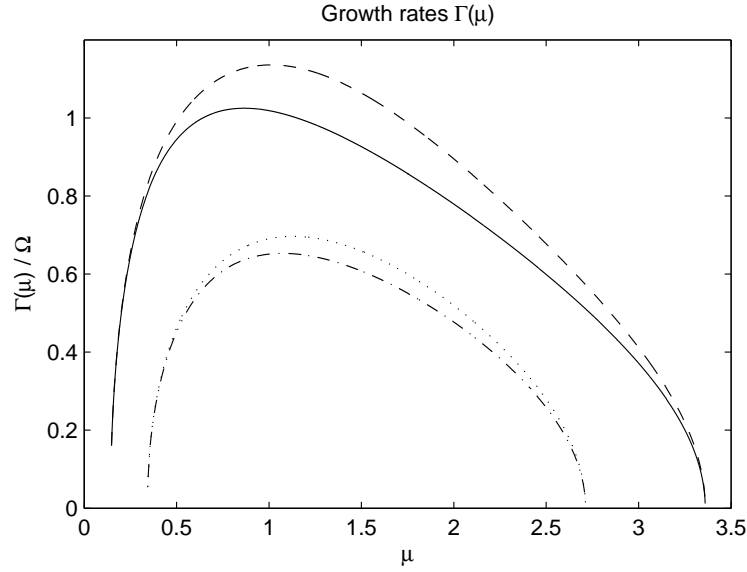


Abbildung 6.11: Die Wachstumsrate  $\Gamma(k)$ , berechnet aus der Dispersionsrelation (6.76) (durchgezogene Linie für  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 0,5$ , Strichpunkt-Linie für  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 1$ ) und das Ergebnis aus Gl. (15) von BL (gestrichelte Linie für  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 0,5$ , Punktlinie für  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 0,5$ ).

Um in der Lage zu sein, die aus der Dispersionsrelation der gewöhnlichen Wellenmode berechneten Wachstumsraten mit den Ergebnissen von BL zu vergleichen, transformieren wir zunächst noch unsere Dispersionsgleichung auf die in der Arbeit von BL verwendeten Variablen. Sie nimmt damit die Form an

$$\frac{\alpha}{\beta_{\parallel}} y^2 = 1 + \frac{2}{\beta_{\parallel}} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \mu - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \left( 1 + 2 \frac{v_0^2}{w_{\parallel}^2} \right) \left[ 1 - {}_2F_2 \left( \frac{1}{2}, 1; 1 + y, 1 - y, -2\mu \right) \right], \quad (6.73)$$

wobei

$$y = \frac{\omega^2}{\Omega^2}, \quad (6.74a)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{k_{\perp} w_{\perp}}{\Omega} \right)^2, \quad (6.74b)$$

$$\beta_{\parallel} = \frac{w_{\parallel}^2 \omega_0^2}{c^2 \Omega^2} \quad (6.74c)$$

und

$$\alpha = \tilde{w}_{\parallel}^2 = \frac{w_{\parallel}^2}{c^2}. \quad (6.74d)$$

Der Parameter  $\alpha$  war in der Dispersionsrelation von BL nicht enthalten und musste daher separat gewählt werden. Wir nehmen  $\alpha = 0,01$  an, was einem Wert von  $w_{\parallel} = 0,1 c$  entspricht. Dessen ungeachtet sind die Änderungen der Wachstumsrate jedoch minimal – so beläuft sich die durchschnittliche Differenz zur Wachstumsrate für etwa  $\alpha = 10^{-6}$

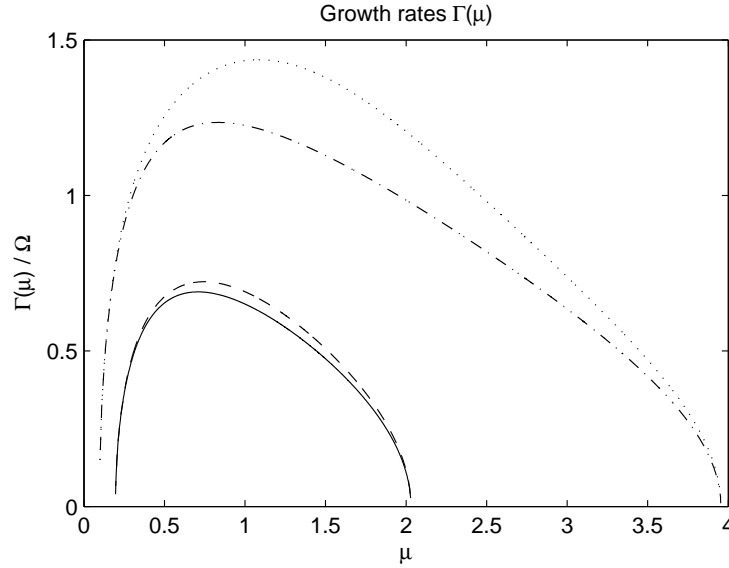


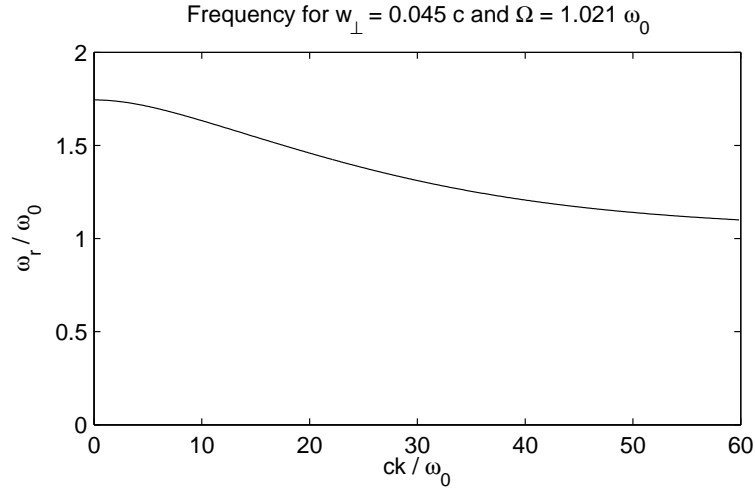
Abbildung 6.12: Die Wachstumsrate  $\Gamma(k)$ , berechnet aus der Dispersionsrelation (6.76) (durchgezogene Linie für  $v_0^2/w_{\parallel}^2 = 3$ , Strichpunkt-Linie für  $v_0^2/w_{\parallel}^2 = 5$ ) und das Ergebnis aus Gl. (15) von BL (gestrichelte Linie für  $v_0^2/w_{\parallel}^2 = 3$ , Punktlinie für  $v_0^2/w_{\parallel}^2 = 5$ ).

auf lediglich  $10^{-4}$ . Die Werte sowohl für  $\beta_{\parallel}$  als auch für  $v_0^2/w_{\parallel}^2$  sind genau wie in BL gewählt. Alle so bestimmten Wachstumsraten, die maximalen Abweichungen zu BL wie auch die jeweiligen Werte für  $\mu_{\max}$ , bei denen die größten Abweichungen auftreten, sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Die sich ergebende Wachstumsrate  $\Gamma(k)$ , diesmal normiert auf die Gyrofrequenz  $\Omega$ , ist in Abb. 6.11 dargestellt, zusammen mit den Ergebnissen aus Gl. (15) von BL: beide sowohl für  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 0,5$  als auch für isotrope Temperaturen, also  $T_{\perp} = T_{\parallel}$ . Die anderen Parameter haben die Werte  $\beta_{\parallel} = 2$  und  $v_0^2/w_{\parallel}^2 = 2$ .

Wie man aus Abbildung 6.11 klar ersehen kann, stimmt das qualitative Verhalten aus unserer Analyse sehr gut mit dem von BL überein; insbesondere Anfang und Ende des Wellenzahlbereiches, in dem Instabilität möglich ist, sind identisch. Jedoch gibt es deutliche quantitative Unterschiede von durchschnittlich 11%. Unsere maximalen Wachstumsraten sind somit deutlich kleiner als die von BL. Der zusätzliche Parameter  $\alpha$  kann diese Abweichung nicht erklären, da die Wachstumsraten nur sehr schwach vom Absolutwert der parallelen thermischen Geschwindigkeit abhängen. Daher müssen die Unterschiede in den Näherungen von BL begründet sein, wohingegen wir die exakte Gleichung gelöst haben.

In Abb. 6.12 sind die Wachstumsraten für verschiedene Werte der Gegenstromgeschwindigkeit gezeigt. Offensichtlich werden die Abweichungen umso größer, je höher die Strömungsgeschwindigkeit und damit auch die Wachstumsrate ist. Innerhalb des Bereiches der von uns betrachteten Werte ist die Abweichung für  $v_0^2/w_{\parallel}^2 = 5$  maximal, mit einem mittleren Wert von 16,1% und einem Maximum von 21,5%. In Abb. 6.11 haben wir dagegen  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 0,5$  und  $\beta_{\parallel} = 1$  verwendet.


 Abbildung 6.13: Realteil  $\omega_r(k)$  für die Dispersionsrelation der Bernstein-Mode.

Für isotrope Temperaturen, also  $T_{\perp} = T_{\parallel}$ , sind die sich ergebenden Wachstumsraten ebenfalls in Abb. 6.12 dargestellt. Die relativen Abweichungen zwischen unserer Rechnung und der von BL betragen im Mittel 7%.

## 6.5.2 Bernstein-Wellen

Die Dispersionsfunktion für die Bernstein-Wellenmode,  $D_x$ , kann ausgedrückt werden durch

$$D_x = 1 + \frac{4}{\kappa^2 \tilde{w}_{\perp}^2} \left[ 1 - {}_2F_2 \left( \frac{1}{2}, 1; 1 + \frac{x}{\mathcal{U}}, 1 - \frac{x}{\mathcal{U}}; - \left( \frac{\kappa \tilde{w}_{\perp}}{\mathcal{U}} \right)^2 \right) \right]. \quad (6.75)$$

Wie wir bereits im Abschnitt 6.4.2 gezeigt haben, hängt in dieser Dispersionsgleichung die Frequenz  $\omega$  nur sehr schwach von der Wellenzahl  $k_{\perp}$  ab. Die exakte (numerisch berechnete) Abhängigkeit ist in Abb. 6.13 dargestellt.

## 6.5.3 Die außerordentliche EM-Mode

Verwenden wir die dimensionslosen Variablen, die wir in den Gleichungen (6.69) definiert haben, so lässt sich die Dispersionsrelation der außergewöhnlichen elektromagnetischen Wellenmode, Gl. (6.68), schreiben als

$$x^2 = \kappa^2 - \frac{2\mathcal{U}^2}{\tilde{w}_{\perp}^2 \kappa^2} \left[ 4\hat{F}(3) - \left( 5 + \frac{\mathcal{U}^2}{\tilde{w}_{\perp}^2 \kappa^2} \right) \hat{F}(2) + \left( \frac{3}{2} + \frac{x^2}{\mathcal{U}^2} \right) \hat{F}(1) + \frac{x^2}{\mathcal{U}^2} \right]. \quad (6.76)$$

Der Realteil der Frequenz,  $\omega(k_{\perp})$ , ist in Abbildung 6.14 dargestellt, wobei sich ein Abschneideverhalten (*cut-off behavior*) für  $k \rightarrow 0$  zeigt. Für die senkrechte thermische Geschwindigkeit und die Gyrofrequenz wurden dabei Werte von  $w_{\perp} = 0,045 c$  und  $\Omega = 1,021 \omega_0$  angenommen.



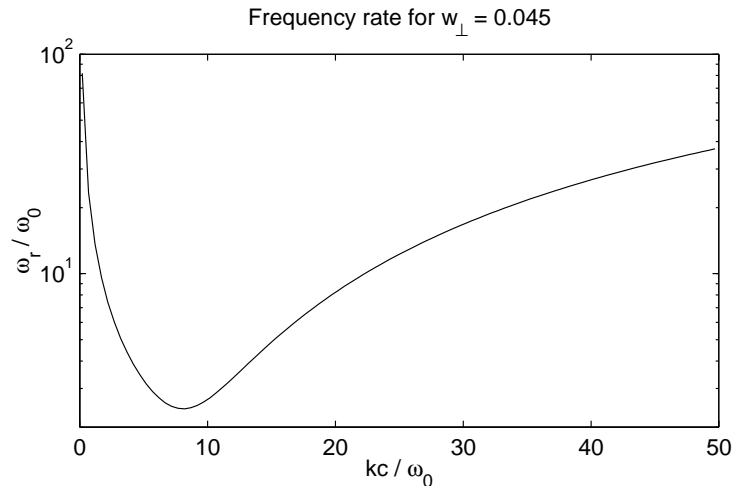


Abbildung 6.14: Realteil  $\omega_r(k)$  für die Dispersionsrelation der außerordentlichen elektromagnetischen Wellenmode.

## 6.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die nichtrelativistische kinetische Theorie linearer Plasmaswellen in magnetisierten Maxwellischen Gegenstrom-Plasmen formuliert. Dabei haben wir uns auf den – wahrscheinlichsten – Fall beschränkt, dass die Strömungsrichtung parallel zu einem homogenen Hintergrundmagnetfeld liegt.

Im Falle der Wellenausbreitung parallel zum Hintergrundmagnetfeld (Abschnitt 6.2) haben wir die Gegenstrom-Komponenten so konstruiert, dass sie beliebige Zusammensetzung haben können – wobei trotzdem die grundsätzliche Ladungsneutralität gewährleistet bleibt. Da die beiden Maxwellischen Komponenten unterschiedliche thermische Geschwindigkeiten und Intensitäten haben dürfen, ist die allgemeine Form der Verteilungsfunktion auf eine Reihe verschiedener Situation anwendbar, darunter Gegenströme bestehend aus verschiedenen Medien, *Bump-on-tail*-Verteilungen, in ein warmes Hintergrundmedium einlaufende kalte Elektronenströme, anisotrope bi-Maxwell-Verteilungen, Schockwellen und viele mehr. Ausgehend von den linearisierten, relativistischen Vlasov-Maxwell-Gleichungen haben wir (für parallele Wellenausbreitung) die Dispersionsrelationen der longitudinalen und der beiden transversalen Moden hergeleitet. Diese Dispersionsgleichungen beschreiben die lineare Antwort des Systems auf die anfänglichen Störungen und definieren so sämtliche vorhandenen linearen Wellenmoden. Eine wichtige Einschränkung besteht darin, dass wir die Dispersionsrelationen nur für nichtrelativistische Werte der Plasmatemperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten aufgestellt haben; es können jedoch beliebige Werte für die relative Intensität der Gegenstromkomponenten gewählt werden. Darüber hinaus erstreckt sich der Gültigkeitsbereich über den gesamten Wellenzahl- und Frequenzraum. Da die Dispersionsrelationen durch die bekannte Plasmadispersionsfunktion von Fried und Conte<sup>24</sup> ausgedrückt werden, sind sie automatisch für die gesamte komplexe Frequenzebene gültig; dies ist wichtig, da der Imaginärteil der Frequenz Wachstums- bzw. Dämpfungsrate beschreibt. Die Analyse der Dispersionsre-

lationen ist damit auf einfache Weise möglich, ebenso wie die Einbeziehung von Ionen, da die Gleichungen stets die Summation über nicht näher spezifizierte Teilchensorten beinhalten. Die numerische Auswertung für den Fall eines Elektron-Positron-Plasmas ergab hochfrequente elektromagnetische Wellen, was in Übereinstimmung mit PIC-Simulationen von Saito und Sakai<sup>75</sup> steht.

Für den Fall senkrechter Wellenausbreitung (Abschnitt 6.4) haben wir im Unterschied dazu die zusätzliche Einschränkung eines symmetrischen Gegenstroms einführen müssen, um die Rechnungen handhabbar zu halten. Unter der Hinzunahme weiterer einschränkender Bedingungen – die Fälle dichter bzw. dünner Plasmen, letzterer in Verbindung mit hohen Wellenfrequenzen – lassen sich drei unterschiedliche Dispersionsrelationen herleiten: die gewöhnliche Wellenmode, die Bernstein-Wellen sowie die außerordentliche elektromagnetische Wellenmode, wobei die letzteren beiden nur näherungsweise gültig sind. Wie schon im Falle paralleler Wellenausbreitung gelten diese Dispersionsgleichungen ebenfalls nur für nichtrelativistische Werte der thermischen Geschwindigkeiten und der Strömungsgeschwindigkeiten, diesmal jedoch auch nur für Gegenstromkomponenten von gleicher Intensität, Zusammensetzung und Temperatur. Sie sind jedoch ebenfalls für alle Wellenzahlen und die gesamte komplexe Frequenzebene gültig, da sie durch die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_2$  ausgedrückt werden können.

Wie wir gezeigt – und durch die Polarisations-eigenschaften der drei Wellenmoden begründet – haben, wird nur die gewöhnliche Wellenmode durch den Gegenstrom und die Temperatur-Anisotropie beeinflusst. Entwickelt man die Dispersionsrelation der gewöhnlichen Wellenmode im Grenzfall kleiner Wellenzahlen und kleiner thermischer Geschwindigkeiten zu niedrigster Ordnung, so lässt sich zeigen, dass sie aperiodische Fluktuationen zulässt – also anwachsende Plasma-Oszillationen mit rein imaginärer Frequenz. Weiterhin haben wir unsere Ergebnisse mit denen von Bornatici und Lee<sup>7</sup> verglichen; darin wurden weitere mathematische Näherungen verwendet, von denen die drastischste die Näherung einer unendlichen Reihe über modifizierte Besselfunktionen durch den Term mit  $n = 1$  beinhaltet. Im Gegensatz dazu haben wir die exakten Dispersionsrelationen numerisch gelöst. Des Weiteren haben wir die Verbindung der gewöhnlichen Wellenmode zur klassischen Weibel-Instabilität<sup>113</sup> aufgezeigt, die ursprünglich für kalte Plasma-Strömungen hergeleitet wurde und ebenfalls auf aperiodische Fluktuationen führt. In unserem Fall ergibt sich dieses auf natürliche Weise aus der Taylorentwicklung der Dispersionsrelation für kleine thermische Geschwindigkeiten und kleine Wellenzahlen.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Untersuchungen sind an eine große Einschränkung gebunden, nämlich die Unterscheidung der Wellenausbreitung strikt parallel beziehungsweise senkrecht zum Hintergrundmagnetfeld. Diese vereinfachte Geometrie erleichtert die Berechnungen in hohem Maße, stellt jedoch gleichzeitig eine starke Beschränkung dar. In den nächsten beiden Kapiteln werden wir diese Annahme daher teilweise fallen lassen und uns, unter Anwendung des Konzeptes der Neutralpunktes im Wellenzahlraum, der Stabilitätsanalyse für Wellen zuwenden, die sich in einem *beliebigen* Winkel zum Hintergrundmagnetfeld ausbreiten.

---

# 7 Das Neutralpunkt-Konzept

*Basierend auf einer Arbeit von Harris<sup>30</sup> wird das Konzept der Neutralpunkte in diesem Kapitel durch die korrekte Einbindung relativistischer Effekte erweitert. Weiterhin werden die Grundzüge der Theorie für resonante Welle-Teilchen-Wechselwirkungen ausgeführt.*

## 7.1 Einleitung

Die ursprüngliche Weibel-Instabilität<sup>113</sup> spielt sich in einem anfänglich unmagnetisierten Plasma ab und basiert nicht auf selektiven Welle-Teilchen-Resonanzeffekten, sondern auf der Anisotropie der gesamten Teilchenpopulation. Daher resultiert aus der Weibel-Instabilität eine exponentielle Zeitabhängigkeit der Form  $\exp(\Gamma t)$  für Störungen mit kleiner Amplitude, wobei  $\Gamma$  positiv ist. Weibel-Moden haben wegen eines fehlenden Realteils des Frequenz daher keine bevorzugte Ausbreitungsrichtung – sie sind aperiodisch. Es gibt jedoch keine Garantie, dass die Mode der Weibel-Instabilität die *schnellste* instabile Mode in einem Plasma ist; andere, nicht-aperiodische Wellenmoden könnten also wesentlich größere Anwachsraten haben. Sicherheit besteht nur darin, dass Weibel-Moden keine propagierende Komponente haben.

In Gegenwart eines gleichförmigen Hintergrund-Magnetfeldes ist die Situation sogar noch komplexer; gleichzeitig fügt die Einbeziehung relativistischer Betrachtungen weitere technische Schwierigkeiten hinzu. Ein wichtiger Punkt, den man – basierend auf den ursprünglichen Arbeiten von Weibel<sup>113</sup> und Harris<sup>30</sup> – bemerken sollte, betrifft die Tatsache, dass beide Herangehensweisen das Konzept des Neutralpunktes im Wellenzahlraum verwenden, um die Stabilität bzw. Instabilität des Plasmas zur einen oder anderen Seite (im Wellenzahlraum) solcher Neutralpunktes festzustellen. Die entscheidende Notwendigkeit besteht nun darin, zu bestimmen, ob eine gegebene Plasma-Verteilungsfunktion die Existenz von Neutralpunkten zulässt. Falls ja, so kann man mit der allgemeinen Argumentation fortfahren – wie es im folgenden Abschnitt mit der relativistischen Version von Harris' Annahmen gezeigt wird –, um lediglich die Instabilität des Plasmas zu veranschaulichen. Falls keine Neutralpunkte existieren, kann das Plasma dennoch instabil sein; die Instabilitäten umfassen dann jedoch auch resonante Welle-Teilchen-Effekte und führen auf komplexe Frequenzen mit nichtverschwindendem Real- und Imaginärteil.

Eine Ausnahme kann – muss jedoch nicht – dann auftreten, wenn die Verteilungsfunktion von stark begrenzter Form ist, im Sinne einer Diracschen Delta-Distribution also – und zwar dann, wenn die Gegebenheiten einer solchen begrenzten Form die resonanten Welle-Teilchen-Singularitäten aufheben, die für verbreiterte Verteilungsfunktionen auftreten.

Aufgrund der relativistischen Behandlung treten etliche zusätzliche Terme in der Dis-

pensionsrelation auf, die keine nichtrelativistische Entsprechung haben, und es ergeben sich unter stark relativistischen Bedingungen signifikante Verformungen der nichtrelativistischen Faktoren. Nichtsdestotrotz ist dieselbe Methode, nämlich des Auffindens von Neutralpunkten im Wellenzahlraum und anschließender Bestimmung der Instabilität zur einen oder anderen Seite eines jeden solchen Neutralpunktes, auch in diesem Fall ein mächtiges Werkzeug zur Bestimmung ganzer Klassen instabiler Verteilungsfunktionen. Bedauerlicherweise ist die Methode jedoch nicht allumfassend in dem Sinne, dass Verteilungsfunktionen, auch wenn sie die Existenz von Neutralpunkten nicht erlauben, dennoch instabil sein können.

In den folgenden Abschnitten werden wir, basierend auf den grundlegenden Annahmen von Harris<sup>30</sup>, die generelle Vorgehensweise zur Bestimmung von Neutralpunkten und Instabilitätsraten in der Umgebung solcher Neutralpunkte darstellen.

Obwohl die longitudinale Mode eine vereinfachte Version der allgemeinen  $3 \times 3$ -Determinante darstellt, aus der die allgemeinen Plasmawellen bestimmt werden, so ist auch in diesem generellen Fall die grundlegende Methode gleichermaßen anwendbar.

Leider impliziert, wie bereits erwähnt, die Abwesenheit von Neutralpunkten *nicht*, dass das Plasma stabil sein muss; in diesem Fall muss man sich direkt der vollen  $3 \times 3$ -Determinante zuwenden, um zu bestimmen, ob eine bestimmte Verteilungsfunktion bzw. eine Klasse von Verteilungsfunktionen stabil oder instabil ist. Weiterhin erschweren relativistische Betrachtungen, die für astrophysikalische Plasmen wichtig sind, die Bestimmung der Bedingungen für Instabilität deutlich, wie wir in diesem Kapitel noch zeigen werden. Trotzdem ist es entscheidend, solche Einflüsse mit einzubeziehen, wenn man daran interessiert ist, den Ursprung und die Entwicklung astrophysikalischer Plasmen verstehen zu können, in denen relativistische Überlegungen dominieren.

Das in den folgenden Abschnitten vorgestellte Verfahren bietet somit ein mächtiges Werkzeug, um solche Untersuchungen durchzuführen.

In Kapitel 8 werden wir dann zusätzlich die von Harris eingeführten Einschränkungen – keine Ionenbewegung sowie Vernachlässigung der Störungen des Magnetfeldes – lockern, um zu zeigen, wie die Neutralpunkt-Methode in diesem Fall operiert, wenn die Bewegung der Ionen ebenfalls relativistisch sein kann. Im Einzelnen werden wir dabei die Modifikationen untersuchen, die von der Einbeziehung sowohl der Ionenbewegung wie auch der Magnetfeldstörungen herrühren sowie den Effekt der Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Mode beleuchten.

## 7.2 Konstruktion der Dispersionsrelation

Harris<sup>30</sup> hatte als erster eine – nichtrelativistische – Untersuchung von Oszillationen mit kleiner Amplitude in einem vollständig ionisierten, quasi-neutralen Plasma vorgenommen, welches in ein umgebendes Hintergrund-Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  eingebettet ist. Die Bewegung der Ionen sowie Störungen des Magnetfeldes wurden dabei von ihm vernachlässigt. Wir folgen hier nun zunächst präzise Harris' ursprünglichem Vorgehen, erweitern die Überlegungen jedoch durch eine vollständig relativistische Formulierung. Wie wir zeigen werden, ergeben sich dabei etliche zusätzliche Terme, die von ausschließlich rela-

tivistischen Effekten herrühren.

Die Störung  $\delta f$  in der Verteilungsfunktion der Hintergrund-Elektronen,  $f_0$ , beschreiben wir wieder durch die linearisierte Vlasov-Gleichung,

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta f - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \delta f = e \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (7.1)$$

Im Unterschied zu Kapitel 6 wird das Vorgehen hier jedoch etwas anders sein, da wir jetzt mit dem skalaren Potenzial des elektrischen Feldes,  $\Phi$ , arbeiten. Als zusätzliche Eigenschaft benötigen wir daher, dass die Fluktuationen des elektrischen Feldes (hier mit  $\mathbf{E}$  bezeichnet, da kein großräumiges elektrisches Hintergrundfeld vorhanden ist), der Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv -\nabla^2 \Phi = -4\pi n e \int d^3 p \delta f \quad (7.2)$$

genügen, wobei  $n$  die Elektronenzahldichte bezeichnet. Die Hintergrund-Verteilungsfunktion ist normiert, so dass

$$\int d^3 p f_0 = 1 \quad (7.3)$$

gilt.

Hier bezeichnet  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m$  die relativistische Geschwindigkeit. Man beachte auch, dass  $f_0$  eine gerade Funktion in  $p_{\parallel}$  sein muss und nur von der Ordnung  $p_{\perp}$  sein darf, damit die grundsätzliche Ladungsneutralität gewährleistet wird.

Sind nun die räumliche Abhängigkeit von  $\delta f$  durch  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  und die zeitliche Abhängigkeit durch  $\exp(\sigma t)$  gegeben, so können wir Gl. (7.1) schreiben als

$$\delta f [\sigma + ik_{\parallel} v_{\parallel} + ik_{\perp} v_{\perp} \cos(\psi - \varphi)] + \frac{eB_0}{mc\gamma} \frac{\partial}{\partial \psi} \delta f = -ei \left[ k_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} + i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_{\perp}} \right] \Phi. \quad (7.4)$$

Das Hintergrund-Magnetfeld wird hier wie üblich als in  $z$ -Richtung liegend angenommen. Daher bietet es sich an, den Wellenvektor in seinen parallelen und senkrechten Anteil aufzuspalten gemäß  $\mathbf{k} = k_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{k}_{\perp}$ , mit  $\mathbf{k}_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = 0$ . Für die Umrechnung der Komponenten des Impuls- und des Wellenzahlvektors gilt dann  $p_x = p_{\perp} \cos \psi$ ,  $p_y = p_{\perp} \sin \psi$ ,  $k_x = k_{\perp} \cos \varphi$  und  $k_y = k_{\perp} \sin \varphi$ .

Nehmen wir noch zusätzlich für die Hintergrund-Verteilungsfunktion  $f_0$  an, dass sie nur von  $p_{\parallel}$  und  $p_{\perp}$  abhängt (d. h.  $f_0$  ist *gyrotrop*), dann gilt

$$\mathbf{k}_{\perp} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_{\perp}} = k_{\perp} \cos(\psi - \varphi) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}}. \quad (7.5)$$

Um Gl. (7.4) für den späteren Gebrauch zu vereinfachen, führen wir dimensionslose Impulskoordinaten  $\varpi_{\parallel} = p_{\parallel}/(mc)$ ,  $\varpi_{\perp} = p_{\perp}/(mc)$  ein, mit denen wir erhalten

$$\begin{aligned} & \delta f \left[ \sigma + \frac{ic}{\gamma} k_{\parallel} \varpi_{\parallel} + \frac{ic}{\gamma} k_{\perp} \varpi_{\perp} \cos(\psi - \varphi) \right] + \frac{\Omega}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \psi} \delta f \\ &= -\frac{ie\Phi}{mc} \left[ k_{\perp} \cos(\psi - \varphi) \frac{\partial f_0}{\partial \varpi_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial \varpi_{\parallel}} \right], \end{aligned} \quad (7.6)$$

wobei  $\Omega = eB_0/(mc)$  die nichtrelativistische Gyrofrequenz bezeichnet. Als Nächstes drücken wir nun die Komponenten des Wellenzahlvektors,  $k_{\parallel}$  und  $k_{\perp}$ , in Einheiten von  $\Omega/c$  aus, und schreiben daher  $ck_{\parallel} = \Omega\kappa_{\parallel}$ ,  $ck_{\perp} = \Omega\kappa_{\perp}$  sowie  $\Gamma = \sigma/\Omega$ . Gl. (7.6) nimmt dann die folgende Form an

$$\begin{aligned} & -\delta f \left[ \Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel} + i\kappa_{\perp}\varpi_{\perp} \cos(\psi - \varphi) \right] - \frac{\partial}{\partial\psi} \delta f \\ & = \frac{ie\gamma}{mc^2} \Phi \left[ \kappa_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\parallel}} + \kappa_{\perp} \cos(\psi - \varphi) \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\perp}} \right], \end{aligned} \quad (7.7)$$

wobei  $\gamma^2 = 1 + \varpi_{\parallel}^2 + \varpi_{\perp}^2$ . Mit der Abkürzung  $\Psi = \psi - \varphi$  ergibt sich die Lösung der Differenzialgleichung (7.7) als

$$\begin{aligned} \delta f & = -\frac{ie\gamma}{mc^2} \Phi \exp \left\{ -(\Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}) \Psi - i\kappa_{\perp}\varpi_{\perp} \sin \Psi \right\} \\ & \times \int^{\Psi} d\Psi' \left[ \kappa_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\parallel}} + \kappa_{\perp} \cos \Psi' \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\perp}} \right] \exp \left\{ (\Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}) \Psi' + i\kappa_{\perp}\varpi_{\perp} \sin \Psi' \right\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Nun schreiben wir

$$\exp \left\{ \pm i\kappa_{\perp}\varpi_{\perp} \sin \Psi' \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}) e^{\pm in\Psi'}, \quad (7.9a)$$

wobei  $J_n(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})$  die Besselfunktion erster Art bezeichnet (s. Anhang C.1).

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta f & = -\frac{ie\gamma}{mc^2} \Phi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}) \frac{e^{i(n-m)\Psi}}{\Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel} + in} \\ & \times \left\{ \kappa_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\parallel}} J_n(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}) + \frac{\kappa_{\perp}}{2} \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\perp}} [J_{n+1}(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}) + J_{n-1}(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})] \right\}. \end{aligned} \quad (7.9b)$$

Mit Hilfe der Eigenschaft der Besselfunktionen

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) \quad (7.9c)$$

lässt sich Gleichung (7.9b) in die Form bringen

$$\begin{aligned} \delta f & = -\frac{ie\gamma}{mc^2} \Phi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}) J_n(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}) \\ & \times \frac{e^{i(n-m)\Psi}}{\Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel} + in} \left[ \kappa_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\parallel}} + \frac{n}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial\varpi_{\perp}} \right]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Betrachten wir nun Gleichung (7.2), die sich umschreiben lässt als

$$\frac{\Omega^2 \kappa^2}{c^2} \Phi = -4\pi n e \int d^3p \delta f \quad (7.11a)$$

$$= -4\pi ne (mc)^3 \int d^3\varpi \delta f. \quad (7.11b)$$

Setzen wir hier Gl. (7.10) ein, so fallen bei der Integration über den Phasenwinkel alle Terme mit  $m \neq n$  weg, so dass sich für die Dispersionsrelation ergibt

$$\kappa^2 = \frac{i\omega_p^2}{\Omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \gamma \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{\Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} + in} \left[ \kappa_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\parallel}} + \frac{n}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right], \quad (7.12)$$

wobei die Normierung  $F_0 = 2\pi(mc)^3 f_0$  so gewählt ist, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} F_0 = 1 \quad (7.13)$$

gilt. Dabei bezeichnet  $\omega_p$  wieder die (Elektronen-)Plasmafrequenz.

Würde man nun den Lorentz-Faktor  $\gamma$  in Gl. (7.12) ignorieren, so erhielte man exakt Gleichung (4) von Harris<sup>30</sup>, ausgedrückt in den dimensionslosen Impulskoordinaten  $\varpi_{\parallel}$  und  $\varpi_{\perp}$ .

Eine partielle Integration der rechten Seite von Gl. (7.12) führt auf

$$1 = -\frac{i\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} F_0 \times \left\{ \kappa_{\parallel} J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) \frac{\partial}{\partial \varpi_{\parallel}} \left( \frac{\gamma}{\Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} + in} \right) + \frac{n}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \varpi_{\perp}} \left( \frac{\gamma J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{\Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} + in} \right) \right\}. \quad (7.14)$$

Im nichtrelativistischen Fall würde man nun die Ableitungen von  $\gamma$  nach  $\varpi_{\parallel}$  und  $\varpi_{\perp}$  in Gl. (7.14) ignorieren, so dass man Gleichung (7) von Harris<sup>30</sup> zurückgewinnen würde.

Führen wir stattdessen die angezeigten Ableitungen in Gl. (7.14) aus, so ergibt sich

$$1 = -\frac{i\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} F_0 \times \left\{ J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) \left[ (\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} + n) \left( \frac{1}{\gamma D} - \frac{\Gamma}{\gamma D^2} \right) - i \frac{\kappa_{\parallel}^2 \gamma}{D^2} \right] + \frac{n\gamma}{\varpi_{\perp} D} \frac{\partial J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{\partial \varpi_{\perp}} \right\}, \quad (7.15)$$

mit  $D \equiv \Gamma\gamma + i\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} + in$ .

Verwenden wir nun die folgende Eigenschaft der Besselfunktionen

$$\frac{2\nu}{z} \frac{dJ_{\nu}^2(z)}{dz} = J_{\nu-1}^2(z) - J_{\nu+1}^2(z), \quad (7.16)$$

so lässt sich Gl. (7.15) in der Form schreiben

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} F_0$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp) \left[ \frac{\kappa_\parallel^2 \gamma}{D^2} + i(\kappa_\parallel \varpi_\parallel + n) \left( \frac{1}{\gamma D} - \frac{\Gamma}{D^2} \right) \right] \right. \\ & \left. + i \frac{\kappa_\perp^2 \gamma}{2D} [J_{n-1}^2(\kappa_\perp \varpi_\perp) - J_{n+1}^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)] \right\}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Der Term, der  $\kappa_\parallel \varpi_\parallel + n$  enthält, entstammt ausschließlich relativistischen Effekten, die kein nichtrelativistisches Analogon besitzen.

Gleichung (7.17) stellt die Dispersionsrelation für longitudinale Wellenmoden unter den zu Beginn dieses Abschnittes genannten, ursprünglich von Harris<sup>30</sup> formulierten einschränkenden Bedingungen dar.

### 7.3 Manipulation der Dispersionsrelation

Es ist bekannt (siehe z. B. Lerche<sup>45, 47</sup>), dass

$$S_1(\alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(z)}{n - \alpha} = -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} J_\alpha(z) J_{-\alpha}(z) \quad (7.18a)$$

gilt, sowie

$$\begin{aligned} S_2(\alpha, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(z)}{(n - \alpha)^2} = \frac{\partial S_1(\alpha, z)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\pi^2 \cos \pi \alpha}{\sin^2 \pi \alpha} J_\alpha(z) J_{-\alpha}(z) - \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} [J_\alpha(z) J_{-\alpha}(z)]. \end{aligned} \quad (7.18b)$$

Weiterhin gilt aufgrund von

$$J_\mu(z) J_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi J_{\mu+\nu}(2z \cos \varphi) \cos[(\mu - \nu)\varphi] \quad (7.19a)$$

die folgende Relation:

$$J_\alpha(z) J_{-\alpha}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi J_0(2z \cos \varphi) \cos(2\alpha\varphi). \quad (7.19b)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J_\alpha(z) J_{-\alpha}(z) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi J_0(2z \cos \varphi) \sin(2\alpha\varphi). \quad (7.19c)$$



Unter Verwendung der Dispersionsrelation in der Form, wie sie durch Gl. (7.12) gegeben ist, können wir nun schreiben

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \left\{ \kappa_{\parallel} \gamma \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\parallel}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{n + \kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma} + \frac{\gamma}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) - (\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{n + \kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma} \right] \right\}, \quad (7.20a)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \gamma \left[ \frac{1}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} + \left( \kappa_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\parallel}} - \frac{1}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} (\kappa_{\parallel} - i\Gamma\gamma) \right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{n + \kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma} \right]. \quad (7.20b)$$

Mit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{n + \kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma} = \frac{\pi}{\sin[\pi(\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma)]} J_{\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma}(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) J_{-\kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma}(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) \quad (7.21)$$

erhalten wir eine kompakte Form für die Dispersionsrelation, nämlich

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \gamma \left\{ \frac{1}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} + \left[ \kappa_{\parallel} \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\parallel}} - \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right) + i \frac{\Gamma\gamma}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right] \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} J_{\alpha}(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) J_{-\alpha}(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) \right\}, \quad (7.22)$$

wobei  $\alpha = \kappa_{\parallel} \varpi_{\parallel} - i\Gamma\gamma$ .

Für Wellen, deren Ausbreitungsrichtung senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld liegt (d. h.  $\kappa_{\parallel} = 0$ ), ergibt sich

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \gamma \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \left[ \frac{1}{\varpi_{\perp}} - \frac{\pi\Gamma\gamma}{\varpi_{\perp} \sinh(\pi\Gamma\gamma)} J_{i\Gamma\gamma}(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) J_{-i\Gamma\gamma}(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) \right]. \quad (7.23)$$

### 7.3.1 Der nichtrelativistische Grenzfall

Der nichtrelativistische Grenzfall ergibt sich durch die näherungsweise gültige Festlegung  $\gamma = 1$ . Führen wir zur Vereinfachung

$$G_0(\varpi_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} F_0(\varpi_{\parallel}, \varpi_{\perp}) \quad (7.24)$$

ein, so lässt sich Gl. (7.23) in der folgenden Form schreiben

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp \frac{\partial G_0}{\partial \varpi_\perp} \left[ 1 - \frac{\pi \Gamma}{\sinh(\pi \Gamma)} |J_{i\Gamma}(\kappa_\perp \varpi_\perp)|^2 \right], \quad (7.25a)$$

woraus sich durch partielle Integration ergibt

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \frac{4\kappa_\perp \Gamma}{\sinh(\pi \Gamma)} \int_0^\infty d\varpi_\perp G_0(\varpi_\perp) \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi \cosh(2\Gamma \varphi) J_1(2\kappa_\perp \varpi_\perp \cos \varphi). \quad (7.25b)$$

Damit nimmt die Dispersionsrelation schließlich die Form an

$$1 = \frac{\omega_p^2 \pi \Gamma}{\Omega^2 \kappa^2 \sinh(\pi \Gamma)} \int_0^\infty d\varpi_\perp G_0(\varpi_\perp) \times [J_{1+i\Gamma}(\kappa_\perp \varpi_\perp) J_{-i\Gamma}(\kappa_\perp \varpi_\perp) + J_{1-i\Gamma}(\kappa_\perp \varpi_\perp) J_{i\Gamma}(\kappa_\perp \varpi_\perp)]. \quad (7.26)$$

### Nichtrelativistische Neutralpunkte für $\kappa_\parallel = 0$

Neutralpunkte von Gl. (7.26) treten *per definitionem* für  $\Gamma = 0$  auf. In diesem Fall ist die Wellenzahl eines solchen Neutralpunktes bestimmt durch

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa_\perp^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp \frac{\partial G_0}{\partial \varpi_\perp} [1 - J_0^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)] \quad (7.27a)$$

$$= \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa_\perp^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp G_0(\varpi_\perp) J_1(\kappa_\perp \varpi_\perp) J_0(\kappa_\perp \varpi_\perp). \quad (7.27b)$$

Man beachte, dass Gleichung (7.27a) *dann und nur dann* erfüllt werden kann, wenn  $\partial G_0 / \partial \varpi_\perp$  eine positive Komponente besitzt. Daher existiert für eine Verteilungsfunktion mit der Struktur  $G_0 \propto \delta(\varpi_\perp - \Xi)$  eine Folge von Neutralpunkten, wann immer  $J_1(\kappa_\perp \Xi) \times J_0(\kappa_\perp \Xi) > 0$  erfüllt ist. Im Falle  $G_0 \propto \exp[-\varpi_\perp^2 / \Upsilon^2]$  gibt es jedoch keinen Neutralpunkt, wie bereits von Harris<sup>30</sup> gezeigt wurde. In den hier dargestellten Überlegungen bezeichnen  $\Xi$  und  $\Upsilon$  zwei beliebige positive Konstanten.

Harris kommentierte diese Überlegungen so, dass Neutralpunkte existieren würden, falls  $J_1(\kappa_\perp \Xi) > 0$ . Demgegenüber haben wir hier jedoch erstmals gezeigt, dass stattdessen Neutralpunkte im Falle  $dJ_0^2(\alpha)/d\alpha > 0$  mit  $\alpha = \kappa_\perp \Xi$  existieren – ein Kriterium, das sich deutlich von dem ursprünglich von Harris angegebenen unterscheidet.

In der Nähe eines Neutralpunktes, wo  $\Gamma$  nahe bei Null ist, können wir Gl. (7.26) in eine Taylorreihe entwickeln und erhalten damit

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 \Gamma^2}{6} \right) \int_0^\infty d\varpi_\perp G_0(\varpi_\perp)$$

$$\times \left[ 2J_1(\kappa_\perp \varpi_\perp) J_0(\kappa_\perp \varpi_\perp) - \frac{4\Gamma^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \varphi^2 \cos \varphi J_1(2\kappa_\perp \varpi_\perp \cos \varphi) \right]. \quad (7.28)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp G_0(\varpi_\perp) J_1(\kappa_\perp \varpi_\perp) J_0(\kappa_\perp \varpi_\perp) \\ &= \Gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \left\{ \int_0^\infty d\varpi_\perp G_0(\varpi_\perp) \left[ \frac{\pi^2}{6} J_1(\kappa_\perp \varpi_\perp) J_0(\kappa_\perp \varpi_\perp) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \varphi^2 \cos \varphi J_1(2\kappa_\perp \varpi_\perp \cos \varphi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

womit gezeigt ist, dass  $\Gamma^2$  reell und positiv entweder zur einen oder zur anderen Seite derjenigen kritischen Wellenzahl ist, die dem Neutralpunkt entspricht. Interessanterweise hat Harris in seinem grundlegenden Artikel keine Vorschrift zur Berechnung der Wachstumsraten angegeben; er bemerkte lediglich das Vorhandensein einer Instabilität unter der Voraussetzung, dass Neutralpunkte existieren.

Im Falle des Fehlens von Neutralpunkten haben die Wellenmoden komplexe Phasengeschwindigkeiten und können sowohl anwachsend als auch gedämpft sein. In diesem Fall kann die Neutralpunkt-Methode jedoch keine Aussagen über Stabilität oder Instabilität machen.

### Nichtrelativistische Neutralpunkte für $\kappa_\parallel \neq 0$

Betrachten wir Gl. (7.22) im nichtrelativistischen Grenzfall, also mit  $\gamma = 1$ . Um Neutralpunkte mit  $\kappa_\parallel \neq 0$  zu erhalten, muss die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^\infty d\varpi_\parallel \int_0^\infty d\varpi_\perp \varpi_\perp \left[ \frac{1}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} \right. \\ & \quad \left. + \kappa_\parallel \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\parallel} - \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} \right) \frac{\pi}{\sin(\pi \kappa_\parallel \varpi_\parallel)} J_{\kappa_\parallel \varpi_\parallel}(\kappa_\perp \varpi_\perp) J_{-\kappa_\parallel \varpi_\parallel}(\kappa_\perp \varpi_\perp) \right] \end{aligned} \quad (7.30)$$

erfüllt sein.

Zwei Aspekte fallen dabei nun besonders auf. Erstens: Ist  $F_0$  eine symmetrische Funktion in  $\varpi_\parallel$ , so wären etwaige Neutralpunkte bestimmt durch

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^\infty d\varpi_\parallel \int_0^\infty d\varpi_\perp \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} + \frac{\pi \kappa_\parallel}{\sin(\pi \kappa_\parallel \varpi_\parallel)} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\parallel} \left| J_{\kappa_\parallel \varpi_\parallel}(\kappa_\perp \varpi_\perp) \right|^2 \right]. \quad (7.31)$$

Auf Gleichung (7.31) werden wir gleich zurückkommen.

Zweitens: Möchten wir die durch die Nullstellen von  $\sin(\pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel})$  entstehenden Singularitäten für *beliebige* Verteilungsfunktionen vermeiden, so müssen wir für Gl. (7.30) fordern, dass  $F_0 = F_0(\varpi_{\parallel} - \varpi_{\perp})$  gilt. Da  $F_0$  jedoch, wie zu Anfang bereits bemerkt, in  $\varpi_{\parallel}$  symmetrisch sein muss, um die Ladungsneutralität zu gewährleisten, ist diese Lösung nicht geeignet. Daher kann nur Gl. (7.31) fortbestehen, die wir nun in der Form schreiben können

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{\Omega^2\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} F_0|_{\varpi_{\perp}=0} + \frac{\omega_p^2}{\Omega^2\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \left[ \frac{\pi\kappa_{\parallel}}{\sin(\pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel})} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\parallel}} \Big|_{J_{\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}}(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})} \right]^2. \quad (7.32)$$

Für eine allgemeine Verteilungsfunktion besteht nun der einzige Weg, die multiplen Singularitäten von  $1/\sin(\pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel})$  zu vermeiden, darin, das Argument der Besselfunktion gleich null zu setzen, d. h.  $\kappa_{\perp} = 0$ . Neutralpunkte in  $\Gamma$  können daher nur existieren falls  $\kappa_{\parallel} \neq 0$  und  $\kappa_{\perp} = 0$ . In diesem Fall ist ein Neutralpunkt dann gegeben durch

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{\Omega^2\kappa_{\parallel}^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} F_0(\varpi_{\parallel}, \varpi_{\perp})|_{\varpi_{\perp}=0}. \quad (7.33)$$

Ist  $F_0|_{\varpi_{\perp}=0}$  positiv, so gibt es keine Neutralpunkte; nur im Falle eines negativen Wertes des Integrals in Gl. (7.33) können Neutralpunkte existieren.  $F_0$  stellt jedoch eine Verteilungsfunktion dar und ist als solche intrinsisch positiv. Dies zeigt also, dass es im Falle  $\kappa_{\parallel} \neq 0$  keine Neutralpunkte geben kann.

Für Verteilungsfunktionen mit kleinen  $\Gamma$  and  $\kappa_{\perp}$  betrachten wir das Verhalten der Dispersionsrelation in der Umgebung solcher Neutralpunkte. Wir schreiben daher

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \left\{ \frac{1}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} + \frac{\pi}{\sin(\pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}) - i\Gamma \cos(\pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel})} \right. \\ \times \left[ \kappa_{\parallel} \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\parallel}} - \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right) + i \frac{\Gamma}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right] \left[ \frac{1}{\hat{\Gamma}(1+\nu)\hat{\Gamma}(1-\nu)} \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}}{2} \right)^2 \left( \frac{1}{\hat{\Gamma}(2+\nu)\hat{\Gamma}(1-\nu)} + \frac{1}{\hat{\Gamma}(2-\nu)\hat{\Gamma}(1+\nu)} \right) \right] \right\}, \quad (7.34)$$

wobei  $\nu = \kappa_{\parallel} - i\Gamma$ . Zusätzlich haben wir die Besselfunktionen bis zur niedrigsten Ordnung in  $\kappa_{\perp}$  entwickelt.

Behalten wir nur diejenigen Terme, die symmetrisch in  $\varpi_{\parallel}$  sind, so erlaubt uns dies, Gl. (7.34) in der Form zu schreiben

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \left\{ \frac{1}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} + \frac{\pi}{\sin^2 \pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel} + \Gamma^2 \cos^2 \pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}} \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{1}{\hat{\Gamma}(1+\nu)\hat{\Gamma}(1-\nu)} - \left(\frac{\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}}{2}\right)^2 \left( \frac{1}{\hat{\Gamma}(2+\nu)\hat{\Gamma}(1-\nu)} + \frac{1}{\hat{\Gamma}(2-\nu)\hat{\Gamma}(1+\nu)} \right) \right] \\ & \times \left[ \kappa_{\parallel} \sin(\pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}) \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\parallel}} - i \cos(\pi\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}) \left( \Gamma\kappa_{\perp} + \frac{\Gamma^2}{\varpi_{\perp}} \right) \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

wobei an dieser Stelle

$$\hat{\Gamma}(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \quad (7.36)$$

die von der Wachstumsrate  $\Gamma$  zu unterscheidende Gammafunktion kennzeichnet.

Für reelles  $\Gamma$  ist der Term, der  $i\Gamma\kappa_{\perp} \cos(\kappa_{\parallel}\varpi_{\parallel}) \partial F_0 / \partial \varpi_{\perp}$  enthält, jedoch rein imaginär; Gl. (7.35) kann daher unter diesen Voraussetzungen nicht erfüllt werden:  $\Gamma$  muss somit also komplex sein. In Falle kleiner  $\Gamma$  und kleiner  $\kappa_{\perp}$  propagieren die Wellenmoden und wachsen zur gleichen Zeit an bzw. werden gedämpft. Man hat es daher mit Effekten eines resonanten Nenners zu tun, wodurch selektive Teilcheneffekte beschrieben werden.

Derselbe selektive Resonanzeffekt tritt für Wellenmoden auf, für die keine Neutralpunkte existieren – alle diese Moden kann man daher auf die gleiche Weise behandeln. Ein Verfahren zur Handhabung solcher resonanter Welle-Teilchen-Effekte ist in Abschnitt 7.4 angegeben, da das Hauptaugenmerk dieses Kapitels zunächst auf der Untersuchung von Wellenmoden liegt, die *keine* Resonanzeffekte umfassen.

### 7.3.2 Relativistische Neutralpunkte

#### Relativistische Neutralpunkte für $\kappa_{\parallel} = 0$

Um Neutralpunkte für  $\kappa_{\parallel} = 0$  im relativistischen Regime zu untersuchen, gehen wir von Gl. (7.20a) aus und erhalten

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa_{\perp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \gamma \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \left[ 1 + i\Gamma\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})}{n^2 + \Gamma^2\gamma^2} (n + i\Gamma\gamma) \right] \quad (7.37a)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa_{\perp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \gamma \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \left\{ [1 - J_0^2(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})] - 2\Gamma^2\gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})}{n^2 + \Gamma^2\gamma^2} \right\}. \quad (7.37b)$$

Neutralpunkte mit  $\Gamma = 0$  sind damit gegeben durch

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa_{\perp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \gamma \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} [1 - J_0^2(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})]. \quad (7.38)$$

In der Umgebung eines solchen Neutralpunktes erhalten wir die Gleichung

$$2\Gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa_{\perp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \gamma^3 \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp})}{n^2}$$

$$= \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa_\perp^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_\perp \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \gamma \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} [1 - J_0^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)] - 1, \quad (7.39)$$

so dass die Instabilität zur einen oder anderen Seite des Neutralpunktes *garantiert* ist.

An dieser Stelle sind insbesondere die erheblichen strukturellen Unterschiede von Gleichung (7.39) im Vergleich zur nichtrelativistischen Version aus Gl. (7.29) in Bezug auf die Instabilitätsrate zu beachten. Weiterhin fällt das relativ einfache Muster der Bestimmung von Neutralpunkten mit Hilfe von Gl. (7.38) (relativistisch) und Gl. (7.27a) (nichtrelativistisch) auf. Unterschiede in den Werten der Neutralpunkte hängen stark von  $\gamma$  ab, wie aus Gl. (7.38) klar ersichtlich ist.

### Relativistische Neutralpunkte für $\kappa_\perp \neq 0$

Für beliebige Werte von  $\kappa$  können Neutralpunkte existieren, falls in Gleichung (7.12)  $\Gamma = 0$  auftritt, woraus folgt

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_\parallel \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \varpi_\perp \gamma \left[ \frac{1}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} + \kappa_\parallel \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\parallel} - \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} \right) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n + \kappa_\parallel \varpi_\parallel}. \quad (7.40)$$

Nun gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n + \kappa_\parallel \varpi_\parallel} = \frac{J_0^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{\kappa_\parallel \varpi_\parallel} - 2\kappa_\parallel \varpi_\parallel \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n^2 - \kappa_\parallel^2 \varpi_\parallel^2}, \quad (7.41)$$

was eine ungerade Funktion von  $\varpi_\parallel$  ist.

Angenommen,  $F_0$  wäre gerade in  $\varpi_\parallel$ . Dann bliebe nur der Term übrig, der  $\partial F_0 / \partial \varpi_\parallel$  enthält. Schreibt man nun

$$\frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\parallel} = -\varpi_\parallel G(\varpi_\parallel, \varpi_\perp) \quad (7.42)$$

wobei  $G$  eine gerade Funktion von  $\varpi_\parallel$  ist, so kann ein Neutralpunkt existieren, falls

$$1 = \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_0^{\infty} d\varpi_\parallel \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \varpi_\perp \gamma J_0^2(\kappa_\perp \varpi_\perp) G(\varpi_\parallel, \varpi_\perp) + \frac{4\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_0^{\infty} d\varpi_\parallel \varpi_\parallel^2 \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \varpi_\perp \gamma G(\varpi_\parallel, \varpi_\perp) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{\varpi_\parallel^2 - n^2 / \kappa_\parallel^2}. \quad (7.43)$$

Das Integral in Gl. (7.43) hat jedoch einen nichtverschwindenden Imaginärteil, während  $\varpi_\parallel$  die Punkte  $\varpi_{\parallel,n} = n/\kappa_\parallel$  überquert; dieser Imaginärteil verschwindet dann und nur dann, wenn  $\kappa_\perp = 0$  gilt.

Daher sind sämtliche Neutralpunkte für  $\kappa_\parallel \neq 0$  durch Gl. (7.43) für  $\kappa_\perp = 0$  gegeben. Daraus ergibt sich

$$\kappa_\parallel^2 = \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2} \int_0^{\infty} d\varpi_\parallel \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \varpi_\perp \gamma G = \kappa_0^2, \quad (7.44)$$

wobei wir  $\kappa_0^2 > 0$  vorausgesetzt haben. Das bedeutet, dass wir von  $G$  verlangen, einen solchermaßen genügend großen positiven Bereich zu haben, dass die Beiträge etwaiger negativer Bereiche aufgehoben werden.

In der Umgebung eines jeden solchen Neutralpunktes kann man die Dispersionsrelation um  $\kappa_\perp = 0$  entwickeln. Damit erhalten wir

$$1 = \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2\kappa_\parallel^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_\parallel \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \varpi_\perp \gamma \left[ \frac{1}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} + \frac{1}{\kappa_\parallel \varpi_\parallel - i\Gamma\gamma} \right. \\ \left. \times \left( \kappa_\parallel \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\parallel} - \frac{1}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} (\kappa \varpi_\perp - i\Gamma\gamma) \right) \right], \quad (7.45)$$

was wir umformen können zu

$$1 - \frac{\kappa_0^2}{\kappa_\parallel^2} = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2\kappa_\parallel^2} \left[ -\Gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_\parallel \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \frac{\varpi_\perp \gamma^3}{\kappa_\parallel^2 \varpi_\parallel^2 + \Gamma^2 \gamma^2} \left( G + \frac{1}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} \right) \right. \\ \left. + i\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_\parallel \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \frac{\gamma^2}{\kappa_\parallel^2 \varpi_\parallel^2 + \Gamma^2 \gamma^2} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} \right]. \quad (7.46)$$

Im Allgemeinen wird Gleichung (7.46) jedoch einen nichtverschwindenden Imaginärteil aufweisen. In der Umgebung von Neutralpunkten ist  $\Gamma$  daher generell eine komplexe Zahl; dies beschreibt Wellenmoden, die eine bevorzugte Ausbreitungsrichtung haben, anstatt ausschließlich anzuwachsen oder abzuklingen.

## 7.4 Effekte des resonanten Nenners

In diesem etwas technischeren Abschnitt entwickeln wir ein Verfahren zur Handhabung resonanter Welle-Teilchen-Effekte. Diese sind, obwohl nicht Hauptgegenstand des aktuellen Kapitels, hier dennoch aufgeführt, da sie insbesondere im relativistischen Bereich immer wieder in Erscheinung treten.

### 7.4.1 Der Effekt resonanter Teilchen für $\kappa_\parallel = 0$

Für  $\kappa = 0$  nimmt die relativistische Dispersionsrelation die Form an

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_\parallel \int_0^{\infty} d\varpi_\perp \varpi_\perp \gamma \left[ \frac{1}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} + i \frac{\Gamma\gamma}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n - i\Gamma\gamma} \right], \quad (7.47)$$

mit  $\gamma = [1 + \varpi_\parallel^2 + \varpi_\perp^2]^{1/2}$ .

Da wir uns mit dem Effekt resonanter Teilchen beschäftigen, definieren wir in Gl. (7.47)  $\Gamma = -i\omega$ , wobei  $\omega$  sowohl einen Real- als auch einen Imaginärteil aufweist ( $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ).

Gleichung (7.47) lässt sich dann schreiben als

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varpi_{\parallel} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \gamma \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \left[ 1 - J_0^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) - 2\gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{1 + \varpi_{\perp}^2 + \varpi_{\parallel}^2 - n^2/\omega^2} \right]. \quad (7.48)$$

Man beachte das Vorhandensein des resonanten Nenners in Gl. (7.48), der gänzlich ohne Entsprechung im nichtrelativistischen Grenzfall ist. Der resonante Nenner hängt ausschließlich von der Teilchenenergie ab – und nicht separat von  $\varpi_{\perp}$  und  $\varpi_{\parallel}$ .

Anstelle von  $\varpi_{\parallel}$  und  $\varpi_{\perp}$  führen wir in Gl. (7.48) nun  $E = [1 + \varpi_{\parallel}^2 + \varpi_{\perp}^2]^{1/2}$  und  $\varpi_{\perp}$  als Basiskoordinaten ein. Für die Ableitung der Verteilungsfunktion nach  $\varpi_{\perp}$  und die Differenziale gilt daher

$$\left. \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right|_{\varpi_{\parallel}} = \left. \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} \right|_E + \frac{\varpi_{\perp}}{E} \frac{\partial F_0}{\partial E} \quad (7.49a)$$

und

$$d\varpi_{\parallel} d\varpi_{\perp} = d\varpi_{\perp} \frac{dE}{E} \sqrt{E^2 - 1 - \varpi_{\perp}^2}. \quad (7.49b)$$

Damit können wir nun Gl. (7.48) schreiben als

$$1 = \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2 \kappa^2} \int_1^{\infty} dE \int_0^{\sqrt{E^2-1}} d\varpi_{\perp} \sqrt{E^2 - 1 - \varpi_{\perp}^2} \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} + \frac{\varpi_{\perp}}{E} \frac{\partial F_0}{\partial E} \right] \\ \times \left[ 1 - J_0^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) - 2E^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{E^2 - n^2/\omega^2} \right]. \quad (7.50)$$

Mit der Substitution  $u = 1/E$  nimmt Gleichung (7.48) die folgende Form an

$$\kappa_{\perp}^2 = \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2} \int_0^1 \frac{du}{u^3} \int_0^{\sqrt{1-u^2}} d\varpi_{\perp} \sqrt{1 - u^2 (1 + \varpi_{\perp}^2)} \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} - \varpi_{\perp} u^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \right] \\ \times \left[ 1 - J_0^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) + 2\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{n^2 u^2 - \omega^2} \right]. \quad (7.51)$$

Für  $\omega \in \mathbb{R}$  treten Resonanzen auf, und zwar immer dann wenn die Bedingung  $u = \omega/n$  erfüllt ist, was im Intervall  $0 \leq u \leq 1$  die Einschränkung  $n \geq \omega$  bedingt. Unter Verwendung der Plemelj-Formel,

$$\frac{1}{n^2 u^2 - \omega^2} = \mathcal{P} \frac{1}{n^2 u^2 - \omega^2} + i \frac{\pi}{2|\omega|} \delta(nu + |\omega|), \quad (7.52)$$



wobei  $\mathcal{P}$  den *Cauchyschen Hauptwert*<sup>a</sup> bezeichnet, erlaubt uns dies, die rechte Seite von Gl. (7.47) für  $\omega_i \rightarrow 0$  in der Form zu schreiben

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{du}{u^3} \int_0^{\sqrt{1-u^2}} d\varpi_{\perp} \sqrt{1-u^2(1+\varpi_{\perp}^2)} \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} - \varpi_{\perp} u^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \right] \\
 & \times \left[ 1 - J_0^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) + 2\omega_r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})}{n^2 u^2 - \omega_r^2} \right] - i \frac{2\pi\omega_p^2 |\omega_r|}{\Omega^2} \sum_{n \geq \omega_r} \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{d\varpi_{\perp}}{(|\omega_r|/n)^3} \\
 & \times \sqrt{1 - \frac{\omega_r^2}{n^2} (1 + \varpi_{\perp}^2)} J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} - \varpi_{\perp} \left| \frac{\omega_r}{n} \right|^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \right] \Big|_{u=\omega_r/n} \\
 & \equiv D_R(\omega_r, \kappa_{\perp}) + iD_I(\omega_r, \kappa_{\perp}). \tag{7.53}
 \end{aligned}$$

Für ein allgemeines  $\omega (= \omega_r + i\omega_i)$  ist Gleichung (7.50) eine meromorphe Funktion<sup>b</sup> von  $\omega$  für reelle  $\kappa_{\perp}$ . Damit folgt

$$\kappa_{\perp}^2 = D(\omega_r, \omega_i) = D_R(\omega_r, \omega_i) + iD_I(\omega_r, \omega_i), \tag{7.54}$$

mit den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial D_R}{\partial \omega_r} = \frac{\partial D_I}{\partial \omega_i} \quad \text{and} \quad \frac{\partial D_R}{\partial \omega_i} = -\frac{\partial D_I}{\partial \omega_r}. \tag{7.55}$$

Betrachten wir nun

$$\kappa_{\perp}^2 = D_R(\omega_r, \omega_i) \simeq D_R(\omega_r, 0) + \omega_i \left. \frac{\partial D_R(\omega_r, \omega_i)}{\partial \omega_i} \right|_{\omega_i=0} + \dots \tag{7.56a}$$

und

$$0 = D_I(\omega_r, \omega_i) \simeq D_I(\omega_r, 0) + \omega_i \left. \frac{\partial D_I(\omega_r, \omega_i)}{\partial \omega_i} \right|_{\omega_i=0} + \dots \tag{7.56b}$$

<sup>a</sup>Der Cauchysche Hauptwert (*Cauchy principal value*) ist definiert durch

$$\mathcal{P} \int_a^b dz f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{z_0-\epsilon} dz f(z) + \int_{z_0+\epsilon}^b dz f(z) \right),$$

wobei  $z_0 \in ]a, b[$  eine Polstelle der Funktion  $f(z)$  bezeichnet.

<sup>b</sup>*Meromorphe Funktionen* sind eine Erweiterung des Begriffes der holomorphen Funktionen dahingehend, dass diese Funktionen eine Menge von isolierten Polstellen besitzen können. Beispielsweise ist die Funktion  $z^{-1}$  meromorph; ihre Polstellenmenge ist  $\{0\}$ . Ebenso sind die Funktionen  $\tan z$  und  $\cot z$  meromorph, nicht jedoch  $\exp(z^{-1})$ , da 0 keine Polstelle, sondern eine *wesentliche Singularität* dieser Funktion ist.

Unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen können wir dann die Ersetzung  $\partial D_I/\partial\omega_i = \partial D_R/\partial\omega_r$  vornehmen, womit folgt

$$\omega_i \simeq -\frac{D_I(\omega_r, 0)}{\frac{\partial D_R(\omega_r, 0)}{\partial\omega_r}}. \quad (7.57)$$

Mit den offensichtlichen Identifikationen  $D_I(\omega_r, 0) = D_I(\omega_r, \kappa_\perp)$  und  $D_R(\omega_r, 0) = D_R(\omega_r, \kappa_\perp)$  erhält man damit für  $\omega_r > 0$

$$\begin{aligned} \omega_i \simeq & -\left\{ \frac{\pi\omega}{2} \sum_{n \geq \omega} \int_0^{\sqrt{(n/\omega)^2-1}} \frac{d\varpi_\perp}{(\omega/n)^3} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{n^2} (1 + \varpi_\perp^2)} J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp) \right. \\ & \times \left[ \frac{\partial F_0}{\partial\varpi_\perp} - \varpi_\perp \left( \frac{\omega}{n} \right)^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \right] \Big|_{u=\frac{\omega}{n}} \left. \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial\omega} \left[ \omega^2 \mathcal{P} \int_0^1 \frac{du}{u^3} \int_0^{\sqrt{1-u^2}} d\varpi_\perp \sqrt{1-u^2(1+\varpi_\perp^2)} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \frac{\partial F_0}{\partial\varpi_\perp} - \varpi_\perp u^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n^2 u^2 - \omega^2} \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (7.58)$$

wobei  $\omega \equiv \omega_r$  gilt.

Für kleine  $\omega_i$  tritt Instabilität nun auf, wenn die rechte Seite von Gl. (7.58) positiv ist. Der Wert für  $\omega$  ist dann gegeben durch

$$\kappa_\perp^2 = \frac{4\omega_p^2 \omega^2}{\Omega} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{du}{u^3} \int_0^{\sqrt{1-u^2}} d\varpi_\perp \sqrt{1-u^2(1+\varpi_\perp^2)} \left[ \frac{\partial F_0}{\partial\varpi_\perp} - \varpi_\perp u^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n^2 u^2 - \omega^2}. \quad (7.59)$$

Gleichung (7.59) muss einen positiven Wert für  $\omega^2$  liefern.

Wir vertauschen nun die Reihenfolge der Integration in Gl. (7.59), so dass  $u$  im Intervall  $0 \leq u \leq \varepsilon_\perp^{-1}$  liegt, wobei  $0 \leq \varpi_\perp \leq \infty$  gilt und wir  $\varepsilon_\perp = \sqrt{1 + \varpi_\perp^2}$  definiert haben. Dann definieren wir  $x = \varepsilon_\perp u$ , so dass  $0 \leq x \leq 1$  und  $0 \leq \varpi_\perp \leq \infty$  die relevanten Intervalle sind. Gl. (7.59) nimmt damit die Form an

$$\begin{aligned} \kappa_\perp^2 = & \frac{4\omega_p^2 \omega^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \sqrt{1-x^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp \varpi_\perp \varepsilon_\perp^2 \left[ \frac{\varepsilon_\perp^2}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial\varpi_\perp} + x(1-x^2) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right] \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n^2 x^2 - \omega^2 - \omega^2 \varpi_\perp^2}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Für  $\omega \gg 1$  kann Gleichung (7.60) geschrieben werden als

$$\kappa_\perp^2 = -\frac{4\omega_p^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \sqrt{1-x^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp \varpi_\perp \varepsilon_\perp \left[ \frac{\varepsilon_\perp^2}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial\varpi_\perp} + x(1-x^2) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right]$$

$$\times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) + \frac{x^2}{\omega^2 \varepsilon_{\perp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) + \dots \right]. \quad (7.61)$$

Aufgrund von

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) = \frac{1}{2} [1 - J_0^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})] \quad (7.62a)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) = \frac{(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})^2}{4} \quad (7.62b)$$

nimmt Gl. (7.61) die Form an

$$\kappa_{\perp}^2 \left[ 1 + \frac{\mathcal{L}}{\omega^2} \right] = -\mathcal{H}(\kappa_{\perp}), \quad (7.63)$$

wobei

$$\mathcal{L} = \frac{2\omega_p^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x} \sqrt{1-x^2} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp}^3 \left[ \frac{\varepsilon_{\perp}^2}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} + x(1-x^2) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right] \quad (7.64a)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\kappa_{\perp}) &= \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \sqrt{1-x^2} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} \varepsilon_{\perp}^2 \\ &\times \left[ \frac{\varepsilon_{\perp}^2}{\varpi_{\perp}} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} + x(1-x^2) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right] [1 - J_0^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp})] \end{aligned} \quad (7.64b)$$

gelten, mit

$$\frac{\partial \kappa_{\perp}^2}{\partial \omega} = -\frac{\kappa_{\perp}^2}{\omega \mathcal{H}(\kappa_{\perp})} [\kappa_{\perp}^2 + \mathcal{H}(\kappa_{\perp})] \left[ 1 - \frac{\kappa_{\perp}}{2} \frac{\partial \ln \mathcal{H}(\kappa_{\perp})}{\partial \kappa_{\perp}} \right]^{-1} \quad (7.65)$$

sowie

$$\omega^2 = -\frac{\mathcal{L}}{1 + \mathcal{H}(\kappa_{\perp})/\kappa_{\perp}^2} \gg 1. \quad (7.66)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \omega_i &\simeq \left\{ \frac{\pi \omega_p^2 \mathcal{L} \mathcal{H}(\kappa_{\perp})}{2\Omega^2} \sum_{n \geq \omega_r} \int_0^{\sqrt{n^2/\omega_r^2 - 1}} \frac{d\varpi_{\perp}}{(|\omega_r|/n)^3} \right. \\ &\times \sqrt{1 - \frac{\omega_r^2}{n^2} (1 + \varpi_{\perp}^2)} J_n^2(\kappa_{\perp} \varpi_{\perp}) \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_{\perp}} - \varpi_{\perp} \left( \frac{|\omega_r|}{n} \right)^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \Big|_{u=\omega_r/n} \right] \\ &\times \left. \left[ 1 - \frac{\kappa_{\perp}}{2} \frac{\partial \ln \mathcal{H}(\kappa_{\perp})}{\partial \kappa_{\perp}} \right] [\kappa_{\perp}^2 + \mathcal{H}(\kappa_{\perp})]^{-2} \right\}, \end{aligned} \quad (7.67)$$

mit  $u = x/\varepsilon_\perp$ .

Für  $\omega \ll 1$  können wir Gleichung (7.60) schreiben als

$$\begin{aligned} \kappa_\perp^2 &= -\frac{4\omega_p^2\omega^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x^5} \sqrt{1-x^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp \varpi_\perp \varepsilon_\perp^2 \\ &\times \left[ \frac{\varepsilon_\perp^2}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} + x(1-x^2) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right] \sum_{n=1}^\infty \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n^2}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Nun folgt

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \varphi^2 J_0^2(2\kappa_\perp \varpi_\perp \cos \varphi) - \frac{\pi^2}{12} J_0^2(\kappa_\perp \varpi_\perp), \quad (7.69)$$

so dass Gl. (7.68) die Form annimmt

$$\kappa_\perp^2 = \omega^2 \mathcal{M}(\kappa_\perp), \quad (7.70)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\kappa_\perp) &= -\frac{4\omega_p^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x^5} \sqrt{1-x^2} \int_0^\infty d\varpi_\perp \varpi_\perp \varepsilon_\perp^2 \left[ \frac{\varepsilon_\perp^2}{\varpi_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} + x(1-x^2) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right] \\ &\times \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \varphi^2 J_0^2(2\kappa_\perp \varpi_\perp \cos \varphi) - \frac{\pi^2}{12} J_0^2(\kappa_\perp \varpi_\perp) \right]. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Damit gilt

$$\frac{\partial \kappa_\perp^2}{\partial \omega} = 2\kappa_\perp \sqrt{\mathcal{M}(\kappa_\perp)} \left[ 1 - \frac{\kappa_\perp}{2} \frac{\partial \ln \mathcal{M}(\kappa_\perp)}{\partial \kappa_\perp} \right]^{-1}. \quad (7.72)$$

Der Imaginärteil der Frequenz,  $\omega_i$ , ist dann bestimmt durch

$$\begin{aligned} \omega_i &\simeq \frac{\pi\omega_p^2}{\Omega^2} \sum_{n \geq \omega_r}^\infty \int_0^{\sqrt{n^2/\omega_r^2 - 1}} \frac{d\varpi_\perp}{(\omega_r/n)^3} \sqrt{1 - \frac{\omega_r^2}{n^2} (1 + \varpi_\perp^2)} \frac{J_n^2(\kappa_\perp \varpi_\perp)}{\mathcal{M}(\kappa_\perp)} \\ &\times \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \varpi_\perp} - \varpi_\perp \left( \frac{\omega_r}{u} \right)^3 \frac{\partial F_0}{\partial u} \Big|_{u=\omega_r/n} \right] \left[ 1 - \frac{\kappa_\perp}{2} \frac{\partial \ln \mathcal{M}(\kappa_\perp)}{\partial \kappa_\perp} \right]. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Als nächstes gehen wir von der Situation eines relativistischen, nur schwach anisotropen Plasmas aus, für das wir den Ansatz machen

$$F_0(x, \varpi_\perp) = \varepsilon_\perp^{-2} [H(x) + \varepsilon_\perp^{-2} G(x)], \quad (7.74)$$

wobei  $H(x)$  und  $G(x)$  lediglich der Normierungsbedingung aus Gl. (7.3) unterliegen. Gleichung (7.60) lässt sich damit schreiben als

$$\begin{aligned} \kappa_{\perp}^2 = & -\frac{4\omega_p^2\omega^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\varpi_{\perp} \varpi_{\perp} J_n^2(\kappa_{\perp}\varpi_{\perp}) \\ & \times \left[ \frac{x(1-x^2) \frac{\partial H}{\partial x} - 2H}{n^2x^2 - \omega^2 - \omega^2\varpi_{\perp}^2} + \frac{x(1-x^2) \frac{\partial G}{\partial x} - 4G}{(1+\varpi_{\perp}^2)(n^2x^2 - \omega^2 - \omega^2\varpi_{\perp}^2)} \right]. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Aufgrund von

$$\int_0^{\infty} dx x \frac{J_n^2(x)}{x^2 + a^2} = I_n(a)K_n(a), \quad \text{für } \Re(a) > 0, \quad (7.76)$$

wobei  $I_n(a)$  und  $K_n(a)$  die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art bezeichnen (s. Anhang C.1), können wir Gl. (7.75) umformen zu

$$\begin{aligned} \kappa_{\perp}^2 = & \frac{4\omega_p^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ x(1-x^2) \frac{\partial H}{\partial x} - 2H \right] \right. \\ & \times I_n \left( \kappa_{\perp} \sqrt{1 - \frac{n^2x^2}{\omega^2}} \right) K_n \left( \kappa_{\perp} \sqrt{1 - \frac{n^2x^2}{\omega^2}} \right) - \frac{\omega^2}{n^2x^2} \left[ x(1-x^2) \frac{\partial G}{\partial x} - 4G \right] \\ & \left. \times \left[ I_n(\kappa_{\perp})K_n(\kappa_{\perp}) - I_n \left( \kappa_{\perp} \sqrt{1 - \frac{n^2x^2}{\omega^2}} \right) K_n \left( \kappa_{\perp} \sqrt{1 - \frac{n^2x^2}{\omega^2}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Mit Hilfe der Definitionen  $G = x^4(1-x^2)^{-2}T(x)$  und  $H = x^2(1-x^2)^{-1}R(x)$  können wir Gleichung (7.75) in der kompakteren Form

$$\begin{aligned} \kappa_{\perp}^2 = & \frac{4\omega_p^2}{\Omega^2} \mathcal{P} \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\omega^2}{n^2} \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right] I_n \left( \kappa_{\perp} \sqrt{1 - \frac{n^2x^2}{\omega^2}} \right) \right. \\ & \left. \times K_n \left( \kappa_{\perp} \sqrt{1 - \frac{n^2x^2}{\omega^2}} \right) - \frac{\omega^2}{n^2} \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial T}{\partial x} I_n(\kappa_{\perp})K_n(\kappa_{\perp}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

ausdrücken.

## 7.5 Zusammenfassung

Das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren verallgemeinert die von Harris<sup>30</sup> vorgestellte Methode der Neutralpunkte im Wellenzahlraum durch die Einbeziehung von relativistischen Effekten. Zu diesem Zweck haben wir die gleichen Bedingungen wie Harris

zugrunde gelegt, insbesondere eine unendliche Ionenmasse, um so die Ionen stationär zu halten, und die Vernachlässigung von Magnetfeldfluktuationen. Wir haben – unter diesen starken Einschränkungen, die, wir noch zeigen werden, bedeutenden Einfluss auf die Dispersionsrelation haben – eine allgemeine Klasse instabiler Wellen betrachtet, nämlich sich in einem in ein Hintergrund-Magnetfeld eingebetteten Plasma ausbreitende longitudinale Wellen. Die Ausbreitungsrichtung muss dabei, im Gegensatz zu Kapitel 6, *nicht* notwendigerweise entweder parallel oder senkrecht zum Hintergrundmagnetfeld sein, was sehr viel allgemeinere Betrachtungen zulässt. Darüber hinaus wurden zunächst nur solche Wellen betrachtet, die unabhängig von resonanten Welle-Teilchen-Effekten sind; eine Vorschrift zur Behandlung solcher resonanten Effekte wurde im Anschluss daran in Abschnitt 7.4 entwickelt. Elektromagnetische Wellenmoden wurden in diesem Kapitel ignoriert, da relativistische Effekte in Ergänzung zur ursprünglichen, longitudinalen Harris-Instabilität unter präzise denselben Bedingungen untersucht wurden, wie sie von Harris<sup>30</sup> aufgestellt worden waren. Wie wir gezeigt haben, ergaben sich im Vergleich zu den ursprünglichen Ergebnissen von Harris substanzielle quantitative Modifikationen.

In Kapitel 8 werden wir als Folgerung daraus die einschränkenden Bedingungen lockern und transversale Wellenmoden wie auch Kopplungseffekte zwischen elektrostatischer und elektromagnetischer Wellenmode betrachten. Darüber hinaus werden wir für einfache Beispiele von Verteilungsfunktionen quantitative, numerisch berechnete Werte für die Wachstums- und Dämpfungsrate vorstellen.

---

# 8 Moden-Kopplung

*Ausgehend von Kapitel 7 wird in diesem Kapitel das Konzept der Neutralpunkte durch die Einbeziehung der Ionenbewegung und der Störungen des Magnetfeldes erweitert. Dabei wird insbesondere die Kopplung von elektrostatischer und elektromagnetischer Wellenmode anhand von numerischen Berechnungen der Wachstumsraten untersucht.*

## 8.1 Einleitung

Die im vorherigen Kapitel untersuchte Neutralpunktmethode ist von Harris<sup>30</sup> für eine einfache Situation aufgestellt worden, in der das fluktuierende Magnetfeld vernachlässigt wurde und die Ionen als unendlich schwer angenommen wurden; damit ergaben sich rein elektrostatische Wellenmoden, die nur unter diesen speziellen Bedingungen gültig sind. Dieses Kapitel erlaubt dagegen nicht nur die Anwesenheit von fluktuierenden Magnetfeldern, so dass eine Kopplung zwischen den elektrostatischen ( $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ) und den elektromagnetischen ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ) Komponenten des Wellenfeldes auftritt, sondern bezieht auch bewegliche Ionen sowie nach wie vor die relativistischen Aspekte mit ein. Die allgemeine Entwicklung der Neutralpunkt-Methode unter diesen weit gefassten Bedingungen ist vollständig neu und führt auf kinetische Plasma-Instabilitäten, die

- durch keine andere Methode hergeleitet werden können,
- relativistisch korrekt sind – was von großem Nutzen für die Anwendung auf die Jets von Aktiven Galaktischen Kernen oder  $\gamma$ -ray Bursts ist,
- zeigen, wie die Weibel-Instabilität in der Gegenwart eines umgebenden Magnetfeldes modifiziert wird, wobei eine Kopplung zwischen den verschiedenen Wellenkomponenten auftritt, und
- mehr Einsicht in das Verhalten kinetischer Instabilitäten erlaubt, als es eine magnetohydrodynamische Behandlung gestatten würde.

Das dominante physikalische Verhalten solcher Instabilitäten, die einzig von den Bulk-Eigenschaften<sup>a</sup> des Plasmas abhängen, besteht darin, dass sie dazu neigen, unter einer Vielzahl von Konfigurationen der Parameter des Plasmas aufzutreten. Diese Eigenschaft unterscheidet sie fundamental von resonanten Welle-Teilchen-Instabilitäten, die extrem empfindlich für die kleinskaligen Details der Plasma-Verteilungsfunktionen sind. Ist daher ein Plasma stabil gegenüber resonanten Wellen, so kann es immer noch instabil in Hinsicht auf seine Bulk-Eigenschaften sein: Bulk-Instabilitäten können somit tiefgreifende Konsequenzen für die Stabilität des Plasmas haben. Durch die Einbeziehung der

---

<sup>a</sup>engl.: bulk properties, durch die Gesamtheit des Plasmas bestimmte Eigenschaften

relativistischen Aspekte ist diese Art von Instabilitäten für viele Situationen von Nutzen, die in relativistischen astrophysikalischen Plasmen beobachtet werden können. Unseres Wissens nach ist jedoch bislang die vollständige dreidimensionale Situation eines relativistischen Plasmas unter Einbeziehung der Kopplungseffekte zwischen longitudinalen und transversalen Moden noch nicht untersucht worden. Dies und die sich daraus ergebenden interessanten Effekte werden daher Inhalt des aktuellen Kapitels sein.

Eine Diskussion der relativistischen kinetischen Weibel-Instabilität in Abwesenheit eines homogenen Hintergrund-Magnetfeldes wurde kürzlich von Schaefer-Rolffs et al.<sup>77</sup> durchgeführt. Eine Untersuchung der relativistischen longitudinalen weibel-ähnlichen Instabilität in Anwesenheit eines Hintergrund-Magnetfeldes unter den von Harris gegebenen Bedingungen wurde in Kapitel 7 vorgestellt; diese Bedingungen bestanden in der Vernachlässigung 1. der Ionenbewegung und 2. des fluktuierenden Magnetfeldes. Die vollständig relativistische Situation unter Einbeziehung sowohl der Ionenbewegung als auch der fluktuierenden Magnetfelder in Anwesenheit eines umgebenden, gleichförmigen Magnetfeldes ist daher nun Gegenstand dieses Kapitels. Eine allgemeine Untersuchung der  $3 \times 3$ -Determinante, mit der generell sämtliche linearen Wellen in einem Plasma in Anwesenheit eines homogenen Magnetfeldes beschrieben werden, steht jedoch nach wie vor aus und ist weit davon entfernt, abgeschlossen zu sein. Die Hauptursache für die begrenzten Informationen, die bislang zur Verfügung stehen, liegt in der mathematischen Komplexität dieser  $3 \times 3$ -Determinante; dieses Kapitel stellt daher keinesfalls eine vollständige Untersuchung der Determinante dar, sondern baut auf der Pionierarbeit von Harris auf, die es erlaubt, weit gefasste Klassen von Verteilungsfunktionen hinsichtlich ihrer Bulk-Eigenschaften auf Stabilität oder Instabilität zu untersuchen.

Das von Harris entworfene Schema basiert auf dem in Kapitel 7 ausführlich beschriebenen Konzept des Neutralpunktes im Wellenzahlraum. Gestattet eine Klasse von Verteilungsfunktionen die Existenz solcher Neutralpunkte, an denen die Wellenfrequenz verschwindet, so hat das Plasma entweder zur einen oder zur anderen Seite (im Wellenzahlraum) des Neutralpunktes eine zeitlich exponentiell anwachsende Mode, die keine propagierende Komponente besitzt. Obwohl die Neutralpunkt-Methode nicht allumfassend ist – in dem Sinne, dass Verteilungsfunktionen ohne Neutralpunkte dennoch instabil sein können –, so stellt ein solches Vorgehen trotz dieser Einschränkung ein mächtiges Werkzeug zur Auswertung von Plasma-Instabilitäten im Allgemeinen und relativistischen Effekten im Besonderen dar.

Da die mathematischen Details dieses Kapitels zwar sehr langwierig, jedoch nicht übermäßig kompliziert sind, ist der größte Teil der technischen Einzelheiten in zwei Abschnitten des Anhangs B dargestellt; im Folgenden werden daher nur die wesentlichen Punkte der mathematischen Herleitung angeführt.

## 8.2 Technische Herleitung

In einem relativistischen Plasma ist die volle  $3 \times 3$ -Determinante, welche die Propagation elektromagnetischer Wellen mit der Orts- und Zeitabhängigkeit  $\exp [ik_{\parallel}z + ik_{\perp}x - i\omega t]$  beschreibt, wobei  $\hat{e}_z$  die Richtung des gleichförmigen Hintergrund-Magnetfeldes der Stär-



ke  $B_0$  ist, durch

$$\det(\Lambda_{lm}) = 0 \quad (8.1)$$

gegeben, wobei  $\Lambda_{lm}$  den in Kapitel 5 hergeleiteten Maxwell-Operator aus Gl. (5.10) bezeichnet. Der darin enthaltene relativistische Leitfähigkeitstensor  $\sigma_{lm}$  ist durch

$$\sigma_{lm} = -2\pi i \sum_a e_a^2 n_a \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_{lm}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_{a,0}/\gamma} \quad (8.2a)$$

gegeben, mit

$$T_{lm} = \begin{pmatrix} z^{-2} n^2 J_n^2(z) v_{\perp} \hat{U} f_a & i z^{-1} n J_n(z) J_n'(z) v_{\perp} \hat{U} f_a & z^{-1} n J_n^2(z) v_{\perp} \hat{W} f_a \\ -i z^{-1} n J_n(z) J_n'(z) v_{\perp} \hat{U} f_a & J_n'^2(z) v_{\perp} \hat{U} f_a & -i J_n(z) J_n'(z) v_{\perp} \hat{W} f_a \\ z^{-1} n J_n^2(z) v_{\parallel} \hat{U} f_a & i J_n(z) J_n'(z) v_{\parallel} \hat{U} f_a & J_n^2(z) v_{\parallel} \hat{W} f_a \end{pmatrix}, \quad (8.2b)$$

wobei  $z = k_{\perp} p_{\perp} / (m_a \Omega_{a,0})$ , und  $\Omega_{a,0} = e_a B_0 / (m_a c)$  die *nichtrelativistische* Gyrofrequenz bezeichnet. Weiterhin bezeichnet  $J_n' = dJ_n(z)/dz$  die Ableitung der Besselfunktionen Ableitung nach  $z$ . Die Summe über  $a$  erstreckt sich über alle Teilchensorten des Plasmas und  $\gamma = [1 + (p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2) / (m_a c)^2]^{1/2}$  ist der relativistische Lorentzfaktor.

Die Differenzialoperatoren  $\hat{U}$  und  $\hat{W}$  sind gegeben durch

$$\hat{U} f = \frac{\partial f_a}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma m_a \omega} \Delta \quad (8.3a)$$

$$\equiv A + \frac{k_{\parallel}}{\omega} B \quad (8.3b)$$

$$\hat{W} f = \frac{\partial f_a}{\partial p_{\parallel}} - \frac{n\Omega_a}{\gamma \omega p_{\perp}} \Delta \quad (8.3c)$$

$$\equiv C - \frac{n}{\omega} D \quad (8.3d)$$

mit

$$\Delta = \left( p_{\perp} \frac{\partial f_a}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_a}{\partial p_{\perp}} \right). \quad (8.3e)$$

Im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln, die stets verschiedene, teils drastische Näherungen und Einschränkungen verwendet haben, widmen wir uns nun zunächst der allgemeinen Auswertung von Gl. (8.1), um  $\omega$  als Funktion von  $k_{\perp}$  und  $k_{\parallel}$  zu bestimmen – darin liegt die große technische Herausforderung.

Letztlich werden später in diesem Kapitel nur senkrechte Wellen mit  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$  behandelt, da, wie im Haupttext und in den Anhängen zu diesem Kapitel ausgeführt ist, die Suche nach kinetischen Plasma-Instabilitäten mit  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} \neq 0$  noch um ein Beträchtliches verwickelter ist. Jedoch kann der in den Anhängen entwickelte mathematische Rahmen der allgemeinen Neutralpunkt-Methode auch auf diese Situation angewendet

werden – dies in allen Einzelheiten auszuführen würde jedoch den Rahmen dieses Kapitels sprengen. Der allgemeine Fall wird daher in zukünftigen Arbeiten behandelt, unter Verwendung der hier angegebenen Methodik.

Wie in Anhang B.2 gezeigt, können für Wellen, die sich strikt senkrecht zum umgebenden Magnetfeld ausbreiten, beträchtliche Vereinfachungen der Dispersionsrelation erzielt werden. Insbesondere wird das Neutralpunkt-Konzept (s. Kapitel 7) verwendet, wobei man zunächst nach Fällen mit  $\omega = 0$  und  $k_{\perp} \neq 0$  sucht und danach die Dispersionsrelation zu niedrigster Ordnung in  $\omega$  in der Umgebung solcher Neutralpunkte auswertet. Damit lässt sich nach längerer Rechnung (s. Anhang B.2) zeigen, dass die Dispersionsrelation die Form

$$\omega^2 E(k_{\perp}) + F(k_{\perp}) = 0 \quad (8.4)$$

annimmt.

Für beliebige Verteilungsfunktionen – darunter Gegenstrom- und andere anisotrope Verteilungsfunktionen – sind die Darstellungen für  $E(k_{\perp})$  und  $F(k_{\perp})$  in hohem Maße kompliziert und aus diesem Grund in allgemeiner Form in Anhang B.3 hergeleitet. Wesentliche Vereinfachungen sowohl für  $E$  als auch für  $F$  ergeben sich für Verteilungsfunktionen, die anisotrop sind, jedoch keine Bulk-Bewegung enthalten, was bedeutet, dass  $f$  von der Form  $f(p_{\parallel}^2, p_{\perp})$  sein muss. Im Folgenden diskutieren wir diese Situation und die relevanten Gleichungen für anisotrope Verteilungsfunktionen ohne Bulk-Bewegung.

Die Existenz von Neutralpunkten erfordert  $F(k_{\perp}) = 0$ . Im Falle in  $p_{\parallel}$  symmetrischer Verteilungsfunktionen können beträchtliche Vereinfachungen erzielt werden, und man erhält

$$F(k_{\perp}) = (\rho_{zz} - k_{\perp}^2 c^2) [\mathcal{H}(k_{\perp}) (\rho_{yy} - k_{\perp}^2 c^2) + \mu_{xy}^2], \quad (8.5)$$

wobei die auftretenden Faktoren durch die Gleichungen (B.30) in Anhang B.3 gegeben sind.

Der Faktor

$$\mathcal{H}(k_{\perp}) \equiv 1 + \tau_{xx} = 1 - 2\pi \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{k_{\perp}^2} \hat{I} \gamma [1 - J_0^2(z_a)] \frac{\partial f_{0,a}}{\partial p_{\perp}}, \quad (8.6)$$

wobei der Integral-Operator

$$\hat{I} g(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} g(p_{\parallel}, p_{\perp}) \quad (8.7)$$

auf von  $p_{\parallel}$  und  $p_{\perp}$  abhängige Funktionen wirkt, hat dieselbe Struktur wie in Gl. (7.38) in Kapitel 7. Wir bezeichnen  $\mathcal{H}(k_{\perp})$  daher als die „Harris-Funktion“, die in Kap. 7 als Bedingung für die Existenz von Neutralpunkten verschwinden musste.

Im Gegensatz dazu erhalten wir hier aus der Bedingung  $F(k_{\perp}) = 0$  nun die modifizierte Gleichung

$$\mathcal{H}(k_{\perp}) \mathcal{T}(k_{\perp}) = -(\rho_{zz} - k_{\perp}^2 c^2) \mu_{xy}^2, \quad (8.8a)$$

mit

$$\mathcal{T}(k_{\perp}) = (\rho_{zz} - k_{\perp}^2 c^2) (\rho_{yy} - k_{\perp}^2 c^2), \quad (8.8b)$$

woraus sich zwei verschiedene Fälle ergeben.

Erstens: Angenommen,  $\mathcal{H}$  habe zunächst bei  $k_\perp = \kappa_1$  eine Nullstelle, so dass  $\mathcal{H}(\kappa_1) = 0$  gilt; eine Taylor-Entwicklung von Gl. (8.8a) ergibt dann

$$\mathcal{H}(\kappa_1) + \delta\kappa_1 \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_\perp} \right|_{k_\perp=\kappa_1} = \frac{\mu_{xy}^2 (\kappa_1^2 c^2 - \rho_{zz})}{\mathcal{T}(\kappa_1)}, \quad (8.9)$$

so dass

$$\delta\kappa_1 = \mu_{xy}^2 (\kappa_1^2 c^2 - \rho_{zz}) \left( \mathcal{T}(\kappa_1) \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_\perp} \right|_{k_\perp=\kappa_1} \right)^{-1}. \quad (8.10)$$

Diese Näherung ist korrekt, solange  $|\delta\kappa_1|/\kappa_1 \ll 1$  gilt. Andernfalls müssen die Nullstellen von Gl. (8.8a) auf anderem Wege bestimmt werden.

Der Term  $\partial \mathcal{H}/\partial k_\perp$  ist gegeben durch

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_\perp} = 4\pi \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2 m_a^2}{k_\perp^2} \hat{I} \gamma \left[ \frac{1 - J_0^2(z_a)}{k_\perp} - \frac{p_\perp}{m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \right] \frac{\partial f_{0,a}}{\partial p_\perp}. \quad (8.11)$$

Zweitens: Hat  $\mathcal{T}$  bei  $k_\perp = \kappa_2$  eine Nullstelle, so dass  $\mathcal{T}(\kappa_2) = 0$  gilt, so ergibt in diesem Fall eine Taylor-Entwicklung von Gl. (8.8a)

$$\mathcal{T}(\kappa_2) + \delta\kappa_2 \left. \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial k_\perp} \right|_{k_\perp=\kappa_2} = \frac{\mu_{xy}^2 (\kappa_2^2 c^2 - \rho_{zz})}{\mathcal{H}(\kappa_2)}, \quad (8.12)$$

woraus man erhält

$$\delta\kappa_2 = \mu_{xy}^2 (\kappa_2^2 c^2 - \rho_{zz}) \left( \mathcal{T}(\kappa_2) \left. \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial k_\perp} \right|_{k_\perp=\kappa_2} \right)^{-1}, \quad (8.13)$$

mit

$$\frac{\partial \rho_{yy}}{\partial k_\perp} = 4\pi \sum_a \omega_p^2 \hat{I} \frac{p_\perp^2}{\gamma} \left[ \frac{p_\perp}{m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) - \frac{J_1^2(z_a)}{k_\perp} \right] \frac{\partial f_{0,a}}{\partial p_\perp} \quad (8.14a)$$

$$\frac{\partial \rho_{zz}}{\partial k_\perp} = -4\pi \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2 m_a}{\Omega_a} \hat{I} \frac{p_\parallel p_\perp^2}{\gamma_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \frac{\partial f_{0,a}}{\partial p_\perp}. \quad (8.14b)$$

Diese Lösung ist ebenfalls wieder nur eine gültige Näherung, solange  $|\delta\kappa_2|/\kappa_2 \ll 1$  gilt.

Eine dritte Möglichkeit bestünde darin, die Gleichung um  $\kappa_3$  zu entwickeln, wobei  $\kappa_3$  die exakte Lösung von  $\rho_{zz} - k_\perp^2 c^2 = 0$  ist. Jedoch werden wir in Abschnitt 8.3.2 zeigen, dass dieser Term, der die Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Wellenmode beschreibt, stets negativ ist und somit keine Nullstellen hat.

Im Allgemeinen muss man daher für eine vorgegebene Verteilungsfunktion die Terme  $E(k_\perp)$  und  $F(k_\perp)$  berechnen, woraufhin man aus der Beziehung  $\omega^2 = -F(k_\perp)/E(k_\perp)$  Informationen über die Stabilität bzw. Instabilität des Systems erhält. Diese Beziehung ist jedoch nur in der Umgebung eines Neutralpunktes gültig, da sie auf der Taylor-Entwicklung des Maxwell-Operators zu vierter Ordnung in  $\omega$  basiert.

### 8.3 Beispiele für symmetrische Verteilungsfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei einfache Beispiele für symmetrische Verteilungsfunktionen, die aus Delta-Distributionen der Form

$$f_{0,a} = \frac{1}{2\pi p_\perp} \delta(p_\parallel) \delta(p_\perp - \xi_a) \quad (8.15)$$

bestehen, wobei  $\xi_a$  den senkrechten Impuls der Teilchensorte  $a$  bezeichnet. Der Faktor  $(2\pi p_\perp)^{-1}$  ist zur Normierung von  $f_0$  erforderlich. Solche Verteilungsfunktionen sind symmetrisch in  $p_\parallel$ . Darüber hinaus ist diese Form der Verteilungsfunktionen extrem nützlich zur Untersuchung von Instabilitäten in einem Plasma, das sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel zu einem homogenen Magnetfeld bewegt und wo deswegen die Herleitungen im mitbewegten Koordinatensystem durchgeführt werden können. In Kapitel 9 werden wir diese Verteilungsfunktion daher auf den Fall eines  $\gamma$ -ray Bursts anwenden, wobei das Ruhesystem des Jets verwendet wird, in dem keine parallele Bewegung auftritt.

Die hier zu illustrativen Zwecken verwendeten Spezialfälle erlauben es somit nicht nur, auf einfachste Weise die physikalischen Prozesse der Kopplung zwischen elektrostatischer und elektromagnetischen Komponenten der Dispersionsrelation zu veranschaulichen, sondern sind darüber hinaus auch von praktischem Interesse, wenn man es mit Elektron-Proton-Jets etwa von Aktiven Galaktischen Kernen oder  $\gamma$ -ray Bursts zu tun hat.

Die allgemeine Formulierung, wie sie in den Anhängen gegeben ist, erlaubt es uns, die Kriterien für aperiodische Fluktuationen für *jede* Art von Impuls-Verteilungen verschiedener Teilchensorten zu bestimmen. *Alle* Fälle gyrotroper Verteilungsfunktionen können auf analytischem Wege behandelt werden – die erforderlichen mathematischen Ausdrücke werden jedoch schnell sehr unhandlich und verschleiern daher die grundlegenden Prozesse hinter unübersichtlichen Ausdrücken. Auch aus diesem Grund sind die einfachen Veranschaulichungen für senkrechte Wellen ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ ) von beträchtlichem Interesse, da in diesem Fall die mathematischen Einzelheiten zwar umfangreich sind, jedoch nicht so unhandlich, als dass bestimmte Effekte nicht isoliert werden könnten.

In diesem Abschnitt werden sowohl das Neutralpunkt-Kriterium als auch die  $k_\perp$ -Abhängigkeit der Frequenz ausgewertet und es werden numerische Beispiele vorgestellt; dabei wird in diesem Abschnitt durchgängig  $k_\parallel = 0$  angenommen. Zunächst werten wir alle in  $F(k_\perp)$  auftretenden Faktoren für die Verteilungsfunktion aus Gl. (8.15) aus, die damit ergeben

$$\tau_{xx} = \frac{1}{k_\perp^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 m_a^2 \left\{ \frac{1 - J_0^2(z_a)}{(m_a c)^2 \gamma_a} + \frac{2k_\perp \gamma_a}{\xi_a m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \right\} \quad (8.16a)$$

$$\rho_{yy} = \sum_a \omega_{p,a}^2 \frac{\xi_a}{\gamma_a} \left[ \frac{\xi_a / (m_a c)^2}{\gamma_a^2} J_1^2(z_a) - \frac{2k_\perp}{m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \right] \quad (8.16b)$$

$$\rho_{zz} = - \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\gamma_a} \quad (8.16c)$$

$$\mu_{xy} = i \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\Omega_a} [J_0^2(z_a) - J_1^2(z_a)], \quad (8.16d)$$

mit  $\gamma_a = [1 + \xi_a^2/(m_a c)^2]^{1/2}$  und  $z_a = k_\perp \xi_a / (m_a \Omega_a)$ .

Gemäß Gleichung (B.30e) ist die Harris-Funktion gegeben durch

$$\mathcal{H}(k_\perp) = 1 - \frac{1}{k_\perp^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 m_a^2 \left\{ \frac{1 - J_0^2(z_a)}{(m_a c)^2 \gamma_a} + \frac{2k_\perp \gamma_a}{\xi_a m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \right\}. \quad (8.17)$$

Die anderen in  $E(k_\perp)$  auftretenden Faktoren sind

$$\rho_{yz} = \tau_{zz} = 0 \quad (8.18a)$$

$$\tau_{yy} = \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\Omega_a^2} \left\{ \frac{\xi_a^2 / (m_a c)^2}{\gamma_a} \left[ \frac{1}{2} - J_1^2(z_a) \right] + \gamma_a - \frac{2\gamma_a \xi_a k_\perp}{m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \right\} \quad (8.18b)$$

$$\phi_{xy} = \frac{2i}{k_\perp} \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2 m_a \gamma_a}{\Omega_a^2} \left[ \left( \frac{\gamma_a}{\xi_a} + \frac{2\xi_a}{(m_a c)^2} \right) \Theta'_a + \frac{k_\perp \gamma_a^2}{m_a \Omega_a} \Theta''_a \right] \quad (8.18c)$$

$$\psi_{xx} = \frac{2}{k_\perp^2} \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2 m_a^2}{\Omega_a^2} \left( \frac{3\gamma_a}{(m_a c)^2} \Theta_a + \frac{2k_\perp \gamma_a^3}{m_a \Omega_a \xi_a} \Theta'_a \right), \quad (8.18d)$$

wobei  $\Theta$ ,  $\Theta'$  und  $\Theta''$  in den Gleichungen (B.33) des Anhangs B.3 definiert sind und unendliche Reihen über Besselfunktionen bezeichnen, von denen keine Lösung in geschlossener Form bekannt ist.

### 8.3.1 Bewegte Ionen und Elektronen

Betrachten wir eine Verteilungsfunktion, die aus monoenergetischen Ionen und Elektronen besteht, wobei Elektronen und Ionen die Impulse  $\xi_e$  und  $\xi_i$  senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld haben:

$$f_e = \frac{\delta(p_\parallel)}{2\pi p_\perp} \delta(p_\perp - \xi_e) \quad (8.19a)$$

$$f_i = \frac{\delta(p_\parallel)}{2\pi p_\perp} \delta(p_\perp - \xi_i). \quad (8.19b)$$

Die Bedingung für die Existenz von Neutralpunkten erfordert damit

$$\mathcal{H}(k_\perp) \mathcal{T}(k_\perp) = - \left\{ \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\Omega_a} [J_1^2(z_a) - J_0^2(z_a)] \right\}^2 \left( \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\gamma_a} + k_\perp^2 c^2 \right), \quad (8.20a)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k_\perp) &= k_\perp^4 c^4 - \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2 \xi_a}{\gamma_a} \left[ \frac{\xi_a / (m_a c)^2}{\gamma_a^2} J_1^2(z_a) - \frac{2k_\perp}{m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \right] \\ &\times \left( \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\gamma_a} + k_\perp^2 c^2 \right) + k_\perp^2 c^2 \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\gamma_a}. \end{aligned} \quad (8.20b)$$

Hierbei gilt  $a \in \{e, i\}$ , und die Harris-Funktion ist daraufhin gegeben durch

$$\mathcal{H}(k_{\perp}) = 1 - \frac{1}{k_{\perp}^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 m_a^2 \left\{ \frac{1 - J_0^2(z_a)}{(m_a c)^2 \gamma_a} + \frac{2k_{\perp} \gamma_a}{\xi_a m_a \Omega_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \right\}. \quad (8.21)$$

In den nächsten beiden Unterabschnitten diskutieren wir nacheinander die einfachen Fälle eines Wasserstoffplasmas mit stationären Ionen, und den eines aus Elektronen und Positronen bestehenden Paarplasmas.

### 8.3.2 Nur bewegte Elektronen

Die Überlegungen des letzten Unterabschnittes können beträchtlich vereinfacht werden, wenn sich nur die Elektronen mit einem Impuls  $\xi_e$  senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld bewegen:

$$f_{0,e} = \frac{\delta(p_{\parallel})}{2\pi p_{\perp}} \delta(p_{\perp} - \xi_e) \quad (8.22a)$$

$$f_{0,i} = \frac{\delta(p_{\parallel})}{2\pi p_{\perp}} \delta(p_{\perp}). \quad (8.22b)$$

#### Neutralpunkt-Untersuchung

Als Konsequenz vereinfachen sich einige der in  $E(k_{\perp})$  und  $F(k_{\perp})$  auftretenden Faktoren, und aufgrund von

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{J_0(z) J_1(z)}{\xi} = \frac{k_{\perp}}{2m\Omega} \quad (8.23)$$

nimmt die Harris-Funktion die Form

$$\mathcal{H}(k_{\perp}) = 1 - \frac{1}{k_{\perp}^2} \omega_{p,e}^2 m_e^2 \left\{ \frac{1 - J_0^2(z)}{(m_e c)^2 \gamma_e} + \frac{2k_{\perp} \gamma_e}{\xi_e m_e \Omega_e} J_0(z) J_1(z) \right\} - \frac{\omega_{p,i}^2}{\Omega_i^2} \quad (8.24)$$

an, mit  $z = k_{\perp} \xi_e / (m_e \Omega_e)$  und  $\gamma_e = [1 + \xi_e^2 / (m_e c)^2]^{1/2}$  und ist im Vergleich zu Kapitel 7 (vgl. auch Harris<sup>30</sup>) dramatisch verändert. Dies ist durch den zusätzlichen Term  $\omega_{p,i}^2 / \Omega_i^2 = \omega_{p,e}^2 / (\mu \Omega_e^2)$  bedingt, der gegen Unendlich geht, wenn das Massenverhältnis von Elektronen und Ionen zu Null gesetzt wird, wie es von Harris getan wurde. In Harris' ursprünglichem Artikel gab es jedoch überraschenderweise zu  $\mathcal{H}(k_{\perp})$  keinerlei Beitrag durch die Ionen. Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruchs stellt sich wie folgt dar: Für  $k_{\parallel} = 0$  ist der Ionenbeitrag in Gl. (8.2a) gegeben durch

$$\sigma_{lm,i} = -2\pi i e_i^2 n_i \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{T_{lm}}{\omega - n\Omega_i / \gamma}. \quad (8.25)$$

Wir müssen an dieser Stelle nun zwei verschiedene Grenzübergänge betrachten: Setzen wir zuerst  $m_i = \infty$  (bevor wir  $\omega \rightarrow 0$  festlegen), so folgt  $\Omega_i = 0$  und es gibt keinen

Beitrag der Ionen zu Neutralpunkten. Andererseits, betrachten wir zuerst  $\omega \rightarrow 0$  mit *endlicher* Ionenmasse, so ergibt sich

$$\sigma_{lm,i} \simeq \frac{2\pi i e_i^2 n_i}{\Omega_i} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \gamma \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{n^2 \Omega_i^2} \right) \frac{T_{lm}}{n}, \quad (8.26)$$

was den Weg beschreibt, dem wir hier folgen – also eine Entwicklung um  $\omega = 0$ . Das Ergebnis besteht in einem stabilisierenden Effekt für die longitudinale Mode, da  $\omega_{p,e}^2 / (\mu \Omega_e^2)$  im Vergleich zu  $\omega_{p,e}^2 / \Omega_e^2$  eine große Zahl ist, bedingt durch den Faktor  $\mu = m_e / m_i$  im Nenner.

Der wichtige Punkt ist der folgende: wird  $\Omega_i$  zuerst gleich Null gesetzt, so kann man das Verhalten bei Frequenzen unterhalb der Ionen-Zyklotronfrequenz nicht korrekt untersuchen. Ist man daran interessiert, das Neutralpunkt-Verhalten zu untersuchen, so *muss* dies bei endlichem  $\Omega_i$  erfolgen: Nur so kann auf korrekte Weise das Muster und das Frequenzverhalten an den Neutralpunkte studiert werden, was nicht möglich ist, wenn man bereits vor der Suche nach Neutralpunkten  $\Omega_i \rightarrow 0$  festlegt.

Als nächstes führen wir die dimensionslosen Variablen

$$z = \frac{\kappa \lambda}{\Omega_e} \gamma_e (\omega_{p,e}^2 / \gamma_e + \omega_{p,i}^2)^{1/2} \quad (8.27a)$$

$$\kappa = k_{\perp} c (\omega_{p,e}^2 / \gamma_e + \omega_{p,i}^2)^{-1/2} \quad (8.27b)$$

$$\lambda = \xi_e / (\gamma_e m_e c) < 1 \quad (8.27c)$$

$$u = \omega_{p,e}^2 / [\gamma_e (\omega_{p,e}^2 / \gamma_e + \omega_{p,i}^2)] < 1 \quad (8.27d)$$

$$\mu = m_e / m_i \simeq 1/1836 \ll 1 \quad (8.27e)$$

und

$$\Omega_p = (\omega_{p,e}^2 / \gamma_e + \omega_{p,i}^2)^{1/2} \quad (8.27f)$$

ein, wodurch die Normierung der aus Gl. (8.4) berechneten Frequenz beschrieben wird.

Mit diesen Parametern kann man die in  $F(k_{\perp})$  auftretenden Faktoren ausdrücken als

$$\rho_{yy} = \omega_{p,e}^2 \frac{\xi_e}{\gamma_e} \left[ \frac{\xi_e / (m_e c)^2}{\gamma_e^2} J_1^2(z_e) - \frac{2k_{\perp}}{m_e \Omega_e} J_0(z_e) J_1(z_e) \right] \quad (8.28a)$$

$$= \Omega_p^2 u [\lambda^2 J_1^2(z) - 2z J_0(z) J_1(z)] \quad (8.28b)$$

$$\rho_{zz} = -\frac{\omega_{p,e}^2}{\gamma_e} - \omega_{p,i}^2 = -\Omega_p^2 \quad (8.28c)$$

$$\mu_{xy}^2 = - \left\{ \frac{\omega_{p,e}^2}{\Omega_e} [J_0^2(z_e) - J_1^2(z_e)] + \frac{\omega_{p,i}^2}{\Omega_i} \right\}^2 \quad (8.28d)$$

$$= -\Omega_p^2 \frac{u^2 z^2}{\kappa^2 \lambda^2} [J_0^2(z) - 1 - J_1^2(z)]^2, \quad (8.28e)$$

wobei  $\omega_{p,i}^2 / \Omega_i = -\omega_{p,e}^2 / \Omega_e$  verwendet wurde.

Aus Gl. (8.24) ergibt sich die Harris-Funktion als

$$\mathcal{H}(k_\perp) = 1 - \frac{u}{\kappa^2} \left[ 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) + \frac{z^2}{\lambda^2\gamma\mu} \right]. \quad (8.29)$$

Die anderen in  $E(k_\perp)$  auftretenden Faktoren sind

$$\tau_{yy} = \frac{\omega_{p,e}^2}{\Omega_e^2} \left\{ \frac{\xi_e^2/(m_e c)^2}{\gamma_e} \left[ \frac{1}{2} - J_1^2(z_e) \right] + \gamma_e - \frac{2\gamma_e \xi_e k_\perp}{m_e \Omega_e} J_0(z_e)J_1(z_e) \right\} \quad (8.30a)$$

$$= \frac{uz^2}{\kappa^2 \lambda^2} \left\{ \lambda^2 \left[ \frac{1}{2} - J_1^2(z) \right] + 1 - 2z J_0(z)J_1(z) \right\} \quad (8.30b)$$

$$\phi_{xy} = \frac{2i}{k_\perp} \frac{\omega_{p,e}^2 m_e \gamma_e}{\Omega_e^2} \left[ \left( \frac{\gamma_e}{\xi_e} + \frac{2\xi_e}{(m_e c)^2} \right) \Theta'_e + \frac{k_\perp \gamma_e^2}{m_e \Omega_e} \Theta''_e \right] + i \frac{\omega_{p,i}^2}{2\Omega_i^3} \quad (8.30c)$$

$$= \frac{i}{\Omega_p} \frac{2uz^2}{\kappa^3 \lambda^2 \gamma} \left[ \left( \frac{\gamma}{\lambda} + 2\gamma^2 \lambda \right) \Theta'_e + \frac{z\gamma^2}{\lambda} \Theta''_e - \frac{z}{4\gamma\lambda\mu^2} \right] \quad (8.30d)$$

$$\psi_{xx} = \frac{2\omega_{p,e}^2 m_e^2}{k_\perp^2 \Omega_e^2} \left( \frac{3\gamma_e}{(m_e c)^2} \Theta_e + \frac{2k_\perp \gamma_e^3}{m_e \Omega_e \xi_e} \Theta'_e \right) + \frac{\omega_{p,i}^2}{\Omega_i^4} \quad (8.30e)$$

$$= \frac{1}{\Omega_p^2} \frac{uz^2}{\gamma\kappa^4 \lambda^2} \left[ 6\gamma \Theta_e + \frac{4z}{\lambda} \Theta'_e + \frac{z^2}{\lambda^2 \mu^3} \right], \quad (8.30f)$$

wobei der Einfachheit halber der Index an  $\gamma_e$  weggelassen wurde, da  $\gamma_i = 1$  gilt.

Man beachte weiterhin, dass der Ionen-Beitrag in  $\rho_{yy}$  und  $\tau_{yy}$  verschwindet. In  $\phi_{xy,i}$  und  $\psi_{xx,i}$  berechnet sich der Beitrag der Ionen aus

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Theta'}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{J_1(z)J_1'(z)}{\xi} = \frac{k_\perp}{4m\Omega}. \quad (8.31)$$

Aufgrund von  $\rho_{zz} - k_\perp^2 c^2 = -\Omega_p^2 (1 + \kappa^2) \neq 0$  für alle  $\kappa \in \mathbb{R}$  ergibt das Kriterium für die Existenz von Neutralpunkten,  $F(k_\perp) = 0$ , somit

$$\mathcal{H}(k_\perp) [\rho_{yy} - k_\perp^2 c^2] = -\mu_{xy}^2. \quad (8.32)$$

Gl. (8.32) kann umgestellt werden zu

$$\mathcal{H}(\kappa)\mathcal{T}(\kappa) = \mathcal{C}(\kappa), \quad (8.33)$$

wobei

$$\mathcal{H}(\kappa) = \kappa^2 \lambda^2 - u \left\{ [1 - J_0^2(z)] \lambda^2 + 2z J_0(z)J_1(z) + \frac{z^2}{\gamma\mu} \right\} \quad (8.34a)$$

$$\mathcal{T}(\kappa) = \kappa^2 - u [J_1^2(z)\lambda^2 - 2z J_0(z)J_1(z)] \quad (8.34b)$$

$$\mathcal{C}(\kappa) = -uz^2 [J_0^2(z) - 1 - J_1^2(z)]^2. \quad (8.34c)$$

Die Faktoren auf der linken Seite von Gl. (8.33) beschreiben die longitudinale (Harris-) Mode,  $\mathcal{H}(\kappa_\perp)$ , und die transversale Mode,  $\mathcal{T}(\kappa_\perp)$ . Obgleich die Terminologie „longitudinal“ und „transversal“ zur Bezeichnung der Moden gewisse Schwächen aufweist, bleibt



doch die Tatsache bestehen, dass sich ein elektrostatischer Moden-Faktor (welchen wir die Harris-Funktion  $\mathcal{H}$  genannt haben) und ein elektromagnetischer Moden-Faktor unterscheiden lassen. Letzter kann am leichtesten in der Situation eines Elektron-Positron-Plasmas identifiziert werden, wenn der Faktor  $\mathcal{C}$  in Gl. 8.33 verschwindet und man als die Neutralpunkte definierende Gleichung  $\mathcal{H}\mathcal{T} = 0$  hat, welche nur die beiden Lösungen  $\mathcal{H} = 0$  und  $\mathcal{T} = 0$  hat. Die Moden sind im Allgemeinen natürlich weder rein longitudinal noch rein transversal. Der Begriff der Kopplung wird oft verwendet um Moden als „quasi-longitudinal“ oder „quasi-transversal“ zu bezeichnen (vgl. Stix<sup>101</sup>), was aber implizieren würde, dass es nur eine schwache Kopplung zwischen der einen und der anderen gäbe. Es scheint somit keine konsistente Terminologie zu existieren, die eine systematische Klassifizierung der Moden erlauben würde. Folglich haben wir die Moden nach den Faktoren benannt, die sie im Falle verschwindender Kopplung in Gl. (8.33) bestimmen würden. Auch wenn diese Nomenklatur nicht ohne Nachteile ist, sind jedoch sowohl die Wortwahl als auch die quantitativen Beschreibungen klar genug, dass der interessierte und informierte Leser der Argumentation ohne Schwierigkeiten folgen können sollte.

Die rechte Seite von Gleichung (8.33) beschreibt also die Kopplung zwischen transversaler und longitudinaler Mode und ist stets negativ. Für den transversalen Faktor,  $\mathcal{T}(\kappa)$ , ergibt sich

$$\mathcal{T}(\kappa) \begin{cases} < 0, & \text{für } \kappa \rightarrow 0 \\ > 0, & \text{für } \kappa \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (8.35)$$

Das Produkt aus transversalem und longitudinalem Anteil auf der linken Seite von Gl. (8.33) verhält sich wie

$$\mathcal{H}(\kappa)\mathcal{T}(\kappa) \begin{cases} > 0, & \text{für } \kappa \rightarrow 0 \\ < 0, & \text{für } \kappa \rightarrow \infty \text{ und } B_0^2 > \beta \\ > 0, & \text{für } \kappa \rightarrow \infty \text{ und } B_0^2 < \beta, \end{cases} \quad (8.36)$$

wobei  $\beta = 4\pi n_i m_i c^2$  einen Grenzwert für die Stärke des Hintergrund-Magnetfeldes darstellt, unterhalb dessen es nicht klar ist, ob das Produkt  $\mathcal{T}(\kappa)\mathcal{H}(\kappa)$  einen Vorzeichenwechsel in  $\kappa$  aufweist, und somit keine Information über das Auftreten von Neutralpunkten einzig durch die asymptotische Auswertung für  $\kappa \rightarrow 0$  und  $\kappa \rightarrow \infty$  gewonnen werden kann. Gleichung (8.33) werden wir numerisch in Abschnitt 8.4.1 auswerten.

### Bestimmung der Frequenz

Mit Gleichung (8.4) lässt sich die Frequenz  $\omega$  in der Umgebung eines jeden Neutralpunktes bestimmen gemäß

$$\frac{\omega^2}{\Omega_p^2} = -\frac{F(\kappa)}{E(\kappa)}, \quad (8.37)$$

wobei im Unterschied zu Gl. (8.4) die Faktoren  $E$  und  $F$  jetzt durch die mit den gleichen Buchstaben bezeichneten normierten Versionen ersetzt wurden, welche die dimensionslosen Variablen aus Gl (8.27) verwenden. Daher steht auf der linken Seite von Gl. (8.37) nun ebenfalls eine dimensionslose Frequenz, nämlich die Frequenz in Einheiten der normierten Plasmafrequenz  $\Omega_p$ .

Die normierten Faktoren  $E$  und  $F$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 E(\kappa) &= \left\{ \frac{u}{\kappa^2} \left[ 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) + \frac{z^2}{\lambda^2\gamma\mu} \right] - 1 \right\} \\
 &\times \left\{ (1 + \kappa^2) \frac{uz^2}{\kappa^2\lambda^2} \left[ \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - J_1^2(z) \right) + 1 - 2z J_0(z)J_1(z) \right] - (1 + 2\kappa^2) \right\} \\
 &- \frac{u^2 z^2}{\kappa^2 \lambda^2} [J_0^2(z) - 1 - J_1^2(z)]^2 + (1 + \kappa^2) \left\{ \frac{4u^2 z^3}{\kappa^4 \lambda^3 \gamma} [1 + J_0^2(z) - J_1^2(z)] \right. \\
 &\left. \times \left[ \left( \frac{\gamma}{\lambda} + 2\gamma^2 \lambda \right) \Theta'_e + \frac{\gamma^2 z}{\lambda} \Theta''_e - \frac{z}{4\gamma\lambda\mu^2} \right] + \frac{uz^2}{\kappa^2 \lambda^2} \left[ 6\gamma \Theta_e + \frac{4z}{\lambda} \Theta'_e + \frac{z^2}{\lambda^2 \mu^3} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{8.38a}$$

$$\begin{aligned}
 F(\kappa) &= (1 + \kappa^2) \left\{ \left[ 1 - \frac{u}{\kappa^2} \left( 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) + \frac{z^2}{\lambda^2\gamma\mu} \right) \right] \right. \\
 &\left. \times \left[ \kappa^2 - u (\lambda^2 J_1^2(z) - 2z J_0(z)J_1(z)) \right] + \frac{u^2 z^2}{\kappa^2 \lambda^2} [J_0^2(z) - 1 - J_1^2(z)]^2 \right\},
 \end{aligned} \tag{8.38b}$$

wobei die dimensionslosen Variablen aus Gl. (8.27) verwendet wurden.

Numerische Beispiele werden in Abschnitt 8.4.1 angegeben.

### 8.3.3 Bewegtes symmetrisches Elektron-Positron-Plasma

Für ein symmetrisches Elektron-Positron-Plasma nehmen wir die folgende Verteilungsfunktion an:

$$f_{0,e^-} = f_{0,e^+} = \frac{\delta(p_{\parallel})}{2\pi p_{\perp}} \delta(p_{\perp} - \xi). \tag{8.39}$$

In diesem Fall lässt sich direkt zeigen, dass es keine Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Mode gibt, da  $\Omega_{e^-} = -\Omega_{e^+}$ . Daher sind Neutralpunkte gegeben durch die Lösung von

$$\mathcal{H}(\kappa)\mathcal{T}(\kappa) = 0, \tag{8.40}$$

wobei

$$\mathcal{H}(\kappa) = 1 - \frac{2u}{\kappa^2} \left[ 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) \right] \tag{8.41a}$$

$$\mathcal{T}(\kappa) = \kappa^2 - 2u [J_1^2(z)\lambda^2 - 2zJ_0(z)J_1(z)] \tag{8.41b}$$

mit jetzt

$$z = \frac{\kappa\lambda}{\Omega_e} (2\gamma_e)^{1/2} \omega_{p,e}. \tag{8.41c}$$

Die Frequenz wird wiederum aus  $\omega^2/\Omega_p^2 = -F(\kappa)/E(\kappa)$  bestimmt, wobei jetzt  $\Omega_p^2 = 2\omega_{p,e}^2/\gamma$  ist und für die Ausdrücke  $E$  und  $F$  gilt

$$\begin{aligned}
 E(\kappa) &= 2(2 + \kappa^2) \frac{uz^2}{\kappa^2 \lambda^2} \left[ 6\gamma \Theta_e + \frac{4z}{\lambda} \Theta'_e \right] + 2 \left\{ 1 - \frac{2u}{\kappa^2} \left[ 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) \right] \right\} \\
 &\times \left\{ - (2 + \kappa^2) \frac{uz^2}{\kappa^2 \lambda^2} \left[ \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - J_1^2(z) \right) + 1 - 2z J_0(z)J_1(z) \right] - \omega^2 (1 + \kappa^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{8.42a}$$

$$F(\kappa) = -(2 + \kappa^2) \left\{ 1 - \frac{2u}{\kappa^2} \left[ 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) \right] \right\} \times \left\{ 2u [J_1^2(z)\lambda^2 - 2zJ_0(z)J_1(z)] - \kappa^2 \right\}. \quad (8.42b)$$

### 8.3.4 Staubige Plasmen

Es ist unserer Aufmerksamkeit nicht entgangen, dass die entwickelten Methoden auch auf den Fall von staubigen Plasmen anwendbar sind, in denen  $1/\mu = m_i/m_e$  eine noch sehr viel größere Zahl als im Falle eines Elektron-Proton-Plasmas ist. Detaillierte Auswertungen für staubige Plasmen werden in zukünftigen Arbeiten noch folgen. Hier konzentrieren wir uns im nun folgenden Abschnitt auf numerische Illustrationen für Elektron-Proton- und Elektron-Positron-Plasmen.

## 8.4 Numerische Darstellungen

In diesem Abschnitt werden numerische Berechnungen sowohl der Neutralpunkte als auch der Frequenz für die in den Abschnitten 8.3.2 und 8.3.3 verwendeten Verteilungsfunktionen vorgestellt.

### 8.4.1 Nur bewegte Elektronen

#### Neutralpunkte

In diesem ersten Unterabschnitt geben wir einige Beispiele für die numerische Auswertung von Gl. (8.33) für verschiedene Parameterbereiche an. Zunächst lässt sich Gl. (8.33) umstellen und ergibt damit

$$\left[ \kappa^2 \lambda^2 - \tilde{\mathcal{H}}(\kappa) \right] \left[ \kappa^2 - \tilde{\mathcal{T}}(\kappa) \right] = \mathcal{C}(\kappa), \quad (8.43)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{H}}(\kappa) = u \left\{ \left[ 1 - J_0^2(z) \right] \lambda^2 + 2z J_0(z)J_1(z) + \frac{z^2}{\gamma\mu} \right\} \quad (8.44a)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}(\kappa) = u \left[ J_1^2(z) - 2z J_0(z)J_1(z) \right]. \quad (8.44b)$$

Ohne Kopplung ergäbe Gl. (8.43) einfach  $\kappa_L^2 = \tilde{\mathcal{T}}(\kappa)$  oder  $\kappa_U^2 = \tilde{\mathcal{H}}(\kappa)$ . Die Lösung des transversalen Faktors  $\tilde{\mathcal{T}}(\kappa)$ , welche wir als den „unteren Zweig“ bezeichnen, tritt immer dann auf, wenn  $\lambda^2 J_1^2(z) - 2z J_0(z)J_1(z) > 0$ . Aufgrund von  $\lambda^2 < 1$  stellt sich die Bedingung, dass der untere Zweig niemals auftritt, als  $\lambda^2 J_1^2(z) - 2z J_0(z)J_1(z) < 0$  dar, woraus folgt, dass  $z$  kleiner als die erste Nullstelle von  $J_1(z)$  sein muss, die bei  $z_0 \simeq 2,17$  auftritt. Mit  $z = k_\perp \xi_e / (m_e \Omega_e)$  erfordert die Existenz der transversalen Lösung somit

$$B_0 \lesssim \frac{k_\perp c}{z_0 q_e}; \quad (8.45)$$

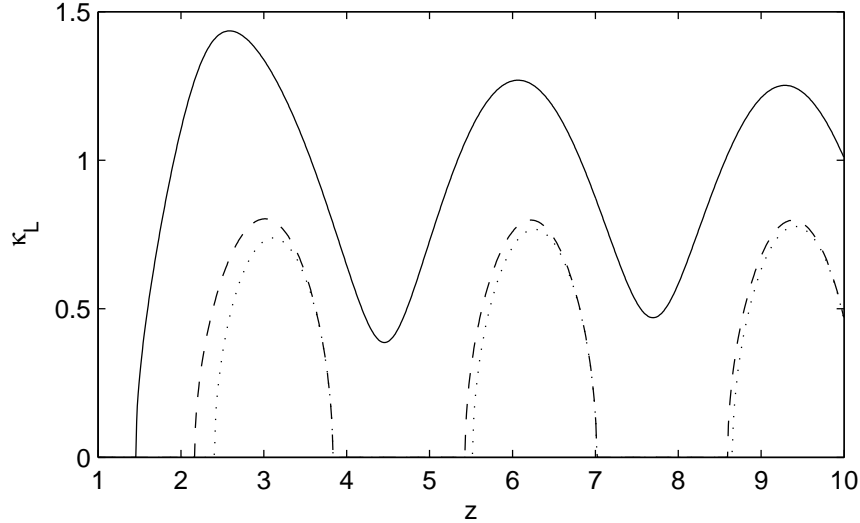


Abbildung 8.1: Der untere Zweig,  $\kappa_L$ , von Gleichung (8.43), aus der  $\kappa_L$  als Funktion von  $z$  für ultrarelativistische Elektronen folgt. Die durchgezogene Linie bezeichnet den Fall verschwindender Kopplung, während die gestrichelte Linie den Fall eines endlichen Kopplungsterms  $\mathcal{C}(\kappa)$  zeigt. Die Punktlinie zeigt den unteren Zweig von Gl. (8.43) für nichtrelativistische Elektronen.

dies impliziert also, dass hohe magnetische Feldstärken den unteren Zweig nicht zulassen, was bedeutet, dass – in Abwesenheit der Kopplung – keine transversalen Neutralpunkte auftreten können.

Mit einem endlichen Kopplungsterm kann Gl. (8.43) immer noch analytisch gelöst werden und ergibt damit

$$\kappa_{L,U}^2(z) = \frac{1}{2\lambda^2} \left[ \tilde{\mathcal{H}}(\kappa) + \lambda^2 \tilde{\mathcal{T}}(\kappa) \mp \left\{ 4\lambda^2 \mathcal{C}(\kappa) + \left[ \tilde{\mathcal{H}}(\kappa) - \lambda^2 \tilde{\mathcal{T}}(\kappa) \right]^2 \right\}^{1/2} \right], \quad (8.46)$$

wobei wir die beiden Lösungen wieder als „unteren“ und „oberen Zweig“ bezeichnen.

Aus Gl. (8.46) lässt sich ersehen, dass es für den unteren Zweig keine Lösung mit reellem  $\kappa$  bei kleinen  $z$  gibt – etwa für  $z \lesssim 1,46$  bei  $\lambda \rightarrow 1$ . Im Gegensatz dazu hat der obere Zweig immer eine reelle Lösung  $\kappa(z)$ .

Für  $\gamma_e \lesssim 1/\mu$  lässt sich  $u = 1$  festlegen, woraus sich zwei verschiedene Fälle ergeben:

- Für ultrarelativistische Elektronen hat man  $\lambda^2 \rightarrow 1$  (jedoch immer noch mit  $\gamma \lesssim 1/\mu$ ). Setzt man nun  $\gamma = (1 - \delta)/\mu$  mit  $\delta \ll 1$ , so zeigt Abb. 8.1 den oberen Zweig von Gl. (8.43) für variierendes  $\kappa$  und  $z$ . Dabei sind die Fälle verschwindender Kopplung (durchgezogene Linie) und endlicher Kopplung (gestrichelte Linie) für  $\delta = 0,1$  gezeigt.

Der obere Zweig von Gl. (8.43) ist in Abb. 8.2 für verschwindende Kopplung (durchgezogene Linie) und für den Fall eines endlichen Kopplungsterms (gestrichelte Linie) gezeigt. Außer in der Region mit  $1 < z \lesssim 3$  gibt es keine maßgeblichen Änderungen durch den Kopplungsterm. Für  $z \gg 1$  wird die Kopplung sogar vernachlässigbar.

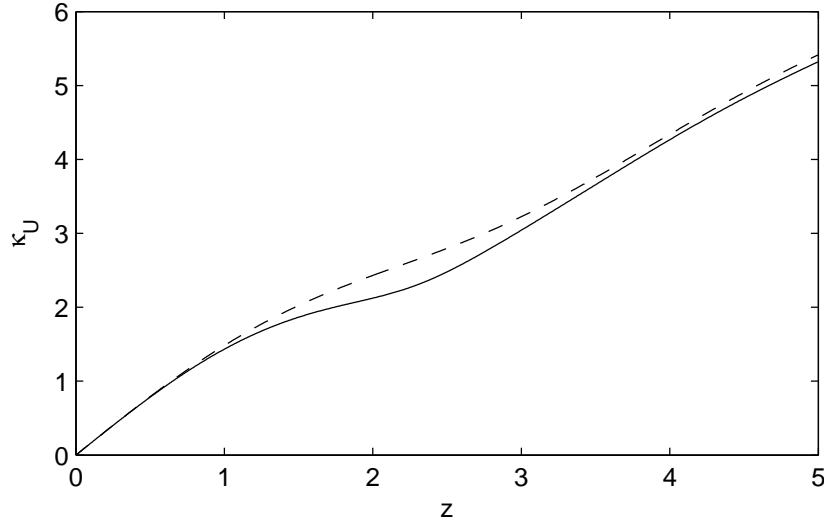


Abbildung 8.2: Der obere Zweig,  $\kappa_U$ , von Gleichung (8.43), aus der  $\kappa_U$  als Funktion von  $z$  für ultrarelativistische Elektronen folgt. Die durchgezogene Linie bezeichnet den Fall verschwindender Kopplung, während die gestrichelte Linie den Fall eines endlichen Kopplungsterms  $\mathcal{C}(\kappa)$  zeigt. Man beachte, dass für  $z \gg 1$  beide Kurven übereinstimmen.

- Für nichtrelativistische Elektronen setzen wir  $\gamma = 1$ . Für  $\lambda = 0,01$ , was dem Fall  $\xi_e/(m_e c) \sim 10^{-2}$  entspricht, so dass die Elektronen nur einen kleinen Impuls senkrecht zum umgebenden Magnetfeld haben, zeigt die Punktlinie in Abb. 8.1 den unteren Zweig von Gl. (8.43) für variierendes  $\kappa$  und  $z$ .

Aufgrund des Terms  $z^2/(\gamma\mu) \simeq z^2/\mu$  in  $\mathcal{H}(\kappa)$  hat der Kopplungsterm  $\mathcal{C}(\kappa)$  nur einen sehr schwachen Einfluss sowohl auf den oberen als auch auf den unteren Zweig.

Darüber hinaus gilt für extrem relativistische Elektronen  $\gamma\mu \gtrsim 1$  (für den Lorentzfaktor der Elektronen bedeutet das  $\gamma \gtrsim 1836$ ) und  $u \ll 1$ . In diesem Fall muss zur Auswertung die volle Gleichung (8.33) herangezogen werden.

Für jedes  $z$  gibt es also einen oder mehrere erlaubte Werte für  $\kappa$ . Mit

$$\frac{1}{\Omega_p} \frac{z}{\kappa(z)} = \frac{\lambda}{\Omega_e} \gamma_e \quad (8.47)$$

hat man daher Bedingungen für verschiedene Kombinationen der Parameter  $\lambda$ ,  $\gamma_e$ , die Ionen- und Elektron-Plasmafrequenzen und die Elektron-Zyklotronfrequenz  $\Omega_e$ , ausgedrückt durch  $z$  und das zugehörige  $\kappa(z)$ ; diese Bedingungen müssen für das Auffinden von Neutralpunkten erfüllt sein.

### Stabilitätsuntersuchung

In diesem Unterabschnitt diskutieren wir das Verhalten sowohl der Oszillationen als auch der Wachstums- und Dämpfungsraten, berechnet aus der Gleichung

$$\frac{\omega^2(\kappa)}{\Omega_p^2} = -\frac{F(\kappa)}{E(\kappa)}, \quad (8.48)$$

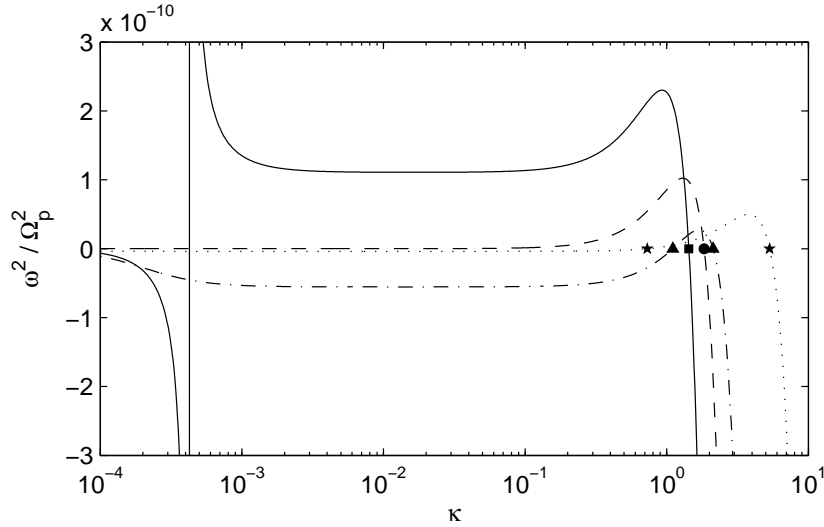


Abbildung 8.3: Die Variation von  $\omega^2/\Omega_p^2$  aus Gl. (8.48) für  $z = 1$  (durchgezogene Linie),  $z = 1,455$  (gestrichelte Linie),  $z = 2$  (Strichpunkt-Linie) und  $z = 5$  (Punktlinie). Dabei ist der ultrarelativistische Fall dargestellt (d. h.  $u = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\gamma = 0,9/\mu$ ). Die Neutralpunkte für die jeweiligen vier Fälle sind mit gefüllten Quadraten, Kreisen, Dreiecken und Sternen markiert.

wobei die Faktoren  $E(\kappa)$  und  $F(\kappa)$  durch die Gleichungen (8.38) definiert sind. Drei Punkte sollen hierbei besonders hervorgehoben werden:

- Für verschiedene feste Werte von  $z$  ist das Quadrat der Frequenz in Abb. 8.3 für den ultrarelativistischen Fall (d. h.  $u = 1$ ,  $\lambda = 1$  und  $\gamma = 0,9/\mu$ ) gezeigt. Die Neutralpunkte, an denen die Frequenz gleich null ist, sind mit unterschiedlichen Symbolen markiert. Für  $z \simeq 1,0311$  gibt es nur einen Neutralpunkt, wie in Abschnitt 8.4.1 bereits ausgeführt.
- Für  $z \lesssim 1,46$  gibt es nur einen Neutralpunkt. Der Nenner  $E(\kappa)$  hat dann eine Nullstelle, was einer Polstelle in  $\omega^2$  entspricht, und das Quadrat der Frequenz ist zwischen diesem Pol und dem verbliebenen Neutralpunkt positiv. Diese Situation ist in Abb. 8.3 für  $z = 1$  dargestellt.
- Für große  $\kappa$  wechselt das Quadrat der Frequenz noch einmal das Vorzeichen – diesmal an einer Polstelle –, da der Nenner  $E(\kappa)$  eine Nullstelle hat und das Vorzeichen wechselt. Für  $z = 2$  ist diese Situation in Abb. 8.4 dargestellt. Aufgrund des großen Faktors  $\mu^{-3}$  in  $E(\kappa)$  tritt die Nullstelle in  $E(\kappa)$  erst für sehr große  $\kappa$  auf, zum Beispiel bei  $\kappa_r \simeq 1,2 \cdot 10^5$  für  $z = 2$ .

Da die Berechnung der Frequenz auf einer Entwicklung in  $\omega^2$  beruht, sind alle vorangegangenen Überlegungen nur gültig, falls  $|\omega^2| < \Omega_i^2$  erfüllt ist. Wie Abb. 8.4 zeigt, ist diese Bedingung für  $\kappa$  in der Nähe von  $\kappa_r$  nicht erfüllt. Auch für  $\kappa \gg \kappa_r$ , wo die Frequenz positiv ist, sind die absoluten Werte von  $\omega^2$  immer noch größer als  $\Omega_i^2$ ; im Prinzip müssten dann höhere Ordnungen in  $\omega^2$  verwendet werden.

Anhand dieser Überlegungen können nun vier Bereiche unterschieden werden:

1. Für  $0 < \kappa < \kappa_\ell$ , wobei  $\kappa_\ell$  entweder die erste Nullstelle von  $E(\kappa)$  oder den ersten

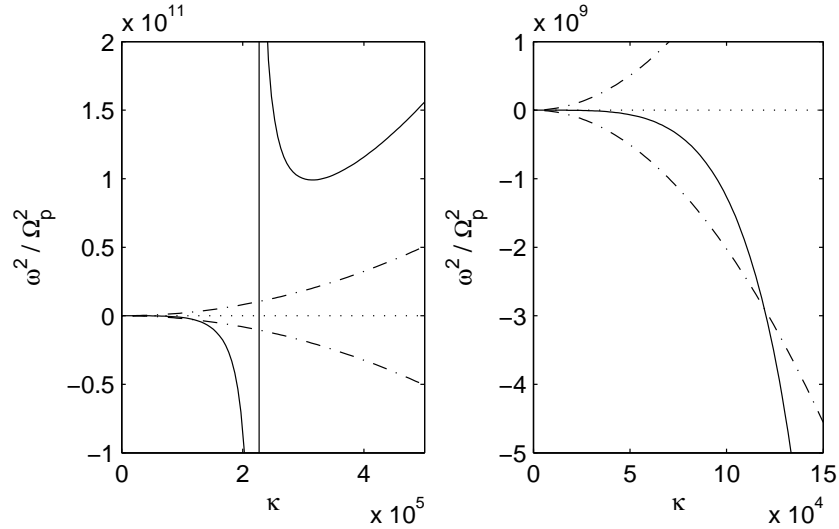


Abbildung 8.4: Der Einfluss des Pols durch die Nullstelle von  $E(\kappa)$  (die Position der Polstelle ist durch die vertikale durchgezogene Linie markiert) auf  $\omega^2/\Omega_p^2$ . Die Strichpunkt-Linie zeigt den Grenzfall  $|\omega|^2 \ll |\Omega_i|^2$ , der den maximalen Gültigkeitsbereich der Entwicklung in Potenzen von  $\omega$  bezeichnet. Das linke Feld zeigt die Situation auf einer  $\kappa$ -Skala von  $10^5$ , während das rechte Feld das Regime  $0 < \kappa < 1,2 \cdot 10^5$  zeigt, welches durch die Bedingung  $|\omega|^2 \ll |\Omega_i|^2$  beschränkt wird.

Neutralpunkt bezeichnet, ist  $\omega^2$  negativ und das Plasma daher instabil.

2. Für  $\kappa_\ell < \kappa < \kappa_n$ , wobei  $\kappa_n$  den immer auftretenden zweiten Neutralpunkt bezeichnet, ist das System stabil.
3. Für  $\kappa_n < \kappa < \kappa_r$  ist  $\omega^2$  wieder negativ. Man beachte, dass für große  $\kappa$  die Entwicklung in Potenzen von  $\omega$  schließlich ungültig wird, da die Voraussetzung  $|\omega| \ll |\Omega_i|$  verletzt wird (siehe Abb. 8.4).
4. Für  $\kappa > \kappa_r$  schließlich liefert die hier vorgestellte Untersuchung keine gültigen Werte für  $\omega^2$ .

### 8.4.2 Bewegung Elektron-Positron-Plasma

Der untere und obere Zweig von Gleichung (8.40) sind einfach durch  $\kappa_L^2(z) = \mathcal{T}$  und  $\kappa_U^2 = \mathcal{H}$  gegeben, da keine Kopplung auftritt. Für ultrarelativistische bzw. nichtrelativistische Teilchen sind diese beiden Zweige in den Abbildungen 8.5 und 8.6 dargestellt. Man beachte, dass es in beiden Fällen stets mindestens einen Neutralpunkt  $\kappa(z)$  gibt. Im relativistischen Fall gibt es zwei Neutralpunkte, wann immer  $J_1^2(z)\lambda^2 > 2zJ_0(z)J_1(z)$ ; im nichtrelativistischen Fall gibt es dagegen immer nur einen Neutralpunkt für alle  $z$ .

Die Auswertung des Quadrates der Frequenz ist in Abb. 8.7 dargestellt. Hier müssen besonders diejenigen Werten für  $z$  beachtet werden, die zwei Neutralpunkte erlauben, da das Plasma für  $0 < \kappa < \kappa_\ell$  (dabei bezeichnet  $\kappa_\ell$  den ersten Neutralpunkt) und für  $\kappa_r < \kappa < \kappa_0$  (wobei  $\kappa_r$  den zweiten Neutralpunkt und  $\kappa_0$  die erste Nullstelle des Nenners  $E(\kappa)$  bezeichnet) instabil ist.

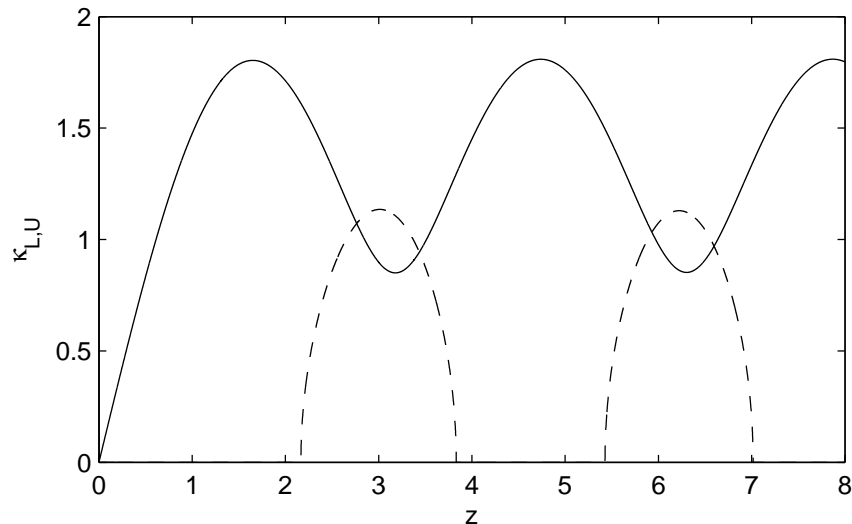


Abbildung 8.5: Der obere Zweig  $\kappa_U(z)$  (durchgezogene Linie) und der untere Zweig  $\kappa_L(z)$  (gestrichelte Linie) für ein ultrarelativistisches Elektron-Positron-Plasma mit  $U = 1$ ,  $\lambda = 1$  und  $\gamma \simeq 0,9 \times 1836$ .

Gibt es nur einen Neutralpunkt, so ist das System im Bereich  $0 < \kappa < \kappa_n$  stabil, wobei  $\kappa_n$  den einzigen Neutralpunkt bezeichnet, und instabil für  $\kappa_n < \kappa < \kappa_0$ .

Für große  $\kappa$  ist das Verhalten des Quadrates der Frequenz qualitativ vergleichbar mit dem in Abschnitt 8.4.1 für den Fall eines Elektron-Proton-Plasmas beschriebenen, und ist in Abb. 8.8 dargestellt.

## 8.5 Zusammenfassung

Die Entwicklung von kinetischen Plasma-Instabilitäten, die nur von den Bulk-Eigenschaften des Plasmas und nicht von resonanten Wechselwirkungen abhängen, weist über das vergangene halbe Jahrhundert eine einigermaßen kontroverse Vergangenheit auf. Unter magnetohydrodynamischen Bedingungen wurden Plasma-Instabilitäten bereits früh als die wichtigsten Akteure sowohl in Laborgeräten als auch in astrophysikalischen Plasmen identifiziert, wobei die kinetischen Plasma-Instabilitäten oft außer Acht gelassen wurden.

Das Aufkommen von astrophysikalischen Szenarien, in denen relativistische Effekte dominieren, hat das Thema der kinetischen Plasma-Instabilitäten wieder ins Blickfeld gerückt, wie in Schlickeiser<sup>80</sup> detailliert beschrieben. Das vorliegende Kapitel hat zu der wachsenden Sammlung von nichtresonanten kinetischen Plasma-Instabilitäten eine Vielzahl von Aspekten beigetragen:

- Die grundlegende Technik der Suche nach Neutralpunkten im Wellenzahlraum, bei der Harris<sup>30</sup> Pionierarbeit geleistet hat, wurde verallgemeinert, um sowohl relativistische Plasma-Effekte, die fluktuierenden Magnetfelder und Beiträge gleichermaßen von positiven (Ionen und/oder Positronen) als auch negativen (Elektronen) Ladungen zu berücksichtigen und mit einzubeziehen. Alle drei genannten Punkte waren



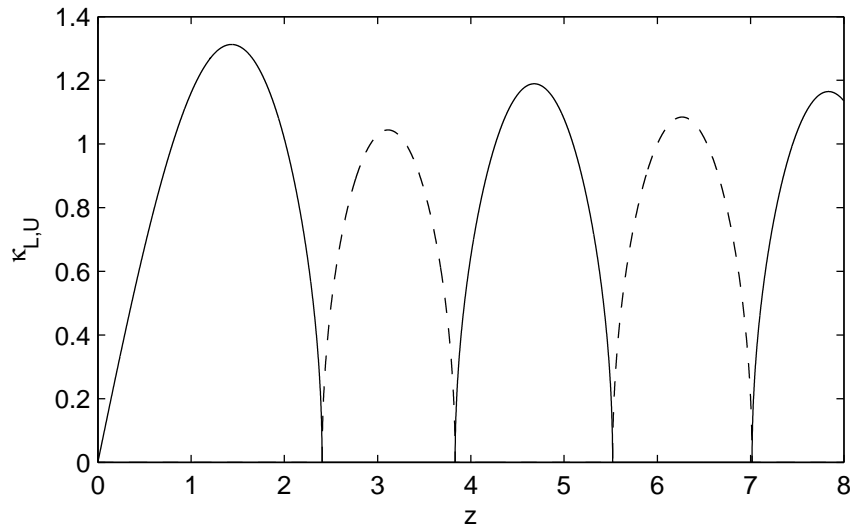


Abbildung 8.6: Der obere Zweig  $\kappa_U(z)$  (durchgezogene Linie) und der untere Zweig  $\kappa_L(z)$  (gestrichelte Linie) für ein nichtrelativistisches Elektron-Positron-Plasma mit  $u = 1$ ,  $\lambda = 1$  und  $\gamma \simeq 1$ .

in Harris' ursprünglicher Herleitung, die sich nur auf longitudinale Oszillationen bezog, nicht berücksichtigt.

- Die Einbeziehung der Ionenbewegung in die Dispersionsrelationen bedingt das Vorhandensein eines großen Faktors, der in Harris' Herleitung durch seine Festlegung einer unendlich großen Ionenmasse, *bevor* die Wellenfrequenz bei der Suche nach Neutralpunkten gleich null gesetzt wurde, gänzlich abwesend ist. Das bedeutet, dass die originale Herleitung eigentlich nur für Frequenzen oberhalb der Ionen-Zyklotronfrequenz gültig ist.
- Die Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Mode hat sowohl auf die Lage der Neutralpunkte im Wellenzahlraum als auch auf die Zahl der vorhandenen Neutralpunkte einen wesentlichen Einfluss.
- Die Neutralpunkt-Methode eignet sich zur Identifikation von Plasma-Instabilitäten bei niedrigen Frequenzen und erlaubt – wiederum im Gegensatz zu Harris' ursprünglicher Herleitung – die quantitative Bestimmung von Wachstumsraten der Instabilität. Dies haben wir am Beispiel eines Elektron-Proton-Plasmas, bei dem die Protonen keine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld haben, und am Beispiel eines Elektron-Positron-Plasmas, bei dem beide Teilchensorten die gleiche – monoenergetische – Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld haben, veranschaulicht.
- Die allgemeine Methode für niederfrequente Instabilitäten ist in den beiden Anhängen B.2 und B.3 für sich in einem beliebigen Winkel zum Hintergrund-Magnetfeld ausbreitende Wellen und Verwendung beliebiger Verteilungsfunktionen dargestellt. Die Gleichungen sind – bezogen auf eine analytische Untersuchung – jedoch äußerst unhandlich, und man wird höchstwahrscheinlich auf numerische Verfahren zurückgreifen müssen.

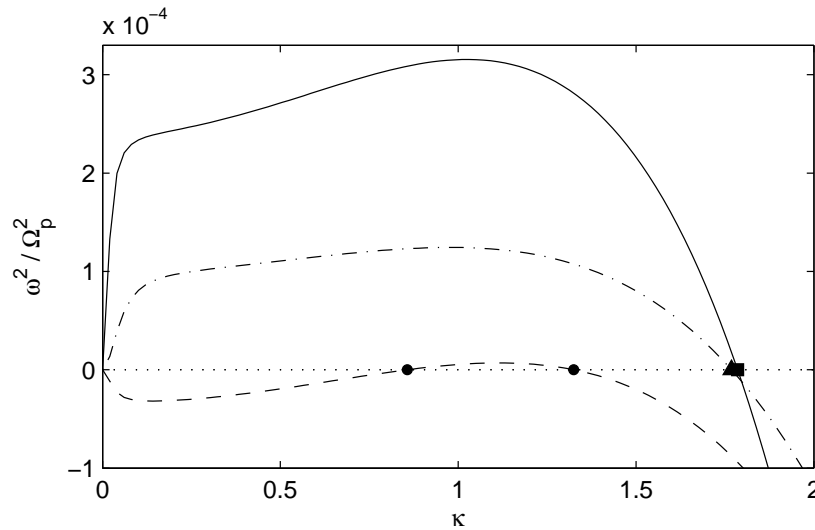


Abbildung 8.7: Variation von  $\omega^2/\Omega_p^2$  aus Gl. (8.37) als Funktion von  $\kappa$  für ein ultrarelativistisches Elektron-Positron-Plasma, für  $z = 1,5$  (durchgezogene Linie),  $z = 2,5$  (gestrichelte Linie) und  $z = 4,5$  (Strichpunkt-Linie).

Das Beispiel der Elektronen und Positronen ist aus drei Gründen besonders aufschlussreich: Zunächst ist der vom Massenverhältnis  $m_i/m_e$  abhängige große Beitrag der Ionen zur Dispersionsrelation stark reduziert, da  $m_{e^+}/m_{e^-} = 1$  anstelle von 1836 für den Fall von Protonen und Elektronen ist. Dieser Umstand erlaubt es, die Wechselwirkungen von Teilchen und Wellen viel klarer zu sehen; dies ist in den Abbildungen 8.5 bis 8.8 dargestellt und kommentiert. Zweitens verschwindet die Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Mode für senkrechte Wellen mit  $k_{\parallel} = 0$ , wenn die Elektronen und Positronen den gleichen Impuls senkrecht zum umgebenden Magnetfeld aufweisen. Dieser Umstand erlaubt es, das Verhalten der Neutralpunkte und der sich entwickelnden Instabilitäten betrachten zu können, ohne dass diese Entwicklungen durch die Kopplung modifiziert wären. Diese Vereinfachung bietet daher ein beträchtliches Maß an Einsicht, das von großem Wert für die komplexeren Untersuchungen von Elektronen und Protonen ist, bei welchen die Kopplung nicht verschwindet. Drittens zeigen sich die niederfrequenten Instabilitäten auch im Falle eines Elektron-Ionen-Plasmas, was darauf hindeutet, dass die beobachteten Instabilitäten robust sind und nicht ausschließlich an spezielle Plasmabedingungen gebunden sind.

Wir haben die Verteilungen in Form von Delta-Distributionen als einfache Beispiele zur Illustration der Kopplungseffekte zwischen longitudinaler und transversaler Mode gewählt. Unsere Methode ist jedoch für fast jede beliebige (gyrotrope) Verteilungsfunktion anwendbar – auch darunter anisotrope Geschwindigkeitsverteilungen, die Verlustkegel-Instabilitäten (*loss-cone instabilities*) erlauben, wie in Melrose und Dulk<sup>58</sup> beschrieben. Verlustkegel-Instabilitäten treten beispielsweise im Bugschock der Erde auf (Lobzin et al.<sup>49</sup>), aber auch in der solaren Korona, wo von Verlustkegel-Verteilungen stammende Radiowellen in „Fischgrätenmustern“ (*herringbones*) beobachtet wurden (Mann und Klassen<sup>52</sup>). Für einige Verlustkegel-Verteilungen stabilisiert das parallele elektrische

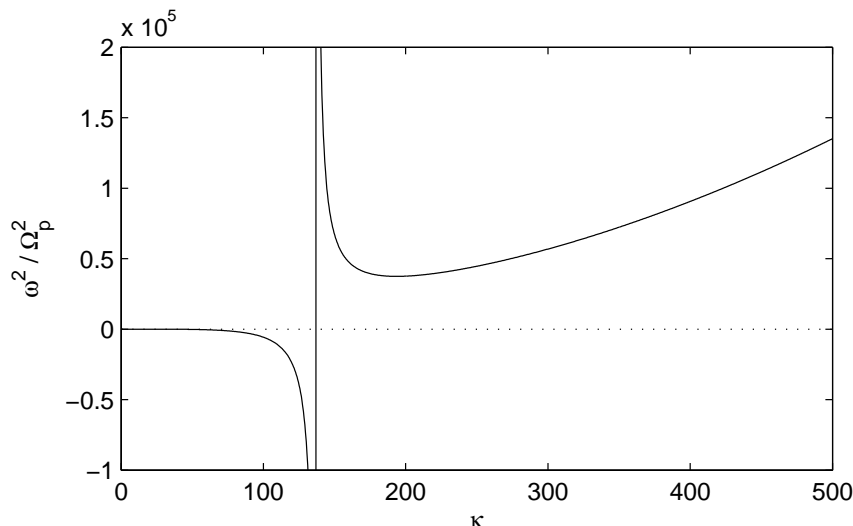


Abbildung 8.8: Der Einfluss des Pols durch die Nullstelle von  $E(\kappa)$  (die Position der Polstelle ist durch die vertikale durchgezogene Linie markiert) auf  $\omega^2/\Omega_p^2$ . Für die numerische Veranschaulichung wurde ein Wert von  $z = 2,5$  gewählt.

Feld die Welle, während für steilere Verlustkegel und höhere Temperatur-Anisotropien die Wachstumsraten verstärkt werden (Mishra und Tiwari<sup>62</sup>). Niederfrequente, also unterhalb von Gyro- und Plasmafrequenzen auftretende Instabilitäten in einem Elektron-Proton-Plasma können auch von energetischen Sauerstoff-Ionen angeregt werden (Singh et al.<sup>95</sup>). Als ein weiterer Spezialfall können niederfrequente Whistler-Wellen in der heißen Plasma-Komponente der Magnetosphäre erzeugt werden (Tripathi und Misra<sup>107</sup>).

Darüber hinaus gibt es für einige der speziellen Beispiele eine maximale Stärke des umgebenden Magnetfeldes, so dass bestimmte Neutralpunkte nur für Feldstärken unterhalb dieses Maximums auftreten können. Ob es sich bei diesem Aspekt um ein allgemeines Ergebnis handelt oder ob dies eine nur auf die spezifischen Verteilungsfunktionen beschränkter Aussage ist, ist noch unklar, aber mit Sicherheit für weitere Untersuchungen von Bedeutung. Die Stabilisierung einer Instabilität durch ausreichend starke magnetische Felder – unter der Annahme, dass dieses starke Feld nicht selbst neue Instabilitäten erzeugt – ist in relativistischen astrophysikalischen Jets mit ihrem enthaltenen Hintergrund-Magnetfeld von großem Interesse.

Weiterhin sind diese instabilen Situationen insofern mit dem Verhalten von Weibel-Moden vergleichbar, als dass diese Wellen nur eine Wachstumsrate haben, aber keine bevorzugte Ausbreitungsrichtung. Darüber hinaus sind diese Instabilitäten nur von den Bulk-Eigenschaften des Plasmas und nicht von selektiven Welle-Teilchen-Resonanzen abhängig. Schließlich sind die Instabilitäten nicht mit magnetohydrodynamischen Methoden herleitbar.

Während die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden sogar bei kleinen Frequenzen zwar nicht allumfassend sind, ist die vollständige Herleitung der Neutralpunkt-Methode und damit verbunden die Entdeckung der Kopplungseffekte für relativistische Plasmasysteme dennoch hinsichtlich der Anwendbarkeit auf eine Reihe von astrophysikalischen

Situationen ausgedehnt worden. Solch eine Anwendung, nämlich auf die Jets von Gammastrahlungsausbrüchen, wird im nächsten Kapitel betrachtet.

Eine Schwierigkeit der Neutralpunkt-Methode besteht darin, dass sie nicht eindeutig die Frage beantwortet: Was lässt sich über Plasmen aussagen, welche die Existenz von Neutralpunkten *nicht* gestatten? Teilweise ist die Antwort bekannt, auch durch die in diesem Kapitel vorgestellten Beispiele. Die Dispersionsrelation in niedrigster Ordnung,  $\omega^2 E(k_\perp) + F(k_\perp) = 0$ , weist darauf hin, dass eine instabile Situation lediglich  $E(k_\perp)F(k_\perp) > 0$  erfordert, so dass es genügt, festzustellen, dass  $E$  negativ (positiv) ist, falls  $F$  negativ (positiv) ist. Hat  $F$  eine Nullstelle, so ist Instabilität *garantiert* – falls nicht  $E$  dieselbe Nullstelle hat –, ungeachtet des Vorzeichens von  $E(k_\perp)$ .

Angesichts des stetig wachsenden Interesses an astrophysikalischen Plasmen ist die hier vorstellte vollständige und allgemeine Untersuchung von beträchtlichem Nutzen für solche Szenarien, sogar wenn die volle Komplexität der in den Anhängen ausgeführten Ergebnisse benötigt wird.

---

# 9 Instabilitäten in $\gamma$ -ray Bursts

*Nach einer Einführung in die Physik der  $\gamma$ -ray Bursts werden die in Kapitel 8 entwickelten Methoden auf dieses Beispiel angewendet. Dabei werden die in den Jets möglichen Plasmainstabilitäten und ihre charakteristischen Zeitskalen sowie Implikationen für die Zusammensetzung der Jets untersucht.*

## 9.1 Einleitung

Dieser Abschnitt ist im Wesentlichen dem Übersichtsartikel von Piran<sup>66</sup> entnommen. Andere ausführliche Einführungen in dieses spannende Gebiet bieten beispielsweise die Übersichtsartikel von Mészáros<sup>57</sup>, Piran<sup>65,66</sup> und die darin enthaltenen Referenzen.

### 9.1.1 Beobachtungen

Gammastrahlungsausbrüche ( *$\gamma$ -ray bursts*, abgekürzt als GRB) sind kurze und intensive Pulse weicher Gammastrahlung. Neben der Gammastrahlung wird gleichzeitig auch niederenergetische Strahlung bis hin zu Röntgenstrahlung emittiert. Das nichtthermische Spektrum hat dabei ein Maximum typischerweise bei einigen hundert keV und erstreckt sich bis in den GeV-Bereich; dies variiert jedoch sehr stark bei verschiedenen GRB.

Die Dauer eines GRB beträgt typischerweise 0,01 bis 100 Sekunden, und er weist dabei eine Variabilität auf der Zeitskala von Millisekunden auf. Zusätzlich ist jeder GRB aus einzelnen Pulsen zusammengesetzt, die insgesamt mit der Zeit einen Übergang von harter zu weicherer Strahlung zeigen und jeder für sich ein sog. FRED-Spektrum<sup>a</sup> mit einem Anstieg-zu-Abfall-Verhältnis von 1:3 aufweisen. Die Pulsbreiten und die zeitlichen Abstände zwischen den einzelnen Pulsen folgen dabei der gleichen logarithmischen Normalverteilung. Die Energiedichtespektren in den Lichtkurven der Pulse folgen weiterhin einem Potenzgesetz mit einem Spektralindex von etwa  $-5/3$ , mit einem scharfen Bruch bei 1 Hz. Aus Beobachtungen des weiter unten beschriebenen Nachleuchtens weiß man, dass GRB bei Rotverschiebungen zwischen 0,0085 und 4,5 auftreten, mit einem Medianwert bei  $z \simeq 1$ .

Die Strahlungsflüsse eines Gammastrahlungsausbruches sind von der Größenordnung  $10^{-7}$ - $10^{-4}$  ergs/cm<sup>2</sup>. Dies führt – bei angenommenen Isotropie der Strahlungsquelle – auf eine Gesamt-Luminosität von  $10^{51}$ - $10^{52}$  ergs/s – damit wären sie die leuchtkräftigsten Objekte im Universum. Da jedoch, wie man inzwischen weiß, ihre Strahlung stark gebün-

---

<sup>a</sup>Fast-rise exponential decay: ein Spektrum mit einem steilen Anstieg und einem typischerweise langsamen exponentiellen Abfall

delt ist und in zwei sog. Jets abgestrahlt wird, beläuft sich somit die gesamte abgegebene Energie nur mehr auf  $10^{51}$  ergs, was vergleichbar zur Energieabgabe einer Supernova ist.

Bis zum Jahre 1997 war kein Gegenstück zu Gammastrahlungsausbrüchen in anderen Wellenlängenbereichen bekannt; inzwischen weiß man jedoch, dass sie in einigen Fällen von einem zwischen etwa 40 Sekunden und anderthalb Stunden nach Beginn des Ausbruchs gemessenen optischen Blitz (*prompt optical flash*) begleitet werden. Weiterhin beginnt einige zehn Sekunden nach dem Ende des ersten Ausbruchs der Übergang zum frühen Röntgen-Nachleuchten (*early X-ray afterglow*). Das erstmals im Jahre 1992 beobachtete Phänomen des Nachleuchtens (diese Beobachtung wurde allerdings erst sehr viel später bekannt), das manchmal sogar erst Jahre nach dem Ausbruch auftritt, kann sowohl im Röntgen-, als auch im Optischen, im Infrarot- und sogar im Radiobereich auftreten – letzteres wurde zuerst im Jahre 1997 beobachtet. Jedoch zeigen nur etwa 50% der Gammastrahlungsausbrüche der sofortigen Gamma-Emission folgende optische Übergänge; auf der anderen Seite haben 90% der GRB Gegenstücke im Röntgenbereich. Die fehlenden 40% werden auch als *dunkle GRB* bezeichnet, zu deren Erklärung drei hauptsächliche Hypothesen aufgestellt wurden: 1. Das Licht von durchschnittlichen GRB wird durch staubige Molekülwolken gefiltert und sie erscheinen somit im optischen Bereich dunkel; 2. dunkle GRB treten bei höheren Rotverschiebungen mit  $z \gtrsim 5$  auf, wodurch die Lyman-Kante in den optischen Bereich rotverschoben wird – dies wird jedoch durch gemessene Rotverschiebungen dunkler GRB nicht bestätigt; oder 3. das optische Nachleuchten ist vorhanden, jedoch schlicht so schwach, dass es nicht nachgewiesen werden kann. Des Weiteren tritt bei etwa 50% der GRB ein Radio-Nachleuchten auf, meistens mit einem Maximum etwa bei 8 GHz; etwa 80% der Radio-GRB weisen auch ein optisches Nachleuchten auf und umgekehrt.

Für praktisch alle GRB sind mittlerweile Wirtsgalaxien beobachtet worden, die typische schwache, jedoch metallarme Feldgalaxien sind. Dies wurde anhand einer Studie über nahe ( $z < 0,17$ ) GRB nachgewiesen und demnach spekuliert, dass die Metalle das Leben in der Milchstraße schützen (vgl. Stanek et al.<sup>99</sup>). Die räumliche Verteilung der GRB am Himmel ist gleichförmig; dies war ursprünglich der erste Hinweis auf den kosmologischen Ursprung der GRB und darauf, dass sie nicht unserer Galaxie oder dem lokalen Universum zugehörig sind. Ihre Raten betragen etwa zwischen 0,075 und 0,8 pro Kubik-Gigaparsec und Jahr – dies ist jedoch der Wert für angenommene Isotropie der Abstrahlung; bei einer Bündelung in einen Winkel  $\theta$  wird dieser Wert um einen Faktor  $2/\theta^2$  erhöht. Die – auf noch anderem Wege berechnete – korrekte Rate sagt einen Wert von  $33 \pm 11 h_{65}^3 \text{ Gpc}^{-3} \text{ a}^{-1}$  voraus, wobei  $h_{65}$  die Hubble-Konstante<sup>b</sup> in Einheiten von  $65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  bezeichnet, was somit einen Wert von etwa  $43 \text{ Gpc}^{-3} \text{ a}^{-1}$  ergibt.

### 9.1.2 Das Modell

Die hier kurz beschriebenen Zutaten für ein Modell zur Erklärung von Gammastrahlungsausbrüchen sind die folgenden. Zunächst wird – aufgrund der hohen Energiefreisetzung von  $10^{51}$  ergs, die vergleichbar zu einer Supernova-Explosion ist – ein kompaktes Ob-

<sup>b</sup>Die Hubble-Konstante wurde zuletzt durch die Daten des WMAP-Satelliten auf einen aktuellen Wert von  $H_0 = 71_{-0,03}^{+0,04} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  eingeschränkt.

jekt benötigt, da es sonst unmöglich wäre, in einer vergleichbar kurzen Zeitspanne eine Energiemenge abzugeben, die der Dissipation von etwa einer zehntel Sonnenmasse in ein paar Sekunden entspricht. Dies deutet bereits auf ein möglicherweise neu entstandenes schwarzes Loch hin. Die beobachtete Assoziation mit Sternentstehungs-Gebieten und Supernovae, demzufolge GRB also in Galaxien mit einer hohen Sternentstehungsrate auftreten und die Verteilung der GRB der des Lichtes folgt, deutet darauf hin, dass GRB vom Kollaps massiver Sterne verursacht werden. Dies wird durch unabhängige Beobachtungen bestätigt, die GRB mit Supernovae in Verbindung setzen. In Frage kommt neben der Entstehung eines schwarzen Loches durch den Gravitationskollaps eines Sterns oberhalb der Grenze von einigen Sonnenmassen möglicherweise auch das Verschmelzen von Neutronensternen.

Als Nächstes liefern Beobachtungen von monochromatischen Brüchen in den Lichtkurven des Nachleuchtens einen Hinweis auf die Bündelung der Strahlung und ihre Abgabe in Form von Jets, wie sie auch bei Aktiven Galaktischen Kernen (AGN) auftreten.

Weiterhin wird eine hochrelativistische Bewegung der Quelle mit Lorentzfaktoren von  $\Gamma > 100$  benötigt. Dies ist zur Lösung des so genannten Kompaktheits-Problems erforderlich, das historisch den ersten Hinweis auf eine relativistische Bewegung lieferte. Kurz gesagt wies das nichtthermische Spektrum der GRB auf eine optisch dünne Region hin; jedoch ergab eine einfache Abschätzung der Zahl der Photonen mit Energien oberhalb von 500 keV zusammen mit einer Abschätzung der aus der Variabilitäts-Zeitskala  $\delta t$  berechneten Größe der strahlenden Region,  $c\delta t$ , dass die strahlende Region optisch sehr dick sein muss. Dieser Widerspruch kann nur aufgelöst werden, wenn eine relativistische Bewegung der Quelle auf den Beobachter zu angenommen wird; dies wird als das relativistische „Feuerball-Modell“ (*fireball model*) bezeichnet. Wie genau diese hohe Beschleunigung der Jets erlangt wird, bleibt aber derzeit noch genauso unklar wie ihre eigentliche Natur.

Als vielleicht wichtigste Zutat ist Dissipation erforderlich. Dabei wird der gegenwärtigen Vorstellung zufolge die hohe kinetische Energie des Materiestroms durch Plasma-Instabilitäten dissipiert. Dies geschieht zum einen in „internen“ Schocks, bei dem in sich überholenden Materiekumpen (*blobs*) eine Schockwelle ausgebildet wird, die für den primären Gammastrahlungsausbruch verantwortlich zu machen ist. Das Nachleuchten wird in den „externen“ Schocks erzeugt, bei dem die Jets auf das interstellare Medium treffen und mit diesem wechselwirken. Die genauen Prozesse der Dissipation sind jedoch noch nicht vollständig geklärt. Dazu beizutragen ist daher Thema des vorliegenden Kapitels, indem die Methoden aus Kapitel 8 auf die in den Jets vorliegenden Bedingungen angewandt werden, um die Entstehung von Plasma-Instabilitäten auf analytischem Wege nachzuweisen und somit die zur Ausbildung von Schockwellen notwendige Dissipation bereitzustellen, welche wiederum für das auf der Erde beobachtete Leuchten verantwortlich sind.

Darüber hinaus tritt in GRB durch in den Schocks beschleunigte Elektronen Synchrotronstrahlung auf. Als Alternativen dazu werden durch Selbst-Compton-Streuung erzeugte Synchrotronstrahlung diskutiert sowie Compton-Streuung am Licht externer Quellen, deren mögliche Natur jedoch unklar bleibt.

## 9.2 Instabilitäten

Das Hauptziel dieses Kapitels besteht darin, die Bedingungen an das Plasma und die charakteristischen Zeitskalen zu untersuchen, auf denen aperiodische Fluktuationen anwachsen, um damit zu zeigen, dass die *e-folding*-Zeitskalen<sup>c</sup> von  $10^{-6}$  s bis zu einigen zehn Sekunden reichen – was präzise dem zeitlichen Bereich der GRB selbst entspricht. Daher spielen solche aperiodischen Fluktuationen mit Sicherheit in den bereits durch interne Schocks magnetisierten GRB eine wichtige Rolle, wie dies von Medvedev und Loeb<sup>55</sup> vorhergesagt wurde.

Wie in Schlickeiser et al.<sup>85</sup> beschrieben, sind in den meisten theoretischen Modellen die mikrophysikalischen Details der Jets nicht näher spezifiziert, insbesondere hinsichtlich der Umwandlung der kinetischen Bulk-Energie des Jets in individuelle Teilchenenergie. Wir werden uns dieser offenen Frage annehmen, indem wir explizit untersuchen, wie aperiodische Fluktuationen in den Jets von GRB erzeugt werden können, die dann durch Dissipation zur Erzeugung von Schockwellen führen sollen, welche wiederum für die beobachtete Strahlung verantwortlich sind.

Plasma-Instabilitäten, darunter insbesondere die Filamentierungs-Instabilität, können Magnetfelder erzeugen, wenn ausgestoßenes Material mit relativistischen Geschwindigkeiten durch das interstellare Medium strömt. Die Filamentierungs-Instabilität führt zu einem Kollaps des Mediums in Filamente mit starkem Magnetfeld und hohen Elektronentemperaturen (Brainerd<sup>8</sup>). Die in diesem Kapitel vorgestellte Methode geht bereits von der Anwesenheit eines homogenen Hintergrund-Magnetfeldes *vor* der Entwicklung der Instabilitäten aus; diese Herangehensweise ist durch das Modell gerechtfertigt, dass Magnetfelder durch die Zweistrom-Instabilität in den internen Schocks von – durch die Quelle mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausgestoßenen – Massenschalen (*mass shells*) entstehen (Medvedev und Loeb<sup>55</sup>). Da diese Instabilität sehr schnell ist (vgl. Medvedev et al.<sup>56</sup>), trägt das System bereits ein starkes magnetisches Feld, wenn es in das interstellare Medium hineinläuft und dort die so genannten „externen“ Schocks verursacht – dies kann als ein möglicher Ausgangspunkt unserer Untersuchung angesehen werden.

Medvedev und Loeb<sup>55</sup> haben ebenso wie Lyubarsky und Eichler<sup>51</sup> lediglich den Fall eines unmagnetisierten Plasmas untersucht. Die durch die Wechselwirkung des „Feuerballs“ mit dem umgebenden Medium entstehenden externen Schocks tragen aber bereits ein starkes Magnetfeld. Daher untersuchen wir in diesem Kapitel mit der in Kapitel 8 beschriebenen Methode die allgemeine Komplexität eines dreidimensionalen Systems unter Einbeziehung eines Hintergrund-Magnetfeldes, wobei sowohl durch die Kopplung verbundene (quasi-)elektrostatische als auch (quasi-)elektromagnetische Wellenmoden berücksichtigt werden.

Wir werden die Methode auf den Spezialfall der Jets eines GRB anwenden, um dabei insbesondere den Effekt der Moden-Kopplung und der charakteristischen Zeitskalen der Instabilität zu untersuchen. Das einfachste theoretische Modell, um die Plasma-Instabilitäten in den Jets zu beschreiben, erfordert monoenergetische Elektronen und Ionen, und

---

<sup>c</sup>Der Begriff der *e-folding*-Zeitskala bezeichnet die Zeit, in der eine Exponentialfunktion auf einen Faktor  $e$  anwächst und ist für eine Funktion  $\exp(\Gamma t)$  gegeben durch  $\tau = \Gamma^{-1}$ .



bezüglich des homogenen Hintergrund-Magnetfeldes wird angenommen, dass es parallel zur Strömungsrichtung des Jets liege. Die Rechnungen werden weiterhin im Ruhesystem des Jets durchgeführt, und – für den Fall eines Elektron-Proton-Plasmas – wird zusätzlich noch angenommen, dass sich nur die Elektronen aufgrund der Gyrationbewegung kreisförmig senkrecht zur Strömungsrichtung bewegen. Darüber hinaus wird aber auch der Fall eines symmetrischen Elektron-Positron-Plasmas untersucht. Da das Ruhesystem des Jets verwendet wird, wird nur die Wellenausbreitung senkrecht zur Strömungsrichtung betrachtet. Die Ausbreitungsrichtung im Beobachtersystem hängt somit vom Verhältnis des – beobachtbaren – Bulk-Lorentzfaktors  $\Gamma_{\parallel}$  zum intrinsischen Lorentzfaktor der Gyrationbewegung,  $\gamma_e$ , ab. Im Falle  $\Gamma_{\parallel} \gg \gamma_e$  sind die ins Beobachtersystem transformierten angeregten Wellen quasi-parallel, während sie im Falle  $\Gamma_{\parallel} \ll \gamma_e$  quasi-senkrecht bleiben.

### 9.3 Technische Herleitung

Der Übersichtlichkeit halber stellen wir hier noch einmal in aller Kürze die wichtigsten Eigenschaften der in Kapitel 8 entwickelten Methoden zusammen, obwohl diese dort bereits ausführlich hergeleitet wurden.

Wie in Kapitel 5 gezeigt wurde, sind die Dispersionsrelationen durch die Nullstellen der Determinante des Maxwell-Operators gegeben, der definiert ist als

$$A_{lm} = \frac{c^2}{\omega^2} (k_l k_m - \delta_{lm} k^2) + \delta_{lm} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{lm}, \quad (9.1)$$

wobei  $\delta_{lm}$  das Kronecker-Symbol und  $\sigma_{lm}$  den relativistischen Leitfähigkeitstensor aus Gl. (5.7) bezeichnet. Durch eine Taylor-Entwicklung der Determinante des Maxwell-Operators in Potenzen der (komplexen) Frequenz  $\omega$  wurde in Kapitel 8 gezeigt, dass sich die Dispersionsrelation zur Ordnung  $\omega^2$  durch die quadratische Gleichung

$$\omega^2 E(k_{\perp}) + \Omega_p^2 F(k_{\perp}) = 0 \quad (9.2)$$

darstellen lässt; dabei ist

$$\Omega_p = (\omega_{p,e}^2 / \gamma_e + \omega_{p,i}^2)^{1/2} \quad (9.3)$$

eine zur Normierung eingeführte Plasmafrequenz, in der  $\omega_{p,e}$  und  $\omega_{p,i}$  die Elektronen- bzw. Ionen-Plasmafrequenzen bezeichnen.

Hier wird also der Grenzfall von Wellen betrachtet, die sich strikt senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld ausbreiten; die allgemeinere Situation ist in Kapitel 8 dargestellt. Unter Verwendung der dimensionslosen Variablen

$$\kappa = k_{\perp} c / \Omega_p \quad (9.4a)$$

$$\lambda = \xi_e / (\gamma_e m_e c) < 1 \quad (9.4b)$$

$$u = \omega_{pe}^2 / (\gamma_e \Omega_p^2) < 1 \quad (9.4c)$$

$$\mu = m_e / m_i \simeq 1/1836 \ll 1 \quad (9.4d)$$

und

$$z = \kappa \lambda \gamma_e \frac{\Omega_p}{\Omega_e} \quad (9.4e)$$

erhalten wir damit die Ausdrücke  $E(k_\perp)$  und  $F(k_\perp)$  in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} E(\kappa) = & \left\{ \frac{u}{\kappa^2} \left[ 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) + \frac{z^2}{\lambda^2 \gamma \mu} \right] - 1 \right\} \\ & \times \left\{ (1 + \kappa^2) \frac{uz^2}{\kappa^2 \lambda^2} \left[ \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - J_1^2(z) \right) + 1 - 2z J_0(z)J_1(z) \right] - (1 + 2\kappa^2) \right\} \\ & - \frac{u^2 z^2}{\kappa^2 \lambda^2} [J_0^2(z) - 1 - J_1^2(z)]^2 + (1 + \kappa^2) \left\{ \frac{4u^2 z^3}{\kappa^4 \lambda^3 \gamma} [1 + J_0^2(z) - J_1^2(z)] \right. \\ & \left. \times \left[ \left( \frac{\gamma}{\lambda} + 2\gamma^2 \lambda \right) \Theta'_e + \frac{\gamma^2 z}{\lambda} \Theta''_e - \frac{z}{4\gamma \lambda \mu^2} \right] + \frac{uz^2}{\kappa^2 \lambda^2} \left[ 6\gamma \Theta_e + \frac{4z}{\lambda} \Theta'_e + \frac{z^2}{\lambda^2 \mu^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.5a)$$

$$\begin{aligned} F(\kappa) = & (1 + \kappa^2) \left\{ \left[ 1 - \frac{u}{\kappa^2} \left( 1 - J_0^2(z) + \frac{2z}{\lambda^2} J_0(z)J_1(z) + \frac{z^2}{\lambda^2 \gamma \mu} \right) \right] \right. \\ & \left. \times \left[ \kappa^2 - u \left( \lambda^2 J_1^2(z) - 2z J_0(z)J_1(z) \right) \right] + \frac{u^2 z^2}{\kappa^2 \lambda^2} [J_0^2(z) - 1 - J_1^2(z)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.5b)$$

Darin bezeichnet  $J_n(x)$  die Besselfunktionen erster Art der Ordnung  $n$  (s. Anhang C.1), und es wurden die Definitionen

$$\Theta_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(z_a)}{n^2}, \quad (9.6a)$$

$$\Theta'_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(z_a)J'_n(z_a)}{n^2} = \frac{m_a \Omega_a}{2k_\perp} \frac{\partial \Theta_a}{\partial p_\perp} \quad (9.6b)$$

$$\Theta''_a = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_n'^2(z_a)}{n^2} + \frac{J_n(z_a)J_n''(z_a)}{n^2} \right] = \frac{m_a \Omega_a}{k_\perp} \frac{\partial \Theta'_a}{\partial p_\perp} \quad (9.6c)$$

$$= \frac{1}{2} [1 - J_0^2(z_a)] - \frac{\Theta'_a + z_a \Theta_a}{z_a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'^2(z_a)}{n^2} \quad (9.6d)$$

eingeführt, da diese unendlichen Reihen nicht weiter vereinfacht werden können.

Gemäß Gleichung (9.2) sind Neutralpunkte im Wellenzahlraum durch  $F(k_\perp)$  gegeben. Diese Bedingung kann in die Form

$$\mathcal{H}(k_\perp) \mathcal{T}(k_\perp) = \mathcal{C}(k_\perp) \quad (9.7)$$

gebracht werden, wobei die so genannte „Harris-Funktion“,  $\mathcal{H}$ , longitudinale Moden und  $\mathcal{T}$  transversale Moden am Neutralpunkt in Abwesenheit von Kopplungseffekten beschreibt. Der Term auf der rechten Seite von Gl. (9.7) beschreibt die Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Mode. Im Falle eines symmetrischen, monoenergetischen

Elektron-Positron-Plasmas gibt es jedoch keine Kopplung, es gilt also  $\mathcal{C}(k_\perp) = 0$ . Die Konsequenz daraus ist die Existenz von abwechselnd einem oder zwei Neutralpunkten, abhängig von der Stärke des Hintergrund-Magnetfeldes.

In Kapitel 8 wurde gezeigt, dass Neutralpunkte durch die Lösungen der Gleichung

$$\kappa_{T,L}^2 - \frac{1}{2\lambda^2} \left[ \tilde{\mathcal{H}}(\kappa) + \lambda^2 \tilde{\mathcal{T}}(\kappa) \mp \left\{ 4\lambda^2 \mathcal{C}(\kappa) + \left[ \tilde{\mathcal{H}}(\kappa) - \lambda^2 \tilde{\mathcal{T}}(\kappa) \right]^2 \right\}^{1/2} \right] = 0 \quad (9.8)$$

gegeben sind, wobei die auftretenden Faktoren definiert sind durch

$$\tilde{\mathcal{H}}(\kappa) = u \left\{ [1 - J_0^2(z)] \lambda^2 + 2z J_0(z) J_1(z) + \frac{z^2}{\gamma\mu} \right\} \quad (9.9a)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}(\kappa) = u [J_1^2(z) - 2z J_0(z) J_1(z)] \quad (9.9b)$$

$$\mathcal{C}(\kappa) = -uz^2 [J_0^2(z) - 1 - J_1^2(z)]^2. \quad (9.9c)$$

Dabei beziehen sich die Indizes  $T$  und  $L$  in Gl. (9.8) auf transversale und longitudinale Neutralpunkte.

Darüber hinaus gibt es eine Grenze für die Magnetfeldstärke, oberhalb derer keine transversalen Neutralpunkte auftreten können. Daher ist – im Niederfrequenzbereich – für starke Magnetfelder das Plasma stets stabil gegenüber der Anregung transversaler Instabilitäten. Für schwache Magnetfelder und für den Fall eines Elektron-Ion-Plasmas, was die Anwesenheit von Moden-Kopplung sichert, gibt es oftmals zwei Neutralpunkte (s. auch Kap. 8).

Gemäß Gleichung (9.2) ist die Frequenz gegeben durch

$$\frac{\omega^2}{\Omega_p^2} = -\frac{F(k_\perp)}{E(k_\perp)}. \quad (9.10)$$

Die Auswertung von Gl. (9.10) ergibt dann sofort Regionen von Stabilität (falls  $\omega^2 > 0$ ) beziehungsweise Instabilität (falls  $\omega^2 < 0$ ) in Abhängigkeit von der (senkrechten) Wellenzahl  $k_\perp$ , wenn  $F(k_\perp)$  die Abszisse kreuzt.

## 9.4 Beispiele zur Veranschaulichung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Neutralpunkte und das Verhalten der Frequenz gemäß den Gleichungen (9.8) und (9.10) für den Fall eines monoenergetischen Elektron-Proton-Plasmas. Der Fall schwerer Ionen wird nicht berücksichtigt, nicht zuletzt da GRB bevorzugt in Galaxien mit niedrigem Metallgehalt vorkommen (Stanek et al.<sup>99</sup>). Zwei Parametersätze wurden von Brainerd<sup>8</sup> für die Elektronendichten und die Stärke des umgebenden Magnetfeldes angegeben: Für Fall I gilt  $n_e = 1 \text{ cm}^{-3}$  und  $B = 0,14 \text{ G}$ ; für Fall II gilt  $n_e = 10^5 \text{ cm}^{-3}$  und  $B = 45 \text{ G}$ . Wir betrachten die beiden Fälle nacheinander, indem wir die jeweiligen relevanten Abbildungen mit Fall I und Fall II bezeichnen. Für den ersten Fall hat man damit

$$\omega_{p,e} = 5,6 \cdot 10^4 \text{ Hz} \quad (9.11a)$$

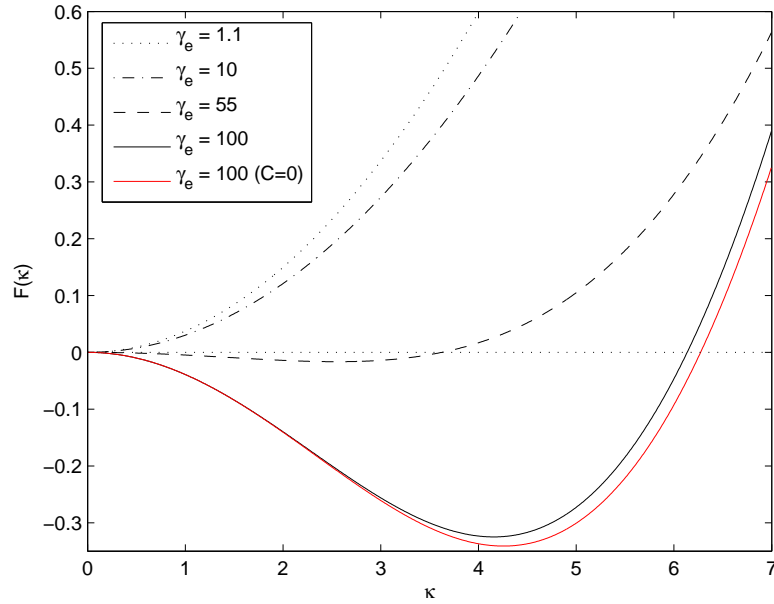


Abbildung 9.1: Neutralpunkte sind durch die Nullstellen von  $F(\kappa)$  (definiert in Gl. 9.5b) gegeben. Für die Position des Neutralpunktes ist der Effekt des endlichen Kopplungsterms für Werte  $\gamma_e \simeq 55$  vernachlässigbar. Die untere durchgezogene Linie repräsentiert den Fall verschwindender Kopplung ( $\mathcal{C} = 0$ ) für  $\gamma_e = 100$ . Für  $\gamma_e = 1,1$  und  $\gamma_e = 100$ , wo keine Neutralpunkte auftreten, ist der Effekt der verschwindenden Kopplung nicht gezeigt. Der Kopplungsterm  $\mathcal{C}$  ist durch die rechte Seite von Gl. (9.7) gegeben. Die Parameterwerte sind aus den Gleichungen (9.11a) und (9.11b) entnommen.

$$\Omega_e = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad (9.11b)$$

während sich für Fall II ergibt

$$\omega_{p,e} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ Hz} \quad (9.11c)$$

$$\Omega_e = 8,0 \cdot 10^8 \text{ Hz}, \quad (9.11d)$$

wobei  $\Omega_e$  die Elektronen-Gyrofrequenz bezeichnet.

Darüber hinaus werden verschiedene Werte für den Elektronen-Lorentzfaktor  $\gamma_e$  verwendet, die von 1,1 bis 150 reichen, um die Bewegung der Elektronen senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld  $\mathbf{B}$  zu veranschaulichen. Der Impuls der Zyklotronbewegung der Elektronen,  $\xi_e$ , ist damit gegeben durch

$$\frac{\xi_e}{m_e c} = \sqrt{\gamma_e^2 - 1}. \quad (9.12)$$

Wie in den Abbildungen 9.1 und 9.2 dargestellt, gibt es überhaupt keine transversalen Neutralpunkte für die Parameter aus den Gln. (9.11), und longitudinale Neutralpunkte treten nur für Werte von  $\gamma_e \gtrsim 49$  (Parameter für Fall I) bzw.  $\gamma_e \gtrsim 113$  (Parameter für Fall II) auf; dabei beziehen sich die hier verwendeten Notationen „transversal“ und „longitudinal“ jeweils auf die beiden Lösungen  $\kappa_T$  und  $\kappa_L$  von Gl. (9.8). Der Effekt der

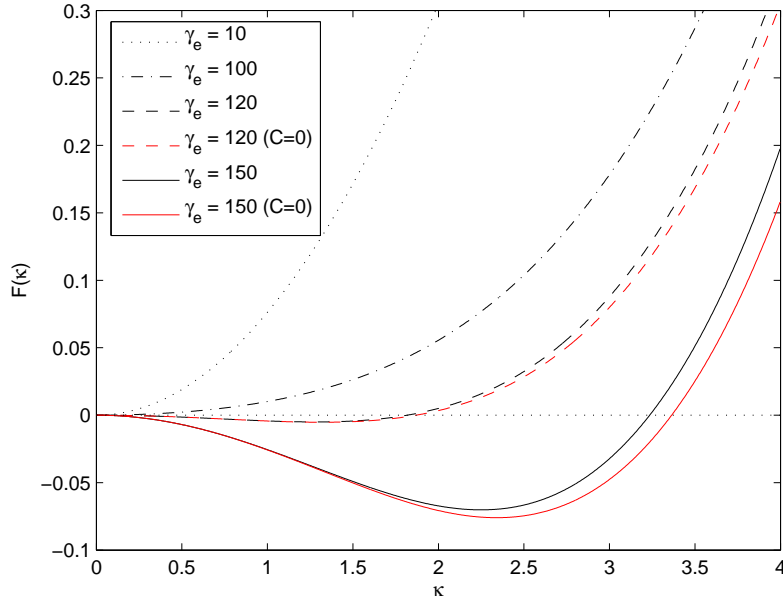


Abbildung 9.2: Neutralpunkte (für verschiedene Werte von  $\gamma_e$ ) sind durch die Nullstellen von  $F(\kappa)$  aus Gl. (9.5b) gegeben. Die untere durchgezogene Linie repräsentiert den Fall verschwindender Kopplung, d. h.  $C = 0$ , wobei  $C$  durch die rechte Seite von Gl. (9.7) gegeben ist. Die Parameterwerte sind aus den Gleichungen (9.11c) und (9.11d) entnommen.

Moden-Kopplung (mit den in Kap. 8 diskutierten Schwächen der Namensgebung), der hier nur für diejenigen Werte von  $\gamma_e$  dargestellt ist, für die er eine signifikante Rolle spielt, ist vor allem für hohe Werte von  $\gamma_e$  wichtig.

Das Quadrat der Frequenz in Einheiten von  $\Omega_p^2$  ist in den Abbildungen 9.3 und 9.4 für die Parameter der Fälle I und II als Funktion der normierten Wellenzahl  $\kappa = k_{\perp}c/\Omega_p$  dargestellt. Für hohe Werte von  $\gamma_e$  treten Singularitäten im Quadrat der Frequenz auf, die den Nullstellen von  $E(\kappa)$  entsprechen, und die Entwicklung in Potenzen von  $\omega$  müsste daher bis zur vierten Ordnung durchgeführt werden. Für den Fall eines Elektron-Proton-Plasmas treten daher instabile Oszillationen für jeden Wert des Elektronen-Lorentzfaktors auf, vorausgesetzt  $\gamma_e > 1$  (der Fall stationärer Elektronen führt nicht zu Instabilitäten), wie dies in den Abbildungen 9.3 und 9.4 klar zu erkennen ist. Aufgrund

$\gamma_e$	$\Gamma^2$	$\Omega_p^2$ [s <sup>-2</sup> ]	$\tau$ [s]	$\tau\omega_{p,e}$
1,1	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$2,86 \cdot 10^9$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	246,4
5	$8,2 \cdot 10^{-7}$	$6,29 \cdot 10^8$	0,04	2464
10	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$3,15 \cdot 10^8$	0,13	7431
100	stabil	$3,30 \cdot 10^7$	—	—

Tabelle 9.1: Charakteristische Anwachszeiten für den Fall I

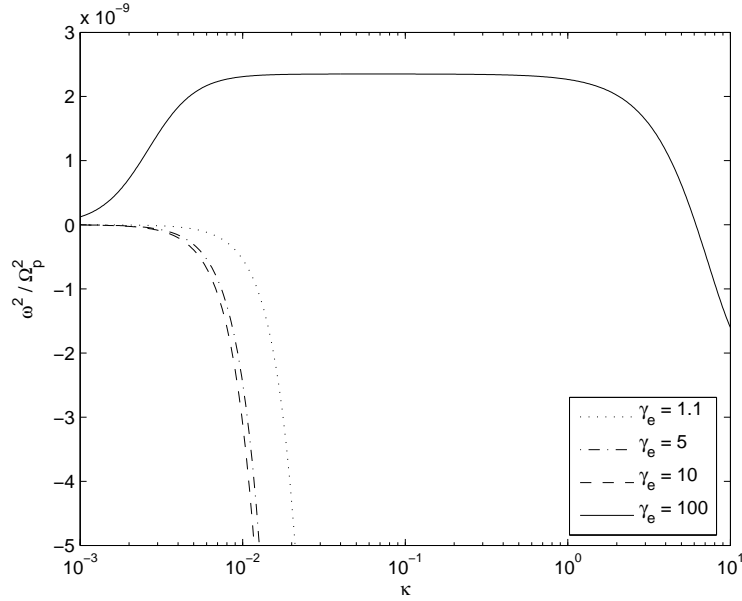


Abbildung 9.3: Das Quadrat der Frequenz in Einheiten von  $\Omega_p^2$  aus Gl. (9.10) als Funktion von  $\kappa = k_{\perp}c/\Omega_p$  für verschiedene Werte von  $\gamma_e$ . Die von Brainerd<sup>8</sup> gegebenen Werte  $\omega_{p,e} = 5,6 \cdot 10^4$  Hz und  $\Omega_e = 2,5 \cdot 10^6$  Hz wurden verwendet (Fall I). Werte für  $\omega^2/\Omega_p^2 < 0$  entsprechen aperiodischen instabilen Moden. Weiterhin ist der Effekt der Kopplung mit einbezogen.

des endlichen Kopplungsterms sind die Oszillationen weder rein longitudinal noch rein transversal.

Die charakteristische *e-folding*-Zeitskala für die anwachsenden aperiodischen Fluktuationen ist durch den Kehrwert der Wachstumsrate gegeben, d. h.  $\tau = (\Gamma\Omega_p)^{-1}$ , wobei  $\Gamma^2 = -\omega^2/\Omega_p^2 > 0$  für negative  $\omega^2$ . Die Werte der Instabilitätsraten gelten für einen ungefähren Wert von  $\kappa \approx 1$ ; die normierte Plasmafrequenz  $\Omega_p$  ist weiterhin durch Gl. (9.3) gegeben. Für die Fälle I und II sind die resultierenden Zeitskalen in den Tabellen 9.1 und 9.2 angegeben, beide Male sowohl in Sekunden als auch in Einheiten der Elektronen-Plasmafrequenz. Die schnellste anwachsende Instabilität tritt für den niedrigsten betrachteten Elektronen-Lorentzfaktoren von  $\gamma_e = 1,1$  auf und wächst in nur einigen hundert Plasmafrequenzen an.

$\gamma_e$	$\Gamma^2$	$\Omega_p^2$ [s <sup>-2</sup> ]	$\tau$ [s]	$\tau\omega_{p,e}$
1,1	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$2,95 \cdot 10^{14}$	$8,8 \cdot 10^{-6}$	158,1
5	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$6,50 \cdot 10^{13}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$	1541
10	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$3,26 \cdot 10^{13}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	4460
100	$5,0 \cdot 10^{-10}$	$3,42 \cdot 10^{12}$	0,024	435.600

Tabelle 9.2: Charakteristische Anwachszeiten für den Fall II

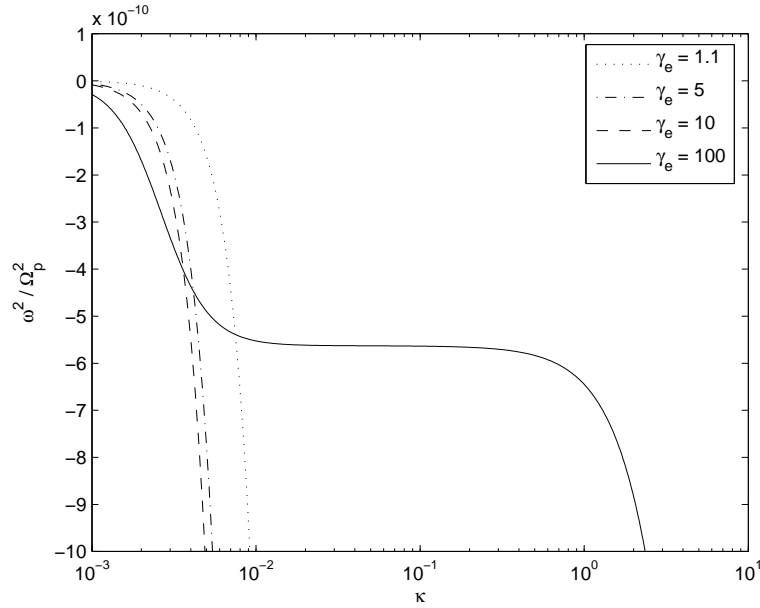


Abbildung 9.4: Das Quadrat der Frequenz in Einheiten von  $\kappa = k_{\perp}c/\Omega_p$  für verschiedene  $\gamma_e$ . Die von Brainerd<sup>8</sup> gegebenen Werte  $\omega_{p,e} = 1,8 \cdot 10^7$  Hz und  $\Omega_e = 8,0 \cdot 10^8$  Hz werden verwendet. Werte für  $\omega^2/\Omega_p^2 < 0$  entsprechen aperiodischen instabilen Moden. Weiterhin ist der Effekt der Kopplung mit einbezogen.

In Abb. 9.5 ist der Einfluss der Kopplung dargestellt, der durch die Terme proportional zu  $1 + J_0^2(z) - J_1^2(z)$  in den Ausdrücken für  $E(\kappa)$  und  $F(\kappa)$  aus den Gleichungen (9.5) beschrieben ist, wobei  $J_n$  die Bessel-Funktion erster Art bezeichnet (s. Anhang C.1). Die Kopplung verringert die Frequenz bei höheren Wellenzahlen, verglichen zur Situation ohne Kopplung. Der Kopplungseffekt kann daher als Mechanismus zur Beschränkung der Oszillationen auf höhere Wellenzahlen, entsprechend kleineren Energien, verstanden werden. (Für solche kleinen Wellenzahlen im Bereich  $10^{-6} \gtrsim \kappa \gtrsim 1$  treten keine aperiodischen Fluktuationen, sondern lediglich stabile Oszillationen auf.)

Der Fall eines symmetrischen Elektron-Positron-Plasma, in welchem Elektronen und Positronen mit dem gleichen Impuls senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld eine Zyklotronbewegung ausführen, ist in Abb. 9.6 dargestellt, wobei die normierte Plasmafrequenz jetzt durch  $\Omega_p = (2\omega_{p,e}^2/\gamma_e)^{1/2}$  gegeben ist. Niederfrequente Instabilitäten sind *nur* für hohe Werte der Lorentzfaktoren  $\gamma_e$  von Elektronen und Positronen möglich, nämlich  $\gamma_e \gtrsim 637$  bzw. 668 für die Parameter der Fälle I und II. Im Gegensatz dazu treten im Falle eines Elektron-Proton-Plasmas mit stationären Protonen niederfrequente Instabilitäten für *jeden* Wert des Lorentzfaktors  $\gamma_e > 1$  auf.

## 9.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir gezeigt, dass Elektron-Proton-Jets, die sich parallel zu einem Hintergrund-Magnetfeld auf einer Zyklotronbahn bewegen, aperiodische Fluktuationen erzeugen – unabhängig davon, mit welchem Lorentz-Faktor die Elektronen senkrecht zum

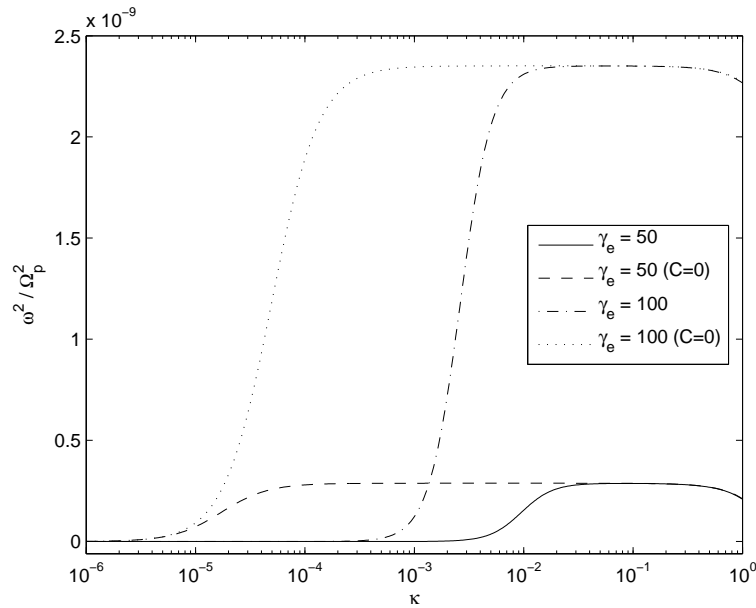


Abbildung 9.5: Das Quadrat der Frequenz in Einheiten von  $\Omega_p^2$  aus Gl. (9.10). Der Effekt der Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Wellenmode ist für zwei Werte von  $\gamma_e$  dargestellt. Für die Plasma- und die Gyrofrequenz sind die Parameter aus den Gln. (9.11a) und (9.11b) entnommen. Der Kopplungsterm ist durch die rechte Seite von Gl. (9.7) gegeben.

Magnetfeld gyrieren. Dieses Feld kann entweder, wie in Medvedev und Loeb<sup>55</sup> beschrieben, durch vorherige Zweistrom-Instabilitäten erzeugt werden, oder kann das verbliebene Feld der Quelle der Massenauswürfe sein, also wahrscheinlich eines sterbenden Sterns. Die erzeugten aperiodischen Fluktuationen führen daraufhin zu Dissipation, die nach der gegenwärtigen Vorstellung eine Grundvoraussetzung für die Bildung einer Schockwelle ist, welche schließlich zur beobachteten Strahlung führt.

Wir haben zu diesem Zweck die niederfrequenten Instabilitäten sowohl in einem Elektron-Proton-Plasma als auch in einem Elektron-Positron-Plasma in den Massenauswürfen von GRB hinsichtlich sich senkrecht zum umgebenden Magnetfeld ausbreitender Plasmawellen untersucht. Um zu bestimmen, ob rein anwachsende instabile Moden vorkommen können oder nicht, haben wir die in Kapitel 8 diskutierte verallgemeinerte Methode der Neutralpunkte im Wellenzahlraum, welche verschwindender Frequenz entsprechen, auf die beschriebene Situation angewendet. Diese Methode war ursprünglich von Harris<sup>30</sup> aufgestellt worden und wurde in Kapitel 8 in dieser Arbeit erweitert, um relativistische Effekte sowie die Ionenbewegung und die Störung des Magnetfeldes einzubeziehen. Erlaubt eine bestimmte Verteilungsfunktion die Existenz von Neutralpunkten, so ist Instabilität zur einen oder anderen Seite des Neutralpunktes im Wellenzahlraum garantiert. Erlaubt die Verteilungsfunktion dies nicht, kann das System sowohl stabil als auch instabil sein.

Die Berechnungen wurden im Ruhesystem des GRB-Jets ausgeführt, wo nur die Zyklotronbewegung der Teilchen senkrecht zur Strömungsrichtung berücksichtigt werden muss. Wie von Medvedev und Loeb<sup>55</sup> gezeigt wurde, werden in den internen Schocks von ausge-



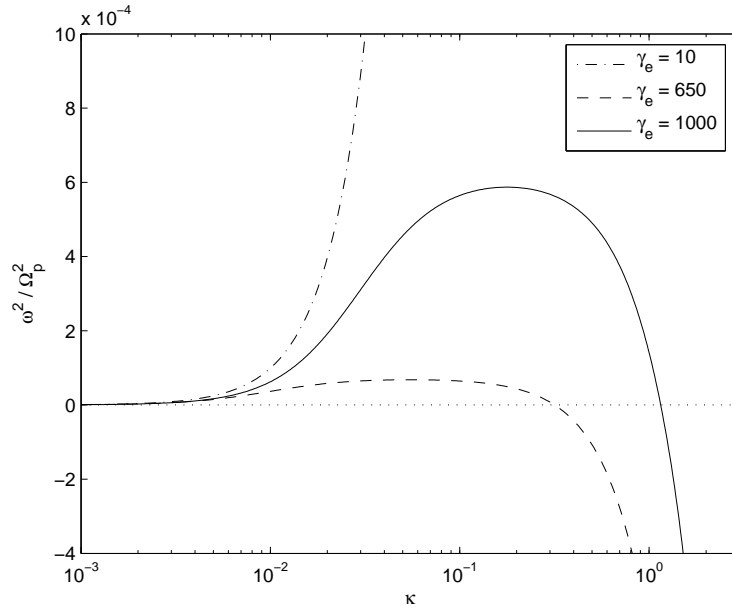


Abbildung 9.6: Das Quadrat der Frequenz in Einheiten von  $\Omega_p^2$  aus Gl. (9.10) als Funktion von  $\kappa = k_{\perp}c/\Omega_p$  für den Fall eines symmetrischen Elektron-Positron-Plasmas. Für die Plasma- und die Gyrofrequenz sind die Werte aus den Gln. (9.11a) und (9.11b) für Fall I verwendet. In dieser Situation tritt keine Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Mode auf.

stoßen Massepaketen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, durch die Zweistrom-Instabilität sehr schnell starke Magnetfelder erzeugt. Daher ist die Annahme eines Hintergrund-Magnetfeldes parallel zur Strömungsrichtung gerechtfertigt. Weiterhin haben wir die Diskussion auf Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld beschränkt, und haben dabei die Fälle 1. eines monoenergetischen Elektron-Proton-Plasmas, wobei die Protonen als stationär angenommen wurden, und 2. eines symmetrischen, monoenergetischen Elektron-Positron-Plasmas betrachtet. Für zwei Parametersätze (die Fälle I und II) für die Elektronendichte und die Stärke des Hintergrund-Magnetfeldes haben wir gezeigt, dass in niedrigster Ordnung in der Wellenfrequenz und unter der Annahme stationärer Protonen für alle Werte des Elektronen-Lorentzfaktors (die einzige Voraussetzung hierfür ist  $\gamma_e > 1$ , d. h. die Elektronen dürften nicht ebenfalls stationär sein) sehr schnell instabile aperiodische Fluktuationen anwachsen – auf Zeitskalen, die kleiner oder von der Größenordnung der charakteristischen Zeiten des GRB selbst sind. Daher sind die in diesem Kapitel beschriebenen Instabilitäten für die Entwicklung des GRB von Bedeutung und müssen bei der Berechnung des weiteren Wachstums von Magnetfeldern und Turbulenz durch (kinetische) Plasma-Instabilitäten in solchen Objekten mit einbezogen werden.

Im Kontext der in Kap. 8 beschriebenen Methode wurde ein weiterer Effekt aufgedeckt, nämlich die Kopplung zwischen longitudinaler und transversaler Wellenmode. Für den Fall eines Elektron-Proton-Plasmas haben wir gezeigt, dass der Kopplungseffekt das System für kleine Wellenzahlen stabilisiert. Für den Fall eines Elektron-Positron-Plasmas tritt dagegen keine Mischung der Wellenmoden auf, da für den Fall gleicher Energien von

Elektronen und Positronen die Kopplung mit der Abweichung des Massenverhältnisses vom Wert eins skaliert. Im Falle eines Elektron-Proton-Plasmas wird das System für hohe Lorentzfaktoren der Elektronen bei kleinen Wellenzahlen durch den Effekt der Kopplung stabilisiert. Im Gegensatz dazu können Instabilitäten in einem symmetrischen Elektron-Positron-Plasma, für das keine Moden-Kopplung existiert, nur für hohe Lorentzfaktoren auftreten. Wir können daraus die Schlussfolgerung ziehen, dass die Jets von GRB wahrscheinlich nicht aus Elektron-Positron-Plasmen bestehen, da die erforderlichen Lorentzfaktoren für instabile aperiodische Fluktuationen zu hoch sind. Aus dem Ergebnis, dass in Elektron-Proton-Plasmen Instabilitäten *besonders* für nicht zu hohe Lorentzfaktoren auftreten, die gerade etwa oberhalb von eins liegen, schließen wir, dass die Jets am wahrscheinlichsten aus eben solchen bestehen, damit aperiodische Fluktuationen erzeugt werden können. Letztere sind notwendig für das Vorhandensein von Dissipation, welche wiederum eine Voraussetzung für das Entstehen von Schockwellen ist, wodurch die sichtbare Strahlung des GRB entsteht.

Wesentliche Teilbereiche bedürfen noch der näheren Betrachtung, darunter zunächst die Einbeziehung von warmen Plasmen mit einer Temperatur-Anisotropie in den Richtungen parallel und senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld. Darüber hinaus sollte die Ausbreitung von Wellen mit einer Komponente in paralleler Richtung, bezogen auf das Hintergrund-Magnetfeld, erlaubt werden. Auch wenn die Wellenausbreitung durch die Transformation aus dem Ruhesystems der GRB-Jets ins Beobachtersystem nicht mehr strikt senkrecht ist, sollte die vorherige Berücksichtigung quantitative und möglicherweise qualitative Änderungen mit sich bringen. Die Einbeziehung der genannten Punkte wird durch den Formalismus der in Kapitel 8 entwickelten und in diesem Kapitel angewandten Methode in vollständig relativistischer Weise erlaubt.

# Teil III

## Diskussion & Anhänge



---

# 10 Zusammenfassung und Ausblick

*In diesem Kapitel wird eine abschließende Diskussion der Ergebnisse dieser Arbeit durchgeführt sowie ein Ausblick auf zukünftige Forschungen und weiterführende Anwendungen der hier vorgestellten Methoden gegeben.*

## 10.1 Ergebnisse

Die vorliegende, aus zwei Teilen bestehende Arbeit beschäftigt sich sowohl mit dem Transport kosmischer Strahlung mit Anwendung auf die Heliosphäre als auch mit Instabilitäten, die durch anisotrope Phasenraum-Verteilungsfunktionen verursacht werden und in vielen Konstellationen in der Heliosphäre, aber auch in kosmischen Quellen wie Aktiven Galaktischen Kernen und  $\gamma$ -ray Bursts auftreten und ihrerseits wiederum auf den Teilchentransport zurückwirken. Das Ziel dieser Arbeit lässt sich also wie folgt zusammenfassen: Für die verschiedenen Fälle der Turbulenzgeometrie einerseits systematisch die Übereinstimmung der gängigen Theorien – darunter in erster Linie die quasilineare Theorie, aber auch die nichtlineare Führungszentrums-Theorie – mit numerischen Testteilchen-Simulationen zu prüfen und andererseits dazu beizutragen, die Beschreibung der in einem Plasma auftretenden linearen Instabilitäten zu vervollständigen. Einen interessanten gemeinsamen Anwendungsbereich finden diese beiden Themen auf dem Gebiet der nichtrelativistischen und relativistischen Schockwellen, wo mit Hilfe der in die Transportgleichungen eingehenden Diffusionskoeffizienten das Energiespektrum der Teilchen und somit ihre Beschleunigung berechnet kann (Duffy und Blundell<sup>20</sup>). Darüber hinaus sind Instabilitäten im Vorläuferbereich von Schockfronten für die beobachteten Verstärkungen des Magnetfeldes verantwortlich (z. B. Reville et al.<sup>72</sup>).

Im ersten Teil wurde daher, nach einem einführenden Kapitel mit einer anschaulichen, qualitativen Herleitung der quasilinearen Theorie und einer Herleitung der nichtlinearen Führungszentrums-Theorie (NLGC-Theorie), eine genaue Überprüfung quasilinearer Ergebnisse in magnetostatischer Turbulenz vorgenommen. Dabei wurde festgehalten und im Einzelnen begründet, in welchen Fällen die quasilineare Theorie ungültige Ergebnisse liefert. Für isotrope magnetostatische Turbulenz ist diese Ungültigkeit absolut – hier ergibt sowohl die parallele (unter der Voraussetzung, dass für den Spektralindex  $1 < s < 2$  gilt) als auch die senkrechte mittlere freie Weglänge den Wert unendlich. Verantwortlich dafür ist gleichermaßen das Geometrie- sowie das bekannte  $90^\circ$ -Problem, demzufolge Streuung im Anstellwinkel nicht durch die quasilineare Theorie beschrieben werden kann, falls die Teilchen fast oder gar keine Bewegungskomponente in paralleler Richtung aufweisen. Diese Probleme sind, zusammen mit der Tatsache, dass sich für senkrechten Transport im Unterschied zu Simulationen diffusives Verhalten ergibt, durch die grundlegende For-

mulierung der quasilinearen Theorie bedingt. Für senkrechten Transport wurde daher als Alternative die nichtlineare Führungszentrums-Theorie diskutiert, die zunächst für den Fall isotroper Turbulenz modifiziert wurde und im Vergleich mit den Simulationen zufriedenstellende, wenn auch durchweg etwas zu hohe Ergebnisse lieferte. Im Unterschied zur isotropen Turbulenz hängt in der magnetostatischen *slab*- und *composite*-Turbulenz die Übereinstimmung der quasilinearen Theorie mit Simulationen dagegen stark von den Voraussetzungen ab: Nur in *slab*-Turbulenz stimmt die parallele mittlere freie Weglänge gut mit den Simulationen überein.

Im nächsten Kapitel wurde daraufhin untersucht, ob die Einbeziehung einer sich wie magnetohydrodynamische Plasmawellen verhaltenden Turbulenz die quasilinearen Ergebnisse verbessern könne. Für *slab*-Geometrie ist die Übereinstimmung in der Tat – wie bereits für statische Turbulenz – auch für relativ hohe Werte des Verhältnisses von turbulentem zu Hintergrund-Magnetfeld sehr gut. Daher wurde im nächsten Schritt ein als isotrop angenommenes Turbulenzspektrum mit sich nur in der  $x$ - $z$ -Ebene ausbreitenden Alfvén- oder schnellen magnetosonischen Wellen kombiniert – eine etwas problematische Vorgehensweise, die jedoch aus der Literatur zunächst so übernommen wurde. Es zeigte sich daraufhin, dass zwar die parallelen und senkrechten mittleren freien Weglängen nun nicht mehr unendlich sind, die Ergebnisse aber weder qualitativ noch quantitativ sowohl für Alfvén- als auch für schnelle magnetosonische Wellen mit den Simulationen übereinstimmen. Daher wurden die Grundzüge eines neuen Modells zur Einbeziehung von Alfvénwellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung entwickelt, und zwar unter Berücksichtigung sowohl der magnetischen als auch der elektrischen Fluktuationen der Wellen. Dies zieht jedoch bereits für die Korrelationstensoren der elektrischen und der elektrisch-magnetischen Feldkomponenten unhandliche Ausdrücke nach sich, welche wiederum in die in aller Allgemeinheit sehr komplizierten Fokker-Planck-Koeffizienten eingehen. Dies weiter zu untersuchen, mögliche Vereinfachungen zu finden und zu überprüfen, ob dieser Ansatz die Übereinstimmung mit Simulationen möglicherweise verbessert, wird daher die Aufgabe zukünftiger Arbeiten sein. Als erfolgversprechend wird darüber hinaus auch die Berücksichtigung von Dämpfung und Anregung von Plasmawellen angesehen, da dies Resonanzverbreiterung verursacht und somit – wie dies etwa auch die quasilineare Theorie zweiter Ordnung (SOQLT) vermag – das Problem der sonst in der quasilinearen Theorie stets zu niedrigen  $90^\circ$ -Streuung lösen könnte.

Insgesamt wurde im ersten Teil dieser Arbeit somit erstmals eine detaillierte Analyse der quasilinearen Theorie vor allem in isotroper Turbulenz vorgenommen. Diese Theorie ist nach wie vor eines der am meisten verwendeten Werkzeuge zur Beschreibung des Teilchentransportes in allen Arten von Turbulenzgeometrien, liefert jedoch, wie gezeigt wurde, grundsätzlich keine gültigen und mit Simulationen übereinstimmenden Werte – weder quantitativ und in vielen Fällen auch nicht vom qualitativen Verlauf her. Für senkrechten Transport in statischer Turbulenz wurde als Alternative die nichtlineare Führungszentrums-Theorie vorgestellt, deren großer Nachteil jedoch darin besteht, dass sie von den Werten der parallelen mittleren freien Weglänge abhängt und somit keine fundamentale Theorie ist: Zunächst muss also stets die parallele mittlere freie Weglänge mit Hilfe einer anderen Theorie bestimmt werden.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde zunächst, nach einer Einführung in die lineare

Vlasov-Theorie kinetischer Plasma-Instabilitäten, eine Untersuchung gegenströmender Maxwellscher Plasmen vorgenommen. Ziel war es dabei, die Ergebnisse der Diplomarbeit<sup>102</sup> des Autors zu nichtrelativistischen, unmagnetisierten Gegenstrom-Plasmen auf den Fall zweier entlang eines Hintergrund-Magnetfeldes ineinanderströmender Plasmen auszudehnen – ein bezogen auf die mathematischen Details zwar komplizierterer, aber realistischer Ansatz, da viele Gegenstrom-Szenarien, darunter Schockwellen, Elektronenströme in ein ruhendes Medium sowie Jets von Aktiven Galaktischen Kernen und  $\gamma$ -ray Bursts, magnetisiert sind und die Einbeziehung dieses Magnetfeldes die Dispersionsrelationen und damit auch die möglichen Instabilitäten stark beeinflusst. Die Ergebnisse sowohl für parallele als auch für senkrechte Wellenausbreitung wurden mit vorherigen Arbeiten verglichen, wobei sich im Falle paralleler Wellenausbreitung sowohl die prinzipielle Übereinstimmung mit früheren Rechnungen und PIC-Simulationen als auch qualitative Verbesserungen durch die verwendeten exakteren kinetischen Methoden zeigten. Für senkrechte Wellenausbreitung ergaben sich durch den Verzicht auf nur bedingt zulässige und stark vereinfachende mathematische Näherungen quantitative Korrekturen der Wachstumsraten. In diesem Sinne wurde für Maxwellsche Verteilungsfunktionen die Untersuchung von Gegenstrom-Plasmen für die beiden betrachteten Fälle der Geometrie der Wellenausbreitung vervollständigt.

Daran anschließend wurden viele der zuvor verwendeten Einschränkungen – wie strikt parallele bzw. senkrechte Wellenausbreitung und die Verwendung einer Maxwellschen Verteilungsfunktion – zugunsten einer allgemeinen Untersuchung von Instabilitäten mit Hilfe des Neutralpunkt-Konzeptes fallen gelassen. Neutralpunkte entsprechen dabei Nullstellen der Wellenfrequenz, wobei das Auftreten von einem oder mehreren Neutralpunkten Instabilität in der Nähe dieser Neutralpunkte garantiert. Dies wurde zunächst wie in der Literatur unter den einschränkenden Voraussetzungen unendlich schwerer Ionen und Vernachlässigung der fluktuierenden Magnetfelder durchgeführt, wodurch sich rein longitudinale, elektrostatische Instabilitäten ergeben. An die Phasenraum-Verteilungsfunktion wurde dabei außer der Bedingung, dass sie gyrotrop sei (also nicht vom Azimuth-Winkel um die – durch das Hintergrund-Magnetfeld vorgegebene – Symmetrieachse abhängen) und der Forderung, dass keine Netto-Raumladungsdichte entstehen darf, keinerlei Voraussetzung gestellt. Die so aufgestellte und durch die Einbeziehung relativistischer Effekte erweiterte Neutralpunkt-Methode ergab im Vergleich zu ihrer ursprünglichen Formulierung bedeutende quantitative Korrekturen. Darüber hinaus wurden erstmals analytische, näherungsweise gültige Ausdrücke für die Wachstumsraten in der Nähe von Neutralpunkten angegeben. Die genannten Voraussetzungen bezüglich der Ionenmasse und der Magnetfeldfluktuationen wurden in einem weiteren Kapitel unter Verwendung einer allgemeineren, für beliebige Teilchenspezies – und somit auch beispielsweise für staubige Plasmen gültigen – Herangehensweise aufgegeben. Diese erstreckte sich nicht nur auf elektrostatische, sondern auch auf transversale, elektromagnetische Wellen sowie eine Mischung dieser beiden Polarisierungen; letztere wurde durch einen für ein symmetrisches Paarplasma verschwindenden Kopplungsterm vermittelt. Dabei wurden in aller Allgemeinheit und für jede Verteilungsfunktion gültige Ausdrücke zur Beschreibung von Instabilitäten mit Hilfe des Neutralpunkt-Konzeptes für beliebige Wellenausbreitung hergeleitet. Um angesichts der Komplexität dieser Rechnung weiter gehende analytische Ergebnissen herleiten zu können, wurde für rein senkrechte Wellenausbreitung und unter

Verwendung einer monoenergetischen Verteilungsfunktion gezeigt, dass es stets Parameter gibt, die das Auftreten von Neutralpunkten erlauben – und somit instabiles Verhalten auftritt. Dabei wurde angenommen, dass sich nur die Elektronen auf einer Zyklotronbahn senkrecht zum Hintergrund-Magnetfeld bewegen.

Im letzten Kapitel wurde mit Hilfe der auf diese Weise verallgemeinerten Neutralpunkt-Methode untersucht, ob für typische Parameter, wie sie in den Jets von  $\gamma$ -ray Bursts auftreten – und unter Verwendung des einfachen Modells monoenergetischer Elektronen –, Instabilitäten entstehen können, und welches die Anwuchszeiten dieser Instabilitäten sind. Für die in der Tat vorhandenen Instabilitäten lieferte die Neutralpunkt-Methode Anwuchszeiten in der Größenordnung des Bursts selbst, was auf die Bedeutung dieser Instabilitäten hinweist und darauf, dass die verwendete Methode qualitativ und quantitativ zuverlässige Ergebnisse liefert.

### 10.2 Ausblick

Viele bislang noch offene Fragen bieten vielfältige Möglichkeiten für zukünftige Forschungsarbeiten. So müssen die gegenwärtigen, zur Herleitung der mittleren freien Weglängen und Diffusionskoeffizienten in isotropen und anisotropen Turbulenzgeometrien verwendeten Transporttheorien weiterentwickelt werden. Dabei ist neben der Arbeit an nichtlinearen Theorien insbesondere auch die Berücksichtigung von Dämpfungs- und Anregungsprozessen der Plasmawellen von Bedeutung. Die korrekte und vollständige Einbeziehung selbst ungedämpfter Alfvénwellen zieht, wie gezeigt wurde, bereits komplizierte Ausdrücke für die in die Fokker-Planck-Koeffizienten eingehenden Komponenten der Korrelationstensoren nach sich. Allerdings ist bislang nicht einmal die Frage, ob Plasmawellen für die Berechnung des Teilchentransportes von Bedeutung sind, abschließend geklärt. Somit bleibt für das Ziel einer vollständigen Beschreibung des Transportes kosmischer Teilchen durch turbulente Magnetfelder noch viel zu tun.

Die im zweiten Teil behandelte verallgemeinerte Neutralpunkt-Methode wurde zunächst nur für den Fall senkrechter Wellenausbreitung soweit spezifiziert, dass auf numerischem Wege das Vorhandensein instabiler Parameterbereiche nachgewiesen werden konnte. Dies für allgemeine Wellenausbreitung in einem beliebigen Winkel zum Hintergrund-Magnetfeld auszuwerten, bleibt eine große Herausforderung, birgt aber die Chance einer umfassenden und nicht auf Näherungen angewiesenen Beschreibung niederfrequenter linearer Oszillationen und Instabilitäten. Die anhand des Beispiels senkrechter Wellenausbreitung für monoenergetische Teilchen nachgewiesenen Instabilitäten werden durch die Berücksichtigung schrägwinkliger Wellenausbreitung einerseits und Temperaturanisotropien im Plasma andererseits modifiziert werden. Dies, aufbauend auf der in dieser Arbeit aufgestellten verallgemeinerten Neutralpunkt-Methode, quantitativ und qualitativ zu untersuchen, bleibt eine nicht unbeträchtliche Aufgabe für die zukünftige Forschung.



---

# A Ergänzungen zu Teil I

In diesem Kapitel werden einige der etwas langwierigen Rechnungen ausführlich dargestellt, die zur Bestimmung quasilinearer Transportkoeffizienten – wie der mittleren freien Weglänge oder der Diffusionskoeffizienten – erforderlich sind.

## A.1 Quasilinearer paralleler Transport in magnetostatischer Turbulenz

Die allgemein Form des Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$  in der quasilinearen Näherung ist z. B. durch Gl. (25) in Teufel und Schlickeiser<sup>106</sup> gegeben. Mit  $\mathcal{R}_i = \pi\delta(k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega)$ , wodurch die Resonanzfunktion für das magnetostatische Modell beschrieben wird, ergibt sich der Koeffizient  $D_{\mu\mu}$  als

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\mu} &= \frac{\pi\Omega^2(1-\mu^2)}{2B_0^2} \int d^3k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k_{\parallel}v\mu + n\Omega) \\
 &\times \left\{ P_{RR} J_{n+1}^2(w) + P_{LL} J_{n-1}^2(w) - J_{n+1}(w)J_{n-1}(w) \right. \\
 &\times \left. [P_{RL} e^{2i\psi} + P_{LR} e^{-2i\psi}] \right\}, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

mit

$$w = \frac{v}{\Omega} k_{\perp} \sqrt{1-\mu^2}. \tag{A.2}$$

Für isotrope Turbulenz erhalten wir für den Korrelationstensor

$$P_{ij} = \frac{G(k)}{8\pi k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \tag{A.3}$$

wobei  $G(k)$  das isotrope Wellenspektrum bezeichnet und die magnetische Helizität  $\sigma$  als verschwindend angenommen wurde. Die Transformation auf helikale Koordinaten, die gegeben sind durch

$$\delta B_{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta B_x \pm i\delta B_y) \tag{A.4}$$

kann dann leicht durchgeführt werden:

$$P_{LL} = P_{RR} = \frac{1}{2} (P_{xx} + P_{yy}) \tag{A.5a}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{G(k)}{8\pi k^2} \left( 2 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) \tag{A.5b}$$

$$\equiv \frac{G(k)}{16\pi k^2} \left( 2 - \frac{k_\perp^2}{k^2} \right) \quad (\text{A.5c})$$

$$P_{\text{LR}} = \frac{1}{2} [P_{xx} - P_{yy} + i(P_{yx} + P_{xy})] \quad (\text{A.5d})$$

$$= \frac{G(k)}{16\pi k^2} \left( -\frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} - 2i \frac{k_x k_y}{k^2} \right) \quad (\text{A.5e})$$

$$P_{\text{RL}} = \frac{1}{2} [P_{xx} - P_{yy} - i(P_{yx} + P_{xy})] \quad (\text{A.5f})$$

$$= \frac{G(k)}{16\pi k^2} \left( -\frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} + 2i \frac{k_x k_y}{k^2} \right). \quad (\text{A.5g})$$

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten  $(k, \theta, \psi)$  im Wellenzahlraum,

$$k_x = k_\perp \cos \psi = k \sin \theta \cos \psi \quad (\text{A.6a})$$

$$k_y = k_\perp \sin \psi = k \sin \theta \sin \psi \quad (\text{A.6b})$$

$$k_z = k_\parallel = k \cos \theta, \quad (\text{A.6c})$$

erhalten wir für  $D_{\mu\mu}$ :

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \frac{\pi \Omega^2 (1 - \mu^2)}{2B_0^2} \int d^3k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k_\parallel v \mu + n\Omega) \\ &\times \frac{G(k)}{16\pi k^2} \left\{ (2 - \sin^2 \theta) [J_{n+1}^2(w) + J_{n-1}^2(w)] - J_{n+1}(w) J_{n-1}(w) \right. \\ &\times \left[ (-\sin^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) e^{2i\psi} + 2i \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi e^{2i\psi} \right. \\ &\left. \left. + (-\sin^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) e^{-2i\psi} - 2i \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi e^{-2i\psi} \right] \right\}. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Die zweite eckige Klammer kann zu

$$[\dots] = -2 \sin^2 \theta \quad (\text{A.8})$$

umgeformt werden. Damit vereinfacht sich der Fokker-Planck-Koeffizient beträchtlich, und mit der Abkürzung  $\eta = \cos \theta$  erhalten wir

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \frac{G_0 \pi \Omega^2 (1 - \mu^2)}{16B_0^2} \int_{-1}^1 d\eta \int_0^\infty dk g(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(kv\mu\eta + n\Omega) \\ &\times \left\{ (1 + \eta^2) [J_{n+1}^2(w) + J_{n-1}^2(w)] + 2(1 - \eta^2) J_{n+1}(w) J_{n-1}(w) \right\}, \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

wobei jetzt

$$w = \frac{kv\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \eta^2)}}{\Omega}. \quad (\text{A.10})$$

Mit Hilfe des Additionstheorems für Besselfunktionen (vgl. Anhang C.1) können die geschweiften Klammern umgeschrieben werden als

$$\{\dots\} = \eta^2 (J_{n+1} - J_{n-1})^2 + (J_{n+1} + J_{n-1})^2 = 4\eta^2 J_n'^2 + \frac{4n^2}{w^2} J_n^2. \quad (\text{A.11})$$

Man kann leicht zeigen, dass der Beitrag für  $n = 0$  der unendlichen Reihe in Gleichung (A.9) verschwindet. Daher finden wir

$$D_{\mu\mu} = \frac{\pi G_0 \Omega^2 (1 - \mu^2)}{4B_0^2} \int_{-1}^1 d\eta \int_0^\infty dk g(k) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \delta(kv\mu\eta + n\Omega) \times \left[ \eta^2 J_n'^2(w) + \frac{n^2}{w^2} J_n^2(w) \right], \quad (\text{A.12a})$$

was sich weiter vereinfachen lässt zu

$$D_{\mu\mu} = \frac{\pi G_0 \Omega^2 (1 - \mu^2)}{4B_0^2} \frac{1}{|v\mu|} \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{|\eta|} \int_0^\infty dk g(k) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \eta^2 J_n'^2(w) + \frac{n^2}{w^2} J_n^2(w) \right] \times \left[ \delta\left(k + \frac{n\Omega}{v\mu\eta}\right) + \delta\left(k - \frac{n\Omega}{v\mu\eta}\right) \right] \quad (\text{A.12b})$$

$$= \frac{\pi G_0 \Omega^2 (1 - \mu^2)}{2|v\mu| B_0^2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} g\left(k = \frac{n\Omega}{v\mu\eta}\right) \left[ \eta^2 J_n'^2(nz) + \frac{1}{z^2} J_n^2(nz) \right], \quad (\text{A.12c})$$

mit

$$z = \frac{\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \eta^2)}}{\mu\eta}. \quad (\text{A.13})$$

Um dieses Resultat zu vereinfachen, beschränken wir die weiteren Rechnungen auf kleine Steifigkeiten

$$R \equiv \frac{R_L}{\ell_0} = \frac{v}{\Omega\ell_0} \ll 1, \quad (\text{A.14})$$

wobei  $R_L$  den Larmorradius der Teilchen bezeichnet. Damit erhalten wir näherungsweise

$$g\left(k = \frac{n\Omega}{v\mu\eta}\right) = \left[ 1 + \left( \frac{n\Omega\ell_0}{v\mu\eta} \right)^2 \right]^{-\nu} = \left[ 1 + \left( \frac{n}{\mu\eta R} \right)^2 \right]^{-\nu} \simeq (\mu\eta R)^s n^{-s}, \quad (\text{A.15})$$

wobei wir den Spektralindex des Inertialbereiches  $s = 2\nu$  verwendet haben. Für  $D_{\mu\mu}$  ergibt sich somit näherungsweise

$$D_{\mu\mu} = \frac{\pi G_0 (1 - \mu^2)}{2B_0^2} \frac{v\mu^{s-1}}{\ell_0^2} R^{s-2} \int_0^1 d\eta \eta^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left[ \eta^2 J_n'^2(nz) + \frac{1}{z^2} J_n^2(nz) \right]. \quad (\text{A.16})$$

Das asymptotische Verhalten der Kapteyn-Reihen<sup>36</sup> wurde bereits von Shalchi und Schlickeiser<sup>93</sup> (s. auch Anhang C.3) berechnet, die als Ergebnis erhielten

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz) \simeq \begin{cases} \frac{z^2}{4}, & z \lesssim 1 \\ \frac{\zeta(s+1)}{\pi z}, & z \gg 1 \end{cases} \quad (\text{A.17a})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n'^2(nz) \simeq \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{z^2}{8}, & z \lesssim 1 \\ \frac{\zeta(s+1)}{\pi z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (\text{A.17b})$$

Untersuchen wir das Argument  $z = z(\mu, \eta)$  aus Gl. (A.13) genauer, um zu entscheiden wann es kleiner oder größer im Vergleich zu 1 ist, so erhalten wir die folgende Überlegung:

$$z(\mu, \eta) \begin{cases} > 1, & \text{für } \eta < \sqrt{1 - \mu^2} \\ < 1, & \text{für } \eta > \sqrt{1 - \mu^2}. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Mit den Näherungen für die Kapteyn-Reihen, Gln. (A.17a) und (A.17b), können wir die Integration daher in zwei Teile aufspalten, und mit dem Anstellwinkel-Sinus  $u = \sqrt{1 - \mu^2}$  erhalten wir

$$D_{\mu\mu} = D_0 \left\{ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \int_0^u d\eta \frac{\eta^{s-1}}{z} \left( \eta^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \int_u^1 d\eta \eta^{s-1} \left[ \eta^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{8} \right) + \frac{1}{4} \right] \right\}. \quad (\text{A.19})$$

Hier bezeichnet  $\zeta(x)$  die Riemannsche Zeta-Funktion (z.B. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup> und Anhang C.5). Für die Normierung haben wir

$$D_0 = \frac{2\pi\nu}{\ell_0} C(\nu) \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \mu^{s-1} (1 - \mu)^2 R^{s-2} \quad (\text{A.20})$$

eingeführt, wobei der Normierungsfaktor  $G_0 = 4(\delta B)^2 \ell_0 C(\nu)$  eingesetzt wurde.

Berechnen wir nun die beiden Integrale in Gleichung (A.19). Nachdem wir  $z(\mu, \eta)$  aus Gl. (A.13) explizit eingesetzt haben, so ergibt das erste Integral

$$\mathcal{A}(u, s) \equiv \int_0^u d\eta \frac{\eta^{s-1}}{z} \left( \eta^2 + \frac{1}{z^2} \right) \quad (\text{A.21a})$$

$$= \frac{\mu}{u} \int_0^u d\eta \frac{\eta^{s+2}}{\sqrt{1 - \eta^2}} + \frac{\mu^3}{u^3} \int_0^u d\eta \frac{\eta^{s+2}}{(1 - \eta^2)^{3/2}} \quad (\text{A.21b})$$

$$= \frac{|\mu|}{2u} B_{u^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{1}{2} \right) - \frac{|\mu^3|}{2u^3 (u^2 - 1)} \left[ (2u^2 + s(u^2 - 1) - 3) \right]$$

$$\times B_{u^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{1}{2} \right) + (4+s) B_{u^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{3}{2} \right) \Big]. \quad (\text{A.21c})$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $B_z(a, b)$  die unvollständige Eulersche Beta-Funktion (z. B. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup> und Anhang C.4), die gegeben ist durch

$$B_z(a, b) = \int_0^z dt t^{a-1} (1-t)^{b-1}. \quad (\text{A.22})$$

Alternativ kann die Funktion  $\mathcal{A}(u, s)$  auch mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1$  ausgedrückt werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, s) &= \frac{\mu}{u} \frac{u^3}{s+3} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{s+3}{2}; \frac{s+5}{2}; u^2 \right) \\ &+ \frac{\mu^3}{u^3} \frac{u^{s+3}}{s+3} {}_2F_1 \left( \frac{3}{2}, \frac{s+3}{2}; \frac{s+5}{2}; u^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Das zweite Integral ist dagegen elementar:

$$\mathcal{B}(u, s) \equiv \int_u^1 d\eta \eta^{s-1} \left[ \eta^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{8} \right) + \frac{1}{4} \right] \quad (\text{A.24a})$$

$$= \frac{1}{4} \int_u^1 d\eta \eta^{s-1} (1 + \eta^2) - \frac{u^2}{8\mu^2} \int_u^1 d\eta \eta^{s-1} (1 - \eta^2) \quad (\text{A.24b})$$

$$= \frac{2(s+1) - (s+2)u^s - su^{s+2}}{4s(s+2)} - \frac{u^2}{\mu^2} \frac{su^{s+2} - (s+2)u^s + 2}{8s(s+2)}. \quad (\text{A.24c})$$

Damit erhalten wir schließlich für den Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$ :

$$D_{\mu\mu} = D_0 \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}(u, s) + \mathcal{B}(u, s) \right]. \quad (\text{A.25})$$

Die  $\mu$ -Abhängigkeit des Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$  ist in Abb. 3.1 auf S. 30 gezeigt, wobei wir die Normierung  $D_0$  aus Gl. (3.12) verwendet haben.

## A.2 Quasilinearer senkrechter Transport in magnetostatischer Turbulenz

Genau wie in der NLGC-Formulierung (Abschnitt 3.2.2) beginnen wir die Berechnung mit der Relation der Geschwindigkeit des Führungszentrums in senkrechter Richtung,  $\tilde{v}_x$ , zur anderen Geschwindigkeitskomponente. Der Kraftterm  $g_X$ , der mit der Geschwindigkeit

des Führungszentrums in  $x$ -Richtung identifiziert werden kann, ist daher gegeben durch Gl. (12.1.9d) in Schlickeiser<sup>80</sup>

$$g_X \equiv \tilde{v}_x = -v\sqrt{1-\mu^2} \cos\phi \frac{\delta B_{\parallel}}{B_0} + \frac{ic}{\sqrt{2}B_0} \left[ \delta E_R - \delta E_L - \frac{i\mu v}{c} (\delta B_L + \delta B_R) \right], \quad (\text{A.26})$$

wobei die helikalen Koordinaten aus Gl. (A.4) verwendet wurden. Transformieren wir den Kraftterm  $g_X$  zurück auf kartesische Koordinaten, ergibt sich daraus

$$g_X \equiv \tilde{v}_x = v_z \frac{\delta B_x}{B_0} - v_x \frac{\delta B_z}{B_0} - c \frac{\delta E_y}{B_0}. \quad (\text{A.27})$$

Vernachlässigen wir die elektrischen Felder, finden wir schließlich

$$\tilde{v}_x = v_z \frac{\delta B_x}{B_0} - v_x \frac{\delta B_z}{B_0}, \quad (\text{A.28})$$

was genau mit dem NLGC-Ansatz übereinstimmt.

### A.2.1 Der Fokker-Planck-Koeffizient $D_{\perp}$

Für achsensymmetrische Turbulenz ist der Fokker-Planck-Koeffizient für senkrechte Diffusion einfach die Summe  $D_{\perp} = D_{XX} + D_{YY}$ . Daher ist er gegeben durch Gl. (36) in Shalchi und Schlickeiser<sup>94</sup>

$$\begin{aligned} D_{\perp} = & \frac{v^2}{2B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \mathcal{R}(\mathbf{k}) \left\{ (1-\mu^2) P_{\parallel\parallel} [J_{n+1}^2(w) + J_{n-1}^2(w)] \right. \\ & + 2\mu^2 J_n^2(w) (P_{RR} + P_{LL}) - \mu\sqrt{2(1-\mu^2)} J_n(w) \\ & \times [P_{L\parallel} J_{n+1}(w) e^{-i\psi} + P_{R\parallel} J_{n-1}(w) e^{i\psi} \\ & \left. + P_{\parallel L} J_{n+1}(w) e^{i\psi} + P_{\parallel R} J_{n-1}(w) e^{-i\psi}] \right\}, \quad (\text{A.29}) \end{aligned}$$

mit der Resonanzfunktion

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}) = \pi\delta(k_{\parallel}v_{\parallel} + n\Omega). \quad (\text{A.30})$$

Der Korrelationstensor  $P_{lm}$  ist in kartesischen Koordinaten wieder gegeben durch

$$P_{ij} = \frac{G(k)}{8\pi k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (\text{A.31})$$

wobei wieder verschwindende magnetische Helizität angenommen wurde und  $G$  das Turbulenzspektrum bezeichnet. Konvertieren wir die Komponenten des Korrelationstensors zu helikalen Koordinaten, so erhalten wir

$$P_{LL} = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) = P_{RR} \quad (\text{A.32a})$$

$$P_{LR} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} - 2i \frac{k_x k_y}{k^2} \right) \quad (\text{A.32b})$$

$$P_{\text{RL}} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} + 2i \frac{k_x k_y}{k^2} \right) \quad (\text{A.32c})$$

$$P_{\parallel\parallel} = 1 - \frac{k_z^2}{k^2} \quad (\text{A.32d})$$

$$P_{\text{L}\parallel} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k_x k_z + i k_y k_z}{k^2} \right) \quad (\text{A.32e})$$

$$P_{\text{R}\parallel} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k_x k_z - i k_y k_z}{k^2} \right) \quad (\text{A.32f})$$

$$P_{\parallel\text{L}} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k_x k_z - i k_y k_z}{k^2} \right) \quad (\text{A.32g})$$

$$P_{\parallel\text{R}} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k_x k_z + i k_y k_z}{k^2} \right). \quad (\text{A.32h})$$

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten  $(k, \theta, \psi)$  ergibt sich der Fokker-Planck-Koeffizient zu

$$\begin{aligned} D_{\perp} = & \frac{\pi v^2}{2B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega) \frac{G(k)}{8\pi k^2} \\ & \times \left\{ (1 - \mu^2) (1 - \cos^2 \theta) [J_{n+1}^2(w) + J_{n-1}^2(w)] \right. \\ & + 2\mu^2 J_n^2(w) (2 - \cos^2 \theta) - \frac{\mu}{2} \sqrt{2(1 - \mu^2)} J_n(w) \\ & \times [J_{n+1}(w) e^{-i\psi} (-\sin \theta \cos \theta \cos \psi + i \cos \theta \sin \theta \sin \psi)) \\ & + J_{n-1}(w) e^{i\psi} (-\sin \theta \cos \theta \cos \psi - i \cos \theta \sin \theta \sin \psi)) \\ & + J_{n+1} e^{i\psi} (-\sin \theta \cos \theta \cos \psi - i \sin \theta \cos \theta \sin \psi)) \\ & \left. + J_{n-1}(w) e^{-i\psi} (-\sin \theta \cos \theta \cos \psi + i \sin \theta \cos \theta \sin \psi)) \right\}. \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

Vereinfachen wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} D_{\perp} = & \frac{\pi v^2}{2B_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega) G(k) \left\{ (1 - \mu^2) (1 - \eta^2) \right. \\ & \times [J_{n+1}^2(w) + J_{n-1}^2(w)] + 2\mu^2 (1 + \eta^2) J_n^2(w) \\ & \left. + \mu\eta \sqrt{2(1 - \mu^2)(1 - \eta^2)} J_n(w) [J_{n+1}(w) + J_{n-1}(w)] \right\}, \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

wobei wir  $\eta = \cos \theta$  verwendet haben.

Berechnen wir nur den Term mit  $n = 0$  der unendlichen Reihe, erhalten wir

$$D_{n=0} = \int_0^{\infty} dk g(k) \int_{-1}^1 d\eta \delta(kv\mu\eta) \{ \dots \} \quad (\text{A.35a})$$

$$= \frac{1}{|v\mu|} \int_0^\infty dk \frac{g(k)}{k} \int_{-1}^1 d\eta \delta(\eta) \{ \dots \} \quad (\text{A.35b})$$

$$= \frac{1}{|v\mu|} \int_0^\infty dk \frac{g(k)}{k} \left\{ (1 - \mu^2) [J_1^2(w) + J_{-1}^2(w)] \right. \\ \left. + 2\mu^2 J_0^2(w) + 2\mu\sqrt{2(1 - \mu^2)} J_0(w) J_1(w) \right\}, \quad (\text{A.35c})$$

wobei  $\{ \dots \}$  für die geschweiften Klammern in Gl. (A.34) steht.

Wir müssen nun zwei verschiedene Fälle unterscheiden: Hat das Turbulenzspektrum einen endlichen Wert für  $k = 0$  und gilt also  $g(0) \neq 0$ , so kann man bereits aus Gl. (A.35c) ersehen, dass die  $k$ -Integration im Ausdruck für  $D_{n=0}$  – und damit auch für  $D_\perp$  insgesamt – unendlich ergibt, da  $J_0(0) = 1$  und  $g(0) = 1$  gilt. Im Falle eines bei kleinen  $k$  abgeschnittenen (*cut-off*) Spektrums dagegen, d. h.  $g(k=0) = 0$  (was der realistischere Fall ist), bleibt dieser Term zunächst endlich.

### A.2.2 Die senkrechte mittlere freie Weglänge

Die senkrechte mittlere freie Weglänge ist gegeben durch

$$\lambda_\perp = \frac{3}{2v} \int_{-1}^1 d\mu D_\perp(\mu) = \frac{3}{v} \int_0^1 d\mu D_\perp(|\mu|). \quad (\text{A.36})$$

Betrachten wir Gl. (A.35c), so sehen wir, dass zumindest ein Term proportional ist zu

$$\frac{2}{|v\mu|} \int_0^\infty dk \frac{g(k)}{k} J_1^2\left(\frac{kv}{\Omega} \sqrt{1 - \mu^2}\right) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu}, \quad (\text{A.37})$$

woraus eine logarithmische Divergenz von  $\lambda_\perp$  folgt. Daher liefert die senkrechte mittlere freie Weglänge im Falle eines abgeschnittenen Spektrums ebenfalls unendlich, da die Integration über  $\mu$  bei  $\mu = 0$  beginnt.

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, muss dies so interpretiert werden, dass die quasilineare Theorie dabei versagt, die senkrechte Diffusion im Falle isotroper magnetostatischer Turbulenz zu beschreiben.

## A.3 Quasilinearer paralleler Transport in Alfvénwellen-Turbulenz

Im Plasmawellenmodell, in welches vorwärts- und rückwärtslaufende Alfvénwellen mit verschwindender Kreuzhelizität einbezogen werden, sind die quasilinearen parallelen und senkrechten mittleren freien Weglängen und Diffusionskoeffizienten nicht länger unendlich, wie wir in diesem Anhang im Detail nachweisen werden.



### A.3.1 Der Fokker-Planck-Koeffizient $D_{\mu\mu}$

Für den Fokker-Planck-Koeffizienten  $D_{\mu\mu}$  verwenden wir die folgende, in Abschnitt 13.1.4 in Schlickeiser<sup>80</sup> hergeleitete Form

$$D_{\mu\mu} = \frac{G_0\pi\Omega^2(1-\mu^2)}{4B_0^2} \sum_{\iota=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1-\iota\mu\epsilon)^2 \int_0^{\infty} dk g(k) \times \int_{-1}^1 d\eta (1+\eta^2)^2 \delta(k[v\mu\eta - \iota\eta V_A] + n\Omega) \frac{n^2}{w^2} J_n^2(w), \quad (\text{A.38})$$

wobei  $\epsilon = V_A/v$  als das Verhältnis der Alfvén- zur Teilchengeschwindigkeit definiert wurde und  $\iota = \pm 1$  die beiden Propagationsrichtungen der Wellen (vorwärts und rückwärts) berücksichtigt. Basierend auf den Rechnungen in Anhang A.1 erhalten wir

$$D_{\mu\mu} = \frac{G_0\pi\Omega^2(1-\mu^2)}{2B_0^2|v|} \sum_{\iota=\pm 1} \frac{(1-\iota\mu\epsilon)^2}{|\mu-\iota\epsilon|} \int_0^1 d\eta \frac{1+\eta^2}{\eta} \times \sum_{n=1}^{\infty} g\left(k = \frac{n\Omega}{\eta v|\mu-\iota\epsilon|}\right) \frac{J_n^2(nz)}{z^2}, \quad (\text{A.39})$$

wobei jetzt

$$z = \frac{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\eta^2)}}{\eta|\mu-\iota\epsilon|}. \quad (\text{A.40})$$

Die Kapteyn-Reihe ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz) \simeq \begin{cases} \frac{z^2}{4}, & z \lesssim 1 \\ \frac{\zeta(s+1)}{\pi z}, & z \gg 1, \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

wobei wir im Unterschied zur Rechnung in Anhang A.1 beachten müssen, dass jetzt für die Grenze, wann  $z$  kleiner oder größer als 1 ist, gilt:

$$z(\mu, \eta) \begin{cases} > 1, & \text{für } \eta < \tilde{u} \\ < 1, & \text{für } \eta > \tilde{u}, \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

mit

$$\tilde{u} \equiv \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1-2\iota\mu\epsilon + \epsilon^2}}. \quad (\text{A.43})$$

Daher ergibt sich schließlich für den Fokker-Planck-Koeffizienten

$$D_{\mu\mu} = D_0 \sum_{\iota=\pm 1} \frac{(1-\iota\mu\epsilon)^2}{|\mu-\iota\epsilon|^{1-s}} \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}_\iota(u, \epsilon, s) + \frac{1}{4} \mathcal{B}_\iota(u, \epsilon, s) \right], \quad (\text{A.44})$$

mit

$$D_0 = \frac{\pi v}{2} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \frac{s-1}{k_{\min}^{1-s} - k_{\max}^{1-s}} R_L^{s-2}. \quad (\text{A.45})$$

Die Integrale  $\mathcal{A}_l$  und  $\mathcal{B}_l$  berechnen wir als

$$\mathcal{A}_l(u, \epsilon, s) = \int_0^{\tilde{u}} d\eta (1 + \eta^2) \frac{\eta^{s-1}}{z^3} \quad (\text{A.46a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|\mu - \iota\epsilon|^3}{2u^3 (\tilde{u}^2 - 1)} \\ &\times \left\{ [3 + s - (2 + s)\tilde{u}^2] B_{\tilde{u}^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{1}{2} \right) - (4 + s) B_{\tilde{u}^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{3}{2} \right) \right. \\ &\left. + [5 + s - (4 + s)\tilde{u}^2] B_{\tilde{u}^2} \left( \frac{s+5}{2}, \frac{1}{2} \right) - (6 + s) B_{\tilde{u}^2} \left( \frac{s+5}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.46b})$$

wobei  $B_z(a, b)$  wieder die unvollständige Eulersche Beta-Funktion bezeichnet (siehe z. B. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup> und Anhang C.4). Das zweite Integral ist ebenfalls wieder elementar und ergibt

$$\mathcal{B}_l(u, \epsilon, s) = \int_{\tilde{u}}^1 d\eta (1 + \eta^2) \eta^{s-1} \quad (\text{A.47a})$$

$$= \frac{2(s+1) - (s+2)\tilde{u}^s - s\tilde{u}^{s+2}}{s(s+2)}. \quad (\text{A.47b})$$

### A.3.2 Der parallele räumliche Diffusionskoeffizient

Der parallele räumliche Diffusionskoeffizient  $\kappa_{\parallel}$  ist gegeben durch

$$\kappa_{\parallel} = \frac{v^2}{8} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}}, \quad (\text{A.48})$$

woraus sich mit Gl. (A.44) ergibt

$$\kappa_{\parallel} = \frac{v}{4\pi} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{-2} \frac{k_{\min}^{1-s} - k_{\max}^{1-s}}{s-1} \mathcal{J}(s, \epsilon) R_L^{2-s}, \quad (\text{A.49})$$

mit

$$\mathcal{J}(s, \epsilon) = \int_{-1}^1 d\mu u^2 \left\{ \sum_{\iota=\pm 1} \frac{(1 - \iota\mu\epsilon)^2}{|\mu - \iota\epsilon|^{1-s}} \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}_l(u, \epsilon, s) + \frac{1}{4} \mathcal{B}_l(u, \epsilon, s) \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{A.50})$$

Für beispielsweise  $s = 5/3$  und  $\epsilon = 0,15$  liefert dies den Wert  $\mathcal{J}(s, \epsilon) \simeq 33,81$ . Die exakte  $\epsilon$ -Abhängigkeit des Integrals  $\mathcal{J}(s = 5/3, \epsilon)$  ist in Abb. A.1 dargestellt.

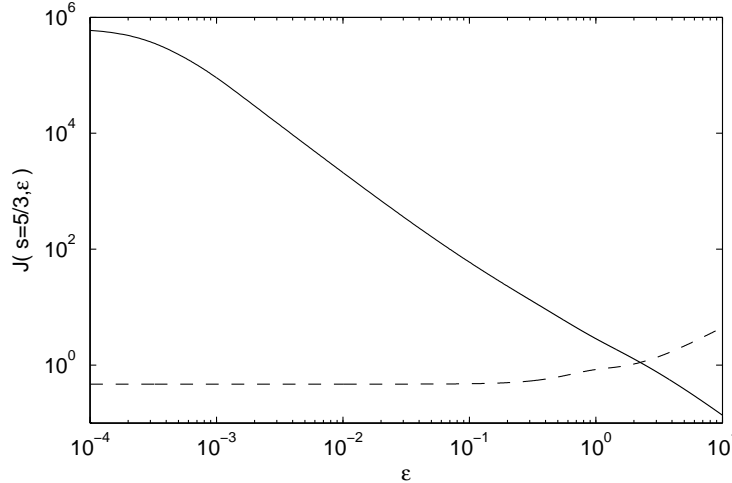


Abbildung A.1: Die Funktionen  $\mathcal{J}(s, \epsilon)$  aus Gl. (A.50) (durchgezogene Linie) und aus Gl. (A.60) (gestrichelte Linie), beide für  $s = 5/3$ .

Mit  $R = pc/e$  erhalten wir

$$v = \frac{Rc}{\sqrt{R^2 + R_0^2}} \quad (\text{A.51a})$$

$$\epsilon = \frac{V_A}{v} = \frac{V_A}{c} \frac{\sqrt{R^2 + R_0^2}}{R}, \quad (\text{A.51b})$$

wobei  $R_0 = 938 \text{ MV}$  die von uns so bezeichnete „Ruhe-Steifigkeit“ der Protonen bezeichnet. Damit ergibt sich der parallele räumliche Diffusionskoeffizient schließlich als

$$\kappa_{\parallel} = \frac{\mathcal{J}[\epsilon(R)]}{4\pi B_0} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^{-2} \frac{R_{\max}^{s-1} - R_{\min}^{s-1}}{s-1} \frac{R^{3-s}}{\sqrt{R^2 + R_0^2}}. \quad (\text{A.52})$$

## A.4 Quasilinearer senkrechter Transport in Alfvénwellen-Turbulenz

Ausgangspunkt für die vorliegende Rechnung ist Gleichung (13.1.46) in Schlickeiser<sup>80</sup>. Aus

$$D_{YY} = \frac{G_0 \pi V_A^2}{4v B_0^2} \sum_{\iota=\pm 1} \frac{(1 - \iota \mu \epsilon)^2}{|\mu - \iota \epsilon|} \int_{-1}^1 d\eta (1 + \eta^2) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \delta \left( k + \frac{n\Omega}{\eta v (\mu - \iota \epsilon)} \right) g(k) J_n^2(w) \quad (\text{A.53})$$

kann man unmittelbar ersehen, dass der Term mit  $n = 0$  der unendlichen Reihe verschwindet, da für das in Gl. (4.6) gegebene Turbulenzspektrum  $g(0) = 0$  gilt.

Basierend auf unseren Untersuchungen in Anhang A.3.1 berechnen wir

$$D_{YY} = D_0 \int_0^1 d\eta \eta^{s-1} (1 + \eta^2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz), \quad (\text{A.54})$$

wobei  $z$  durch Gl. (A.40) gegeben ist und

$$D_0 = \frac{\pi V_A^2}{2v} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \frac{R_L^s (s-1)}{k_{\min}^{1-s} - k_{\max}^{1-s}} \sum_{\iota=\pm 1} \frac{(1 - \iota\mu\epsilon)^2}{|\mu - \iota\epsilon|^{1-s}}. \quad (\text{A.55})$$

Mit der Kapteyn-Reihe aus Gleichung (A.41) (siehe auch Anhang C.3) und Gl. (A.42) erhalten wir

$$D_{YY} = D_0 \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}(u, \epsilon, s) + \frac{1}{4} \mathcal{B}(u, \epsilon, s) \right], \quad (\text{A.56})$$

wobei

$$\mathcal{A}(u, \epsilon, s) = \frac{|\mu - \iota\epsilon|}{\sqrt{1 - \mu^2}} \int_0^{\tilde{u}} d\eta (1 + \eta^2) \frac{\eta^s}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad (\text{A.57a})$$

$$= \frac{|\mu - \iota\epsilon|}{u} \left[ B_{\tilde{u}^2} \left( \frac{1+s}{2}, \frac{1}{2} \right) + B_{\tilde{u}^2} \left( \frac{3+s}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{A.57b})$$

und  $\mathcal{B}(u, \epsilon, s)$  durch Gl. (A.47b) gegeben ist.

Für den senkrechten Diffusionskoeffizienten  $\kappa_{YY}$ , den wir gemäß

$$\kappa_{YY} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu D_{YY}(\mu), \quad (\text{A.58})$$

berechnen, erhalten wir daher unter Verwendung der Steifigkeit  $R = R_L/B_0 c$  schließlich

$$\kappa_{YY} = \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \frac{\pi}{4B_0} \left( \frac{V_A}{c} \right)^2 \frac{s-1}{R_{\max}^{s-1} - R_{\min}^{s-1}} \mathcal{J}(s, \epsilon) R^{s-1} \sqrt{R^2 + R_0^2}, \quad (\text{A.59})$$

mit dem Integral

$$\mathcal{J}(s, \epsilon) = \sum_{\iota=\pm 1} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \iota\mu\epsilon)^2}{|\mu - \iota\epsilon|^{1-s}} \left[ \frac{\zeta(s+1)}{\pi} \mathcal{A}(u, \epsilon, s) + \frac{1}{4} \mathcal{B}(u, \epsilon, s) \right]. \quad (\text{A.60})$$

Diese Funktion ist ebenfalls in Abb. A.1 dargestellt. Wie schon im vorherigen Abschnitt gilt für Protonen wieder  $R_0 = 938$  MV.

## B Ergänzungen zu Teil II

Dieses Kapitel stellt einige der Rechnungen aus den Kapiteln 6 und 8 ausführlich dar, die aufgrund ihrer Komplexität den Rahmen dieser Kapitel sprengen würden. Zuerst wird der Vergleich der in Kapitel 6.4 verwendeten Dispersionsrelationen mit denen von Bornatici und Lee<sup>7</sup> durchgeführt. Weiterhin ist als Anhang zu Abschnitt 8.2 die dort angesprochene Verallgemeinerung auf den Fall  $k_{\parallel} \neq 0$  behandelt.

### B.1 Vergleich mit Bornatici und Lee

In diesem Abschnitt wird die in Kap. 6.4 verwendete Dispersionsrelation für die *ordinary-wave*-Mode mit der in Bornatici und Lee<sup>7</sup> (BL) verwendeten Dispersionsgleichung verglichen. Dies führt auf eine unendliche Reihe über modifizierte Besselfunktionen, die, wie noch gezeigt wird, sich als hypergeometrische Funktion  ${}_2F_2$  schreiben lässt.

In BL wurde die Dispersionsrelation der *ordinary-wave*-Mode geschrieben als

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \sum_a \omega_{p,a^2} + 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \Omega_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} v_{\parallel}^2 \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 J_n^2(z)}{\omega^2 - (n\Omega)^2}. \quad (\text{B.1})$$

Nun verwendet man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \Omega^2 J_n^2(z)}{\omega^2 - (n\Omega)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\Omega J_n^2(z)}{\omega - n\Omega}, \quad (\text{B.2})$$

was sich durch Erweitern der rechten Seite mit  $\omega + n\Omega$  leicht beweisen lässt, wenn man beachtet, dass die Summe anschließend einen in  $n$  ungeraden und einen in  $n$  geraden Anteil enthält, wovon ersterer wegfällt. Damit sieht man direkt, dass Gl. (B.1) identisch zur in Kap. 6.4 verwendeten Dispersionsrelation (6.39) ist.

Für eine Gegenstrom-Verteilungsfunktion, die der aus Gl. (6.36) entspricht, erhalten sowohl BL als auch Lee und Armstrong<sup>43</sup> das Ergebnis

$$0 = \omega^2 \left[ 1 + \frac{w_{\parallel}^2 + 2v_0^2}{w_{\perp}^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\omega_0^2}{(n\Omega)^2 - \omega^2} e^{-\mu} I_n(\mu) \right] \quad (\text{B.3a})$$

$$+ \left[ \omega_0^2 \left( \frac{w_{\parallel}^2 + 2v_0^2}{w_{\perp}^2} - 1 \right) - c^2 k^2 - \omega_0^2 \frac{w_{\parallel}^2 + 2v_0^2}{w_{\perp}^2} e^{-\mu} I_0(\mu) \right]$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 - \frac{c^2 k^2 + \omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{w_{\parallel}^2 + 2v_0^2}{w_{\perp}^2} \left[ 1 + \alpha^2 e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(\mu)}{n^2 - \alpha^2} \right], \quad (\text{B.3b})$$

wobei  $I_n(z)$  die modifizierte Besselfunktion erster Art (s. Anhang C.1) bezeichnet und  $\mu = (k_\perp w_\perp / \Omega)^2 / 2$  verwendet wurde.

Vergleicht man Gl. (B.3b) mit Gl. (6.39), so sieht man, dass

$$\alpha^2 e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(\mu)}{n^2 - \alpha^2} \stackrel{!}{=} -\hat{F}(1) \quad (\text{B.4})$$

gilt, wobei die Notation  $\hat{F}(n)$  aus Gl. (6.47) verwendet wurde. Dies werden wir im Folgenden beweisen. Mit

$$\frac{w_\perp^2}{2} \exp\left(-\frac{k_\perp^2 w_\perp^2}{2\Omega^2}\right) I_n\left(\frac{k_\perp^2 w_\perp^2}{2\Omega^2}\right) = \int_0^\infty dv_\perp v_\perp e^{-v_\perp^2/w_\perp^2} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) \quad (\text{B.5})$$

(z. B. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup>) erhält man

$$e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 I_n(\mu)}{n^2 - \alpha^2} = \frac{2}{w_\perp^2} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp e^{-v_\perp^2/w_\perp^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 J_n^2(z)}{n^2 - \alpha^2} \quad (\text{B.6a})$$

$$= \frac{2}{w_\perp^2} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp e^{-v_\perp^2/w_\perp^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ -J_n^2(z) + \frac{n^2 J_n^2(z)}{n^2 - \alpha^2} \right] \quad (\text{B.6b})$$

$$= \frac{2}{w_\perp^2} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp e^{-v_\perp^2/w_\perp^2} \left[ -1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n J_n^2(z)}{n - \alpha} \right] \quad (\text{B.6c})$$

$$= \frac{2\alpha}{w_\perp^2} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp e^{-v_\perp^2/w_\perp^2} S(\alpha, z), \quad (\text{B.6d})$$

wobei  $z = k_\perp v_\perp / \Omega$  und  $\xi = k_\perp w_\perp / \Omega$ . Weiterhin ist  $S(\alpha, z)$  durch Gl. (6.42) gegeben. Unter Verwendung von Gl. (C.48) erhält man schließlich

$$e^{-\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 I_n(\mu)}{n^2 - \alpha^2} = -\hat{F}(1). \quad (\text{B.6e})$$

Dadurch wurde allgemein die Identität bewiesen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(z)}{\alpha^2 - n^2} = \frac{e^z}{\alpha^2} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; 1 + \alpha, 1 - \alpha; -2z\right), \quad (\text{B.7})$$

was auch numerisch überprüft wurde für  $z \in \mathbb{C}$  und  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  (d. h.  $\alpha$  darf nicht ganzzahlig reell sein).

## B.2 Vereinfachung der Dispersionsrelation (8.1)

Mit  $4\pi i\omega \sigma_{lm} = \zeta_{lm}$  nimmt die Dispersionsrelation aus Gl. (8.1) die Form an

$$\begin{aligned}
 0 = & (\omega^2 + \zeta_{xx}) (\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{yy}) (\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{zz}) \\
 & + \zeta_{xy} \zeta_{yz} \zeta_{zx} + \zeta_{xz} \zeta_{yx} \zeta_{zy} - \zeta_{zx} \zeta_{xz} (\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{yy}) - \zeta_{zy} \zeta_{yz} (\omega^2 + \zeta_{xx}) \\
 & - \zeta_{yx} \zeta_{xy} (\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{zz}). \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

Um fortfahren zu können, muss man die Terme  $\zeta_{lm}$  auswerten. Eine allgemeine Berechnung ist schwierig, aber wenn man ausschließlich am Verhalten in der Nähe eines Neutralpunktes (und daran, unter welchen Bedingungen ein solcher Neutralpunkt existieren kann) interessiert ist, dann ist die Auswertung der relevanten  $\zeta_{lm}$  vereinfacht, aber noch immer überaus mühsam.

Da wir hauptsächlich an der Umgebung von  $\omega = 0$  interessiert sind, betrachten wir nun, um den größten praktischen Nutzen aus der Neutralpunkt-Methode zu ziehen, die Struktur der Terme  $\zeta_{lm}$  ausschließlich für kleine  $\omega$ .

Aus den Gleichungen (8.3) erhält man

$$\hat{U}f = A + \frac{k_{\parallel}}{\omega} B, \quad \hat{W}f = C - \frac{m}{\omega} D, \tag{B.9a}$$

mit

$$A = \frac{\partial f_a}{\partial p_{\perp}}, \quad B = \frac{\Delta}{\gamma m_a}, \quad C = \frac{\partial f_a}{\partial p_{\parallel}}, \quad D = \frac{\Omega_a}{\gamma p_{\perp}} \Delta, \tag{B.9b}$$

wobei der Differenzialoperator  $\Delta$  in Gl. (8.3e) definiert ist.

Betrachten wir nun die strukturelle Form

$$\mathcal{S}_{lm} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{T}_{lm}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega_0/\gamma}. \tag{B.10}$$

Zunächst separieren wir  $\mathcal{T}_{lm}$  in bezogen auf  $n$  gerade und ungerade Anteile, d. h.  $\mathcal{T}_{lm} = \mathcal{E}_{lm} + \mathcal{O}_{lm}$ , wobei

$$\mathcal{E}_{lm}(n) = \begin{pmatrix} v_{\perp} z^{-2} n^2 J_n^2(z) X & 0 & -v_{\perp} (z\omega)^{-1} n^2 J_n^2 D \\ 0 & v_{\perp} J_n^2(z) X & -iv_{\perp} J_n(z) J_n'(z) C \\ 0 & iv_{\parallel} J_n(z) J_n'(z) X & v_{\parallel} J_n^2(z) C \end{pmatrix} \tag{B.11a}$$

und

$$\mathcal{O}_{lm}(n) = \begin{pmatrix} 0 & iv_{\perp} z^{-1} n J_n(z) J_n'(z) X & v_{\perp} z^{-1} n J_n^2(z) C \\ -iv_{\perp} z^{-1} n J_n(z) J_n'(z) X & 0 & iv_{\perp} n J_n(z) J_n'(z) \omega^{-1} D \\ v_{\parallel} z^{-1} n J_n^2(z) X & 0 & -v_{\parallel} n J_n^2(z) \omega^{-1} D \end{pmatrix}, \tag{B.11b}$$

wobei  $X = A + B k_{\parallel}/\omega$ .

Damit kann man schreiben

$$\mathcal{S}_{lm} = 2\gamma\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{lm}(n)}{\beta^2 - n^2\Omega_a^2} + \frac{\gamma}{\beta} \mathcal{E}_{lm}(0) + 2\gamma\Omega_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mathcal{O}_{lm}(n)}{\beta^2 - n^2\Omega_a^2}, \quad (\text{B.12})$$

mit  $\beta = \gamma(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})$ .

Das Verhalten von  $\mathcal{S}_{lm}$  in der Umgebung von  $\omega \rightarrow 0$  hängt empfindlich von  $k_{\parallel}$  ab. Dabei ist das Folgende zu beachten: Wird  $k_{\parallel} = 0$  festgelegt, bevor man das Verhalten der Dispersionsrelation in der Umgebung von  $\omega = 0$  untersucht, gilt  $\hat{U}f_a = A$ . Betrachtet man andererseits den Grenzfall  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  gleichzeitig mit  $\omega \rightarrow 0$ , in dem Sinne, dass  $k_{\parallel}/\omega = n_{\parallel}$  eine (komplexe) Konstante ist, so gilt  $\hat{U}f_a = A + n_{\parallel}B$ . Hat man es dagegen mit einem endlichen, festen Wert von  $k_{\parallel}$  zu tun und ist dann bestrebt, die Dispersionsrelation in der Umgebung von  $\omega = 0$  auszuwerten, so gilt  $\hat{U}f_a \simeq Bk_{\parallel}/\omega$ . Das Verhalten der Wellenmoden in der Nähe eines jeden Neutralpunktes wird daher stark von der Wahl des Grenzübergangs für  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  beeinflusst. Wir betrachten nun nacheinander die verschiedenen Situationen.

### B.2.1 Der Fall senkrecht propagierender Wellen ( $k_{\parallel} = 0$ )

In diesem Fall gilt  $\beta = \gamma\omega$ .

Man kann nun die geraden und ungeraden Anteile (bezogen auf  $n$ ) von  $\mathcal{T}_{lm}$  in von  $\omega$  unabhängige Terme und solche, die von  $\omega^{-1}$  abhängig sind, aufspalten. Daher schreiben wir

$$\mathcal{E}_{lm} = \mathcal{N}_{lm} + \frac{\mathcal{P}_{lm}}{\omega} \quad (\text{B.13a})$$

$$\mathcal{O}_{lm} = \mathcal{L}_{lm} + \frac{\mathcal{M}_{lm}}{\omega}, \quad (\text{B.13b})$$

wobei die Identifikation der Terme  $\mathcal{N}_{lm}$ ,  $\mathcal{P}_{lm}$ ,  $\mathcal{L}_{lm}$  und  $\mathcal{M}_{lm}$  direkt aus den Gleichungen (B.11) folgt. Man beachte, dass  $\mathcal{P}_{lm}(0) \equiv 0$  ist, was ebenso für  $\mathcal{L}_{lm}(0)$  und  $\mathcal{M}_{lm}(0)$  gilt, so dass  $\mathcal{E}_{lm}(0) = \mathcal{N}_{lm}(0)$  folgt.

Entwickelt man daraufhin  $\mathcal{S}_{lm}$  in Potenzen von  $\omega$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \omega\mathcal{S}_{lm} &= \mathcal{E}_{lm}(0) - \frac{2\gamma}{\Omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_{lm}}{n} \\ &\quad - \omega \frac{2\gamma}{\Omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mathcal{L}_{lm}}{n} + \frac{\gamma}{\Omega_0} \frac{\mathcal{P}_{lm}(n)}{n^2} \right) - \omega^2 \frac{2\gamma^2}{\Omega_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mathcal{E}_{lm}(n)}{n^2} + \frac{\gamma}{\Omega_0} \frac{\mathcal{M}_{lm}}{n^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14a})$$

$$\begin{aligned} &\quad - \omega^3 \frac{2\gamma^3}{\Omega_0^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mathcal{L}_{lm}}{n^3} + \frac{\gamma}{\Omega_0} \frac{\mathcal{P}_{lm}(n)}{n^4} \right) - \omega^4 \frac{2\gamma^4}{\Omega_0^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mathcal{N}_{lm}(n)}{n^4} + \frac{\gamma}{\Omega_0} \frac{\mathcal{M}_{lm}}{n^5} \right) \\ &\equiv \mathcal{Q}_{lm}. \end{aligned} \quad (\text{B.14b})$$



Daraus folgt

$$\zeta_{lm} = 4\pi i \omega \sigma_{lm} = 8\pi^2 \sum_a e_a^2 n_a \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \mathcal{Q}_{lm} \quad (\text{B.15a})$$

$$\equiv \rho_{lm} + \omega \mu_{lm} + \omega^2 \tau_{lm} + \omega^3 \phi_{lm} + \omega^4 \psi_{lm} + \dots \quad (\text{B.15b})$$

Setzt man den durch Gl. (B.15) gegebenen Ausdruck in die Dispersionsrelation (8.1) ein, so ergibt sich bis zur Ordnung  $\omega^4$

$$\omega^4 E(k_{\perp}) + \omega^2 F(k_{\perp}) = 0, \quad (\text{B.16})$$

da alle Terme der Ordnungen  $\omega^3$ ,  $\omega$  und unabhängig von  $\omega$  identisch verschwinden. Somit erhält man in der Nähe von  $\omega = 0$  die Dispersionsrelation in der Form

$$\omega^2 E(k_{\perp}) + F(k_{\perp}) = 0, \quad (\text{B.17})$$

wobei  $E(k_{\perp})$  und  $F(k_{\perp}) \in \mathbb{R}$  durch die Gleichungen (B.28) (allgemeiner Fall) und die Gleichungen (B.29) (symmetrische Verteilungsfunktionen) im Abschnitt B.3 gegeben sind.

### B.2.2 Der Fall endlicher $k_{\parallel}/\omega = n_{\parallel}$ und $k_{\perp}$ für $\omega \rightarrow 0$

In dieser Situation können wir wieder schreiben

$$\mathcal{E}_{lm} = \mathcal{N}_{lm} + \frac{\mathcal{P}_{lm}}{\omega}, \quad \mathcal{O}_{lm} = \mathcal{L}_{lm} + \frac{\mathcal{M}_{lm}}{\omega}, \quad (\text{B.18})$$

wobei nur die Terme  $\mathcal{N}_{lm}$  und  $\mathcal{L}_{lm}$  im Gegensatz zum obigen Fall durch den Faktor  $k_{\parallel}/\omega B = n_{\parallel} B$  in den Elementen von  $\mathcal{E}_{lm}$  und  $\mathcal{O}_{lm}$  aus den Gln. (B.11) modifiziert werden müssen.

Allerdings ist die Berechnung von  $\mathcal{S}_{lm}$  in Potenzen von  $\omega$  jetzt komplizierter, aufgrund von  $\beta = \gamma(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) = \gamma\omega(1 - n_{\parallel} v_{\parallel}) \equiv \gamma\omega q$ .

Dass die gleiche polynomiale Struktur in  $\omega$  für  $\mathcal{S}_{lm}$  wie im vorherigen Fall auftritt ist klar, durch die Anwesenheit des Faktors  $1 - n_{\parallel} v_{\parallel} = q$  in  $\beta$  aus Gl. (B.12) unterscheiden sich jedoch die Koeffizienten. Bis zur Ordnung  $\omega^4$  können wir wieder schreiben

$$\begin{aligned} \omega \mathcal{S}_{lm} &= \frac{\mathcal{N}_{lm}^*(0)}{q} - \frac{2\gamma}{\Omega_a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_{lm}^*}{n} - \omega \frac{2\gamma}{\Omega_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q \mathcal{P}_{lm}^* + n \Omega_a \mathcal{L}_{lm}^*}{n^2} \\ &\quad - \omega^2 \left[ \frac{2\gamma^3 q^2}{\Omega_a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_{lm}^*}{n^3} + \frac{2\gamma q}{\Omega_a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{lm}^*}{n^2} \right] \\ &\quad - \omega^3 \frac{2\gamma^3 q^2}{\Omega_a^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q \mathcal{P}_{lm}^* + n \Omega_a \mathcal{L}_{lm}^*}{n^4} \\ &\quad - \omega^4 \left[ \frac{2\gamma^5 q^4}{\Omega_a^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_{lm}^*}{n^5} + \frac{2\gamma^3 q^3}{\Omega_a^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{lm}^*}{n^4} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19a})$$

$$\equiv \mathcal{Q}_{lm}^*, \quad (\text{B.19b})$$

wobei

$$\mathcal{N}_{lm}^* = \mathcal{N}_{lm} + n_{\parallel} B \begin{pmatrix} v_{\perp} z^{-2} n^2 J_n^2(z) & 0 & 0 \\ 0 & v_{\perp} J_n'^2(z) & 0 \\ 0 & i v_{\parallel} J_n(z) J_n'(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.20a})$$

$$\mathcal{P}_{lm}^* = \mathcal{P}_{lm} \quad (\text{B.20b})$$

$$\mathcal{L}_{lm}^* = \mathcal{L}_{lm} + \frac{n_{\parallel}}{z} B \begin{pmatrix} 0 & i v_{\perp} n J_n(z) J_n'(z) & 0 \\ -i v_{\perp} n J_n(z) J_n'(z) & 0 & 0 \\ v_{\parallel} n J_n^2(z) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.20c})$$

$$\mathcal{M}_{lm}^* = \mathcal{M}_{lm}. \quad (\text{B.20d})$$

Damit folgt

$$\zeta_{lm} = 4\pi i \omega \sigma_{lm} = 8\pi^2 \sum_a e_a^2 n_a \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \mathcal{Q}_{lm}^* \quad (\text{B.21a})$$

$$\equiv \rho_{lm}^* + \omega \mu_{lm}^* + \omega^2 \tau_{lm}^* + \omega^3 \phi_{lm}^* + \omega^4 \psi_{lm}^* + \dots \quad (\text{B.21b})$$

Die allgemeine Dispersionsrelation, Gl. (8.1), ist jetzt durch die die Faktoren, die  $k_{\parallel}$  enthalten, ebenfalls komplizierter. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 = & [\omega^2 (1 - n_{\parallel}^2 c^2) + \zeta_{xx}] [\omega^2 (1 - n_{\parallel}^2 c^2) - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{yy}] (\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{zz}) \\ & + \zeta_{xy} \zeta_{yz} \zeta_{zx} + \zeta_{xz} \zeta_{yx} \zeta_{zy} - \zeta_{xz} \zeta_{zx} [\omega^2 (1 - n_{\parallel}^2 c^2) - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{yy}] \\ & - \zeta_{zy} \zeta_{yz} [\omega^2 (1 - n_{\parallel}^2 c^2) + \zeta_{xx}] - \zeta_{yx} \zeta_{xy} (\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2 + \zeta_{zz}). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Berechnen wir Gleichung (B.22) in Potenzen von  $\omega$  aus, so erhalten wir mit Hilfe von Gl. (B.17)

$$\omega^2 E^*(k_{\perp}, n_{\parallel}) + F^*(k_{\perp}, n_{\parallel}) = 0, \quad (\text{B.23})$$

wobei jetzt  $E^*(k_{\perp}, n_{\parallel})$  und  $F^*(k_{\perp}, n_{\parallel})$  (komplizierte) Funktionen nicht nur von  $k_{\perp}$ , sondern auch von  $k_{\parallel}/\omega$  sind. Man beachte, dass, obwohl  $k_{\perp}$  reell ist,  $n_{\parallel} = k_{\parallel}/\omega$  im Allgemeinen komplex sein wird. Die weitere Berechnung von Gleichung (B.23) wird Inhalt zukünftiger Arbeiten sein.

### B.2.3 Der Fall endlicher $k_{\parallel}$ und $k_{\perp}$ für $\omega \rightarrow 0$

Dies ist bei Weitem der komplizierteste der drei betrachteten Grenzfälle bei der Suche nach Neutralpunkten und der Berechnung von Stabilität oder Instabilität in der Umgebung eines jeden solchen Neutralpunktes. Die Schwierigkeit bei der Berechnung von  $\mathcal{S}_{lm}$

geht auf den Faktor  $R \equiv [(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})\gamma - n\Omega_a]^{-1}$  im Nenner zurück. Nullstellen von  $R$  treten für

$$(k_{\parallel}^2c^2 - \omega^2) \frac{p_{\parallel}}{m_a c} = -k_{\parallel}c n\Omega_a \pm \{\omega^2 [\varepsilon_{\perp}^2 (k_{\parallel}^2c^2 - \omega^2) + n^2\Omega_a^2]\}^{1/2} \quad (\text{B.24})$$

auf, mit  $\varepsilon_{\perp}^2 = 1 + p_{\perp}^2/(m_a c)^2$ .

Falls  $\omega$  nicht rein reell ist, so gilt es zu beachten, dass in diesem Fall Gl. (B.24) für reelle  $p_{\parallel}$  nicht erfüllt werden kann, *es sei denn*, es gilt exakt  $\omega = 0$ . Eine Entwicklung von  $\mathcal{S}_{lm}$  in Potenzen von  $\omega$  um  $\omega = 0$  ist daher mit Schwierigkeiten behaftet, da man um einen singulären Nenner herum entwickelt. Genau diese Art von Schwierigkeiten tritt auch in der Berechnung von Integralen auf, wie sie in der Theorie der kinetischen Weibel-Instabilität in Abwesenheit eines Hintergrund-Magnetfeldes vorkommen – und zwar sowohl in der nichtrelativistischen (Weibel<sup>113</sup>) als auch in der relativistischen Situation (Schaefer-Rolffs et al.<sup>77</sup>).

In solchen Situationen hat man es mit Funktionen zu tun, die einen Nenner der Form  $(y^2 + \Gamma^2/k^2)^{-1}$  beinhalten und über den Bereich  $0 \leq y \leq \gamma$  integriert werden, wobei  $\Gamma = i\omega$  den Imaginärteil der Frequenz darstellt. Wird im Integranden  $\Gamma/k$  gleich Null gesetzt, *bevor* die Integration ausgeführt wird, so resultiert dies in einem in der Tat divergenten Integral mit einem Faktor  $\propto y^2$  im Nenner, welches für  $y \rightarrow 0$  eine wesentliche Singularität aufweist. Sowohl im Falle der nichtrelativistischen wie auch der relativistischen Weibel-Instabilität lag die Lösung darin, die Integration für endliches  $\Gamma^2/k^2$  auszuführen und erst anschließend, nach erfolgter Berechnung des Integrals, den Grenzfall  $\Gamma/k \rightarrow 0$  zu betrachten. Dieses Vorgehen stellt die korrekte und vollständige Lösung für das ansonsten singuläre Verhalten dar.

In unserem Fall, bei dem ein Hintergrund-Magnetfeld vorhanden ist, kann ein ähnliches Verfahren angewandt werden, obwohl die mathematischen Einzelheiten sehr schnell überaus kompliziert werden.

Das Grundprinzip der Argumentation ist wie folgt: Für jedes Integral, in dem  $R$  enthalten ist, schreibt man den Nenner mit  $p_{\parallel}$  und  $\gamma = [1 + (p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2)/(mc)^2]^{1/2}$  als Basiskoordinaten um, woraus sich ergibt

$$(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) \gamma - n\Omega_a = \omega\gamma - k_{\parallel}p_{\parallel} - n\Omega_a. \quad (\text{B.25})$$

Man muss jedoch vorsichtig sein – sowohl in Hinsicht auf die Integrationsgrenzen als auch auf die Verschiebung des Volumenelements im Phasenraum,  $dp_{\parallel}dp_{\perp}p_{\perp}$ , zu  $dp_{\parallel}d\gamma \mathcal{J}$ , wobei  $\mathcal{J}$  die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation bezeichnet.

Die allgemeine Struktur eines solchen Integrals ist dann von der Form

$$[\omega\gamma - k_{\parallel}p_{\parallel} - n\Omega_a]^{-1} F(\gamma, p_{\parallel}, n) \mathcal{J} dp_{\parallel} d\gamma \quad (\text{B.26})$$

über einen Bereich im  $(p_{\parallel}, \gamma)$ -Raum.

Den resonanten Nenner integriert man anschließend zweimal partiell über  $p_{\parallel}$ , wodurch die folgende Struktur entsteht

$$(x \ln x - x) \frac{\partial^2 F}{\partial p_{\parallel}^2} dp_{\parallel} d\gamma, \quad (\text{B.27})$$

mit  $x = p_{\parallel} - (\omega\gamma - n\Omega_a)/k_{\parallel}$ . Diese strukturelle Form ist für  $x \rightarrow 0$  nicht-singulär.

Das hier angedeutete Muster ist genau das gleiche, wie es in der allgemeinen Prozedur bei der Berechnung von Integralen auftritt, wie sie für Weibel-Moden vorkommen. Der hauptsächliche Unterschied besteht darin, dass wir es hier, im Vergleich zu Weibel-Moden in Abwesenheit eines Hintergrund-Magnetfeldes, mit schwer handhabbaren Ausdrücken zu tun haben, die sowohl durch das Magnetfeld als auch durch die in keiner Weise eingeschränkte Wellenausbreitung bedingt werden.

### B.3 Die Ausdrücke $E(k_{\perp})$ und $F(k_{\perp})$

Die Darstellungen von  $E(k_{\perp})$  und  $F(k_{\perp})$  in der Gleichung (B.17),  $\omega^2 E(k_{\perp}) + F(k_{\perp}) = 0$ , sind für beliebige Verteilungsfunktionen kompliziert und werden daher in diesem Anhang dargestellt.

Aus Gl. (B.17) erhält man  $E(k_{\perp})$  und  $F(k_{\perp})$ , unter Berücksichtigung von Gl. (B.15b), als

$$\begin{aligned}
 E(k_{\perp}) = & k_{\perp}^2 c^4 \psi_{xx} + \mu_{xy}^2 (1 + \tau_{zz}) - k_{\perp}^2 c^2 [2(1 + \tau_{xx} + \phi_{xy} \mu_{xy}) \\
 & + \psi_{xx} (\rho_{yy} + \rho_{zz}) + (\tau_{yy} + \tau_{zz}) (1 + \tau_{xx}) - \phi_{zx} \mu_{xz} - \phi_{xz} \mu_{zx}] \\
 & + (\rho_{yy} + \rho_{zz}) (1 + \tau_{xx}) + \tau_{yy} [\rho_{zz} (1 + \tau_{xx}) - \mu_{zx} \mu_{xz}] \\
 & + \tau_{zz} [\rho_{yy} (1 + \tau_{xx}) - \rho_{yz} \tau_{zy}] - \tau_{yz} [\rho_{zy} (1 + \tau_{xx}) - \mu_{xy} \mu_{zx}]
 \end{aligned} \tag{B.28a}$$

$$\begin{aligned}
 & + \psi_{xx} (\rho_{yy} \rho_{zz} - \rho_{yz} \rho_{zy}) + \phi_{zx} (\mu_{xy} \rho_{yz} - \mu_{xz} \rho_{yy}) - \phi_{xz} (\mu_{xy} \rho_{zy} + \mu_{zx} \rho_{yy}) \\
 & + \phi_{xy} (\mu_{xy} \rho_{yz} + 2\mu_{xy} \rho_{zz}) - \mu_{xz} (\mu_{zx} + \phi_{xy} \rho_{zy} + \mu_{xy} \tau_{zy}) - \rho_{yz} \tau_{zy} \\
 F(k_{\perp}) = & k_{\perp}^4 c^4 (1 + \tau_{xx}) - k_{\perp}^2 c^2 [\mu_{xy}^2 + (\rho_{yy} + \rho_{zz}) (1 + \tau_{xx}) - \mu_{xz} \mu_{zx}] \\
 & + (\rho_{yy} \rho_{zz} - \rho_{yz} \rho_{zy}) (1 + \tau_{xx}) + \rho_{zz} \mu_{xy}^2 + \rho_{yz} \mu_{xy} \mu_{zx} + \mu_{xz} (\mu_{yx} \rho_{zy} - \mu_{zx} \rho_{yy}).
 \end{aligned} \tag{B.28b}$$

Im Falle von in  $p_{\parallel}$  symmetrischen Verteilungsfunktionen fallen einige Terme weg, und aus den Gleichungen (B.28) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E_s(k_{\perp}) = & k_{\perp}^4 c^4 \psi_{xx} - k_{\perp}^2 c^2 [2(1 + \tau_{xx} + \phi_{xy} \mu_{xy}) + \psi_{xx} \rho_{zz} + (1 + \tau_{xx}) (\tau_{yy} + \tau_{zz})] \\
 & + (1 + \tau_{zz}) \mu_{xy}^2 + (1 + \tau_{xx}) [\rho_{zz} (1 + \tau_{yy})] + \phi_{xy} (\mu_{xy} \rho_{yz} + 2\mu_{xy} \rho_{zz})
 \end{aligned} \tag{B.29a}$$

$$\begin{aligned}
 F_s(k_{\perp}) = & k_{\perp}^4 c^4 (1 + \tau_{xx}) - k_{\perp}^2 c^2 [\mu_{xy}^2 + (\rho_{yy} + \rho_{zz}) (1 + \tau_{xx})] \\
 & + \rho_{zz} [\rho_{yy} (1 + \tau_{xx}) + \mu_{xy}^2]
 \end{aligned} \tag{B.29b}$$

$$= (\rho_{zz} - k_{\perp}^2 c^2) [(1 + \tau_{xx}) (\rho_{yy} - k_{\perp}^2 c^2) + \mu_{xy}^2]. \tag{B.29c}$$

Dieses für symmetrische Verteilungsfunktionen gültige Ergebnis wird im Hauptteil verwendet. Die in den Gleichungen (B.28) und (B.29) auftretenden Faktoren sind gegeben durch

$$\rho_{yy} = 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \hat{I} \frac{p_{\perp}^2}{\gamma_a} J_1^2(z_a) A \tag{B.30a}$$

$$\rho_{yz} = 2\pi i \sum_a \omega_{p,a}^2 \hat{I} \frac{p_\perp^2}{\gamma_a} J_0(z_a) J_1(z_a) \left( C - \frac{\Delta}{p_\perp} \right) \quad (\text{B.30b})$$

$$\rho_{zz} = 2\pi \sum_a \omega_{p,a}^2 \hat{I} \frac{p_\parallel p_\perp}{\gamma_a} \left[ J_0^2(z_a) C + \frac{1}{p_\perp} [1 - J_0^2(z_a)] \Delta \right] \quad (\text{B.30c})$$

$$\mu_{xy} = -\frac{2\pi i}{k_\perp} \sum_a \omega_{p,a}^2 m_a \hat{I} p_\perp J_0(z_a) J_1(z_a) A \quad (\text{B.30d})$$

$$\tau_{xx} = -\frac{2\pi}{k_\perp^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 m_a^2 \hat{I} \gamma_a [1 - J_0^2(z_a)] A \quad (\text{B.30e})$$

$$\tau_{yy} = -2\pi \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\Omega_a^2} \hat{I} \gamma_a p_\perp^2 A \left[ \frac{1}{2} - J_1^2(z_a) \right] \quad (\text{B.30f})$$

$$\tau_{zz} = -4\pi \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\Omega_a^2} \hat{I} \gamma_a p_\parallel p_\perp \left( C - \frac{\Delta}{p_\perp} \right) \Theta_a \quad (\text{B.30g})$$

$$\phi_{xy} = -4\pi i \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2 m_a}{k_\perp \Omega_a^2} \hat{I} p_\perp \gamma_a^2 A \Theta'_a \quad (\text{B.30h})$$

$$\psi_{xx} = -4\pi \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2 m_a^2}{k_\perp^2 \Omega_a^2} \hat{I} \gamma_a^3 A \Theta_a, \quad (\text{B.30i})$$

wobei  $\omega_{p,a} = (4\pi n_a q_a^2 / m_a)^{1/2}$  die Plasmafrequenz bezeichnet. Der Integral-Operator

$$\hat{I} g(p_\parallel, p_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp g(p_\parallel, p_\perp) \quad (\text{B.31})$$

wirkt auf von  $p_\parallel$  und  $p_\perp$  abhängige Funktionen. Weiterhin wurden für die Berechnung von  $\tau_{yy}$  die Relationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(z) = \frac{z^2}{4} \quad (\text{B.32a})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n'^2(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} J_1^2(z) \quad (\text{B.32b})$$

verwendet, die in Anhang C.2 hergeleitet werden.

Für die anderen unendlichen Reihen haben wir die folgenden Definitionen eingeführt

$$\Theta_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(z_a)}{n^2}, \quad (\text{B.33a})$$

$$\Theta'_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(z_a) J_n'(z_a)}{n^2} = \frac{m_a \Omega_a}{2k_\perp} \frac{\partial \Theta_a}{\partial p_\perp} \quad (\text{B.33b})$$

und

$$\Theta''_a = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_n''^2(z_a)}{n^2} + \frac{J_n(z_a) J_n''(z_a)}{n^2} \right] = \frac{m_a \Omega_a}{k_\perp} \frac{\partial \Theta'_a}{\partial p_\perp}, \quad (\text{B.33c})$$

was sich schreiben lässt als

$$\Theta_a'' = \frac{1}{2} [1 - J_0^2(z_a)] - \frac{\Theta_a' + z_a \Theta_a}{z_a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'^2(z_a)}{n^2}. \quad (\text{B.33d})$$

Diese drei Reihen können nicht in geschlossener Form geschrieben werden. Für numerische Rechnungen genügt es jedoch normalerweise völlig, die ersten etwa hundert Terme zu berücksichtigen, da diese bereits eine ausreichend gute Näherung darstellen. Die Summe  $\Theta_a''$  taucht zwar nicht in den Gleichungen (B.30) auf; sie wird jedoch dann benötigt, wenn man Ausdrücke mit  $\Theta_a'$  partiell integriert, wie dies im Abschnitt 8.3 getan wird.

---

# C Mathematischer Anhang

*Dieses Kapitel bietet eine Einführung und Übersicht zu in der Arbeit verwendeten speziellen Funktionen und unendlichen Reihen. Dabei werden ganz bewusst ausführliche und allgemeine Definitionen angegeben, auch wenn später nur Spezialfälle benötigt werden.*

## C.1 Besselfunktionen

Die *Besselfunktionen* erster Art,  $J_\nu(z)$ , ergeben sich als Lösung der Besselschen Differentialgleichung (siehe z. B. Abramowitz und Stegun<sup>1</sup>), welche die Form hat

$$z^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + z \frac{dw(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) w(z) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Eine Integraldarstellung lautet

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi d\theta \cos(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta. \quad (\text{C.2})$$

Im Falle eines ganzzahligen Index'  $\nu = n \in \mathbb{N}$  vereinfacht sich dies zu

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta). \quad (\text{C.3})$$

Einige der wichtigsten Eigenschaften der Besselfunktionen erster Art sind

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (\text{C.4a})$$

$$J_n(z) = \frac{z}{2n} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] \quad (\text{C.4b})$$

$$J'_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (\text{C.4c})$$

$$J'_0(z) = -J_1(z) \quad (\text{C.4d})$$

und

$$e^{\pm iz \sin \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{\pm in\alpha}, \quad (\text{C.4e})$$

wobei die letzte Eigenschaft bei der Berechnung beispielsweise von Transportkoeffizienten (Kap. 2) oder bei der Entwicklung der Neutralpunkte-Methode (Kap. 7) der Grund für die Einführung der Besselfunktionen ist.

Die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art,  $I_{\pm\nu}(z)$  und  $K_{\nu}(z)$  sind die Lösungen der modifizierten Besselschen Differenzialgleichung, welche lautet

$$z^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + z \frac{dw(z)}{dz} - (z^2 + \nu^2) w(z) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Integraldarstellungen von  $I_{\nu}(z)$  und  $K_{\nu}(z)$  lauten

$$I_{\pm\nu}(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} d\theta e^{\pm z \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta \quad (\text{C.6a})$$

$$K_{\nu}(z) = \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} dt e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}. \quad (\text{C.6b})$$

Die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art werden beispielsweise in den Kapiteln 6.4 und 7.4 benötigt.

## C.2 Reihen von Besselfunktionen

In diesem Abschnitt berechnen wir die Reihen  $\sum n^2 J_n^2(z)$  und  $\sum J_n'^2(z)$ , die wir in Kapitel 8 benötigen. Der Summationsindex läuft dabei stets von  $n = 1$  bis  $n = \infty$ .

### C.2.1 Die Reihe $\sum n^2 J_n^2(z)$

Zunächst verwendet man (s. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup>)

$$J_0(z \sin \alpha) = J_0^2\left(\frac{z}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2\left(\frac{z}{2}\right) \cos(2n\alpha). \quad (\text{C.7})$$

Durch Differenzieren nach  $\alpha$  erhält man daraus

$$-J_1(z \sin \alpha) z \cos \alpha = -4 \sum_{n=1}^{\infty} n J_n^2\left(\frac{z}{2}\right) \sin(2n\alpha). \quad (\text{C.8})$$

Nochmaliges Differenzieren nach  $\alpha$  ergibt

$$\begin{aligned} & - \left[ J_0(z \sin \alpha) - \frac{J_1(z \sin \alpha)}{z \sin \alpha} \right] z^2 \cos^2 \alpha + J_1(z \sin \alpha) z \sin \alpha \\ & = -8 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2\left(\frac{z}{2}\right) \cos(2n\alpha). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Aus Gl. (C.9) erhalten wir daher im Falle  $\alpha \rightarrow 0$  und unter Verwendung des Grenzübergangs

$$\frac{J_1(z \sin \alpha)}{z \sin \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad (\text{C.10})$$



unmittelbar für die gesuchte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(z) = \frac{z^2}{4}. \quad (\text{C.11})$$

### C.2.2 Die Reihe $\sum J_n'^2(z)$

Zweimaliges Differenzieren der Identität

$$1 = J_0^2(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(z) \quad (\text{C.12})$$

nach  $z$  ergibt:

$$0 = J_0(z)J_0''(z) + J_0'^2(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)J_n''(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n'^2(z) \quad (\text{C.13a})$$

$$= -J_0^2(z) + \frac{J_0(z)J_1(z)}{z} + J_1^2(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)J_n''(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n'^2(z). \quad (\text{C.13b})$$

Löst man die Besselsche Differentialgleichung

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0 \quad (\text{C.14})$$

nach  $J_n''(z)$  auf, so ergibt der dritte Term auf der rechten Seite von Gl. (C.13a)

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)J_n''(z) = -\frac{2}{z} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)J_n'(z) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(z) + \frac{2}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(z) \quad (\text{C.15a})$$

$$= -\frac{J_0(z)J_1(z)}{z} - [1 - J_0^2(z)] + \frac{1}{2}, \quad (\text{C.15b})$$

wobei sich die erste Summe durch Differenzieren der zweiten berechnet; die zweite Summe ergibt sich durch Umformen von Gl. (C.12). Die dritte Summe wiederum ist durch Gl. (C.11) gegeben.

Dieses Ergebnis setzt man nun in Gl. (C.13b) ein und erhält damit schließlich für die gesuchte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n'^2(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} J_1^2(z). \quad (\text{C.16})$$

## C.3 Kapteyn-Reihen

Dieser Abschnitt basiert auf Anhang E in Shalchi<sup>86</sup>.

Reihen über Besselfunktionen, in denen über die Ordnung summiert wird und diese ebenfalls im Argument erscheint, die also von der Form  $\sum_n n^{-s} f(J_n(nz))$  sind, werden in der Literatur (z. B. Watson<sup>112</sup>) als *Kapteyn-Reihen*<sup>36</sup> bezeichnet.

Wir beschränken uns auf den Fall von Besselfunktion erster Art,  $J_n(x)$ , da wir in den Kapiteln 3 und 4 nur diese benötigen.

### C.3.1 Die Reihe $\sum n^{-s} J_n^2(nz)$

Zur Berechnung der Reihe für kleine Argumente  $z \lesssim 1$  verwenden wir nach Shalchi<sup>86</sup> zunächst zwei Integraldarstellungen der Besselfunktionen (s. Watson<sup>112</sup>, S. 150 und S. 20):

$$J_n^2(nz) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2n}(2nz \cos \theta) \quad (\text{C.17a})$$

$$J_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \cos(n\phi - y \sin \phi). \quad (\text{C.17b})$$

Damit folgt für die betrachtete Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi d\phi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \cos[n(2\phi - 2z \cos \theta \sin \phi)]. \quad (\text{C.18})$$

Mit Hilfe von Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup>,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \cos(nx) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \left( \frac{x}{2\pi} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (\text{C.19})$$

wobei  $B_{2k}(x)$  die Bernoulli-Polynome bezeichnet, ergibt sich schließlich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} J_n^2(nz) = -(-4)^k \sum_{m=0}^{2k} \frac{\pi^{m-2} B_m}{m!(2k-m)!} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi d\phi [\phi - z \cos \theta \sin \phi]^{2k-m}. \quad (\text{C.20})$$

Die Bernoulli-Polynome sind durch die generierende Gleichung

$$\frac{t e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \quad (\text{C.21})$$

gegeben; die Bernoulli-Zahlen wiederum sind durch  $B_n \equiv B_n(0)$  definiert.

Das Integral (C.20) lässt sich exakt lösen, allerdings beinhaltet dies keine wesentliche Vereinfachung. Jedoch ergibt sich für  $k \simeq 1$  (und damit  $s \simeq 2$ ), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz) \simeq \frac{z^2}{4}, \quad s \gtrless 2 \quad (\text{C.22})$$

eine sehr gute Näherung darstellt, falls  $s$  nicht zu stark von 2 abweicht. Für  $s = 2$  gilt Gl. (C.22) exakt.

Für  $z \gg 1$  entwickeln wir die Besselfunktionen für große Argumente (s. Abramowitz und Stegun<sup>1</sup>):

$$J_n^2(nz) \simeq \frac{2}{\pi n z} \cos^2 \left( n z - \frac{(2n+1)\pi}{4} \right) \quad (\text{C.23a})$$

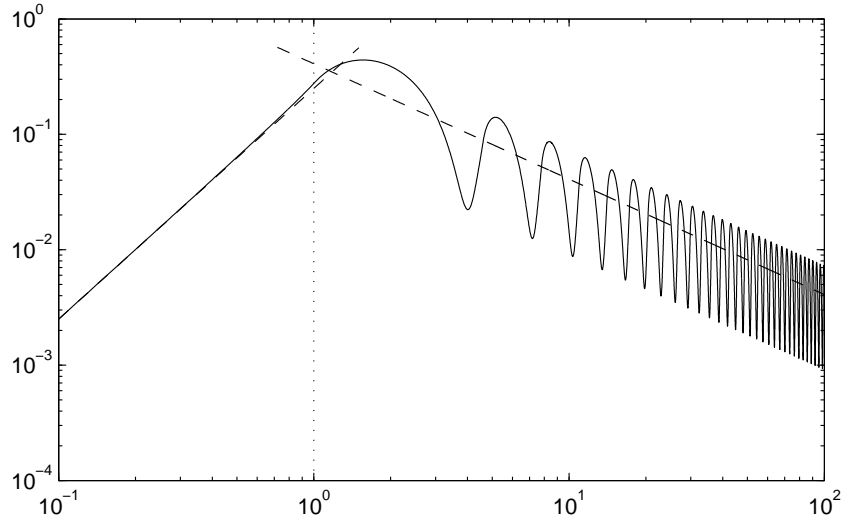


Abbildung C.1: Die Kapteyn-Reihe (C.24) (durchgezogene Linie) mit den angegebenen Näherungen (gestrichelte Linien) für  $s = 5/3$

$$= \frac{1}{\pi n z} \left[ 1 + \cos \left( 2n z - \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.23b})$$

Somit folgt insgesamt, indem wir den oszillierenden Anteil der Näherung für große Argumente weglassen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz) \simeq \begin{cases} \frac{z^2}{4}, & z \lesssim 1 \\ \frac{\zeta(s+1)}{\pi z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Dies ist in Abbildung C.1 dargestellt. Für ein Integral über  $z$  von 0 bis  $\infty$  lässt sich der Integrand daher nun in zwei Anteile aufspalten, wobei jeweils die entsprechenden Näherungen eingesetzt werden.

### C.3.2 Die Reihe $\sum n^{-s} J_{n+1}(nz) J_{n-1}(nz)$

Für diese Reihe verwenden wir zunächst die Umformung (s. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup>)

$$J_{n+1}(nz) J_{n-1}(nz) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi J_{2n}(2nz \cos \phi) \cos 2\phi. \quad (\text{C.25})$$

und erhalten damit für  $k \in \mathbb{Z}$

$$T_k(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} J_{n+1}(nz) J_{n-1}(nz) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} J_{2n}(2nz \cos \phi). \quad (\text{C.26})$$

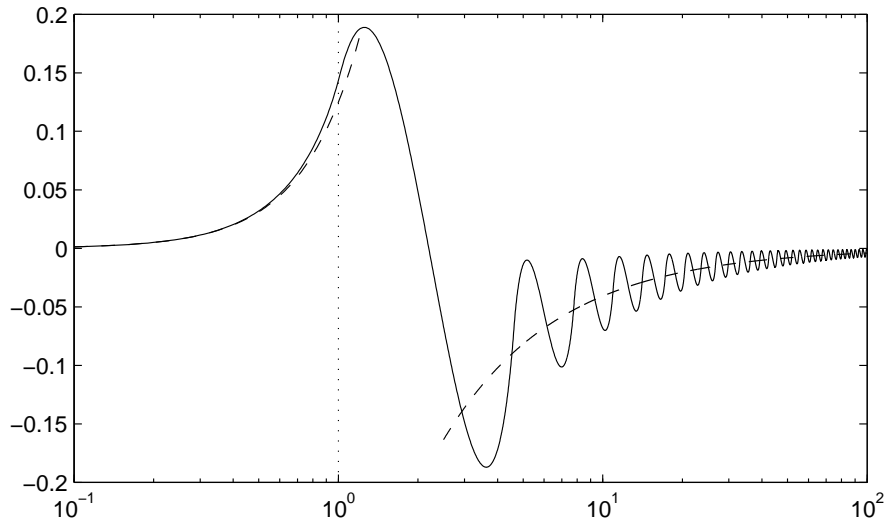


Abbildung C.2: Die Kapteyn-Reihe (C.31) (durchgezogene Linie) mit den angegebenen Näherungen (gestrichelte Linien) für  $s = 5/3$

Mit Hilfe der Gleichungen (C.17b) und (C.19) ergibt sich die Integraldarstellung der Reihe

$$T_k(z) = -(-4)^k \sum_{m=0}^{2k} \frac{\pi^{m-2} B_m}{m!(2k-m)!} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \cos 2\theta (\phi - z \cos \theta \sin \phi)^{2k-m}. \quad (\text{C.27})$$

Für  $s > 1$  und  $z \lesssim 1$  folgt wieder eine näherungsweise Lösung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_{n+1}(nz) J_{n-1}(nz) \simeq \frac{z^2}{8}. \quad (\text{C.28})$$

Wiederum gilt dies für  $s = 2$  exakt.

Für  $z \gg 1$  entwickeln wir die Besselfunktionen für große Argumente (s. Abramowitz und Stegun<sup>1</sup>):

$$J_{n+1}(nz) J_{n-1}(nz) \simeq \frac{2}{\pi n z} \cos\left(nz - \frac{(2n+1)\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(nz - \frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{C.29a})$$

$$= \frac{2}{\pi n z} \left[ \cos^2\left(nz - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2\left(nz - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \sin^2 \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{C.29b})$$

$$= -\frac{1}{\pi n z} \left[ 1 - \cos\left(2nz - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \right]. \quad (\text{C.29c})$$

Indem wir die oszillierenden Anteile jeweils weglassen, erhalten wir somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz) \simeq -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_{n+1}(nz) J_{n-1}(nz) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-s-1}}{\pi z} = \frac{\zeta(s+1)}{\pi z}, \quad (\text{C.30})$$

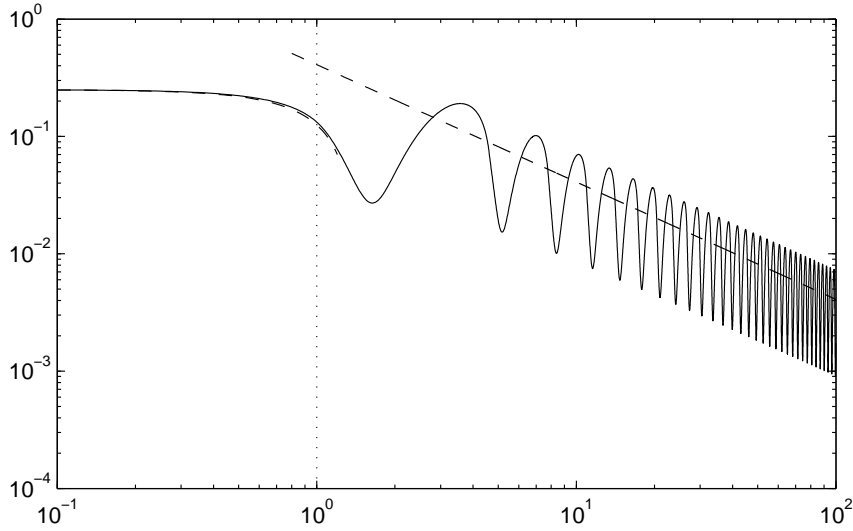


Abbildung C.3: Die Kapteyn-Reihe (C.35) (durchgezogene Linie) mit den angegebenen Näherungen (gestrichelte Linien) für  $s = 5/3$

wobei  $\zeta(p)$  die Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet (s. Anhang C.5). Für einen Spektralindex von  $s = 5/3$  ergibt sich  $\zeta(s + 1) \simeq 1,284$ .

Somit ergeben die hergeleiteten Näherungen der Kapteyn-Reihe für kleine Argumente  $z \lesssim 1$  und große Argumente  $z \gg 1$  insgesamt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_{n+1}(nz) J_{n-1}(nz) \simeq \begin{cases} \frac{z^2}{8}, & z \lesssim 1 \\ -\frac{\zeta(s+1)}{\pi z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

Gleichung (C.31) ist in Abbildung C.2 dargestellt.

### C.3.3 Die Reihe $\sum n^{-s} J_n'^2(nz)$

Betrachtet man diese Reihe näher, so erkennt man unter Verwendung von

$$2J_n'(nz) = J_{n-1}(nz) - J_{n+1}(nz) \quad (\text{C.32a})$$

$$\frac{2}{z} J_n(nz) = J_{n-1}(nz) + J_{n+1}(nz), \quad (\text{C.32b})$$

dass sie sich aufspalten lässt in

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n'^2(nz) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n^2(nz) - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_{n+1}^2(nz) J_{n-1}^2(nz). \quad (\text{C.33})$$

Mit der Entwicklung der Ableitung der Besselfunktion für große Argumente,

$$J_n'^2(nz) \simeq \frac{2}{\pi n z} \sin^2\left(nz - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \quad (\text{C.34a})$$

$$= \frac{1}{\pi n z} \left[ 1 - \cos \left( 2n z - \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \right] \quad (\text{C.34b})$$

und den vorangegangenen beiden Abschnitten folgt damit unmittelbar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} J_n'^2(nz) \simeq \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{z^2}{8}, & z \lesssim 1 \\ \frac{\zeta(s+1)}{\pi z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

Diese Reihe ist zusammen mit den Näherungen in Abbildung C.3 dargestellt.

## C.4 Die Eulersche Beta-Funktion

Die *Eulersche Beta-Funktion* ist definiert durch einen Quotienten von Gamma-Funktionen:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1}. \quad (\text{C.36})$$

Dabei gilt  $B(a, b) = B(b, a)$ .

Bei der unvollständigen Beta-Funktion (*incomplete Beta function*) ist die obere Integralgrenze verschieden von 1:

$$B_z(a, b) = \int_0^z dt t^{a-1} (1-t)^{b-1}. \quad (\text{C.37})$$

Der Vollständigkeit halber sei noch die verallgemeinerte unvollständige Beta-Funktion (*generalized incomplete Beta function*) angegeben,

$$B(z_0, z, a, b) = \int_{z_0}^z dt t^{a-1} (1-t)^{b-1}, \quad (\text{C.38})$$

sowie die normierte Beta-Funktion:

$$\bar{B}_z(a, b) = \frac{B_z(a, b)}{B(a, b)}, \quad z \in [0, 1]. \quad (\text{C.39})$$

Für spezielle Parameter (s. Kap. 3.2.1) ist die Beta-Funktion in Abb. C.4 dargestellt.

## C.5 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Die Integraldarstellung der *Riemanschen Zeta-Funktion* lautet (s. Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup>)

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1-2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{z-1}}{e^t + 1}, \quad (\text{C.40})$$

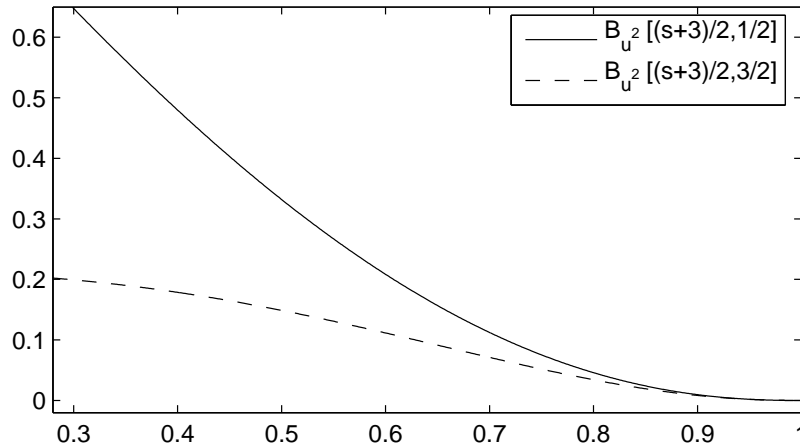


Abbildung C.4: Die Eulersche Beta-Funktion für die speziellen Parameter  $u^2$ ,  $(s+3)/2$  und  $1/2$  bzw.  $3/2$ , wobei  $s = 5/3$ .

für  $\Re(z) > 0$ .

Jeweils eine Summen- und Produktdarstellung sind gegeben durch

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{C.41}$$

$$\zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-z}}, \tag{C.42}$$

beide gültig für  $\Re(z) > 1$ . Das Produkt erstreckt sich über alle *Primzahlen*  $p$ .

## C.6 Die hypergeometrische Funktion

Bei der *verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion*,  $F(n, d, z)$  bzw.  ${}_pF_q(n, d, z)$ , werden  $n = [n_1, n_2, \dots]$  als die oberen Parameter und  $d = [d_1, d_2, \dots]$  als die unteren Parameter bezeichnet. Führen wir weiterhin  $p = \dim n$  und  $q = \dim d$  ein, so ist  ${}_pF_q$  definiert durch

$${}_pF_q(n; d; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \prod_{i=1}^p (n_i)_k \left( \prod_{j=1}^q (d_j)_k \right)^{-1}, \tag{C.43}$$

wobei  $(x)_k$  das sog. *Pochhammer-Symbol* bezeichnet:

$$(x)_k = \frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(x)}. \tag{C.44}$$

Oft benötigt man die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$ , für die im Falle  $\Re(c) > \Re(b) > 0$  eine Integraldarstellung lautet

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}. \tag{C.45}$$

Weitere Integraldarstellungen und viele Beispiele für spezielle Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  finden sich in Abramowitz und Stegun<sup>1</sup> sowie in Gradshteyn und Ryzhik<sup>28</sup>.

Integrale über Kombinationen von Potenzen, Exponential- und Besselfunktionen führen auf die *regularisierte hypergeometrische Funktion*  ${}_2F_2$ :

$$\int_0^{\infty} dz z^n e^{-z^2/\xi^2} J_{\alpha}(z) J_{-\alpha}(z) = \frac{\xi^{n+1}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{{}_2F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}; 1+\alpha, 1-\alpha; -\xi^2\right)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, \quad (\text{C.46})$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$ . Das in Kap. 6 benötigte Integral enthält die Funktion

$$S(\alpha, z) = -\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) J_{\alpha}(z) J_{-\alpha}(z). \quad (\text{C.47})$$

Daher erhalten wir den allgemeinen Ausdruck

$$\int_0^{\infty} dz z^n e^{-z^2/\xi^2} S(\alpha, z) = -\frac{\xi^{n+1}}{2\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}; 1+\alpha, 1-\alpha; -\xi^2\right). \quad (\text{C.48})$$

Die Taylor-Entwicklung der hypergeometrischen Funktion für kleine Argumente  $\xi$  ergibt

$$\hat{F}(n) \simeq 1 - \frac{n\xi^2}{4(1+\alpha)(1-\alpha)} + \frac{3n(n+1)\xi^4}{8(1-\alpha)(2-\alpha)(1+\alpha)(2+\alpha)} + \mathcal{O}(\xi^6), \quad (\text{C.49})$$

wobei wir zur Abkürzung folgende Notation verwenden:

$$\hat{F}(n) = {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, n; 1+\alpha, 1-\alpha; -\xi^2\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.50})$$

Im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$ , entsprechend  $\omega \rightarrow 0$  und/oder  $B_0 \rightarrow \infty$ , vereinfacht sich die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_2$  zu

$$\hat{F}(n)\Big|_{\alpha=0} = \begin{cases} I_0\left(\frac{\xi^2}{2}\right) e^{-\xi^2/2}, & n = 1 \\ \frac{1}{2} \left[ (2 - \xi^2) I_0\left(\frac{\xi^2}{2}\right) + \xi^2 I_1\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \right] e^{-\xi^2/2}, & n = 2 \\ \frac{1}{4} \left[ (2 - \xi^2)^2 I_0\left(\frac{\xi^2}{2}\right) + \xi^2 (3 - \xi^2) I_1\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \right] e^{-\xi^2/2}, & n = 3. \end{cases} \quad (\text{C.51})$$



# Literaturverzeichnis

Die nachfolgenden Quellenverweise erscheinen in alphabetischer Reihenfolge. Im Sinne größerer Übersichtlichkeit sind Buch- und Zeitschriftentitel kursiv sowie der Jahrgang letzterer in Fettdruck angegeben.

1. Abramowitz, M. und Stegun, I.: *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover Publications, New York, 1974)
2. Bekefi, G.: *Radiation Processes in Plasmas* (Wiley, New York, 1966)
3. Bieber, J.W. und Matthaeus, W.H.: Dominant two-dimensional solar wind turbulence with implications for cosmic ray transport, *Journal of Geophysical Research* **101**, S. 2511, 1996
4. Bieber, J.W. und Matthaeus, W.H.: Perpendicular Diffusion and Drift at Intermediate Cosmic-Ray Energies, *The Astrophysical Journal* **485**, S. 655, 1997
5. Bieber, J.W., Matthaeus, W.H., Smith, C.W., Wanner, W., Kallenrode, M.-B. und Wibberenz, G.: Proton and electron mean free paths: The Palmer Consensus revisited, *The Astrophysical Journal* **420**, S. 294, 1994
6. Bieber, J.W., Smith, C.W. und Matthaeus, W.H.: Cosmic-ray pitch-angle scattering in isotropic turbulence, *The Astrophysical Journal* **334**, S. 470, 1988
7. Bornatici, M. und Lee, K.F.: Ordinary-Mode Electromagnetic Instability in Counterstreaming Plasmas with Anisotropic Temperatures, *Physics of Fluids* **13**, S. 3007, 1970
8. Brainerd, J.J.: A Plasma Instability Theory of Gamma-Ray Burst Emission, *The Astrophysical Journal* **538**, S. 628, 2000
9. Brambilla, M.: *Kinetic theory of plasma waves* (Clarendon, London, 1998)
10. Bruno, R. und Carbone, V.: The Solar Wind as a Turbulence Laboratory, *Living Reviews in Solar Physics* **2**, 2006 (zitiert am 14.06.2006)  
(URL: [www.livingreviews.org/lrsp-2005-4](http://www.livingreviews.org/lrsp-2005-4))
11. Casse, F., Lemoine, M. und Pelletier, G.: Transport of cosmic rays in chaotic magnetic fields, *Physical Review D* **65**, S. 023002, 2002
12. Candia, J. und Roulet, E.: Diffusion and drift of cosmic rays in highly turbulent magnetic fields, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **10**, S. 007, 2004

13. Chandran, B.D.G.: Scattering of Energetic Particles by Anisotropic Magnetohydrodynamic Turbulence with a Goldreich-Sridhar Power Spectrum, *Physical Review Letters* **85**, S. 4656, 2000
14. Corrsin, S., in *Atmospheric Diffusion and Air Pollution*, hrsg. v. Frenkiel, F. und Sheppard, P., S. 161 (New York, Academic Press, 1959)
15. Crooker, N.U., Forsyth, R., Rees, A., Gosling, J.T. und Kahler, S.W.: Counterstreaming electrons in magnetic clouds near 5 AU, *Journal of Geophysical Research* **109**, S. A06110, 2004
16. Davidson, R.C., in *Handbook of Plasma Physics*, hrsg. v. Rosenbluth, M.N. und Sagdeev, R.Z., Vol. 1, S. 519, (North-Holland Publishing Company, 1983)
17. Davidson, R.C., Kaganovich, I., Qin, H., et al.: Collective instabilities and beam-plasma interactions in intense heavy ion beams, *Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams* **7**, S. 114801, 2004
18. Denskat, K.U. und Neubauer, F.M.: Statistical properties of low-frequency magnetic field fluctuations in the solar wind from 0.29 to 1.0 AU during solar minimum conditions – HELIOS 1 and HELIOS 2, *Journal of Geophysical Research* **87**, S. 2215, 1982
19. Denskat, K.U., Beinroth, H. J. und Neubauer, F.M.: Interplanetary magnetic field power spectra with frequencies from  $2.4 \cdot 10^{-5}$  Hz to 470 Hz from HELIOS-observations during solar minimum conditions 1983, *Journal of Geophysics* **54**, S. 60, 1983
20. Duffy, P. und Blundell, K.M.: Cosmic ray transport and acceleration, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **47**, S. B667, 2005
21. Earl, J.A.: The diffusive idealization of charged-particle transport in random magnetic fields, *The Astrophysical Journal* **74**, S. 193, 1974
22. Fisk, L.A., Goldstein, M.L., Klimas, A.J. und Sandri, G.: The Fokker-Planck Coefficient for Pitch-Angle Scattering of Cosmic Rays, *The Astrophysical Journal* **190**, S. 417, 1974
23. Fried, B.D.: Mechanism for Instability of Transverse Plasma Waves, *Physics of Fluids* **2**, S. 337, 1959
24. Fried, B.D. und Conte, S.D.: *The Plasma Dispersion Function* (Academic, New York, 1961)
25. Giacalone, J. und Jokipii, J.R.: The transport of cosmic rays across a turbulent magnetic field, *The Astrophysical Journal* **520**, S. 204, 1999
26. Goldreich, P. und Sridhar, S.: Toward a theory of interstellar turbulence. 2: Strong Alfvénic turbulence, *The Astrophysical Journal* **438**, S. 763, 1995

- 
27. Goldstein, M. L., Wong, H. K. und Viñas, A. F.: Large-amplitude MHD waves upstream of the Jovian bow shock Reinterpretation, *Journal of Geophysical Research* **90**, S. 302, 1985
  28. Gradshteyn, I. S. und Ryzhik, I. N.: *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 2000)
  29. Hall, D. E. und Sturrock, P. A.: Diffusion, Scattering, and Acceleration of Particles by Stochastic Electromagnetic Fields, *Physics of Fluids* **10**, S. 2620, 1967
  30. Harris, E. G.: Unstable Plasma Oscillations in a Magnetic Field, *Physical Review Letters* **2**, S. 34, 1959
  31. Hasselmann, K. und Wibberenz, G.: Scattering of Charged Particles by Random Electromagnetic Fields, *Zeitschrift für Geophysik* **34**, S. 353, 1968
  32. Huba, J. D.: *NRL Plasma Formulary* (Naval Research Laboratory, Washington D. C., 2004)
  33. Humphries, S.: *Charged Particle Beams* (Wiley and Sons, New York, 1986)
  34. Jokipii, J. R.: Cosmic ray propagation. I. Charged particles in a random magnetic field, *The Astrophysical Journal* **146**, S. 480, 1966
  35. Jokipii, J. R., Kota, J. und Giacalone, J.: Perpendicular transport in 1- and 2-dimensional shock simulations, *Geophysical Research Letters* **20**, S. 1759, 1993
  36. Kapteyn, W.: Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **10**, S. 91, 1893
  37. Kato, T. N.: Saturation mechanism of the Weibel instability in weakly magnetized plasmas, *Physics of Plasmas* **12**, S. 080705, 2005
  38. Kennel, C. F. und Engelmann, F.: Velocity Space Diffusion from Weak Plasma Turbulence in a Magnetic Field, *Physics of Fluids* **9**, S. 2377, 1966
  39. Kóta, J. und Jokipii, J. R.: Velocity Correlation and the Spatial Diffusion Coefficients of Cosmic Rays: Compound Diffusion, *The Astrophysical Journal* **531**, S. 1067, 2000
  40. Krupp, N., Woch, J., Lagg, A., Livi, S., Mitchell, D. G., Krimigis, S. M., Dougherty, M. K., Hanlon, P. G., Armstrong, T. P. und Espinosa, S. A.: Energetic particle observations in the vicinity of Jupiter: Cassini MIMI/LEMMS results, *Journal of Geophysical Research* **109**, S. A09S10, 2004
  41. Kubo, R.: Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems, *Physical Society of Japan* **12**, S. 570, 1957

42. Lakhina, G. S. und Buti, B.: Relativistic Streaming Effects on Electromagnetic Instability in Magnetoplasmas, *Physical Review A* **5**, S. 1846, 1972
43. Lee, K. F. und Armstrong, J. C.: Ordinary-Mode Electromagnetic Instability in Colliding Plasma Streams, *Physical Review A* **4**, S. 2087, 1971
44. Lee, M. A. und Völk, H. J.: Hydromagnetic waves and cosmic-ray diffusion theory, *The Astrophysical Journal* **198**, S. 485, 1975
45. Lerche, I.: Transverse Waves in a Relativistic Plasma, *Physics of Fluids* **9**, S. 1073, 1966
46. Lerche, I.: Quasilinear Theory of Resonant Diffusion in a Magneto-Active, Relativistic Plasma, *Physics of Fluids* **11**, S. 1720, 1968
47. Lerche, I.: A Note on Summing Series of Bessel Functions Occurring in Certain Plasma Astrophysical Situations, *The Astrophysical Journal* **190**, S. 165, 1974
48. Liu, L.-H., in *Nonlinear Space Plasma Physics*, hrsg. v. Zagdeev, R. Z. (AIP Press, 1993)
49. Lobzin, V. V., Krasnoselskikh, V. V., Schwartz, S. J., Cairns, I., Lefebvre, B., Décréau, P. und Fazakerley, A.: Generation of downshifted oscillations in the electron foreshock: A loss-cone instability, *Geophysical Research Letters* **32**, S. L18101, 2005
50. Louis, D.: *C/C++ Kompendium* (Markt+Technik Verlag, München, 2004)
51. Lyubarsky, Y. und Eichler, D.: Are GRB shocks mediated by the Weibel instability?, ePrint (arXiv:[astro-ph/0512579](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0512579))
52. Mann, G. und Klassen, A.: Electron beams generated by shock waves in the solar corona, *Astronomy & Astrophysics* **441**, S. 319, 2005
53. Martín, P. und González, M. A.: New two-pole approximation for the plasma dispersion function  $Z$ , *Physics of Fluids* **22**, S. 1413, 1979
54. Matthaeus, W. H., Qin, G., Bieber, J. W. und Zank, G. P.: Nonlinear collisionless perpendicular diffusion of charged particles, *The Astrophysical Journal* **590**, S. L53, 2003
55. Medvedev, M. V. und Loeb, A.: Generation of Magnetic Fields in the Relativistic Shock of Gamma-Ray Burst Sources, *The Astrophysical Journal* **526**, S. 697, 1999
56. Medvedev, M. V., Fiore, M., Fonseca, R. A., et al.: Long-Time Evolution of Magnetic Fields in Relativistic Gamma-Ray Burst Shocks, *The Astrophysical Journal* **618**, S. L78, 2005
57. Mészáros, P.: Theories of Gamma-Ray Bursts, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **40**, S. 137, 2002

- 
58. Melrose, D. B. und Dulk, G. A.: Electron-cyclotron masers as the source of certain solar and stellar radio bursts, *The Astrophysical Journal* **259**, S. 844, 1982
  59. Michalek, G.: On the cosmic ray cross-field diffusion for solar wind turbulence, *Astronomy & Astrophysics* **376**, S. 667, 2001
  60. Michalek, G. und Ostrowski, M.: Cosmic ray momentum diffusion in the presence of non-linear Alfvén waves, *Nonlinear Proceedings in Geophysics* **3**, S. 66, 1996
  61. Minnie, J.: *Observational Constraints on the Heliospheric Diffusion Tensor for Galactic Cosmic Rays* M.A.-Thesis, Universität Potchefstroom, Südafrika, 2002
  62. Mishra, R. und Tiwari, M. S.: Effect of parallel electric field on electrostatic ion-cyclotron instability in anisotropic plasma in the presence of ion beam and general distribution function – Particle aspect analysis, *Planetary and Space Science* **54**, S. 188, 2006
  63. Nördlinger, P. D.: Growing Transverse Waves in a Plasma in a Magnetic Field, *Annals of Physics* **22**, S. 12, 1963
  64. Parker, E. N.: The passage of energetic charged particles through interplanetary space, *Planetary and Space Science* **13**, S. 9, 1965
  65. Piran, T.: Gamma-ray bursts—a puzzle being resolved, *Physics Reports* **333**, S. 529, 2000
  66. Piran, T.: The physics of gamma-ray bursts, *Review of Modern Physics* **76**, S. 1143, 2004
  67. Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. und Vetterling, W. T.: *Numerical recipes* (Cambridge University Press, 1986)
  68. Pritchett, P. L.: Particle-in-cell simulation of plasmas, Space plasma simulation: proceedings of the Sixth International School/Symposium, ISSS-6, Garching, Germany, 3-7 September, 2001. Edited by J. Büchner, C. T. Dum, and M. Scholer. Berlin: Schaltungsdienst Lange o.H.G., 2001., S. 1
  69. Qin, G., Dissertation, University of Delaware, Vereinigte Staaten von Amerika, 2002
  70. Qin, G., Matthaeus, W. H. und Bieber, J. W.: Subdiffusive transport of charged particles perpendicular to the large scale magnetic field, *Geophysical Research Letters* **29**, S. 7-1, 2002
  71. Qin, G., Matthaeus, W. H. und Bieber, J. W.: Perpendicular Transport of Charged Particles in Composite Model Turbulence: Recovery of Diffusion, *The Astrophysical Journal* **578**, S. L117, 2002
  72. Reville, B., Kirk, J. G. und Duffy, P.: A current driven instability in parallel, relativistic shocks, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, eingereicht

73. Riemann, K.-U.: *Einführung in die theoretische Plasmaphysik* (Vorlesung an der Ruhr-Universität Bochum, 2002-03)
74. Rosenbluth, M.N., MacDonald, W.M. und Judd, D.L.: Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force, *Physical Review* **107**, S. 1, 1957
75. Saito, S. und Sakai, J.-I.: The Emission of Electromagnetic Waves from the Counterstreaming Region in Magnetized Pair Plasmas, *The Astrophysical Journal* **602**, S. L41, 2004
76. Sakai, J.-I., Schlickeiser, R. und Shukla, P.K.: Simulation studies of the magnetic field generation in cosmological plasmas, *Physics Letters A* **330**, S. 384, 2004
77. Schaefer-Rolffs, U., Lerche, I. und Schlickeiser, R.: The relativistic kinetic Weibel instability: General arguments and specific illustrations, *Physics of Plasmas* **13**, S. 012107, 2006
78. Schaefer-Rolffs, U. und Schlickeiser, R.: Covariant kinetic dispersion theory of linear waves in anisotropic plasmas. II. Comparison of covariant and noncovariant growth rates of the nonrelativistic Weibel instability, *Physics of Plasmas* **12**, S. 022104, 2005
79. Schlickeiser, R., Jaekel, U. und Dung, R.: Interplanetary transport of solar cosmic rays and dissipation of Alfvén waves, *Astronomy & Astrophysics* **242**, S. L5, 1991
80. Schlickeiser, R.: *Cosmic Ray Astrophysics* (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2003)
81. Schlickeiser, R.: Covariant kinetic dispersion theory of linear waves in anisotropic plasmas. I. General dispersion relations, bi-Maxwellian distributions and nonrelativistic limits, *Physics of Plasmas* **11**, S. 5532, 2004
82. Schlickeiser, R.: On the origin of cosmological magnetic fields by plasma instabilities, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **47**, S. A205, 2005
83. Schlickeiser, R. und Miller, J. A.: Quasi-linear theory of cosmic ray transport and acceleration: The role of oblique magnetohydrodynamic waves and transit-time damping, *The Astrophysical Journal* **492**, S. 352, 1998
84. Schlickeiser, R. und Shukla, P.K.: Cosmological Magnetic Field Generation by the Weibel Instability, *The Astrophysical Journal* **599**, S. L57, 2003
85. Schlickeiser, R., Vainio R., Böttcher, M., Lerche, I., Pohl, M. und Schuster, C.: Conversion of relativistic pair energy into radiation in the jets of active galactic nuclei, *Astronomy & Astrophysics* **393**, S. 69, 2002
86. Shalchi, A.: *Transport kosmischer Strahlung in der anisotropen magnetohydrodynamischen Turbulenz*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Deutschland, 2003

- 
87. Shalchi, A.: Second-order quasilinear theory of cosmic ray transport, *Physics of Plasmas* **12**, S. 052905, 2005
  88. Shalchi, A.: Time-dependent transport and subdiffusion of cosmic rays, *Journal of Geophysical Research* **110**, CitelID A09103, 2005
  89. Shalchi, A.: Analytical investigation of the two-dimensional cosmic ray Fokker-Planck equation, *Astronomy & Astrophysics* **448**, S. 809, 2006
  90. Shalchi, A., Bieber, J. W. und Matthaeus, W. H.: Analytic Forms of the Perpendicular Diffusion Coefficient in Magnetostatic Turbulence, *The Astrophysical Journal* **604**, S. 675, 2004
  91. Shalchi, A., Bieber, J. W., Matthaeus, W. H. und Qin, G.: Nonlinear Parallel and Perpendicular Diffusion of Charged Cosmic Rays in Weak Turbulence, *The Astrophysical Journal* **616**, S. 617, 2004
  92. Shalchi, A., Bieber, J. W., Matthaeus, W. H. und Schlickeiser, R.: Parallel and Perpendicular Transport of Heliospheric Cosmic Rays in an Improved Dynamical Turbulence Model, *The Astrophysical Journal* **642**, S. 230, 2006
  93. Shalchi, A. und Schlickeiser, R.: Cosmic ray transport in anisotropic magnetohydrodynamic turbulence. III. Mixed magnetosonic and Alfvénic turbulence, *Astronomy & Astrophysics* **420**, S. 799, 2004
  94. Shalchi, A. und Schlickeiser, R.: Quasilinear perpendicular diffusion of cosmic rays in weak dynamical turbulence, *Astronomy & Astrophysics* **420**, S. 821, 2004
  95. Singh, S. V., Kakad, A. P., Reddy, R. V. und Lakhina, G. S.: Low-frequency instabilities due to energetic oxygen ions, *Journal of Plasma Physics* **70**, S. 613, 2004
  96. Spanier, F.: *Turbulenz im Interstellaren Medium: Einschränkung der Turbulenzparameter durch Berücksichtigung von Plasmawellenheizung*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Deutschland, 2005
  97. Spatschek, K.-H.: *Theoretische Plasmaphysik* (B. G. Teubner, Stuttgart, 1990)
  98. Sridhar, S. und Goldreich, P.: Toward a theory of interstellar turbulence. 1: Weak Alfvénic turbulence, *The Astrophysical Journal* **432**, S. 612, 1994
  99. Stanek, K. Z., Gnedin, O. Y., Beacom, J. F., et al.: Protecting Life in the Milky Way: Metals Keep the GRBs Away, *The Astrophysical Journal*, eingereicht (arXiv:astro-ph/0604113)
  100. Stawicki, O.: *On Solar Wind Magnetic Fluctuations and Their Influence on the Transport of Charged Particles in the Heliosphere*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Deutschland, 2003
  101. Stix, T. H.: *Waves in Plasmas* (American Institute of Physics, New York, 1992)

102. Tautz, R. C.: *Magnetfelderzeugung in kosmologischen Plasmen*, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Deutschland, 2005
103. Tautz, R. C. und Schlickeiser, R.: Covariant kinetic dispersion theory of linear waves in anisotropic plasmas. III. Counterstreaming plasmas, *Physics of Plasmas* **12**, S. 072101, 2005
104. Tautz, R. C., Schlickeiser, R. und Shalchi, A.: On perpendicular diffusion of cosmic rays in partially turbulent magnetic fields, *The Astrophysical Journal*, eingereicht
105. Teufel, A., Lerche, I. und Schlickeiser, R.: Cosmic ray transport in anisotropic magnetohydrodynamic turbulence. II. Shear Alfvén waves, *Astronomy & Astrophysics* **397**, S. 777, 2003
106. Teufel, A. und Schlickeiser, R.: Analytic calculation of the parallel mean free path of heliospheric cosmic rays. I. Dynamical magnetic slab turbulence and random sweeping slab turbulence, *Astronomy & Astrophysics* **393**, S. 703, 2002
107. Tripathi, A. K. und Misra, K. D.: Effect of loss-cone distribution on the generation of whistler waves in the magnetosphere, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* **66**, S. 987, 2004
108. Trubnikov, B. A.: *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions*, edited by M. A. Leontovich (New York, Pergamon, 1959)
109. Urch, I. H.: Charged Particle Transport in Turbulent Magnetic Fields: The Perpendicular Diffusion Coefficient, *Planetary and Space Science* **46**, S. 389, 1977
110. Vedenov, A. A., Velikhov, E. P. und Sagdeev, R. Z.: Non-linear Oscillations of Rare field Plasma, *Nuclear Fusion* **1**, S. 82, 1961
111. Vedenov, A. A., Velikhov, E. P. und Sagdeev, R. Z.: Quasilinear theory of plasma equations, *Nuclear Fusion*, Supplement Part **2**, S. 465, 1962
112. Watson, G. N.: *A treatise on the theory of Bessel functions* (Cambridge University Press, 1966)
113. Weibel, E. S.: Spontaneously Growing Transverse Waves in a Plasma Due to an Anisotropic Velocity Distribution, *Physical Review Letters* **2**, S. 83, 1959
114. Wolfram, S.: *The Mathematica® Book* (Cambridge University Press, 1988)



# Publikationen

## Artikel im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit

Diese Arbeit ist unveröffentlicht bis auf Auszüge, die in den folgenden Artikeln enthalten sind:

1. Tautz, R. C. und Lerche, I.: Plasma instabilities in gamma-ray bursts: Neutral points and the effect of mode coupling, *The Astrophysical Journal*, eingereicht
2. Tautz, R. C., Lerche, I. und Schlickeiser, R.: Unstable longitudinal plasma oscillations in a magnetic field: Non-relativistic and relativistic considerations, *Physics of Plasmas* **13**, S. 052112, 2006
3. Tautz, R. C., Lerche, I. und Schlickeiser, R.: Non-resonant kinetic instabilities of a relativistic plasma in a uniform magnetic field: Longitudinal and transverse mode coupling effects, *Journal of Mathematical Physics*, eingereicht
4. Tautz, R. C. und Schlickeiser, R.: Counterstreaming magnetized plasmas. I. Parallel wave propagation, *Physics of Plasmas* **12**, S. 122901, 2005
5. Tautz, R. C. und Schlickeiser, R.: Counterstreaming magnetized plasmas. II. Perpendicular wave propagation, *Physics of Plasmas* **13**, S. 062901, 2006
6. Tautz, R. C., Shalchi, A. und Schlickeiser, R.: Comparison between test-particle simulations and test-particle theories: I. Magnetostatic turbulence, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **32**, S. 809, 2006
7. Tautz, R. C., Shalchi, A. und Schlickeiser, R.: Comparison between test-particle simulations and test-particle theories: II. Plasma wave turbulence, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **32**, S. 1045, 2006

## Weitere Arbeiten

1. Tautz, R. C., Lerche, I., Schlickeiser, R. und Schaefer-Rolffs, U.: Coupling, degeneracy breaking, and isolation of Weibel modes in relativistic plasmas: I. General theory, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, eingereicht
2. Tautz, R. C., Lerche, I., and Schlickeiser, R.: Coupling, degeneracy breaking, and isolation of Weibel modes in relativistic plasmas: II. Specific examples, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, in Vorbereitung
3. Tautz, R. C., Schlickeiser, R. und Shalchi, A.: On perpendicular diffusion of cosmic rays in partially turbulent magnetic fields<sup>a</sup>, *The Astrophysical Journal*, eingereicht

4. Tautz, R. C. und Schlickeiser, R.: Covariant kinetic dispersion theory of linear waves in anisotropic plasmas. III. Counterstreaming plasmas<sup>a</sup>, *Physics of Plasmas* **12**, S. 072101, 2005
5. Tautz, R. C.: *Magnetfelderzeugung in kosmologischen Plasmen*<sup>a</sup>, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Deutschland, 2005

## Tagungsbeiträge

1. Generation of Cosmological Magnetic Fields, COPAP-Workshop, 11.-15. Juli 2005, Ruhr-Universität Bochum
2. Die Gegenstrom-Instabilität in astrophysikalischen Plasmen, Schule für Astroteilchenphysik, 6.-14. Oktober 2005, Universität Nürnberg-Erlangen
3. Instabile Plasma-Oszillationen im Magnetfeld: Relativistische Effekte und Modenkopplung, Frühjahrstagung des Fachbereichs Plasmaphysik der DPG, 27.-30. März 2006, Universität Augsburg
4. Recent Progress in Describing the Transport of Cosmic Rays, 11<sup>th</sup> Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, 23.-29. Juli 2006, Freie Universität Berlin

---

<sup>a</sup>Ebenfalls im Literaturverzeichnis aufgeführt

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

- 22.01.1980: Geboren in Herdecke (Ruhr)
- 08-1986 – 06-1999: Blote Vogel, Freie Schule nach der Pädagogik Rudolf Steiners
- 06-1999: Abitur mit Note 1,7
- 10-1999 – 10-2000: Studium der Physik an der Ruhr-Universität Bochum
- 11-2000 – 09-2001: Zivildienst in der Fachklinik im Deerth, Hagen
- 10-2001 – 08-2004: Fortsetzung des Studiums
- 09.04.2003: Vordiplom mit Note 1,0
- 09-2004 – 03-2005: Diplomarbeit:  
„Magnetfelderzeugung in kosmologischen Plasmen“
- 31.03.2005: Diplom mit Auszeichnung
- 04-2005: Nominierung zur Teilnahme an der  
55. Nobelpreisträgertagung in Lindau  
als Auszeichnung für die besten Studierenden des Jahrgangs
- Ab 05-2005: Wissenschaftliche Mitarbeit am Institut für  
Theoretische Physik IV der Ruhr-Universität Bochum
- 09-2006 – 10-2006: Forschungsaufenthalt an der Toyama University, Japan  
nach Ausschreibung durch DPG und DFG

## Studienbegleitende Tätigkeiten

- 04-2003 – 04-2005: Studentische Hilfskraft:  
Korrektur der Übungsaufgaben zur Elektrodynamik;  
Betreuung des Tutoriums zur Einführung in die  
theoretische Physik (numerisch und analytisch)