

TURBULENZ IM INTERSTELLAREN MEDIUM:

EINSCHRÄNKUNG DER TURBULENZPARAMETER DURCH
BERÜCKSICHTIGUNG VON PLASMAWELLENHEIZUNG

D I S S E R T A T I O N

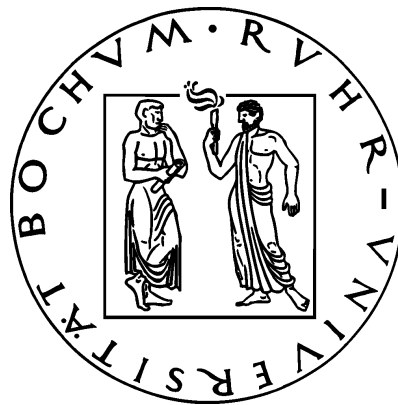
ZUR ERLANGUNG DES GRADES EINES DOKTORS

DER NATURWISSENSCHAFTEN

DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE DER RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

VON

FELIX SPANIER



INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK IV

WELTRAUM- UND ASTROPHYSIK

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

BOCHUM, APRIL 2005

Kurzzusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Heizung des interstellaren Mediums durch die Dämpfung von Plasmawellenturbulenz untersucht. Es wird gezeigt, daß die Heizung ausreicht, das thermische Gleichgewicht im interstellaren Medium aufrecht zu erhalten. Außerdem lassen sich Rückschlüsse auf die Art der Turbulenz ziehen. Insbesondere kann gezeigt werden, daß die Turbulenz des interstellaren Mediums vermutlich anisotrop ist.

Dissertation eingereicht am: 29. April 2005

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juni 2005

Referent: Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser

Korreferent: Prof. Dr. Ralf-Jürgen Dettmar

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Das interstellare Medium	3
1.1 Allgemeine Beobachtungen	3
1.1.1 Dichte des ISM	4
1.1.2 Temperatur des ISM	6
1.1.3 Magnetfelder	7
1.2 Modelle des interstellaren Mediums	9
1.3 Beobachtung der Turbulenz	11
1.3.1 Diffraktive interstellare Szintillationen	13
1.3.2 Dekorrelation	14
1.3.3 Winkelverbreiterung	14
1.3.4 Frequenzdrift	14
1.3.5 Dispersionsmaßfluktuation	15
1.3.6 Refraktiver Szintillationsindex	15
1.3.7 Abschätzung großskaliger Turbulenz	16
1.4 Ergebnisse der Turbulenzmessung	16
1.5 Art der Turbulenz	17
1.6 Problemstellung für das ISM	21
2 Heizung und Kühlung	23
2.1 Kühlmechanismen	23
2.1.1 Linienkühlung	23
2.1.2 Rekombination	25
2.1.3 Summe der Kühlraten	26

2.2	Heizmechanismen	26
2.2.1	UV-Hintergrundstrahlung	27
2.2.2	Photoelektronen aus Staubkörnern	28
2.2.3	Kosmische Strahlung	29
2.3	Thermisches Gleichgewicht	33
2.4	Energiebilanz	34
3	Plasmawellen	35
3.1	Dispersionsrelationen	35
3.1.1	Maxwell-Gleichungen	36
3.1.2	Fluidansatz	36
3.1.3	Dispersionsrelation im kalten, magnetisierten Plasma	38
3.1.4	Dispersionsrelation im warmen, magnetisierten Plasma	40
3.2	Dichtefluktuationen	41
3.2.1	Die MHD-Gleichungen	42
3.2.2	Kinetischer Ansatz	46
3.3	Dämpfungsmechanismen	49
3.3.1	Stoßbestimmte Dämpfung	49
3.3.2	Kollisionsfreie Dämpfung	59
3.4	Turbulenzspektren	64
3.4.1	Kolmogorov-Spektrum	64
3.4.2	Kraichnan-Iroshnikov-Spektrum	65
3.4.3	Goldreich-Sridhar	66
3.4.4	Ein alternativer Ansatz	67
3.5	Heizung durch Plasmawellen	68
3.5.1	Alfvén-Wellen	69
3.5.2	Schnelle magnetosonische Wellen	72
3.5.3	Langsame magnetosonische Wellen	75
3.5.4	Diskussion der Heizraten	77
3.5.5	Problematik der Plasmawellendämpfung	80
4	Modell der interstellaren Turbulenz	83
4.1	Anpassung der Turbulenzparameter schneller magnetosonischer Wellen	84
4.1.1	Das anisotrope Modell	85

4.1.2	Steile Spektren	86
4.1.3	Früher Abbruch	86
4.1.4	Gemischte Modelle	87
4.2	Anpassung der Turbulenzparameter langsamer magnetosonischer Wellen .	88
4.2.1	Variation der Turbulenzstärke	88
4.2.2	Variation des Spektralindex	89
4.2.3	Variation der Abbruchwellenzahl	89
4.3	Anpassung der Turbulenzparameter von Alfvén-Wellen	89
4.4	Physikalische Beschränkungen eines Turbulenzmodells	91
4.5	Zusammenfassung des Modells für die interstellare Turbulenz	95
4.5.1	Alfvén-Wellen	96
4.5.2	Langsame magnetosonische Wellen	96
4.5.3	Schnelle magnetosonische Wellen	96
Zusammenfassung		97
A Exakte Herleitung der viskosen Dämpfungsrate		101
A.1	Alfvén-Wellen	102
A.2	Magnetosonische Wellen	103
B Exakte Herleitung der Ionen-Neutral-Dämpfungsrate		105
B.1	Stix-Parameter	105
B.2	Fluidtheorie	107
B.3	Integration der Heizrate	108
B.3.1	Alfvén-Wellen	109
B.3.2	Langsame magnetosonische Wellen	111
C Integration der Landau-Dämpfung		113
C.1	Alfvén-Wellen	113
C.2	Schnelle magnetosonische Wellen	114
Literaturverzeichnis		126
Danksagung		127
Lebenslauf		129

Einleitung

Die Sterne haben schon die frühesten Kulturen zur Auseinandersetzung mit der Wissenschaft inspiriert. Aber erst im letzten Jahrhundert begann sich die Wissenschaft mit dem Raum zwischen den Sternen zu befassen. Die Beschäftigung mit dem *interstellaren Medium* beschränkte sich zuerst auf die im optischen Bereich sichtbaren Wolken. Mit der Entwicklung der Radioastronomie durch Karl Jansky im Jahre 1932 und der Entdeckung der 21 cm-Linie durch van de Hulst wurde dann aber klar, daß das interstellare Medium ein Kontinuum ist.

Die Entdeckung von Pulsaren durch Bell 1968 eröffnete einen weiteren Weg der Beobachtung des interstellaren Mediums: Die regelmäßigen Pulsarsignale weisen Szintillationen auf, die durch Unregelmäßigkeiten im interstellaren Medium hervorgerufen werden. Diese Unregelmäßigkeiten lassen den Schluß zu, daß das interstellare Medium turbulenter Natur ist. Bei der Beschreibung der Turbulenz wird meistens die Theorie von Kolmogorov (1941) herangezogen. Gerade im Bereich der Plasmaturbulenz sind in den letzten Jahren viele neue Erkenntnisse gewonnen worden.

Trotz der vielen vorhandenen Meßdaten gibt es auch heute noch einige Unklarheiten über die Natur des interstellaren Mediums: Die hohen Temperaturen lassen sich aus den verschiedenen vorgeschlagenen Heizprozessen nicht erklären, es ist unklar, ob sich die Turbulenz aus Wellen oder anderen Strukturen zusammensetzt und es ist nicht bekannt ob die Turbulenz homogen und isotrop ist.

Diese Arbeit schlägt die Dämpfung von Plasmawellen als Hauptquelle für die hohe Temperatur des interstellaren Mediums vor. Mit der Forderung des thermischen Gleichgewichts wird die Turbulenz aus den verschiedenen Plasmawellenmoden modelliert. Ziel dieser Modellierung ist ein konsistentes Modell der interstellaren Turbulenz, das auf der einen Seite die bisher durchgeführten (erdgebundenen) Messungen und die Tempera-

Einleitung

tur des interstellaren Mediums erklärt und auf der anderen Seite Einblick in Parameter gewährt, die bisher nicht zugänglich waren.

Für die Erforschung des interstellaren Mediums gibt es viele Gründe, allein schon wegen der Omnipräsenz dieses Mediums. Zwei Gründe sollen dabei aber besonders hervorgehoben werden: Auf der einen Seite beeinflusst das interstellare Medium elektromagnetische Strahlung, die es durchquert, was bei der Beobachtung berücksichtigt werden muss. Auf der anderen Seite wird die Beschleunigung kosmischer Strahlung durch die Turbulenz des interstellaren Mediums erklärt.

1 Das interstellare Medium

Lange Zeit wurde der Raum zwischen den Sternen als Vakuum betrachtet und ihm keine weitere Bedeutung beigemessen. Erst im 19. Jahrhundert hat insbesondere Barnard (1907) erkannt, daß dunkle Stellen in seinen Sternfotografien nicht etwa durch das Fehlen von Sternen entstehen, sondern daß Wolken zwischen ihm und den Sternen Licht absorbieren.

Einen weiteren Meilenstein zur Entdeckung des interstellaren Mediums hat Sir Arthur Eddington 1926 gesetzt, als er nicht nur die Existenz der interstellaren Wolken bestätigte, sondern auch den bis zu diesem Zeitpunkt unbekanntem diffusen Teil des interstellaren Mediums postulierte (Eddington 1926).

Im weiteren Verlauf der historischen Entwicklung wurde die Beobachtung des interstellaren Mediums mit den Mitteln der Radioastronomie (begründet durch Jansky 1932) fortgeführt, da nur ein geringer Teil der interstellaren Materie Licht im sichtbaren Bereich emittiert oder absorbiert.

Dieses Kapitel beschäftigt sich im wesentlichen mit zwei Aspekten des interstellaren Mediums (*ISM*): Erstens die allgemeinen Parameter des ISM und die möglichen Modelle für den Aufbau des ISM und zweitens der turbulenten Struktur des interstellaren Mediums. Zu beiden Aspekten werden auch die gängigen Beobachtungsmethoden beschrieben.

1.1 Allgemeine Beobachtungen

Wie schon erwähnt stammt der größte Teil des Wissens über das interstellare Medium aus der Radioastronomie. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Methoden zur Bestimmung der drei Kernparameter für diese Arbeit (Dichte, Temperatur, Magnetfeld) des ISM kurz dargestellt. Die Ergebnisse, die mit Hilfe dieser Methoden gewonnen wurden, werden im wesentlichen im folgenden Abschnitt, der sich mit den Modellen des ISM

befaßt, zusammengefasst.

1.1.1 Dichte des ISM

Bei der Bestimmung der Dichte des interstellaren Mediums muß eine gewichtige Unterscheidung vorgenommen werden: Es läßt sich auf der einen Seite die Dichte der geladenen Spezies (im wesentlichen die Elektronen, die im quasineutralen ISM der Ladungsdichte der Ionen entspricht) und auf der anderen Seite die Dichte der neutralen Spezies (im wesentlichen der Wasserstoff) bestimmen.

Elektronendichte

Die erste Methode zur Bestimmung der Elektronendichte beruht auf der Beobachtung von Pulsarsignalen. Beim Durchgang durch das interstellare Medium interagiert die elektromagnetische Welle des Pulsarsignals mit den freien Elektronen, wodurch sich die Gruppengeschwindigkeit v_g des Signals ändert, wie schon von Drude (1900) beschrieben:

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \quad (1.1)$$

Hier bezeichnet ω die Signalfrequenz und ω_{pe} die Plasmafrequenz der Elektronen:

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \quad (1.2)$$

Durch die unterschiedliche Gruppengeschwindigkeit der verschiedenen Frequenzanteile eines solchen Signals ergibt sich eine Zeitverschiebung für die verschiedenen Frequenzbänder:

$$\delta t = t_\omega - t_{\omega+\delta\omega} = \int ds v_{g,\omega}(s) - \int ds v_{g,\omega+\delta\omega}(s) \quad (1.3)$$

Daraus ergibt sich dann unter der Annahme benachbarter Frequenzbänder, d.h. $\delta\omega \ll \omega$ (s. a. Schlickeiser 2002):

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} = \frac{m_e c}{4\pi e^2} \frac{\omega^3}{DM} \quad (1.4)$$

Das Dispersionsmaß DM ist dabei die Säulendichte der Elektronen, also die über die Sichtlinie integrierte Elektronendichte :

$$DM = \int ds n_e \quad (1.5)$$

Nach Rohlfs u. Wilson (2004) erhält man dann folgende Beziehung

$$\delta t[\mu\text{s}] = 1.34 \cdot 10^{-9} DM[\text{cm}^{-2}] ((\nu_1[\text{MHz}])^{-2} - (\nu_2[\text{MHz}])^{-2}) \quad (1.6)$$

Die zweite Methode zur Bestimmung der Elektronendichte basiert auf den Rekombinationslinien des Wasserstoffs. Dabei rekombinieren die Elektronen mit den Protonen entweder direkt (einstufiger Prozeß) oder sie werden eingefangen und fallen in niedrigere Energieniveaus (mehrstufiger Prozeß). Die Frequenz der Strahlung, die bei einem Übergang zwischen zwei Energieniveaus frei wird, wird durch die Rydberg-Formel (Rydberg 1897) gegeben:

$$\nu = RcZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n + \Delta n)^2} \right) \quad (1.7)$$

Die Quantenniveaus $n + \Delta n$ und n beziehen sich auf den Zustand vor und nach der Emission eines Photons. In der Astronomie ist es Konvention, die Linien nach Δn zu benennen, $\Delta n = 1$ ist so z.B. eine α -Linie.

Bei der Berechnung der Absorptionskoeffizienten κ nimmt man gemeinhin ein thermisches Gleichgewicht an und erhält dann durch die Boltzmann-Verteilung die Besetzungszahlen der verschiedenen Quantenniveaus:

$$\kappa = \frac{h^2 \nu^2}{4\pi k T_e} f(\nu) N_n B_{nn'} \quad (1.8)$$

Die $B_{nn'}$ sind die Einstein-Koeffizienten für die induzierte Emission und f ist eine Funktion, die die spektrale Form der Linie beschreibt. Die Besetzungszahl des Niveaus n ist mit N_n bezeichnet. Die thermische Energie der Elektronen ist durch kT_e gegeben.

Bei der Bestimmung der physikalischen Parameter des ISM aus den Emissionslinien ist zu beachten, daß sich die Linienemission oberhalb der Kontinuumsstrahlung befindet. Diese Kontinuumsstrahlung rührt von freien, thermischen Elektronen her, die durch Coulomb-Wechselwirkung beschleunigt werden und daher Bremsstrahlung emittieren. Der Absorptionskoeffizient dieser sogenannten Frei-Frei-Strahlung ist gegeben durch folgende Formel (Oster 1961):

$$\kappa_\nu = \frac{n_e n_i}{\nu^2} \frac{8}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^3 c} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \log \left(\frac{2kT^{\frac{3}{2}}}{\gamma m} \frac{m}{\pi \gamma Z e^2 \nu} \right) \quad (1.9)$$

Aus diesem Absorptionskoeffizienten läßt sich dann mit dem Kirchhoffschen Gesetz die Emission ermitteln.

Nun läßt sich aus der Annahme, daß sich die gemessene Intensität der Rekombinationslinie aus der Intensität der Linie selber (I_L) und der Intensität des Hintergrunds (I_C) zusammensetzt, eine Beziehung ermitteln, die Rückschlüsse auf die Parameter des interstellaren Mediums zuläßt:

$$\int \frac{I_L}{I_C} d\nu [\text{kHz}] = 1.3 \cdot 10^5 \Delta n \frac{f_{nn'}}{n} \nu^{2.1} T_e^{-1.15} \exp\left(\frac{1.6 \cdot 10^5}{n^2 T_e}\right) \quad (1.10)$$

Dichte neutralen Wasserstoffs

Im Gegensatz zu den ionisierten Spezies geben neutrale Wasserstoffatome keine Rekombinationslinien ab, und die Interaktion mit elektromagnetischer Strahlung ist für die Beobachtung auch zu vernachlässigen. Da aber 5 - 10 % der gesamten Materie der Galaxis als neutraler Wasserstoff vorliegen, ist es eminent wichtig, für diesen ebenfalls einen Detektionsmechanismus zu finden. Van de Hulst hat hierzu 1944 vorgeschlagen, die Strahlung durch den Hyperfeinstrukturübergang des Wasserstoffs zu beobachten. Bei diesem Übergang des Grundzustandes des Wasserstoffatoms ($1^2S_{1/2}$) wechselt der Spin des Elektrons bezogen auf den Protonenspin. Die Energie dieses Übergangs entspricht einem Photon der Wellenlänge 21 cm, weshalb dieser Übergang als 21 cm-Linie bezeichnet wird.

Die Grundannahme für die Messung dieses Effekts ist, daß die Anregung dieses Zustandes durch Stöße geschieht (die Spin-Temperatur T_s ist dann gleich der kinetischen Temperatur T_k). Damit läßt sich die Boltzmannverteilung für die angeregten Zustände bestimmen. Über die Strahlungstransportgleichung wird schließlich die Emission respektive Absorption bestimmt:

$$n_H [\text{cm}^{-3}] = 3.88 \cdot 10^{17} \int d\nu [\text{Hz}] T_B [\text{K}] (\nu) \quad (1.11)$$

Über das Stefan-Boltzmann-Gesetz wird die Strahlungsintensität im Detektor in die Temperatur $T_B(\nu)$ umgerechnet und die Dichte ergibt sich über eine Integration über das Linienprofil der 21 cm-Linie.

1.1.2 Temperatur des ISM

Zur Bestimmung der Temperatur ionisierten Wasserstoffs läßt sich Gl. (1.10) heranziehen. Bei der Temperaturbestimmung neutralen Wasserstoffs wird die Linienbreite σ^2 der

21 cm-Linie benutzt. Durch thermische Stöße wird diese Linie verbreitert; es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Linienbreite und Temperatur:

$$T_k[\text{K}] = \frac{m}{k_B} \sigma^2 [\text{Hz}] \quad (1.12)$$

Dabei sind k_B die Boltzmann-Konstante und m die Masse der H-Atome.

1.1.3 Magnetfelder

Grundsätzlich muß bei der Beobachtung von Magnetfeldern unterschieden werden, welcher Teil des Magnetfeldes beobachtet werden soll. Die erste Unterscheidung betrifft die Fluktuation des Magnetfeldes: auf der einen Seite findet man ein geordnetes Magnetfeld \mathbf{B}_0 , das sich nur großskalig ($\gg 10^{17}$ cm) ändert und auf der anderen Seite einen turbulenten Anteil \mathbf{B}_1 . In diesem Abschnitt wird hauptsächlich die geordnete Komponente analysiert, während in Abschnitt 1.3, der sich mit der Turbulenz im interstellaren Medium beschäftigt, auf die fluktuierende Komponente eingegangen wird. Die zweite Unterscheidung, die bei der Messung interstellarer Magnetfelder eine Rolle spielt, ist die Unterscheidung zwischen Magnetfeldern parallel (B_{\parallel}) oder senkrecht (B_{\perp}) zur Beobachtungsrichtung, da jeweils unterschiedliche physikalische Effekte eine Rolle spielen.

Faraday-Rotation

Polarisiertes Licht von Quasaren unterliegt der Faraday-Rotation, die die Polarisations Ebene des Lichts abhängig von der Stärke des Magnetfelds in der Ausbreitungsrichtung des elektromagnetischen Feldes ändert. Die Drehung der Polarisations Ebene ist auf folgende Weise mit dem Magnetfeld verknüpft:

$$\Delta\Psi \propto \lambda^2 \int_0^L B_{\parallel} n_e dz \quad (1.13)$$

Der Drehwinkel ist somit auch von der Wellenlänge λ des Lichts abhängig und liefert dann ein Integral über die Sichtweite L . Es ist in der Regel notwendig, die Polarisations Ebene für mindestens drei Wellenlängen zu bestimmen, um Fehler durch die Periodizität des Drehwinkels auszuschließen.

Es ist üblich die Faraday-Rotation über das Rotationsmaß RM anzugeben:

$$RM = \int_0^L B_{\parallel} n_e dz \quad (1.14)$$

Unter Zuhilfenahme des vorher schon besprochenen Dispersionsmaßes ist es dann möglich, den Mittelwert des parallelen Magnetfeldes entlang der Sichtlinie zu bestimmen

$$\bar{B}_{\parallel} = \frac{RM}{DM} = \frac{\int_0^L B_{\parallel} n_e dz}{\int_0^L n_e dz} \quad (1.15)$$

Da es sich hier um einen Vektormittelwert handelt, fällt der Wert im Regelfall zu gering aus, da entgegengesetzt orientierte Magnetfelder entlang der Sichtlinie sich bei der Mittelung aufheben.

Zeeman-Aufspaltung

Bei der schon erwähnten Linienemission des interstellaren Mediums tritt, genau wie im Laborexperiment, eine Aufspaltung der Spektrallinien durch den normalen Zeeman-Effekt auf. Für ein zur Sichtlinie paralleles Magnetfeld spaltet sich die Linie mit der Grundfrequenz ν in die beiden Linien $\nu_{\sigma+} = \nu + \nu_Z$ und $\nu_{\sigma-} = \nu - \nu_Z$ auf (die dritte Linie, die durch den normalen Zeeman-Effekt vorhergesagt wird, verschwindet für ein paralleles Magnetfeld), die entgegengesetzt zirkular polarisiert sind. Die Frequenzverschiebung ν_Z ist linear in B und wird bestimmt durch $\nu_Z \propto |\mathbf{B} \times \mathbf{Z}|$. \mathbf{Z} ist das magnetische Moment des Atoms.

Auch wenn die Polarisationsdaten eine Bestimmung des Magnetfeldes für beliebige Magnetfelder ermöglichen, ist eine effektive Nutzung dieses Verfahrens erst für Magnetfeldstärken möglich, bei denen die Linienaufspaltung in der Größenordnung der Linienbreite liegt. Für kleinere Feldstärken läßt sich die Linienaufspaltung meist nicht auflösen.

Synchrotron-Strahlung

Im Gegensatz zu den vorher beschriebenen Verfahren ermöglicht die Messung der Synchrotron-Strahlung die Bestimmung des zur Beobachtungsrichtung senkrechten Anteil des Magnetfeldes. Synchrotron-Strahlung wird von Elektronen emittiert, die um Magnetfeldlinien gyrieren. Für Elektronen im interstellaren Raum wird angenommen, daß deren Energieverteilung einem Potenzgesetz folgt:

$$N(E)dE = N_0 E^{-p} dE \quad (1.16)$$

Aus diesem läßt sich die Intensität der Synchrotronstrahlung ermitteln

$$I(\nu) \propto N_0 L B_{\perp}^{\frac{p+1}{2}} \nu^{\frac{p-3}{2}} \quad (1.17)$$

Damit kann man nun aus der Flußdichte F_ν das Magnetfeld berechnen:

$$B \propto (F_\nu \nu^{\frac{p-1}{2}})^{\frac{2}{7}} \frac{L^2}{V} \quad (1.18)$$

Unter der Annahme eines homogenen Magnetfeldes kann man zusätzlich den Anteil linearer Polarisation p bestimmen:

$$\frac{I_{\text{pol}}}{I} = \frac{3p + 3}{3p + 7} \quad (1.19)$$

Der Polarisationsgrad kann dazu genutzt werden, den Anteil des fluktuierenden Magnetfeldes zu bestimmen. Da ein nicht homogenes Magnetfeld kein polarisiertes Licht ausstrahlt, sinkt der Polarisationsgrad mit dem Anteil des nicht-homogenen Feldes.

Großskalige Struktur des Magnetfelds Neben den lokalen Strukturen liefern die Magnetfeldbeobachtungen auch einen Überblick über die Struktur des Magnetfelds in der gesamten Milchstraße. Das Magnetfeld der Milchstraße folgt im wesentlichen den Spiralarmen (Crutcher u. a. 2003). Zwischen den Armen scheint es allerdings Feldumkehrungen zu geben (Beck 2001). Die Tatsache, daß die Sonne innerhalb der Milchstraße liegt, macht es leider sehr schwierig, einen Überblick über die Magnetfelder der eigenen Galaxis zu erstellen. Stattdessen wird deshalb in Abbildung 1.1 das globale Magnetfeld der Galaxie NGC 6946 gezeigt, die als Spiralgalaxie unserer Galaxie ähnlich ist.

1.2 Modelle des interstellaren Mediums

Schon seit Beginn der Forschung über das interstellare Medium war klar, daß dieses keine homogene und isotrope Struktur hat. In den ersten Modellen (Field u. a. 1969) wurde unterschieden zwischen kalten Wolken und heißem Gas. McKee u. Ostriker (1977) haben dieses Bild weitgehend revolutioniert, indem sie ein Drei-Phasen-Modell vorgeschlagen haben. Es gibt zwar einige Variationen dieses Modells, die Grundannahmen der meisten folgenden Modelle sind aber ähnlich. Daher werden hier noch einmal die wichtigsten Punkte des Drei-Phasen-Modells zusammengefasst.

Die Basis des McKee-Ostriker-Modells sind Supernovae, die bei ihrer Explosion ihre Hülle abstoßen, die als sehr heißes Gas in das ISM läuft. Dieses als *Hot Interstellar Medium* (HIM) designierte Gas hat Temperaturen um 10^6 K, ist dabei allerdings sehr

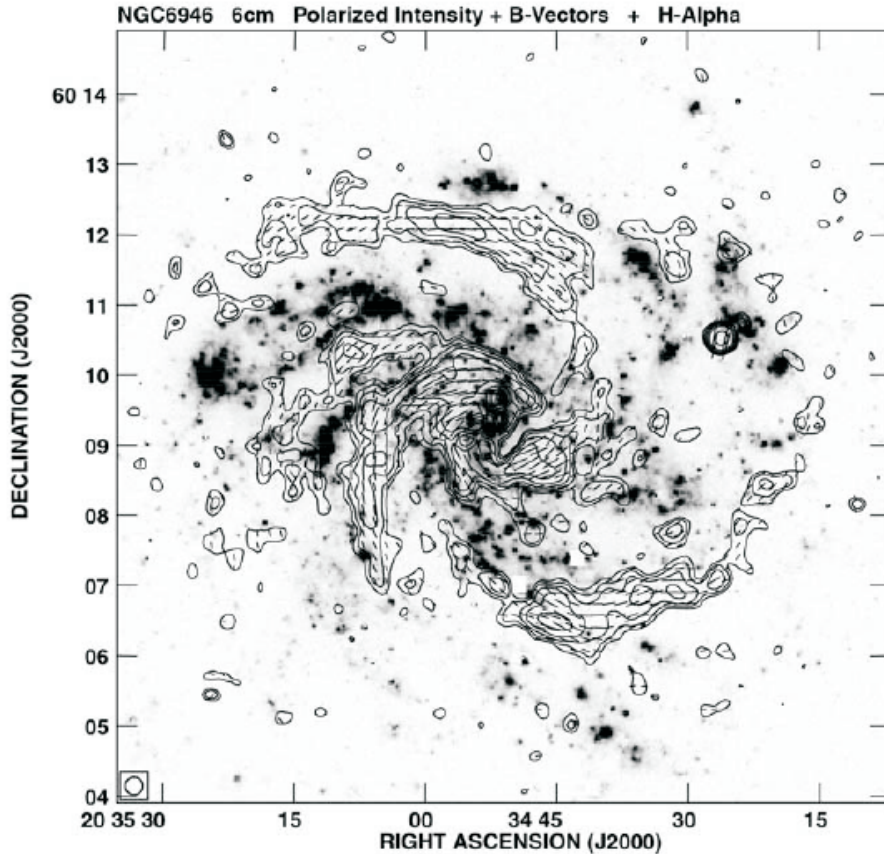


Abbildung 1.1: Magnetfeld von NGC 6946 aus der Messung der 6cm-Strahlung. Im Hintergrund ist die Galaxie im H α -Licht zu sehen (aus Beck 2001)

dünn (ungefähr 10^{-3} cm^{-3}). Das HIM breitet sich von den Supernovae aus und trifft auf Wolken aus kaltem, molekularem Wasserstoff (*Cold Neutral Medium*, CNM).

Die kalten Wolken sind umgeben von einer Schicht warmen Gases, das sich in zwei Teile aufteilt: eine Neutralkomponente (*Warm Neutral Medium*, WNM) und eine ionisierte Komponente (*Warm Ionized Medium*, WIM, auch warmes Zwischenwolkenmedium). Diese warmen Komponenten entstehen aus der Interaktion von expandierendem HIM-Gas und kalten Wolken und werden durch UV-Strahlung heißer, junger Sterne ionisiert. Die Phasen in diesem Modell stehen zueinander im ungefähren thermodynamischen Gleichgewicht.

McKee und Ostriker haben als (exemplarische) Werte die in Tabelle (1.1) aufgeführten Daten angegeben. Die Werte können allerdings von Modell zu Modell um Faktoren einer

Größenordnung variieren. Wichtig ist außerdem anzumerken, daß McKee und Ostriker das Magnetfeld in ihrer Rechnung nicht mit einbezogen haben. Einen etwas tiefergehenden Einblick in die verschiedenen Modelle liefert McIvor (1977) oder als neuere Publikation Elmegreen u. Scalo (2004). Gerade Elmegreen und Scalo betonen aber, daß die akzentuierte Trennung verschiedener Phasen nicht mehr aufrechterhalten werden kann, sondern ein fließender Übergang vorherrscht, der insbesondere durch die turbulente Natur des interstellaren Mediums verursacht wird.

	n_H (cm ⁻³)	n_e (cm ⁻³)	T (K)
HIM	0	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^5$
WIM	0.08	0.17	8000
WNM	0.31	0.06	8000
CNM	42	0	80

Tabelle 1.1: Phasen des interstellaren Mediums nach McKee u. Ostriker (1977)

Diese Arbeit bezieht sich vorwiegend auf den von Spangler (1991) als Hauptquelle für Turbulenz betrachteten Teil des interstellaren Mediums, das WIM. Die in dieser Arbeit benutzten Parameter wurden von Lerche u. Schlickeiser (2001) übernommen und ähneln eher denen des Lokalen interstellaren Mediums in der Nähe der Heliosphäre:

$$n_H = 0.2 \text{ cm}^{-3}$$

$$n_e = 0.08 \text{ cm}^{-3}$$

$$T_e = T_i = 10^4 \text{ K}$$

$$B_0 = 4 \mu\text{G}.$$

Wie schon vorher beschrieben, läßt sich auf Grund der nicht streng trennbaren Phasen allerdings ein weiterer Parameterraum angeben.

1.3 Beobachtung der Turbulenz

Die beobachteten Größen des interstellaren Mediums im allgemeinen und der Turbulenz im speziellen erstrecken sich über mehrere räumliche Größenordnungen und ruhen daher auf verschiedenen Säulen. In diesem Abschnitt sollen die Methoden zur Analyse der interstellaren Turbulenz näher beleuchtet und die Ergebnisse solcher Analysen dargestellt werden.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die Turbulenz immer wieder über die Spektralfunktion P bestimmt. Die verschiedenen Formen von möglichen Turbulenzspektren werden in Abschnitt 3.4 erläutert, im wesentlichen sind es aber wellenzahlabhängige Potenzgesetze. In den folgenden Rechnungen wird der spektrale Verlauf der Dichtefluktuation P_{mn} benutzt, der sich aus den Beobachtungen bestimmen lässt. Die genaue Form von P wird in Abschnitt 3.2 eingeführt, an dieser Stelle ist nur von Interesse, daß P eine Normierungskonstante C_N enthält, die sich durch die Beobachtungen bestimmen läßt.

In dem Übersichtsartikel von Armstrong u. a. (1995) wird der Stand der Technik zur Analyse solcher Elektronendichtefluktuationsspektren beschrieben. Die grundlegende Technik ist demnach die Messung der Szintillation von Radioquellen (meist Pulsaren), die durch die Elektronen des ISM hervorgerufen wird. Die Autoren unterscheiden dabei zwischen *diffraktiven* und *refraktiven* Effekten. Zur genauen Unterscheidung der Effekte wird zuerst der Modulationsfaktor m_p eingeführt, der von der Flußdichte F_ν abhängt:

$$m_p = \left(\frac{F_\nu \text{ rms}}{\langle F_\nu \rangle} \right)_p \quad (1.20)$$

Die Schwankung wird über die Standardabweichung (rms) gemessen. Der Index p des Modulationsfaktors bezieht sich auf Punktquellen.

Für eine schwache Modulation ($m_p \ll 1$) ist die Szintillation einzig durch diffraktive Effekte bestimmt, die sich auf der Größenskala der Fresnel-Skala r_F bewegen:

$$r_F = \sqrt{\frac{D}{k}} \quad (1.21)$$

wobei sich k hier auf die Wellenzahl einer elektromagnetischen Welle der Radioquelle bezieht, die das fluktuierende Medium durchquert. D ist zudem die Länge des durchquerten Gebietes. Wenn ausgedehnte Quellen betrachtet werden, gilt für Quellen, die eine scheinbare Ausdehnung

$$\theta > \theta_F = \frac{r_F}{D} \quad (1.22)$$

haben, daß sich die diffraktiven Effekte vom Rand der Quelle gegeneinander aufheben und damit die Szintillation abnimmt.

Im Falle starker Modulation sind sowohl diffraktive als auch refraktive Effekte beteiligt. Die diffraktiven Prozesse führen zu schnellen, schmalbandigen Variationen mit einer Modulation m im Bereich von 1. Diese Prozesse spielen sich in der Größenordnung der Kohärenzlänge ab. Die refraktiven Prozesse hingegen zeichnen sich durch langsame,

breitbandige Variationen aus. Das Modell für diese Prozesse ist das einer refraktiven Scheibe mit einer Dicke deutlich größer als die Fresnel-Skala.

Auf Grund der unterschiedlichen Herkunft der Szintillationen benötigt man unterschiedliche Analysetechniken, um aus den radioastronomisch gemessenen Szintillationen Informationen über Dichtefluktuationen zu extrahieren. Hier werde einige wichtige Verfahren vorgestellt.

Die zentrale Größe zur Analyse der Daten ist die Phasenstrukturfunktion, die für zwei Beobachtungspunkte im Abstand r den Phasenunterschied in der Beobachtung von interstellaren Radiosignalen beschreibt:

$$D_\phi(r) = \int_0^z dz' 8\pi^2 \lambda^2 r_e^2 \int_0^\infty dk k \left(1 - J_0\left(\frac{rkz'}{z}\right)\right) \cdot P_{nn}(k_x, k_y, k_z = 0) \quad (1.23)$$

Dabei ist J_0 eine Bessel-Funktion und r_e der klassische Elektronenradius. Die für diese Arbeit relevante Größe in der Phasenstrukturfunktion ist aber P_{nn} , die Dichtefluktuation (genauer: die Fouriertransformierte der räumlichen Dichteverteilung).

Bei den im folgenden vorgestellten Analyse- und Beobachtungstechniken wird für verschiedene Bereiche des Wellenzahlraums der interstellaren Turbulenz stückweise das Spektrum P_{nn} bzw. die Normierungskonstante C_N bestimmt. Die Ergebnisse der Beobachtungen werden am Ende des Abschnitts in den Abbildungen 1.2 und 1.3 wiedergegeben.

1.3.1 Diffraktive interstellare Szintillationen

Die diffraktive interstellare Szintillation (*DISS*), also die durch Beugung verursachte Szintillation von Radiowellen im interstellaren Raum, kann für verschiedene Beobachtungsfrequenzen entweder starke ($m_{\text{DISS}} \simeq 1$) oder schwache ($m_{\text{DISS}} \ll 1$) Modulation aufweisen. Beide Fälle müssen getrennt voneinander behandelt werden. Armstrong u. a. (1995) geben als Beispiel für schwache Szintillation ein m_{DISS} von 0.5 für eine Quelldistanz $z = 1.1 \cdot 10^2$ pc und einer Frequenz von 2.7 GHz an. Wie schon beschrieben, liegt in diesem Fall eine Fluktuation in der Größenordnung der Fresnel-Skala vor. Mit Hilfe von Rickett (1977) läßt sich dann eine Aussage über die Dichtefluktuationen auf dieser Größenskala machen:

$$P_{nn}(2 \cdot 10^{-10} \text{cm}^{-1}) = 8.4 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3} \quad (1.24)$$

Für Beobachtungsfrequenzen eine Größenordnung niedriger und kleinere Distanzen zu den Pulsaren ist $m_{\text{DISS}} \approx 1$. Somit liegt eine starke Szintillation vor und man erhält:

$$P_{nm}(6 \cdot 10^{-11} \text{cm}^{-1}) = 4.4 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3} \quad (1.25)$$

1.3.2 Dekorrelation

Der DISS gibt noch eine weitere Analysemöglichkeit: Durch die Bandbreite seiner Korrelation ($\Delta\nu$) läßt sich die Normierungskonstante des Dichtefluktuationsspektrums bestimmen. Cordes u. a. (1991) geben dafür folgende Relation an:

$$C_N^2 = 292(2\pi\Delta\nu[\text{Hz}])^{-\frac{5}{6}}\nu[\text{GHz}]^{\frac{11}{6}}z[\text{kpc}]^{-\frac{11}{6}}m^{-\frac{20}{3}} \quad (1.26)$$

Die Ergebnisse verschiedener Untersuchungen sind in Abb. 1.2 und 1.3 wiedergegeben.

1.3.3 Winkelverbreiterung

Der beobachtete Winkelausdehnung eines Pulsars ändert sich ebenfalls durch die Dichtefluktuationen. Armstrong u. a. (1981) haben hierzu umfangreiche Messungen im Meter-Wellenlängenbereich durchgeführt. Die von einem Radiointerferometer gemessene Größe ist hier die Sichtbarkeitsfunktion Γ (das räumliche Spektrum der Objekthelligkeit), die vom Interferometerabstand r und der Phasenstrukturfunktion in folgender Weise abhängt:

$$\Gamma(r) = \exp(-D_\phi(r)/2) \quad (1.27)$$

Die Sichtbarkeitsfunktion ergibt sich aus der Korrelation der gemessenen Intensitäten. Mit der Kenntnis von Γ läßt sich dann D_ϕ nach dem Fluktuationsspektrum (s. Gl. 1.23) auflösen. Diese Methode liefert Informationen über Fluktuationen im Wellenzahlbereich $k = (4 - 90) \cdot 10^{-10} \text{cm}^{-1}$.

1.3.4 Frequenzdrift

Bei der Messung von Pulsarspektren beobachtet man nicht nur eine zufällige Fluktuation des Spektrum, sondern auch eine Drift der Frequenz. Hewish (1980) erklärt dies durch einen zweistufigen Prozess aus refraktiven und diffraktiven Plasmaelementen: Der refraktive Anteil streut das Pulsarsignal um den Winkel θ_r , während der diffraktive

Anteil (in der Regel eine bewirkt durch Reihe kleiner Irregularitäten) ein Interferenzmuster erzeugt. Durch eine Relativbewegung V der verschiedenen Elemente folgt eine Abhängigkeit des Interferenzmuster von der Zeit:

$$\frac{dt}{d\nu} \simeq \frac{z\theta_r}{V\nu} \quad (1.28)$$

Der Abstand zur Quelle wird mit z bezeichnet. Die Physik der Refraktion ist in θ_r enthalten.

Die Frequenzdrift liefert Informationen über mittlere Skalen in der Größenordnung von 10^{14} cm.

1.3.5 Dispersionsmaßfluktuation

Das schon beschriebene Dispersionsmaß kann auch dazu benutzt werden, den Phasenwinkel ϕ zu bestimmen. Daraus wiederum ist über die Phasenstrukturfunktion die Stärke der Turbulenz zu bestimmen. Phillips u. Wolszczan (1991) zeigten dazu, daß

$$\delta\phi \propto \int \delta n_e ds \quad (1.29)$$

gilt. Das Integral über die Dichte auf der rechten Seite ist aber nichts anderes als das Dispersionsmaß DM (Gl. 1.5). Damit kann man nun die Phasenstrukturfunktion bestimmen:

$$D_\phi(b) \propto \delta\phi(r+b) - \delta\phi(r) \propto DM(r+b) - DM(r) \quad (1.30)$$

woraus wiederum das Dichtefluktuationsspektrum bestimmt werden kann.

1.3.6 Refraktiver Szintillationsindex

Während die vorher beschriebenen Effekte im wesentlichen diffraktiver Natur waren, werden nun die refraktiven Effekte mitberücksichtigt. Wie schon zu Beginn des Abschnitts erwähnt, handelt es sich hier um sehr langsame Veränderungen auf der Skala von Tagen und Wochen. Die Größenordnung der Strukturen wird durch das Streuscheibenmodell vorhergesagt, daß eine Scheibe der Dicke R_s annimmt. Im Streuscheibenmodell wird eine Scheibe angenommen, die fluktuierende Elektronen enthält, die zu einer Brechung der elektromagnetischen Wellen führen (s.a. Coles u. a. 1987) Ausgehend von diesem Modell ermittelt man dann für die Modulation:

$$m_{\text{RISS}}^2 \simeq 0.95 r_e^2 \lambda^4 z^3 R_s^6 P_{nm}(k = R_s^{-1}) \quad (1.31)$$

Der entscheidende Parameter R_s wird üblicherweise über den Abstand zum Pulsar und dem Beobachtungswinkel abgeschätzt und liegt im Bereich von $10^{14} - 10^{15}$ cm.

1.3.7 Abschätzung großskaliger Turbulenz

Für die Stärke der Fluktuationen auf den größten Skalen gibt es verschiedene Abschätzungen. Eine davon kommt aus der Messung von Rotationsmaßfluktuationen für das intergalaktische Medium außerhalb der Milchstraße. Eine andere Abschätzung extrapoliert die Dichtestrukturfunktion an den äußeren Rand des Spektrums.

1.4 Ergebnisse der Turbulenzmessung

Armstrong u. a. (1995) haben die vorher aufgezählten Beobachtungsmethoden angewandt und die Ergebnisse zu einem Potenzgesetz für das Dichtefluktuationsspektrum zusammengefasst. Die angegebenen Daten beziehen sich dabei nicht auf eine bestimmte Phase des ISM (im folgenden Abschnitt wird auf die genauere Frage, welche Phase des ISM turbulent ist, eingegangen). Die von Armstrong u. a. (1995) gezeigten Daten (in Abb. 1.2 und 1.2 wiedergegeben) scheinen ein Dichtefluktuationsspektrum mit dem Exponenten $5/3$ zu bestätigen. Außerdem liefern sie einen Wert von $C_n^2 = 10^{-3} \text{ m}^{-\frac{11}{3}}$. Die Ausdehnung des Spektrums liegt mindestens zwischen 10^6 und 10^{13} cm, Rotationsmaßfluktuationen erlauben eine Erweiterung des Spektrums bis 10^{18} cm.

Weitere Messungen, die von Scalo u. Elmegreen (2004) zusammengefasst wurden, zeigen nur geringe Abweichungen von den Ergebnissen von Armstrong et al. Spangler u. Gwinn (1990) bestätigten eine Untergrenze in der Größenordnung $5 \cdot 10^6$ cm, d.h. das Spektrum erstreckt sich nur bis zu dieser Grenze. Gleichzeitig schränken sie aber ein, daß der Spektralindex in den kleineren Bereichen gegen 2 geht. Bemerkenswert ist außerdem, daß sich Anisotropien der Fluktuationen in manchen Quellen messen lassen, die Anisotropieverhältnisse bis zu 3:1 erreichen (Spangler u. Cordes 1998). Chandran u. Backer (2002) haben allerdings festgehalten, daß sich aus diesen gemessenen Anisotropien keine Rückschlüsse auf die lokale Turbulenzanisotropie ziehen lassen.

Auch wenn die angegebenen Meßdaten ein einheitliches Bild bieten, treten bei der Interpretation der Daten dennoch Probleme auf:

- Bei einigen der benutzten Beobachtungsmethoden wird ein Kolmogorov-ähnliches

Spektrum vorausgesetzt und nur gezeigt, daß die erzielten Ergebnisse nicht der Annahme widersprechen.

- Die tatsächliche Ausdehnung des Spektrums ist unbekannt und wird nur teilweise durch Messungen abgedeckt.
- Die grundlegende Annahme ist, daß für alle Moden dasselbe Potenzgesetz gilt. Daraus folgt, daß alle Moden dieselbe Quelle und ein identisches Spektrum besitzen müssen.

Gerade der letzte Punkt stellt eine wesentliche Einschränkung dar, wenn man MHD-Wellen-Turbulenz betrachtet. Hierauf soll im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

1.5 Art der Turbulenz

Die Zusammensetzung und die Entwicklung der interstellaren Turbulenz ist aus den in diesem Kapitel beschriebenen Meßmethoden nicht zu erschließen, da diese zwar Daten über die Dichtefluktuation nicht aber über ihre Herkunft geben. Man ist also auf alternative Systeme oder Hypothesen über die Herkunft der Turbulenz angewiesen. Ein starker Hinweis auf die Natur interstellarer Turbulenz liefert das interplanetare Medium (*IPM*). Das interplanetare Medium ist dem ISM nicht unähnlich, wird aber naturgemäß erheblich stärker durch die Sterne (also die Sonne) beeinflusst. Aus den Sondenmessungen im IPM weiß man, daß die Turbulenz im Sonnenwind durch Alfvén-Wellen hervorgerufen wird.

Außerdem gibt es allgemein anerkannte Hypothesen über die Herkunft interstellarer Turbulenz: Die im McKee-Ostriker-Modell gemachte Aussage, daß die Struktur des ISM aus der Entstehung von Supernovae mit dem ISM resultiert, kann man durch die Aussage von Spitzer (1982) erweitern, der die Entstehung von Schallwellen durch Supernova-Schocks vorhersagt. Damit ist eine starke Quelle von MHD-Wellen-Turbulenz vorhanden. Eine weitere Quelle von MHD-Wellen sind die Teilchen der kosmischen Strahlung, die durch Gyroresonanz insbesondere schnelle magnetosonische Wellen erzeugen können (Lerche 1967).

Ein weiteres Modell für die interstellare Turbulenz schließt Entropiefluktuationen (Akhiezer 1975) mit ein. Entropiefluktuationen sind eine weitere Lösung der MHD-

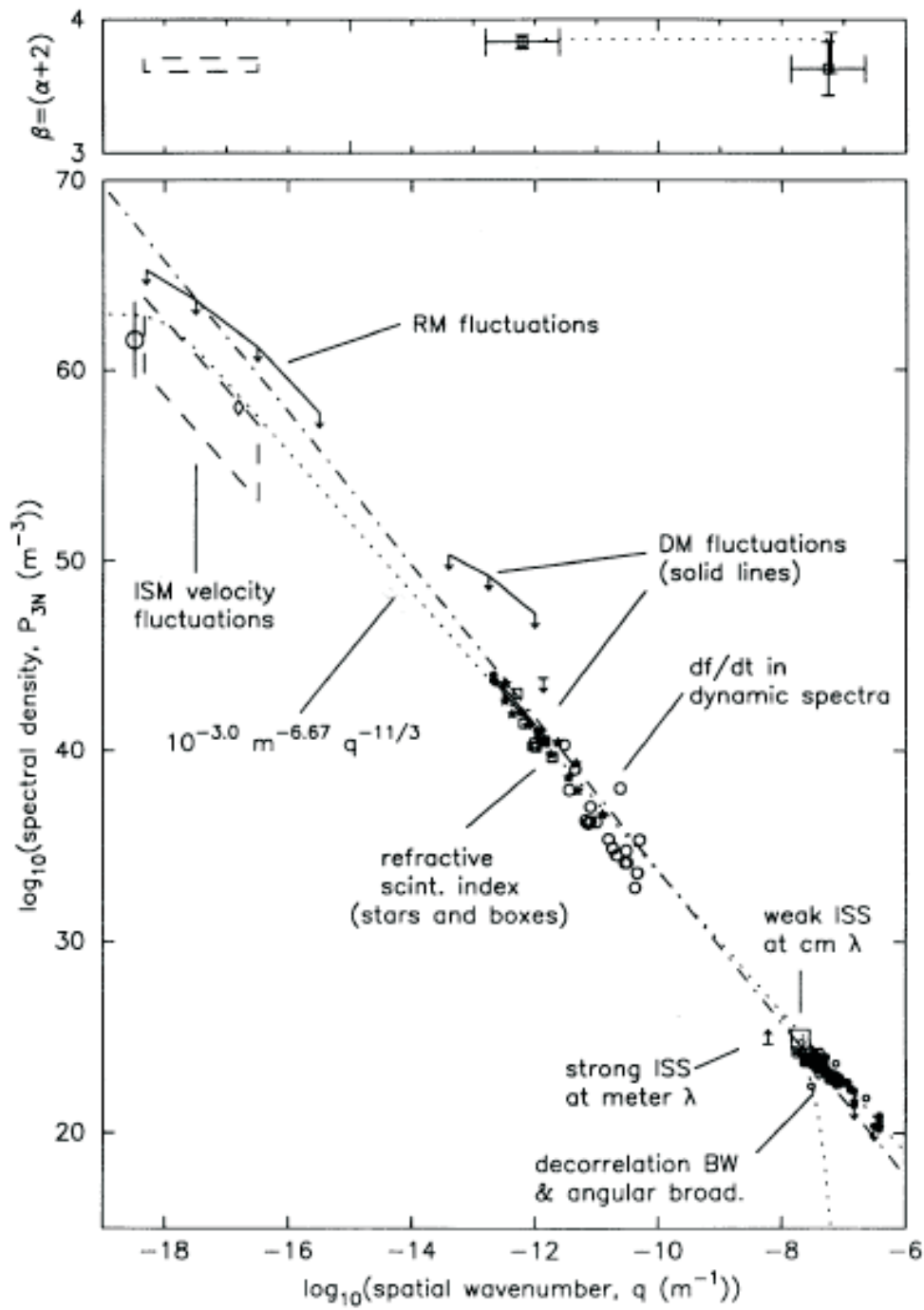


Abbildung 1.2: Im unteren Teil der Abbildung ist der spektrale Verlauf der Dichtefluktuationen gegen die Wellenzahl aufgetragen. Gezeigt sind Messungen nach den im Text beschriebenen Verfahren. Im oberen Teil findet sich eine Abschätzung des Spektralindex für ein den Daten angepasstes Potenzgesetz. (aus Armstrong u. a. (1995))

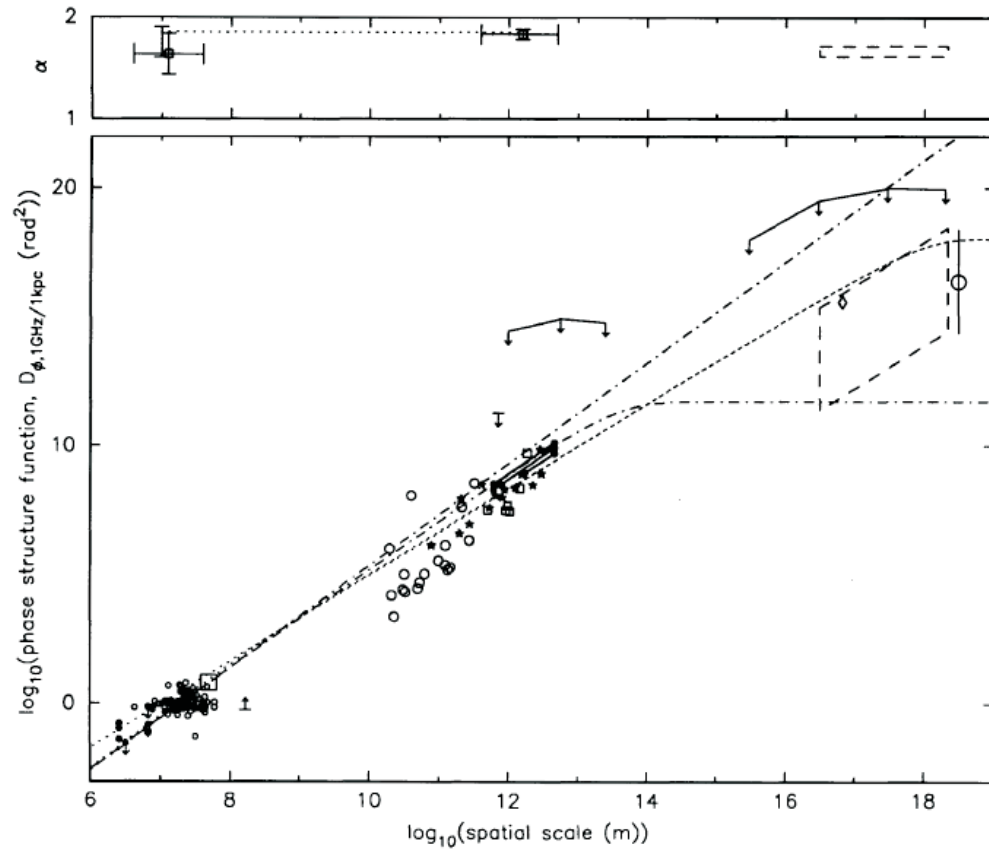


Abbildung 1.3: Ähnlich wie in Abb. 1.2 ist hier im unteren Teil der Abbildung die Phasenstrukturfunktion gegen die Wellenzahl aufgetragen. Gezeigt sind verschiedene Messungen, die Linie beziehen sich auf Turbulenzmodelle mit Spektralindex $s = 5/3$ (gepunktete Linie) und $s = 4$ (Punkt-Strich-Linie, unter Annahme eines l_{max} von 10^{13} respektive 10^{18}) (aus Armstrong u. a. (1995))

Gleichungen, deren wichtigste Eigenschaft ist, daß sie keine zeitliche Fluktuation aufweisen ($\omega = 0$). Aus der in dieser Arbeit verwendeten Formulierung der MHD-Gleichungen folgen nicht sofort die Entropiefluktuationen, man muß das Gleichungssystem erst um die Differentialgleichung für die Entropie s erweitern:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (1.32)$$

Wie deutlich zu erkennen ist, wird die Entropie nur passiv im Plasma transportiert. Akhiezer berechnete für diese Entropiewelle auch die Fluktuationen in den relevanten Plasmametern und erhielt als Ergebnis, daß ausschließlich Dichte und Temperatur fluktuieren, nicht aber das Magnetfeld.

Achterberg u. Blandford (1986) haben die Erzeugung von Entropiefluktuationen an Schocks betrachtet und kommen zu dem Ergebnis, daß in schräg zum Schock verlaufenden MHD-Wellen Entropiefluktuationen erzeugt werden können. Lithwick u. Goldreich (2001) haben sich einem wichtigen Problem der Entropiefluktuationen zugewandt: Durch die rein passive Advektion sind Entropiefluktuationen nicht in der Lage ein Spektrum von Dichtefluktuationen aufzubauen. Lithwick und Goldreich zeigen daher, daß es möglich ist durch die Durchmischung mit Alfvén-Wellen, ein Kolmogorov-artiges Spektrum zu erzeugen. Allerdings weisen die beiden Autoren auch auf ein gewichtiges Problem hin: In der Herleitung von Akhiezer haben Entropiefluktuation eine verschwindende Frequenz. In einem Medium, in dem die Entropie nicht erhalten ist (wie es im ISM durch Kühlprozesse zu beobachten ist), enthält Gl. (1.32) einen Quellterm und es folgt für die Entropiefluktuationen eine nicht-verschwindende Frequenz:

$$i\omega t_{\text{cool}} = \frac{4 + 2\beta(1 - (v_A k_z / \omega^2))}{6 + 5\beta(1 - (v_A k_z / \omega^2))} \quad (1.33)$$

Diese Dispersionsrelation hat nur negativ imaginäre Lösung, führt also immer zu instabilen Wellen. Eine vollständige Analyse der Entropiefluktuationen setzt eine Umformulierung der MHD-Gleichung voraus, wie es z.B. in Fichtner u. a. (1991) geschehen ist (Gl. 10)

Entropiefluktuationen werden in dieser Arbeit aus mehreren Gründen nicht berücksichtigt: Erstens stellen sie keine stabile Lösung der MHD-Gleichung im ISM dar, zweitens sind keine starken Quellen für Entropiefluktuationen bekannt (bei der Wellentransmission an Schocks stellen sie ein Nebenprodukt dar), drittens sind Entropiefluktuationen alleine nicht in der Lage Turbulenzspektren zu erklären und viertens können Entro-

piefluktuation keine magnetischen Fluktuationen erklären, diese werden aber gerade beobachtet. Außerdem sind Entropiefluktuationen auf Grund ihrer nicht-elektromagnetischen Natur nicht in der Lage (im Gegensatz zu den anderen MHD-Wellen) die Beschleunigung kosmischer Strahlung zu erklären. Da aber alle Beschleunigungsmechanismen auf elektromagnetischer Turbulenz aufbauen, können Entropiefluktuationen keinen bedeutenden Anteil an der Turbulenz haben.

1.6 Problemstellung für das ISM

Eng mit der Frage, was die Natur der Turbulenz im interstellaren Medium ist, verbunden ist die in dieser Arbeit bearbeitete Problemstellung. Schon früh kam die Frage nach dem Temperaturgleichgewicht des ISM auf (siehe z.B. Spitzer 1948). Die schon früher in der Literatur diskutierten Heizmechanismen und ihr Verhältnis zu den Kühlmechanismen wird in Kapitel 2 behandelt. In Kapitel 3 wird dann auf die Heizung durch Plasmawellen eingegangen, um abschließend in Kapitel 4 ein Modell für die Turbulenz zu entwickeln, das einerseits mit den Meßergebnissen in diesem Kapitel in Einklang steht und andererseits ein thermodynamisches Gleichgewicht zwischen Heizung und Kühlung ergibt.

2 Heizung und Kühlung

Schon Mitte des letzten Jahrhundert wurde die Frage nach der Temperatur des interstellaren Mediums von Spitzer (1948) behandelt. In den folgenden sechs Jahrzehnten gab es immer wieder verschieden Erklärungsversuche, wie sich die Temperatur als Resultat eines thermischen Gleichgewichts im ISM aufrecht erhalten läßt, die aber alle noch keine vollständige Erklärung liefern konnten. In diesem Kapitel werden einige der in der Literatur diskutierten Mechanismen zur Heizung und Kühlung des interstellaren Mediums vorgestellt. Es zeigt sich dabei, daß noch Erklärungsbedarf besteht.

2.1 Kühlmechanismen

Reynolds (1990) hat verschiedene Prozesse zur Kühlung des interstellaren Mediums vorgestellt, deren Effizienz sich mit der Elektronentemperatur ändert; im Gegensatz zu den Heizmechanismen sind die Kühlmechanismen im wesentlichen unumstritten. Für hohe Temperaturen ($T > 10^4$ K) ist die Kühlung durch Stoßanregung schwerer Ionen bestimmt. Da dieser Temperaturbereich nicht betrachtet wird, wird auf diesen Mechanismus im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Unterhalb von $T = 5000$ K wird das interstellare Medium über die Rekombination von Wasserstoff gekühlt. In dem für das warme ionisierte Medium interessanten Temperaturbereich ist eine Kombination aus Linienkühlung und Rekombination wichtig.

2.1.1 Linienkühlung

Neben der Rekombination hat sich die Linienkühlung (*Line cooling*) als entscheidender Kühlprozeß im interstellaren Medium herausgestellt. An dieser Stelle soll das Modell von Osterbrock (1989) näher beschrieben werden, das sich mit der Kühlung durch den Strahlungsübergang verbotener Linien befaßt.

Die erste Erklärung der Linienemission lieferte Bowen (1927) (dessen Artikel von Osterbrock (1988) aufgegriffen wurde), der die bis dahin unbekannt Linien, die sich im Spektrum interstellarer Nebel finden, damit erklärte, daß diese Linien nur in stark verdünnten Gasen vorkommen, da es sich um quantenmechanisch verbotene Linien handelt. Hierbei muß der Begriff des quantenmechanischen Verbots einer Linie aber näher erläutert werden: Die bekannten Auswahlregeln für erlaubte Übergänge benutzen üblicherweise die Dipolnäherung. Die vernachlässigten Terme höherer Ordnung ergeben allerdings weitere erlaubte Übergänge, deren Übergangswahrscheinlichkeit erheblich geringer ist. Genau diese Übergänge werden im nun interstellaren Medium beobachtet. An Hand eines einfachen Modells läßt sich auch erklären, wieso diese Linien nicht im Labor zu beobachten waren. Nimmt man als simples Beispielsystem ein Ion mit den Zuständen 0 und 1, die die Besetzungszahlen N_0 und N_1 haben, so können die vorhandenen freien Elektronen (N_e) durch Kollisionen die Ionen von Zustand 0 in Zustand 1 anregen, wenn ihre kinetische Energie $(1/2)mv^2$ oberhalb der Anregungsenergie χ liegt. Unter diesen Annahmen läßt sich die Anregungsrate schreiben als:

$$N_0 N_e q_{01} \quad (2.1)$$

dabei leitet sich q_{01} aus dem Stoßquerschnitt σ_{01} ab:

$$q_{01} = \int_{\chi - \frac{1}{2}mv^2}^{\infty} dv v \sigma_{01}(v) f(v) \quad (2.2)$$

wobei f die Phasenraumdichte der Elektronen ist. Aus dem angeregten Zustand können Ionen entweder durch Emission eines Photons (Emissionswahrscheinlichkeit A_{10}) oder durch Stöße mit der Rate q_{10} in den Zustand 0 zurückfallen. Dabei ist q_{10} :

$$q_{10} = \int_0^{\infty} dv v \sigma_{10}(v) f(v) \quad (2.3)$$

Für den Fall eines stationären Gleichgewichts erhält man nun

$$N_0 N_e q_{01}(T) = N_1 [A_{10} + N_e q_{10}(T)] \quad (2.4)$$

und damit auch das Verhältnis angeregter und nicht angeregter Ionen zu

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{q_{01}(T)}{q_{10}(T)} \left(1 + \frac{A_{10}}{N_e q_{10}} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

Nun kann man dieses Verhältnis für die beiden Extremfälle $N_e \rightarrow 0$ und $N_e \rightarrow \infty$ bestimmen. Für sehr hohe Elektronendichten ergibt sich dann:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{q_{01}(T)}{q_{10}(T)} = \frac{g_1}{g_0} \exp(-\chi/k_B T) \quad (2.6)$$

wobei g_1 und g_0 die statistischen Gewichte, also die möglichen Besetzungszahlen, sind. Diese Gleichung beschreibt das Verhältnis der Anregungszustände über das Verhältnis der Stoßanregungen, ohne die Photonenemission zu berücksichtigen.

Im entgegengesetzten Fall der geringen Elektronendichte, schreibt sich das Verhältnis als

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_e q_{01}(T)}{A_{10}} \quad (2.7)$$

Aus diesen Ergebnissen folgt, daß im interstellaren Medium mit seinen äußerst geringen Elektronendichten auch Linien beobachtet werden können, die im Labor durch Stöße abgeregt würden und somit kein Photon emittieren.

Osterbrock (1989) hat nun aus dieser Überlegung die Kühlrate bestimmt. Für das beschriebene 2-Niveausystem ergibt sich:

$$L_C = N_1 A_{10} h \nu_{10} \quad (2.8)$$

wobei $h\nu_{10}$ der Energieunterschied der beiden Niveaus als Funktion der Frequenz des emittierten Photons ist. Im nächsten Schritt wird die Kühlrate durch die Zahl der Ionen im Grundzustand beschrieben, in dem Gl. 2.6 in die vorherige Gleichung einsetzt:

$$L_C = N_e N_0 q_{10} h \nu_{10} \left(\frac{1}{1 + \frac{N_e q_{10}}{A_{10}}} \right) \quad (2.9)$$

Diese Kühlrate ist in erster Näherung proportional zu N_e^2 , da die Anzahl der Ionen im Grundzustand die Gesamtzahl der Elektronen approximiert.

2.1.2 Rekombination

Auch bei der Rekombination von Elektronen und Ionen verlieren die Elektronen kinetische Energie. Osterbrock (1989) gibt auch hierfür eine Formel an:

$$L_R = N_e N_p k_B T \beta_A(T) \quad (2.10)$$

in der β_A ein Phasenraumintegral von kinetischer Energie und Stoßquerschnitt ist. Die genauen Werte sollen erst im nächsten Abschnitt angegeben werden.

2.1.3 Summe der Kühlraten

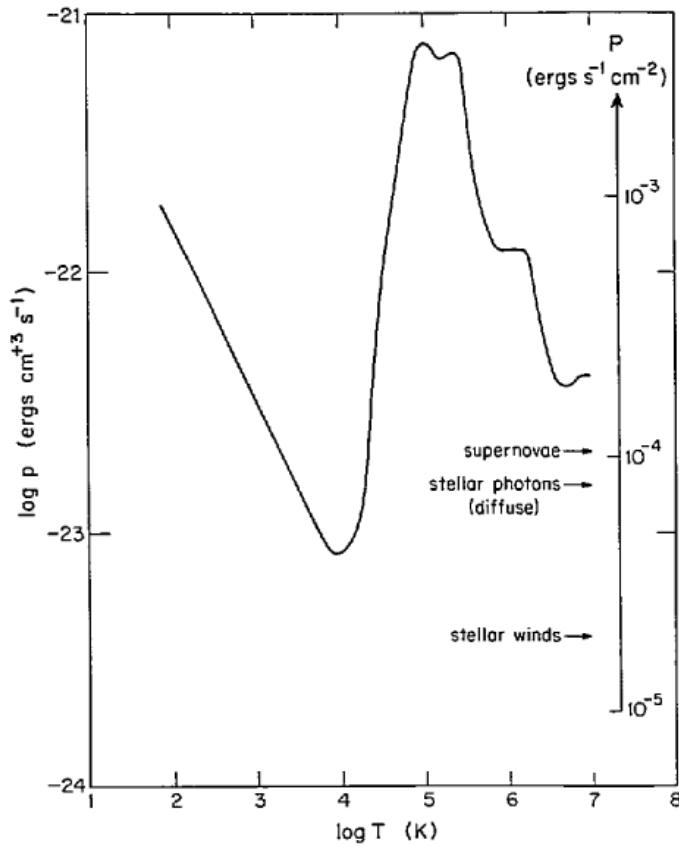


Abbildung 2.1: Der Koeffizient $p(T)$ der Kühlrate in Abhängigkeit von der Temperatur (Quelle: Reynolds (1990))

Während Reynolds (1990) wie im Diagramm angegeben einen Wert von ungefähr $p(T) = 10^{-23} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^3$ vorschlägt, errechnet Osterbrock (1974) einen Wert, der eine Größenordnung tiefer liegt. Hier soll der von Spangler (1991) vorgeschlagene Kompromiß benutzt werden, da sich nicht abschließend klären läßt, welche der beiden Werte richtig ist:

$$L = 5 \cdot 10^{-24} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^3 n_e^2 \quad (2.12)$$

2.2 Heizmechanismen

Während sich diese Arbeit im wesentlichen mit der Heizung des interstellaren Mediums durch die Dämpfung von MHD-Wellen beschäftigt, sollen in diesem Kapitel auch andere

Um die Summe der Kühlraten zu bestimmen, macht man sich die Tatsache zu Nutze, daß im wesentlichen alle Kühlraten proportional zum Quadrat der Elektronendichte sind. Daher schreibt sich die Kühlrate als:

$$L = p(T)n_e^2 \quad (2.11)$$

Dabei ist $p(T)$ der aus den vorher beschriebenen Prozessen (Rekombination und Emission über verbotene Linien) berechnete Koeffizient. Reynolds (1990) zeigt dies in der Abbildung 2.1. Es ist zu erkennen, daß die Kühlrate bei der im warmen ionisierten Medium relevanten Temperatur ein Minimum aufweist. Über den exakten Wert dieses Minimums gibt es in der Literatur keine Einigkeit.

Heizmechanismen betrachtet werden, die in den vergangenen Jahrzehnten als mögliche Lösungen des Temperaturproblems im interstellaren Medium herangezogen wurden. Allerdings liefert keiner der Mechanismen die notwendige Energie zur Aufrechterhaltung eines Temperaturngleichgewichts im warmen ionisierten Medium.

2.2.1 UV-Hintergrundstrahlung

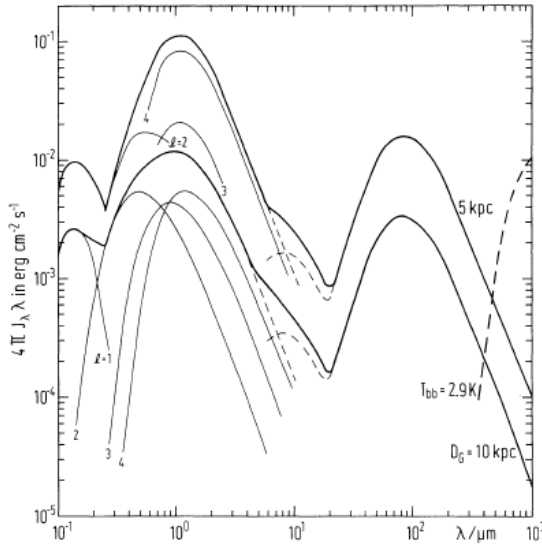


Abbildung 2.2: Die spektrale Energiedichte J_ν im interstellaren Hintergrund nach Mathis u. a. (1983). Die beiden Kurven bezeichnen die Energiedichte im Abstand von 5 bzw. 10 kpc zum galaktischen Zentrum in der Scheibe. Die mit $l = 1, 2, 3, 4$ bezeichneten Kurven beziehen sich auf die im Text angegebenen stellaren Komponenten (Mathis u. a. 1983)

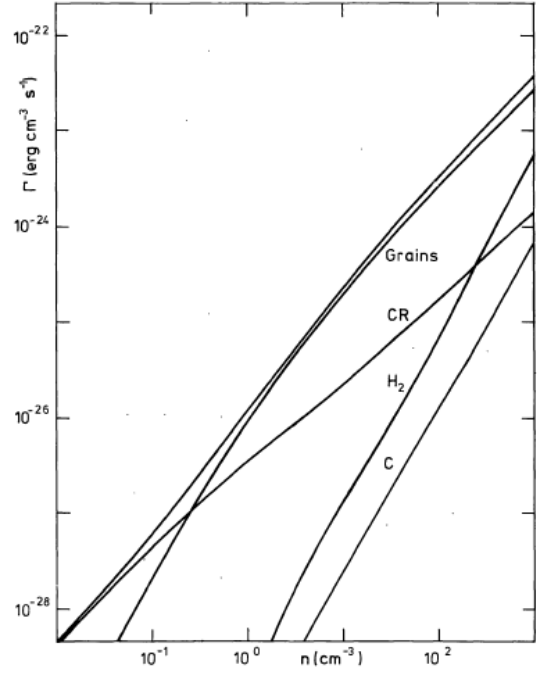


Abbildung 2.3: Die Heizrate durch verschiedene Prozesse: Photoelektronen aus Staubkörnern (Grains), Kosmischer Strahlung (CR), Photodissoziation von H_2 (H_2) und Ionisation von C (C) (de Jong 1977)

Während die Rekombination von vornehmlich Wasserstoffatomen als Kühlprozeß ein wichtige Rolle spielt, ist der entgegengesetzte Prozeß, die Photodissoziation, ein Heizprozeß. In Osterbrock (1989) findet sich eine Herleitung der Heizrate (hier am Beispiel eines reinen H-Nebels):

$$G(H) = n(H^0) \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu \frac{4\pi J_\nu}{h\nu} h(\nu - \nu_0) \alpha_\nu(H^0) \quad (2.13)$$

2 Heizung und Kühlung

Dabei ist J_ν die spektrale Dichte der eintreffenden Photonen und somit ist $J_\nu/(h\nu)$ die Zahl der auftreffenden Photonen der Frequenz ν . Der frequenzabhängige Stoßquerschnitt wird von der Größe α_ν beschrieben, und ν_0 ist die Frequenz, deren Energie der Ionisationsfrequenz des Elements (also in diesem Fall den 13.6 eV des Wasserstoffatoms) entspricht.

Das Spektrum J_ν wird zum Beispiel von Mathis u. a. (1983) beschrieben. Hier ist deren Grafik in Abb. 2.2 wiedergegeben. Zur Bestimmung dieses interstellaren UV-Hintergrundes haben Mathis u. a. (1983) das bekannte Hintergrundfeld in Sonnennähe durch vier verschiedene Quellentypen beschrieben: Die Komponente 1 ist eine UV-Komponente, Komponente 2 und 3 sind Schwarzkörperstrahler mit den Temperaturen $T_2 = 7500$ K und $T_3 = 4000$ K, außerdem gibt es eine Quelle im nahen Infrarot, die einer Temperatur von $T_4 = 3000$ K entspricht.

de Jong (1977) betrachtet zur Ionisation die Strahlung mit Wellenlängen kleiner 912 \AA , die der Ionisierungsenergie des Wasserstoffs entsprechen. Dabei werden zwei Prozesse betrachtet: die Ionisation von Kohlenstoff und die Photodissoziation von H_2 . In der aus seinem Artikel entnommenen Abb. 2.3 erkennt man deutlich, daß für die interessante Dichte $n_H = 0.2 \text{ cm}^{-3}$ beide Prozesse weit weniger Energie liefern als die Vergleichsprozesse und erheblich weniger als die Kühlrate, die nach Gl. (2.12) $L=3.2 \cdot 10^{-26} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ beträgt. Zu der Abbildung ist anzumerken, daß die von de Jong (1977) berechnete Heizrate durch Staub ("Grains") sich als falsch erwiesen hat (siehe dazu auch den nächsten Abschnitt).

2.2.2 Photoelektronen aus Staubkörnern

Von Watson (1972) wurde ein alternativer Heizmechanismus vorgeschlagen (letztlich hat Watson nur eine Idee von Spitzer (1948) aufgegriffen, der allerdings keine experimentellen Daten hatte), nachdem sich herausgestellt hatte, daß die Photoionisation des Gases deutlich zu wenig Energie liefert. Bei diesem Mechanismus wird der interstellare Staub durch UV- und Röntgen-Strahlung ionisiert.

Der interstellare Staub besteht im wesentlichen aus schwereren Elementen (C, O, N, Si, Mg, Fe), wobei insbesondere der Kohlenstoff komplexe Verbindungen eingeht, meist sogenannte polyzyklische aromatische Kohlenwasserstoffe wie Anthracen (s. Li u. Greenberg 1997). Die Größenverteilung der Staubteilchen wurde von Mathis u. a. (1977)

beschrieben und liegt zwischen 5 nm und 1 μm .

Die Emission der Photoelektronen unterscheidet sich nicht wesentlich von der Ionisierung der Gasatome, allerdings ist die Emissionseffizienz, also die Zahl der pro Photon emittierten Elektronen, für Staubkörner um rund eine Größenordnung höher. Außerdem weisen Staubkörner einen wesentlich größeren Stoßquerschnitt als Einzelatome auf.

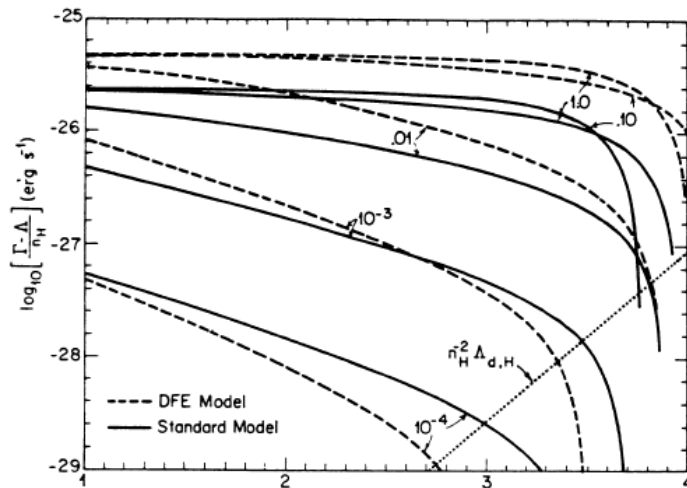


Abbildung 2.4: Die Heizrate nach Draine (1978) für Elektronenemission aus Staubkörnern. Mit durchgezogenen Linien wird das Standardmodell für den UV- und Röntgen-Hintergrund beschrieben, DFE bezeichnet eine Deltadistribution (Draine 1978)

Draine (1978) hat die Rechnungen von de Jong (1977) um zusätzliche wichtige Staubkühleffekte erweitert. Er hat damit folgende Prozesse berücksichtigt: Emission eines Photoelektronen (in der Ionisation analoger Prozeß), Kühlung durch Ioneneinfang und Kühlung durch Elektroneneinfang. Gerade die Kühlprozesse werden mit steigender Temperatur erheblich effizienter und führen bei Temperaturen, die 10^4 K erreichen, zu einem starken Einbruch der Heizrate. In Abbildung 2.4 sieht man deutlich, daß für Elektronendichten $n_e < 0.1 \text{ cm}^{-3}$ und Temperaturen $T > 10^4$ K die Heizrate unterhalb von $10^{-27} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ liegt, dort ist allerdings die Kühlrate pro Wasserstoffdichte aufgetragen), also absolut vernachlässigbar gegenüber der Kühlrate ist.

2.2.3 Kosmische Strahlung

Das interstellare Medium wird auch durch kosmische Strahlung geheizt, wobei die hochenergetischen Teilchen Wasserstoff und andere Atome ionisieren und damit kinetische Energie freisetzen. Im Gegensatz zu den vorher betrachteten ionisierenden Heizprozessen tritt hier aber ein zusätzliches Problem bei der Bestimmung der Heizrate auf: Das Spektrum kosmischer Strahlung ist im hochenergetischen Bereich relativ gut bekannt (hier bezieht sich *hochenergetisch* auf Energien $> 5 \text{ GeV}$), für die Ionisierung des Wasser-

2 Heizung und Kühlung

stoffs genügen aber schon 13.6 eV und hier ist über das Spektrum fast nichts bekannt. Dies liegt im wesentlichen daran, daß das Spektrum der kosmischen Strahlung in der Heliosphäre moduliert wird und es immer noch an Satellitenmissionen außerhalb der Heliosphäre mangelt.

Im Gegensatz zu den meisten anderen Autoren haben Lerche u. Schlickeiser (1982) ein selbstkonsistentes Modell entwickelt, daß auch das Spektrum der niederenergetischen kosmischen Strahlung berücksichtigt. Die beiden Autoren haben in ihrem Artikel zwei Prozesse berücksichtigt, die eine Interaktion der kosmischen Strahlung mit dem interstellaren Medium beschreiben: Die Ionisierung neutraler Wasserstoffatome und die adiabatische Kühlung in galaktischen Winden. Unter der Annahme eines Potenzgesetzes als Eingangsspektrum für die kosmische Strahlung (dies erscheint gerechtfertigt, da die Schockbeschleunigung als einer der wichtigsten Beschleunigungsprozesse für hochenergetische kosmische Strahlen eine Potenzgesetzverteilung liefert) wird dann ein stationärer Zustand angenommen und mit Hilfe der Vlasov-Gleichung das resultierende Spektrum berechnet. Diese Rechnung soll hier in groben Zügen rekapituliert werden.

Zuerst sollen die Prozesse betrachtet werden, die zu einem Impuls- und damit auch Energieverlust der kosmischen Strahlung führen. Auf der einen Seite ist dies die Ionisation, die sich durch die Bethe-Bloch Formel beschreiben läßt (Bloch 1933):

$$\frac{dp}{dt} = -5 \cdot 10^{-19} q^2 n [\text{cm}^{-3}] \left(\frac{p}{m_p c} \right)^{-2} \left(11.3 + 2 \log \frac{p}{m_p c} \right) [\text{eV cm}^{-1}] \quad (2.14)$$

Hier soll angenommen werden, daß die kinetische Energie der Teilchen mit Masse m_p und Ladung q kleiner ist als die Ruheenergie des Protons (938 MeV). Unter dieser Annahme kann der Logarithmus vernachlässigt werden und es ergibt sich:

$$\frac{dp}{dt} \simeq \chi^n(z) \left(p \left[\frac{\text{eV}}{c} \right] \right)^{-2} \frac{\text{eV}/c}{\text{s}} \quad (2.15)$$

Die Konstante χ hat einen Wert von $1.5 \cdot 10^{11} q^2 (\text{eV}/c)^2 \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$. Die galaktische Höhe wird durch die Variable z beschrieben, was in diesem Modell von Bedeutung ist, da im folgenden eine Injektion kosmischer Strahlung in der galaktischen Ebene ($z = 0$) angenommen wird.

Neben der Ionisierung spielt für die kosmische Strahlung auch die adiabatische Kühlung durch den galaktischen Wind eine Rolle insbesondere bei hohen Energien (Lerche u. Schlickeiser 1980). Hier ergibt sich folgender Impulsverlust durch einen galaktischen

Wind der Geschwindigkeit \mathbf{V}

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{3}p \nabla \cdot \mathbf{V} \frac{eV/c}{s} \simeq -\frac{1}{3} \frac{dV}{dz} p \frac{eV/c}{s} \quad (2.16)$$

Im letzten Schritt wurde eine eindimensionale kartesische Geometrie angenommen. In Abbildung 2.5 werden die beiden Verlustprozesse miteinander verglichen.

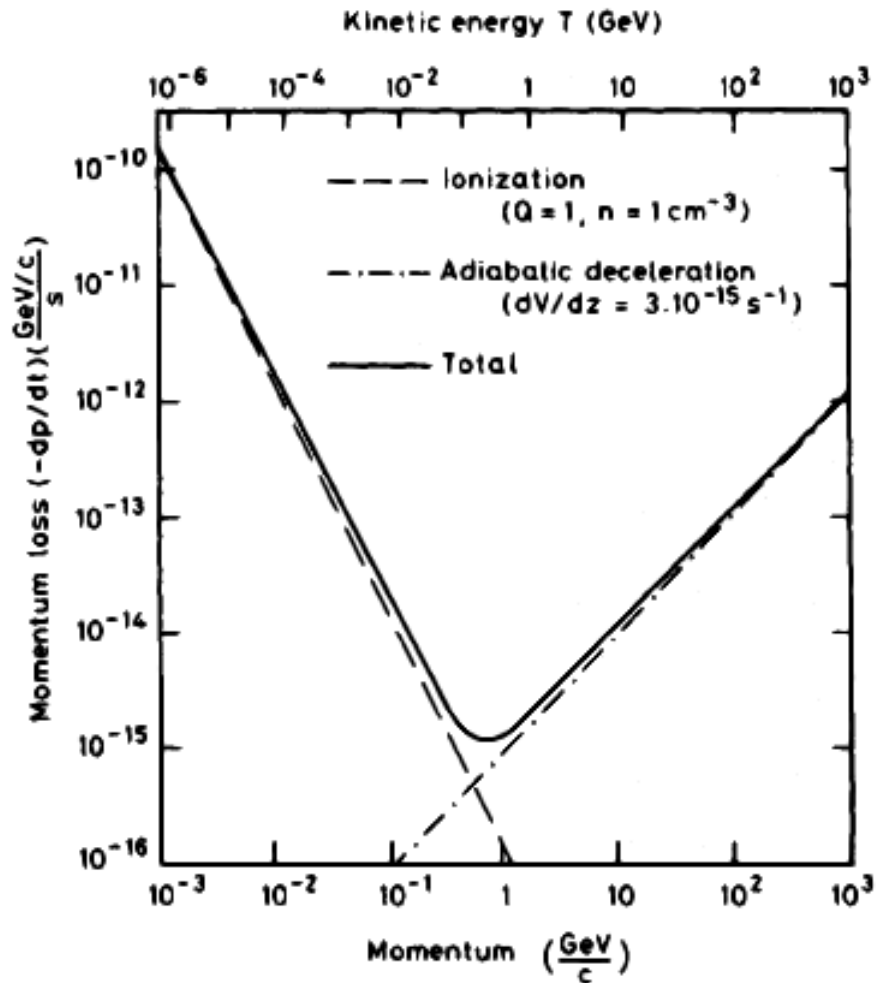


Abbildung 2.5: Die Verlustprozesse für kosmische Strahlung in einem Medium der Dichte $n = 1 \text{ cm}^{-3}$ und einem galaktischen Wind der sich um $dV/dz = 3 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ verändert. Nach Lerche u. Schlickeiser (1982)

Nun kann man die Fokker-Planck-Gleichung für die kosmische Strahlung ansetzen

und erhält

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D(p, z) \frac{\partial \tilde{N}}{\partial z} - V(z) \tilde{N} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial p} \left(\left(\frac{1}{3} \frac{dV}{dz} p - \beta(p, z) \right) \tilde{N} \right) + \lambda w(p) n(z) \frac{\partial \tilde{N}}{\partial M} = S_1(z, p, M, t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Der Diffusionstensor wird hier mit $D(p, z)$ abgekürzt, β ist der Impulsverlust durch Ionisierung, λ die Massendichte des interstellaren Mediums, M die Masse des durchquerten Mediums und S_1 ein Quellterm für die kosmische Strahlung. $w(p)$ ist die Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens der kosmischen Strahlung, diese kann im relativistischen Fall mit c approximiert werden.

Leider ist die Fokker-Planck-Gleichung auch in diesem Fall nicht zu lösen, durch einige Annahmen läßt sich aber eine gute Näherung angeben. Lerche u. Schlickeiser (1982) haben im weiteren den Diffusionstensor als separabel in p und z angenommen und dann die Green's Funktion zur Lösung der inhomogenen DGL verwendet. Hierbei wurde ein Potenzgesetz für die Quellfunktion S_1 benutzt, die Injektion der kosmischen Strahlung fand auf der Höhe $z = 0$ statt. Als letzter Schritt wurden dann Parameterbereiche von Impuls p und Höhe z angegeben, in denen einer der Prozesse (Diffusion, Ionisation, adiabatische Kühlung) dominierte. Unter der Prämisse eines stationären Zustandes ($\partial \tilde{N} / \partial t = 0$) läßt sich damit das Gleichgewichtsspektrum errechnen. Dieses Spektrum läßt sich in zwei Bereiche aufteilen: Im ersten Bereich dominiert die Ionisierungsrate und die Intensität steigt an bis zu dem Punkt, an dem die Diffusion die Oberhand gewinnt und das Spektrum wieder abfällt.

Im letzten Schritt gilt es, die Ionisationsrate zu berechnen. Dies geschieht mit Hilfe des Phasenraumintegrals über den Wirkungsquerschnitt:

$$f_{\text{CR}}(n, r, X(z)) = n(r, \phi, z) c \int_I^\infty dp \sigma_c^H(p) \beta(p) N(r, \phi, X(z), p) \quad (2.18)$$

Die untere Schwelle der Integration entspricht der Ionisierungsenergie des Wasserstoffs. In Abbildung 2.6 ist die Ionisierungsrate wiedergegeben.

Lerche u. Schlickeiser (1982) erhalten als Heizrate damit Werte von $10^{-25} n_H [\text{cm}]^{-3}$ erg $\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$ für Höhen $z = 0$ und $10^{-27} n_H [\text{cm}]^{-3}$ erg $\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$ für Höhen $z \gg 10^3$ pc. Damit liegt die Heizrate in der galaktischen Ebene zwar in der Größenordnung der Kühlrate (2.12), dieses Ergebnis kann allerdings nicht als eindeutiger Wert verstanden werden, da auf der einen Seite hier ein Modell angenommen wurde, bei dem Teilchen

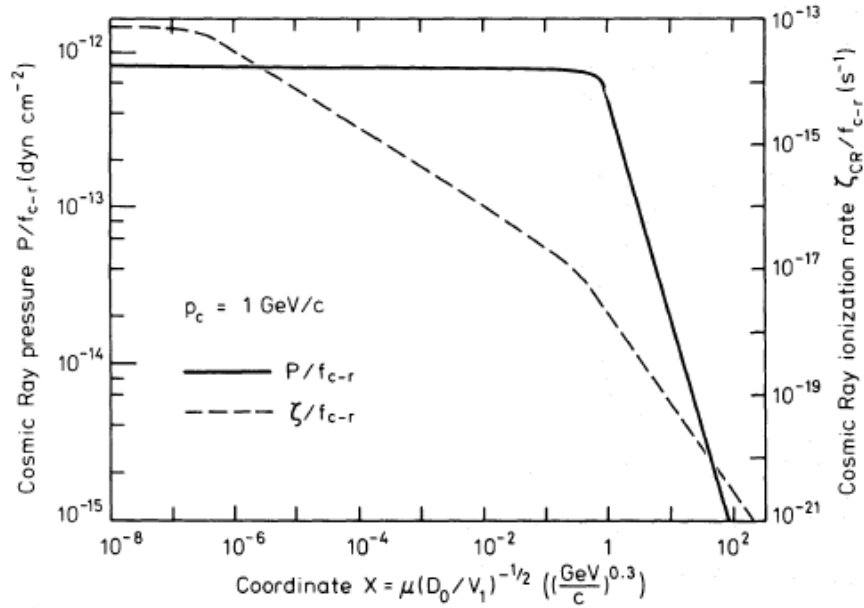


Abbildung 2.6: Der Druck der kosmischen Strahlung (P) und die Ionisierungsrate (ζ), hier für $p_c = 1 \text{ GeV}/c$. p_c definiert sich über $dp/dt(\text{adiabatic}) = dp/dt(\text{ionization})$. Nach Lerche u. Schlickeiser (1982)

nur in der galaktischen Ebene injiziert wurden und auf der anderen Seite das Gleichgewichtsspektrum für kleine Energien unter der Annahme interpoliert wurde, daß das Injektionsspektrum auch in diesem Bereich ein Potenzgesetz darstellt. Die angegebenen Heizraten sind also nur als absolute Obergrenze zu verstehen.

2.3 Thermisches Gleichgewicht

Die bisher in diesem Kapitel betrachteten Heizprozesse sind nicht in der Lage, ein thermisches Gleichgewicht mit der Kühlrate (2.12) aufrecht zu erhalten. Es ist daher notwendig, nach weiteren Prozessen zu suchen, die die erforderliche Energie zu liefern in der Lage sind. Ein solcher Prozeß ist die Heizung durch die Dämpfung von Plasmawellen. Verschiedene Autoren (u.a. Ferriere u. a. 1988; Spangler 1991) haben sich diesem Prozeß gewidmet. Allerdings war die Betrachtung in den meisten Fällen unvollständig oder aber es wurden nicht nachvollziehbare Annahmen über die Turbulenz des interstellaren Mediums gemacht.

Im nächsten Kapitel wird eine vollständige Analyse der Dämpfung von Plasmawel-

lonturbulenz unter der Annahme eines möglichst variablen Spektrums durchgeführt, um zu demonstrieren, daß sich hier eine mögliche Lösung der Heizfrage des interstellaren Mediums findet.

In dieser Arbeit wird grundsätzlich die Annahme gemacht, daß sich das ISM im thermischen Gleichgewicht befindet. Betrachtet man das ISM als Ganzes ist diese Annahme nicht gerechtfertigt. Eine Beobachtung der einzelnen Phasen des ISM zeigt aber, daß sich die Phasen im Druckgleichgewicht befinden und sich für jede Phase ein ungefähres thermisches Gleichgewicht einstellt. Da diese Arbeit nur eine Phase des ISM exemplarisch heranzieht, erscheint die Prämisse des thermischen Gleichgewichts gerechtfertigt.

2.4 Energiebilanz

Neben der Frage der Heiz- und Kühlraten muß auch die Frage der Energiebilanz geklärt werden. Unter Berücksichtigung des McKee-Ostriker-Modells sollte die Energie zur Heizung des ISM im wesentlichen mit der Energie der Supernovae übereinstimmen. Zur Bestimmung des Energieeintrags aus Supernovae sei folgendes Modell angenommen: Pro Jahrhundert sollen drei Supernovae vom Typ IIa explodieren. Jede IIa Supernova hat eine Energie von 10^{51} erg. Die Galaxis habe eine zylindrische Form mit einem Radius von 15000 pc und einer Höhe von 1000 pc. Dann ergibt sich eine Rate von $4.5 \cdot 10^{-26}$ erg s^{-1} cm^{-3} bzw. 10^{42} erg s^{-1} für die gesamte Galaxie. Dies ist bis auf den Faktor 0.7 die Kühlrate. Es ist also davon auszugehen, daß die Annahme eines thermodynamischen Gleichgewichts mit den angegebenen Parameter, als Modell verwendbar ist.

In der Energiebilanz spielen noch andere Prozesse eine Rolle, bei genauer Betrachtung zeigt sich aber, daß diese gegenüber den Prozessen der Supernova (auf der Eingangsseite) und der interstellaren Heizung (auf der Ausgangsseite) vernachlässigt werden können.

Zu diesen Prozessen zählt unter anderem die Beschleunigung kosmischer Strahlung, die nur etwa 10^{40} erg s^{-1} benötigt (Schlickeiser 2002). Als weiterer Energieerzeugungsprozeß werden auch stellare Winde diskutiert, van Buren (1985) zeigt aber, daß der Energieeintrag um eine Zehnerpotenz kleiner ist als der durch Supernovae.

3 Plasmawellen

In den vorherigen Kapiteln wurde die Turbulenz des ISM durch Plasmawellen dargestellt. In diesem Kapitel werden die verschiedenen Wellenmoden und ihre Eigenschaften vorgestellt. Von der Vielzahl der existierenden Wellenmoden sollen hier nur die betrachtet werden, für die die Wellenfrequenz ω kleiner als die Ionenzyklotronfrequenz Ω_{pi} ist, was für nahezu alle Plasmawellen des ISM zutrifft.

Für die weiteren Berechnungen benötigt man die Dispersionsrelation der Wellenmoden, ihre Polarisation und die Relation zwischen Dichte- und Magnetfeldfluktuationen.

3.1 Dispersionsrelationen

Die Dispersionsrelation einer Wellenmode ist eine formale Beziehung zwischen Frequenz ω und Wellenzahl \mathbf{k} ,

$$\omega = \omega(k)$$

die die Wellenmode eindeutig klassifizieren. Hiermit lassen sich Phasen- und Gruppengeschwindigkeit berechnen

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{k} \\ v_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Dispersionsrelation benötigt man den Dielektrizitätstensor ϵ_{ij} , der sich aus dem Leitfähigkeitstensor σ_{ij} ableiten lässt. Der Dielektrizitätstensor beschreibt die Reaktion eines Stoffes auf elektrische Felder, so also auch auf elektromagnetische Wellen. In der Literatur werden bei der Berechnung von ϵ_{ij} im wesentlichen zwei verschiedene Wege beschritten, ein fluidtheoretischer Ansatz, wie bei Melrose (1980) oder ein kinetischer wie bei Montgomery u. Tidman (1964); Swanson (1989); Schlickeiser (2002). Hier soll der Fluidansatz weiter verfolgt werden.

3.1.1 Maxwell-Gleichungen

Für die Beschreibung von Wellenphänomenen in elektrisch geladenen und magnetisierten Medien benötigt man vorderhand die Maxwell-Gleichungen.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (3.4)$$

Hier bezeichnen \mathbf{E} und \mathbf{B} das elektrische bzw. magnetische Feld, \mathbf{j} ist der Strom und die Größe ρ kennzeichnet die Ladungsdichte.

Als erster Lösungsschritt werden die Maxwell-Gleichung fouriertransformiert:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi i}{c} \mathbf{j} - \frac{\omega}{c} \mathbf{E} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -4\pi i \rho \quad (3.8)$$

Hinzu kommt noch die Kontinuitätsgleichung für den elektrischen Strom bzw. deren Fouriertransformierte

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (3.9)$$

$$\omega \rho = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} \quad (3.10)$$

Gleichung (3.7) in Gl. (3.2) eingesetzt ergibt die Wellengleichung:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j} \quad (3.11)$$

3.1.2 Fluidansatz

Um die Wellengleichung (3.11) zu lösen, wählt man den Ansatz

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ext}} + \mathbf{j}^{\text{ind}} \quad (3.12)$$

bei dem der Strom aus einem durch Störungen im elektrischen Feld induzierten Anteil und einem externen Anteil beschrieben wird. Der induzierte Anteil \mathbf{j}^{ind} gehorcht dem ohmschen Gesetz (Ohm 1827)

$$\mathbf{j}^{\text{ind}} = \hat{\sigma} \mathbf{E} \quad (3.13)$$

wobei σ_{ij} der Leitfähigkeitstensor ist. Es ist nützlich, das ohmsche Gesetz in eine Form zu bringen, in der der Dielektrizitätstensor ϵ_{ij} verwendet wird. Zwischen den beiden Tensoren besteht folgender Zusammenhang:

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi\mathbf{i}}{\omega}\sigma_{ij} \quad (3.14)$$

Setzt man nun Gl. (3.13) in Gl. (3.11) ein, so erhält man

$$\Lambda_{ij}E_j = -\frac{4\pi\mathbf{i}}{\omega}j_i^{\text{ext}} \quad (3.15)$$

Der Maxwell-Operator Λ_{ij} ist dabei definiert als

$$\Lambda_{ij} = \frac{c^2}{\omega^2}(k_ik_j - \delta_{ij}k^2) + \epsilon_{ij} \quad (3.16)$$

Im Verlauf der weiteren Berechnungen wird der externe Anteil \mathbf{j}^{ext} vernachlässigt, da durch die hohe Leitfähigkeit des interstellaren Mediums keine statischen elektrischen Felder entstehen können, die einen solchen externen Strom erzeugen können.

Nun soll der Dielektrizitätstensor, wie vorher beschrieben, mit Hilfe einer fluiddynamischen Theorie hergeleitet werden, wobei hier die Berücksichtigung eines Elektronen- und Protonenfluids genügt. Dazu wird die Bewegungsgleichung eines Fluids aus Teilchen der Masse m_α und der (vorzeichenbehafteten) Ladung q_α benötigt

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} = q_\alpha \mathbf{E} + q_\alpha \frac{\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}}{c} \quad (3.17)$$

wobei der Index α die Teilchenspezies kennzeichnet. Nach einer Fouriertransformation lässt sich Gl. (3.17) nach \mathbf{u}_α auflösen

$$u_{j\alpha} \left(\omega \delta_{ij} - \mathbf{i} \frac{q_\alpha}{|q_\alpha|} \Omega_\alpha \epsilon_{ijk} \frac{B_k}{|\mathbf{B}|} \right) = \mathbf{i} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_i \quad (3.18)$$

Hier wird die Zyklotronfrequenz Ω_α eingeführt, die definiert ist als

$$\Omega_\alpha = \frac{|q_\alpha|B}{m_\alpha c} \quad (3.19)$$

Aus den berechneten Fluidgeschwindigkeiten der einzelnen Spezies lässt sich jetzt der Strom bestimmen.

$$j_i = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha)_i \quad (3.20)$$

3 Plasmawellen

Diese Gleichung soll nun in die Form des ohmschen Gesetzes gebracht werden. Dazu wird der Tensor τ_{ij} eingeführt, für den gelten soll:

$$\left(\omega\delta_{ij} - \mathbf{i}\frac{q_\alpha}{|q_\alpha|}\Omega_\alpha\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{|\mathbf{B}|}\right)\tau_{ij} = \delta_{il} \quad (3.21)$$

Daraus folgt die Form des Tensors

$$\tau_{ij}^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & \mathbf{i}\frac{\text{sgn}(q_\alpha)\omega\Omega_\alpha}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & 0 \\ \mathbf{i}\frac{\text{sgn}(q_\alpha)\omega\Omega_\alpha}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Unter Verwendung dieses Tensor wird Gl. (3.18) nach \mathbf{u}_α aufgelöst:

$$u_{\alpha i} = \mathbf{i}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\tau_{ij}E_j \quad (3.23)$$

In Gl. (3.20) eingesetzt liefert dies:

$$j_i = \sum_\alpha \frac{\mathbf{i}q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha \omega} E_j \tau_{ij} \quad (3.24)$$

Diese Gleichung hat nun dieselbe Form wie das ohmsche Gesetz, daher läßt sich der Leitfähigkeitstensor direkt ablesen:

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathbf{i}q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha \omega} \tau_{ij} \quad (3.25)$$

3.1.3 Dispersionsrelation im kalten, magnetisierten Plasma

Durch die Kenntnis von τ_{ij} sind der Dielektrizitätstensor ϵ_{ij} und der Maxwell-Operator Λ_{ij} bekannt. Somit kann man nun die Lösung des Gleichungssystems

$$\Lambda_{ij}E_i = 0 \quad (3.26)$$

suchen. Die Bedingung zur Lösbarkeit dieses Systems ist

$$\det \Lambda = 0 \quad (3.27)$$

Es ist üblich, den Dielektrizitätstensor ϵ_{ij} durch die Stix-Parameter (Stix 1962)

auszudrücken,

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow \Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

θ ist der Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{B} , wobei das geordnete Magnetfeld entlang der z -Achse orientiert ist. Außerdem wird der Brechungsindex n verwendet:

$$n = \frac{ck}{\omega} \quad (3.30)$$

Die Stix-Parameter lassen sich aus den vorhergehenden Überlegungen leicht ermitteln:

$$S = \frac{1}{2}(R + L) \quad (3.31)$$

$$D = \frac{1}{2}(R - L) \quad (3.32)$$

$$R = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_{\alpha}} \quad (3.33)$$

$$L = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_{\alpha}} \quad (3.34)$$

$$P = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \quad (3.35)$$

Dabei wurde die Plasmafrequenz $\omega_{p\alpha}$ definiert:

$$\omega_{p\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}} \quad (3.36)$$

Mit den Stix-Parametern schreibt sich die Determinante als

$$\det \Lambda = An^4 - Bn^2 + C \quad (3.37)$$

mit den Definitionen

$$A = P \cos^2 \theta + S \sin^2 \theta \quad (3.38)$$

$$B = (S^2 - D^2) \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta) \quad (3.39)$$

$$C = P(S^2 - D^2) \quad (3.40)$$

Die Lösung dieser biquadratischen Gleichung ist offensichtlich

$$n^2 = n_{\pm}^2 = \frac{B \pm F}{2A} \quad (3.41)$$

wobei

$$F = \sqrt{B^2 - 4AC} \quad (3.42)$$

ist. Die exakte Lösung ist in den meisten Fällen zu kompliziert, als daß sie verwendet werden könnte. Da allerdings in dem betrachteten Wellenzahlbereich der Unterschied zwischen der exakten Lösung und der Näherung zu vernachlässigen ist, werden statt der exakten Lösung Näherungen für verschiedene Wellenzahlbereiche verwendet. In diesem Fall also $\omega \ll \Omega_i$. Die X- und O-Moden als Grenzfälle für $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi/2$, sowie die Whistler-Mode (die sich im Bereich $\Omega_e > \omega > \Omega_i$ befinden) finden in dieser Arbeit keine Beachtung. Einzig die Lösung der Alfvén-Mode

$$\omega^2 = v_A^2 k^2 \cos^2 \theta \quad (3.43)$$

und der schnellen magnetosonischen Mode

$$\omega^2 = v_A^2 k^2 \quad (3.44)$$

werden im Weiteren betrachtet. Die Alfvén-Geschwindigkeit ist definiert über:

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_i n_i}} \quad (3.45)$$

3.1.4 Dispersionsrelation im warmen, magnetisierten Plasma

Für den Fall des warmen Plasmas müssen zum vorherigen Abschnitt analoge Ansätze gefunden werden. Eine vollständige Lösung ist nur im Rahmen einer kinetischen Theorie zu erwarten. Da hier allerdings nur ein bestimmter Wellenlängenbereich interessant ist, nämlich die niederfrequenten Wellen und außerdem der Fall eines kleinen Plasma- β zutrifft (β ist das Verhältnis kinetischer zu magnetischer Energiedichte), kann man an dieser Stelle den approximativen Ansatz von Sitenko (1967) wählen:

$$\epsilon_{ij} = \frac{c^2}{v_A^2} \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\omega}{\Omega_i} & 0 \\ -i\frac{\omega}{\Omega_i} & 1 & -i\frac{\Omega_i}{\omega} \tan \theta \\ 0 & i\frac{\Omega_i}{\omega} \tan \theta & -\frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v_s^2 \cos^2 \theta}\right) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \frac{c}{nV_e \cos \theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \left(\frac{\omega n V_e \sin \theta}{\Omega_e c}\right) & -i\frac{\omega}{\Omega_e} \tan \theta \\ 0 & i\frac{\omega}{\Omega_e} \tan \theta & \frac{c^2 \cos^2 \theta}{n^2 V_e^2} \end{pmatrix}$$

Mit diesem phänomenologischen Ansatz werden thermische Effekte in die Stix-Parameter inkorporiert, und es ergeben sich nun drei Lösungen: Neben der Alfvén-Welle und der schnellen magnetosonischen Welle, die auch im kalten Plasma zu finden sind, gibt es eine langsame magnetosonische Welle. Die Dispersionsrelationen der beiden magnetosonischen Wellen sind dann:

$$\omega^2 = \begin{cases} k^2 v_A^2 \frac{1}{1 - \frac{v_s^2}{v_A^2} \sin^2 \theta} & \text{schnelle magnetosonische Welle} \\ k^2 v_s^2 \cos^2 \theta \frac{1}{1 + \frac{v_s^2}{v_A^2} \sin^2 \theta} & \text{langsame magnetosonische Welle} \end{cases} \quad (3.47)$$

Hierbei wurde die Schallgeschwindigkeit eingeführt, die in isothermen Plasmen definiert ist als:

$$v_s = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \quad (3.48)$$

Neben der Methode von Stix zur Bestimmung der Dispersionsrelationen, ist es üblich, die Wellengleichung durch Störung der MHD-Gleichungen zu lösen. Im nächsten Abschnitt wird dieses Verfahren detailliert beschrieben. Der Vollständigkeit halber wird hier bereits das Ergebnis für die Dispersionsrelation vorweggenommen.

$$\omega^2 = \begin{cases} k^2 v_A^2 \cos^2 \theta & \text{Alfvén-Welle} \\ \frac{k^2 v_A^2}{2} \left((1 + \beta) + \sqrt{(1 + \beta)^2 - 4\beta \cos^2 \theta} \right) & \text{schnelle magnetosonische Welle} \\ \frac{k^2 v_A^2}{2} \left((1 + \beta) - \sqrt{(1 + \beta)^2 - 4\beta \cos^2 \theta} \right) & \text{langsame magnetosonische Welle} \end{cases} \quad (3.49)$$

3.2 Dichtefluktuationen

Wie schon in Kapitel 1.3 dargestellt wurde, lassen sich aus den Beobachtungen nur Dichtefluktuationen im ISM ableiten. Für die weiteren Rechnungen werden allerdings die Spektren der magnetische Fluktuationen benötigt. In diesem Abschnitt wird eine Beziehung zwischen Dichte- und Magnetfeldfluktuationsspektren unter Zuhilfenahme der MHD-Gleichung berechnet. Diese Methode hat allerdings einen schwerwiegenden Nachteil: Im Rahmen der MHD-Theorie zeigen Alfvén-Wellen keine Dichtefluktuationen. Daher soll im zweiten Teil dieses Abschnitts eine weitere Methode vorgestellt werden, die durch eine Entwicklung zu höherer Ordnung die Dichtefluktuationen von Alfvén-Wellen beschreiben kann.

3.2.1 Die MHD-Gleichungen

Die MHD-Gleichungen leitet man her durch Momentenbildung der Vlasov-Gleichung (Vlasov 1945):

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha \quad (3.50)$$

die die Entwicklung der Teilchenverteilung in einem stoßfreien Plasma exakt beschreibt. Zwar läßt sich ein Plasma mit Hilfe der MHD-Gleichungen einfacher als durch Integration der Vlasov-Gleichung über den Phasenraum beschreiben, jedoch bleiben Effekte höherer Ordnung unberücksichtigt. Zu diesen Effekten gehören zum Beispiel alle Effekte, die sich auf endliche Gyroradien der Teilchen beziehen.

In der einfachsten Formulierung lauten die MHD-Gleichungen:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0 \quad (3.51)$$

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_m (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 \quad (3.52)$$

$$\nabla p = v_s^2 \nabla \rho_0 \quad (3.53)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (3.55)$$

Um eine Verwechslung mit der Ladungsdichte ρ zu vermeiden, wird hier die Massendichte mit ρ_m bezeichnet. Zusätzlich werden häufig noch resistive Terme (verursacht durch die endliche Leitfähigkeit des Plasmas) oder auch Hall-Effekte (zurückzuführen auf die Interaktion von Strömen mit dem Magnetfeld) eingeführt. Während die Hall-Terme im ISM generell keine Rolle spielen, da sich alle Prozesse oberhalb der Hall-Schwelle $cv_A/(v_0\omega_{pi}) = 10^8$ cm abspielen, müssen die resistiven Terme in jedem Fall beachtet werden, da sie den entscheidenden Teil der Heizung verursachen. Die resistiven Terme werden allerdings in diesem Abschnitt außer Acht gelassen, da sie keinen relevanten Einfluß auf die Dichtefluktuation haben. Dies läßt sich dadurch begründen, daß die Dichtefluktuation nur durch den momentanen Zustand der Welle und nicht durch die zeitliche Änderung bestimmt sind.

Ziel dieses Abschnitts ist es, mit Hilfe der MHD-Gleichungen die prinzipiellen Eigenschaften von Plasmawellen herauszuarbeiten. Die Methode der Wahl hierbei ist, die MHD-Gleichungen um einen kleinen Parameter zu variieren und diese Variation als Welle zu interpretieren. Hierbei ergeben sich auch die im vorherigen Abschnitt hergeleiteten

Dispersionsrelationen, allerdings gewinnt man dabei keine Einsicht in die dielektrische Natur des Plasmas, also weder Dielektrizitäts- noch Leitfähigkeitstensor lassen sich aus dieser Theorie ableiten.

Variation der MHD-Gleichung

Als erster Schritt der Variation werden mit Hilfe der Gl. (3.53) und (3.55) das elektrische Feld \mathbf{E} und der Druck p aus den Gleichungen eliminiert.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0 \quad (3.56)$$

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_m (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + v_s^2 \nabla \rho_m - \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} = 0 \quad (3.57)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.58)$$

Nun geht man davon aus, daß mit einer Welle im Plasma eine Störung des Magnetfeldes, der Dichte und der Fluidgeschwindigkeit einhergeht (s. auch Koskinen 2001).

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \quad (3.59)$$

$$\rho_m = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t) \quad (3.60)$$

$$\mathbf{v} = 0 + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) \quad (3.61)$$

Das mittlere Magnetfeld \mathbf{B}_0 und die mittlere Dichte ρ_0 sind Konstanten.

Einsetzen in die Gl. (3.51) - (3.53) und vernachlässigen quadratischer Terme liefert:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) = 0 \quad (3.62)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + v_s^2 \nabla \rho_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1)}{\mu_0} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (3.64)$$

Um nun die Wellennatur der Störungen zu berücksichtigen, wird angenommen, daß alle Störungen die Form

$$f_1 = \hat{f}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.65)$$

haben. Damit lassen sich zeitliche und räumliche Ableitungen in Gl. (3.62) - (3.64) durch die Frequenz ω und die Wellenzahl \mathbf{k} ausdrücken

$$\omega \rho_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \rho_0 = 0 \quad (3.66)$$

$$\omega \mathbf{v}_1 \rho_0 - v_s^2 \rho_1 \mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3.67)$$

$$\omega \mathbf{B}_1 + \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (3.68)$$

Durch Einsetzen von ρ_1 und \mathbf{B}_1 in Gl. (3.67) mit Hilfe der Gl. (3.66) und (3.68) folgt:

$$\left(\omega^2 - \frac{(kB_0)^2}{\mu_0\rho_0}\right) \mathbf{v}_1 = \left(\left(v_s^2\rho_1 + \frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}\right) \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)}{\mu_0\rho_0}\right) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B}_0)}{\mu_0\rho_0} \mathbf{k} \quad (3.69)$$

was sich in Matrixform als

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k^2v_A^2 - k^2v_s^2 \sin^2 \theta & 0 & -k^2v_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \omega^2 - k^2v_A^2 \cos^2 \theta & 0 \\ -k^2v_s^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \omega^2 - k^2v_s^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.70)$$

schreiben läßt. Der Winkel θ beschreibt auch hier den Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{B} . Aus der Determinante ergeben sich dann die schon aus dem vorherigen Abschnitt bekannten Dispersionsrelationen (3.49).

Das Verhältnis von Magnetfeld- und Dichtefluktuationen

In Abschnitt 1.3 wurde schon dargestellt, daß sich aus Beobachtungen Dichtespektren bestimmen lassen. Nun werden für die weiteren Rechnungen die Magnetfeldspektren benötigt. Das Ziel dieses Abschnitts soll es nun sein, eine Gleichung für die Dichtefluktuationen zu ermitteln, wobei mit Hilfe von Gl. (3.67) ρ_1 und \mathbf{B}_1 verknüpft werden.

$$[\omega^2\mathbf{B}_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)v_s^2\mathbf{k}] \frac{\rho_1}{\rho_0} = \left[\omega^2 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{\mu_0\rho_0}\right] \mathbf{B}_1 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1)\mathbf{k}}{\mu_0\rho_0} \quad (3.71)$$

Unter der Annahme, daß der \mathbf{k} -Vektor in der $x - z$ -Ebene liegt und das Magnetfeld \mathbf{B}_0 nur eine z -Komponente besitzt, folgt daraus der Zusammenhang zwischen Magnetfeldfluktuationen und Dichtefluktuationen:

$$\frac{1}{B_0} \begin{pmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \end{pmatrix} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \begin{pmatrix} k_x k_z \frac{(v_A^2 \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega^2} - v_A^2 - v_s^2)}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} \\ 0 \\ \frac{\omega^2 - k_z^2 v_s^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

Um diese Gleichung nun für die verschiedenen Wellenmoden auszuwerten, setzt man jeweils die entsprechende Dispersionsrelation (3.49) ein.

Langsame magnetosonische Wellen Für die langsamen Wellen ergibt sich direkt aus den vorhergehenden Überlegungen

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{B_{1x}}{B_0} \frac{(1 + \beta(1 + \cos^2 \theta)) \sin \theta}{\beta(\beta + \sin^2 \theta) \cos \theta} \quad (3.73)$$

für die x -Komponenten des turbulenten Magnetfeldes. Analog folgt für die z -Komponente:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{B_{1z}}{B_0} \frac{1 + \beta(1 + \cos^2 \theta)}{\beta(\beta + \sin^2 \theta)} \quad (3.74)$$

Anhand von Gl. (3.74) erkennt man sofort, daß die \mathbf{B} -Feldfluktuationen unter keinem Winkel θ verschwinden, es also immer einen longitudinalen Anteil der Magnetfeldfluktuationen gibt.

Aus dem Quotienten dieser Gleichung und (3.74) kann man auch direkt die Polarisation des Magnetfeldes ablesen:

$$\frac{B_{1x}}{B_{1z}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (3.75)$$

Damit läßt sich der Zusammenhang zwischen totaler Intensität des fluktuierenden Magnetfeldes $(\delta B)^2$ und dessen Komponenten darstellen.

$$(\delta B)^2 = (\delta B_x)^2 + (\delta B_z)^2 = (1 + \tan^{-2} \theta)(\delta B_z)^2, \quad \theta \neq 0 \quad (3.76)$$

Schnelle magnetosonische Wellen Auf demselben Wege wie für die langsamen Wellen, kann man auch die Dichtefluktuationen für die schnellen magnetosonischen Wellen ermitteln.

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\beta \cos^2 \theta}{1 + 2\beta \sin^2 \theta} \right] \frac{B_{1z}}{B_0} \quad (3.77)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} (1 - \beta \cos^2 \theta) \frac{1 + 2\beta}{1 - 2\beta \sin^2 \theta} \frac{B_{1x}}{B_0} \quad (3.78)$$

Prinzipiell gilt hier dasselbe wie für die langsamen Wellen, es gibt also eine nicht verschwindende Longitudinalkomponente und für diese kann man genauso die Polarisation bestimmen:

$$\frac{B_{1x}}{B_{1z}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1 - 2\beta \sin^2 \theta}{1 + 2\beta} \frac{1 + \beta(1 + \sin^2 \theta)}{1 + 2\beta \sin^2 \theta} \quad (3.79)$$

Alfvén-Wellen Für Alfvén-Wellen findet man, daß in Gl. (3.72) der Nenner für x -Komponente verschwindet, die einzig mögliche Lösung also die ist, für die keine Dichtefluktuationen vorliegen.

Mit den Ergebnissen aus der MHD-Theorie, lassen sich also folgende Aussagen über das Verhältnis zwischen Dichte- und Magnetfeldfluktuationen machen:

- für magnetosonische Wellen sind die Dichtefluktuationen proportional zu den Magnetfeldfluktuationen und haben keine k -Abhängigkeit und eine Winkelabhängigkeit, die

nur erster Ordnung in β ist. Daraus folgt, daß die beiden Spektren dieselbe Form haben

- Alfvén-Wellen zeigen in der MHD-Beschreibung keine Dichtefluktuationen

Dies würde bedeuten, daß sich Alfvén-Wellen nicht mit den bekannten Methoden beobachten lassen. Daher muß eine weitergehende Theorie entwickelt werden, die die in der MHD vernachlässigten Dichtefluktuationen der Alfvén-Wellen beschreiben kann. Grundsätzlich gibt es hierzu zwei Ansätze: Entweder man berücksichtigt die Terme höherer Ordnung in den MHD-Gleichungen durch die Bildung höherer Momente oder man benutzt direkt die kinetische Theorie.

3.2.2 Kinetischer Ansatz

Schlickeiser u. Lerche (2002) haben zu der Problematik der Dichtefluktuationen folgende Lösung gefunden. Ausgehend von der Vlasov-Gleichung (3.50) wird die Variation der Phasenraumdicke δf_α , die vom Ort und dem Impuls p abhängt, bestimmt:

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha = & -\frac{q_\alpha \operatorname{sgn}(q_\alpha) \gamma}{\Omega_\alpha} \frac{\partial f_\alpha^{(0)}(p)}{p \partial p} \\ & \times \int_{-\operatorname{sgn}(q_\alpha)\infty}^0 d\varphi' (p_\perp (E_x \cos(\varphi - \varphi') + E_y \sin(\varphi + \varphi')) + \\ & + E_z p_\parallel \exp\left(\frac{i\gamma}{\Omega_\alpha} (k_\parallel v_\parallel - \omega)\varphi' - k_\perp v_\perp (\sin(\varphi - \varphi') - \sin(\varphi))\right)) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Daraus läßt sich durch Impulsintegration die Fluktuation der Teilchenzahldichte errechnen:

$$\delta n_\alpha = \int d^3p \delta f_\alpha \quad (3.81)$$

Unter der Annahme, daß der Gleichgewichtszustand einer Maxwell-Verteilung unterliegt:

$$f_\alpha^{(0)} = \frac{\mu_\alpha n_\alpha}{4\pi(m_\alpha c)^3 K_2(\mu_\alpha)} \exp(-\mu_\alpha \sqrt{1+x^2}) \quad (3.82)$$

folgt aus 3.81:

$$\frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha} \simeq \frac{i q_\alpha}{\Omega_\alpha^2 m_\alpha} (k_\parallel E_z H_1 + k_\perp E_x H_2 + k_\perp E_y H_3) \quad (3.83)$$

$$H_1 = \int_{-\text{sgn}(q_\alpha)\infty}^0 d\varphi' \exp\left(-\frac{i \text{sgn}(q_\alpha)\omega\varphi'}{\Omega_\alpha} - \frac{c^2 k_\parallel^2 \varphi'^2}{2\mu_\alpha \Omega_\alpha^2} + \rho_\alpha(\cos\varphi' - 1)\right) \quad (3.84)$$

$$H_2 = \int_{-\text{sgn}(q_\alpha)\infty}^0 d\varphi' \sin\varphi' \times \exp\left(-\frac{i \text{sgn}(q_\alpha)\omega\varphi'}{\Omega_\alpha} - \frac{c^2 k_\parallel^2 \varphi'^2}{2\mu_\alpha \Omega_\alpha^2} + \rho_\alpha(\cos\varphi' - 1)\right) \quad (3.85)$$

$$H_3 = \int_{-\text{sgn}(q_\alpha)\infty}^0 d\varphi' \cos(\varphi' - 1) \times \exp\left(-\frac{i \text{sgn}(q_\alpha)\omega\varphi'}{\Omega_\alpha} - \frac{c^2 k_\parallel^2 \varphi'^2}{2\mu_\alpha \Omega_\alpha^2} + \rho_\alpha(\cos\varphi' - 1)\right) \quad (3.86)$$

Die Auswertung der Integrale H_1 bis H_3 geschieht für die verschiedenen Wellenmoden separat. Hier soll nur die Rechnung für Alfvén-Wellen detaillierter wiedergegeben werden, da die Rechnung für die magnetosonischen Wellen keine von der MHD-Lösung abweichende Ergebnisse liefert.

Bei der Rechnung werden zwei Parameter eingeführt: Ψ_e und κ_e , die folgendermaßen definiert sind

$$\Psi_e^2 = \frac{\mu_e \omega^2}{2c^2 k_\parallel^2} = \frac{3\omega^2}{2v_e^2 k_\parallel^2} = \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{v_e^2} \quad (3.87)$$

$$\kappa_e = \frac{|\Omega_e| \Psi_e}{\omega} \quad (3.88)$$

mit der Abkürzung:

$$\mu_e = \frac{m_e c^2}{k_B T_e} \quad (3.89)$$

Diese Parameter beschreiben das Verhältnis von thermischer Energie zu Wellenenergie (Ψ_e) bzw. von Magnetfeldenergie und Wärme (κ_e) beschreiben. Für $\Psi_e \ll 1$ ist eine kinetische Beschreibung der Alfvén-Wellen anwendbar.

Unter der bekannten Annahme ($\beta \ll 1$, $\omega < \Omega_i$) vereinfachen sich die H -Integrale für Alfvén-Wellen zu

$$H_1 \simeq -\kappa_e^2, \quad H_2 \simeq -1, \quad H_3 \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\kappa_e}{\Psi_e} \quad (3.90)$$

Damit läßt sich Gl. (3.83) lösen.

$$\frac{\delta n_e}{n_e} \simeq \frac{ie}{\Omega_e^2 m_e} \left(k_{\parallel} \kappa_e^2 E_z + k_{\perp} E_x - k_{\perp} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\kappa_e}{\Psi_e} E_y \right) \quad (3.91)$$

Nun müssen noch mit Hilfe des Faradaygesetzes das elektrische Feld durch das magnetische ausgedrückt und die Polarisationsseigenschaften von Alfvén-Wellen (s. Sitenko 1967) ausgenutzt werden.

$$\delta \mathbf{B} = \frac{c \mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} \quad (3.92)$$

$$B_x = i \frac{c \cos^3 \theta}{\Omega_e \sin^2 \theta} E_x \quad (3.93)$$

$$B_y = \pm \frac{c}{v_A} (1 + k^2 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{v_e}{\Omega_e}) \simeq \pm \frac{c}{v_A} E_x \quad (3.94)$$

$$B_z = i \frac{c \cos^2 \theta}{\Omega_e \sin \theta} E_x \Rightarrow \frac{\delta n_e}{n_e} \simeq \pm \frac{i v_A k B_y}{\Omega_e B_0 \sin \theta} \left(1 \mp i \frac{\sqrt{\pi}}{3} \cos^2 \theta \right) \quad (3.95)$$

Für die Berechnung wurde eine Näherung für das Magnetfeld verwendet, bei der die y -Komponente deutlich größer als die beiden anderen Komponenten ist.

Im letzten Schritt gilt es, aus den Fluktuation die Spektren zu berechnen, da, wie schon vorher beschrieben, die Zielgröße der Berechnung das Magnetfeldfluktuationsspektrum ist. Dies ist ein einfacher Schritt, da man hierzu nur die Betragsquadrate ermitteln muß. Die Spektren, die hier benutzt werden, sind das Dichtefluktuationsspektrum P_{nn} und das Magnetfeldspektrum P_B genähert durch das Spektrum seiner y -Komponente P_{yy} .

$$\frac{P_{nn}(\mathbf{k})}{n_e^2} = \frac{9 v_A k^2}{4 \Omega_p^2 \sin^2 \theta} \left(1 + \frac{\pi}{9} \cos^4 \theta \right) \frac{P_{yy}(\mathbf{k})}{B_0^2} \quad (3.96)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich radikal von dem bisher Vorgestellten für die magnetosonischen Wellen, da hier keine Proportionalität der Spektren vorliegt, sondern eine k -Abhängigkeit hinzukommt, d.h. sehr kurzwellige Fluktuationen tragen fast nicht mehr zu den Magnetfeldfluktuationen bei. Außerdem heißt es auch, daß für gemessene Dichtespektralindizes im Kolmogorov-Bereich ($s \approx 5/3$) die Magnetfeldspektren kein Kolmogorovverhalten aufweisen. Dieser Punkt spielt bei der späteren Bestimmung der Heizraten durch Alfvénwellendämpfung eine entscheidende Rolle.

3.3 Dämpfungsmechanismen

Bei der Betrachtung von Dämpfungsmechanismen für die beschriebenen Wellenmoden kann man grundsätzlich zwei Typen unterscheiden: die durch Stöße verursachte Dämpfung und die, die ohne Kollision der Einzelteilchen entsteht. Der wichtigste Vertreter letzteren Typs ist die Landau-Dämpfung. Dämpfung des erstgenannten Typs läßt sich in den meisten Fällen auch in der Hydrodynamik beobachten, so z.B. die Viskosität.

Im vorliegenden Abschnitt sollen die wichtigsten Dämpfungsmechanismen beider Typen physikalisch gedeutet und ihre Dämpfungsrate hergeleitet werden. Die Resultate orientieren sich an dem Standardwerk von Braginskii (1965).

Am Ende des Abschnitts finden sich die berechneten Dämpfungsraten in Abb. (3.1) – (3.4) grafisch dargestellt.

3.3.1 Stoßbestimmte Dämpfung

Zur Herleitung der Dämpfungsraten kollisionsbestimmter Dämpfungsprozesse muß man zuerst Gl. (3.50) um einen Stoßoperator erweitern.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = C_\alpha \quad (3.97)$$

Der Operator C_α beinhaltet alle Stöße, in die Teilchen der Sorte α involviert sind. Er leitet sich aus den Stößen zwischen Teilchen der Sorte α und beliebigen Sorten β durch

$$C_\alpha = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \quad (3.98)$$

her. Hier soll der Stoßoperator nur elastische Stöße beschreiben, da inelastische Stöße erheblich komplizierter sind und auch die Umwandlung von Teilchen beinhalten, allerdings wurde schon bei der Betrachtung der Linienkühlung (Abschnitt 2.1.1) hervorgehoben, daß Prozesse wie die Stoßionisation eine untergeordnete Rolle im interstellaren Medium spielen. Der Stoßoperator wird meist in der Form von Landau (1937) angegeben.

$$C_\alpha = \sum_{\beta} \left(\frac{2\pi(q_\alpha q_\beta)^2 \log \Lambda}{m_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \cdot \int \left(\frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} - \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial v_\beta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbb{I}}{g} - \frac{\mathbf{g}_{\alpha,\beta} \mathbf{g}_{\alpha,\beta}}{g^3} \right) d^3 \mathbf{v}_\beta \quad (3.99)$$

Dabei bezeichnet $g_{\alpha,\beta}$ die Geschwindigkeitsdifferenz ($v_\alpha - v_\beta$) und $\log \Lambda$ ist der Coulomb-Logarithmus, der sich aus dem Stoßparameter b für Coulomb-Streuung und der Debye-Länge λ_D ergibt (näheres u.a. in Spitzer (1962)). \mathbb{I} ist die Identitätsmatrix.

Für den Stoßoperator, der die elastische Streuung beschreibt, müssen bestimmte Eigenschaften gelten:

- Er muß die Teilchenzahl erhalten.

$$\int C_{\alpha\beta} d\mathbf{v} = 0 \quad (3.100)$$

- Er muß den Impuls für Stöße einer Teilchensorte erhalten.

$$\int m_\alpha \mathbf{v} C_{\alpha\alpha} d\mathbf{v} = 0 \quad (3.101)$$

- Er muß die Energie innerhalb einer Teilchensorte erhalten.

$$\int \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}^2 C_{\alpha\alpha} d\mathbf{v} = 0 \quad (3.102)$$

Aus den letzten beiden Eigenschaften folgt direkt, wie sich Energie und Impuls für Stöße zwischen verschiedenen Teilchensorten verhalten:

$$\int m_\alpha \mathbf{v} C_{\alpha\beta} d\mathbf{v} + \int m_\beta \mathbf{v} C_{\beta\alpha} d\mathbf{v} = 0 \quad (3.103)$$

$$\int \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}^2 C_{\alpha\beta} d\mathbf{v} + \int \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}^2 C_{\beta\alpha} d\mathbf{v} = 0 \quad (3.104)$$

Für die Gleichgewichtsverteilung nimmt man eine Maxwellverteilung an.

$$f_\alpha^0 = \frac{n_\alpha}{(2\pi T/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2k_B T}(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2} \quad (3.105)$$

Wobei sich mit Hilfe des H-Theorems von Boltzmann (dessen Beweis sich u.a. in Sommerfeld (1949) findet) zeigen läßt, daß jedes Plasma, das durch Kollisionen dominiert wird, eine Maxwellverteilung annimmt. Mit einer gegebenen Verteilung lassen sich jetzt die makroskopischen Größen n , \mathbf{V} und T bestimmen.

$$n_\alpha(t, \mathbf{r}) = \langle n_\alpha \rangle = \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (3.106)$$

$$\mathbf{V}_\alpha(t, \mathbf{r}) = \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \int \mathbf{v} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (3.107)$$

$$T_\alpha(t, \mathbf{r}) = \frac{m_\alpha}{3} \langle (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V}_\alpha)^2 \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \int \frac{m_\alpha}{3} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V}_\alpha)^2 f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (3.108)$$

Nun werden analog zur Herleitung der idealen MHD-Gleichungen die Momente der Vlasov-Gleichung (3.97) gebildet, dieses Mal allerdings unter Berücksichtigung des Stoßtermes C_α .

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnV_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(mn\langle v_i v_j \rangle) - qn \left(E_i + \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_i \right) = \int m v_i C d\mathbf{v} \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} mn \langle v^2 \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} mn \langle v^2 v_i \rangle \right) - en \mathbf{E} \cdot \mathbf{V} = \int \frac{1}{2} m v^2 C d\mathbf{v} \quad (3.111)$$

Die Indizes i, j beziehen sich hierbei auf die Koordinaten.

Für die weitere Analyse wird jetzt die Geschwindigkeit \mathbf{v} in eine mittlere Komponente \mathbf{V} und eine fluktuierende Komponente \mathbf{v}' aufgeteilt.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (3.112)$$

Daraus folgt, daß $\langle \mathbf{v}' \rangle = 0$ gilt. Außerdem soll im Weiteren die substantielle Ableitung verwendet werden

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \quad (3.113)$$

Mit diesen Annahmen lassen sich die Kontinuitätsgleichung (3.109) und Gl. 3.110 zur Impulstransportgleichung zusammenfassen

$$mn \frac{dV_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} + en \left(E_i + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i \right) + R_i \quad (3.114)$$

Dafür werden einige neue Größen definiert: Der Druck

$$p = \frac{1}{3} nm \langle v'^2 \rangle = nT \quad (3.115)$$

sowie der Spannungstensor

$$\pi_{ij} = nm \langle v'_i v'_j - \frac{1}{3} v'^2 \delta_{ij} \rangle \quad (3.116)$$

wobei Spannungstensor und Druck zusammen den Drucktensor $P_{ij} = \pi_{ij} + p\delta_{ij}$ ergeben. Die letzte Größe, die definiert wird, ist \mathbf{R} , die den Transfer von Impuls durch Stöße beschreibt.

$$\mathbf{R} = \int m \mathbf{v}' C d\mathbf{v} \quad (3.117)$$

3 Plasmawellen

Indem man Gl. (3.111) auf demselben Wege transformiert, erhält man die Energie-transportgleichung.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} nmV^2 + \frac{3}{2} nT \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{1}{2} nmV^2 + \frac{5}{2} nT \right) V_j + (\pi_{ij} V_i) + q_j \right) = en\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} + Q \quad (3.118)$$

Die Größen \mathbf{q} und Q beschreiben dabei den Wärmetransport durch das Plasma und die durch Kollisionen erzeugte Wärmemenge.

$$\mathbf{q} = \int \frac{1}{2} mv^2 V f d\mathbf{v} = nm \left\langle \frac{1}{2} v^2 \mathbf{v} \right\rangle \quad (3.119)$$

$$Q = \int \frac{1}{2} mv^2 C d\mathbf{v} \quad (3.120)$$

Die Größen \mathbf{R} und Q lassen sich zueinander in Verbindung setzen, wenn man berücksichtigt, daß der Stoßoperator Energie und Impuls erhält. Daraus folgt, daß bei Stößen zwischen zwei Spezies für den Impulstransport gilt.

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -\mathbf{R}_{\beta\alpha} \quad (3.121)$$

Damit gilt für die netto erzeugte Wärmemenge:

$$Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha} = -\mathbf{R}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_\alpha - \mathbf{R}_{\beta\alpha} \mathbf{V}_\beta = -\mathbf{R}_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \quad (3.122)$$

Die linksstehende Summe steht für den Austausch von Wärme von Spezies α nach β und den umgekehrten Austausch. In einem nicht-dissipativen System sollte diese Summe 0 sein.

Mit der Kenntnis der Energie- und Impulstransportgleichung lassen sich jetzt für den hier betrachteten Fall eines einfachen zweikomponentigen Plasmas die Transportparameter bestimmen.

Bei der Berechnung der Dämpfungsraten werden verschiedene Parameter benötigt, von denen die wichtigsten die Stoßzeiten für Elektronen und Ionen sind (Braginskii 1965):

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} \log \Lambda e^4 Z^2 n_i} = \frac{3.5 \cdot 10^4 T_e^{3/2}}{\log \Lambda / 10 Z n} \quad (3.123)$$

$$\tau_i = \frac{3\sqrt{m_i} T_i^{3/2}}{4\sqrt{\pi} \log \Lambda e^4 Z^2 n_i} = \frac{3.0 \cdot 10^6 T_e^{3/2}}{\log \Lambda / 10 Z n} \quad (3.124)$$

Die numerischen Werte gelten für Temperaturen T in Elektronenvolt.

Im Folgenden werden nun die verschiedenen Dämpfungsmechanismen vorgestellt und ihre Energieverlustrate berechnet. Dabei wird auf der einen Seite Gl. (3.122) benötigt, um aus den Stoßraten die Wärmemenge zu berechnen, auf der anderen Seite müssen Wärmemenge Q und Dämpfungsrate γ miteinander verknüpft werden. Dies geschieht mit Hilfe einer thermodynamischen Relation, die die Entropie enthält (Braginskii 1965):

$$\gamma = \frac{1}{4\omega} \frac{T_0}{\bar{\epsilon}} \frac{d\Delta S}{dt} = \frac{1}{2\omega\bar{\epsilon}} T_0 \theta \quad (3.125)$$

Dabei ist T_0 die Plasmatemperatur, S die Entropie, $\bar{\epsilon}$ die Energie einer Plasmawelle und θ die Entropieproduktionsrate. Die Entropieproduktion wiederum hängt direkt mit der Wärmemenge Q zusammen

$$T\theta = -(\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i) \nabla \log T + \sum Q \quad (3.126)$$

Joule-Heizung

Makroskopisch betrachtet verursacht der durch das Plasma fließende Strom, der selbst durch Plasmawellen erzeugt wird, Wärme, da die Leitfähigkeit des Plasmas endlich ist. Auf mikroskopischer Ebene wird die Jouleheizung durch die Kollision von Elektronen mit Ionen verursacht. Da die Kollisionsrate von der Relativgeschwindigkeit der beiden Spezies abhängt, gilt dies auch für die Joule-Heizung. Im Rahmen der Berechnung der Heizrate wird, wie im allgemeinen schon vorher ausgeführt, zuerst die Impulstransferrate \mathbf{R} bestimmt, die von \mathbf{u} , der Relativgeschwindigkeit abhängt.

$$\mathbf{R}_u = -\frac{m_e n_e}{\tau_e} (0.51 \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}) = en \left(\frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \right) \quad (3.127)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i \quad (3.128)$$

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{u} \quad (3.129)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} \quad (3.130)$$

$$\sigma_{\parallel} = 1.96 \sigma_{\perp} \quad (3.131)$$

Die Bezeichnungen \parallel und \perp sind als Richtungsangaben bezüglich des geordneten Magnetfeldes \mathbf{B}_0 zu verstehen. Die Leitfähigkeit σ wird auch eingeführt. Gemäß Gl. (3.122) berechnet sich die erzeugte Wärmemenge zu:

$$Q_u = -\mathbf{R}_u \cdot \mathbf{u} = \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} \quad (3.132)$$

Im nächsten Schritt soll nun die Dämpfungsrate für verschiedene Wellenmoden berechnet werden. Die unterschiedlichen Raten für die betrachteten Wellenmoden haben zwei Gründe: Auf der einen Seite zeigen die Wellenmoden unterschiedliche Polarisations-eigenschaften, auf der anderen Seite führen die verschiedenen Dispersionsrelationen zu Unterschieden.

Alfvén-Wellen Hier gilt:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{k} \times \mathbf{B}' \simeq \frac{ck}{4\pi} \delta B_y \quad (3.133)$$

Die Störung der y -Komponente des Magnetfeldes dominiert den Strom (s. auch Sitenko (1967)). Damit läßt sich die Wellenenergiedichte auch schreiben als:

$$\bar{\epsilon} = \frac{B_y'^2}{4\pi} \quad (3.134)$$

Angewendet auf Gl. (3.132) folgt dann

$$\gamma_{\text{Joule}}^A = \frac{c^2}{8\pi\sigma_{\parallel}} k_{\perp}^2 + \frac{c^2}{8\pi\sigma_{\perp}} k_{\parallel}^2 \quad (3.135)$$

Schnelle Magnetosonische Wellen Die Argumentation folgt der für Alfvén-Wellen, da hier aber die x -Komponente des Magnetfeldes dominiert, ergibt sich kein Strom parallel zum Feld. Daher gilt:

$$\gamma_{\text{Joule}}^F = \frac{c^2}{8\pi\sigma_{\perp}} k^2 \quad (3.136)$$

Langsame Magnetosonische Wellen Im Gegensatz zu den vorher betrachteten schnellen Wellen wird hier die Rechnung nicht auf Basis des Magnetfeldes durchgeführt, sondern mit Hilfe der fluktuierenden Geschwindigkeit $\delta\mathbf{v}$. Da die langsamen Wellen kompressible (longitudinale) Wellen sind, dominiert hier die δv_z -Komponente. Dementsprechend definiert sich auch die Wellenenergie $\bar{\epsilon}$ über die Geschwindigkeit

$$\bar{\epsilon} = m n \delta v_z^2 \quad (3.137)$$

Daraus folgt für die Dämpfungsrate

$$\gamma_{\text{Joule}}^S = \frac{c^2}{8\pi\sigma_{\perp}} k_{\perp}^2 \frac{c_s^2}{v_A^2} \quad (3.138)$$

Thermal Force

Auch wenn sie in dieser Arbeit keine Rolle spielt, soll die Thermal Force nicht unerwähnt bleiben. Ihr Ursprung liegt in Temperaturgradienten der Elektronen, die zu einer zusätzlichen Bewegung führen und damit zu einer weiteren Quelle von Stößen.

Hier sollen nur die gängigen Formeln angegeben werden.

$$\mathbf{R}_T = -0.71n_e \log \nabla T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_e \tau_e} \frac{\mathbf{B}'}{B'} \times \nabla T_e \quad (3.139)$$

$$Q_T = \frac{\chi_{\parallel}^e}{T_0} (\nabla_{\parallel}^-)^2 + \frac{\chi_{\perp}^e}{T_0} (\nabla_{\perp}^-)^2 \quad (3.140)$$

$$\chi_{\parallel}^e = 3.16 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} \quad (3.141)$$

$$\chi_{\perp}^e = 4.66 \frac{n_e T_e}{m_e \omega_e^2 \tau_e} \quad (3.142)$$

$$\gamma_{\text{ther}}^F = \frac{(\kappa - 1)^2 T_0 k_{\perp}^2}{\rho_0 v_A^2 k^2} (\chi_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \chi_{\perp} k_{\perp}^2) \quad (3.143)$$

$$\gamma_{\text{ther}}^S = \frac{(\kappa - 1)^2 T_0}{\rho_0 c_s^2} (\chi_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \chi_{\perp} k_{\perp}^2) \quad (3.144)$$

χ^e ist dabei die Wärmeleitfähigkeit der Elektronen. Alfvén-Wellen erzeugen keine Temperaturfluktuationen und haben dementsprechend keine daraus folgende Dämpfung.

Viskose Dämpfung

Bei der Betrachtung von Gl. (3.114) fällt neben dem Druck zusätzlich der Spannungstensor auf, der die Wechselwirkung von verschiedenen schnellen Flüssigkeitsschichten beschreibt. In der klassischen Hydrodynamik führen Gradienten in der Fließgeschwindigkeit zur Newtonschen Reibung. Ein ähnliches Verhalten läßt sich auch hier in der Gl. (3.118) beobachten.

Bei der Betrachtung in Landau u. Lifshitz (1966) unter §15 wird hierbei der Tensor P_{ij} als gesamter Impulsstrom beschrieben und der Tensor π_{ij} als der Teil, der nicht mit dem konvektiven Transport von Impuls zusammenhängt. Hollweg (1985) beschreibt die viskose Dämpfung als thermodynamische Reaktion auf die Bestrebung eines Plasmas lokale thermische Anisotropien zu bilden.

Für die Herleitung der Dämpfungsrate sei hier auf Anhang A verwiesen, hier sollen nur die relevanten Formeln angegeben werden. Dazu werden zwei weitere Größen eingeführt: Die Viskosität η und der Reibungstensor W_{ij} , deren Zusammenhang mit dem

Spannungstensor im unmagnetisierten Plasma einfach

$$\pi_{ij} = -\eta_0 W_{ij} \quad (3.145)$$

ist. Der Reibungstensor hat folgende einfache Gestalt

$$W_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.146)$$

Für das magnetisierte Plasma ergeben sich Vorzugsrichtungen und damit auch komplizierte Strukturen für π und W .

$$\pi_{zz} = -\eta_0 W_z z \quad (3.147)$$

$$\pi_{xx} = -\frac{\eta_0}{2}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2}(W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy} \quad (3.148)$$

$$\pi_{yy} = -\frac{\eta_0}{2}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2}(W_{yy} - W_{xx}) - \eta_3 W_{xy} \quad (3.149)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = -\eta_1 W_{xy} + \frac{\eta_3}{2}(W_{xx} - W_{yy}) \quad (3.150)$$

$$\pi_{xz} = \pi_{zx} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz} \quad (3.151)$$

$$\pi_{yz} = \pi_{zy} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz} \quad (3.152)$$

Dabei ist die Viskosität definiert als

$$\eta_0^i = 0.96 n_i T_i \tau_i \quad , \quad \eta_0^e = 0.73 n_e T_e \tau_e \quad (3.153)$$

$$\eta_1^i = 0.3 \frac{n_i T_i}{\Omega_i^2 \tau_i} \quad , \quad \eta_1^e = 0.51 \frac{n_e T_e}{\Omega_e^2 \tau_e} \quad (3.154)$$

$$\eta_2^i = 4\eta_1^i \quad , \quad \eta_2^e = 4\eta_1^e \quad (3.155)$$

$$\eta_3^i = -\frac{n_i T_i}{2\Omega_i} \quad , \quad \eta_3^e = -\frac{n_e T_e}{2\Omega_e} \quad (3.156)$$

$$\eta_4^i = 2\eta_3^i \quad , \quad \eta_4^e = 2\eta_3^e \quad (3.157)$$

Insgesamt ergibt sich dann für die erzeugte Wärmemenge

$$Q_{\text{vis}} = -\frac{1}{2} \pi_{ij} W_{ij} \quad (3.158)$$

Alfvén-Wellen Wie in Anhang A gezeigt, enthält die Dämpfungsrate für Alfvén-Wellen nur die Viskositätsterme η_1 und η_2 , da der Term η_0 mit kompressiblen Wellen gekoppelt ist ¹. Für die hier betrachteten Plasmen sind die beiden erst genannten Terme etwa um

¹Auch wenn vorher gezeigt wurde, daß Alfvén-Wellen einen kompressiblen Anteil haben, kann man in diesem Zusammenhang die Kompressibilität vernachlässigen. Dies liegt im wesentlichen an der Tatsache, daß Alfvén-Wellen für kleine k am stärksten kompressibel sind, hier die Dämpfung aber am kleinsten ist.

den Faktor 10^4 kleiner als η_0 . Außerdem kann man die Dämpfung auf den ionischen Anteil beschränken, da sie mit der Masse der Teilchen skaliert, die Elektronenviskosität also vernachlässigbar ist

$$\gamma_{\text{visc}}^A = \frac{1}{2m_i n_i} (\eta_1 k_{\perp}^2 + \eta_2 k_{\parallel}^2) \quad (3.159)$$

Schnelle Magnetosonische Wellen Der Ansatz ist identisch mit dem der Alfvén-Wellen, allerdings kommt der kompressible Anteil hinzu:

$$\gamma_{\text{visc}}^F = \frac{1}{2m_i n_i} \left(\left(\frac{\eta_0}{3} + \eta_1 \right) k_{\perp}^2 + \eta_2 k_{\parallel}^2 \right) \quad (3.160)$$

Langsame Magnetosonische Wellen Prinzipiell ändert sich die Herleitung der Dämpfungsrate verglichen mit den schnellen magnetosonischen Wellen nicht, allerdings sind die Koeffizienten durch die unterschiedlichen Polarisationsseigenschaften vertauscht. Dies führt zu einer stärkeren Dämpfung der Parallelkomponente:

$$\gamma_{\text{visc}}^S = \frac{1}{2m_i n_i} \left(\frac{4}{3} \eta_0 k_{\parallel}^2 + \eta_2 k_{\perp}^2 \right) \quad (3.161)$$

Ionen-Neutral-Dämpfung

Da das warme ionisierte Medium im ISM nicht vollständig, sondern nur zu ca. 50% ionisiert ist, muß auch die Neutralkomponente berücksichtigt werden. Neutralteilchen nehmen im wesentlichen nicht an der kollektiven Wechselwirkung eines Plasmas teil, durch Kollisionen können sie allerdings mitströmen.

Um den Effekt genauer zu beschreiben gibt es zwei grundsätzliche Wege:

- Der von Swanson (1989) beschriebene Weg betrachtet die Neutralteilchen als weitere Flüssigkeit, die über die Kollisionsfrequenz ν_{ni} an die Elektronen- und Ionenflüssigkeit gekoppelt ist. Da der Impulsübertrag von Elektronen auf Neutralteilchen vernachlässigbar ist, wird hier nur der Impulsübertrag durch die Ionengeschwindigkeit \mathbf{v}_i betrachtet.

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = \rho_n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n) \nu_{ni} \quad (3.162)$$

Die Fourier-Transformierte Gleichung läßt sich nach \mathbf{v}_n auflösen und dann in die ebenfalls fourier-transformierte Impulsbilanz der Ionen einsetzen.

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{1 - i\omega/\nu_{ni}} \mathbf{v}_i \quad (3.163)$$

$$-i\omega \rho_i \mathbf{v}_i = e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_0) - \nabla p_i + \rho_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \nu_{in} \quad (3.164)$$

Auch wenn dieser Weg relativ elegant ist und zu den benötigten Lösungen führt, ist er dennoch nicht mit der üblichen Methode, die Dispersionsrelation über die Stix-Parameter (Gl. 3.28) herzuleiten, verträglich. Daher soll hier näher auf die zweite Methode eingegangen werden.

- Kulsrud u. Pearce (1969) haben sich des Krook-Modells (Gross u. Krook 1956) bedient, das im wesentlichen veränderte Stix-Parameter benutzt (Krook hat im Original die Vlasov-Gleichung mit der Stoßfrequenz aufgestellt). Im Detail haben die veränderten Stix-Parameter folgende Form:

$$S = \frac{1}{2}(R + L) \quad (3.165)$$

$$D = \frac{1}{2}(R - L) \quad (3.166)$$

$$R = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + i\nu + \Omega_{\alpha}} \quad (3.167)$$

$$L = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + i\nu - \Omega_{\alpha}} \quad (3.168)$$

$$P = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \quad (3.169)$$

Berechnet man nun die Dispersionsrelation, so ergibt sich ein imaginärer Anteil, der die Dämpfung beschreibt.

In Anhang B wird detailliert die Dämpfungsrate für die verschiedenen Wellen berechnet. Hier sollen nur die Endergebnisse angegeben werden.

Alfvén-Wellen Für die Alfvén-Wellen ergibt sich nach obiger Berechnung folgende Dämpfungsrate:

$$\gamma_{\text{neut}}^A = \begin{cases} \frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \cos^2 \theta \\ \frac{\nu}{2 \cos^2 \theta} & \omega_k \gg \nu \cos^2 \theta \end{cases} \quad (3.170)$$

Schnelle Magnetosonische Wellen Schnelle magnetosonische Wellen unterliegen folgender Dämpfung durch Ionen-Neutral-Stöße:

$$\gamma_{\text{neut}}^F = \begin{cases} \frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \\ \frac{\nu}{2} & \omega_k \gg \nu \end{cases} \quad (3.171)$$

Langsame Magnetosonische Wellen Nach ähnlichen Berechnungen wie in den beiden vorhergehenden Fällen, erhält man für langsame magnetosonische Wellen:

$$\gamma_{\text{neut}}^S = \begin{cases} \frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \\ \frac{\nu}{2 \cos^2 \theta} & \omega_k \gg \nu \end{cases} \quad (3.172)$$

Es sei noch einmal auf Abb. (3.1) – (3.4) verwiesen, in denen die Dämpfungsraten gezeigt werden.

3.3.2 Kollisionsfreie Dämpfung

Landau-Dämpfung

Leitet man Wellenphänomene aus der Vlasov-Gleichung (3.50) ab und bestimmt die Ladungsdichte, so sieht man, daß aus der Form der Ladungsdichte ein imaginärer Anteil in der Dispersionsrelation folgen muß, was nichts anderes bedeutet, als daß hier eine Dämpfung oder Anregung vorliegt. Wie genau diese Dämpfung bestimmt werden kann, soll hier am einfachen Beispiel longitudinaler Wellen gezeigt werden. Für die exakte Herleitung der Dämpfungsraten sei auf Ginzburg (1961) verwiesen.

Für longitudinale Wellen läßt sich die Vlasov-Gleichung schreiben als,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{q}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0 \quad (3.173)$$

wobei sich die Phasenraumdichte f aus einem Gleichgewichtsanteil f_0 und einem fluktuierenden Anteil f_1 zusammensetzt. Nun folgt aus der Poissongleichung:

$$\Delta \Phi = -4\pi \rho_e = -4\pi \int d^3v f_1 q \quad (3.174)$$

Wie üblich soll für den gestörten Anteil der Verteilungsfunktion und das elektrische Potential ein Wellenansatz benutzt werden:

$$f_1 = \bar{f}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.175)$$

$$\Phi = \bar{\Phi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.176)$$

Einsetzen in Gl. (3.173) und (3.174) liefert nun

$$f_1 = \frac{q}{m} \bar{\Phi} \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \quad (3.177)$$

$$k^2 \bar{\Phi} = 4\pi q \int d^3v \bar{f}_1 \quad (3.178)$$

Die beiden letzten Gleichungen zusammengefasst ergeben

$$k^2 = \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \quad (3.179)$$

Unter der zu Beginn gemachten Annahme von longitudinalen Wellen (die sich in v_{\parallel} -Richtung ausbreiten) läßt sich der vorhergehende Ausdruck vereinfachen:

$$k^2 = \frac{4\pi q^2}{m} \int dv_{\parallel} dv_{\perp}^2 \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}}}{v_{\parallel} - \frac{\omega}{k}} \quad (3.180)$$

Wie man deutlich erkennt, hat dieses Integral eine Singularität im Integranden. Dieses Problem wurde erst von Landau befriedigend gelöst. Landau hat hierzu einen komplexen Integrationsweg gewählt. Aus dem komplexen Integrationsweg folgt dann auch ein imaginärer Anteil des Integrals.

Neben dieser rein technischen Herleitung stellt sich natürlich die Frage der physikalischen Realität der Landau-Dämpfung, die im historischen Kontext häufig gestellt wurde, da zwischen Landaus Lösung des Integrals und dem experimentellen Beweis viele Jahre vergangen sind.

Bei der physikalischen Betrachtung fällt als erstes auf, daß die Landau-Dämpfung nicht kollisionsbestimmt sein kann, da in Gl. (3.173) kein Stoßoperator betrachtet wird. Wichtig ist stattdessen das Verhalten des Integrals in der Nähe der Singularität $v_{\parallel} = \omega/k$, da einzig die Singularität den imaginären Anteil der Wellenfunktion liefert. Das allgemein akzeptierte physikalische Bild läßt sich so zusammenfassen: Teilchen, die sich mit einer Geschwindigkeit, die etwas geringer als die Phasengeschwindigkeit der Welle ist, bewegen, werden beschleunigt, nehmen also Energie von der Welle auf. Leicht schnellere Teilchen werden stattdessen abgebremst und geben Energie an die Welle ab. Die letztlich entscheidende Frage ist dann nur noch, ob mehr schnelle oder mehr langsame Teilchen deren Geschwindigkeit nahe der Geschwindigkeit der Welle liegen, vorhanden sind. Dies läßt sich aber einfach mit dem Vorzeichen der Ableitung der Verteilungsfunktion an der Stelle der Singularität klären.

Die spezifische Dämpfungsrate läßt sich aus der Annahme einer Gleichgewichtsverteilung (hier die Maxwellverteilung) und der Integration über die Störung dieser Verteilung ermitteln. Die detaillierte Herleitung findet sich in Ginzburg (1961).

Alfvén-Wellen

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{Landau}}^A &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^3 v_e}{\Omega_i^2 v_A} \frac{\tan^2 \theta}{\sin^2 \theta + 3(\omega^2/\Omega_i^2) \cos^2 \theta} \\ &\times \left(\frac{v_i^2}{v_e^2} + (\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta) \exp\left(-\frac{v_A^2}{2v_i^2 \cos^2 \theta}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.181)$$

Schnelle Magnetosonische Wellen

$$\gamma_{\text{Landau}}^F = \omega \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sin^2 \theta \left(\frac{v_i^2}{v_e \cos \theta} + \frac{5v_i}{v_A \cos \theta} \exp\left(-\frac{v_A^2}{2v_i^2 \cos^2 \theta}\right) \right) \quad (3.182)$$

Langsame Magnetosonische Wellen Aus der Herleitung der Dispersionsrelation läßt sich ersehen, daß die langsamen magnetosonischen Wellen nicht durch die kollektive Wechselwirkung des Plasmas, sondern im wesentlichen durch die thermisch angeregte Stoßwechselwirkung der Komponenten des Plasmas Impuls übertragen. Da die Landau-Dämpfung aber ein stoßfreier und kollektiver Prozeß ist, kann diese für die langsame Mode vernachlässigt werden.

3 Plasmawellen

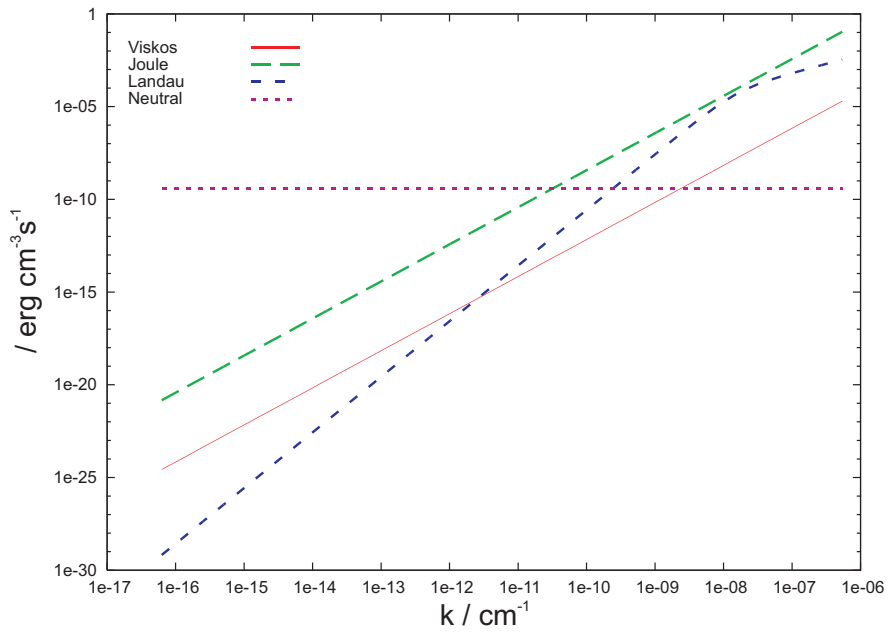


Abbildung 3.1: Dämpfungsraten für Alfvén-Wellen bei $\theta = 45^\circ$

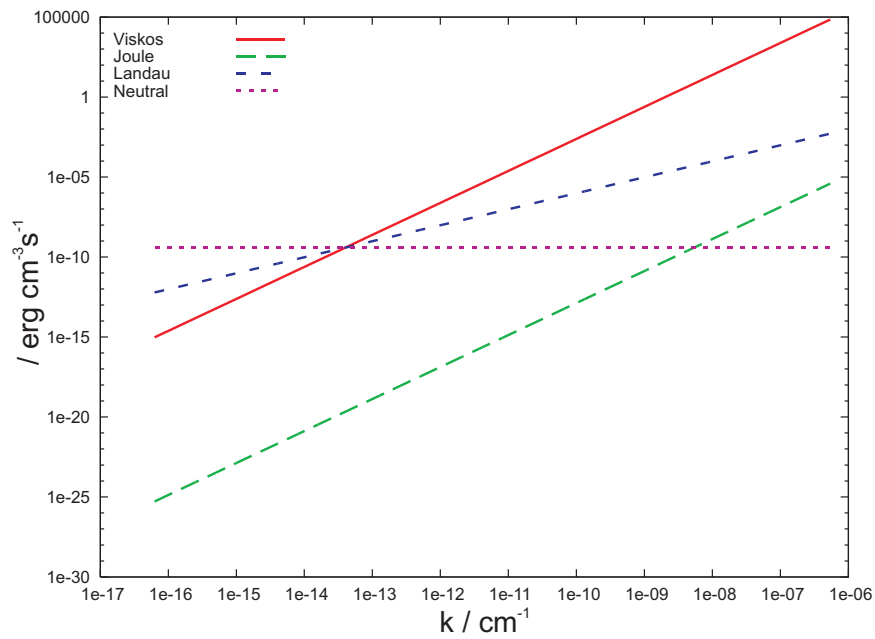


Abbildung 3.2: Dämpfungsraten für schnelle magnetosonische Wellen bei $\theta = 45^\circ$

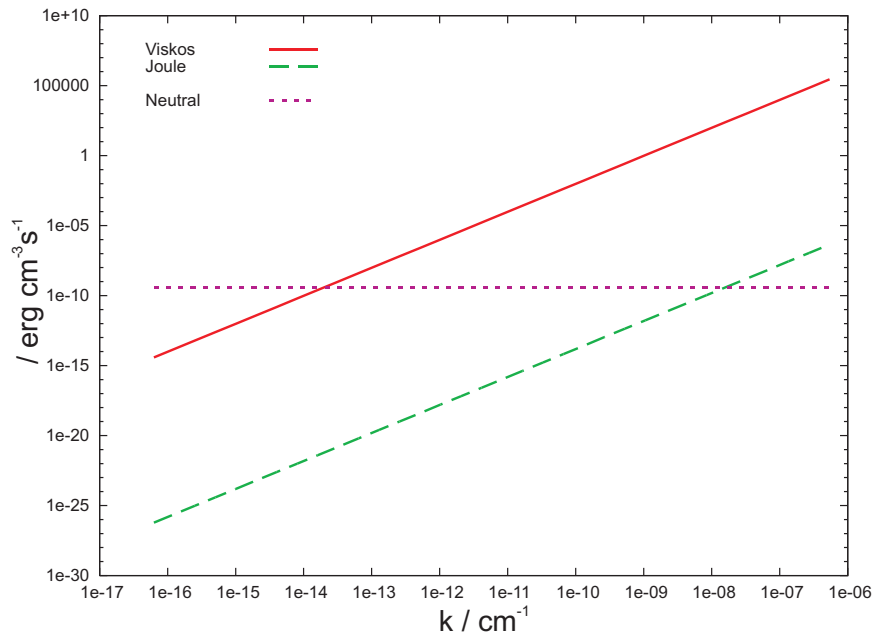


Abbildung 3.3: Dämpfungsrate für langsame magnetosonische Wellen bei $\theta = 45^\circ$

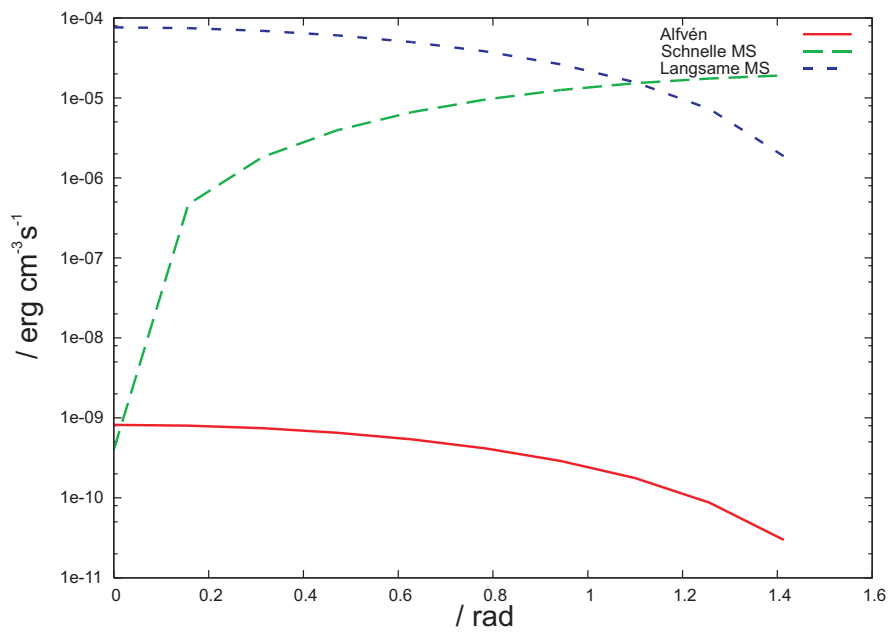


Abbildung 3.4: Winkelabhängigkeit der Dämpfungsrate für alle Moden bei $k = \sqrt{k_{\min} k_{\max}}$

3.4 Turbulenzspektren

Neben den Wellenmoden und ihren Dämpfungsmechanismen spielt ein weiterer wichtiger Faktor eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung von Heizraten im ISM: das Energiespektrum der Fluktuationen. Im Abschnitt 1.3 wurde schon ansatzweise darauf eingegangen, wie dieses Spektrum im ISM vermutlich aussieht (s. hierzu auch Spangler (1991)). An dieser Stelle sollen zusätzlich die drei vorherrschenden Modelle für die Energiespektren kurz vorgestellt werden.

3.4.1 Kolmogorov-Spektrum

Die von Kolmogorov (Kolmogorov 1941a, b) aufgestellte und im folgenden als *K41* bezeichnete Theorie ist die Grundlage der Turbulenztheorie und hat wesentlich zur Begriffsbildung beigetragen. In der K41-Theorie wird die Turbulenz über Wirbel beschrieben. Dabei wird davon ausgegangen, daß sich aus großskaligen Wirbeln im Produktionsbereich (s. Abb. 3.5) kleinskalige Wirbel entwickeln. Unter der Annahme, daß im Inertialbereich keine Erzeugung oder Dämpfung der Turbulenz stattfindet und somit nur der Energietransport zwischen Wirbeln unterschiedlicher Größe für das Spektrum entscheidend ist, konnte Kolmogorov aus einer Dimensionsanalyse das 5/3-Gesetz herleiten. Die Aussage dieses Gesetzes ist, daß im Fourierraum die Turbulenz im Inertialbereich einem Potenzgesetz mit dem Exponenten $s = 5/3$ folgt.

Bei diesem Ansatz hat die Energietransferrate auf einer Größenskala l die Form

$$\epsilon_l = u_l^2 \tau_l \quad (3.183)$$

Dabei ist τ_l die Zeitskala, auf der der Energietransfer stattfindet und u_l die mit der Größenskala l assoziierte Geschwindigkeit. Kolmogorov hat hier angenommen, daß es sich hier um die "Eddie-Turnover-Time" handelt, also in etwa die Zeit, die ein Wirbel für ein Umdrehung benötigt. Es gilt

$$\tau_l = \frac{l}{u_l} \quad (3.184)$$

Jetzt kann man unter Annahme der Skaleninvarianz, also der Selbstähnlichkeit der Turbulenz auf verschiedenen Skalen, eine Dimensionsanalyse durchführen und erhält:

$$E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}} \quad (3.185)$$

Um weitere Begriffsverwirrung zu vermeiden, soll an dieser Stelle klargestellt werden, daß sich das Spektrum $E(k)$ auf das winkelintegrierte Spektrum bezieht, während $P(\mathbf{k})$ noch die Winkelabhängigkeit enthält.

Obwohl die Kolmogorov-Theorie ihren Ursprung in der Hydrodynamik hat, findet sie ebenfalls ihren Einsatz in der MHD-Theorie. Die Ergebnisse von Messungen zeigen, daß die Annahme eines Spektrums mit dem Exponenten $s = 5/3$ für viele Anwendungen realistisch ist. Simulationen von Cho u. Lazarian (2003) zeigen zudem, daß das Kolmogorov-Spektrum auch mit einer Turbulenz von Alfvén- und langsamen magnetosonischen Wellen kompatibel ist.

Es ist auch möglich, das Kolmogorov-Spektrum mit Hilfe einer Diffusion von Wellen im Wellenzahlraum zu beschreiben, wie unter anderem Zhou u. Matthaeus (1990) gezeigt haben. Dieser Ansatz führt auf die folgende Gleichung für die skalenabhängige Energiedichte der Fluktuation:

$$\frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial t} - \nabla_k(D\nabla_k E(\mathbf{k})) - \gamma E(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.186)$$

Hier ist γ die bekannte und im letzten Abschnitt hergeleitete Dämpfungsrate und D der Diffusionstensor. Ein Problem dieser Beschreibung ist, daß sie auf dem phänomenologischen Ansatz von Kolmogorov fußt und den Diffusionstensor dergestalt annimmt, daß im Gleichgewichtsfall ein $s = 5/3$ -Spektrum herauskommen muß.

3.4.2 Kraichnan-Iroshnikov-Spektrum

Die Theorie von Kraichnan (1965) und Iroshnikov (1964) (*KI65*) leitet sich aus den selben Überlegungen wie die K41-Theorie her, unterscheidet sich aber in einem zentralen Punkt: Hier werden explizit Alfvén-Wellen betrachtet und daher muß die Transportzeitskala τ_l den Gegebenheiten angepaßt werden. Dies heißt, daß die Alfvén-Zeit τ_A berücksichtigt werden muß. Diese ist definiert über die charakteristische Länge in Richtung des Hintergrundmagnetfeldes l_{\parallel} und die Phasengeschwindigkeit v_A : $\tau_A = l_{\parallel}/v_A$. Im Falle schwacher Wechselwirkung folgt dann die Interaktionszeit:

$$\tau_l = \frac{\tau_{\text{eddy}}^2}{\tau_A} = \frac{l_{\perp}^2 v_A}{u_l^2 l_{\parallel}} \quad (3.187)$$

Dabei wurde auch die charakteristische Länge senkrecht zum Hintergrundmagnetfeld l_{\perp} eingeführt. Eine Dimensionsanalyse, wie sie auch schon bei K41 benutzt wurde, liefert

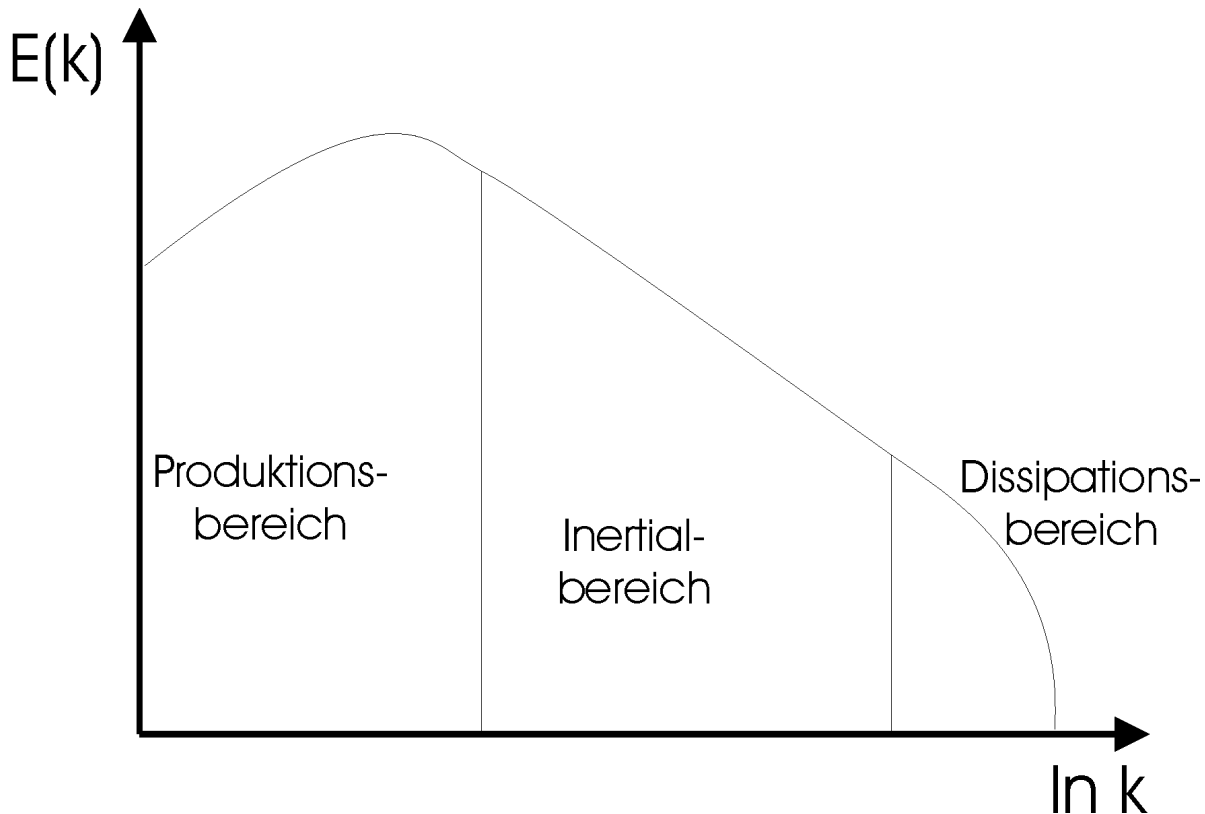


Abbildung 3.5: Das Energiespektrum für Turbulenz nach Kolmogorov (die Form des Kraichnan-Iroshnikov-Spektrums ist im wesentlichen identisch)

in diesem Fall:

$$E(k) \propto k^{-\frac{3}{2}} \quad (3.188)$$

Wichtig bei dieser Betrachtung ist insbesondere, daß hier die Annahme der Isotropie ($l_{\parallel} = l_{\perp}$) gemacht wurde. Anschaulich heißt das, daß sich das Spektrum der Turbulenz parallel und senkrecht zum Magnetfeld nicht unterscheidet, was zu identischen charakteristischen Längen führt.

3.4.3 Goldreich-Sridhar

Nach der KI65-Theorie erwartet man, für Alfvén-Wellenturbulenz Spektren mit $s = 3/2$ zu beobachten. Verschiedene Messungen (Armstrong u. a. 1995; Leamon u. a. 1998) widerlegen dies aber, da sowohl im Sonnenwind (dessen Turbulenz durch Alfvén-Wellen verursacht wird) als auch im ISM (dessen Turbulenz zumindest teilweise durch Alfvén-Wellen getragen wird) Spektralindizes im Bereich von $s = 5/3$ vorliegen.

Anhand von Simulationen (Cho u. a. 2002; Müller u. a. 2003) kann man erkennen, daß eine der Grundvoraussetzungen der KI65-Theorie nicht erfüllt ist: Es liegt eine deutliche Anisotropie der Turbulenz vor, die im KI65-Modell nicht vorhergesehen ist. Diese Anisotropie äußert sich in unterschiedlichen Spektren parallel und senkrecht zum geordneten Magnetfeld. Goldreich u. Sridhar (1995) haben daher eine Theorie entwickelt, die deutlich anisotrope Spektren für Alfvén-Wellenturbulenz vorhersagt.

Grundlage der GS95-Theorie ist die Annahme, daß die in KI65 angenommenen Alfvén-Wellenwechselwirkungen (es handelt sich hier um Drei-Wellen-Wechselwirkung, bei denen zwei Alfvén-Wellen zu einer dritten Welle mit höherer Wellenzahl k verschmelzen) nicht möglich sind. Stattdessen dominieren Vier-Wellen-Wechselwirkungen, die zu einer starken Energiekaskade im Wellenzahlraum senkrecht zum Feld führen. In einem späteren Artikel (Goldreich u. Sridhar 1997) wurde die Idee dieser senkrechten Kaskade dahingehend erweitert, daß Goldreich und Sridhar angenommen haben, daß für $k_{\perp}^{2/3} > k_{\parallel} l^{1/3}$ eine normale Kaskade (also analog zur isotropen Kolmogorov-Kaskade) im senkrechten vorliegt. Dies wird damit begründet, daß es sich um Bereiche verschieden starker Turbulenz handelt und somit die vorher ausgeschlossene Drei-Wellen-Wechselwirkung nicht mehr vernachlässigt werden kann.

Chandran u. Backer (2002) geben dabei folgende explizite Form für das Spektrum an

$$E(k_{\parallel}, k_{\perp}) \propto k_{\perp}^{10/3} l^{-1/3} g\left(\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}^{2/3} l^{-1/3}}\right) \quad (3.189)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (3.190)$$

Durch die Funktion g wird dabei das Abschneiden der rein senkrechten Kaskade beschrieben.

3.4.4 Ein alternativer Ansatz

Die vorher beschriebenen Typen von Turbulenzspektren stellen nahezu alle möglichen vorstellbaren Spektren dar. Für die praktische Anwendung in analytischen Rechnungen bringen sie allerdings einige technische Schwierigkeiten mit sich: Das K41- und KI65-Spektrum sind zwar mathematisch einfach zu handhaben, beinhalten aber keine Anisotropien. Das GS95-Spektrum bringt dagegen die Anisotropie mit, legt sich aber auf den Spektralindex $s = 5/3$ fest und ist analytisch kaum auszuwerten.

Als Alternative hat Spangler (1991) ein Spektrum vorgeschlagen, daß einen variablen Spektralindex zuläßt und außerdem eine mögliche Anisotropie berücksichtigt:

$$P_B(\mathbf{k}) = \frac{C_B^2}{(k_{\parallel}^2 + \Lambda k_{\perp}^2)^{\frac{2+s}{2}}} \quad (3.191)$$

Dieses Spektrum vermag KI65- und K41-Spektren abzubilden, indem man ein geeignetes s wählt und $\Lambda = 1$ setzt. Es ist in einem begrenzten Maße auch in der Lage GS95-Spektren nachzubilden. Aus der Struktur des GS95-Spektrums folgt, daß es notwendig ist Λ als Funktion von k zu betrachten. Mit einem konstanten Λ ist es dennoch möglich, die Grenzfälle des minimalen und maximalen Λ der GS95-Theorie nachzubilden.

3.5 Heizung durch Plasmawellen

Mit den bekannten Dämpfungsmechanismen (Dämpfungsfunktion aus Abschnitt 3.3) und einem gegebenen Spektrum kann man nun die Heizrate aus der Faltung der beiden Funktionen ermitteln (Spangler 1991)

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int d^3k \, 2\gamma(\mathbf{k})P(\mathbf{k}) \quad (3.192)$$

$P(\mathbf{k})$ ist dabei das Energiespektrum der magnetischen Fluktuationen, wobei hier zuerst das Spektrum von Spangler (1991) genutzt werden soll. Der Faktor 2 trägt der Tatsache Rechnung, daß sowohl parallel als auch antiparallel zum Magnetfeld laufende Wellen berücksichtigt werden.

$$P_{nm} = \frac{C_n^2}{(k_{\parallel}^2 + \Lambda k_{\perp}^2)^{\frac{2+s}{2}}} \quad (3.193)$$

C_n ist die Normierungskonstante, Λ ein Anisotropiefaktor, für den gilt, daß das Spektrum stark parallel ist, wenn $\Lambda \gg 1$. Für die Wahl dieses speziellen Spektrums gibt es mehrere Gründe: Zum einen ist dieses Spektrum ein möglicher Fit der Messdaten (Spangler 1991), zum anderen läßt sich dieses Spektrum auch als Grenzfall eines GS95-Spektrums verstehen. Wichtig hierbei ist aber auch, daß sich die Heizrate für dieses Spektrum leicht analytisch lösen läßt und somit durch direkte Variation der Parameter Λ und s

Zur Berechnung der Heizraten müssen nun folgende Arbeitsschritte durchgeführt werden:

1. Das Spektrum der Dichtefluktuationen muß in das Spektrum der Magnetfeldfluktuationen umgerechnet werden, da das Dichtespektrum nicht die Informationen über die Richtung des Hintergrundmagnetfeldes enthält.
2. Die zugehörige Normierungskonstante muß bestimmt werden
3. Das Integral (3.192) muß für jeden Dämpfungsmechanismus berechnet werden.

Die Summe aller Heizraten ist abhängig von Spektralindex s und Anisotropieparameter Λ , diese Parameter können genutzt werden, um die Heizrate der Kühlrate (2.12) anzupassen. Die anderen Heizprozesse sind in der Regel mindestens einer Größenordnung kleiner als die Kühlrate und werden daher im weiteren Verlauf dieser Arbeit vernachlässigt.

Bei den in diesem Abschnitt folgenden Berechnungen für jede einzelne Mode werden die Heizrate unter der Annahme, daß die gesamte Energie in dieser Mode konzentriert ist berechnet.

3.5.1 Alfvén-Wellen

Bestimmung des Spektrums

Wie schon vorher festgehalten, soll an dieser Stelle das anisotrope Spektrum von Spangler verwendet werden. Um daraus das Spektrum der \mathbf{B} -Felder zu bestimmen, werden die Ergebnisse von Schlickeiser u. Lerche (2002), die in Gl. (3.96) wiedergegeben werden, benutzt:

$$P_{nn}^A = \frac{C_N^2}{(k_{\parallel}^2 + \Lambda k_{\perp}^2)^{\frac{2+s}{2}}} \quad (3.194)$$

$$\frac{P_{nn}^A(\mathbf{k})}{n_e^2} = \frac{9v_A k^2}{4\Omega_p^2 \sin^2 \theta} \left(1 + \frac{\pi}{9} \cos^4 \theta\right) \frac{P_{yy}(\mathbf{k})}{B_0^2} \quad (3.195)$$

$$P_B \simeq P_{yy} = \frac{(C_B^A)^2 k_{\perp}^2}{k^4 (k_{\parallel}^2 + \Lambda k_{\perp}^2)^{\frac{2+s}{2}}} \quad (3.196)$$

Das Superskript A bezieht sich auf Alfvén-Wellen, alle Vorfaktoren sind in C_B^A enthalten. Für die Normierung soll gelten

$$\int d^3k P_B^A(\mathbf{k}) = (\delta B)^2 \quad (3.197)$$

Woraus direkt folgt

$$(C_B^A)^2 = (\delta B)^2 \frac{3}{8} \frac{s+1}{(-k_{\max}^{-(1+s)} + k_{\min}^{-(1+s)}) \mathfrak{F}(2, 1 + \frac{s}{2}, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \quad (3.198)$$

\mathfrak{F} bezeichnet dabei die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1(a, b, c; x)$ (Abramowitz u. Stegun 1965).

Heizrate

Die Heizrate bestimmt sich nun nach Gl. (3.192). Hier sollen nun für alle Dämpfungsprozesse die Heizraten einzeln bestimmt werden und exemplarisch für ein isotropes Kolmogorov-Spektrum ($s = 5/3$ und $\Lambda = 1$) ausgewertet werden.

Landau-Dämpfung Zuerst soll Gl. (3.181) vereinfacht werden, damit eine analytische Lösung des Integrals möglich ist. Dazu wird ausgenutzt, daß $v_A \gg v_i$ und dementsprechend die Exponentialfunktion vernachlässigt werden kann. Damit liest sich die Dämpfungsfunktion:

$$\gamma_{\text{Landau}}^A = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{v_i^2 k^3}{v_e k_c^2} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + 3 \left(\frac{k}{k_c}\right)^2 \cos^4 \theta} \quad (3.199)$$

Dabei ist die kritische Wellenzahl k_c definiert über:

$$k_c = \frac{\Omega_i}{v_A} \quad (3.200)$$

Für das Integral

$$\epsilon_{\text{Landau}}^A = \frac{1}{4\pi} \int d^3k P_B^A 2\gamma_{\text{Landau}} \quad (3.201)$$

existiert keine exakte analytische Lösung. In Anhang C.1 wird die hier verwendete Näherung hergeleitet:

$$\epsilon_{\text{Landau}}^A \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{16\pi} (\delta B)^2 \frac{m_e}{m_i} v_e \frac{1}{k_c^2} \frac{s+1}{2-s} \frac{k_{\max}^{2-s} - k_{\min}^{2-s}}{k_{\min}^{-(1+s)} - k_{\max}^{-(1+s)}} \frac{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, 3, 1 - \Lambda)}{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \quad (3.202)$$

Für die Parameter des ISM ergibt sich im isotropen Kolmogorov-Fall eine Heizrate von:

$$\epsilon_{\text{Landau}}^A \simeq 4.1 \cdot 10^{-38} \text{ erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (3.203)$$

Ionen-Neutral-Dämpfung Ausgehend von der Dämpfungsrate (3.170) soll die Heizrate für die Ionen-Neutral-Dämpfung integriert werden. Die Rechnung lehnt sich an Lazar u. a. (2003) an und vernachlässigt damit die Dämpfung im Bereich kleiner k . Dann schreibt sich die Heizrate folgendermaßen:

$$\epsilon_{\text{neut}}^A = \frac{1}{4\pi} \int \int d\mathbf{k} P_B^A(\mathbf{k}) 2\gamma_{\text{neut}} \quad (3.204)$$

$$= \int_0^1 d\mu \int_{\max(k_N\mu, k_{\min})}^{k_{\max}} dk \nu_N P_B^A(\mathbf{k}) \quad (3.205)$$

Die Grenzwellenzahl k_N ist definiert über

$$\omega > \nu_N \cos \theta \Rightarrow k_N = \frac{\nu_N}{v_A} \quad (3.206)$$

Nach einer in Anhang B.3.1 beschriebenen Integration folgt als Endergebnis

$$\begin{aligned} \epsilon_N^A(\Lambda > (\mu_E)^2) &= \frac{(\delta B)^2}{2\pi} \frac{3}{4\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \\ &\quad \left(\frac{4\mu_E^{s+1}}{(4-s)(2-s)} \mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, 3 - \frac{s}{2}, 1 - \Lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3(2-s)} \mu_E^3 \Lambda^{-\frac{2+s}{2}} \right) \quad (3.207) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_N^A(\Lambda < (\mu_E)^2) &= \frac{(\delta B)^2}{2\pi} \frac{3}{4\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \left(\frac{4\mu_E^{s+1}}{(4-s)(2-s)} \right. \\ &\quad \left. \times \mathfrak{F}\left(\frac{2+s}{2}, 2, \frac{6-s}{2}, 1 - \mu_E^{-(1+s)} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{\mu_E^2}{s-1} \right) \right) \right) \quad (3.208) \end{aligned}$$

Der Parameter μ_E wurde in Anhang B.3.1 eingeführt und berücksichtigt die winkelabhängige Phasengeschwindigkeit von Alfvén-Wellen. Der numerische Wert für das isotrope Spektrum ist:

$$\epsilon_{\text{neut}}^A \simeq 1.3 \cdot 10^{-25} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.209)$$

Joule- und Viskose Dämpfung Auf Grund der Tatsache, daß Joule- und viskose Dämpfung (Gl. (3.135) und (3.159)) eine ähnliche Winkelabhängigkeit aufweisen und die viskose Dämpfung im gegebenen Parameterbereich des ISM immer größer ist als die Joule-Dämpfung, soll hier nur die viskose Dämpfung berücksichtigt werden.

Die Integration ist direkt durchführbar und liefert als Ergebnis:

$$\epsilon_{\text{visk}}^A = \frac{3}{16\pi} (\delta B)^2 \frac{s+1}{1-s} \frac{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}}{k_{\min}^{-(1+s)} - k_{\max}^{-(1+s)}} \frac{\eta_1}{m_i n_i} \frac{\mathfrak{F}(3, 1 + \frac{s}{2}, \frac{7}{2}, 1 - \Lambda) + \mathfrak{F}(2, 1 + \frac{s}{2}, \frac{7}{2}, 1 - \Lambda)}{\mathfrak{F}(2, 1 + \frac{s}{2}, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \quad (3.210)$$

Auch hier soll die Heizrate für den isotropen Fall numerisch ausgewertet werden:

$$\epsilon_{\text{visk}}^A \simeq 7.2 \cdot 10^{-26} \text{ erg cm}^{-3}\text{s}^{-1} \quad (3.211)$$

3.5.2 Schnelle magnetosonische Wellen

Bestimmung des Spektrums

Aus einem anisotropen Kolmogorov-Spektrums für die Dichtefluktuationen und dem Verhältnis zwischen Magnetfeld- und Dichtefluktuationen Gl. (3.78) ergibt sich für das Magnetfeldfluktuationsspektrum:

$$P_B^F \simeq P_{xx}^F = \frac{C_B^2}{(k_{\parallel}^2 + \Lambda k_{\perp}^2)^{\frac{2+s}{2}}} \quad (3.212)$$

Wieder kann die Forderung

$$\int d^3k P_B^F(\mathbf{k}) = (\delta B)^2 \quad (3.213)$$

zur Normierung verwenden. Daraus folgt:

$$C_B^2 = (\delta B)^2 \Lambda^{\frac{2+s}{2}} \frac{1-s}{k_{\text{max}}^{1-s} - k_{\text{min}}^{1-s}} \frac{1}{4\pi \mathfrak{F}(\frac{1}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda^{-1})} \quad (3.214)$$

Heizraten

Wie schon für die Alfvén-Wellen geschehen, werden hier die Heizraten durch die Faltung von Spektrum und Dämpfungsrate berechnet.

Landau-Dämpfung Um die Dämpfungsrate (3.182) zu integrieren, muß beachtet werden, daß gemäß Ginzburg (1961) die Rate nur im Winkelbereich

$$v_e \cos \theta \gg \sqrt{v_A^2 + 3v_i^2 \sin^2 \theta} \gg v_i \cos \theta \quad (3.215)$$

gültig ist, was zu einem Grenzwinkel

$$\cos \theta \geq \mu_L = \sqrt{\frac{v_A^2 + 3v_i^2}{v_e^2 + 3v_i^2}} \quad (3.216)$$

führt, wobei im gegebenen Szenario $\mu_L \ll 1$ gilt (mit einem Plasma- β von 0.22 ist der Wert von $\mu_L = 0.1$). Die Integration lässt sich dann folgendermaßen

$$\epsilon_{\text{Landau}}^F = \frac{1}{4\pi} \int d^3k P_B^F(\mathbf{k}) 2\gamma_{\text{Landau}}^F(\mathbf{k}) \quad (3.217)$$

$$= \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk \int_{\mu_L}^1 d\mu k^2 P_B^F(k, \mu) 2\gamma_{\text{Landau}}^F(k, \mu) \quad (3.218)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\delta B)^2 v_i^2}{4\pi v_e} \frac{1-s}{2-s} \frac{I(\mu_L, \Lambda, s)}{\mathfrak{F}(\frac{1}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda^{-1})} \quad (3.219)$$

wobei I eine Abkürzung für

$$I(\mu_L, \Lambda, s) = \frac{1}{2+s} \left((\Lambda + (1-\Lambda)\mu_L^2)^{-\frac{2+s}{2}} \mathfrak{F}\left(1, 1 + \frac{s}{2}, 2 + \frac{s}{2}, \frac{\Lambda}{\Lambda + (1-\Lambda)\mu_L^2}\right) - \mathfrak{F}\left(1, 1 + \frac{s}{2}, 2 + \frac{s}{2}, \Lambda\right) \right) \quad (3.220)$$

ist. Einige Approximationen für I werden in Anhang C.1 angegeben. Im Falle der isotropen Turbulenz läßt sich folgender numerischer Wert angeben:

$$\epsilon_{\text{Landau}}^F \simeq 1.1 \cdot 10^{-21} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.221)$$

Joule-Heizung Unter Rückgriff auf Gl. (3.136) läßt sich die Heizrate für Joule-Heizung leicht herleiten, da eine analytische Lösung ohne Näherung möglich ist:

$$\epsilon_{\text{Joule}}^F = \frac{1}{4\pi} \int d^3k P_B^F(\mathbf{k}) 2\gamma_{\text{Joule}}^F \quad (3.222)$$

$$= (\delta B)^2 \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{v_A}{\Omega_i} \right)^2 \frac{1}{\tau_e} \frac{k_{\max}^{3-s} - k_{\min}^{3-s}}{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}} \frac{1-s}{3-s} \quad (3.223)$$

Im Gegensatz zu den meisten vorher betrachteten Dämpfungsmechanismen tritt durch die fehlende Winkelabhängigkeit der Dämpfungsrate hier keine Abhängigkeit von der Anisotropie Λ auf.

Zum Vergleich ist auch hier der Wert der Joule-Heizung für isotrope Turbulenz angegeben.

$$\epsilon_{\text{Joule}}^F \simeq 2.1 \cdot 10^{-24} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.224)$$

Für isotrope (oder zumindest nahezu isotrope) Turbulenz ist die Joule-Heizung ein vernachlässigbarer Effekt.

Viskose Dämpfung Ausgehend von der Dämpfungsrate (3.160) integriert man auf bekanntem Wege

$$\epsilon_{\text{visk}}^F = \frac{1}{4\pi} \int d^3k P_B^F(\mathbf{k}) 2\gamma_{\text{visk}}^F \quad (3.225)$$

$$= \frac{1}{6\pi} (\delta B)^2 v_i^2 \tau_i \frac{k_{\text{max}}^{3-s} - k_{\text{min}}^{3-s}}{k_{\text{max}}^{1-s} - k_{\text{min}}^{1-s}} \frac{1-s}{3-s} \times \left(1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{18}{5(\Omega_i \tau_i)^2} \right) \frac{\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda^{-1}\right)}{\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda^{-1}\right)} \right) \quad (3.226)$$

Neben der Betrachtung der numerischen Heizrate für den isotropen Fall

$$\epsilon_{\text{visk}}^F \simeq 2.3 \cdot 10^{-14} \text{ erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (3.227)$$

die die Kühlrate (2.12) um Größenordnungen überschreitet, lohnt es sich, die numerischen Werte für die Dämpfungsrate zu analysieren:

$$\gamma_{\text{visk}}^F = (4.8 \cdot 10^{17} \sin^2 \theta + 7.3 \cdot 10^7 \cos^2 \theta) k^2 \text{ Hz} \quad (3.228)$$

Hier fällt der eklatante Unterschied zwischen paralleler und senkrechter Komponente auf. Später soll hierauf noch einmal explizit Bezug genommen werden.

Ionen-Neutral-Dämpfung Bei der Betrachtung der Ionen-Neutral-Dämpfung muß berücksichtigt werden, daß es zwei unterschiedliche Dämpfungsraten Gl. (3.171) für die Bereiche $\omega \ll \nu_N$ und $\omega \gg \nu_N$ gibt. Da im ISM $k_{\text{min}} \ll k_N \ll k_{\text{max}}$ gilt (physikalisch bedeutet dies, daß sowohl der starke als auch der schwache Dämpfungsmechanismus auftreten), wobei $k_N = \nu_N/v_A$, wird über beide Bereiche einzeln integriert:

$$\epsilon_{\text{neut}}^F = \frac{1}{4\pi} \int d^3k P_B^F(\mathbf{k}) 2\gamma_{\text{neut}} \quad (3.229)$$

$$= \int_{k_{\text{min}}}^{k_N} dk \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{k^4 v_A^2}{2\nu_N} \sin \theta P_B^F(k, \theta) + \int_{k_N}^{k_{\text{max}}} dk \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{k^2 \nu_N}{2} \sin \theta P_B^F(k, \theta) \quad (3.230)$$

$$= \frac{(\delta B)^2}{4\pi} \nu_N \frac{1-s}{k_{\text{max}}^{1-s} - k_{\text{min}}^{1-s}} \left(\frac{k_{\text{max}}^{1-s}}{1-s} - \frac{k_{\text{min}}^{3-s}}{k_N^2(3-s)} - k_N^{1-s} \left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{3-s} \right) \right) \quad (3.231)$$

Für den Fall, daß $k_N \simeq k_{\text{min}}$ ist, also der Bereich starker Dämpfung zu vernachlässigen ist, vereinfacht sich die Heizrate zu

$$\epsilon_{\text{neut}}^F \simeq \frac{\nu_N}{4\pi} (\delta B)^2 \quad (3.232)$$

Legt man für den numerischen Wert die exakte Berechnung und nicht die Vereinfachung der verschwindenden starken Dämpfung zugrunde so ergibt sich:

$$\epsilon_{\text{Visk}}^F \simeq 2.9 \cdot 10^{-23} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.233)$$

3.5.3 Langsame magnetosonische Wellen

Auch wenn sich die Dispersionsrelation der langsamen magnetosonischen Wellen eklatant von der Dispersionsrelation der schnellen magnetosonischen Wellen unterscheidet, ähneln sich die Dämpfungsmechanismen beider Wellenmoden sehr stark und es sind daher ähnliche Ergebnisse für gleiche Spektren zu erwarten. Außerdem ist die Abhängigkeit von Dichte- und Magnetfeldfluktuationsspektren für beide Moden bis auf konstante Faktoren identisch.

Bestimmung des Spektrums

Ebenso wie in den vorangegangenen beiden Fällen kommt hier das anisotrope Kolmogorov-Spektrum zur Anwendung. Unter Verwendung von Gl. (3.78) kann auf demselben Wege das Magnetfeldfluktuationsspektrum berechnet werden

$$P_B^S(\mathbf{k}) \simeq P_{zz}^S = \frac{C_B^2}{(k_{\parallel}^2 + \Lambda k_{\perp}^2)^{\frac{2+s}{2}}} \quad (3.234)$$

wobei C_B durch

$$\int d^3k P_B^S(\mathbf{k}) = (\delta B)^2 \quad (3.235)$$

festgelegt wird. Daraus folgt sofort:

$$C_B^2 = (\delta B)^2 \Lambda^{\frac{2+s}{2}} \frac{1-s}{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}} \frac{1}{4\pi \mathfrak{F}(\frac{1}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda^{-1})} \quad (3.236)$$

Dies ist im wesentlichen identisch mit den Ergebnissen für schnelle magnetosonische Wellen, einzig der Faktor C_B ist für beide Moden im späteren Modell verschieden.

Heizraten

Die Berechnung der Heizraten für langsame magnetosonische Wellen folgt die Berechnung der Heizraten dem bekannten Schema.

Joule-Heizung Unter Berücksichtigung der Heizrate (3.138) ergibt sich nach Integration mit dem Spektrum (3.234) folgende Heizrate

$$\epsilon_{\text{Joule}}^S = (\delta B)^2 \frac{c^2 c_s^2}{v_A^2} \frac{1}{6\pi\sigma_\perp} \frac{k_{\text{max}}^{3-s} - k_{\text{min}}^{3-s}}{k_{\text{max}}^{1-s} - k_{\text{min}}^{1-s}} \frac{1-s}{3-s} \frac{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)}{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda)} \quad (3.237)$$

Unter Verwendung der gängigen Parameter des ISM ergibt sich der numerische Wert für den isotropen Fall:

$$\epsilon_{\text{Joule}}^S \simeq 2.4 \cdot 10^{-14} \text{ erg cm}^{-3}\text{s}^{-1} \quad (3.238)$$

Viskose Dämpfung Die viskose Dämpfungsrate (3.161) unterscheidet sich im Fall der langsamen magnetosonischen Wellen von der Dämpfungsrate im Fall der schnellen magnetosonischen Wellen in einem wesentlichen Punkt: Hier wird die parallele Komponente stärker gedämpft (um den Faktor $(\Omega_i \tau_i)^2 \simeq 10^9$). Ansonsten gibt es keinen Unterschied in der Heizrate

$$\epsilon_{\text{Visk}}^S = \frac{(\delta B)^2}{m_i n_i} \frac{k_{\text{max}}^{3-s} - k_{\text{min}}^{3-s}}{k_{\text{max}}^{1-s} - k_{\text{min}}^{1-s}} \frac{1-s}{3-s} \left(\eta_2 + \left(\frac{4}{9} \eta_0 - \frac{1}{3} \eta_2 \right) \frac{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)}{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda)} \right) \quad (3.239)$$

Wiederum ergibt die Annahme eines isotropen Spektrums den numerischen Wert:

$$\epsilon_{\text{Visk}}^F \simeq 4.3 \cdot 10^{-14} \text{ erg cm}^{-3}\text{s}^{-1} \quad (3.240)$$

Ionen-Neutral-Dämpfung Ähnlich dem Fall der Alfvén-Wellen muß bei der Ionen-Neutral-Dämpfung für langsame magnetosonische Wellen berücksichtigt werden, daß auch hier zwei Wellenzahlgebiete mit unterschiedlichem Dämpfungsverhalten vorliegen. Die Integration der Heizrate auf herkömmlichen Wege führt zu sehr komplizierten, nicht verwendbaren Ergebnissen, daher soll an dieser Stelle nur eine Abschätzung vorgenommen werden.

Zuerst muß berücksichtigt werden, daß die starke Dämpfung nur im Bereich $k < k_N \cos \theta$ auftritt, da bei größeren k die Wellenfrequenz oberhalb der Ionen-Neutral-Stoßrate liegt. Dieser schon für die Alfvén-Wellen bekannte Fall führt zu einer nahezu identischen Rechnung, die sich nur durch die verschiedenen Spektren unterscheiden. In Anhang (B.3.2) findet sich die vollständige Herleitung. Für den Fall sehr großer und sehr kleiner Anisotropie läßt sich die Heizrate approximieren.

$$\begin{aligned} \epsilon_N^S(\Lambda > \mu_E^2) &\simeq \nu_N \frac{(\delta B)^2}{\mathfrak{F}(1, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda)} \\ &\times \left(\frac{\mu_E}{2 - s} \mathfrak{F}(1 - \frac{s}{2}, 1, 2 - \frac{s}{2}, 1 - \Lambda) - \Lambda^{-\frac{2+s}{2}} \frac{1 - s}{2 - s} \mu_E \right) \end{aligned} \quad (3.241)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_N^S(\Lambda < \mu_E^2) &\simeq \nu_N \frac{(\delta B)^2}{\mathfrak{F}(1, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda)} \\ &\times \left(\frac{\mu_E}{2 - s} \mathfrak{F}(1 - \frac{s}{2}, 1, 2 - \frac{s}{2}, 1 - \Lambda) - \mu_E^{1-2s} \frac{1 - s}{2s(1 + s)} \right) \end{aligned} \quad (3.242)$$

$$(3.243)$$

Hier bezeichnet μ_E das Verhältnis aus minimaler Wellenlänge und der charakteristischen Dämpfungswellenlänge ν_N/v_A . In Abb. (3.8) findet sich allerdings die exakte Lösung.

Aus den bisherigen Rechnungen folgt der numerische Wert:

$$\epsilon_{\text{Neut}}^S \simeq 3.4 \cdot 10^{-23} \text{ erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (3.244)$$

3.5.4 Diskussion der Heizraten

In den Abb. (3.6) – (3.8) sind die Heizraten der einzelnen Prozesse für jede Mode aufgetragen und in Abb (3.9) ist die Gesamtheizrate für die Moden aufgetragen. Die Heizraten sind jeweils gegen die Anisotropie aufgetragen, um eine Aussage über mögliche dämpfungsinduzierte Anisotropie machen zu können. Dies ist insbesondere von Interesse, da sich so eine Aussage über die mögliche Anisotropie eines Modellspektrums ableiten lassen. Als Spektralindex wurde für alle Abbildungen der Fall $s = 5/3$ gewählt.

Bei der Betrachtung der Heizraten lassen sich bereits an dieser Stelle verschiedene Aussagen über die Turbulenz des interstellaren Mediums ableiten, die hier erst einmal für die Moden getrennt diskutiert werden. Die entscheidende Vergleichsgröße für alle Heizraten ist die Kühlrate (2.12). Durch den Vergleich von Heiz- und Kühlraten lassen sich im thermodynamischen Gleichgewicht die Modellparameter ableiten.

Alfvén-Wellen Auf den ersten Blick fällt in Abb. (3.6) auf, daß für Alfvén-Wellen die Ionen-Neutral-Dämpfung über einen weiten Λ -Bereich die dominierende Komponente ist. Dies hängt insbesondere mit der Tatsache zusammen, daß Alfvén-Wellen nahezu inkompressibel sind und daher die viskose Dämpfung deutlich geringer ausfällt als bei

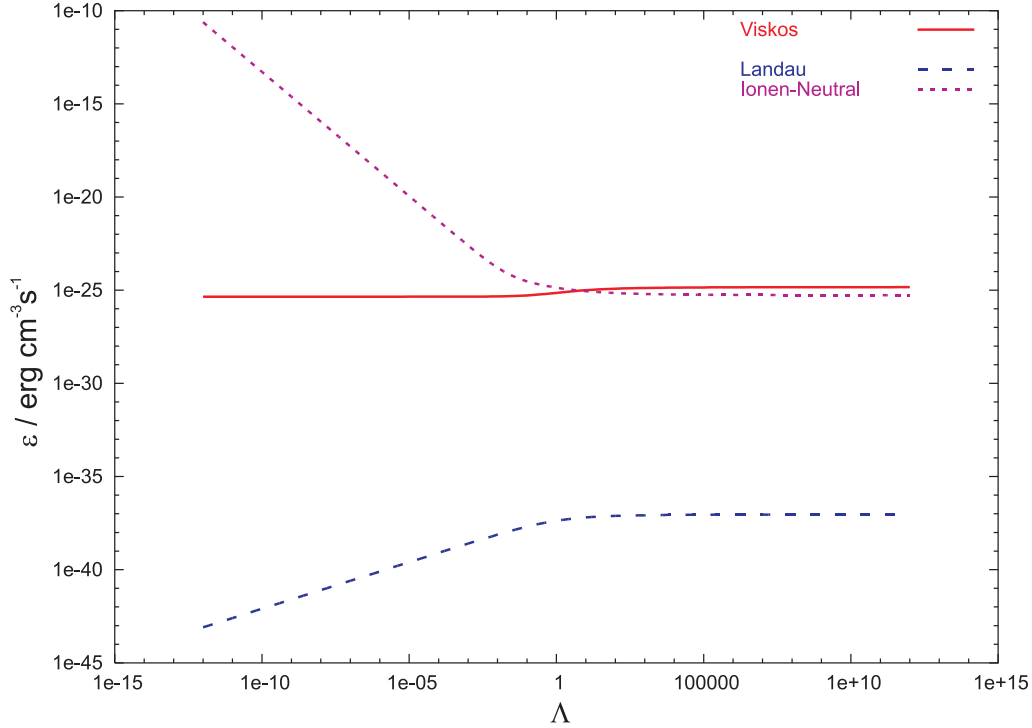


Abbildung 3.6: Heizraten der Alfvén-Wellen in Abhängigkeit vom Anisotropiefaktor Λ für $s = 5/3$, $k_{min} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$, $k_{max} = 2\pi \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ und die Parameter des ISM aufgetragen

den kompressiblen magnetosonischen Wellen. Die Joule-Heizung wurde ohnehin schon vorher mit der viskosen Dämpfung zusammengefasst.

Die Heizrate der Alfvén-Wellen wird für kleine Werte des Anisotropie-Parameters Λ von der Ionen-Neutral-Dämpfung dominiert. Dies läßt sich leicht dadurch erklären, daß die Phasengeschwindigkeit der nahezu vollständig senkrecht zum geordneten Magnetfeld verlaufenden Wellen gegen Null sinkt und damit der Einfluß der ruhenden Neutralkomponente stark zunimmt.

Vergleicht man die Heizrate mit der Kühlrate (2.12) so zeigt sich, daß für den isotropen Fall die Heizrate nur um rund eine Zehnerpotenz zu hoch liegt. Wie dieser Widerspruch aufzulösen ist, wird ausgiebig im nächsten Kapitel diskutiert.

Schnelle magnetosonische Wellen Im Gegensatz zu Alfvén-Wellen zeigt sich bei schnellen magnetosonischen Wellen (s. Abb. 3.7), daß die viskose Dämpfung den größten

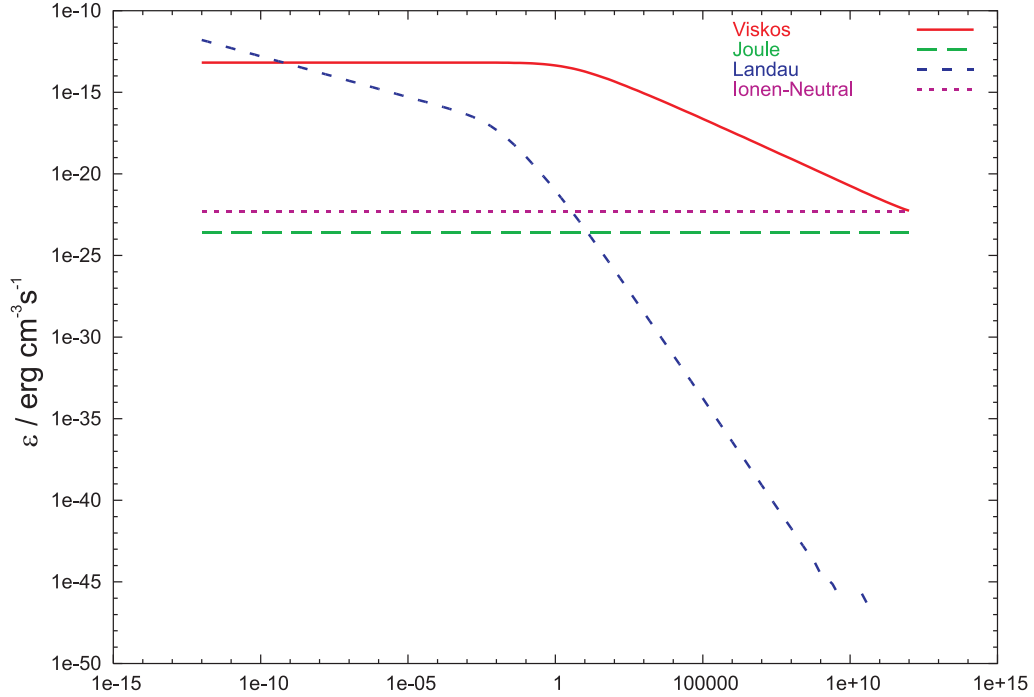


Abbildung 3.7: *Abhängigkeit der Heizraten der schnellen magnetosonischen Wellen vom Anisotropiefaktor Λ für $s = 5/3$, $k_{min} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$, $k_{max} = 2\pi \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ und die Parameter des ISM aufgetragen*

Anteil an der Gesamtheizrate hat (jedenfalls für Werte von $\Lambda > 10^{-10}$). Wichtiger ist hier allerdings, daß die Gesamtheizrate für ein isotropes Spektrum fast 12 Größenordnungen über der Kühlrate (2.12) liegt. Dies ändert sich auch für sehr große Parameter Λ nicht. Desweiteren gilt es zu beachten, daß auch die Ionen-Neutral-Dämpfung, die, wie in Gl. (3.171) zu sehen ist, weder von der Anisotropie noch vom Spektralindex abhängt, über der Kühlrate liegt.

Langsame magnetosonische Wellen Das Bild, daß sich für langsame magnetosonische Wellen zeigt (s. Abb. 3.8), ist dem für der schnellen magnetosonischen Wellen nicht unähnlich: Auch hier ist die viskose Dämpfung über weite Λ -Bereiche der entscheidende Prozeß und die Gesamtheizrate liegt mehrere Größenordnungen über der Kühlrate. Es ergeben sich allerdings zwei wesentliche Unterschiede. Erstens ist die Ionen-Neutral-Dämpfung nicht mehr von den Parametern der Turbulenz abhängig und die viskose Dämpfung ändert sich nicht mit der Anisotropie Λ für Anisotropien $\Lambda > 1$.

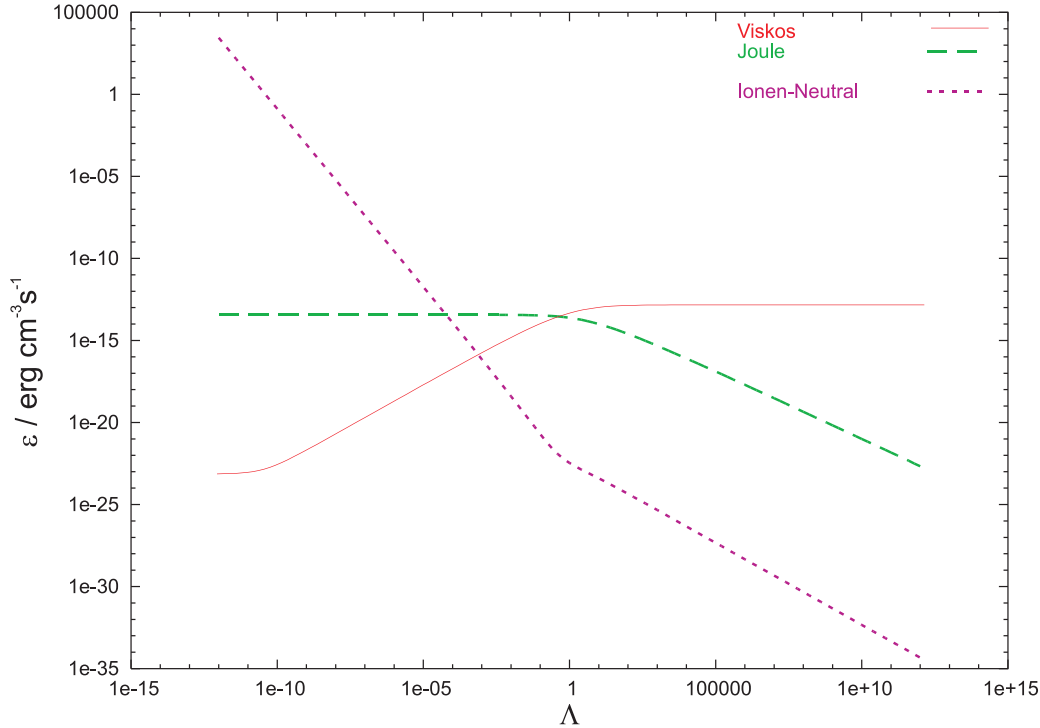


Abbildung 3.8: *Abhängigkeit der Heizraten der langsamen magnetosonischen Wellen vom Anisotropiefaktor Λ für $s = 5/3$, $k_{min} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$, $k_{max} = 2\pi \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ und die Parameter des ISM aufgetragen*

3.5.5 Problematik der Plasmawellendämpfung

Aus den in diesem Kapitel zusammengetragenen Ergebnissen zur Plasmawellendämpfung, die in Abb. (3.9) zusammengetragen sind, läßt sich ein wesentlicher Schluss ziehen: Wenn sich die Turbulenz des interstellaren Mediums durch Plasmawellen beschreiben läßt, kann es sich nicht um eine homogene, isotrope Turbulenz mit dem Exponenten $5/3$ handeln, die sich zwischen den beschriebenen Wellenzahlen k_{min} und k_{max} ausbreitet.

Wie schon im Kapitel 1.3 beschrieben, läßt sich die Natur der Turbulenz nur sehr grob durch (terrestrische) Messungen bestimmen. Daher soll im nächsten Kapitel versucht werden, die Turbulenz analytisch dahingehend einzuschränken, daß sich Heiz- und Kühlrate in Einklang bringen lassen.

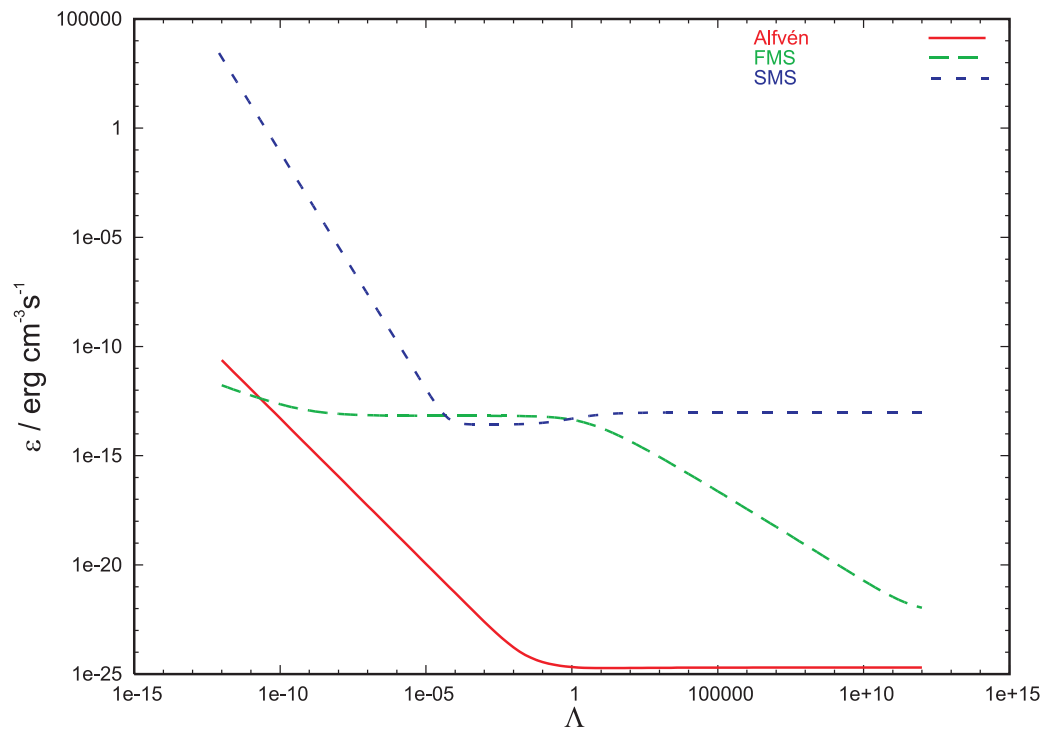


Abbildung 3.9: *Summe der Heizrate für die einzelnen Moden gegen den Anisotropiefaktor Λ aufgetragen*

4 Modell der interstellaren Turbulenz

Im bisherigen Verlauf der Arbeit wurde gezeigt, daß das interstellare Medium durch verschiedene Prozesse gekühlt wird (Kapitel 2.1). Der Gesamtkühlrate stehen verschiedene Heizprozesse gegenüber, die kein thermisches Gleichgewicht ergeben (Kapitel 2.2). Zusätzlich konnte gezeigt werden, daß die Kühlrate dem Energiezufluß durch Supernovae entspricht (Kapitel 2.4). Diese Ergebnisse führen zu der Notwendigkeit, den Heizprozeß zu identifizieren, der die durch Supernovae freigesetzte Energie in die Heizung des ISM überführt.

In Kapitel 3.5 wurden daher Plasmawellendämpfungsprozesse als Quellen dieser Wärme analysiert. Die resultierende Heizrate übersteigt aber für den Fall isotroper, kolmogorovartiger Turbulenz die Kühlrate um mehrere Größenordnungen. Um diesen Widerspruch aufzulösen, wird in diesem Kapitel ein Modell entwickelt, in dem für jede Mode Spektralindex, Ausdehnung des Spektrums und Anisotropie angepasst werden. Ziel der Anpassung ist es, die Summe der Heizraten aller Moden an die Kühlrate zu anzulehnen.

Insgesamt ergeben sich damit 12 Parameter zur Bestimmung des Modells (für jede der drei Moden die relative Intensität der Mode δB , Spektralindex s , Anisotropie Λ und maximale Wellenzahl k_{\max}). Hier wurde die Annahme gemacht, daß k_{\min} keinen wesentlichen Einfluß auf die Heizraten hat (da alle relevanten Dämpfungsprozesse von mit positiven Potenzen von k abhängen, steigt die Dämpfung mit k an, im Bereich kleiner k finden kaum Änderungen statt).

Einzig aus der Forderung, daß die Heizrate mit der Kühlrate übereinstimmen soll, lassen sich diese 12 Parameter nicht bestimmen. Aus diesem Grund soll in diesem Kapitel folgender Ansatz verfolgt werden: Am Beispiel schneller magnetosonischer Wellen (die sich durch ihre besonders hohe Heizrate auszeichnen, s. 3.5.2) wird gezeigt, wie durch Veränderungen des Spektrums der Turbulenz die Heizrate gesenkt werden kann. Da auch in diesem Fall vier freie Parameter vorhanden sind, werden ausschließlich Turbulenzmodelle genutzt, die nicht alle Parameter gleichzeitig variieren.

Wie im Beispiel schneller magnetosonischer Wellen lassen sich ähnliche Modelle auch für Alfvén- und langsame magnetosonische Wellen aufstellen. Anschließend wird auf Basis der vorhandenen Meßdaten versucht, die Zahl der möglichen Modelle auf ein Minimum zu senken.

4.1 Anpassung der Turbulenzparameter schneller magnetosonischer Wellen

Ausgangspunkt für die Überlegungen in diesem Abschnitt sind die Heizraten, die in Gl. (3.219, 3.223, 3.226, 3.231) gegeben sind. Aus Abbildung 3.7 entnimmt man, daß für Anisotropieparameter $\Lambda > 1$ (vornehmlich paralleles Spektrum) die viskose Dämpfung die entscheidende Rolle spielt. Außerdem ist zu sehen, daß in diesem Anisotropie-Bereich sowohl Ionen-Neutral-Dämpfung als auch Joule-Heizung Heizraten oberhalb der Kühlrate haben.

Im ersten Schritt wird die Abhängigkeit der Heizraten von den Eingangsgrößen analysiert. Die Ionen-Neutral-Heizrate (Gl. 3.231) ist nur von der Stärke der Turbulenz δB abhängig, die Joule-Heizung (Gl. 3.223) ist nur von der Anisotropie Λ unabhängig und die viskose hängt Heizrate von allen Eingangsgrößen ab.

Prinzipiell ergeben sich drei Modelle, für die die schnelle magnetosonische Turbulenz eine Heizrate erreicht, die der Kühlrate entspricht:

1. Ein anisotropes Modell, das $\Lambda \gg 1$ annimmt. Hier müssen zwei Randbedingungen beachtet werden: Die Ionen-Neutral-Heizung schränkt die maximale Turbulenzstärke ein und die viskose Dämpfung gibt Informationen über das minimale Λ .
2. Ein Modell mit steilem Spektrum. Da viskose und Joule-Heizung dieselbe Abhängigkeit vom spektralen Index s haben, die viskose Dämpfung aber deutlich stärker ist, kann die Heizrate dieser beiden Prozesse für alle s durch die Heizrate der viskosen Dämpfung bestimmt werden. Der Parameter δB wird zusätzlich über die Ionen-Neutral-Heizung bestimmt, da dieser Prozeß unabhängig vom Spektralindex s ist.
3. Ein Modell mit frühem Abbruch des Spektrums. Hier gilt analog dasselbe wie im

vorhergehenden Modell, nur daß hier k_{\max} anstatt s bestimmt wird.

In der weiteren Analyse läßt sich zeigen, daß die Modelle 2 und 3 zusammengefasst werden können, um eine eindeutige Beziehung zwischen s und k_{\max} herzustellen.

4.1.1 Das anisotrope Modell

Der erste Schritt zur Bestimmung der Anisotropie ist die Bestimmung der maximalen Turbulenzstärke mit Hilfe der Ionen-Neutral-Heizraten. Um diesen Schritt durchzuführen, muß zuerst eine Annahme über das Verhältnis von viskoser und Ionen-Neutral-Heizraten gemacht werden. Hier wird der Ansatz der Äquipartition zwischen beiden Heizraten gewählt. In diesem Ansatz wird außerdem die gesamte Heizrate nur über viskose und Ionen-Neutral-Dämpfung bestimmt, da die verbleibenden Prozesse um Größenordnungen kleiner sind.

$$\epsilon_{\text{Visk}} + \epsilon_{\text{Neut}} = L_R \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\text{Visk}} = \epsilon_{\text{Neut}} = \frac{1}{2}L_R \quad (4.2)$$

Auf der rechten Seite steht jeweils die Kühlrate L_R aus Gl. (2.12). Die Annahme der Äquipartition erscheint gerechtfertigt, da beide Prozesse unabhängig voneinander wirken.

Nun läßt sich δB^F , die Turbulenzstärke der schnellen magnetosonischen Wellen, bestimmen:

$$\delta B^F = \sqrt{\frac{2\pi}{\nu_N} L_R} \simeq 1.59 \cdot 10^{-8} \text{G} \quad (4.3)$$

Dies entspricht in etwa einem Sechzigstel der gesamten fluktuierenden Magnetfeldstärke, dies ist auf der einen Seite das Maximum, daß sich aus dem thermischen Gleichgewicht bestimmen läßt, auf der anderen Seite ist auch erheblich weniger, als in einer gemischten Plasmawellenturbulenz erwartet wird. Nun kann die Anisotropie durch die Forderung:

$$\epsilon_{\text{Visk}} = \frac{\nu_N}{2\pi} (\delta B)^2 \quad (4.4)$$

bestimmt werden. Zur Vereinfachung wird in der viskosen Dämpfungsrate der Term $(\Omega_i \tau_i)^2 (\simeq 10^4)$ gegen 1 vernachlässigt. Damit liest sich die vorhergehende Forderung

folgendermaßen:

$$\frac{\nu_N}{2\pi}(\delta B)^2 = \frac{1}{6\pi}(\delta B)^2 v_i^2 \tau_i \frac{k_{\max}^{3-s} - k_{\min}^{3-s}}{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}} \frac{1-s}{3-s} \times \left(1 - \frac{1 \mathfrak{F}(\frac{3}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda^{-1})}{3 \mathfrak{F}(\frac{1}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda^{-1})} \right) \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \frac{3 k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}}{2 k_{\max}^{3-s} - k_{\min}^{3-s}} \frac{3-s}{1-s} \frac{\nu_N}{v_i^2 \tau_i} = 1 - \frac{1 \mathfrak{F}(\frac{3}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda^{-1})}{3 \mathfrak{F}(\frac{1}{2}, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda^{-1})} \quad (4.6)$$

Eine numerische Analyse liefert einen Wert von $\Lambda \simeq 4.9 \cdot 10^5$ unter der Annahme von $s = 5/3$ und $k_{\max} = 2\pi \cdot 10^7 \text{ cm}^{-1}$. Dies entspricht einem fast vollständig parallelen Spektrum.

4.1.2 Steile Spektren

Unter der Annahme eines isotropen Spektrums können immer noch die Parameter s und k_{\max} variiert werden. Die Annahme der Äquipartition wird aus dem letzten Abschnitt übernommen. Für $\Lambda = 1$ nehmen die beiden hypergeometrischen Funktionen den Wert 1 an. Es verbleibt folgende Bedingung:

$$\frac{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}}{k_{\max}^{3-s} - k_{\min}^{3-s}} \frac{3-s}{1-s} \frac{\nu_N}{v_i^2 \tau_i} = \frac{4}{9} \quad (4.7)$$

Unter Verwendung der Werte $k_{\min} = 2\pi 10^{-17} \text{ cm}$ und $k_{\max} = 2\pi 10^{-7} \text{ cm}$, ergibt sich $s = 2.53$, also ein erheblich steileres Spektrum als nach Kolmogorov-Theorie erwartet ($s = 5/3$).

4.1.3 Früher Abbruch

Die letzte Veränderung des Spektrums ist die Variation von k_{\max} (k_{\min} kann zwar ebenfalls variiert werden, durch den kleineren Exponenten fällt eine Änderung hier aber kaum ins Gewicht). Die Bedingung ist dieselbe wie im vorherigen Abschnitt.

Aus dieser Überlegung ergibt sich $k_{\max} = 8.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$. Mit der ursprünglichen Annahme aus Messungen, daß sich das Spektrum bis $k_{\max} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ erstreckt, ist diese Annahme jedoch nicht kompatibel.

4.1.4 Gemischte Modelle

Die bisher gezeigten Variationsmöglichkeiten stellen immer nur die Extremsituation einer veränderten Variablen dar. Diese Modelle lassen sich natürlich auch kombinieren. Die wahrscheinlichste Kombination zweier Variationen ist die Verknüpfung eines steilen Spektrums mit einem früheren Abbruch. Mit den zuvor angeführten Methoden läßt sich die in Abb. 4.1 wiedergegebene Relation zwischen dem Abbruch k_{\max} des Spektrums und dem Spektralindex s bestimmen, für die das Spektrum ein thermisches Gleichgewicht ergibt.

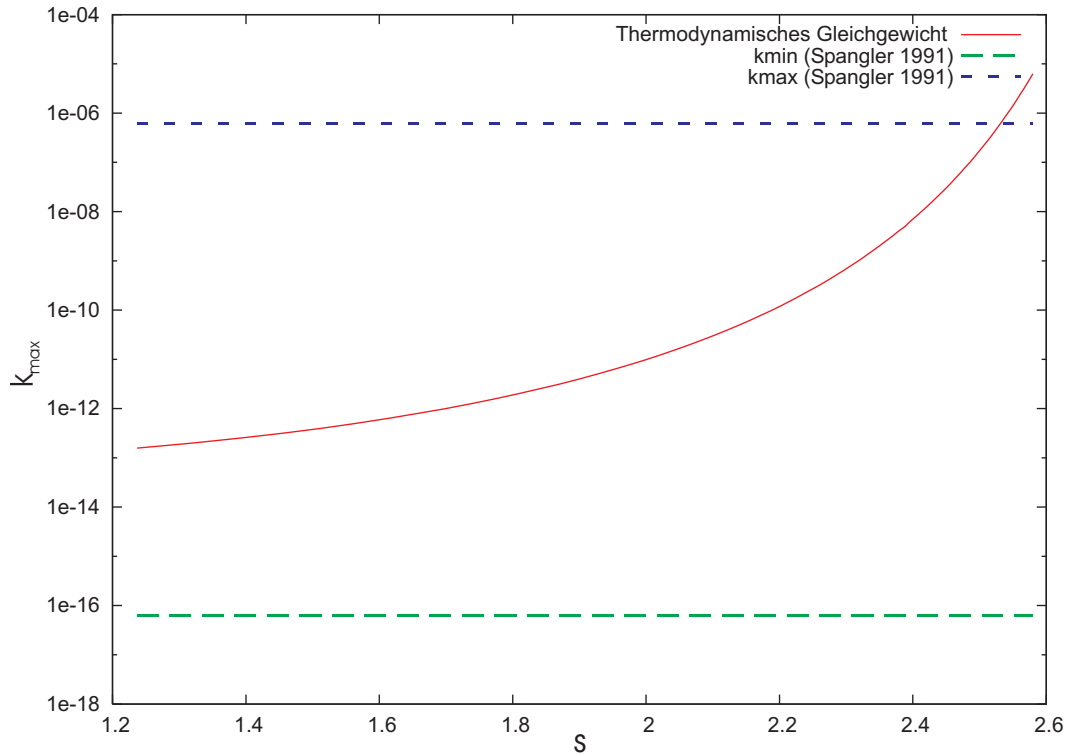


Abbildung 4.1: Zusammenhang zwischen k_{\max} und s unter Annahme eines isotropen Spektrums, bei dem Heiz- und Kühlrate im thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Zum Vergleich sind k_{\min} und k_{\max} aus Spangler (1991) angegeben.

4.2 Anpassung der Turbulenzparameter langsamer magnetosonischer Wellen

Das Vorgehen im Falle langsamer magnetosonischer Wellen ähnelt zwar dem im vorigen Abschnitt beschriebenen, weist aber andere Einschränkungen auf. Aus Abbildung 3.8 ist zu ersehen, daß für stark senkrechte Spektren ($\Lambda < 1$) die Heizrate sehr stark ansteigt, während für für parallele Spektren ($\Lambda > 1$) die Viskosität dominiert. Die Heizrate durch viskose Dämpfung (Gl. 3.239) nimmt schon für fast isotrope Spektren den Grenzwert für parallele Spektren an. Daher soll als Ausgangswert nur die viskose Dämpfungsrate für parallele Spektren verwendet werden. Zwar fällt damit die Anisotropie als Variationsparameter weg, es gibt aber keine weitere Einschränkung, wie z.B. die Ionen-Neutral-Dämpfung bei schnellen magnetosonischen Wellen.

Hier werden also die drei verbleibenden Parameter, die variiert werden können, δB , s und k_{\max} , einzeln behandelt. Erst die folgende physikalische Betrachtung kann zeigen, welche Variation sinnvoll ist und vor allem welche Kombination dieser Variationen nicht nur möglich sondern auch angebracht ist.

Die für das thermodynamische Gleichgewicht zu erfüllende Bedingung lautet nun:

$$\epsilon^S = L_R \quad (4.8)$$

$$\epsilon_V^S = L_R \quad (4.9)$$

$$\Rightarrow \frac{(\delta B)^2}{4\pi} \frac{\eta_0}{m_i n_i} \frac{k_{\max}^{3-s} - k_{\min}^{3-s}}{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}} = L_R \quad (4.10)$$

4.2.1 Variation der Turbulenzstärke

Unter Benutzung eines Kolmogorov-Spektralindex s und eines Abbruch des Spektrums bei $k_{\max} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ ergibt sich ein Wert von $\delta B = 7.8 \cdot 10^{-13} \text{ G}$. Dieser Wert ist erheblich niedriger als die gesamte Turbulenzstärke von $\delta B = 0.9 \cdot 10^{-6} \text{ G}$. Es ist unwahrscheinlich, daß sich nur durch Anpassung des Parameters δB ein thermodynamisches Gleichgewicht einstellt, da vermutlich die Größe von δB in einer ähnlichen Größenordnung liegt, wie es bei schnellen magnetosonischen Wellen der Fall ist.

4.2.2 Variation des Spektralindex

Eine Variation des Spektralindex fördert ein ähnliches Bild zu Tage wie im vorhergehenden Fall. Wird der Parameter δB auf $0.9 \cdot 10^{-6}$ G gesetzt ergibt sich ein Spektralindex von $s = 3.28$ unter der Annahme eines spektralen Abbruchs bei $k_{\max} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$. Auch dieser Wert legt nahe, daß durch eine einzelne Variation das Ziel des thermodynamischen Gleichgewichts nicht erreicht werden kann.

4.2.3 Variation der Abbruchwellenzahl

Setzt man das thermodynamische Gleichgewicht mit $\delta B = 0.9 \cdot 10^{-6}$ G und $s = 5/3$ an, so läßt sich die Abbruchwellenzahl k_{\max} berechnen und es ergibt sich $k_{\max} = 5.2 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^{-1}$.

Dieser Wert ist derart klein, daß nahezu kein Inertialbereich existiert, daher ist diese Lösung sehr unwahrscheinlich. Interessanter ist die Annahme, daß die Intensität langsamer Wellen der schneller magnetosonischer Wellen entspricht, also $\delta B = 1.6 \cdot 10^{-8}$ G. Dann ergibt sich $k_{\max} = 7.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$. Dieser Wert ist erheblich realistischer, da hier eine Kaskade über vier Größenordnungen existiert.

Insgesamt ergibt sich aus den hier amgestellten Überlegungen, daß ohne physikalische Einschränkungen aus den Heizraten kein eindeutiger Parametersatz der langsamen magnetosonischen Turbulenz folgt.

4.3 Anpassung der Turbulenzparameter von Alfvén-Wellen

Die Heizrate der Alfvén-Wellen weist durch die Tatsache, daß die Ionen-Neutral-Dämpfung (Gl. 3.208) mit steigender Anisotropie zunimmt, während die viskose Dämpfung (Gl. 3.210) abnimmt, ein Minimum auf. Dieses Minimum ist abhängig von Spektralindex und maximale Wellenzahl k_{\max} , diese Abhängigkeit ist aber nicht besonders stark ausgeprägt. Für die bisher verwendeten Standardparameter liegt das Minimum bei $\Lambda = 13.42$. In Abb. 4.2 ist die Summe von viskoser und Ionen-Neutral-Dämpfung für verschiedene s gegen die Anisotropie Λ aufgetragen, hier läßt sich dann das s -abhängige Minimum ablesen.

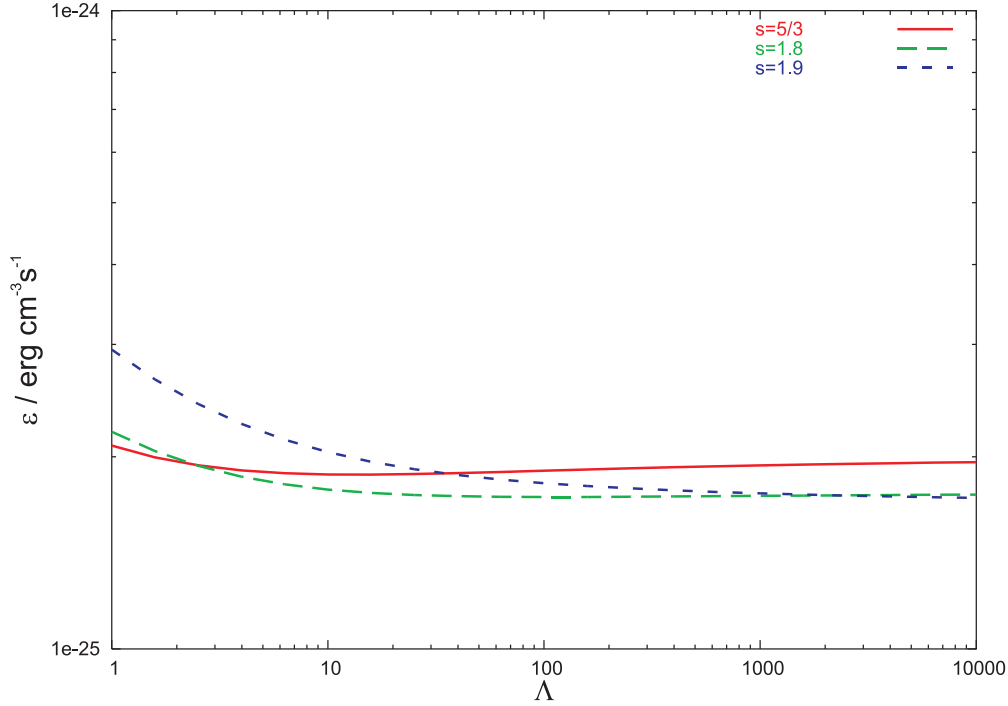


Abbildung 4.2: Summe aus viskoser und Ionen-Neutral-Dämpfung für Alfvén-Wellen für verschiedene Spektralindizes s gegen den Anisotropien Λ aufgetragen

Eine weitere Analyse fördert ein interessanteres Faktum zu Tage: im Gegensatz zu den beiden vorher analysierten Moden ist die Alfvén-Mode nahezu unempfindlich gegenüber Veränderungen des spektralen Abbruchs k_{\max} : Über den gesamten (vernünftigen) Parameterbereich von k_{\max} (zwischen $2\pi \cdot 10^{-17}$ und $2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$) variiert die Heizrate um höchstens ein Prozent. Allerdings führt eine *Verminderung* von k_{\min} zu einer deutlichen Verminderung der Heizrate (s. Abb 4.3). Der Grund für die starke Abhängigkeit von k_{\min} liegt in der Dominanz der Ionen-Neutral-Dämpfung. Mit einer Erweiterung des Spektrums in Richtung des Produktionsbereich ist ein größerer Teil der Energie im Bereich der starken Ionen-Neutral-Dämpfung konzentriert. Damit sinkt die Heizrate, da für starke Ionen-Neutral-Dämpfung die Dämpfungsrate kleiner ist. Bei langsamen und schnellen magnetosonischen Moden ist dieser Effekt zwar ebenso vorhanden, die Ausprägung ist aber erheblich geringer, da das Verhältnis von viskoser zu Ionen-Neutral-Dämpfung deutlich größer als 1 ist.

Da auch eine Änderung des Spektralindex s nur geringen Einfluß auf die Gesamt-

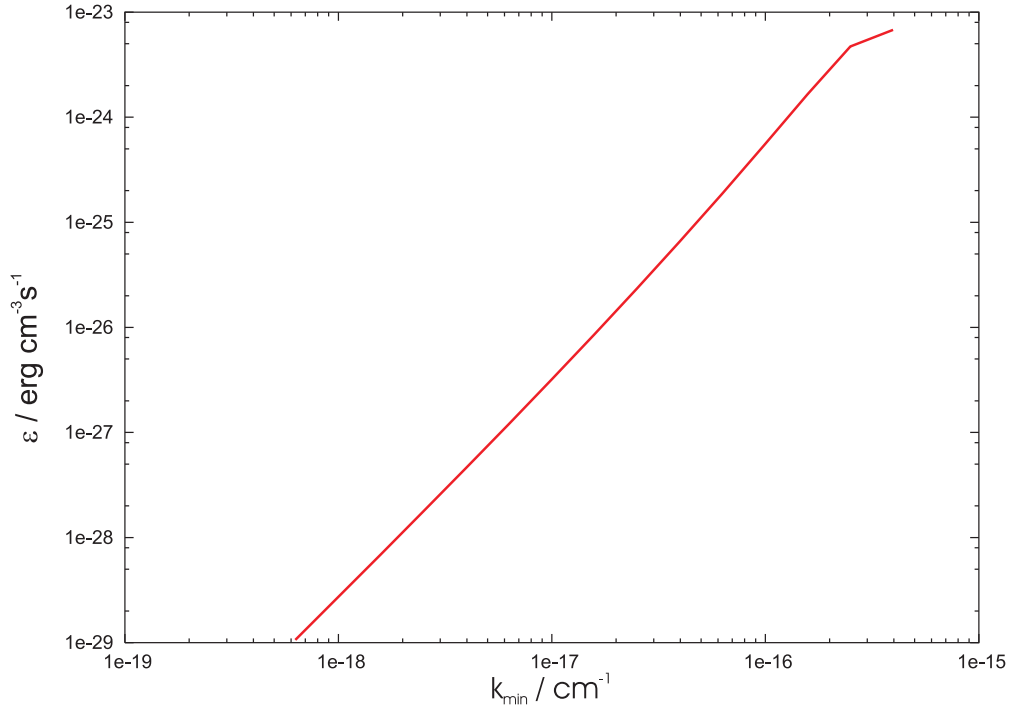


Abbildung 4.3: *Summe aus viskoser und Ionen-Neutral-Dämpfung für Alfvén-Wellen gegen k_{\min} aufgetragen*

heizrate der Alfvén-Wellen hat, ist die wahrscheinlichste Kombination der Parametervariation eine Änderung der minimalen Wellenzahl k_{\min} auf $2.5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-1}$ bei einem Anisotropieparameter Λ von 13.42.

4.4 Physikalische Beschränkungen eines Turbulenzmodells

Aus den vorhergehenden drei Abschnitten lassen sich mögliche Parameter eines Turbulenzmodells ablesen. Ohne physikalische Grundlagen lassen diese Überlegungen aber keine konsistente Lösung erkennen. Bei allen weiteren Schritten soll die Annahme gemacht werden, daß im thermodynamischen Gleichgewicht alle drei Wellenmoden im gleichen Maße zur Heizung beitragen:

$$\epsilon^A = \epsilon^F = \epsilon^S = \frac{1}{3} L_R \quad (4.11)$$

Dabei wird zu Grunde gelegt, daß in allen Moden gleich viel Energie auf der Produktionskala injiziert wird. Sofern nicht der Ursprung der Wellenmoden völlig unterschiedlich ist, sollte diese Annahme bis auf Faktoren der Größenordnung 1 stimmen.

Im ersten Schritt stellt sich die Frage, wie sich die turbulente Energie auf die verschiedenen Wellenmoden verteilt. Diese Frage läßt sich einfach klären, da für Alfvén-Wellen die Heizrate um Größenordnungen kleiner ist als für die anderen Moden. Daher ist davon auszugehen, daß sich die Energie in den Alfvén-Moden konzentriert:

$$\delta B^A \gg \delta B^F, \delta B^S \quad (4.12)$$

Aus den Überlegungen in Kapitel 4.2 und 4.1 folgt, daß die maximalen δB für schnelle und langsame magnetosonische Wellen deutlich unterhalb der gesamten Fluktuationsstärke δB liegen. In den weiteren Berechnungen wird deshalb

$$\delta B^A \simeq \delta B \quad (4.13)$$

angenommen.

Bevor nun das Spektrum näher analysiert wird, muß noch auf eine Einschränkung des hier verwendeten Modells eingegangen werden: In der Regel wird ein Kolmogorov-artiges Spektrum in Inertial- und Dissipationsbereich gegliedert. Der Dissipationsbereich weist dabei meist auch ein Potenzgesetzspektren auf (Stawicki u. a. 2001). Im hier verwendeten Modell wird an der Stelle k_{\max} ein Abbruch angenommen. Der dabei entstehende Fehler ist relativ gering und meist nicht zu beheben, da die Anzahl der freien Parameter bei einem gebrochenen Potenzgesetz weiter steigen würde, ohne daß weitere Randbedingungen hinzukommen.

Wenn nun aber die interstellare Turbulenz durch Alfvén-Wellen dominiert wird, so müssen die beobachteten Parameter des interstellaren Mediums weitgehend mit denen der Alfvén-Mode übereinstimmen. Daher müssen sowohl der spektrale Index s als auch die Ausdehnung des Spektrum k_{\max} nahe den aus den Beobachtungen gefolgerten Werten liegen.

Die Erkenntnisse aus Kapitel 4.3 zeigen, daß eine Beschränkung der Alfvén-Wellen auf den Spektralindex $s = 5/3$ möglich ist. Dies setzt ein paralleles Spektrum mit der Anisotropie $\Lambda \simeq 13$ und einem k_{\min} von $1.8 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ voraus. Vergleicht man diese Annahme über die minimale Wellenzahl mit Armstrong u. a. (1995) und der aus diesem Artikel stammenden Abbildung 1.2 so läßt sich feststellen, daß es Anzeichen für ein k_{\min}

in der genannten Größenordnung gibt (dabei ist zu beachten, daß Armstrong u. a. eine andere Umrechnung von Skalengrößen in Wellenzahlen verwenden, der entsprechende k_{\min} -Wert ist in jener Notation $2.9 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^{-1}$).

Ausgehend von den Überlegungen zu Alfvén-Wellen lassen sich jetzt auch die Parameter für die beiden verbleibenden Moden bestimmen. Dabei sollte zuerst der bisher vernachlässigte Effekt der Interaktion verschiedener Wellenmoden berücksichtigt werden. Vainio u. Spanier (2005) haben in diesem Zusammenhang beschrieben, auf welche Weise Alfvén- und langsame magnetosonische Wellen miteinander interagieren. Durch Drei-Wellen-Wechselwirkung sind die Spektren von Alfvén- und langsamen magnetosonischen Wellen gekoppelt.

Da somit die Spektren von Alfvén- und langsamen magnetosonischen Wellen gekoppelt sind, soll zuerst davon ausgegangen werden, daß sie denselben Spektralindex aufweisen und die langsamen magnetosonischen Wellen einen früheren Abbruch des Spektrums oder eine erheblich geringere Fluktuationsstärke aufweisen.

In Abb. 4.4 ist der Zusammenhang zwischen dem spektralen Abbruch k_{\max} und der Fluktuationsstärke δB^F der langsamen magnetosonischen Wellen aufgetragen. Je weiter sich das Spektrum erstreckt, desto kleiner wird die maximale Fluktuationsstärke, da durch die viskose Dämpfung im Bereich hoher k die Heizung quadratisch zunimmt. Es bleibt immer noch ein freier Parameter zu bestimmen. Es ergeben sich aber keine weiteren Randbedingungen, mit denen sich dieser Parameter eingrenzen läßt. Hier soll die Annahme verwendet werden, daß die Erzeugung von schnellen und langsamen magnetosonischen Wellen auf ähnlichen Prozessen fußt und in etwa gleich stark ist. Daraus folgt, daß $P^F(k_{\min}) \simeq P^S(k_{\min})$. Damit muß eine endgültige Bestimmung des langsamen magnetosonischen Spektrums aufgeschoben werden, bis das schnelle magnetosonische Spektrum bekannt ist.

Wie schon aus Kapitel 4.1 bekannt ist, führt der Weg zur Bestimmung des Spektrums der schnellen magnetosonischen Wellen über die Bestimmung der Fluktuationsstärke aus der Ionen-Neutral-Dämpfung. Da die zur Verfügung stehende Energie jetzt auf drei Moden verteilt wird, fällt der Wert von δB^F im Vergleich zur Rechnung in Kapitel 4.1 etwas geringer aus :

$$\delta B^F = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{G} \quad (4.14)$$

Wie schon vorher beschrieben, ergeben sich dann zwei grundsätzlich Wege, das Spektrum zu ändern: Die Veränderung der Anisotropie oder ein steileres, früher abbrechendes

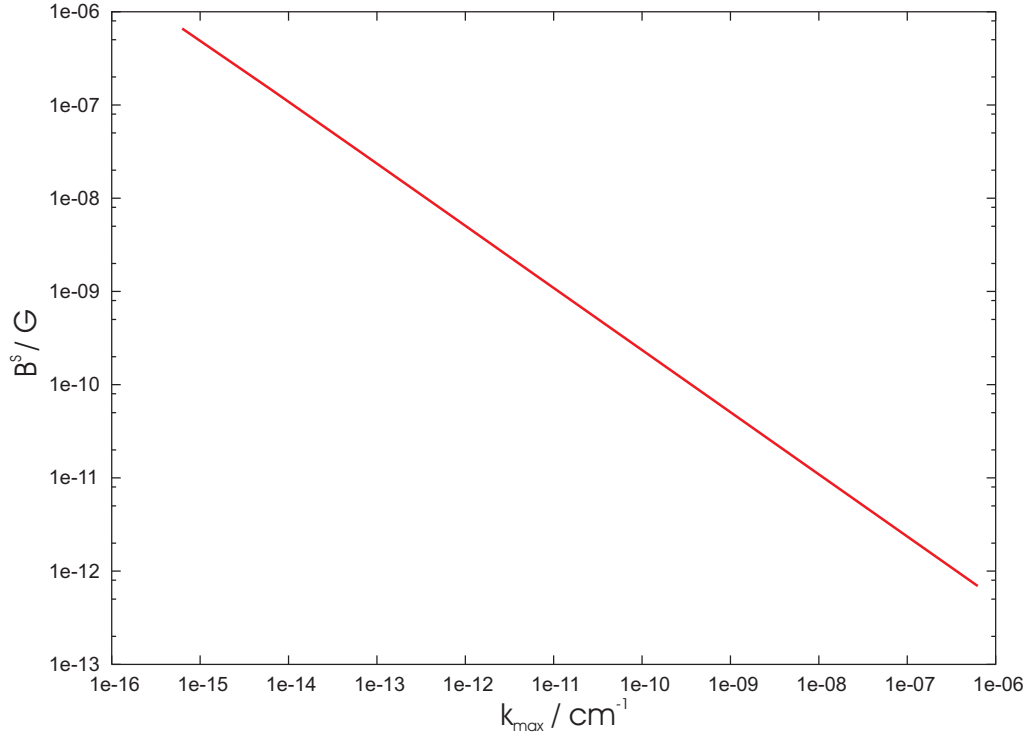


Abbildung 4.4: Die maximale Fluktuationsstärke δB^S für ein paralleles Spektrum der langsamen magnetosonischen Wellen für $s = 5/3$ aufgetragen gegen k_{\max}

Spektrum. Auf Grund der unzureichenden Randbedingungen, sollen hier exemplarisch drei Fälle betrachtet werden:

- Die schnellen magnetosonischen Welle weisen dieselbe Anisotropie wie Alfvén-Wellen auf ($\Lambda = 13.42$) und haben einen kleinen Inertialbereich ($k_{\max} \ll 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$). In diesem Fall muß nur k_{\max} bestimmt werden:

$$k_{\max} = 5.1 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \quad (4.15)$$

Das heißt der Inertialbereich der Turbulenz erstreckt sich über ungefähr vier Größenordnungen.

- Das Spektrum ist von $2\pi \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ bis $2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ Kolmogorov-artig ($s = 5/3$), aber stark anisotrop. Daraus folgt eine Anisotropie:

$$\Lambda = 3 \cdot 10^{11} \quad (4.16)$$

- Wie im ersten Fall wird ein leicht anisotropes Spektrum angenommen, die Annahme eines Kolmogorov-artigen Spektralindex wird allerdings relaxiert, dafür wird wieder $k_{\max} = 2\pi 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ angenommen. Damit wird s berechnet:

$$s = 2.49 \quad (4.17)$$

Die hier genannten Möglichkeiten stellen zwar nur die Extremwerte dar, geben aber einen klaren Einblick in die Struktur der schnellen magnetosonischen Turbulenz. Das Spektrum erstreckt sich höchsten über 4 Größenordnungen Kolmogorov-artig und ist stark anisotrop.

Eine Vergleichsrechnung mit einem gebrochenen Potenzgesetz ($s_1 = 5/3$ und $s_2 = 10/3$, im Mittel also $s = 2.5$) bestätigt die stark eingeschränkte Ausdehnung des Spektrums. Die Bruchstelle des Spektrums liegt in diesem Fall bei $k_M = 3.5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^{-1}$.

Mit einem bekannten Spektrum für schnellen magnetosonischen Wellen kann nun noch einmal die Frage der Energie des langsamen magnetosonischen Spektrums aufgegriffen werden. Für schnelle magnetosonische Wellen gilt:

$$P^F(k_{\min}) \propto (\delta B^F)^2 \frac{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}}{1-s} k_{\min}^{2-s} \quad (4.18)$$

Dieser Ausdruck ist im gegebenen Parameterraum nur von k_{\min} abhängig, da k_{\max} selbst unter restriktiven Beschränkungen um 4 Größenordnungen größer als k_{\min} ist. Da aber für alle Moden das gleiche k_{\min} vorausgesetzt wurde, folgt aus der Annahme gleicher Produktionsstärke der Turbulenz auch identische Turbulenzenergie.

Mit dieser Turbulenzstärke errechnet sich nun das k_{\max} langsamer magnetosonischer Wellen über die Forderung eines thermischen Gleichgewichts:

$$k_{\max} = 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \quad (4.19)$$

4.5 Zusammenfassung des Modells für die interstellare Turbulenz

Aus den bisher gemachten Aussagen über die Anpassung der Heizraten läßt sich ein Modell für die interstellare Turbulenz erstellen, daß alle drei Moden berücksichtigt. Hier sind die Parameter für dieses Modell zusammengefasst.

4.5.1 Alfvén-Wellen

In dem in dieser Arbeit beschriebenen Modell weisen Alfvén-Wellen eine Anisotropie auf ($\Lambda = 13.42$), die zu einem vorzugsweise parallelen Spektrum führen. Der wesentliche Teil der Turbulenz wird durch Alfvén-Wellen erzeugt. Das Spektrum erstreckt sich von $k_{\min} = 1.8 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ bis $k_{\max} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$. Die Alfvén-Wellen erzeugen den größten Teil der Magnetfeldfluktuationen, ihre Fluktuationsstärke beträgt $\delta B^A \simeq \delta B = 0.9 \cdot 10^{-6} \text{ G}$

4.5.2 Langsame magnetosonische Wellen

Im vorliegenden Modell wird für die langsamen magnetosonischen Wellen ein Kolmogorov-Modell mit frühem Abbruch verwendet. Es ergeben sich dann folgende Rahmendaten :

$$\delta B^S = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{ G}$$

$$k_{\min} = 1.8 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$$

$$k_{\max} = 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$$

$$s = 5/3$$

4.5.3 Schnelle magnetosonische Wellen

Für die schnellen magnetosonischen Wellen gibt es die wenigsten Einschränkungen aus dem hier behandelten Modell. Es kristallisieren sich aber zwei Grundströmungen heraus:

- Das anisotrope Modell: $\delta B^F = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{ G}$, $k_{\min} = 1.8 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$,
 $k_{\max} = 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$, $s = 5/3$, $\Lambda > 10^8$
- Das verkürzte, steile Spektrum: $\delta B^F = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{ G}$, $k_{\min} = 1.8 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$, $\Lambda > 1$.
 s und k_{\max} werden entsprechend Abb. 4.1 gewählt.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Turbulenz des interstellaren Mediums. Dabei wurde der Fragestellung nachgegangen, wie ein thermisches Gleichgewicht des interstellaren Mediums zustande kommen kann. Für das ISM wurden in der Literatur bisher verschiedene Heizprozesse vorgeschlagen (Heizung durch kosmische Strahlung, UV-Hintergrundstrahlung und Photoelektronen aus Staubteilchen). Die dabei freiwerdende Wärme reicht aber nicht aus, um ein thermisches Gleichgewicht mit dem Hauptkühlungsprozeß, der Linienkühlung, zu erzielen. Eine Betrachtung der Energiebilanz zeigt, daß die Kühlrate mit der Energiezufuhr durch Supernovae in Einklang steht.

An dieser Stelle wurde daher die Turbulenz des interstellaren Mediums betrachtet. Radioastronomische Messungen zeigen, daß die durch Turbulenz hervorgerufenen Dichtefluktuationen einem Potenzgesetz folgen. Sondenmessungen im interplanetaren Medium legen außerdem nahe, daß sich die Turbulenz durch Plasmawellen (in diesem Fall niederfrequente MHD-Moden: Alfvén-, langsame und schnelle magnetosonische Wellen) darstellen läßt.

Es wurde hier gezeigt, wie sich aus den Dichtefluktuationsspektren Magnetfeldfluktuationsspektren bestimmen lassen. Dabei wurde für magnetosonische Wellen ein MHD-Ansatz benutzt und für Alfvén-Wellen ein kinetischer Ansatz, der die Kompressibilität der Alfvén-Wellen berücksichtigt. Ausgehend von diesen Spektren lassen sich die Heizraten durch Plasmawellendämpfung berechnen. In dieser Arbeit wurden als Dämpfungsprozesse sowohl stoßbestimmte (viskose Dämpfung, Joule-Heizung und Ionen-Neutral-Dämpfung) als auch stoßfreie (Landau-Dämpfung) Prozesse berücksichtigt.

In einer ersten Annahme wurde die Heizrate für jede Mode einzeln berechnet (d.h. es wurde angenommen, daß sich die gesamte interstellare Turbulenz nur aus dieser Mode zusammensetzt), wobei ein Kolmogorov-artiges ($s = 5/3$), isotropes Spektrum angesetzt

wurde. Dabei zeigte sich, daß in diesem Fall die Heizraten für alle Moden deutlich über der Kühlrate liegen. Für magnetosonische Wellen wird die Heizung von kompressibler viskoser Dämpfung dominiert. Die Heizrate für Alfvén-Wellen ist um mehrere Größenordnungen kleiner.

Mit der Annahme eines anisotropen Spektrums wurde dieses und außerdem die Energieverteilung auf die Moden derart angepaßt, daß die Heizrate im Einklang mit der Kühlrate steht. Die zu variierenden Parameter waren dabei der spektrale Index s , Beginn (k_{\min}) und Ende (k_{\max}), sowie die Anisotropie (Λ) des Spektrums.

Die Durchführung dieser Anpassung führte bei den einzelnen Moden zu unterschiedlichen Ergebnissen, da die Heizraten für die Moden stark unterschiedliche spektrale Abhängigkeiten besitzen. Als wichtige Ergebnisse können festgehalten werden:

Alfvén-Wellen haben ein Minimum der Heizrate für leicht parallele Spektren ($\Lambda \simeq 13$).

Die Abbruch-Wellenzahl am oberen Ende des Spektrums (k_{\max}) hat nur geringen Einfluß auf die Heizrate, wohingegen der Abbruch am unteren Ende (k_{\min}) deutlichen Einfluß zeigt.

Schnelle magnetosonische Wellen haben sehr stark parallele Spektren im thermischen Gleichgewicht. Kombinationen aus früher abbrechenden (kleinere k_{\max}) und steileren ($s > 5/3$) Spektren erfüllen ebenfalls die Bedingung des thermischen Gleichgewichts.

Langsame magnetosonische Wellen haben ähnliche Lösungen wie die schnellen magnetosonischen Wellen, allerdings führt hier eine Erhöhung der Anisotropie nicht zu einer Abnahme der Heizrate.

Aus diesen Ergebnissen folgt, daß die Turbulenz nicht alleine durch magnetosonische Wellen beschrieben werden kann. Da magnetosonische Wellen aber nachweislich im interstellaren Medium erzeugt werden, muß die Turbulenz eine Mischung aus den drei Wellenmoden sein.

Bei einer Betrachtung gemischter Turbulenz aus allen drei Moden zeigt sich, daß die Alfvén-Wellen den wesentlichen Teil der Turbulenz ausmachen. Die Turbulenzstärken δB^F und δB^S der schnellen bzw. langsamen magnetosonischen Wellen sind um rund zwei Größenordnungen kleiner. Zieht man die Ergebnisse der Turbulenzbeobachtung hinzu, folgt für die Alfvén-Wellen, daß ihr Spektralindex $s = 5/3$ betragen muß, um

das Potenzgesetz der Dichtefluktuationsspektren zu erklären. Aus den Berechnungen zum Verhältnis von Dichte- und Magnetfeldfluktuationen folgt damit ein Spektralindex $s = 11/3$ für das Magnetfeldfluktuationsspektrum. Für die gemischte Turbulenz folgt eine Ausdehnung des Spektrums von $k_{\min} = 1.8 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1}$ bis $k_{\max} = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$.

Durch Drei-Wellen-Wechselwirkung können die Spektren von langsamen magnetosonischen und Alfvén-Wellen gekoppelt werden. Daher wird in der gemischten Turbulenz für langsame magnetosonische Wellen ein Spektrum mit dem Spektralindex $s = 5/3$ angenommen, daß schon bei $k_{\max} = 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ abbricht und eine Fluktuationsstärke von $\delta B^S = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{ G}$ aufweisen.

Für schnelle magnetosonische Wellen ergeben sich keine zusätzlichen Einschränkungen in der gemischten Turbulenz. Ihre maximale Fluktuationsstärke beträgt ebenfalls $\delta B^F = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{ G}$.

Mit den Ergebnissen dieser Arbeit lassen sich die Modelle zur Beschleunigung kosmischer Strahlung verbessern, da die hier genannten Parameter für die Plasmawellenmoden die interstellare Turbulenz besser beschreiben als es die bisher benutzten simplifizierten Modelle tun. Es ergeben sich aber auch neue Fragen aus dieser Arbeit. Die wahrscheinlich wichtigste dabei ist, in welcher Weise die Moden interagieren. Diese Frage läßt sich allerdings nur im Rahmen einer numerischen Analyse von Drei-Wellen-Wechselwirkung lösen.

A Exakte Herleitung der viskosen Dämpfungsrate

In diesem Anhang soll detaillierter als in Kapitel 3.3 hergeleitet werden, wie sich für die verschiedenen Wellenmoden aus dem Spannungstensor die viskose Dämpfungsrate ergibt.

Der erste Schritt zur Bestimmung der Dämpfungsrate ist die Herleitung des Spannungstensors, der sich aus der Korrelationsfunktion der Geschwindigkeitsabweichungen \mathbf{v}' von der mittleren Geschwindigkeit \mathbf{V} ergibt.

$$\pi_{ij} = nm \langle v'_i v'_j - \frac{1}{3} v'^2 \delta_{ij} \rangle \quad (\text{A.1})$$

Mit dem Spannungstensor ist der Reibungstensor assoziiert

$$W_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (\text{A.2})$$

Der Zusammenhang zwischen π_{ij} und W_{ij} ist schon in Gl. (3.147) dargestellt.

$$\pi_{zz} = -\eta_0 W_z z \quad (\text{A.3})$$

$$\pi_{xx} = -\frac{\eta_0}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy} \quad (\text{A.4})$$

$$\pi_{yy} = -\frac{\eta_0}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2} (W_{yy} - W_{xx}) - \eta_3 W_{xy} \quad (\text{A.5})$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = -\eta_1 W_{xy} + \frac{\eta_3}{2} (W_{xx} - W_{yy}) \quad (\text{A.6})$$

$$\pi_{xz} = \pi_{zx} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz} \quad (\text{A.7})$$

$$\pi_{yz} = \pi_{zy} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz} \quad (\text{A.8})$$

Im nächsten Schritt werden die Geschwindigkeiten der Wellenmoden benötigt. Hier sollen die Ergebnisse von Braginskii (1965) für die Geschwindigkeiten verwendet werden (B' ist das fluktuierende magnetische Feld).

Alfvén-Wellen

$$\mathbf{V}^A = (0, v_y, 0) \quad (\text{A.9})$$

$$v_y^A = \frac{B'_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (\text{A.10})$$

Schnelle magnetosonische Wellen

$$\mathbf{V}^F = (v_x, 0, v_z) \quad (\text{A.11})$$

$$v_x^F = \frac{B'_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (\text{A.12})$$

$$v_z^F = \frac{c_s^2}{v_A^2} v_x^F \sin\theta \cos\theta \quad (\text{A.13})$$

Langsame magnetosonische Wellen

$$\mathbf{V}^S = (v_x, 0, v_z) \quad (\text{A.14})$$

$$v_x^S = \frac{c_s^2}{v_A^2} v_z^S \sin\theta \cos\theta \quad (\text{A.15})$$

$$v_z^S = -\frac{v_A}{c_s} \frac{B'_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{1}{\sin\theta} \quad (\text{A.16})$$

Hier erkennt man deutlich, daß für die Alfvén-Wellen die y -Komponente dominiert, bei schnellen magnetosonischen die x - und bei langsamen die z -Komponente. Das heißt, daß, bis auf die langsamen magnetosonischen Wellen, die transversalen Geschwindigkeitsfluktuationen überwiegen.

Im Weiteren wird die Berechnung von π_{ij} und W_{ij} für jede Mode vorgestellt.

A.1 Alfvén-Wellen

Zuerst gilt es den Tensor W_{ij} aufzustellen:

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & k_x v_y & 0 \\ k_x v_y & 0 & k_z v_y \\ 0 & k_z v_y & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

wobei die räumlichen Ableitungen in die Fourier-Darstellung überführt wurden. Daraus läßt sich sofort der Tensor π_{ij} folgern:

$$\pi_{ij} = \begin{pmatrix} -\eta_3 k_x v_y & -\eta_1 k_x v_y & -\eta_4 k_z v_y \\ -\eta_1 k_x v_y & \eta_3 k_x v_y & -\eta_2 k_z v_y \\ -\eta_4 k_z v_y & -\eta_2 k_z v_y & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Womit sich abschließend die durch Viskosität erzeugte Wärmemenge berechnen läßt:

$$Q_{\text{vis}}^A = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_{ij} W_{ij} = (\eta_1 k_x^2 + \eta_2 k_z^2) v_y^2 \quad (\text{A.19})$$

Da aus der Polarisation der Alfvén-Wellen folgt, daß nur die Komponente v_y der Geschwindigkeit einen Beitrag leistet, läßt sich die Wellenenergie schreiben als:

$$\epsilon^A = \rho v_y^2 \quad (\text{A.20})$$

womit die Dämpfungsrate bekannt ist:

$$\gamma_{\text{vis}}^A = \frac{1}{2} (\eta_1 k_x^2 + \eta_2 k_z^2) \quad (\text{A.21})$$

A.2 Magnetosonische Wellen

Da beide magnetosonischen Moden sowohl eine x - als auch eine z -Komponente der Geschwindigkeit haben, kann man für beide denselben Tensor W_{ij} und somit auch π_{ij} benutzen.

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(2k_x v_x - k_z v_z) & 0 & k_z v_x + k_x v_z \\ 0 & -\frac{2}{3}(k_x v_x + k_z v_z) & 0 \\ k_z v_x + k_x v_z & 0 & -\frac{2}{3}(k_z v_x - 2k_z v_z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\pi_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\eta_0 k_z v_z - k_x v_x (\eta_0 + 3\eta_1)) & -(k_z v_x + k_x v_z) \eta_1 + k_x v_x \eta_3 & -(k_z v_x + k_x v_z) \eta_2 \\ -(k_z v_x + k_x v_z) \eta_1 + k_x v_x \eta_3 & \frac{2}{3} k_z v_z \eta_0 + k_x v_x (-\frac{\eta_0}{3} + \eta_1) & (k_z v_x + k_x v_z) \eta_4 \\ -(k_z v_x + k_x v_z) \eta_2 & (k_z v_x + k_x v_z) \eta_4 & \frac{2}{3} (k_x v_x - 2k_z v_z) \eta_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Damit ermittelt man die Wärmemenge.

$$Q_{\text{vis}}^{FS} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_{ij} W_{ij} \quad (\text{A.24})$$

$$= \left(\frac{1}{3} k_x^2 v_x^2 - \frac{4}{3} k_x k_z v_x v_z + \frac{4}{3} k_z^2 v_z^2 \right) \eta_0 \quad (\text{A.25})$$

$$+ k_x^2 v_x^2 \eta_1 + (k_z^2 v_x^2 + 2k_x k_z v_x v_z + k_x^2 v_z^2) \eta_2 \quad (\text{A.26})$$

Um nun die Dämpfungsraten für langsame und schnelle Mode zu ermitteln, muß man die entsprechenden Wellenenergien ausnutzen. Dabei gilt im langsamen Fall $v_z \gg v_x$

A Exakte Herleitung der viskosen Dämpfungsrates

und im schnellen Fall genau umgekehrt ($v_x \gg v_z$). Daraus erhält man

$$\epsilon^F = \rho v_x^2 \quad (\text{A.27})$$

$$\epsilon^S = \rho v_z^2 \quad (\text{A.28})$$

und man kann v_x oder v_z in der Wärmeproduktion entsprechend vernachlässigen. Daraus folgt:

$$\gamma_{\text{vis}}^F = \frac{1}{2\rho} \left(\left(\frac{\eta_0}{3} + \eta_1 \right) k_x^2 + \eta_2 k_z^2 \right) \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma_{\text{vis}}^S = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{4}{3} \eta_0 k_z^2 + \eta_2 k_x^2 \right) \quad (\text{A.30})$$

B Exakte Herleitung der Ionen-Neutral-Dämpfungsrate

Wie schon in Kapitel 3.3.1 beschrieben, gibt es verschiedene Wege, die Dämpfungsrate zu ermitteln. Hier sollen alle angesprochen werden und die bekannten Ergebnisse (u. a. Kulsrud u. Pearce 1969) wiedergegeben werden.

B.1 Stix-Parameter

Die Stix-Parameter Gl. (3.28) werden um den Stoßterm erweitert:

$$R = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + i\nu + \Omega_{\alpha}} \quad (\text{B.1})$$

$$L = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + i\nu - \Omega_{\alpha}} \quad (\text{B.2})$$

$$S = \frac{1}{2}(R + L) \quad (\text{B.3})$$

$$D = \frac{1}{2}(R - L) \quad (\text{B.4})$$

Zum Vergleich den Parameter R ohne den Stoßparameter:

$$R = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_{\alpha}} \quad (\text{B.5})$$

Der Parameter P bleibt unverändert. Da eine exakte Herleitung mit Hilfe der Stix-Parameter sehr umständlich ist, sollen gleich von vorneherein alle Vereinfachungen vorgenommen werden. Dies sind die Annahme, daß die Frequenz ω kleiner als Ω_i ist und daß die Ausbreitungsrichtung nicht senkrecht zum Magnetfeld steht. Die erste Annahme ergibt sich direkt aus den Parametern des ISM, die zweite Annahme läßt sich mit dem am Ende der Arbeit diskutierten Modell rechtfertigen.

B Exakte Herleitung der Ionen-Neutral-Dämpfungsrate

Unter diesen Annahmen kann man die Dispersionsrelation zu folgender Form vereinfachen (Schlickeiser 2002).

$$n^2 = \begin{cases} S & \text{schnelle magnetosonische Wellen} \\ \frac{S}{\cos^2 \theta} & \text{Alfvén} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Langsame magnetosonische Wellen werden durch diesen Formalismus nicht beschrieben.

Im nächsten Schritt ersetzt man ω durch die komplexe Form $\omega_R + i\gamma$, dann gilt für $\omega_R \gg \gamma$:

$$\gamma = -\frac{\Im \Lambda(\gamma \rightarrow 0)}{\partial_{\omega_R} \Re \Lambda(\gamma \rightarrow 0)} \quad (\text{B.7})$$

Im Endergebnis ergibt dies:

$$\gamma = \begin{cases} \nu & \text{schnelle magnetosonische Wellen} \\ \nu \cos^2 \theta & \text{Alfvén} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Auf der Grundlage von Schlickeiser (2002) lassen sich im Fall der Alfvén-Wellen noch weitere Überlegungen anstellen. Greift man auf Gl. (9.2.96) – (9.2.98) aus besagtem Buch zurück, so findet man eine genauere Dispersionsrelation

$$n^2 = \frac{S(1 + \cos^2 \theta) - |S| \sqrt{\sin^4 \theta + \frac{4\omega^2}{\Omega_i^2} \cos^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \tan^2 \theta\right)} \quad (\text{B.9})$$

Man erkennt nun, daß es zwei charakteristische Winkel gibt, bei denen sich unterschiedliche Approximationen ergeben. Der erste Grenzwinkel tritt im Zusammenhang mit einer Approximation der Wurzel im Zähler auf:

$$\sin^4 \theta_c = \frac{4\omega^2}{\Omega_i^2} \cos^2 \theta_c \Rightarrow \theta_c = \cos^{-1} \frac{(\sqrt{\Omega_i^2 + \omega^2} - \omega)}{\Omega_i} \quad (\text{B.10})$$

Der zweite charakteristische Winkel lässt sich aus dem Verhalten der Tangens-Funktion im Nenner abschätzen

$$\tan^2 \theta_D = \frac{m_i \Omega_i^2 - \omega^2}{m_e \omega^2} \Rightarrow \theta_D = \tan^{-1} \left(43 \sqrt{\frac{\Omega_i^2}{\omega^2} - 1} \right) \quad (\text{B.11})$$

Nun muß man drei Bereiche unterscheiden, in denen sich die Dispersionsrelation unterschiedlich verhält.

Im ersten Bereich gilt $\theta \ll \theta_c \ll \theta_D$, was einer vornehmlich parallelen Ausbreitung entspricht. Hier vereinfacht sich die Dispersionsrelation zu

$$n^2 = \frac{S(1 + \cos^2 \theta) - |S| \frac{2\omega}{\Omega_i} \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} \simeq S \quad (\text{B.12})$$

Da der Quotient ω/Ω_i in diesem Szenario deutlich kleiner als 1 ist, darf der $\cos \theta$ -Term vernachlässigt werden.

Im Bereich $\theta_c \ll \theta \ll \theta_D$ kann der $\cos^2 \theta$ im Zähler vernachlässigt werden und der $\tan^2 \theta$ spielt ebenfalls noch keine Rolle

$$n^2 = \frac{S(1 + \cos^2 \theta) - |S| \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} = S \quad (\text{B.13})$$

Hier kann also immer noch die Dispersionsrelation durch S alleine abgeschätzt werden.

B.2 Fluidtheorie

Hier soll der von Kulsrud u. Pearce (1969) verwendete Fluidansatz benutzt werden, der um die Ionen-Neutral-Dämpfungsrate herzuleiten allerdings die Kenntnis der ungestörten Lösung voraussetzt.

Grundlage der Berechnung sind die Formeln (3.51) bis (3.54), sowie Gl. (3.162), die bei Kulsrud in folgender vereinfachter Form geschrieben werden.

$$\rho_n \omega^2 v_n = -i \nu_{in} \omega \rho_n (v_n - v_i) \quad (\text{B.14})$$

$$\rho_i \omega^2 v_i = \rho_i \omega_k^2 v_i - i \nu_{ni} \omega \rho_i (v_i - v_n) \quad (\text{B.15})$$

Einsetzen der beiden Gleichungen ineinander liefert

$$(\omega - \omega_k^2) \omega + i \nu_{ni} ((1 + \epsilon) \omega^2 - \omega_k^2 \epsilon) = 0 \quad (\text{B.16})$$

wobei ϵ das Verhältnis der Massedichten von Neutralteilchen und Ionen ist, das hier als klein angenommen wird. ω_k ist die ungestörte Lösung der Dispersionsrelation, für die die Dispersionsrelation (3.49) eingesetzt wird. Löst man die obige Gleichung nach ω auf, lassen sich zwei Grenzfällen unterscheiden: Einmal der Fall, daß die Stoßfrequenz unterhalb und einmal der Fall, daß die Stoßfrequenz deutlich oberhalb der Frequenz der

Welle liegt

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{\omega_k^2 - \frac{\omega_k^4}{4\nu^2}} - i\frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \\ \sqrt{\omega_k^2 - \frac{\nu^2}{4}} - i\frac{\nu}{2} & \omega_k \gg \nu \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

$$\gamma_{\text{neut}} = \begin{cases} \frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \\ \frac{\nu}{2} & \omega_k \gg \nu \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Die berechnete Dämpfungsrate ist dabei jeweils der Imaginärteil der gestörten Wellenfrequenz.

Für Alfvén-Wellen und langsame magnetosonische Wellen unterscheiden sich die Ergebnisse von Stix und Kulsrud zumindest im Fall der schwachen Dämpfung, da das Kulsrud-Ergebnis nicht die Winkelabhängigkeit der Dämpfung mit in Betracht zieht (genauer: Kulsrud und Pearce betrachten in ihrem Modell ausschließlich parallele Wellenausbreitung). Hier sollen im Falle schwacher Dämpfung die Ergebnisse von Stix verwendet werden. Insgesamt ergeben sich damit folgende Resultate:

$$\gamma_{\text{neut}}^A = \begin{cases} \frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \cos^2 \theta \\ \frac{\nu}{2 \cos^2 \theta} & \omega_k \gg \nu \cos^2 \theta \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

$$\gamma_{\text{neut}}^F = \begin{cases} \frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \\ \frac{\nu}{2} & \omega_k \gg \nu \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

$$\gamma_{\text{neut}}^S = \begin{cases} \frac{\omega_k^2}{2\nu} & \omega_k \ll \nu \\ \frac{\nu}{2 \cos^2 \theta} & \omega_k \gg \nu \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

B.3 Integration der Heizrate

Für die Alfvén- und langsamen magnetosonischen Wellen ist die Integration der Heizrate erheblich komplizierter als es bei den schnellen magnetosonischen Wellen der Fall ist. Der Rechenweg soll daher detailliert beschrieben werden.

$$\epsilon_N^{AS} = \frac{1}{4\pi} \int d^3k \gamma_N^{AS} 2P_B^{AS}(\mathbf{k}) \quad (\text{B.22})$$

Auf Grund der unterschiedlichen Spektren müssen die Integrationen getrennt durchgeführt werden.

B.3.1 Alfvén-Wellen

Für die Integration muß zuerst zwischen den Bereichen starker und schwacher Dämpfung unterschieden werden. Starke Dämpfung liegt für den Fall $\omega \ll \nu_N \cos^2 \theta$ vor. Daraus folgt eine Grenzwellenzahl

$$k_N = \frac{\nu_N}{v_A} \quad (\text{B.23})$$

für die sich dann die Bedingung für starke Dämpfung $k < k_N \cos \theta$ ergibt .

Berechnet man die tatsächlichen Dämpfungsraten für die starke Dämpfung zeigt sich, daß die absoluten Werte kleiner sind als bei der schwachen Dämpfung (der Begriff starke Dämpfung leitet sich aus dem Mechanismus der Dämpfung her. Außerdem ist hier die Ionen-Neutralteilchen-Kollisionsrate größer als die Wellenfrequenz). Daher kann man die starke Dämpfung bei der Integration vernachlässigen.

Unter diesen Annahmen läßt sich die Integration schreiben als

$$\epsilon_N^A = \nu_N C_B^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \frac{\sin^2 \theta}{(\cos^2 \theta + \Lambda \sin^2 \theta)^{\frac{2+s}{2}}} \int_{\max k_N \cos \theta, k_{\min}}^{k_{\max}} dk k^{-2-s} \quad (\text{B.24})$$

$$= \nu_N C_B^2 \int_0^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)}{(\mu^2 + \Lambda(1 - \mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \int_{\max k_N \cos \theta, k_{\min}}^{k_{\max}} dk k^{-2-s} \quad (\text{B.25})$$

$$= \nu_N C_B^2 \int_0^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)}{(\mu^2 + \Lambda(1 - \mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \frac{1}{-s-1} (k_{\max}^{-s-1} + (\max k_N \mu, k_{\min})^{-s-1}) \quad (\text{B.26})$$

$$= \nu_N C_B^2 \left(\left(\int_0^{\mu_E} d\mu \frac{(1 - \mu^2)}{(\mu^2 + \Lambda(1 - \mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \frac{k_{\max}^{-s-1} - k_{\min}^{-s-1}}{-s-1} \right) + \left(\int_{\mu_E}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)}{(\mu^2 + \Lambda(1 - \mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \frac{k_{\max}^{-s-1} - (k_N \mu)^{-s-1}}{-s-1} \right) \right) \quad (\text{B.27})$$

Dabei wurde der Grenzwinkel μ_E definiert über:

$$\mu_E = \frac{k_{\min}}{k_N} = \frac{k_{\min} v_A}{\nu_N} \quad (\text{B.28})$$

Umstellung des vorhergehenden Integrals ergibt:

$$\begin{aligned} \epsilon_N^A &= \frac{\nu_N C_B^2}{s+1} \left(- \left(\int_0^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} k_{\max}^{-s-1} \right) \right. \\ &\quad + \left(\int_0^{\mu_E} d\mu \frac{(1-\mu^2)}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} k_{\min}^{-s-1} \right) \\ &\quad \left. + \left(\int_{\mu_E}^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} (k_N \mu)^{-s-1} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\delta B)^2}{2\pi} \frac{3}{4\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2\frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \frac{1}{k_{\min}^{-s-1} - k_{\max}^{-s-1}} \\ &\quad \left(\left(k_{\min}^{s+1} \mu_E^{s+1} \int_0^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)\mu^{-s}}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(k_{\min}^{s+1} \int_0^{\mu_E} \frac{(1-\mu^2)}{d} \mu (\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}} (\mu_E^{s+1} \mu^{-s} - \mu) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Hier kann man die Näherung $k_{\max} \gg k_{\min}$ verwenden und alle Terme mit k_{\max}^{-s-1} vernachlässigen.

$$\begin{aligned} \epsilon_N^A &= \frac{(\delta B)^2}{2\pi} \frac{3}{4\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \left(\left(\mu_E^{s+1} \int_0^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)\mu^{-s}}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_0^{\mu_E} \frac{(1-\mu^2)}{d} \mu (\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}} (\mu_E^{s+1} \mu^{-s} - \mu) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Das letzte Integral besitzt keine analytische Lösung, kann aber für die Fälle $\Lambda < (\mu_E)^2$ und $\Lambda > (\mu_E)^2$ approximiert werden

$$\begin{aligned} \epsilon_N^A(\Lambda > (\mu_E)^2) &= \frac{(\delta B)^2}{2\pi} \frac{3}{4\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \\ &\quad \left(\frac{4\mu_E^{s+1}}{(4-s)(2-s)} \right. \\ &\quad \left. \times \mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, 3 - \frac{s}{2}, 1 - \Lambda) - \frac{2}{3(2-s)} \mu_E^3 \Lambda^{-\frac{2+s}{2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_N^A(\Lambda < (\mu_E)^2) &= \frac{(\delta B)^2}{2\pi} \frac{3}{4\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \\ &\quad \left(\frac{4\mu_E^{s+1}}{(4-s)(2-s)} \right. \\ &\quad \left. \times \mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, 3 - \frac{s}{2}, 1 - \mu_E^{-(1+s)}) \left(\frac{1}{s+1} - \frac{\mu_E^2}{s-1} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

B.3.2 Langsame magnetosonische Wellen

Die Berechnung der Ionen-Neutral-Dämpfung für langsame magnetosonische Wellen erfolgt genauso wie es für die Alfvén-Wellen der Fall ist, nur daß das veränderte Spektrum dabei in Betracht gezogen werden muß. Außerdem ist auf Grund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit die Grenzwellenzahl k_N jetzt definiert als:

$$k_N = \frac{\nu_N}{c_s} \quad (\text{B.34})$$

Entsprechende Änderungen ergeben dann für μ_E :

$$\mu_E = \frac{k_{\min}}{k_N} = \frac{k_{\min} c_s}{\nu_N} \quad (\text{B.35})$$

Damit schreibt sich die Integration

$$\epsilon_N^S = \nu_N C_B^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \frac{1}{(\cos^2 \theta + \Lambda \sin^2 \theta)^{\frac{2+s}{2}}} \int_{\max k_N \cos \theta, k_{\min}}^{k_{\max}} dk k^{-s} \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C_B^2 \nu_N}{1-s} \left(k_{\max}^{1-s} \int_0^{\mu_E} d\mu \frac{1}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - k_{\min}^{1-s} \int_0^{\mu_E} d\mu \frac{1}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - k_N^{1-s} \int_{\mu_E}^1 d\mu \frac{\mu^{1-s}}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \right) \quad (\text{B.37}) \end{aligned}$$

$$\simeq \frac{\nu_N C_B^2}{s-1} \left(\int_0^1 d\mu \frac{k_N^{1-s} \mu^{1-s}}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} + \int_0^{\mu_E} d\mu \frac{k_{\min}^{1-s} - k_N^{1-s} \mu^{1-s}}{(\mu^2 + \Lambda(1-\mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \right) \quad (\text{B.38})$$

Wie für Alfvén-Wellen muß entschieden werden, ob Λ größer oder kleiner als μ_E^2 ist.

$$\begin{aligned} \epsilon_N^S(\Lambda > \mu_E^2) &\simeq \nu_N \frac{(\delta B)^2}{\mathfrak{F}(1, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda)} \\ &\quad \times \left(\frac{\mu_E}{2-s} \mathfrak{F}(1 - \frac{s}{2}, 1, 2 - \frac{s}{2}, 1 - \Lambda) - \Lambda^{-\frac{2+s}{2}} \frac{1-s}{2-s} \mu_E \right) \quad (\text{B.39}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_N^S(\Lambda < \mu_E^2) &\simeq \nu_N \frac{(\delta B)^2}{\mathfrak{F}(1, 1 + \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda)} \\ &\quad \times \left(\frac{\mu_E}{2-s} \mathfrak{F}(1 - \frac{s}{2}, 1, 2 - \frac{s}{2}, 1 - \Lambda) - \mu_E^{1-2s} \frac{1-s}{2s(1+s)} \right) \quad (\text{B.40}) \end{aligned}$$

C Integration der Landau-Dämpfung

In diesem Anhang wird explizit die Integration der Heizrate aus dem Spektrum der interstellaren Turbulenz und den Landau-Dämpfungsraten von Ginzburg (1961) durchgeführt.

C.1 Alfvén-Wellen

Mit der gegebenen Landau-Dämpfungsrate (3.181)

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{Landau}}^A &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^3 v_e}{\Omega_i^2 v_A} \frac{\tan^2 \theta}{\sin^2 \theta + 3(\omega^2/\Omega_i^2) \cos^2 \theta} \\ &\times \left(\frac{v_i^2}{v_e^2} + (\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta) \exp\left(-\frac{v_A^2}{2v_i^2 \cos^2 \theta}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

ergibt sich mit der Transformation $\kappa = k/k_c$ und $t = \cos^2 \theta$ folgende vereinfachte Form der Heizrate

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} C_B^2 k_c^{2-s} \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_{\max}} d\kappa \kappa^{1-s} \int_0^1 dt \frac{(1-t)^2 (t + \Lambda(1-t))^{-\frac{2+s}{2}}}{1-t+3\kappa^2 t^2} \quad (\text{C.2})$$

Auf Grund der Tatsache, daß der Nenner dieses Integrals sich entscheidend bei $\kappa = 1$ ändert, kann man das Integral in zwei Teile aufspalten

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} C_B^2 k_c^{2-s} \Lambda^{-\frac{2+s}{2}} \left(\int_{\kappa_{\min}}^1 d\kappa \kappa^{1-s} J_1(s, \Lambda) + \frac{k_c^2}{3} \int_1^{\kappa_{\max}} d\kappa \kappa^{-1-s} J_2(s, \Lambda, k, k_c) \right) \quad (\text{C.3})$$

Dabei wurde im Nenner der quadratische bzw. der lineare Anteil vernachlässigt. Die Funktionen J_1 und J_2 sind somit definiert als

$$J_1 = \int_0^1 dt \frac{1-t}{(1-(1-\Lambda^{-1})t)^{\frac{2+s}{2}}} = \mathfrak{F}\left(1 + \frac{s}{2}, 1, 3, 1 - \Lambda^{-1}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$J_2 = \int_0^1 dt \frac{1}{(1-(1-\Lambda^{-1})t)^{\frac{2+s}{2}}} \frac{(1-t^2)}{t^2 + \frac{1}{3\kappa^2}(1-t)} \quad (\text{C.5})$$

Das Integral für J_2 besitzt keine geschlossene analytische Lösung, daher soll an dieser Stelle eine obere Abschätzung für die Heizrate angegeben werden. Dafür wird benutzt, daß

$$\frac{1}{t^2 + \frac{1}{3\kappa^2}(1-t)} \leq \frac{1}{\frac{1}{3\kappa^2}(1-t)} \quad (\text{C.6})$$

für alle t gilt. Einsetzen dieser Abschätzung in Gl. (C.5) liefert schließlich einen Zusammenhang mit dem Integral J_1 :

$$J_2 \leq 3\kappa^2 J_1 \quad (\text{C.7})$$

Damit läßt sich ϵ zu:

$$\epsilon_{\text{Landau}}^A \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{16\pi} (\delta B)^2 \frac{m_e}{m_i} v_e \frac{1}{k_c^2} \frac{s+1}{2-s} \frac{k_{\text{max}}^{2-s} - k_{\text{min}}^{2-s}}{k_{\text{min}}^{-(1+s)} - k_{\text{max}}^{-(1+s)}} \frac{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, 3, 1 - \Lambda)}{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1 - \Lambda)} \quad (\text{C.8})$$

berechnen. Hierbei wurde noch zur Umformung der hypergeometrischen Funktionen folgende Beziehung ausgenutzt (Abramowitz u. Stegun 1965):

$$\mathfrak{F}(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} \mathfrak{F}(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}) \quad (\text{C.9})$$

C.2 Schnelle magnetosonische Wellen

Analog soll die Berechnung der Heizrate für schnelle magnetosonische Wellen durchgeführt werden. Ausgehend von der Dämpfungsrate (3.182)

$$\gamma_{\text{Landau}}^F = \omega \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sin^2 \theta \left(\frac{v_i^2}{v_e \cos \theta} + \frac{5v_i}{v_A \cos \theta} \exp\left(-\frac{v_A^2}{2v_i^2 \cos^2 \theta}\right) \right) \quad (\text{C.10})$$

ist der erste Schritt, den exponentiellen Anteil zu vernachlässigen, da $v_A \gg v_i$ gilt. Damit verbleibt folgender Term:

$$\gamma_{\text{Landau}}^F = \omega \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{v_i^2 \sin^2 \theta}{v_e \cos \theta} \quad (\text{C.11})$$

Die Heizrate wird auf dem bekannten Weg ermittelt

$$\epsilon_{\text{Landau}}^F = \frac{1}{4\pi} \int d^3k \gamma_{\text{Landau}}^F 2P_B^F(\mathbf{k}) \quad (\text{C.12})$$

Die Integration über \mathbf{k} ist einfach durchzuführen, da nur das Spektrum eine Wellenzahlabhängigkeit aufweist. Durch die Nullstelle der Cosinus-Funktion im Nenner ist die

Integration über θ jedoch erheblich schwieriger. Ginzburg (1961) hat für diese Dämpfungsrate den folgenden Gültigkeitsbereich angegeben:

$$v_e \cos \theta \gg \sqrt{v_A^2 + 3v_i^2 \sin^2 \theta} \gg v_i \cos \theta \quad (\text{C.13})$$

$$\Rightarrow \cos \theta \geq \mu_L = \sqrt{\frac{v_A^2 + 3v_i^2}{v_e^2 + 3v_i^2}} \simeq \frac{v_A}{v_e} \quad (\text{C.14})$$

Daraus folgt, daß die Integration über θ nur bis μ_L ausgeführt werden muß.

$$\epsilon_{\text{Landau}}^F = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk k^2 \int_{\mu_L}^1 d\mu \gamma_{\text{Landau}}^F 2P_B^F(\mathbf{k}) \quad (\text{C.15})$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$\epsilon_{\text{Landau}}^F = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_B^2 \frac{v_i^2}{v_e} \frac{k_{\max}^{2-s} - k_{\min}^{2-s}}{2-s} I(\mu_L, \Lambda, s) \quad (\text{C.16})$$

Dabei ist I als das Integral

$$I(\mu_L, \Lambda, s) = \int_{\mu_L}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)}{\mu(\mu^2 + \Lambda(1 - \mu^2))^{\frac{2+s}{2}}} \quad (\text{C.17})$$

definiert. C_B ist die schon vorher berechnete Normierungskonstante des Spektrums

$$C_B^2 = \frac{(\delta B)^2}{4\pi} \frac{1-s}{k_{\max}^{1-s} - k_{\min}^{1-s}} \frac{1}{\mathfrak{F}(1 + \frac{s}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1 - \Lambda)} \quad (\text{C.18})$$

Während sich das Integral für die Normierung analytisch ausrechnen läßt, kann man I nur approximieren. Lerche u. Schlickeiser (2001) haben einige Approximationen für starke und schwache Anisotropien angegeben

$$I(\mu_L, \Lambda, s) = \begin{cases} \log\left(\frac{1}{\mu_L}\right) - \frac{1}{2}(1 - \mu_L^2) & \Lambda = 1 \\ (1 + (1 - \Lambda)(1 + \frac{s}{2})) \log\left(\frac{1}{\mu_L}\right) - \frac{1}{2} & |\Lambda - 1| \ll 1 \\ \frac{1}{2} \Lambda^{-\frac{2+s}{2}} \log\left(\frac{\Lambda}{\mu_L^2}\right) & \Lambda \ll 1 \\ -\Lambda^{-\frac{2+s}{2}} \log(\mu_L) & \Lambda \gg 1 \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

Literaturverzeichnis

Abramowitz u. Stegun 1965

ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover, 1965. – ISBN 0-486-61272-4

Achterberg u. Blandford 1986

ACHTERBERG, A. ; BLANDFORD, R. D.: Transmission and damping of hydromagnetic waves behind a strong shock front - Implications for cosmic ray acceleration. In: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 218 (1986), Februar, S. 551–575

Akhiezer 1975

AKHIEZER, A. I.: *Plasma electrodynamics - Vol.1: Linear theory*. International Series of Monographs in Natural Philosophy, Oxford: Pergamon Press, 1975, 1975

Armstrong u. a. 1981

ARMSTRONG, J. W. ; CORDES, J. M. ; RICKETT, B. J.: Density power spectrum in the local interstellar medium. In: *Nature* 291 (1981), Juni, S. 561–564

Armstrong u. a. 1995

ARMSTRONG, J. W. ; RICKETT, B. J. ; SPANGLER, S. R.: Electron density power spectrum in the local interstellar medium. In: *Astrophys. J.* 443 (1995), April, S. 209–221

Barnard 1907

BARNARD, E. E.: Observations of the satellite of Neptune at the opposition of 1906-7. In: *Astrophys. J.* 25 (1907), Juli, S. 164–164

Beck 2001

BECK, R.: Galactic and Extragalactic Magnetic Fields. In: *Space Science Reviews* 99 (2001), Oktober, S. 243–260

Bloch 1933

BLOCH, F.: Bremsvermögen von Atomen mit mehreren Elektronen. In: *Zeitschrift für Physik* 81 (1933), März, S. 363–

Bowen 1927

BOWEN, I. S.: The Origin of the Chief Nebular Lines. In: *Publ.. Astron. Soc. Pac.* 39 (1927), Oktober, S. 295–

Braginskii 1965

BRAGINSKII, S. I.: Transport Processes in a Plasma. In: *Reviews of Plasma Physics* 1 (1965), S. 205–

Chandran u. Backer 2002

CHANDRAN, B. D. G. ; BACKER, D. C.: Radio Wave Propagation through a Medium Containing Electron Density Fluctuations Described by an Anisotropic Goldreich-Sridhar Spectrum. In: *Astrophys. J.* 576 (2002), September, S. 176–187

Cho u. Lazarian 2003

CHO, J. ; LAZARIAN, A.: Compressible magnetohydrodynamic turbulence: mode coupling, scaling relations, anisotropy, viscosity-damped regime and astrophysical implications. In: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 345 (2003), Oktober, S. 325–339

Cho u. a. 2002

CHO, J. ; LAZARIAN, A. ; VISHNIAC, E. T.: Simulations of Magnetohydrodynamic Turbulence in a Strongly Magnetized Medium. In: *Astrophys. J.* 564 (2002), Januar, S. 291–301

Coles u. a. 1987

COLES, W. A. ; RICKETT, B. J. ; CODONA, J. L. ; FREHLICH, R. G.: Refractive scintillation in the interstellar medium. In: *Astrophys. J.* 315 (1987), April, S. 666–674

Cordes u. a. 1991

CORDES, J. M. ; RYAN, M. ; WEISBERG, J. M. ; FRAIL, D. A. ; SPANGLER, S. R.:

The Galactic distribution of free electrons. In: *Nature* 354 (1991), November, S. 121–124

Crutcher u. a. 2003

CRUTCHER, R. ; HEILES, C. ; TROLAND, T.: Observations of Interstellar Magnetic Fields. In: *LNP Vol. 614: Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics* 614 (2003), S. 155–181

de Jong 1977

DE JONG, T.: Photoelectric heating of the interstellar gas. In: *Astron. Astrophys.* 55 (1977), Februar, S. 137–145

Draine 1978

DRAINE, B. T.: Photoelectric heating of interstellar gas. In: *Astrophys. J., Suppl. Ser.* 36 (1978), April, S. 595–619

Drude 1900

DRUDE, P.: *Lehrbuch der Optik*. Leipzig: Hirzel, —c1900, 1900

Eddington 1926

EDDINGTON, A. S.: Diffuse matter in interstellar space. In: *The Observatory* 49 (1926), Oktober, S. 304–306

Elmegreen u. Scalo 2004

ELMEGREEN, B. G. ; SCALO, J.: Interstellar Turbulence I: Observations and Processes. In: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 42 (2004), September, S. 211–273

Ferriere u. a. 1988

FERRIERE, K. M. ; ZWEIBEL, E. G. ; SHULL, J. M.: Hydromagnetic wave heating of the low-density interstellar medium. In: *Astrophys. J.* 332 (1988), September, S. 984–994

Fichtner u. a. 1991

FICHTNER, H. ; NEUTSCH, W. ; FAHR, H. J. ; SCHLICKEISER, R.: Cosmic-Ray-Driven Galactic Wind. In: *Il Nuovo Cimento* 106 (1991), August, S. 909–1925

Field u. a. 1969

FIELD, G. B. ; GOLDSMITH, D. W. ; HABING, H. J.: Cosmic-Ray Heating of the Interstellar Gas. In: *Astrophys. J., Lett.* 155 (1969), März, S. L149

Ginzburg 1961

GINZBURG, V. L.: *The propagation of electromagnetic waves in plasmas*. Pergamon Press, New York, 1961

Goldreich u. Sridhar 1995

GOLDREICH, P. ; SRIDHAR, S.: Toward a theory of interstellar turbulence. 2: Strong alfvénic turbulence. In: *Astrophys. J.* 438 (1995), Januar, S. 763–775

Goldreich u. Sridhar 1997

GOLDREICH, P. ; SRIDHAR, S.: Magnetohydrodynamic Turbulence Revisited. In: *Astrophys. J.* 485 (1997), August, S. 680–+

Gross u. Krook 1956

GROSS, E. P. ; KROOK, M.: Model for Collision Processes in Gases: Small-Amplitude Oscillations of Charged Two-Component Systems. In: *Physical Review* 102 (1956), Mai, S. 593–604

Hewish 1980

HEWISH, A.: Frequency-time structure of pulsar scintillation. In: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 192 (1980), September, S. 799–804

Hollweg 1985

HOLLWEG, J. V.: Viscosity in a magnetized plasma - Physical interpretation. In: *J. Geophys. Res.* 90 (1985), August, Nr. 9, S. 7620–7622

Iroshnikov 1964

IROSHNIKOV, P. S.: Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field. In: *Soviet Astronomy* 7 (1964), Februar, S. 566–

Kolmogorov 1941a

KOLMOGOROV, A. N.: Energy dissipation in locally isotropic turbulence. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 32 (1941), S. 19–21

Kolmogorov 1941b

KOLMOGOROV, A. N.: Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 30 (1941), S. 299–303

Koskinen 2001

KOSKINEN, H.: *Johdatus plasmafysiikkaan*. Limes, Helsinki, 2001

Kraichnan 1965

KRAICHNAN, R. H.: Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence. In: *Phys. Fluids* 8 (1965), Nr. 7, S. 1385–1387

Kulsrud u. Pearce 1969

KULSRUD, R. ; PEARCE, W. P.: The Effect of Wave-Particle Interactions on the Propagation of Cosmic Rays. In: *Astrophys. J.* 156 (1969), Mai, S. 445–

Landau 1937

LANDAU, L. D.: Kinetic equation for the Coulomb effect. In: *Zh. Ehksp. Teor. Fiz.* 7 (1937), S. 203

Landau u. Lifshitz 1966

LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M.: *Hydrodynamik*. Lehrbuch der theoretischen Physik, Berlin: Akademie-Verlag, 1966, 1966

Lazar u. a. 2003

LAZAR, M. ; SPANIER, F. ; SCHLICKEISER, R.: Linear damping and energy dissipation of shear Alfvén waves in the interstellar medium. In: *Astron. Astrophys.* 410 (2003), Oktober, S. 415–424

Leamon u. a. 1998

LEAMON, R. J. ; SMITH, C. W. ; NESS, N. F. ; MATTHAEUS, W. H. ; WONG, H. K.: Observational constraints on the dynamics of the interplanetary magnetic field dissipation range. In: *J. Geophys. Res.* 103 (1998), März, Nr. 12, S. 4775–

Lerche 1967

LERCHE, I.: Unstable Magnetosonic Waves in a Relativistic Plasma. In: *Astrophys. J.* 147 (1967), Februar, S. 689–

Lerche u. Schlickeiser 1980

LERCHE, I. ; SCHLICKEISER, R.: The effect of convection on the propagation of relativistic galactic electrons. In: *Astrophys. J.* 239 (1980), August, S. 1089–1106

Lerche u. Schlickeiser 1982

LERCHE, I. ; SCHLICKEISER, R.: On the transport and propagation of cosmic rays in galaxies. I - Solution of the steady-state transport equation for cosmic ray nucleons,

momentum spectra and heating of the interstellar medium. In: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 201 (1982), Dezember, S. 1041–1072

Lerche u. Schlickeiser 2001

LERCHE, I. ; SCHLICKEISER, R.: Linear Landau damping and wave energy dissipation in the interstellar medium. In: *Astron. Astrophys.* 366 (2001), Februar, S. 1008–1015

Li u. Greenberg 1997

LI, A. ; GREENBERG, J. M.: A unified model of interstellar dust. In: *Astron. Astrophys.* 323 (1997), Juli, S. 566–584

Lithwick u. Goldreich 2001

LITHWICK, Y. ; GOLDREICH, P.: Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Interstellar Plasmas. In: *Astrophys. J.* 562 (2001), November, S. 279–296

Müller u. a. 2003

MÜLLER, W. ; BISKAMP, D. ; GRAPPIN, R.: Statistical anisotropy of magnetohydrodynamic turbulence. In: *Phys. Rev. E* 67 (2003), Juni, Nr. 6, S. 066302–

Mathis u. a. 1983

MATHIS, J. S. ; MEZGER, P. G. ; PANAGIA, N.: Interstellar radiation field and dust temperatures in the diffuse interstellar matter and in giant molecular clouds. In: *Astron. Astrophys.* 128 (1983), November, S. 212–229

Mathis u. a. 1977

MATHIS, J. S. ; RUMPL, W. ; NORDSIECK, K. H.: The size distribution of interstellar grains. In: *Astrophys. J.* 217 (1977), Oktober, S. 425–433

McIvor 1977

MCIVOR, I.: The inertial range of weak magnetohydrodynamic turbulence in the interstellar medium. In: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 178 (1977), Januar, S. 85–99

McKee u. Ostriker 1977

MCKEE, C. F. ; OSTRIKER, J. P.: A theory of the interstellar medium - Three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate. In: *Astrophys. J.* 218 (1977), November, S. 148–169

Melrose 1980

MELROSE, D. B.: *Plasma astrophysics: Nonthermal processes in diffuse magnetized plasmas. Volume 1 - The emission, absorption and transfer of waves in plasmas.* New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1980. 276 p., 1980

Montgomery u. Tidman 1964

MONTGOMERY, D. C. ; TIDMAN, D. A.: *Plasma kinetic theory.* McGraw-Hill Advanced Physics Monograph Series, New York: McGraw-Hill, 1964, 1964

Ohm 1827

OHM, G. S.: *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet.* T.H. Riemann, Berlin, 1827

Oster 1961

OSTER, L.: Free-Free Emission in the Radio-Frequency Range. In: *Astron. J.* 66 (1961), März, S. 50–

Osterbrock 1974

OSTERBROCK, D. E.: *Astrophysics of gaseous nebulae.* Research supported by the Research Corp., Wisconsin Alumni Research Foundation, John Simon Guggenheim Memorial Foundation, Institute for Advanced Studies, and National Science Foundation. San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1974. 263 p., 1974

Osterbrock 1988

OSTERBROCK, D. E.: The physics of gaseous nebulae. In: *Publ. Astron. Soc. Pac.* 100 (1988), April, S. 412–426

Osterbrock 1989

OSTERBROCK, D. E.: *Astrophysics of gaseous nebulae and active galactic nuclei.* Research supported by the University of California, John Simon Guggenheim Memorial Foundation, University of Minnesota, et al. Mill Valley, CA, University Science Books, 1989, 422 p., 1989

Phillips u. Wolszczan 1991

PHILLIPS, J. A. ; WOLSZCZAN, A.: Time variability of pulsar dispersion measures. In: *Astrophys. J., Lett.* 382 (1991), November, S. L27–L30

Reynolds 1990

REYNOLDS, R. J.: The power requirement of the free electron layer in the Galactic disk. In: *Astrophys. J., Lett.* 349 (1990), Januar, S. L17–L19

Rickett 1977

RICKETT, B. J.: Interstellar scattering and scintillation of radio waves. In: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 15 (1977), S. 479–504

Rohlfs u. Wilson 2004

ROHLFS, K. ; WILSON, T. L.: *Tools of radio astronomy*. Tools of radio astronomy, 4th rev. and enl. ed., by K. Rohlfs and T.L. Wilson. Berlin: Springer, 2004

Rydberg 1897

RYDBERG, J. R.: The New Series in the Spectrum of Hydrogen. In: *Astrophys. J.* 6 (1897), Oktober, S. 233–

Scalo u. Elmegreen 2004

SCALO, J. ; ELMEGREEN, B. G.: Interstellar Turbulence II: Implications and Effects. In: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 42 (2004), September, S. 275–316

Schlickeiser 2002

SCHLICKEISER, R.: *Cosmic ray astrophysics*. Astronomy and Astrophysics Library; Physics and Astronomy Online Library. Berlin: Springer. ISBN 3-540-66465-3, 2002, XV + 519 pp., 2002

Schlickeiser u. Lerche 2002

SCHLICKEISER, R. ; LERCHE, I.: Relation between interstellar density and magnetic fluctuations I. Kinetic theory of fluctuations. In: *J. Plasma Phys.* 68 (2002), S. 191–202

Sitenko 1967

SITENKO, A. G.: *Electromagnetic Fluctuations in Plasma*. Academic Press, New York, 1967

Sommerfeld 1949

SOMMERFELD, A.: *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Lectures on Theoretical Physics - Pure and Applied Mathematics, New York: Academic Press, 1949

Spangler 1991

SPANGLER, S. R.: The dissipation of magnetohydrodynamic turbulence responsible for interstellar scintillation and the heating of the interstellar medium. In: *Astrophys. J.* 376 (1991), August, S. 540–555

Spangler u. Cordes 1998

SPANGLER, S. R. ; CORDES, J. M.: VLBI Measurements of Plasma Turbulence Associated with the Cygnus OB1 Association. In: *Astrophys. J.* 505 (1998), Oktober, S. 766–783

Spangler u. Gwinn 1990

SPANGLER, S. R. ; GWINN, C. R.: Evidence for an inner scale to the density turbulence in the interstellar medium. In: *Astrophys. J., Lett.* 353 (1990), April, S. L29–L32

Spitzer 1962

SPITZER, L.: *Physics of Fully Ionized Gases*. Physics of Fully Ionized Gases, New York: Interscience (2nd edition), 1962, 1962

Spitzer 1982

SPITZER, L.: Acoustic waves in supernova remnants. In: *Astrophys. J.* 262 (1982), November, S. 315–321

Spitzer 1948

SPITZER, L. J.: The Temperature of Interstellar Matter. I. In: *Astrophys. J.* 107 (1948), Januar, S. 6–

Stawicki u. a. 2001

STAWICKI, O. ; GARY, S. P. ; LI, H.: Solar wind magnetic fluctuation spectra: Dispersion versus damping. In: *J. Geophys. Res.* 106 (2001), Mai, Nr. .15, S. 8273–8282

Stix 1962

STIX, T. H.: *Waves in Plasma*. Springer, New York, 1962

Swanson 1989

SWANSON, D. G.: *Plasma Waves*. Academic Press, New York, 1989

Vainio u. Spanier 2005

VAINIO, R. ; SPANIER, F: Damping of Alfvén waves by three wave interaction in shocks. In: *Astron. Astrophys.* (2005), S. in press

van Buren 1985

VAN BUREN, D.: The initial mass function and global rates of mass, momentum, and energy input to the interstellar medium via stellar winds. In: *Astrophys. J.* 294 (1985), Juli, S. 567–577

Vlasov 1945

VLASOV, A.: Kinetic theory of an assembly of particles with collective interaction. In: *J. Phys.* 9 (1945), Nr. 1, S. 25–40

Watson 1972

WATSON, W. D.: Heating of Interstellar H I Clouds by Ultraviolet Photoelectron Emission from Grains. In: *Astrophys. J.* 176 (1972), August, S. 103–

Zhou u. Matthaeus 1990

ZHOU, Y. ; MATTHAEUS, W. H.: Models of inertial range spectra of interplanetary magnetohydrodynamic turbulence. In: *J. Geophys. Res.* 95 (1990), September, Nr. 14, S. 14881–14892

Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie Prof. Dr. Reinhard Schlickeiser für die hervorragende Betreuung und die vielen Konferenzbesuche die er mir ermöglicht hat. Besonders bedanken möchte ich mich aber für seine ständige Diskussions- und Hilfsbereitschaft.

Von meinen Kollegen am Lehrstuhl für Theoretische Physik IV möchte ich mich besonders bedanken bei:

- Ralf Kissmann für die vielen kritischen Kommentare, die mir wichtige Denkanstöße für diese Arbeit gegeben haben.
- PD Dr. Horst Fichtner für seine unermüdliche Hilfsbereitschaft und seine unschätzbare Hilfe bei der Literaturrecherche.
- Dr. Claudia Schuster für ihre Mühe, die Konzeptversion dieser Arbeit gelesen zu haben.

Diese Arbeit wurde mit Mitteln des Sonderforschungsbereichs 591 “Gleichgewichtsferne Plasmen” gefördert.

Danksagung

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Felix Spanier
Geburtstag: 26.10.1977
Geburtsort: Herne
Familienstand: ledig
Schulbildung 1984 – 1988 Grundschule an der Claudiusstraße, Herne
1984 – 1997 Gymnasium Wanne
Abitur 1997
Zivildienst Juli 1997 – August 1998
Studium Oktober 1998 – Dezember 2002
Physik (Diplom) Ruhr-Universität Bochum
Diplomarbeit Oktober 2001 – Oktober 2002
am Lehrstuhl für Theoretische Physik I
Titel: *Strömungen in komplexen Geometrien*
Diplom 05. Dezember 2002
Wiss. Tätigkeiten WMA am Lehrstuhl für Theoretische Physik IV
im Teilprojekt A5 des SFB 591

Publikationsliste

- **Lazar M., Spanier F., Schlickeiser R.**, Linear damping and energy dissipation of shear Alfvén waves in the interstellar medium, *Astronomy & Astrophysics* **410** (2003), 415–424 (
- **Spanier F., Schlickeiser R.**, Damping and wave energy dissipation in the in-

terstellar medium II. Fast magnetosonic waves, *Astronomy & Astrophysics* **436** (2005), 9–16

- **Dogan A., Spanier F., Vainio R., Schlickeiser R.**, Density fluctuations and polarization features of magnetohydrodynamic waves, *Journal of Plasma Physics*, akzeptiert
- **Vainio R., Spanier F.**, Damping of Alfvén waves by three-wave interactions in shocks, *Astronomy & Astrophysics* akzeptiert
- **Spanier F.**, Heating of the ISM by Alfvén-wave Damping *The Magnetized Interstellar Medium* (2004), Proceedings of the conference