

Magnetometer wenige Minuten umherzutragen, es dabei etwa fünf mal aufzustellen und insgesamt rund 30 mal zu entarretieren.

4. Herr Dipl.-Ing. *F. Haalck* (Askania-Werke) hat das Magnetometer für diese Versuche zur Verfügung gestellt. Ihm sei an dieser Stelle bestens gedankt.

Literatur

- [1] *Haalck, F.*: A Torsion Magnetometer for Measuring the Vertical Component of the Earth Magnetic Field. – Geophysical Prospecting, Vol. IV, No. 4, S. 424-441, Den Haag 1956.
- [2] *Haalck, F.*: Ein Universal-Torsions-Magnetometer zur Bestimmung von *D*, *H* und *Z*. – Ztschr. f. Geophysik, Sonderband, (Bd. 19), S. 1-7, 1953.
- [3] *Werner, F.*: Die Temperaturkompensation bei Torsionsmagnetometer. – Ztschr. f. Geophysik, Sonderband (Bd. 19), S. 8-11, 1953.

X, 50

ZEITSCHRIFT
FÜR
GEOPHYSIK

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

B. Brockamp, Münster i. W.

unter Mitwirkung von **A. Defant**, Innsbruck — **W. Dieminger**, Lindau b. Northeim
W. Hiller, Stuttgart — **K. Jung**, Kiel — **O. Meyer**, Hamburg
F. Möller, Mainz — **H. Reich**, Göttingen.

Jahrgang 24

1958

Heft 3



PHYSICA - VERLAG · WURZBURG

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Lippmann, H. J.</i> : Erdmagnetische Induktion in Leitfähigkeitseinlagerungen im Untergrund	113
<i>Untiedt, J.</i> : Über die direkte Aufzeichnung erdmagnetischer Vektogramme	125
<i>Graeser, E., Lode W., Pott G.</i> : Die Konstruktion gekrümmter Reflexionshorizonte bei gegebener variabler Geschwindigkeitsverteilung im Raum	134
<i>Oliwa, G.</i> : Die Schwere auf dem Niveausphäroid	143
<i>Bock, R.</i> : Das WUSTsche Lokalvariometer	148

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 34,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel, auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die Zeitschrift für Geophysik bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Bernhard Brockamp, Münster (Westfalen), Steinfurter Straße 107

Anschrift der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80, Postscheck: Hamburg Nr. 55983

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayr. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Münzstr. 12. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing und Hildgund Holler, sämtliche Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler u. Charl. Kuhnert, beide Würzburg. Verantwortl. f. d. Anzeigenteil: Arnulf Liebing.

Typoskript: Physica-Verlag, Würzburg, Offsetdruck: fotokop, Darmstadt

Printed in Germany



PHYSICA-VERLAG Würzburg 1958

Erdmagnetische Induktion in Leitfähigkeits- einlagerungen im Untergrund ¹⁾

Von H. J. Lippmann, Nürnberg ²⁾

Zusammenfassung: Der induzierte, innere Anteil einer erdmagnetischen Bay-Störung wird bei Annahme zweier Modelle einer Leitfähigkeitseinlagerung (unendlich langer Zylinder und Kugel) berechnet. Das induzierte Magnetfeld ist bei der zylinderförmigen Einlagerung das Feld eines ebenen Dipols, bei der kugelförmigen Einlagerung das Feld eines räumlichen Dipols. Die Induktionsrechnungen werden auf die Leitfähigkeitseinlagerung unter Norddeutschland und Mitteljapan angewendet.

Abstract: The induced inner part of a geomagnetic bay disturbance is calculated. The calculation assumes an electrically conductive infinitely long cylinder or sphere within the earth's crust. The induced magnetic field is that of a two- or three-dimensional dipole depending on whether a cylindrical or spherical body is considered. The results are applied to electrically conductive layers located in Northern Germany and Central Japan.

Bei magnetischen Bay-Störungen bleibt nach Abtrennung des Anteils der Störung, der vom Stromsystem im Außenraum der Erde (Ionosphäre) erzeugt wird, ein magnetisches Restfeld übrig. Zur Deutung dieses Restfeldes benutzten *Fleischer* [1] für Norddeutschland und *Rikitake* und Mitarbeiter [2] für Mitteljapan ortsfeste Leitfähigkeitseinlagerungen im tieferen Untergrund. Dabei wird das Restfeld als Magnetfeld von Strömen gedeutet, die in der Leitfähigkeitseinlagerung durch die zeitliche Änderung des extraterrestrischen Feldes induziert werden.

Für die norddeutsche Leitfähigkeitseinlagerung hat *Bartels* [3] bereits ein Modell angegeben. Für die Trennung des äußeren, ionosphärischen Anteils und des inneren Feldes einer Bay gab *Kertz* [4] ein mathematisches Verfahren an.

Die bisherigen Untersuchungen über die bei Bay-Störungen in der Erde induzierten Felder beschränken sich auf die aus den Magnetfeldern zu schließenden Stromverteilungen. In dieser Arbeit werden Modellrechnungen zur Erklärung dieser Felder durch Induktion in Leitfähigkeitseinlagerungen im tieferen Untergrund angegeben. Bei den Modellen handelt es

¹⁾ Die vorliegende Arbeit wurde am Geophysikalischen Institut Göttingen ausgeführt.

²⁾ Dr. Hans Joachim Lippmann, Nürnberg, Katzwanger Straße 151.

sich um eine Einlagerung, die die Form eines unendlich langen Zylinders hat und um eine kugelförmige Einlagerung. Die Leitfähigkeit der die Einlagerung umgebenden Materie wird vernachlässigt.

Als induzierendes Magnetfeld tritt in unseren Breiten bei Bay-Störungen fast ausschließlich das Magnetfeld des flächenhaften Rückstromes des Polarlichtstromes auf. Als Näherung wird der Flächenstrom in der Theorie als unendlich ausgedehnt angenommen, so daß er nur horizontale Magnetfeldkomponenten besitzt, die homogen, aber zeitlich veränderlich sind. Mit diesem induzierenden Magnetfeld werden unter Benutzung der Maxwell-Gleichungen die induzierten elektrischen und magnetischen Felder berechnet.

Zylinderförmiges Leitfähigkeitsmodell

Ein einfacher Fall eines Leitfähigkeitsmodells ist ein unendlich ausgedehnter Zylinder. Unendlich ausgedehnt bedeutet physikalisch, daß in der Koordinatenrichtung (y), in der die Achse des Zylinders liegt, elektrisch und magnetisch immer gleiche Verhältnisse herrschen; d. h.

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Die Induktion erfolge durch ein homogenes Magnetfeld in x -Richtung (also senkrecht zur Achsenrichtung y des Zylinders; siehe Abb. 1) mit der Amplitude J_0 . Die zeitliche Änderung des induzierenden Magnetfeldes sei periodisch und durch $e^{i\omega t}$ beschrieben.

Die Maxwell-Gleichungen [vergl. Formelanhang (1a), (1b) und (1c)] ergeben dann innerhalb des Zylinders die Lösungen (2a) bis (2d). Für das Feld außerhalb des Zylinders erhält man (3a) bis (3d). Sämtliche Ausdrücke befinden sich im Formelanhang.

Die Funktionen $u(r)$, $w(r)$ und $v(r)$ in (2a), (2b), (2c) lassen sich durch die Zylinderfunktion 1. Ordnung Z_1 darstellen. Diese Funktion Z_1 läßt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken.

Zwischen dem induzierenden und induzierten Magnetfeld im Außenraum des Zylinders besteht eine Phasenverschiebung α . Der Phasenwinkel α und die weitere freie Integrationskonstante A können durch Stetigkeitsbetrachtungen am Zylindermantel zwischen den Lösungen innerhalb und außerhalb des Zylinders bestimmt werden.

Das induzierte elektrische Feld hat bei Induktion durch H_x nur eine Komponente E_y . Da E_y und damit auch die Stromdichte j_y proportional $\sin\phi$ sind, fließt der induzierte Strom im oberen Teil des Zylinderquerschnitts (Teil des Zylinderquerschnitts, der im ersten und zweiten Qua-

dranten des x - z -Koordinatensystems liegt) in die positive y -Richtung, dagegen im unteren Teil des Querschnitts (dritter und vierter Quadrant) in die negative y -Richtung (siehe Abb. 2). Die beiden Stromteile schlie-

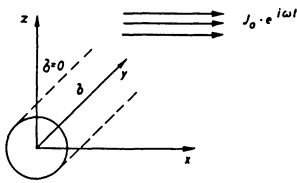


Abb. 1: Zylinderförmiges Leitfähigkeitsmodell im x, y, z -Koordinatensystem mit induzierendem Magnetfeld. Im Innern des Zylinders herrsche die Leitfähigkeit σ ; im Außenraum sei die Leitfähigkeit Null.

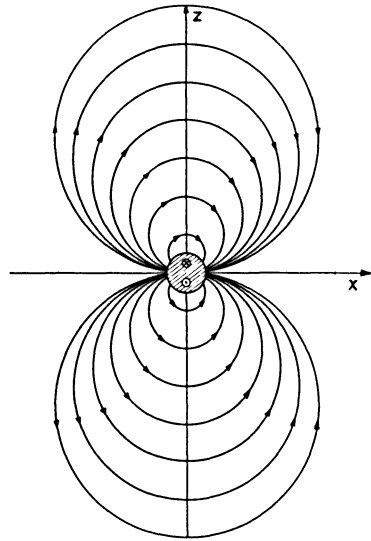


Abb. 2: Schnitt durch den Zylinder mit den Feldlinien des induzierten magnetischen Außenfeldes. Im oberen Teil des Zylinderquerschnitts fließt der induzierte Strom in die Zeichenebene hinein, im unteren Teil kommt er aus der Zeichenebene heraus.

ßen sich beim unendlich ausgestreckten Zylinder im Unendlichen. Das verschiedene Vorzeichen von j_y wird gleichfalls bei der Diskussion der Feldlinien des induzierten Magnetfeldes in der x - z -Ebene deutlich.

Das induzierte Magnetfeld im Außenraum des Zylinders ohne Zeitabhängigkeit lautet: (Formel 3 a und 3 b)

$$(4 a) \quad H_x^a = \frac{A}{r^4} (x^2 - z^2)$$

$$(4 b) \quad H_z^a = \frac{2A}{r^4} \cdot x \cdot z$$

Das Potential dieses Feldes hat die Form:

$$(5) \quad S_{\text{Zyl}} = A \cdot \frac{x}{r^2} = A \cdot \frac{x}{x^2 + z^2}$$

Dieses ist bekanntlich das Potential eines ebenen Dipols. Die Feldlinien dieses Dipols sind Kreise in der x - z -Ebene, deren Mittelpunkte

auf der z -Achse liegen und die x -Achse im Nullpunkt berühren (siehe Abb. 2).

Zur Vereinfachung der Formeln des induzierten Magnetfeldes H_x^a und H_z^a drückt man die Konstante A durch den Maximalwert von H_x bei $x = 0$ aus. Dieser beträgt

$$H_0 = -\frac{A}{z^2}$$

Ferner wird für $-\frac{x}{z} = m$ gesetzt. Die Formeln lauten dann:

$$(6a) \quad H_x^a = H_0 \cdot \frac{1 - m^2}{(1 + m^2)^2}$$

$$(6b) \quad H_z^a = H_0 \cdot \frac{2m}{(1 + m^2)^2}$$

Im Gegensatz zu dem von *Fleischer* [1] zur Deutung herangezogenen Feld eines stationären Linienstromes kann bei Induktion in einem unendlich ausgedehnten Zylinder die Horizontalintensität H_x für $|m| > 1$ negativ werden. Wie man aus dem Feldlinienbild (Abb. 2) sieht, liegt die Erklärung dafür im Auftreten eines Hin- und Rückstromes im Zylinder und der Superposition der Magnetfelder beider Ströme.

Identifiziert man die x -Richtung mit Norden, die y -Richtung mit Westen und $-z$ mit der Tiefe der Zylinderachse unter der Erdoberfläche, so kann man das Zylinder-Modell auf die norddeutsche Leitfähigkeitseinlagerung anwenden. Aus dem an der Erdoberfläche gemessenen Verhältnis H_x^a/H_z^a läßt sich bei Kenntnis der Koordinate x^3 die Tiefe der Achse des Zylinder-Modells berechnen, wenn man das Verhältnis H_x^a/H_z^a aus den obigen Formeln bildet. Man kommt dann auf eine Tiefe von $|z| = 200$ km für die Zylinderachse.

Über den Radius und die Leitfähigkeit des Zylinders kann man erst dann eine Aussage machen, wenn man die freien Integrationskonstanten in den induzierten Feldern durch Stetigkeitsbetrachtungen bestimmt. Das soll hier aber nicht geschehen.

Kugelförmiges Leitfähigkeitsmodell

Als zweites Modell einer Leitfähigkeitseinlagerung wird die Induktion in einer Kugel behandelt. Der Einfluß des konstanten Erdmagnetfeldes auf

³⁾ Lage des Ortes in Bezug auf Scheessel, wo man nach *Fleischer* [1] das Maximum von H_x beobachtet.

die in der Leitfähigkeitseinlagerung induzierten Ströme wird (wie auch beim Zylindermodell) nicht berücksichtigt⁴⁾. Die Induktionserfolge wiederum durch ein homogenes Magnetfeld, daß nur eine x -Komponente (Amplitude J_0) besitzt und dessen zeitliche Änderung periodisch mit der Frequenz ω ist.

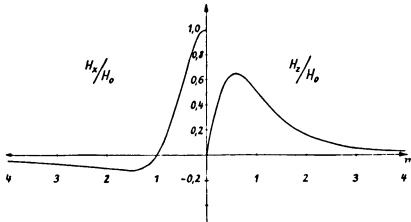


Abb. 3: Das induzierte Magnetfeld eines Zylinders in einer Ebene $z = \text{const}$, aufgetragen in relativen Einheiten

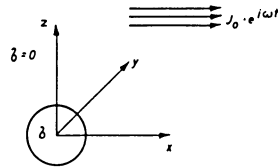


Abb. 4: Kugelförmiges Leitfähigkeitsmodell im x, y, z -Koordinatensystem mit induzierendem Magnetfeld. Im Innern der Kugel herrsche die Leitfähigkeit σ ; im Außenraum sei $\sigma = 0$

Die Maxwell-Gleichungen für quasistationäre Verhältnisse (1a), (1b) und (1c) werden für dieses Modell gelöst.

Für das induzierte Magnetfeld im Innern der Kugel ergeben sich die drei Komponenten (7a), (7b) und (7c) (siehe Formelanhang). Das induzierte elektrische Feld wird durch (8a), (8b) und (8c) beschrieben. Die Lösungen enthalten die Funktionen $K(\eta)$, $L(\eta)$, $M(\eta)$, $P(\eta)$, $Q(\eta)$, die gleichfalls im Formelanhang [Formel (10a) bis (10f)] erklärt sind. Die dimensionslose Größe η ist proportional r und ist durch (9) definiert.

Im Außenraum der Kugel gilt für das Magnetfeld (11a), (11b) und (11c). Für das entsprechende elektrische Feld gelten die Formeln (12a), (12b) und (12c).

Die noch freien Integrationskonstanten C und δ in den Lösungen innerhalb der Kugel und die Konstanten A und α im Außenraum werden durch die Randbedingung der Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} auf der Kugeloberfläche bei $r = R$ bestimmt. Man erhält für C und δ Formel (13) bzw. (14); für A und α Formel (15) bzw. (16).

Das elektrische Feld in der Kugel

Transformiert man das elektrische Feld in der Kugel zurück auf karte-

⁴⁾ Die Abschätzung des Einflusses des konstanten Erdfeldes läuft auf eine Betrachtung der Wechselwirkung zwischen den induzierten Strömen in der Kugel und dem Erdfeld hinaus (Hall-Effekt). Der Hall-Effekt ist zu vernachlässigen.

sische Koordinaten, so erhält man: $E_x^i = 0$. Der Anstieg der Feldlinien des elektrischen Feldes ist dann gegeben durch:

$$(17) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{E_z^i}{E_y^i} = -\frac{\gamma}{z} = \frac{dz}{dy}$$

Ausintegriert:

$$(18) \quad y^2 + z^2 = \text{const} = \xi^2$$

Bei Induktion in einer Kugel durch ein räumlich konstantes Magnetfeld sind die Feldlinien des induzierten elektrischen Feldes Kreise in der Ebene senkrecht zur Induktionsrichtung; in unserem speziellen Fall der Induktion durch eine x -Komponente also Kreise in der y - z -Ebene.

Nach (8) kann man für die Stromdichte j in der Kugel bezogen auf die Stromdichte j_0 auf der Kugeloberfläche bei $r = R$ schreiben:

$$(19) \quad j/j_0 = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{\frac{P^2 (n \cdot \eta_0) + Q^2 (n \cdot \eta_0)}{P^2 (\eta_0) + Q^2 (\eta_0)}},$$

dabei ist n die relative Größe

$$(20) \quad n = \frac{r}{R} \quad 0 \leq n \leq 1$$

Die Diskussion von (19) ergibt, daß die Stromdichte zum Mittelpunkt der Kugel hin abnimmt (Skin-Effekt) und im Mittelpunkt zu Null wird (siehe Abb. 5). Wenn man eine Kugel mit einem festen Radius vorgibt, so ist die Abnahme der Stromdichte mit der Tiefe vom Produkt $\sigma \cdot \omega$ abhängig.

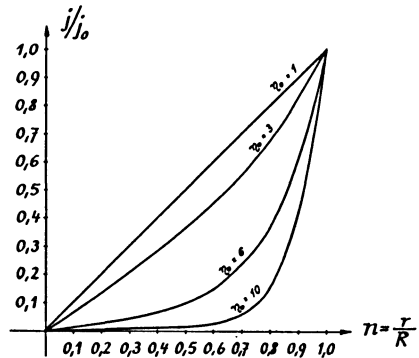


Abb. 5: Verlauf der Stromdichte, bezogen auf die Stromdichte an der Oberfläche der Kugel, in Abhängigkeit von der relativen Größe $n = r/R$ und η_0 (Gl. 9 a im Formelanhang)

Das induzierte Magnetfeld im Außenraum der Kugel

Das induzierte Magnetfeld im Außenraum der Kugel [(11 a) ohne $J_0 e^{i\omega t}$, (11 b), (11 c)] ist das Feld eines magnetischen Dipols (siehe Abb. 6). Das Potential dieses Dipols lautet:

$$(21) \quad S_{Ku} = p \cdot \frac{x}{r^3} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}$$

mit dem induzierten magnetischen Moment

$$(22) \quad p = \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot R^3 \cdot W(\eta_0)$$

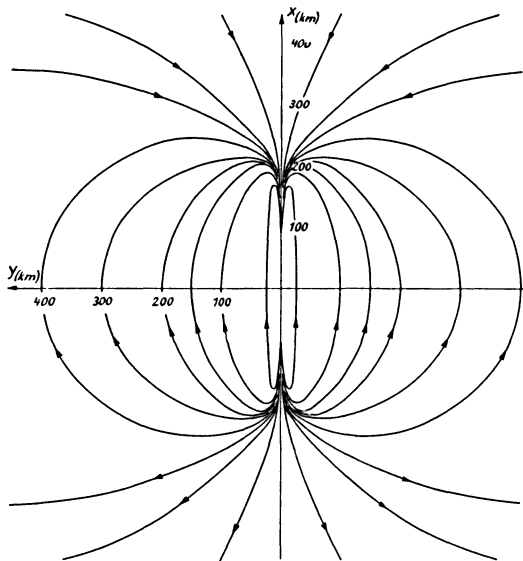


Abb. 6: Feldlinienverlauf des induzierten magnetischen Feldes einer Kugel (Feld eines magnetischen Dipols im Mittelpunkt der Kugel), wenn man mit einem räumlich konstanten Magnetfeld in x -Richtung induziert. Der Feldlinienverlauf ist gezeichnet für eine Kugel, deren Mittelpunkt 300 km unter Zeichenebene (Erdoberfläche) liegt. Für $|x| > 200$ km kann die Horizontalkomponente negativ werden

Das Dipolmoment p ist proportional dem Produkt aus der Amplitude des induzierenden Feldes und dem Volumen der Kugel. Eine zusätzliche Abhängigkeit vom Radius R der Kugel ergibt sich über die Wurzelfunktion $W(\eta_0)$ [siehe (15) und Abb. 7]. Über die Funktion $W(\eta_0)$ ist auch das Dipolmoment vom Produkt $\sigma \cdot \omega$ (elektrische Leitfähigkeit multipliziert mit der Kreisfrequenz der periodischen Anregung) abhängig.

Bei Anwendung der Induktionsrechnungen auf geophysikalische Probleme ist ein Abfall der Wurzelfunktion $W(\eta_0)$ für hohe Frequenzen nach Erreichen eines Maximums zu erwarten, da die Induktionswirkung eines extraterrestrischen Magnetfeldes durch die über einer Leitfähigkeitseinlagerung liegenden Schichten schlechter, aber noch endlicher, Leitfähigkeit gedämpft wird.

Die Größe des Phasenwinkels α , um den die induzierten Felder gegenüber dem induzierenden zeitlich verschoben sind, hängt nach (6) gleichfalls von η_0 ab. Für α ergibt sich bei Änderung von η_0 folgender Wertebereich:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad \infty > \eta_0 > 0.$$

Für die Untersuchung, wie sich die Induktion in der Kugel durch einen zeitlichen Einschalt-Aus-schalt-Vorgang (bisher wurde nur die periodische Anregung untersucht) auswirkt, muß man die harmonische Analyse eines solchen Vorgangs durchführen.

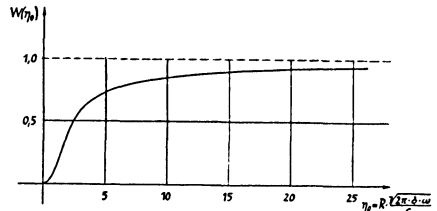


Abb. 7: Verlauf des Wurzelfaktors $W(\eta_0)$ im induzierten Dipolmoment einer Kugel in Abhängigkeit von η_0

Die einzelnen Harmonischen werden dem Formalismus der Induktion in einer Kugel unterworfen. Als induziertes Feld ergibt sich wieder eine ähnliche Verteilung wie beim induzierenden Feld, die ihr Maximum zeitlich vor dem induzierenden Feld erreicht. Die Verschiebung beider Maxima stimmt mit Beobachtungen bei Bay-Störungen überein. Eine Erklärung der Loopings durch die Phasenverschiebung zwischen induzierendem und induziertem Feld ist nicht möglich, da die durch Induktion entstehende Drehung des Magnetvektors von Ort zu Ort verschieden ist, während bei den Bay-Störungen eine einheitliche Drehung beobachtet wird.

Anwendung der Induktionsuntersuchungen auf die

Leitfähigkeitseinlagerungen unter Mitteljapan und Norddeutschland

Bei bay-artigen Störungen tritt in Mitteljapan, ähnlich wie in Norddeutschland, ein zusätzliches Magnetfeld auf, das *T. Rikitake* und Mitarbeiter [2] näherungsweise als Feld eines hypothetischen magnetischen Dipols in 150 km Tiefe deuteten. Die Richtung seines magnetischen Moments war bei der bay-artigen Variation am 19.6.1936 um 5^h 50^m GMT um 20° geneigt und wies nach NNO. Das magnetische Moment wurde aus dieser Störung zu $8,6 \cdot 10^{18}$ emu ermittelt. *T. Rikitake* und Mitarbeiter weisen daraufhin, daß das Auftreten des Dipols auf eine ortsfeste Anomalie im Untergrund zurückzuführen ist. Soweit mir bekannt ist, ist für den Dipol noch keine Entstehungsursache angegeben. Wir können das Auftreten des Dipols jetzt in folgender Weise deuten:

Die Leitfähigkeitseinlagerung unter Mitteljapan muß annähernd kugelförmig sein. In dieser Einlagerung werden bei magnetischen Variationen

Ströme induziert. Das Magnetfeld dieser Ströme ist identisch mit dem Feld eines Dipols im Mittelpunkt der Kugel mit höherer Leitfähigkeit. Um zu zeigen, daß die Größenordnung des Dipolmoments einer kugelförmigen Anomalie mit dem oben angegebenen Moment etwa übereinstimmt, werden folgende Werte für die japanische Störung angenommen:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \quad 5) \\ \sigma &= 1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \\ R &= 130 \text{ km} \end{aligned} \right\} \text{ entspricht } \eta_0 = 4,3$$

Man kommt mit diesen Werten auf ein magnetisches Moment

$$p \approx 10^{18} \text{ emu .}$$

Es muß berücksichtigt werden, daß bei dieser Rechnung eine periodische Anregung vorausgesetzt ist, die in Wirklichkeit nicht vorliegt. Man darf dieses aber in erster Näherung tun, da auch der Wert $8,6 \cdot 10^{18} \text{ emu}$ nur als grobe Näherung gedacht ist (als erstes Glied einer Entwicklung). Die Neigung des hypothetischen Dipols um 20° kann man durch die Beteiligung der Vertikalkomponente Z an der Induktion erklären.

Für das flächenmäßige Verhalten der Leitfähigkeitsanomalie unter Norddeutschland liegt bisher noch wenig Material vor. Würde man wegen des beobachteten Maximums von H in Scheessel [1] eine kugelförmige Leitfähigkeitseinlagerung unter Scheessel annehmen, so müßte man für deren Mittelpunkt eine Tiefe von $h \approx 280 \text{ km}$ fordern. Bei Induktion durch ein räumlich konstantes H (d.h. Richtung von x in Abb. 6 fällt mit Norden zusammen) wird der innere Anteil einer Bay-Störung [1] der Richtung nach wiedergegeben. Die Größe (Amplitude) des induzierten Feldes würde aber kleiner ausfallen als beobachtet, da das induzierte Dipolmoment maximal

$$(23) \quad p_{\max} = \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot R^3$$

betragen kann. Dieses Ergebnis scheint darauf hinzudeuten, daß es sich bei der norddeutschen Leitfähigkeitseinlagerung um einen in Ost-West-Richtung gestreckten Körper handelt.

Formelanhang:

1. Maxwell-Gleichungen im Gauß'schen Maßsystem für quasistationäre Vorgänge und magnetischer Permeabilität $\mu = 1$:

5) $\omega = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$ entspricht einer Periodendauer einer Sinuswelle von 1 Stunde.

$$\begin{aligned}
 (1a) \quad & \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \sigma \cdot \mathfrak{E} && \mathfrak{H} \text{ magnetische Feldstärke} \\
 (1b) \quad & \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \cdot \dot{\mathfrak{H}} && \mathfrak{E} \text{ elektrische Feldstärke} \\
 (1c) \quad & \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 && \sigma \text{ elektrische Leitfähigkeit} \\
 & && c \text{ Lichtgeschwindigkeit}
 \end{aligned}$$

2. Zylinderförmiges Leitfähigkeitsmodell:

a) Lösungen innerhalb des Zylinders (Index i) in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 (2a) \quad & H_r^i = u(r) \cdot \cos \phi \\
 (2b) \quad & H_\phi^i = w(r) \cdot \sin \phi \\
 (2c) \quad & E_y^i = v(r) \cdot \sin \phi \\
 (2d) \quad & H_y^i = E_r^i = E_\phi^i = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit } r &= \sqrt{x^2 + z^2} \\
 x &= r \cdot \cos \phi \\
 z &= r \cdot \sin \phi
 \end{aligned}$$

b) Lösungen außerhalb des Zylinders (Index a) in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 (3a) \quad & H_x^a = \frac{A}{r^2} \cdot \frac{x^2 - z^2}{r^2} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} + J_0 \cdot e^{i\omega t} \\
 (3b) \quad & H_z^a = \frac{2A}{r^2} \cdot \frac{x \cdot z}{r^2} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} \\
 (3c) \quad & E_y^a = -\frac{i\omega}{c} \cdot \left(\frac{A}{r} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} + J_0 \cdot r \cdot e^{i\omega t} \right) \cdot \sin \phi \\
 (3d) \quad & H_y^a = E_x^a = E_z^a = 0.
 \end{aligned}$$

3. Kugelförmiges Leitfähigkeitsmodell:

a) Lösungen innerhalb der Kugel (Index i) in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 (7a) \quad & H_r^i = C \cdot \frac{2\sqrt{a}}{r^3} \cdot [K(\eta) + iL(\eta)] \cdot e^{i(\omega t + \delta)} \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\
 (7b) \quad & H_\theta^i = C \cdot \frac{\sqrt{a}}{r^3} \cdot [M(\eta) + iN(\eta)] \cdot e^{i(\omega t + \delta)} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$(7c) \quad H_{\phi}^i = -C \cdot \frac{\sqrt{a}}{r^3} \cdot [M(\eta) + i N(\eta)] \cdot e^{i(\omega t + \delta)} \cdot \sin \phi$$

$$(8a) \quad E_r^i = 0$$

$$(8b) \quad E_{\theta}^i = C \cdot \frac{a^{3/2}}{r^2} \cdot \frac{c}{2\pi \cdot \sigma} \cdot [P(\eta) + i Q(\eta)] \cdot e^{i(\omega t + \delta)} \cdot \sin \phi'$$

$$(8c) \quad E_{\phi}^i = C \cdot \frac{a^{3/2}}{r^2} \cdot \frac{c}{2\pi \cdot \sigma} \cdot [P(\eta) + i Q(\eta)] \cdot e^{i(\omega t + \delta)} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$$

mit

$$(9) \quad \eta(r) = r \cdot \sqrt{a} = r \cdot \frac{\sqrt{2\pi \cdot \sigma \cdot \omega}}{c}$$

$$(10a) \quad K(\eta) = \sin \eta \cdot \mathfrak{C}os \eta - (\cos \eta + 2 \eta \cdot \sin \eta) \cdot \mathfrak{S}in \eta$$

$$(10b) \quad L(\eta) = -\cos \eta \cdot \mathfrak{S}in \eta - (\sin \eta - 2 \eta \cdot \cos \eta) \cdot \mathfrak{C}os \eta$$

$$(10c) \quad M(\eta) = (1 - 2 \eta^2) \cdot \cos \eta \cdot \mathfrak{S}in \eta - (1 + 2 \eta^2) \cdot \sin \eta \cdot \mathfrak{C}os \eta + 2 \eta \cdot \sin \eta \cdot \mathfrak{S}in \eta$$

$$(10d) \quad N(\eta) = (1 - 2 \eta^2) \cdot \sin \eta \cdot \mathfrak{C}os \eta + (1 + 2 \eta^2) \cdot \cos \eta \cdot \mathfrak{S}in \eta - 2 \eta \cdot \cos \eta \cdot \mathfrak{C}os \eta$$

$$(10e) \quad P(\eta) = (\sin \eta - 2 \eta \cdot \cos \eta) \cdot \mathfrak{C}os \eta + \cos \eta \cdot \mathfrak{S}in \eta$$

$$(10f) \quad Q(\eta) = -(\cos \eta + 2 \eta \cdot \sin \eta) \cdot \mathfrak{S}in \eta + \sin \eta \cdot \mathfrak{C}os \eta$$

Integrationskonstanten:

$$(13) \quad C = \frac{3}{2} J_0 \cdot R^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(P_0 - N_0)^2 + (M_0 + Q_0)^2}}$$

$$(14) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{P_0 - N_0}{Q_0 + M_0}$$

mit $M_0 = M(\eta_0)$; $N_0 = N(\eta_0)$; $P_0 = P(\eta_0)$; $Q_0 = Q(\eta_0)$

und

$$(9a) \quad \eta_0 = R \cdot \sqrt{a} = R \cdot \frac{\sqrt{2\pi \cdot \sigma \cdot \omega}}{c}$$

b) Lösungen im Außenraum der Kugel (Index a) in kartesischen Koordinaten:

$$(11a) \quad H_x^a = \frac{A}{2r^3} \left(3 \cdot \frac{x^2}{r^2} - 1 \right) \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} + J_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$(11b) \quad H_y^a = \frac{A}{2} \cdot \frac{3x \cdot y}{r^5} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}$$

$$(11c) \quad H_z^a = \frac{A}{2} \cdot \frac{3xz}{r^5} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}$$

$$(12a) \quad E_x^a = 0$$

$$(12b) \quad E_y^a = \frac{i\omega}{2c} \cdot \left[A \cdot \frac{z}{r^3} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} + J_0 \cdot z \cdot e^{i\omega t} \right]$$

$$(12c) \quad E_z^a = -\frac{i\omega}{2c} \cdot \left[A \cdot \frac{y}{r^3} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} + J_0 \cdot y \cdot e^{i\omega t} \right]$$

Integrationskonstanten:

$$(15) \quad A = J_0 \cdot R^3 \cdot \sqrt{\frac{(2P_0 + N_0)^2 + (2Q_0 - M_0)^2}{(P_0 - N_0)^2 + (M_0 + Q_0)^2}} = J_0 \cdot R^3 \cdot W(\eta_0)$$

$$(16) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{(P_0 - N_0) \cdot (2Q_0 - M_0) - (M_0 + Q_0) \cdot (2P_0 + N_0)}{(P_0 - N_0) \cdot (2P_0 + N_0) + (M_0 + Q_0) \cdot (2Q_0 - M_0)}$$

Herrn Prof. Dr. *Bartels*, der diese Untersuchungen anregte und mir seine ständige Unterstützung gewährte, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Den Herren Dr. *W. Kertz* und Dr. *U. Fleischer* danke ich für viele Diskussionen und Hinweise.

Literatur

- [1] *Fleischer, U.*: Ein Erdstrom im tieferen Untergrund Norddeutschlands während erdmagnetischer Bay-Störungen. *Naturwiss.* 41, Heft. 5, 114 (1954).
Charakteristische erdmagnetische Bay-Störungen in Mitteleuropa und ihr innerer Anteil. *Zeitschr. f. Geophys.* 20/20 (1954).
- [2] *Rikitake, T., J. Yokkoyama* und *Y. Hishiyama*: The anomalous Behaviour of Geomagnetic Variations of Short Period in Japan and Its Relations to the Subterranean Structure. *Bull. Earthquake. Res. Inst. Tokyo.* 30, 207 (1953); 31, 19, 89, 101, 119 (1953).
- [3] *Bartels, J.*: Erdmagnetisch erschließbare lokale Inhomogenitäten der elektrischen Leitfähigkeit im Untergrund. *Nachr. Akad. d. Wiss. Göttingen. Phys.-Math. Kl. Abt. IIa* (1954) Nr. 5, 95.
- [4] *Kertz, W.*: Modelle für erdmagnetisch induzierte elektrische Ströme im Untergrund. *Nachr. Akad. d. Wiss. Göttingen. Phys.-Math. Kl. Abt. IIa* (1954) Nr. 5, 101.

Über die direkte Aufzeichnung erdmagnetischer Vektogramme ¹⁾

Von J. Untiedt, Göttingen ²⁾

Zusammenfassung: Es wird über Instrumente (sog. Vektographen ³⁾) berichtet, mit denen seit etwa zwei Jahren in Göttingen die zeitlichen Änderungen ebener Projektionen des erdmagnetischen Störvektors registriert werden. Einem Überblick über das allgemeine Verhalten der verschiedenartigen Vektogramme folgen Mitteilungen über erste Untersuchungen, die sich hauptsächlich auf *bp*'s und "Mittagsschwingungen" aus dem Jahre 1956 erstreckten.

Abstract: The time-variations of the plane projected geomagnetic disturbance vector have been recorded for the past two years in Göttingen by instruments called vectographs. A survey of the general behaviour of the various vectograms is followed by a report of the first examinations taken mainly from 1956 *bp*'s and "Mittagsschwingungen".

Bestimmte Fragen, – die Korrelation zwischen *H*- und *Z*-Variationen betreffend –, sowie die Arbeiten von *Strobach* [1] regten dazu an, in Göttingen erdmagnetische Vektogramme direkt zu registrieren: Der Endpunkt des erdmagnetischen Feldvektors beschreibt an einem festen Ort im Lauf der Zeit eine räumliche Kurve, die auf eine beliebige Ebene parallel projiziert sei. Eine Darstellung dieser letzteren, ebenen Kurve soll Vektogramm genannt werden, wobei die Symbole der Richtungen, welche die betreffende Ebene aufspannen, jeweils zur näheren Charakterisierung mit angegeben seien. Es ist zum Beispiel die Rede vom *XY*-Vektogramm, wo *X* die geographische Nord-, *Y* die geographische Ostrichtung bezeichnet; in diesem Fall kann auch einfach vom Horizontalvektogramm gesprochen werden.

Das Prinzip des direkt registrierenden Instrumentes, Vektograph genannt, ist einfach: Zwei Spiegel, um zueinander senkrechte Achsen drehbar, vermögen ein über sie geführtes Lichtbündel in aufeinander senkrecht stehenden Richtungen seitlich auszulenken. Sie werden bei gleicher Emp-

¹⁾ Vortrag, gehalten während der 22. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft in Leipzig, Mai 1958.

²⁾ Dipl. Phys. *Jürgen Untiedt*, Göttingen, Geophysikalisches Institut der Universität, Herzberger Landstr. 180

³⁾ nach einem Vorschlag von Herrn Prof. *S. Chapman*.

findlichkeit gerade von denjenigen Komponenten der erdmagnetischen Variationen gesteuert, die die Projektionsebene des gewünschten Vektogramms kennzeichnen. Dieses selbst findet seine Darstellung in den Bewegungen des als Zeiger dienenden Lichtbündels. In Abb. 1 sind zum Beispiel ein gewöhnliches Y -Variometer (links) und ein mit horizontalen Spannfäden versehenes X -Variometer (rechts) zu einem Horizontalvektographen vereinigt; hier erfolgt die Steuerung der Drehspiegel also durch direkt mit ihnen verbundene Magnete. Weil das Lichtbündel auf ihm hin- und hergleitet, weist der zweite Spiegel größere Dimensionen auf als der erste.

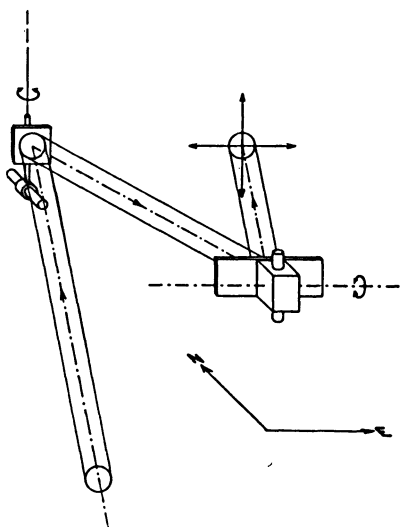


Abb. 1: Prinzip eines magnetischen Vektographen

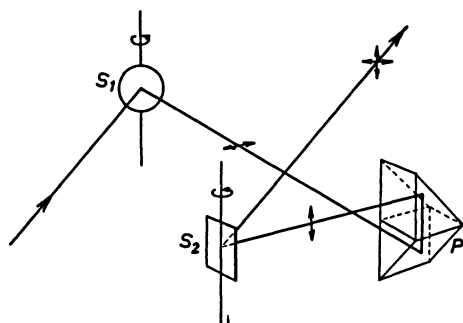


Abb. 2: Prinzip eines Prismenvektographen

In einer etwas anders gestalteten Anordnung (Abb. 2) drehen sich die Spiegel um parallele Achsen; das Licht wird auf dem Wege vom einen zum anderen über ein Doppelpisma geführt, welches aus zwei 90° -Prismen bei kreuzweiser Aufeinanderkittung zweier Kathetenflächen zusammengesetzt ist und somit horizontale Ausschläge des Lichtbündels in vertikale verwandelt. Hier ist von Vorteil, daß die gebräuchlichen Instrumente mit vertikalen Drehachsen Verwendung finden; etwa zwei Galvanometer, — dann stellt die Anordnung einen Oszillographen für längere Perioden dar, der auch die direkte Aufzeichnung von Vektogrammen auf den Gebieten der Pulsations- oder Erdstromuntersuchung leistet.

Der genauere Aufbau der nach dem Prinzip der Abb. 1 in Göttingen aufgestellten Vektographen ist schematisch in Abb. 3 dargestellt. Die kleine Lochblende A ($\varnothing 30 \mu$) wird mittels der Glühlampe G , des Objektivs O und des Achromaten L über die beiden Drehspiegel auf dem Schirm S ab-

gebildet, wobei der Strahlengang im Bereich der Spiegel parallel ist. Die beiden Variometer müssen gleiche Empfindlichkeit und wegen ihrer magnetischen Wechselwirkung einen größeren gegenseitigen Abstand aufweisen. Registriert wird auf Kleinbildfilm, der alle 3 Stunden ruckweise um ein Bildfeld ($25 \times 25 \text{ mm}^2$) weitertransportiert wird. Der Skalenwert ist so gewählt ($10 \gamma/\text{mm}$), daß die normalen Variationen auswertbar sind, sofern nicht bei größeren Stürmen der Lichtpunkt zeitweilig das Bildfeld verläßt. Beim dreistündlichen Bildwechsel werden von den interessierenden Störungen diejenigen mit der längsten Dauer (z. B. Bay-Störungen) höchstens einmal zerschnitten; andererseits überdeckt sich die Kurve noch nicht derartig, daß die Registrierung unter Umständen wertlos wird. Die Vektogram-

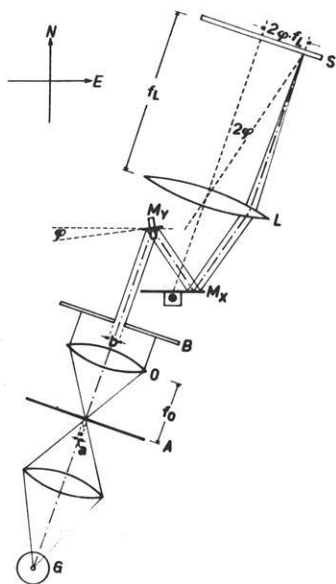


Abb. 3: Schematischer Aufbau eines Vektographen

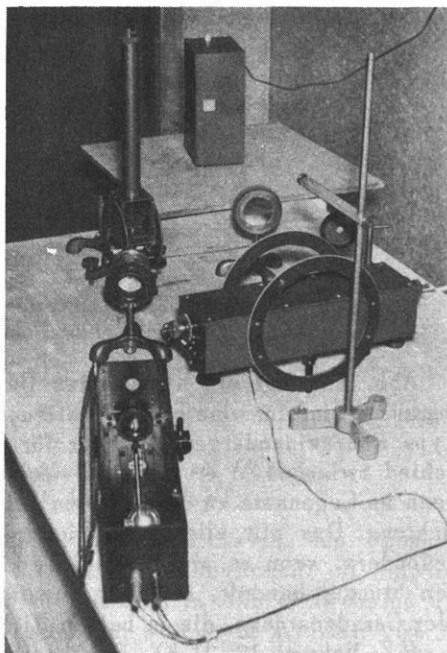


Abb. 4: XY-(Horizontal-) Vektograph

me zeigen je nach Wanderungsgeschwindigkeit des Lichtflecks wechselnde Breite (mindestens 120μ) und Schwärzung. Daher wird die Lichtstärke so bemessen, daß Störungen mit der größten Wanderungsgeschwindigkeit (z. B. s.s.c.'s) auf dem Film gerade noch auswertbar sind. Zeitmarken erscheinen nicht. Sie werden erst nachträglich nach Bedarf und Möglichkeit durch Vergleich mit der normalen Stationsregistrierung (Hauptregistrierung) angebracht.

Abb. 4 zeigt die Ausführung des Göttinger Horizontalvektographen. Als geöffneter Kasten steht links unten die Punktlichtquelle, dahinter sind Objektiv und Y -Variometer, rechts das X -Variometer und oben die automatisch transportierende Filmkassette zu sehen. In gleicher Weise ist der HZ -Vektograph zusammengestellt.

Beide Instrumente liefern seit Mitte 1957 Vektogramme. Aus ihnen wurden einige Beispiele zur Illustration ausgewählt. Das nachfolgend besprochene Material dagegen stammt aus einer vorläufigen Registrierung, die während einiger Monate des Jahres 1956 mit einem behelfsmäßigen Horizontalinstrument vorgenommen wurde.

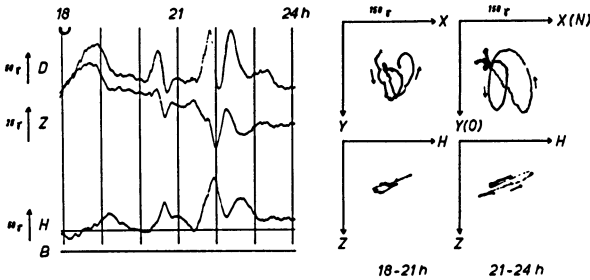


Abb. 5: Magnetische Registrierung.
Göttingen, 1958 Febr. 21., 18-24 h UT

Abb. 5 bringt ein allgemeines Beispiel. Hauptregistrierung und Vektogramme sind für eine Schleifenstörung nicht näher zu charakterisierenden Typs nebeneinandergestellt. Der für Göttingen durchaus typische Unterschied zwischen XY - und HZ -Vektogrammen fällt besonders ins Auge. Denn im Gegensatz zu den ersteren zeigen letztere eine deutliche Vorzugsrichtung. Das gilt allgemein: Die Störungen bilden im HZ -Vektogramm, besonders, wenn es sich um solche kürzerer Periode (unterhalb einer halben Stunde) handelt, in den allermeisten Fällen sehr schmale Schleifen oder Geradenstücke, die in beiden Richtungen durchlaufen werden (s. Abb. 5, HZ -Vektgr. 18-21 h). Das bedeutet, daß zu jeder Zeit während des Störungsablaufs die Störung in Z derjenigen in H annähernd proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor schwankt seinerseits augenscheinlich nur wenig um den Wert $-0,3$. Die Vorzugsrichtung ist also einigermaßen unabhängig von Tageszeit, Form und Amplitude der Störung.

Diese Erscheinung wird vor allem durch den in Norddeutschland auftretenden, von Ort zu Ort stark variierenden anomalen inneren Anteil in Z [2, 3, 4] hervorgerufen. In jüngster Zeit findet die Proportionalität von Z und H ihre Erklärung anscheinend durch die Untersuchungen von Schmücker [5]. Ihr genaueres Verhalten, insbesondere ihre Abhängigkeit

von verschiedenen Parametern (Amplitude, Periode, Tageszeit), kann nur durch eine *ins Einzelne* gehende Analyse der Vektogramme erfaßt werden.

In den Horizontalvektogrammen ist keine derartig durchgehende Gesetzmäßigkeit sichtbar. Hier fallen bei roher Betrachtung dagegen einige Störungstypen besonders auf. Ein solcher ist die *bp*-Störung, früher *p.s.c.* genannt [6] (Abb. 6). Sie tritt meistens als mehr oder weniger regelmäßige Schleife auf. Fast immer erfolgt zunächst eine rasche, ziemlich geradlinige Auslenkung mit überlagerten Pulsationen. Diese sind für die *bp*-Störung ja gerade charakteristisch. Auch aus unseren Vektogrammen läßt sich öfters erkennen, daß es sich bei ihnen ebenfalls um kleine Schleifen handelt, deren Drehsinn sich unter Umständen aus der relativen Lage der Pulsationsknötchen zur Gesamtstörung bestimmen läßt; in Abb. 6 zum Beispiel als vorwiegend positiv⁴⁾. Eine allgemeine Aussage läßt sich hier jedoch noch nicht machen.

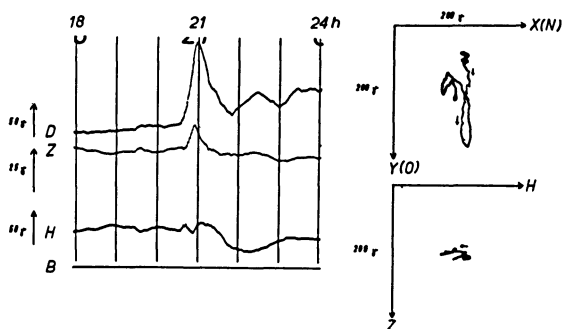


Abb. 6: Magnetische Registrierung einer *bp*-Störung.
Göttingen, 1957 Okt. 13., 18–24 h UT

Charakteristische Schleifengrößen sind etwa Drehsinn, das Azimut⁵⁾ des Maximalvektors (ϕ_M) und das Azimut der anfänglichen, oft ziemlich geradlinigen Auslenkung (ϕ_1). Von diesen sind in Abb. 7 Drehsinn und ϕ_1 für diejenigen *bp*-Störungen aufgetragen, welche in der Zeit vom 25. März bis zum 10. Nov. 1956 auftraten, wobei wegen allzu unregelmäßiger Form und zu kleiner Amplitude 12 *bp*'s nicht berücksichtigt worden sind. Neben den vor allem bekannten Eigenschaften [6] zeigt das Diagramm, daß, ziemlich scharf getrennt durch Lokalmitternacht, sowohl positiver wie negativer Drehsinn auftreten; und zwar bei gleich klarer Schleifenbildung, wie die Einzelfälle lehren. Das Anfangsazimut ϕ_1 zeigt je vor und nach Lokalmitternacht eine beachtliche Konstanz, die sich ähnlich, wenn auch nicht ganz so scharf, für ϕ_M ergeben würde. Zwischen beiden ϕ_1 -Werten

⁴⁾ Der Uhrzeigerdrehsinn wird, wie üblich, als negativ bezeichnet.

⁵⁾ Die Azimute ϕ werden in positivem Drehsinn von der *Y*-Richtung aus gerechnet.

besteht eine Differenz von etwa 170° . Diese Aussagen unterstreichen zum Teil die von *Fleischer* durchgeführten Untersuchungen [3], zum Teil stehen sie ihnen entgegen, besonders, was den Drehsinn der Schleifen betrifft.

Einen anderen in den Horizontalvektogrammen auffallenden Störungstyp stellen die hier als "Mittagsschwingungen" bezeichneten Variationen dar. Sie erscheinen (Abb. 8) an mittelgestörten Tagen in der Hauptregistrierung als ziemlich unregelmäßige Schwankungen, bei denen sich solche mit Perioden bis hinauf zu einer halben Stunde überlagern. Sie beginnen in den frühen Morgenstunden und werden gegen Abend manchmal durch Störungen längerer Periode, damit glatteren Verlaufs, und größerer Amplituden abgelöst; oft folgt auch ein Intervall relativer Ruhe. Diese Schwankungen zeigen in den Horizontalvektogrammen eine sehr deutliche Vorzugsrichtung, wie wir sie ähnlich in den Göttinger *HZ*-Vektogrammen finden. Nur ist die hier betrachtete Vorzugsrichtung stark von der Tageszeit abhängig, vor allem, was ihr Auftreten an sich betrifft. Sie schwankt etwa um den Wert $\phi = 150^\circ$.

Das Ergebnis einer ersten Untersuchung bringt Abb. 9 im Diagramm. Es zeigt die Häufigkeitsverteilung der in den Monaten August bis November 1956 aufgetretenen Mittagsschwingungen, bezogen auf ihre Azimutwerte

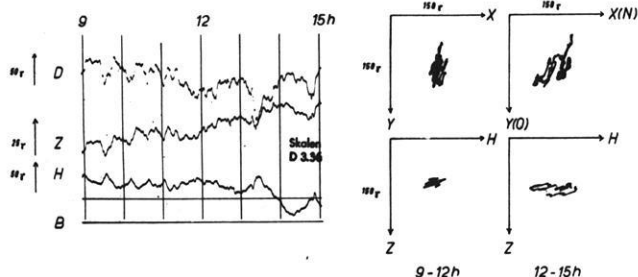


Abb. 8: Magnetische Registrierung von Mittagsschwingungen. Göttingen, 1958 Febr. 17., 9-15 h UT

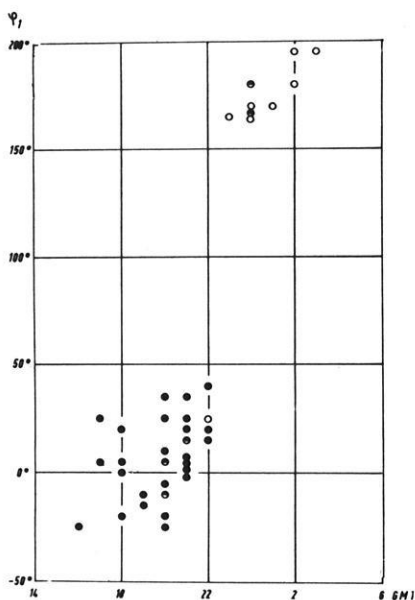


Abb. 7: Anfangsazimut und Drehsinn von 38 (aus 50) ausgewählten *bp*-Störungen, 25. März - 10. November 1956, Göttingen. ● positiver, ○ negativer, ◐ unbestimmter Drehsinn

(der Wertevorrat reicht von 0° bis 180°), geordnet nach Tagesachteln und zwei Teilintervallen der erwähnten vier Monate (unter ihnen konnte der November nicht mehr vollständig berücksichtigt werden). In das Diagramm wurden grundsätzlich alle annähernd linearen Schwingungen oder länglichen Schleifen aufgenommen. Um so beachtlicher ist, daß im Azimut die Werte zwischen 0° und 100° überhaupt nicht auftreten. Angemerkt sei, daß in den betrachteten Tagesvektogrammen kaum ein Beispiel eines Störungstyps beobachtet wurde, der nicht unter diese Kategorie fiel. Zur Nachtzeit dagegen kamen nur selten solche Störungen vor. Schleifen und andere Formen beherrschten das Bild.

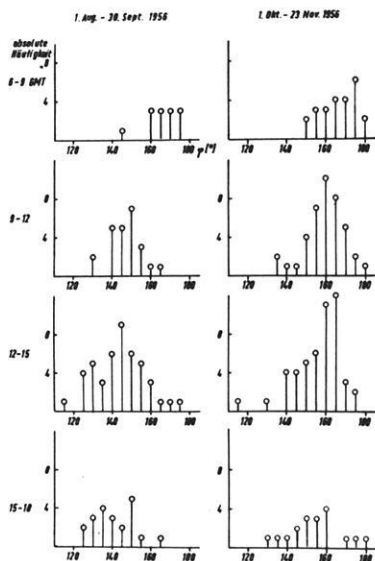


Abb. 9: Richtungsverteilung von Mittagsschwingungen in Horizontalvektogrammen, 1. August - 23. November 1956, Göttingen

Abb. 9 läßt erkennen, daß die Mittagsschwingungen am häufigsten im Tagesintervall 12-15 h UT auftreten und ihr Azimut um einen mittleren Wert schwankt, der anscheinend mit wachsender Tageszeit abnimmt, — der Größenordnung nach um 3° pro Stunde. Im Laufe des Tages drehen die Mittagsschwingungen also langsam im Uhrzeigersinn (negativ). Ferner liegen die Mittelwerte für Oktober und November höher als die der beiden Vormonate; wegen des geringen Materialumfangs sollen daraus jedoch keine Schlüsse, etwa bezüglich eines jahreszeitlichen Ganges, gezogen werden.

Neben der Aufgabe, die Mittagsschwingungen an einem umfangreicheren Material, auch einmal an anderen Stationen genauer zu untersuchen, bleibt die Frage nach ihrer Natur: Unsere Schwankungen überlagern sich im Ho-

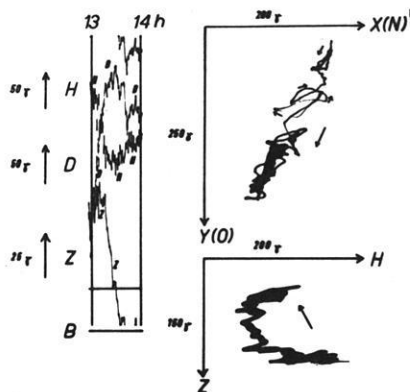


Abb. 10: Magnetische Registrierung während eines erdmagnetischen Sturmes Göttingen, 1958 Febr. 11., 13-14 h UT

horizontalvektogramm der Schleife des Sq -Ganges; da sie, bezogen auf den Nachtpunkt dieser Schleife, nicht jederzeit in Richtung des Radiusvektors liegen, – was für solar-flare-effects in der Tat zutrifft –, handelt es sich bei ihrer Ursache sicherlich nicht um Intensitätsschwankungen des Sq -Stromsystems. Natürlich kommt für eine Erklärung wegen der Zeitabhängigkeit der Erscheinung auch nicht die Annahme einer anomalen Induktion in Frage, wie sie sich in den Göttinger HZ -Vektogrammen manifestiert.

Auf folgende Zusammenhänge sei aber noch hingewiesen: Die s.s.c.-Störvektoren zeigen in den Horizontalvektogrammen ein ziemlich konstantes Azimut von etwa 140° ; der Richtung des geomagnetischen Meridians würde ein Wert von 108° entsprechen (Ψ in Göttingen ungefähr -18°). Weiter fällt auf, daß der Registrierpunkt während aller beobachteten Stürme im Tagesintervall 12–15 h UT, und wohl ausschließlich in diesem, bei unregelmäßiger Bewegung im Kleinen eine schmale Fläche überstreicht, deren Längsachse ungefähr eine Richtung entsprechend der der Mittagsschwingungen aufweist (Abb. 10). Aber auch Einzelstörungen zeigen oft dieselbe Vorzugsrichtung (Abb. 11).

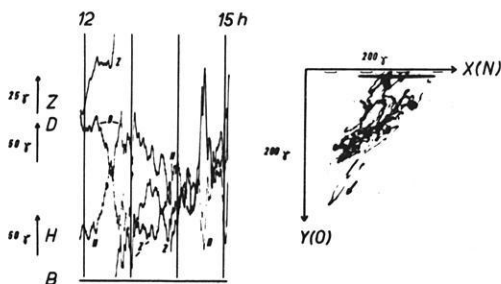


Abb. 11: Magnetische Registrierung während eines erdmagnetischen Sturmes Göttingen, 1957 Sept. 3., 12–15 h UT

Im allgemeinen ist die Auswertung von Vektogrammen, die während erdmagnetischer Stürme aufgenommen wurden, schwierig, manchmal unmöglich. Betrachtung einzelner Fälle ergab bislang lediglich auch für kürzere Perioden, – und gerade für diese –, daß positiver Drehsinn den negativen bei weitem überwiegt. Für längere Perioden hat Sangster [7] schon vor längerer Zeit, auf umfangreichem Material fußend, erstmalig diese Frage untersucht. Er machte die gleiche Aussage und fand, daß positiver Drehsinn vor, negativer nach Lokalmitternacht vorherrscht.

Die vektographische Registrierung war zunächst ein Versuch. Eine rohe Auswertung des ersten Materials erbrachte schon lohnende Ergebnisse; insbesondere traten die Mittagsschwingungen als eigenartiger Variationstyp in den Blick. So ist geplant, bald detailliertere Untersuchungen in gleicher Richtung folgen zu lassen.

Literatur

- [1] *Strobach, K.*: Zum Studium der mikroseismischen Bodenunruhe in Hamburg. Ztschr. f. Geoph., 21, 190-214, 1955; auch 23, 306-315, 1957.
- [2] *Bartels, J.*: Erdmagnetisch erschließbare lokale Inhomogenitäten der elektrischen Leitfähigkeit im Untergrund. Nachr. Akad. d. Wiss., Göttingen, Phys.-Math. Kl., Abtlg. IIa, Nr. 5, 95-100, 1954.
- [3] *Fleischer, U.*: Charakteristische erdmagnetische Baystörungen in Mitteleuropa und ihr innerer Anteil. Ztschr. f. Geoph., 20, 120-136, 1954.
- [4] *Wiese, H.*: Tiefentellurik. Abh. d. Geom. Inst. u. Obs. Potsdam-Niemegk, Nr. 18, 1-36, 1956.
- [5] *Schmucker, U.*: Ergebnisse der erdmagnetischen Tiefensondierung in Norddeutschland. Vortrag auf der 22. Jahrestagung der Deutsch. Geoph. Ges., Leipzig, 1958.
- [6] *Meyer, O.*: Über eine besondere Art von erdmagnetischen Baystörungen. Dtsch. Hydr. Ztschr., Bd. 4, Heft 1/2, 61-65, 1951.
- [7] *Sangster, R. B.*: On the rotatory character of some terrestrial magnetic disturbances at Greenwich, and on their diurnal distribution. Proc. Roy. Soc. London (A), 84, 85-92, 1910.

Die Konstruktion gekrümmter Reflexionshorizonte bei gegebener variabler Geschwindigkeitsverteilung im Raum

Von E. Graeser ¹⁾, W. Lode und G. Pott, Hannover ²⁾

Zusammenfassung: In einer früheren Arbeit [1] der Verfasser wurde ein Verfahren angegeben, das die Tiefenberechnung beliebig gekrümmter seismischer Reflexionshorizonte unter Berücksichtigung der Strahlenbrechung im Raume gestattet. Dabei war angenommen worden, daß die Strahlen zwischen je zwei Geschwindigkeitsgrenzflächen durch gerade Linien beschrieben werden können. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht haltbar, wenn zwischen den brechenden Horizonten variable Geschwindigkeiten angenommen werden müssen. Die vorliegende Arbeit gibt ein Näherungsverfahren für die Berücksichtigung variabler Geschwindigkeiten und eine Abschätzung der Güte der Näherung.

Abstract: In an earlier paper [1], the authors described a method which permits the depth calculation of arbitrarily curved seismic reflection horizons with regard to refraction of rays, three-dimensional case. It had been assumed in that method that the rays between two velocity boundaries may be described as straight lines. This assumption, however, is untenable if variable velocities must be assumed between the refracting horizons. The present paper describes an approximation method for the regard to variable velocities and an estimation of the grade of the approximation.

Einführung

Die Geschichte der Tiefenberechnung aus Laufzeitmessungen weist folgende Stationen auf:

Die einfachste und älteste Vorstellung wird heute noch im Echolotverfahren bei der Schifffahrt angewendet. Man geht dabei von der Annahme aus, daß eine vom Schiff ausgesandte, senkrecht zur Wasserfläche nach unten abgehende Schallwelle auf einen annähernd horizontalen Meeresboden trifft und nach Reflexion auf dem Ankunftswege senkrecht nach oben zurückläuft.

Eine Verbesserung dieser Vorstellung wurde bei der profilmäßigen Darstellung in der Reflexionsseismik durch die sogenannte Spiegel- und Tan-

¹⁾ E. Graeser, Mathematisches Institut der Universität Göttingen. Wissenschaftlicher Mitarbeiter der PRAKLA G.m.b.H., Hannover.

²⁾ W. Lode und G. Pott, PRAKLA G.m.b.H., Hannover.

gentenkonstruktionsmethode erreicht. Diese Verfahren berücksichtigen, daß der reflektierte Schallstrahl nicht von einer horizontalen Schicht, sondern vielmehr von einer geneigten Grenzfläche reflektiert wird. Dabei geht man von der nicht immer erfüllbaren Voraussetzung aus, daß die Echwellen die Profilebene nicht verlassen.

In der bereits zitierten Arbeit [1] der Verfasser wird die Tiefenberechnung nicht mehr in einer Profilebene durchgeführt. Ausgehend von einer kartenmäßigen Darstellung der gemessenen Zeiten, dem Isochronenplan, erfolgt die Bestimmung der Lage der beliebig im Raum liegenden Elemente aus der Länge der in sich selbst reflektierten Schallstrahlen, die im folgenden als Lotstrahlen bezeichnet werden, und der räumlichen Lage der Lotstrahlen.

I. Die Betrachtung der Ergebnisse von Geschwindigkeitsmessungen in vergleichbaren Bohrungen zeigt, daß sich die Geschwindigkeit häufig an bestimmten Grenzflächen (Gleithorizonten) sprunghaft ändert; im Bereich zwischen je zwei Gleithorizonten werden dagegen im allgemeinen annähernd stetige Geschwindigkeitsänderungen beobachtet. Um auch die stetigen Geschwindigkeitsänderungen bei der Berechnung seismischer Horizonte berücksichtigen zu können, ist es notwendig, dreidimensional veränderliche Geschwindigkeitsverteilungen zwischen je zwei Gleithorizonten einzuführen.

Bei dieser räumlich gegebenen Geschwindigkeitsverteilung gibt es Flächen gleicher Geschwindigkeit mit $v(X, Y, Z) = \text{konst.}$, die im folgenden als Niveauflächen bezeichnet werden sollen.

Wir denken uns $n + 1$ solcher Niveauflächen mit $v(X, Y, Z) = v_0 \dots, v_{n-1}, v_n$, wobei $v_k = v_0 + \sum_{\nu=1}^k \Delta_\nu v$ ist, als Tiefenlinienpläne

vorgelegt; der Abstand der Niveauflächen soll dabei so eng gewählt sein, daß die Geschwindigkeit zwischen zwei aufeinander folgenden Niveauflächen als konstant betrachtet werden kann.

Die zu wählende Schrittweite Δv wird von dem gewünschten Genauigkeitsgrad abhängen.

Fassen wir nun die Niveauflächen mit $v(X, Y, Z) = \text{konst.}$ als *zusätzliche* brechende Horizonte zwischen den seismisch vermessenen Gleithorizonten auf, so ist das Problem auf das uns bekannte, nämlich die Aufgabe konstanter Geschwindigkeit, generell zurückgeführt.

In einigen Fällen gelingt es, den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ bei unbegrenzter Verfeinerung der Schichtgeschwindigkeitsintervalle durchzuführen, z.B. bei der Geschwindigkeitszunahme $v = az + v_0$.

II. Bei der praktischen Anwendung läuft die Zurückführung des allgemeinen Problems auf das spezielle konstanter Schichtgeschwindigkeit mit der Schwierigkeit parallel, routinemäßig die Brechung an vielen Horizonten bewerkstelligen zu können. Bei dem bisher benutzten Verfahren wurde bei der Brechung jeweils eine Reduktion der gemessenen Zeiten auf die brechende Schicht durchgeführt. Die brechende Schicht wurde dann beim nächsten Rechengang als "neue Erdoberfläche" aufgefaßt, und es mußten nach jeder Brechung auf die "neue Erdoberfläche" bezogene "Restlotpläne" neu gezeichnet werden. Der hierdurch anfallende Arbeitsaufwand führte dazu, daß die Brechung nur an vier oder weniger Horizonten wirtschaftlich und hinreichend genau vorgenommen werden konnte.

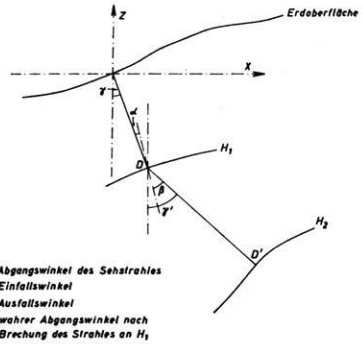


Abb. 1: Zum Brechungsgesetz.

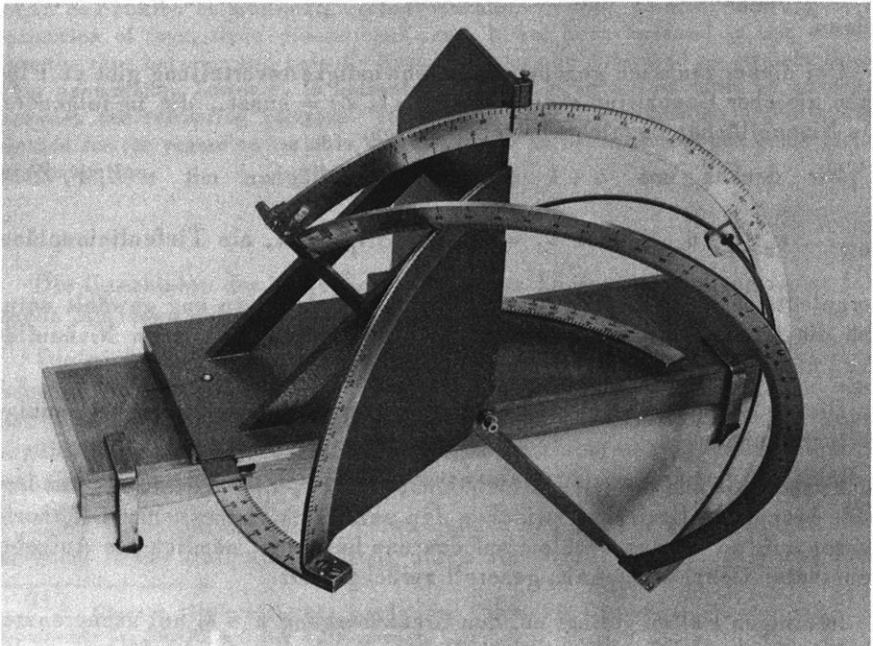


Abb. 2: Der Snelliusrechner

III. Die Herstellung der Restlotpläne kann vermieden werden, wenn – wie zunächst im ebenen Fall (siehe Abb. 1) veranschaulicht werden soll – beim ersten Arbeitsgang an dem Durchstoßpunkt D nicht nur, wie bisher üblich, die Restzeiten, sondern auch die nach *Snellius* berechneten wahren Abgangswinkel vermerkt werden.

Im folgenden Arbeitsgang wird dann, *ohne* daß ein Restlotplan gezeichnet wurde, direkt aus den Angaben bei D der nächste Durchstoßpunkt D' festgestellt. Während bei dem alten Verfahren die Ausgangspunkte für den neuen Rechengang normalerweise nicht mit den durch den abgeschlossenen Rechengang bestimmten Punkten D zusammenfielen, ist dieses bei dem neuen Verfahren der Fall. Da die Projektion des Schallstrahles in die Kartenebene gezeichnet wird, ist der Strahlengang auch nach Abschluß der Rechnung leicht kontrollierbar.

IV. Zur bequemen Ablesung der wahren Abgangswinkel, mit denen jeder Durchstoßpunkt D belegt wird, ist von den Verfassern ein mechanisches Winkelbestimmungsgerät entwickelt worden (siehe Abb. 2).

V. Das zur Berücksichtigung nicht konstanter Geschwindigkeiten vorgeschlagene Verfahren ist ein Näherungsverfahren. Die folgende Abschätzung soll Auskunft darüber geben, wie dicht die zusätzlichen brechenden Horizonte gewählt werden müssen, wenn die Unsicherheit des Ergebnisses einen bestimmten Wert nicht überschreiten soll. Zweckmäßigerweise werden die Betrachtungen zunächst für den ebenen Fall durchgeführt.

Bei einer beliebig gegebenen Geschwindigkeitsverteilung im Erdinneren wird der Echostrahl, der die Erdoberfläche unter dem Winkel γ verläßt, eine gekrümmte Bahn beschreiben. Es soll zunächst der Krümmungsradius ρ der Bahnkurve berechnet werden.

Gegeben sei die (X, Z) -Ebene mit dem gegebenen Geschwindigkeitsfeld $v = v(X, Z)$; nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt in jedem Bahnpunkt:

$$(1) \quad \frac{\sin(\alpha + \Delta \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{v + \Delta v}{v},$$

wobei unter α der Winkel zwischen einfallendem Strahl und der Normalen auf der Fläche $v(X, Z) = \text{konst.}$ verstanden sein soll. Für die folgenden Betrachtungen wird ein x, z -Koordinatensystem eingeführt; die z -Achse dieses Koordinatensystemes sei dadurch bestimmt, daß sie in jedem Bahnpunkt in Richtung des grad v zeigt. Die x -Achse sei orthogonal zur z -Achse (siehe Abb. 3).

Für kleine $\Delta \alpha$ folgt aus (1):

$$(2) \quad \Delta \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\Delta v}{v}$$

Außerdem ist $\Delta \alpha$ nach Abb. 3 gegeben durch:

$$(3) \quad \Delta \alpha = \frac{\Delta s}{\rho}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$(4) \quad \rho = \frac{v \cdot \cos \alpha \cdot \Delta s}{\sin \alpha \cdot \Delta v}$$

Führt man den Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes ein, so ergibt sich aus (4):

$$(5) \quad \rho = \frac{v}{|\text{grad } v|} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

Unter Benutzung von Abb. 3 und Gleichung (5) erhält man die Koordinaten des zum Bahnelement Δs gehörenden Krümmungsmittelpunktes:

$$(6) \quad x_{\rho} = - \frac{v}{|\text{grad } v|} \cdot \text{ctg } \alpha$$

$$z_{\rho} = - \frac{v}{|\text{grad } v|}$$

Wegen $dt = \frac{ds}{v}$ kann mit $ds = \rho \cdot d\alpha$ und $v = \rho \cdot |\text{grad } v| \cdot \sin \alpha$ geschrieben werden:

$$(7) \quad dt = \frac{d\alpha}{|\text{grad } v| \cdot \sin \alpha}$$

oder nach Integration:

$$(8) \quad T = \int_{\alpha}^{\alpha+\psi} \frac{d\alpha}{|\text{grad } v| \cdot \sin \alpha}$$

Da $\alpha + \psi < 90^\circ$ und $\alpha \neq 0$ vorausgesetzt werden soll, ergibt die Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$(9) \quad T = \frac{1}{|\text{grad } v|_M} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+\psi} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{|\text{grad } v|_M} \cdot \lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha+\psi}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}}, \quad 3)$$

wobei $|\text{grad } v|_M$ ein geeigneter Mittelwert sein soll.

3) Unter lg wird log nat verstanden.

Nach der Zeit T soll auf der Bahnkurve der Punkt $B(x_B, z_B)$ erreicht werden. Für kleine Winkel ψ kann die Bahnkurve durch einen Kreisbogen angenähert werden. Unter Benutzung der Gleichung (6) erhält man für die Koordinaten des Punktes B (siehe Abb. 4):

$$x_B = \frac{v_0}{|\text{grad } v_0|} \cdot \frac{\cos(\alpha + \psi)}{\sin \alpha} - \frac{v_0}{|\text{grad } v_0|} \cdot \text{ctg } \alpha$$

$$z_B = \frac{v_0}{|\text{grad } v_0|} \cdot \frac{\sin(\alpha + \psi)}{\sin \alpha} - \frac{v_0}{|\text{grad } v_0|}$$

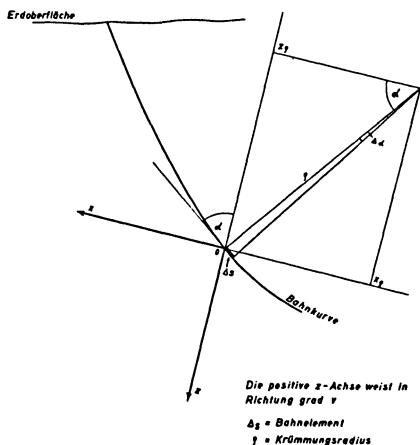


Abb. 3

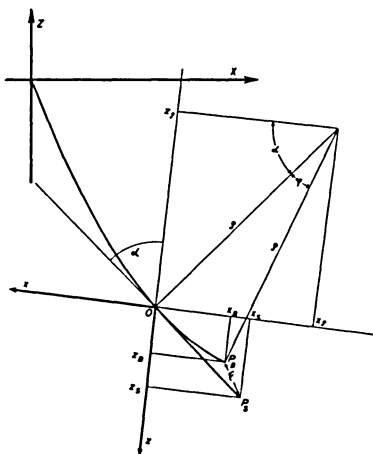


Abb. 4

Bei dem vorgeschlagenen Näherungsverfahren wird angenommen, daß die Geschwindigkeit stückweise konstant ist. Folglich wird die Bahnkurve durch eine Gerade angenähert, die die Bahnkurve in dem Punkt $(0,0)$ tangiert. Läuft man mit der im Punkt $(0,0)$ gültigen Geschwindigkeit v_0 auf der erwähnten Geraden in das Erdinnere, so erreicht man nach der Zeit T den Punkt $S(x_S, z_S)$, für dessen Koordinaten gilt:

$$(11) \quad x_S = -v_0 \cdot T \cdot \sin \alpha; \quad z_S = v_0 \cdot T \cdot \cos \alpha$$

Wird für T der Ausdruck (9) eingesetzt, so erhält man aus (11):

$$(12) \quad x_S = -\frac{v_0}{|\text{grad } v|_M} \cdot \lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha + \psi}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \alpha$$

$$z_S = \frac{v_0}{|\text{grad } v|_M} \cdot \lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha + \psi}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \alpha$$

Nach dem gleichen Zeitverbrauch T erreicht man auf der Bahnkurve den Punkt $B (x_B, z_B)$, auf der die Bahnkurve annähernden Geraden den Punkt $S (x_S, z_S)$. Zur Berechnung des Abstandes F zwischen den Punkten S und B (siehe Abb. 4) wird zunächst die Differenz der Koordinaten gebildet.

$$(13) \quad x_S - x_B = \frac{v_0}{|\text{grad } v|_N} \left[-\lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha + \psi}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \alpha - \frac{\cos (\alpha + \psi)}{\sin \alpha} + \text{ctg } \alpha \right]$$

$$(14) \quad z_S - z_B = \frac{v_0}{|\text{grad } v|_N} \left[+\lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha + \psi}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \alpha - \frac{\sin (\alpha + \psi)}{\sin \alpha} + 1 \right]$$

$|\text{grad } v|_N$ ist hierbei ein anderer, geeigneter Mittelwert. Unter Benutzung des Satzes von *Pythagoras* ergibt sich für hinreichend kleine Werte von ψ :

$$(15) \quad F = \frac{v_0}{|\text{grad } v|_N} \left[\frac{\sin \psi}{\sin \alpha} - \lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha + \psi}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}} \right]$$

Erfahrungsgemäß ist die Änderung des Gradienten von $v (X, Y, Z)$ in der Seismik stets sehr klein. Folglich ist der Krümmungsradius der Bahnkurve auf kurze Entfernungen konstant, so daß $\rho_N = \rho (0,0) = \rho_0$ gesetzt werden kann.

Unter Berücksichtigung von (5) kann Gleichung (15) in die Form gebracht werden:

$$(16) \quad F = \rho_0 \left[\sin \psi - \sin \alpha \cdot \lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha + \psi}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}} \right]$$

Die durch Gleichung (16) gegebene Größe F ist der Fehler, der bei Benutzung des Näherungsverfahrens bei der Lagebestimmung des reflektierenden Elementes gemacht wird. Er wird klein, wenn die zusätzlichen bre-

chenden Flächen dicht liegen. Wird Gleichung (15) als Diagramm dargestellt, so kann diesem leicht entnommen werden, wie groß der Abstand der zusätzlichen brechenden Flächen gewählt werden darf, wenn die durch Benutzung des Näherungsverfahrens verursachte Lageabweichung einen bestimmten Wert nicht überschreiten soll.

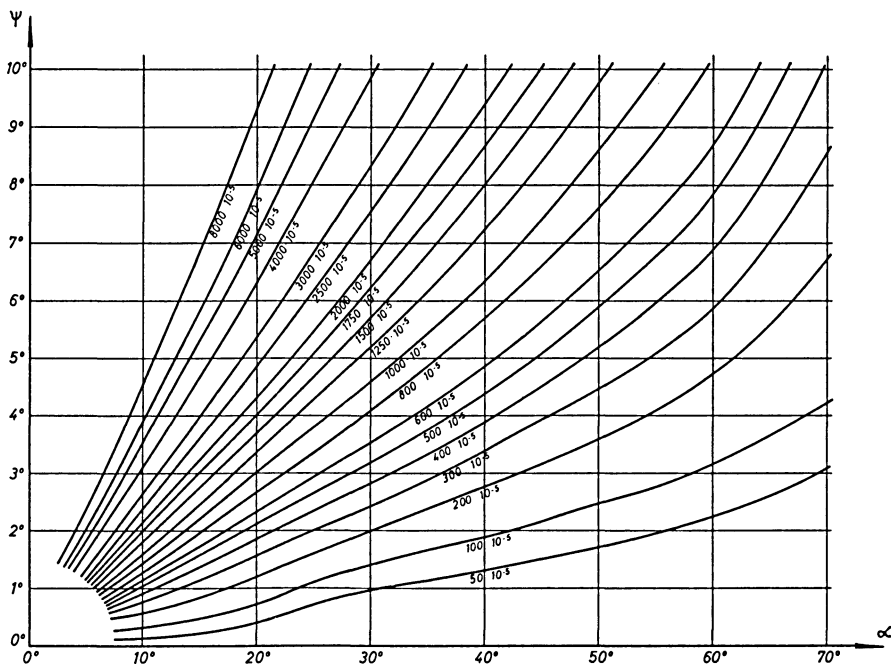


Abb. 5: Gezeichnet sind Linien $F \frac{|\text{grad } v|}{v_0} = \text{Konst.}$

Zur Anwendung des Diagramms wird der Quotient aus den bekannten Größen F , v_0 und $|\text{grad } v|$ gebildet. Die zu dem errechneten Quotienten gehörende Kurve wird aus der Kurvenschar ausgewählt und dann der zum Einfallswinkel α gehörende zulässige Winkel ψ abgelesen. Unter Benutzung der Gleichung (9) kann dann die zulässige Zeit T aus ψ errechnet werden.

Der Fall $\alpha = 0$ muß besonders behandelt werden. $\alpha = 0$ (d.h. sehr kleine Winkel α) bedeutet, daß der ankommende Strahl die Richtung des Geschwindigkeitsgradienten angenommen hat; für einen solchen Fall wissen wir aber, daß der Strahl "gradlinig" ist.

Wir können also schreiben:

$$(17) \quad T = \int_0^{z_B} \frac{dz}{v(x, z)} = \int_0^{z_B} \frac{dz}{v_0 + \alpha z + \text{höhere Potenzen}}$$

Wird wieder vorausgesetzt, daß die Änderung des Gradienten verschwindend klein ist, ergibt die Integration der Gleichung (17):

$$(18) \quad z_B = \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} \cdot v_0$$

Bei Annahme konstanter Geschwindigkeit ergibt sich dagegen:

$$(19) \quad z_s = v_0 T.$$

Der Fehler ist also:

$$(20) \quad F = v_0 \cdot T \left[\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} - 1 \right] = v_0 \cdot T \left[\frac{\alpha T}{2!} + \frac{(\alpha T)^2}{3!} + \text{höhere Potenzen} \right]$$

Unter Vernachlässigung höherer Potenzen kann dafür geschrieben werden:

$$(21) \quad F = v_0 \cdot T^2 \cdot \frac{|\text{grad } v_0|}{2} \quad \text{für} \quad \alpha = 0 \quad \text{ist} \quad \alpha \approx |\text{grad } v_0|$$

Der PRAKLA, Hannover, danken die Verfasser für die Genehmigung, die vorliegende Arbeit veröffentlichen zu dürfen, Herrn Dr. v. Helms außerdem für wertvolle Anregungen.

Literatur

- [1] Graeser, E., Lode, W. und Pott, G.: "Representation of Depth-Contour Maps of Arbitrarily Curved Reflection Horizons, Including Refraction of Rays, Three-Dimensional Case", Geophysical Prospecting, Vol. V, No. 2, P. 135-141.

Die Schwere auf dem Niveausphäroid

(Zum Widerspruch eines Ergebnisses von G. H. Darwin und E. A. Ansel)

Von G. Oliwa, Wien ¹⁾

Zusammenfassung: *E. A. Ansel* hat in seiner "Theorie des irdischen Schwerefeldes" gegen *G. H. Darwin* den Vorwurf erhoben, dieser habe in seiner Theorie der Erdfigur den zweiten Koeffizienten β_4 der theoretischen Schwere falsch berechnet. Es wird nachgewiesen, daß der Irrtum bei *Ansel* liegt, wodurch der Darwin'sche Wert für β_4 bestätigt erscheint.

Abstract: *E. A. Ansel* has reproached *Darwin's* Theory of the Figure of the Earth with a mistake in the calculation of the second parameter β_4 of the formula for the theoretical gravity. It is shown, that in contrary *Ansel* made a mistake and therefore *Darwin's* result is right.

Bekanntlich läßt sich der Koeffizient 4.0. in der Formel für die normale Schwere derzeit noch nicht mit der nötigen Sicherheit aus den reduzierten Beobachtungswerten ableiten. Deshalb wurde er in der Internationalen Schwereformel durch die Forderung des Niveauellipsoides festgelegt. Es hat aber auch nicht an mehrfachen Versuchen gefehlt, die Gestalt der Normalfigur der Erde aus hypothetischen Annahmen über die Dichteverteilung im Erdinnern abzuleiten und damit auch den fraglichen Koeffizienten festzulegen. Trotz verschiedener Annahmen haben so *Wiechert*, *Darwin*, *Klussmann* und *H. Haalck* Werte für β_4 gefunden, die sämtlich nahe bei $+280 \cdot 10^{-7}$ liegen. Nun glaubte *Ansel*, in der Darwinschen Rechnung einen Fehler gefunden zu haben, dessen "Berichtigung" auf den gänzlich abweichenden Wert $\beta_4 = -68 \cdot 10^{-7}$ führt. Dieses verdächtige Ergebnis zu überprüfen und die Entscheidung zwischen *Darwin* und *Ansel* herbeizuführen, ist der Zweck der vorliegenden kleinen Untersuchung, zu der mich Herr Professor *K. Ledersteger* angeregt hat, der mir übrigens mitteilte, daß auch Herr Prof. *K. Jung* seine Bedenken teilt. Obwohl sich dieser Widerspruch überraschender Weise durch äußerst elementare Mittel zugunsten *Darwins* beheben läßt, sei es gestattet, den Sachverhalt in extenso darzulegen.

Bekanntlich kann die Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentials der Schwerkraft formal in

¹⁾ *G. Oliwa*, Institut für höhere Geodäsie der Technischen Hochschule Wien, Wien IV, Karlsplatz 13.

$$(1) \quad W = U_n + T_n = W_0$$

zerlegt werden und nennt man dabei U_n nach *Helmert* das "Niveausphäroid n -ten Ranges" und T_n die zugehörige "Restfunktion". *Helmert* setzt H. G. II, S. 80 für die theoretische Schwere auf seinem Rotations-Niveausphäroid U_4 die bis auf Glieder 6.0 gültige Formel

$$(2) \quad \gamma_0 = \gamma_0 (1 + \beta_2 \sin^2 \phi + \beta_4 \sin^4 \phi) = \gamma_0 (1 + \beta \sin^2 \phi - \beta_4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi)$$

an, in der ϕ die geographische Breite bedeutet. Diese Verallgemeinerung der Newtonschen Schwereformel läßt sich unter Einführung der geozentrischen Poldistanz θ gemäß

$$(3) \quad \sin^2 \phi = \cos^2 \theta + 4 a \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

leicht in die Form bringen:

$$(3) \quad \gamma = \gamma_0 (1 + \beta \cos^2 \theta + \beta'_4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta),$$

die sowohl *Darwin* [1] wie *Ansel* [2] verwenden. Für die Größen β und β'_4 finden beide Forscher übereinstimmend:

$$(4) \quad \beta = \frac{5}{2} n - a - \frac{17}{14} n a - \frac{2}{7} f_1$$

$$\beta'_4 = \frac{15}{2} n a - \frac{7}{2} a^2 + 3 f_1 .$$

In diesen Ausdrücken ist n das Verhältnis von Fliehkraft zur Schwere auf dem Äquator, a die geometrische Abplattung des Niveausphäroides und f_1 der sogenannte "Formparameter", der die Abweichung des Niveausphäroides vom achsengleichen Rotationsellipsoid charakterisiert und der aus einer bestimmten Annahme über die Dichteverteilung im Erdinnern – *Darwin* und *Ansel* legen die Rochesche Dichteformel zugrunde – berechnet werden kann. Ist nämlich l der Radiusvektor des Niveausphäroides, s der Radiusvektor des achsengleichen Rotationsellipsoides, so ist die maximale Erhebung des Sphäroides über das Ellipsoid unter 45° Breite durch

$$(5) \quad (l - s)_m = \frac{a}{4} f_1 = \frac{a}{4} \left[\frac{5}{2} a^2 - a \beta - \delta \right]$$

gegeben, wobei der zweite Ausdruck angegeben wurde, um den Zusammenhang des Formparameters f_1 mit dem Helmerischen Parameter δ (H. G. II, S. 80) klar herauszustellen.

Mit fast denselben Ausgangswerten:

$$\text{Darwin: } a = 1 : 298; \quad n = 1 : 288,41; \quad f_1 = -20,7 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{Ansel: } a = 1 : 297; \quad n = 1 : 288; \quad f_1 = -19,5 \cdot 10^{-7}$$

finden nun *Darwin* und *Ansel* die eingangs erwähnten stark divergierenden Wert für den Koeffizienten β_4 der Formel (2). *Ansel* glaubte nämlich, bei *Darwin* einen Fehler in der Umrechnung der geozentrischen Poldistanz in die geographische Breite entdeckt zu haben. Es läßt sich aber sehr leicht zeigen, daß der Irrtum bei *Ansel* liegt.

Ausgehend von den Definitionen für die Abplattung und die erste numerische Exzentrizität

$$a = \frac{a-b}{a}; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

findet man leicht

$$(6) \quad e^2 = 2a - a^2.$$

Ferner folgt aus der bekannten Parameterdarstellung des Ellipsoides

$$x = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}; \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}.$$

für die geozentrische Breite ψ

$$(7) \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi = (1 - e^2) \operatorname{tg} \phi,$$

woraus man in Verbindung mit (6) und unter Einführung der geozentrischen Poldistanz $\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ findet:

$$(8) \quad \operatorname{cotg} \theta = (1 - a)^2 \operatorname{tg} \phi.$$

Der Fehler bei *Ansel* besteht nun darin, daß er irrtümlicherweise mit der falschen Formel

$$(8a) \quad \operatorname{cotg} \theta = (1 - a) \operatorname{tg} \phi$$

weiterrechnet. Auf elementarem Wege erhält man aus (8)

$$\sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \phi}{1 + [(1 - a)^4 - 1] \sin^2 \phi}$$

$$(9) \quad \cos^2 \theta = \frac{(1 - a)^4 \sin^2 \phi}{1 + [(1 - a)^4 - 1] \sin^2 \phi}$$

und mit der Substitution

$$u = [(1 - \alpha)^4 - 1] \sin^2 \phi$$

folgt, da $|u| \leq 1$ ist,

$$(10) \quad \cos^2 \theta = \frac{(1 - \alpha)^4}{[(1 - \alpha)^4 - 1]} \cdot \frac{u}{(1 + u)} = \frac{(1 - \alpha)^4}{[(1 - \alpha)^4 - 1]} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{n+1}.$$

Beachtet man, daß α und β Größen 2.0. sind und daß $\cos^2 \theta$ in Formel (3) mit β multipliziert ist, so braucht bis auf Glieder 6.0. in der Reihe (10) nur die erste Potenz von α berücksichtigt zu werden, was sofort die Beschränkung auf die beiden ersten Glieder der Reihe gestattet:

$$\begin{aligned} (11 \text{ a}) \quad \cos^2 \theta &= (1 - \alpha)^4 [\sin^2 \phi - [(1 - \alpha)^4 - 1] \sin^4 \phi] = \\ &= (1 - \alpha)^4 [\sin^2 \phi - (1 - \alpha)^4 \sin^4 \phi + \sin^4 \phi] = \\ &= (1 - 4\alpha) [\sin^2 \phi + 4\alpha \sin^4 \phi] = \\ &= \sin^2 \phi - 4\alpha \sin^2 \phi \cos^2 \phi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber unmittelbar:

$$(11 \text{ b}) \quad \sin^2 \theta = \cos^2 \phi + 4\alpha \sin^2 \phi \cos^2 \phi.$$

Demgegenüber erhält *Ansel* aus (8 a) die falschen Relationen

$$\cos^2 \theta = \sin^2 \phi - 2\alpha \sin^2 \phi \cos^2 \phi$$

$$\sin^2 \theta = \cos^2 \phi + 2\alpha \sin^2 \phi \cos^2 \phi.$$

Die Umrechnung der Schwereformel (3) von geozentrischen Poldistanzen auf geographische Breiten führt mit (11) auf folgenden Zusammenhang:

$$\beta \cos^2 \theta + \beta'_4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \beta \sin^2 \phi - (4\alpha\beta - \beta'_4) \sin^2 \phi \cos^2 \phi,$$

d. h. es ist gemäß (2)

$$(12) \quad \beta_4 = 4\alpha\beta - \beta'_4$$

und in weiterer Folge gemäß (4) mit derselben Genauigkeit

$$(12 a) \quad \beta_4 = \frac{5}{2} \alpha n - \frac{1}{2} \alpha^2 - 3 f_1,$$

nicht nur in voller Übereinstimmung mit *Darwin*, sondern auch mit *Helmert* (H. G. II, Seite 82):

$$(13) \quad \beta_4 = 3 \delta + 4 \alpha \beta - 7 \alpha^2,$$

wenn man den zweiten Teil der Doppelgleichung (5) und das Clairautsche Theorem in seiner einfachsten Gestalt $(\alpha + \beta) = 5n/2$ beachtet.

Abschließend sei nochmals betont, daß bisher immer der Formparameter f_1 entweder aus einem hypothetischen Dichtegesetz abgeleitet oder willkürlich Null gesetzt wurde und erst hieraus nach (12 a) β_4 berechnet wurde. Kürzlich konnte jedoch *K. Ledersteger* [3] zeigen, daß β_4 den Vorrang vor f_1 oder δ besitzt und völlig hypothesenfrei, d. h. völlig unabhängig von der Dichteverteilung im Erdinnern bestimmt werden kann.

Literatur

- [1] *Darwin, G. H.*: "Theory of the Figure of the Earth Carried to the Second Order of Small Quantities", Monthly Not. of R. A. S., London 1899, p. 96-98.
- [2] *Ansel, E. A.*: "Theorie des irdischen Schwerefeldes", Gutenbergs Handbuch der Geophysik, Band 1, Seite 668, Berlin 1936.
- [3] *Ledersteger, K.*: "Zur Theorie des Normalsphäroides", Geofisica pura e applicata, Band 40, im Druck.

Das WÜSTsche Lokalvariometer

(Bemerkungen zu H. REICHS Artikel in dieser

Zeitschrift 23 (169- 181) 1957)

Von R. Bock, Berlin -Friedenau ¹⁾

Aus den Darlegungen *H. Reichs* könnte gefolgert werden, daß *J. Wüst* mit seinem sogenannten Lokalvariometer ein "durchaus brauchbares" ²⁾ Instrument geschaffen habe, "das für rasche Übersichtsmessungen über eine ausreichende Empfindlichkeit und Genauigkeit verfügt und hinsichtlich seiner einfachen Bauart, seiner raschen Handhabung, seines leichten Gewichts und niedrigen Preises den teuren Präzisionsinstrumenten sogar überlegen ist" ²⁾. *H. Reichs* Ausführungen auf S. 170 regen zu der Vermutung an, daß das Wüstsche Lokalvariometer keine Verwandtschaft mit dem im Jahre 1936 [2] kritisierten "Gerameter" habe, daß es vielmehr auf neuen, einwandfreien Prinzipien beruht.

Dies trifft *nicht* zu.

Das Lokalvariometer ist – milde beurteilt – ebenso eigenartig ausgebildet wie das Gerameter. Das "neue" Lokalvariometer müßte, wenn es speziell geprüft würde, sogar noch ungünstiger beurteilt werden als das Gerameter.

Bei beiden Geräten wird ein zu der Drehachse einer Bussole exzentrisches *vertikales* Magnetfeld erzeugt, und zwar bei dem Gerameter durch eine Stromspule, bei dem Lokalvariometer durch einen 3 cm langen Oerstitmagnet mit quadratischem Querschnitt von 0.8 cm Seitenlänge. Da die senkrechte Spulen- oder Magnetachse sowohl in magnetischer Nord-Süd- als auch in magnetischer Ost-West-Richtung gegenüber der Drehachse der Bussole nadel, auf die das Feld wirkt, verschoben ist und unterhalb der Schwingungsebene der Nadel endet, hat das durch Spule oder Magnet am Ort der Nadel erzeugte Feld außer der überflüssigen, nur fehlerhaft wirkenden vertikalen eine horizontale Komponente, deren Nord-Süd-Komponente die zu messende Horizontalintensität schwächt und damit die Empfindlichkeit erhöht und deren Ost-West-Komponente die Bussole nadel ablenkt.

¹⁾ *R. Bock*, Berlin-Friedenau, Fregestr. 70

²⁾ Wörtlich zitiert nach *Karl-Heinz Jaeckel* [1].

Gegenüber dem Gerameter hat das Lokalvariometer den konstruktiven Vorteil, daß die Bussole in einer Richtung (von dem senkrechten Ablenkungsmagnet weg und zu ihm hin) und der Ablenkungsmagnet in der Höhe und seitlich meßbar verschoben werden können. Die Stärke des künstlichen Feldes und das Verhältnis der Nord-Süd- zur Ost-West-Komponente können dadurch variiert werden. Mithin kann auf die "günstigsten" gegenseitigen Lagen eingestellt werden. Aber der Nachteil des Lokalvariometers gegenüber dem Gerameter, das mit dem, was für jenes vorteilhaft gewertet worden ist, leicht ergänzt werden könnte, wirkt viel schwerer:

Bei jeder Einstellung muß der Oersttmagnet aus seiner Fassung entfernt und wieder an der alten Stelle eingesetzt werden. Hierbei wird bei der kleinen Ablenkungsentfernung von 11-13 cm nicht die erforderliche Genauigkeit eingehalten werden können. Bei dem Gerameter dagegen braucht nur der Strom ausgeschaltet zu werden, um das künstliche Magnetfeld zum Verschwinden zu bringen. Allerdings kann beim Gerameter die Stärke des das künstliche Magnetfeld erzeugenden Stroms nicht mit der erforderlichen Genauigkeit abgelesen werden; aber auch dies ließe sich erreichen.

Der Oersttmagnet des Lokalvariometers bewahrt sicherlich sein Moment relativ stärker; aber seine nicht ausreichend gesicherte Lage macht diesen Vorzug wieder illusorisch.

Trotz vieler Hinweise und Fragen ist noch nie der Zweck der *senkrechten* künstlichen Komponente erklärt worden. *J. Wüst* geht darüber hinweg, indem er sagt, daß entsprechend der vertikal stehenden Gerameterspule auch bei seinem Lokalvariometer ein vertikal stehender Ablenkungsmagnet verwendet wird. Von *dem* Instrument, das er verbessern will, übernimmt er gerade das, was die stärkste Kritik herausgefordert hat.

Die Art, mit der *J. Wüst* das Kohlrauschsche Einstabvariometer beurteilt, ist unrichtig. Bei richtiger Anordnung der Magnete oder des Magnets läßt sich jede Empfindlichkeit erreichen. Daß nicht die Empfindlichkeit oder der Skalenwert, sondern der Basiswert das konstruktive Problem ist, bleibt unbeachtet.

Es hätten sich eigentlich Feststellungen erübrigt, daß eiserne Gegenstände in München-Bogenhausen, Magnetit bei der Großhesseloher Eisenbahnbrücke und eine Rohrleitung bei Gnadenwald in Tirol magnetische Störungen hervorrufen. Viel eindrucksvoller wäre es gewesen, auf die Unsinnigkeit des Wüstschen Aufsatzes [3] hinzuweisen, in dem er Meßergebnisse in der Lamontstr. mitteilt. Sicherlich kann *J. Wüst* mit seinem Instrument am besten umgehen; und daher müßte seinen dem Instrument entlockten Ergebnissen, soweit die Bedienungsfertigkeit eine Rolle spielt, das größte Zutrauen entgegengebracht werden.

J. Wüst findet mit seinem Instrument zwischen drei Punkten folgende Differenzen der Horizontalintensität:

			Δ 1, 2	Δ 2, 3
1941	April	29	580 γ	980 γ
	Juli	20	750	1 150
	Juli	31	260	570
	Aug.	1	460	920
	Aug.	5	360	750

Die Abweichungen von den Mitteln (482 γ , 874 γ) sind

			Δ 1, 2	Δ 2, 3
1941	April	29	+ 98 γ	+ 106 γ
	Juli	20	+ 268	+ 276
	Juli	31	- 222	- 304
	Aug.	11	- 22	+ 46
	Aug.	5	- 122	- 124

Wären die Ergebnisse einwandfrei, müßten sie mit den tatsächlichen Variationen variieren. Die Maxima und Minima der Stundenmittel der Nordkomponente in Niemegek zwischen 15^h und 17^h waren

1941	April	29	18 379 γ	18 380 γ
	Juli	20	370	401
	Juli	31	389	405
	Aug.	1	386	398
	Aug.	5	369	388

Dies stimmt qualitativ mit dem überein, was *J. Wüst* mit seinem Zeitvariometer feststellte. Den von ihm gemessenen Differenzen der Differenzen schreibt er aber eine reelle Bedeutung zu und begründet sie mit Phantasteerien.

Niemand wird ihm glauben, daß sich zwischen drei Punkten, zwischen denen die Entfernungen 8 m und 12 m betragen, die Differenzen der Horizontalintensität von 1941 Juli 20 bis Juli 31 um 490 γ und 580 γ geändert haben, wenn die Zeit magnetisch ruhig gewesen ist.

Wir können hieraus die tatsächliche Genauigkeit ableiten, die *J. Wüst* mit seinem Lokalvariometer erreicht. Es sind einige *Hundert* γ .

Ein Instrument, das nur dieses leistet und obendrein in seinem Aufbau sinnlos ist, dürfte für sinnvolle Messungen unbrauchbar sein.

Zusatz zu den Bemerkungen von R. Bock

Von H. Reich, Göttingen

Die Bemerkungen von *R. Bock* sind durchaus richtig. Es sind ihnen nur die folgenden Feststellungen hinzuzufügen: Die Nachprüfungen von Gerameter-Messungen durch *R. Bock* (1936)*) und *K. Vidal* (1954) haben gezeigt, daß an der Stelle, an denen durch das Gerameter Magnetstörungen angeblich festgestellt waren, tatsächlich keine besonderen magnetischen Anomalien vorlagen. Dagegen waren an den 3 Stellen, an denen *J. Wüst* nach Messungen mit seinem Variometer magnetische Störungen angegeben hatte – Herzogpark und Grosshesselohe bei München und Gnadenwald i. Tirol (1941) –, diese wirklich in der von *J. Wüst* angegebenen Form und Größe vorhanden**). Die von *R. Bock* mit Recht kritisierten magnetischen Messungen von *J. Wüst* in der Lamonstr. in München eignen sich nicht für eine Nachprüfung. Sie sind im Bereich der großen zeitlichen, durch die mit Gleichstrom betriebenen elektrischen Bahnen hervorgerufenen magnetischen Störungen gelegen, die dort eine ernsthafte Kontrolle magnetischer Messungen überhaupt unmöglich machen***).

Ergänzungen zu den Bemerkungen von H. Reich

Von R. Bock, Berlin-Friedenau

*) Bei der Prüfung der Ergebnisse der Gerametermessungen habe ich mich kaum auf eigene Messungen gestützt. Die Wendlersche Denkschrift (1936) enthält genug Ungereimtheiten.

***) $\delta H > 1000 \gamma$ mit $\pm \sim 300 \gamma$

***) *J. Wüst* gibt an (l. c. S. 95): Nebenher wurde dauernd ein ... genau gleiches Magnetometer als "Zeitvariometer" mitverfolgt. Da dessen Ausschlagsänderungen weniger als 1° betragen, erübrigen sich entsprechende Korrekturen an den Ausschlägen, welche auf dem anderen als "Ortsvariometer" dienenden Magnetometer abgelesen wurden, das entlang der Meßstrecke verschoben wurde. –

J. Wüst sagt nichts von Schwankungen seines "Ortsvariometers", die mehr als 10° hätten betragen müssen; im Gegenteil, er läßt nur eine Unsicherheit von 0.2° zu.

Literatur

- [1] *Jaeckel, K. -H.*: An den Grenzen menschlicher Fassungskraft. (S. 47, 48) München 1955.
- [2] *Bock, R.*: Zur Frage der objektiven Wünschelrutenkontrolle mit magnetometrischen Apparaten. Die Naturwissenschaften 24. (585-587) 1936.
- [3] *Wüst, J.*: Beobachtungen über Schwankungen der magnetischen Feldstärkenunterschiede bei einem Reizstreifen. Zeitschrift für Wünschelrutenforschung 22 (94-98) 1941.