

Automatisierte Bestimmung der geographischen Nordrichtung mittels bildgestützter Auswertung eines bandgehängten Kreisels

Christian Köhler
 Institut für Markscheidewesen und Geodäsie, TU Bergakademie Freiberg, Germany
 christian.koehler@mabb.tu-freiberg.de



Köhler

1 Einleitung

Das Institut für Markscheidewesen und Geodäsie besitzt einen Aufsatzkreisel „Gyromax AK-2M“ der Firma GeoMessTechnik Heger GmbH [1] zur Bestimmung der geographischen Nordrichtung. Bisher wird die zentrale Größe von Kreismessungen – die Kreismittellage – manuell mit den bekannten Methoden Umkehr-Punkt-Methode, Zeit-Durchgangs-Methode, Zeit-Differenz-Methode ermittelt [2].

Dies erfordert die Ablesung von Skalenwerten mit dem Auge über lange Mesdauern sowie gleichzeitige Zeitmessung mit Stoppuhren. Die so gewonnenen Messwerte sind subjektiv und anfällig für Fehler, da die langen Messzeiten von mehr als 7 Minuten für eine Einzelmessung hohe Anforderungen an die Konzentration stellen. Die Ableitung der Nordrichtung aus der Schwingungsmittellage erfordert zusätzliche Kalibrierkonstanten. Die Bestimmung dieser Konstanten erfolgt durch aufwendige, mit mechanischen Eingriffen in das Kreiselinstrument verbundene Verfahren.

Im Folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, das den Messvorgang automatisiert und die Kalibrierkonstanten direkt aus der Kreiselerschwingung ableitet.

Dazu wird in Abschnitt 2 der bandgehängte Kreisel mathematisch beschrieben und ein Verfahren zur Ableitung aller notwendigen Größen für die Bestimmung der Nordrichtung direkt aus den Kreismessungen abgeleitet. Dies erfordert eine detaillierte Analyse des

Zur Bestimmung der geographischen Nordrichtung wird am Institut für Markscheidewesen und Geodäsie der bandgehängte Kreisel „Gyromax AK-2M“ eingesetzt. Die Ableitung der Nordrichtung aus den manuell gemessenen Schwingungsmittellagen des Kreisels erfordert die aufwendige, mit mechanischen Eingriffen in das Kreiselinstrument verbundene Bestimmung von Kalibrierkonstanten. Hier leiten wir aus einer eingehenden mathematischen Beschreibung des Kreisels ein objektives, auf computergestützter Bildauswertung der Kreiselanzeige basierendes Verfahren ab. Dieses automatisiert die Kreismessungen und leitet alle zur Bestimmung der Nordrichtung nötigen Kalibrierkonstanten direkt aus Beobachtungen der Kreiselerschwingung ab. Wir erreichen eine verbesserte Genauigkeit einer Weisung von $1.4 \cdot 10^{-3}$ gon und eine exzellente Übereinstimmung in den Kalibrierkonstanten.

Zeitverlaufs der Kreiselerschwingung, deren Grundlage in Abschnitt 3 gelegt wird. Abschnitt 4 konfrontiert das hier entwickelte Verfahren mit experimentellen Daten. Ein Fazit in Abschnitt 5 schließt die Darstellung ab.

2 Mathematische Beschreibung des bandgehängten Kreisels

Die physikalischen Grundlagen des Kreisels [3] sowie die Anwendung in der Vermessung [4, 5, 2] sind ausführlich beschrieben. Es folgt die mathematische Beschreibung des Kreisels in Anlehnung an [6].

2.1 Die Kreiselerschwingung

Der bandaufgehängte Kreisel erfährt durch die Erdrotation ein Richtmoment M_K mit dem Betrag

$$M_K = -k_K \sin(\alpha - \alpha_K), \quad (1)$$

wobei die elastische Konstante $k_K = L_K \omega_E \cos \varphi$ durch den Drehimpuls des Kreisels $L_K = J_R \omega_K$ mit dem Trägheitsmoment des Kreisels bezüglich der Kreiselachse J_R , der Winkelgeschwindigkeit der Kreiselrotation um die Kreiselachse ω_K , der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ω_E und der geographischen Breite φ bestimmt wird. Für kleine Auslenkungen $|\alpha - \alpha_K| \ll 1$

Automated determination of the geographic north direction using image-based evaluation of a tape-suspended gyroscope

To determine the geographic north direction, the tape-suspended gyroscope "Gyromax AK-2M" is used at the Institute of Mine Surveying and Geodesy. Deriving the north direction from manually measured oscillation mean positions of the gyroscope requires an elaborate process involving mechanical interventions in the gyroscope instrument to determine calibration constants. Here, we develop an objective method based on a detailed mathematical description of the gyroscope, utilizing computer-assisted image analysis of the gyroscope display. This method automates the gyroscope measurements and derives all calibration constants necessary for determining the north direction directly from observations of the gyroscope oscillations. We achieve an improved accuracy of a deviation of $1.4 \cdot 10^{-3}$ gon and an excellent consistency in the calibration constants.

Schlagworte Keywords

Kreisel
Gyroscope

Nordrichtung
North direction

Computer Vision
Computer vision

Automatisierung
Automation

der momentanen Kreisellage α gegenüber der Gleichgewichtslage α_K gilt

$$\sin(\alpha - \alpha_K) \approx (\alpha - \alpha_K) \quad \text{für } |\alpha - \alpha_K| \ll 1. \quad (2)$$

Zusätzlich erfährt der elastisch gegen Verdrehung aufgehängte Kiesel ein Richtmoment M_T , das durch die Torsion des Bandes (k_T elastische Konstante) verursacht wird:

$$M_T = -k_T(\alpha - \alpha_T). \quad (3)$$

Die Bewegung des Kreisels wird unter Vernachlässigung von Reibung durch die gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben:

$$J_Y \ddot{\beta} + L_K \dot{\alpha} + L_K \omega_E \sin \varphi + G a \beta = 0, \quad (4)$$

$$J_Z \ddot{\alpha} - L_K \dot{\beta} + L_K \omega_E \cos \varphi (\alpha - \alpha_K) + k_T (\alpha - \alpha_T) = 0, \quad (5)$$

wobei $G = m_K g$ das Gewicht des Kreisels, a die Länge des Aufhängebandes und β die Auslenkung des Kreisels aus der Horizontalebene bezeichnet. J_Z ist das Trägheitsmoment des Kreisels bezüglich der z-Achse (Zenitrichtung), J_Y ist das Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse (in der Horizontalebene).

Die speziellen Lösungen

$$\beta_G = -\frac{L_K \omega_E \sin \varphi}{G a}, \quad \alpha_G = \frac{k_K \alpha_K + k_T \alpha_T}{k_K + k_T} \quad (6)$$

stellen die Gleichgewichtslagen der Kreiselschwingungen dar. Die Schwingungsfrequenzen ergeben sich aus den Lösungen der homogenen Differentialgleichungen:

$$\ddot{\beta} + c_1 \dot{\alpha} + c_2 \beta = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\alpha} - c_3 \dot{\beta} + c_4 \alpha = 0, \quad (8)$$

mit den Abkürzungen

$$c_1 = \frac{L_K}{J_Y}, \quad c_2 = \frac{G a}{J_Y}, \quad (9)$$

$$c_3 = \frac{L_K}{J_Z}, \quad c_4 = \frac{L_K \omega_E \cos \varphi + k_T}{J_Z}$$

zu

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 c_3 + c_2 + c_4}{2} - \sqrt{\frac{(c_1 c_3 + c_2 + c_4)^2}{4} - c_2 c_4}, \quad (10)$$

$$\omega_2^2 = \frac{c_1 c_3 + c_2 + c_4}{2} + \sqrt{\frac{(c_1 c_3 + c_2 + c_4)^2}{4} - c_2 c_4}. \quad (11)$$

Mit gegebenen Anfangsbedingungen $\alpha(t=0)$ und $\beta(t=0)$ und bekannten Parametern k_T, k_K, \dots kann damit die Bewegung des bandgehängten Kreisels im Schwerfeld der Erde beschrieben werden.

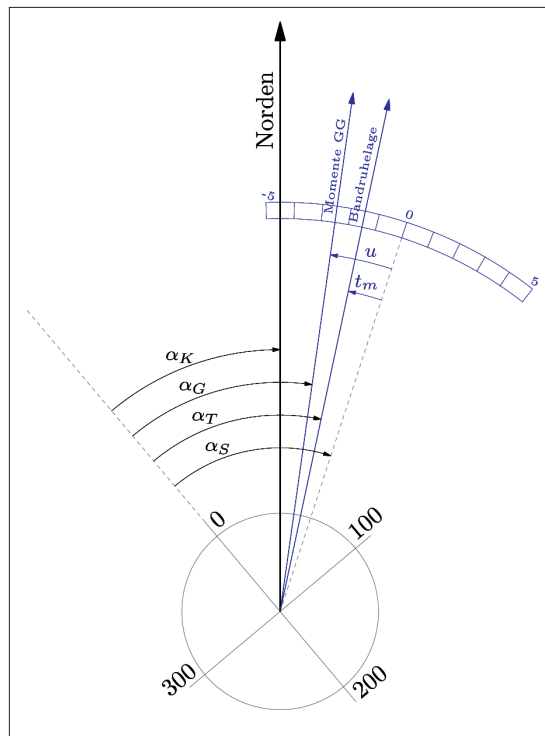


Abb. 1: Bandruhelage α_T bzw. t_m , Momentengleichgewicht α_G bzw. u , Nordrichtung α_K und Richtung der Kreiselskala α_S , gemessen auf der Tachymeterskala (schwarz) und der Kreiselskala (blau) des Aufsatzkreisels. α_S ist die Richtung der Kreiselskala.

2.2 Experimentell ableitbare Größen

Die praktischen Messungen der Auslenkungen der Kreiselschwingung werden beim Aufsatzkiesel „Gyromax AK-2M“ auf der Kreiselskala durchgeführt, deren Skalennull auf α_S ausgerichtet ist (Abb. 1). Die Gleichgewichtslage der Kreiselschwingung α_G sowie die Bandruhelage α_T in (6) ergeben sich zu:

$$\alpha_G = \alpha_S + C u, \quad (12)$$

$$\alpha_T = \alpha_S + C t_m, \quad (13)$$

wobei u bzw. t_m die Gleichgewichtslage der Kreiselschwingung bzw. die Bandruhelage bezüglich der Kreiselskala (Einheit: Inkrement) darstellen. Da die Kreiselskala einen anderen Maßstab als die Teilkreiselskala des Theodolits (Einheit: Gon) verwendet, muss ein Umrechnungsfaktor C von Inkrementen in Gon berücksichtigt werden.

Die Gleichung (6) für α_G lautet daher:

$$\alpha_S + C u = \frac{k_T (\alpha_S + C t_m) + k_K \alpha_K}{k_T + k_K}. \quad (14)$$

Daraus folgt direkt die gesuchte Kreisellage α_K :

$$\alpha_K = \alpha_S + \left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right) C u - \frac{k_T}{k_K} C t_m. \quad (15)$$

Die Gleichgewichtslage der Kreiselschwingung u wird direkt auf der Kreiselskala gemessen, die Richtung der Kreiselskala α_S wird auf der Tachymeterskala abgelesen. Die Unbekannten t_m, k_T, k_K und C (bzw. deren

Kombinationen in (15)) müssen bestimmt werden, um α_k abzuleiten.

Im Folgenden wird erläutert, wie diese Größen allein aus den Beobachtungen der Kreiselschwingung abgeleitet werden können.

2.2.1 Messungen bei nicht rotierendem Kreisel

Bei nicht rotierendem Kreisel ($L_k = 0 \rightarrow k_k = 0$) wird direkt die Bandruhelage $u = t_m$ als Gleichgewichtslage der Kreiselschwingung gemessen.

Weiterhin ergeben sich die Koeffizienten der homogenen Differentialgleichungen gemäß (7) für $L_k = 0$ zu (Index T für Torsion, vgl. (9)):

$$c_1^T = 0, \quad c_2^T = \frac{Ga}{J_Y}, \quad c_3^T = 0, \quad c_4^T = \frac{k_T}{J_Z}. \quad (16)$$

Die Schwingungsfrequenz ω_1 aus (10) vereinfacht sich zu

$$(\omega_1^T)^2 = c_4^T = \frac{k_T}{J_Z} \quad (17)$$

und beschreibt die Torsionsschwingung des bandgehängten Kreisels.

Die Schwingungsfrequenz ω_2 aus (11) vereinfacht sich zu

$$(\omega_2^T)^2 = c_2^T = \frac{Ga}{J_Y} \quad (18)$$

und beschreibt die Pendelschwingung des bandgehängten Kreisels aus der Horizontalebene heraus.

2.2.2 Messungen bei rotierendem Kreisel

Bei rotierendem Kreisel ergeben sich die Schwingungsmittellage und die Schwingungsfrequenzen gemäß Abschnitt 2.1.

2.2.3 Messungen bei „Nachführen“

„Nachführen“ bedeutet, dass die Skalennull der Kreiselskala α_s stets in die momentane Richtung des Kreisels α weist:

$$\alpha_s = \alpha. \quad (19)$$

Dies entspricht $k_r \cong 0$ in (7). Durch die Nichtübereinstimmung der Kreiselskalennull mit der Bandruhelage verbleibt stets ein kleines Bandmoment. Für die Bestimmung der Schwingungsfrequenzen kann dieses Bandmoment jedoch vernachlässigt werden.

Die Schwingungsmittellage entspricht der Kreiselmittellage $u = \alpha_k$.

Die Koeffizienten gemäß (9) ändern sich zu:

$$\begin{aligned} c_1^K &= c_1 = \frac{L_K}{J_Y}, & c_2^K &= c_2 = \frac{Ga}{J_Y}, \\ c_3^K &= c_3 = \frac{L_K}{J_Z}, & c_4^K &= \frac{L_K \omega_E \cos \varphi}{J_Z}. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Schwingungsfrequenz der Kreisellachse ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} (\omega_1^K)^2 &= \frac{c_1^K c_3^K + c_2^K + c_4^K}{2} \\ &\quad - \sqrt{\frac{(c_1^K c_3^K + c_2^K + c_4^K)^2}{4} - c_2^K c_4^K}. \end{aligned} \quad (21)$$

Diese Frequenz wird durch Beobachtungen der Schwingung auf der Tachymeterskala bestimmt.

Die schnelle Oberfrequenz ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} (\omega_2^K)^2 &= \frac{c_1^K c_3^K + c_2^K + c_4^K}{2} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(c_1^K c_3^K + c_2^K + c_4^K)^2}{4} - c_2^K c_4^K} \end{aligned} \quad (22)$$

und wird auf der Kreiselskala beobachtet, da das „Nachführen“ der langsameren Kreiselschwingung ω_1^K folgt.

2.2.4 Messung bei ausgedrehter Kreisellachse

Die Richtung α_k (siehe Gleichung (15)) bleibt konstant (= Kreiselnord) für verschiedene Kreisellstellungen $\alpha_s^{(1)}$ und $\alpha_s^{(2)}$. Die entsprechenden Schwingungsmittellagen, die auf der Kreiselskala gemessen werden, sind $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$. Gleichheit in Gleichung (15) führt zu:

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(1)} + \left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right) C u^{(1)} - \frac{k_T}{k_K} C t_m &= \\ \alpha_s^{(2)} + \left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right) C u^{(2)} - \frac{k_T}{k_K} C t_m, \end{aligned} \quad (23)$$

was sich vereinfacht zu:

$$\left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right) C = \frac{\alpha_s^{(1)} - \alpha_s^{(2)}}{u^{(2)} - u^{(1)}}. \quad (24)$$

Daraus lässt sich direkt die Konstante $\left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right) C$ berechnen.

2.2.5 Zusammenstellung der Messgrößen

Zur besseren Übersicht werden die jeweiligen Messgrößen aus den vorangegangenen Abschnitten in Tabelle 1 zusammengefasst.

2.2.6 Bestimmung eines kompletten Parametersatzes

Es gibt zwei Möglichkeiten, die für die Berechnung der Kreisellage gemäß (15) benötigten Parameter t_m , u , C und k_T/k_K zu bestimmen.

Parameter aus Beobachtungen des rotierenden und nicht rotierenden Kreisels

Liegen Messungen bei nicht rotierendem Kreisel (Abschnitt 2.2.1) sowie für den rotierenden und ausgedrehten Kreisel (Abschnitt 2.2.4) vor, kann ein kompletter Parametersatz abgeleitet werden.

Aus den Schwingungsfrequenzen des nicht rotierenden Kreisels ergibt sich direkt

$$c_4^T = \frac{k_T}{J_Z} = (\omega_1^T)^2 \tag{25}$$

und

$$c_2 = c_2^T = \frac{Ga}{J_Y} = (\omega_2^T)^2 \tag{26}$$

Aus den Frequenzen ω_1, ω_2 des rotierenden Kreisels (10) und (11) folgt für das Produkt beider

$$c_2 c_4 = \omega_1^2 \omega_2^2, \tag{27}$$

woraus sich

$$c_4 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{c_2} = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_2^T)^2} \tag{28}$$

unter der Verwendung des bereits bestimmten c_2 ergibt. Des Weiteren gilt

$$c_4 = \frac{L_K}{J_Z} \omega_E \cos \varphi + \frac{k_T}{J_Z} \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow c_3 = \frac{L_K}{J_Z} = \frac{c_4 - \frac{k_T}{J_Z}}{\omega_E \cos \varphi} = \frac{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_2^T)^2} - (\omega_2^T)^2}{\omega_E \cos \varphi} \tag{30}$$

Weiterhin lässt sich c_1 aus der Summe beider Schwingungsfrequenzen bestimmen:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = c_1 c_3 + c_2 + c_4, \tag{31}$$

$$c_1 = \frac{L_K}{J_Y} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - c_2 - c_4}{c_3} \tag{32}$$

Aus den nunmehr bekannten Größen $c_4 = k_K / J_Z + k_T / J_Z$ und $c_4^T = k_T / J_Z$ folgt

$$\frac{k_T}{k_K} = \frac{c_4^T}{c_4 - c_4^T} \tag{33}$$

Schließlich ergibt sich der Umrechnungsfaktor C aus der in Abschnitt 2.2.4 gemessenen Größe

$$C = \frac{\alpha_S^{(1)} - \alpha_S^{(2)}}{u^{(2)} - u^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_T}{k_K}} \tag{34}$$

Damit können insbesondere die Korrekturkonstante zur Bandkorrektur k_T/k_K und der Umrechnungsfaktor zwischen Kreisel- und Tachymeterskale C direkt aus den Beobachtungen der Kreiselschwingung ermittelt werden.

Unglücklicherweise gibt es für den hier verwendeten Aufsatzkreisel „Gyromax AK-2M“ keine Möglichkeit, die Pendelschwingung des Bandes $\omega_2^T \sim c_2$ zu beobachten, da diese Schwingung aus der Horizontalebene heraus erfolgt, der Kreisel aber nur Ablesungen von Kreiselauslenkungen in der Horizontalebene ermöglicht. Damit bleibt c_2 unbekannt und kann nur aus Herstellerangaben zu G, a und J_Y geschätzt werden.

Tabelle 1:
Zusammenstellung der Messgrößen.

Größe	Bezeichnung	Bestimmung
Nicht rotierender Kreisel, Abschnitt 2.2.1		
Bandruhelage	t_m	Zeitverlauf der Kreiselschwingung aus Kreiselskale
Frequenz Torsionsschwingung Band	ω_1^T	Zeitverlauf der Kreiselschwingung aus Kreiselskale
Frequenz Pendelschwingung Band	ω_1^T	Zeitverlauf der Kreiselschwingung (nicht mgl. Gyromax)
Rotierender Kreisel, Abschnitt 2.2.2		
Kreiselmitellage	u	Zeitverlauf der Kreiselschwingung aus Kreiselskale
Frequenz 1	ω_1	Zeitverlauf der Kreiselschwingung aus Kreiselskale
Frequenz 2	ω_2	Zeitverlauf der Kreiselschwingung (nicht mgl. Gyromax)
Nachführen, Abschnitt 2.2.3		
Kreiselmitellage	α_K	Zeitverlauf der Kreiselschwingung auf Tachymeterskale
Frequenz 1	ω_1^K	Zeitverlauf der Kreiselschwingung auf Tachymeterskale
Frequenz 2	ω_2^K	Zeitverlauf der Kreiselschwingung auf Kreiselskale
Ausdrehen, Abschnitt 2.2.4		
Skalennull 1	$\alpha_S^{(1)}$	Ablesen am Tachymeter
Skalennull 2	$\alpha_S^{(2)}$	Ablesen am Tachymeter
Kreiselmitellage 1	$u^{(1)}$	Zeitverlauf der Kreiselschwingung auf Kreiselskale
Kreiselmitellage 2	$u^{(2)}$	Zeitverlauf der Kreiselschwingung auf Kreiselskale
Frequenz	ω_i	wie bei rotierendem Kreisel

Parameter aus Beobachtungen des rotierenden, nicht rotierenden und des nachgeführten Kreisels

Eine Berechnung aller in Gleichung (15) benötigten Parameter ist auch dann möglich, wenn zusätzlich Messungen der Schwingungsfrequenzen beim „Nachführen“ (Abschnitt 2.2.3) vorliegen.

Es wird das Produkt der Schwingungsfrequenzen bei rotierendem Kiesel sowie beim Nachführen betrachtet:

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = c_2 c_4 = c_2 \left(\frac{k_K}{J_Z} + \frac{k_T}{J_Z} \right) \quad (35)$$

$$(\omega_1^K)^2 (\omega_2^K)^2 = c_2^K c_4^K = c_2 \left(\frac{k_K}{J_Z} \right). \quad (36)$$

Es folgt für den Quotienten

$$\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_1^K)^2 (\omega_2^K)^2} = 1 + \frac{k_T}{k_K}. \quad (37)$$

Wie oben ergibt sich letztlich aus der in Abschnitt 2.2.4 gemessenen Größe

$$C = \frac{\alpha_S^{(1)} - \alpha_S^{(2)}}{u^{(2)} - u^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_T}{k_K}} \quad (38)$$

$$= \frac{\alpha_S^{(1)} - \alpha_S^{(2)}}{u^{(2)} - u^{(1)}} \cdot \frac{(\omega_1^K)^2 (\omega_2^K)^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}. \quad (39)$$

Auch wenn in diesem Fall kein vollständiger, die Bewegung des Kreisels beschreibender Parametersatz c_1, c_2, c_3 und c_4 vorliegt, können dennoch alle Größen bestimmt werden, die zur Berechnung der Kreisellage gemäß Gleichung (15) erforderlich sind.

Es wird deutlich, dass für die Bestimmung eines vollständigen Parametersatzes die präzise Messung der Schwingungsmittellagen und vor allem der Schwingungsfrequenzen erforderlich ist. Mit den bisher angewandten, manuellen Methoden zur Zeit- und Amplitudenmessung an den Umkehrpunkten oder den Durchgängen an bestimmten Skalenwerten der Kreiselskala ist eine solche Messung, insbesondere der schnellen Oberschwingungen, jedoch nicht möglich. Daher wird im Folgenden ein objektives Verfahren vorgestellt, das auf computergestützter Bildauswertung der Kreiselanzeige basiert.

3 Automatisierte Ablesung und Analyse der Kreiselanzeige

Ausgangspunkt ist ein Video der Kreiselanzeige, aufgenommen mit einer Webcam mit 640 x 480 Pixeln Auflösung und einer durchschnittlichen Bildrate von 25 Bildern pro Sekunde. Die automatisierte Ablesung erfolgt für jedes einzelne Bild des Videos, was bei einer Echtzeit-Auswertung während einer Kreiselmessung berücksichtigt werden muss. Die Auswertung eines einzelnen Bildes erfolgt in zwei Schritten: der Bestimmung der Skalenposition und des Maßstabs sowie der Bestimmung der Zeigerposition.

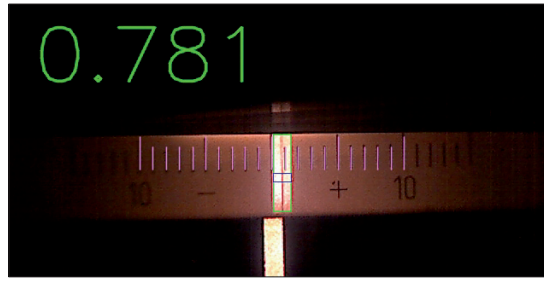


Abb. 2: Die Kreiselanzeige überlagert mit der benutzten Skale (lila) und der extrahierten Zeigerposition.

3.1 Skale

Für jedes Bild wird eine lineare Skale im Bild angenommen, d.h. gleiche Skalenintervalle entsprechen gleichen Pixelabständen.

Zunächst wird für alle Bilder des Videos einmalig die Skalennull, also die Pixelposition des Skalenwertes 0 der Kreiselskala, auf p_0 festgelegt. Zusätzlich wird der Maßstab der Skale, also der Umrechnungsfaktor zwischen Pixel- und Skalenintervallen, auf p_i (Pixel per Inkrement) festgelegt.

Eine feste Skale ist für die Vergleichbarkeit der Messungen essentiell, da andernfalls unterschiedliche systematische Abweichungen bei verschiedenen Messungen auftreten würden.

3.2 Zeiger

Die Position des Zeigers wird in zwei Schritten bestimmt. Zunächst wird die Position des Zeigers pixelgenau durch Template-Matching ermittelt. Anschließend ermöglicht ein Gauß-Fit der Intensitätswerte der Pixel innerhalb des so erhaltenen Bildausschnitts eine Bestimmung der Zeigerposition mit Sub-Pixel-Genauigkeit.

3.2.1 Template Matching

Beim Template-Matching wird ein Template (Schablone, Muster) Pixel für Pixel über das Bild geschoben. Für jede Position wird ein Maß für die Übereinstimmung des Templates mit dem entsprechenden Bildausschnitt berechnet. Die Position mit der maximalen Übereinstimmung definiert die Lage des Templates im Bild.

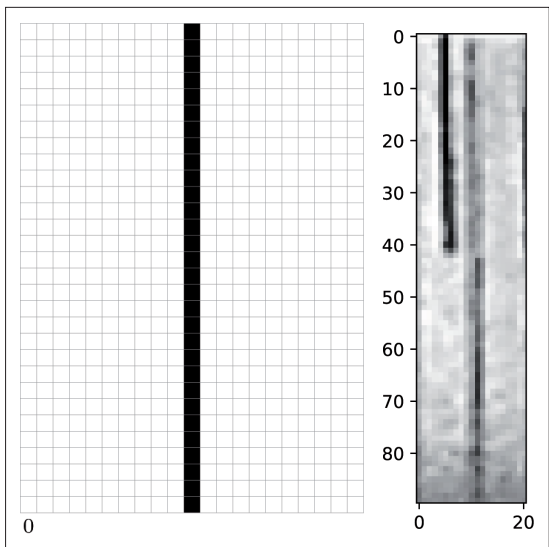
Das für den Zeiger verwendete Template ist 21 Pixel breit und 90 Pixel hoch. Es abstrahiert den Zeiger als eine ein Pixel breite, vertikale, schwarze Linie auf weißem Hintergrund (siehe Abb. 3 links).

3.2.2 Position des Zeigers mit Sub-Pixel-Präzision

Das Prinzip der Bestimmung der Zeigerposition mit Sub-Pixel-Präzision ist in Abb. 4 dargestellt.

Im durch Template Matching bestimmten Bildausschnitt des Zeigers (links) werden die Grauwertprofile mehrerer Zeilen (rechts, blaue Profile) gemittelt (oranges Profil). Ein Gauß-Fit an das gemittelte Profil (blaue Linie)

Abb. 3: Schema des verwendeten Templates zur Extraktion der Pixel-Position des Zeigers (links) und realer Bildausschnitt des Zeigers (rechts) mit zusätzlichem Skalenstrich.



liefert die Zeigerposition mit Sub-Pixel-Präzision. Die grau schattierten Bereiche wurden zur Verbesserung des Gauß-Fits nicht in die Berechnung einbezogen.

3.3 Auswertung der Kreiselerschwingung

Die zeitabhängige Auslenkung des Kreisels $u(t)$, gemessen auf der Kreiselskale, folgt einer gedämpften harmonischen Schwingung

$$u(t) = Ae^{\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) + b. \quad (40)$$

Die gemessenen Daten liegen als diskrete Wertepaare (t_n, u_n) mit $t_n = n\Delta t$ und $u_n = u(t_n)$ vor, wobei das Zeitintervall $\Delta t \approx 1/25$ s aus der Bildrate der Webcam resultiert.

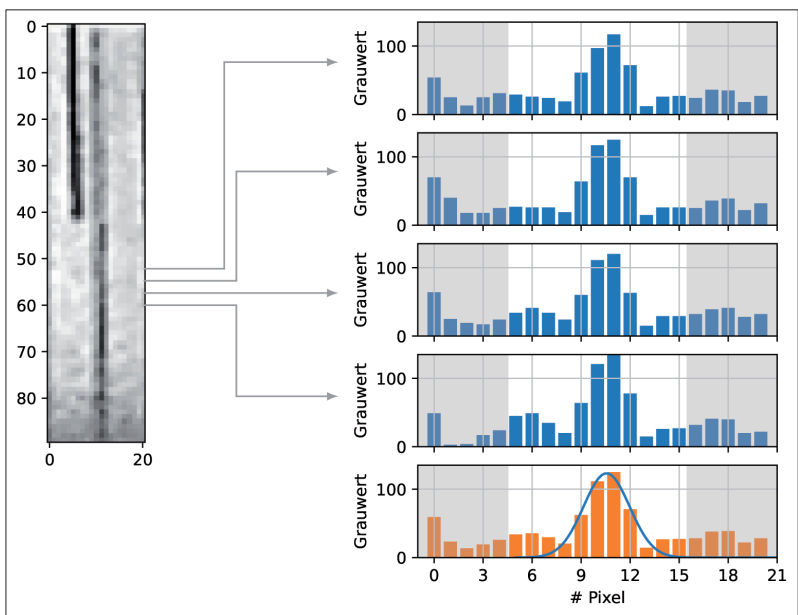


Abb. 4: Prinzip der Bestimmung der Zeigerposition mit Sub-Pixel-Präzision: Im durch Template Matching bestimmten Bildausschnitt des Zeigers (links) werden die Grauwertprofile mehrerer Zeilen (rechts, blaue Profile) gemittelt (orangef Profil). Ein Gauß-Fit an das gemittelte Profil (blaue Linie) liefert die Zeigerposition mit Sub-Pixel-Präzision. Die grau schattierten Bereiche wurden zur Verbesserung des Gauß-Fits nicht in die Berechnung einbezogen.

Ein Least-Squares-Fit von Gl. (40) und die diskreten Werte (t_n, u_n) liefert die Parameter $A, \lambda, \omega, \varphi$ und b .

Um sinnvolle Werte für die Parameter zu erhalten und die Konvergenz des Fits zu gewährleisten - insbesondere bei unvollständigen Schwingungsperioden - sind gute Näherungswerte als Startwerte der Parameter erforderlich.

3.3.1 Berechnung der Startwerte für den Fit der Daten an eine gedämpfte harmonische Schwingung

Im folgenden werden Näherungswerte für $A, \lambda, \omega, \varphi$ und b berechnet, die als Startwerte für einen Least-Squares-Fit dienen [7]. Die diskreten Daten (t_n, u_n) in (40) eingesetzt ergibt

$$u_n = Ae^{\lambda n \Delta t} \cos(\omega n \Delta t + \varphi) + b \quad (41)$$

$$= e^{\alpha n} (a_1 \cos(\mu n) + a_2 \sin(\mu n)) + b \quad (42)$$

mit $\alpha = \lambda \Delta t, \mu = \omega \Delta t$ und $a_1 = A \cos \varphi, a_2 = -A \sin \varphi$.

Daraus folgt die Rekursionsgleichung

$$2 \cos \mu (u_{n+1} - b) = (u_n - b) e^{\alpha} + (u_{n+2} - b) e^{-\alpha} \quad (43)$$

bzw.

$$u_{n+2} = 2e^{\alpha} \cos \mu u_{n+1} - e^{2\alpha} u_n + b(e^{2\alpha} + 1 - 2 \cos \mu e^{\alpha}). \quad (44)$$

Diese Gleichungen lassen sich für alle Daten $n=0 \dots N$ in Matrixform schreiben als:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}}_u = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_0 & 1 \\ u_2 & u_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+1} & u_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-2} & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{\alpha} \cos \mu \\ -e^{2\alpha} \\ b(e^{2\alpha} + 1 - 2e^{\alpha} \cos \mu) \end{pmatrix}}_x \quad (45)$$

mit der Least-Squares-Lösung

$$x = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot u). \quad (46)$$

Daraus ergeben sich μ, α, b .

Sind diese Parameter bestimmt, können die verbleibenden Größen a_1 und a_2 berechnet werden. Dazu wird Gleichung (41) für alle Daten $n=0\dots N$ genutzt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_0 - b \\ \vdots \\ u_n - b \\ \vdots \\ u_N - b \end{pmatrix}}_u = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\alpha \cdot 0} \cos(\mu \cdot 0) & e^{\alpha \cdot 0} \sin(\mu \cdot 0) \\ \vdots & \vdots \\ e^{\alpha \cdot n} \cos(\mu \cdot n) & e^{\alpha \cdot n} \sin(\mu \cdot n) \\ \vdots & \vdots \\ e^{\alpha \cdot N} \cos(\mu \cdot N) & e^{\alpha \cdot N} \sin(\mu \cdot N) \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_x \quad (47)$$

und erneut mit Gl. (46) gelöst.

4 Experimentelle Ergebnisse

Die Ergebnisse einer Kreisel- bzw. Bandruhagemessung sind in Abb. 5 dargestellt.

Die automatisch auf der Kreiselanzeige erfassten Kreiselstellungen (Abb. 5 (a), (b), blaue Punkte) lassen sich gut durch eine harmonische Schwingung gemäß Gl. (40) mit entsprechend gefitteten Parametern modellieren. Die zum Ende der Messung bestimmten Parameter sind in Tab. 2 zusammen mit ihren Unsicherheiten aufgeführt.

Die für Kreismessungen relevante Schwingungsmittellage ist in Abb. 5 (c), (d) dargestellt. Dabei wird die Schwingungsmittellage zu einem bestimmten Zeitpunkt unter Berücksichtigung aller bis dahin erfassten Daten berechnet. Auffällig ist, dass die extrahierten Schwingungsmittellagen sowohl bei der Kreisel- als auch bei der Bandruhelage-Messung anfangs stark schwanken. Sobald Daten über etwa eine volle Schwingungsperiode vorliegen (ab ca. $t = 500$ s für die Kreismessung bzw. ab ca. $t = 80$ s für die Bandruhelage-Messung) stabilisieren sich die Parameter mit deutlich geringeren Abweichungen von einem konstanten Wert.

Für die Kreismessung wird die Abweichung visuell auf $s = \pm 0.001$ incr abgeschätzt. Dies ist etwa eine Größenordnung größer als die aus dem Least-Squares-Fit mathematisch ermittelte Standardabweichung, die in Abb. 5 (c), (d) in orange dargestellt ist.

Bei der Tape-Zero-Messung zeigt sich ein kontinuierlicher Drift von etwa 0.02 incr über einen Zeitraum von 200 s.

Die Dynamik über die harmonische Schwingung hinaus wird in Abb. 5 (e) und (f) untersucht. Abgebildet ist die Differenz zwischen den gemessenen Daten und der gefitteten harmonischen Schwingung mit den Parametern aus Tab. 2. Nach Reduzierung des Rauschens durch zeitliche Mittelung verbleibt die Dynamik, die über die harmonische Schwingung hinausgeht.

Für die Kreismessung treten periodische Abweichungen mit Maxima sowohl nahe der Amplitudenmaxima als auch an den Nulldurchgängen auf. Die Abweichungen in der Nähe der Extrema sind in Abb. 6 detailliert dargestellt. Die diskrete Natur der bildbasierten Ablesung der Anzeige zeigt sich in den beobachtbaren Sprüngen (1 Pixel = 0.064 Inkrement). Trotz Subpixelgenauigkeit ist die Positionierung des Templates auf ein Pixel Genauigkeit beschränkt und zur Bestimmung der Zeigermitte durch einen Gauß-Fit werden nur wenige Pixel innerhalb des Templates herangezogen.

Die Dynamik der Bandruhelage zeigt einen Trend zu kleineren Werten, der schrittweise erfolgt. Eine Überlagerung mit Abweichungen nahe der Amplitudenextrema ist zwar vorhanden (siehe Abb. 6 (b)), aber schwach ausgeprägt. Die genaue Ursache dieser Effekte ist noch nicht abschließend geklärt. Mögliche Erklärungen sind tatsächliche mechanische Verschiebungen der Bandruhelage, aber auch sich kumulierende Fehler der numerischen Auswertung, sowohl bei der Bestimmung der Zeigermitte als auch im Least-Squares-Fit zur Bestimmung der Nulllage.

Abbildung 7 zeigt exemplarisch die beiden Schwingungsfrequenzen ω_1, ω_2 die zur Bestimmung der Korrekturkonstanten C und $(1 + \frac{k_T}{k_C})$ herangezogen werden. Die Frequenz ω_1 wurde gemäß Abschnitt 3.3 bestimmt, während die Frequenz der schnelleren Schwingung ω_2 mittels Fouriertransformation bestimmt wurde, da ausreichend viele Perioden dieser Schwingung vorliegen.

Die numerischen Werte für die Schwingungsfrequenzen beim Nachführen ω_1^K, ω_2^K , sowie die Kreiselstellungen $\alpha_s^{(1)}, \alpha_s^{(2)}$ und die entsprechenden

	Kreisel	Bandruhelage
Amplitude a	(6.2173 ± 0.0004) incr	(5.7719 ± 0.0013) incr
Dämpfung λ	$(-4.46 \pm 0.08) \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$	$(-5.80 \pm 0.01) \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
Frequenz ω	$(0.01387086 \pm 8 \cdot 10^{-8}) \text{ s}^{-1}$	$(0.074801 \pm 1 \cdot 10^{-6}) \text{ s}^{-1}$
Phase φ	(5.61450 ± 0.00006)	(5.24761 ± 0.00021)
Absolutglied b	(0.08114 ± 0.00014) incr	(0.16707 ± 0.00042) incr

Tabelle 2: Zum Ende der Messungen experimentell ermittelte Parameter der gedämpften harmonischen Schwingung mit den jeweiligen Standardabweichungen.

Abb. 5: Messergebnisse Kreisellage und Bandruhelage.

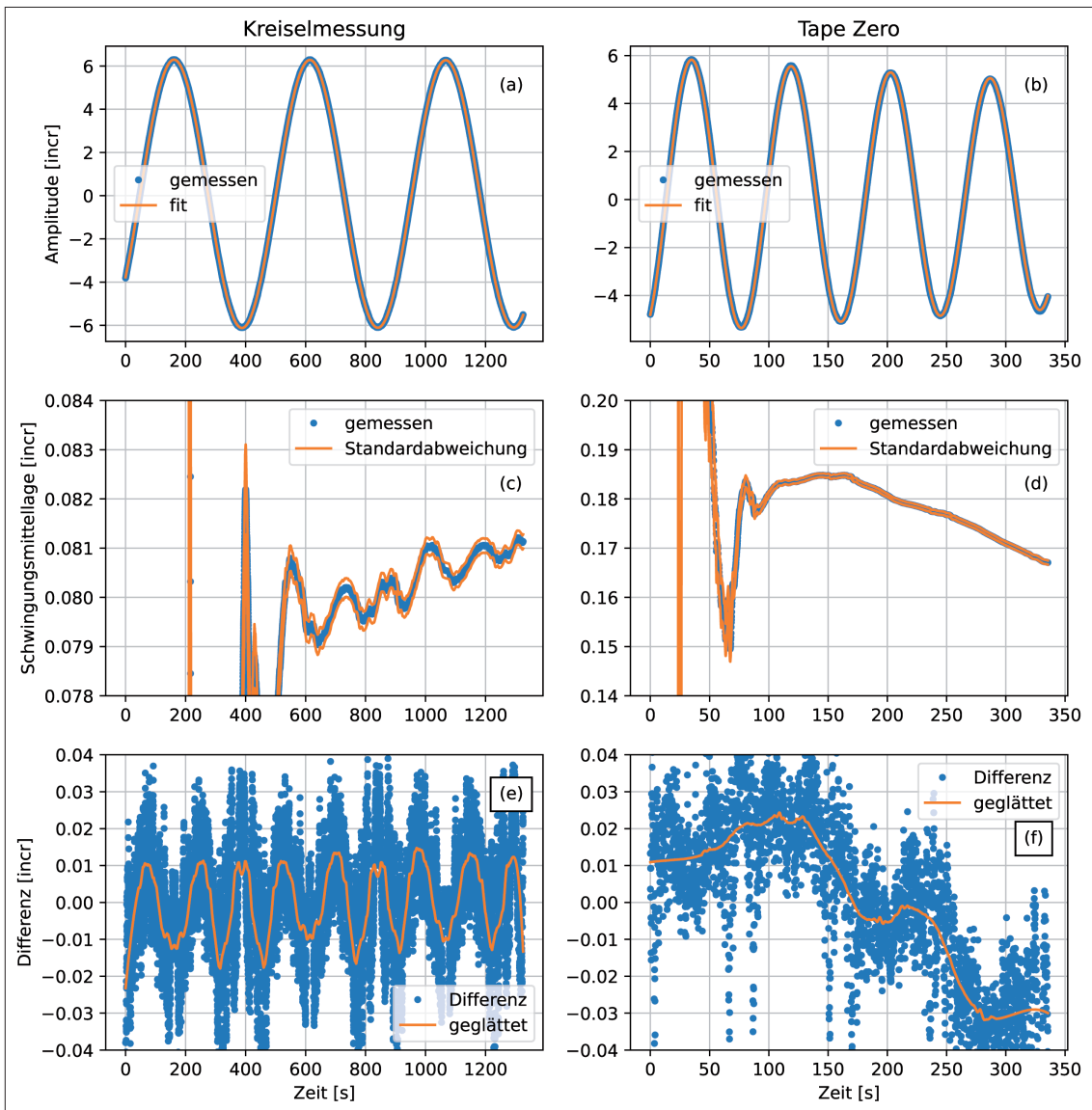
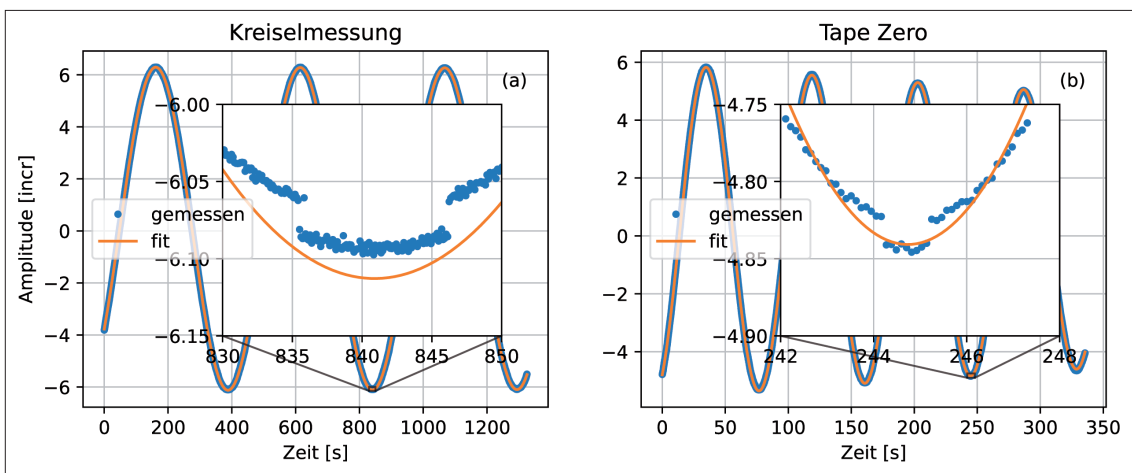


Abb. 6: Unterschiede zwischen den Daten und der extrahierten harmonischen Schwingung nahe der Amplitudenmaxima.



Schwingungsmittlagen $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ für Messungen bei ausgedrehtem Kreisellage sind in Tabelle 3 zusammengefasst. Nach Gl. (37) und (39) ergibt sich daraus

$$1 + \frac{k_T}{k_K} = 1.08122 \pm 3 \cdot 10^{-5}, \quad (48)$$

$$C = (0.1817 \pm 1.3 \cdot 10^{-3}) \frac{\text{gon}}{\text{incr}}. \quad (49)$$

4.1 Erreichbare Genauigkeiten

Zur Beurteilung der Genauigkeit wird in Anlehnung an [2] die Weisung W betrachtet

$$W = Z - \alpha_S + \left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right) C u + \frac{k_T}{k_K} C t_m. \quad (50)$$

Hierbei ist Z die Zielung zu einem terrestrischen Ziel, abgelesen auf der Tachymeterskala. Alle Größen werden als mit Unsicherheiten behaftet angesehen. Nach dem Gaußschen Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz ergibt sich für die Unsicherheit der Weisung

$$s_W^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)^2 s_Z^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_S}\right)^2 s_{\alpha_S}^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial (k_T/k_K)}\right)^2 s_{k_T/k_K}^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial C}\right)^2 s_C^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 s_u^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t_M}\right)^2 s_{t_M}^2 \quad (51)$$

$$= s_Z^2 + s_{\alpha_S}^2 + (Cu)^2 s_{k_T/k_K}^2 + (Ct_M)^2 s_{k_T/k_K}^2 + \left[\left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right)u\right]^2 s_C^2 + \left[\frac{k_T}{k_K}t_M\right]^2 s_C^2 + \left[\left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right)C\right]^2 s_u^2 + \left[\frac{k_T}{k_K}C\right]^2 s_{t_M}^2. \quad (52)$$

Die Unsicherheit der Ablesungen an der Tachymeterskala wird durch die Genauigkeit des Tachymeters bestimmt und mit $s_Z = s_{\alpha_S} = 1 \cdot 10^{-3}$ gon angesetzt.

Die Unsicherheit des Quotienten k_T / k_K ergibt sich nach Gleichung (37) aus den Unsicherheiten der Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \omega_1^K$ und ω_2^K zu

$$s_{k_T/k_K}^2 = \left(\frac{\partial k_T/k_K}{\partial \omega_1}\right)^2 s_{\omega_1}^2 + \left(\frac{\partial k_T/k_K}{\partial \omega_2}\right)^2 s_{\omega_2}^2 + \left(\frac{\partial k_T/k_K}{\partial \omega_1^K}\right)^2 s_{\omega_1^K}^2 + \left(\frac{\partial k_T/k_K}{\partial \omega_2^K}\right)^2 s_{\omega_2^K}^2 \quad (53)$$

$$= \left(\frac{2\omega_1\omega_2^2}{(\omega_1^K)^2(\omega_2^K)^2}\right)^2 s_{\omega_1}^2 + \left(\frac{2\omega_1^2\omega_2}{(\omega_1^K)^2(\omega_2^K)^2}\right)^2 s_{\omega_2}^2 + \left(\frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^K)^3(\omega_2^K)^2}\right)^2 s_{\omega_1^K}^2 + \left(\frac{2\omega_1\omega_2^2}{(\omega_1^K)^2(\omega_2^K)^3}\right)^2 s_{\omega_2^K}^2. \quad (54)$$

Für die Unsicherheiten der Frequenzen wird ein einheitlicher Wert von $s_{\omega_1} = s_{\omega_2} = s_{\omega_1^K} = s_{\omega_2^K} = 1.3 \cdot 10^{-7} s^{-1}$ verwendet, basierend auf den in Tabelle 2 angegebenen Werten und den Unsicherheiten des Least-Squares-Fits. Zusammen mit den experimentell bestimmten Werten für die Frequenzen aus Tabelle 2 ergibt sich

$$s_{k_T/k_K} = 3 \cdot 10^{-5}. \quad (55)$$

Der Parameter C ist mit einer Unsicherheit nach Gleichung (38) belegt

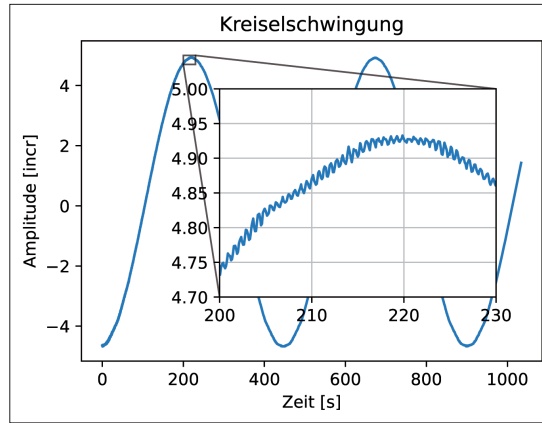


Abb. 7: Exemplarisches Messergebnis der Oberschwingung ω_2 . Die Oberschwingung mit ω_2 ist der Kreiselschwingung ω_1 mit kleiner Amplitude überlagert.

$$s_C^2 = \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha_S^{(1)}}\right)^2 s_{\alpha_S^{(1)}}^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha_S^{(2)}}\right)^2 s_{\alpha_S^{(2)}}^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial u^{(1)}}\right)^2 s_{u^{(1)}}^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial u^{(2)}}\right)^2 s_{u^{(2)}}^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial k_T/k_K}\right)^2 s_{k_T/k_K}^2 \quad (56)$$

$$= \left(\frac{1}{u^{(2)} - u^{(1)}} \frac{1}{1 + \frac{k_T}{k_K}}\right)^2 s_{\alpha_S^{(1)}}^2 + \left(\frac{1}{u^{(2)} - u^{(1)}} \frac{1}{1 + \frac{k_T}{k_K}}\right)^2 s_{\alpha_S^{(2)}}^2 + \left(\frac{\alpha_S^{(1)} - \alpha_S^{(2)}}{(u^{(2)} - u^{(1)})^2} \frac{1}{1 + \frac{k_T}{k_K}}\right)^2 s_{u^{(1)}}^2 + \left(\frac{\alpha_S^{(1)} - \alpha_S^{(2)}}{(u^{(2)} - u^{(1)})^2} \frac{1}{1 + \frac{k_T}{k_K}}\right)^2 s_{u^{(2)}}^2 + \left(\frac{\alpha_S^{(1)} - \alpha_S^{(2)}}{(u^{(2)} - u^{(1)})} \frac{1}{\left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right)^2}\right)^2 s_{k_T/k_K}^2. \quad (57)$$

Wie zuvor wird $s_{\alpha_S^{(1)}} = s_{\alpha_S^{(2)}} = 1 \cdot 10^{-3}$ gon gesetzt. s_{k_T/k_K} wurde gerade bestimmt.

Der Wert für $s_{u^{(1)}} = s_{u^{(2)}} = 1.4 \cdot 10^{-4}$ incr ergibt sich rein mathematisch aus dem Least-Squares-Fit (vgl. Tab. 2). Eine konservativere Schätzung ergibt sich visuell aus der Berücksichtigung der schwankenden Werte für zunehmende Beobachtungsdauern nach Abb. 5 (c) zu $s_{u^{(1)}} = s_{u^{(2)}} = 1 \cdot 10^{-3}$ incr.

Größe	Wert
Frequenz ω_1	$(0.01384753 \pm 13 \cdot 10^{-8}) s^{-1}$
Frequenz ω_2	$(9.63363625 \pm 13 \cdot 10^{-8}) s^{-1}$
Frequenz ω_1^K	$(0.01330603 \pm 13 \cdot 10^{-8}) s^{-1}$
Frequenz ω_2^K	$(9.63713452 \pm 13 \cdot 10^{-8}) s^{-1}$
Kreiselstellung $\alpha_S^{(1)}$	$(307.2000 \pm 1.0 \cdot 10^{-3})$ gon
Mittellage $u^{(1)}$	$(-0.44158 \pm 1.0 \cdot 10^{-3})$ incr
Kreiselstellung $\alpha_S^{(2)}$	$(307.0010 \pm 1.0 \cdot 10^{-3})$ gon
Mittellage $u^{(1)}$	$(0.58512 \pm 1.0 \cdot 10^{-3})$ incr

Tabelle 3: Messergebnisse der Größen zur Ableitung der Kalibrierkonstanten.

Die Unsicherheit des Parameters C ergibt sich zu

$$s_C = 1.3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{gon}}{\text{incr}} \tag{58}$$

Letztlich sind die Unsicherheiten der Bandruhelage $s_{t_m} = 4.2 \cdot 10^{-4} \text{ incr}$ (Least-Squares-Fit) bzw. ähnlich wie bei den Schwingungsmittellagen konservativ aus Abb. 5(d) geschätzt $s_{t_m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ incr}$.

Damit ergibt sich die Unsicherheit einer Weisung zu

$$s_W = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ gon} \tag{59}$$

Die Analyse der Einzelbeiträge zur Unsicherheit s_W zeigt, dass die dominierenden Einflüsse von den Unsicherheiten des Tachymeters für die Zielung s_z und für die Stellung der Kreiselskala s_{α_s} herrühren. Eine Reduktion dieser Unsicherheiten um eine Größenordnung auf $s_z = s_{\alpha_s} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ gon}$ würde die Gesamtunsicherheit der Weisung auf $s_W = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ gon}$ verringern.

Ob diese Unsicherheiten in der Praxis erreicht werden, kann nur eine umfangreiche Messeihe zeigen, die eine empirisch abgeleitete Standardabweichung der Weisung ermittelt. Es ist zu erwarten, dass nicht erfassbare Einflussfaktoren wie Temperatur, Wind oder experimentelles Geschick die hier bestimmten analytischen Unsicherheiten überwiegen [2].

4.2 Vergleich mit herkömmlich erhaltenen Daten

In [2] wurden drei verschiedene Methoden zur Bestimmung der Kreiselmittellage betrachtet. Die Umkehrpunkt-Methode (Turning Point Method = TPM, „Nachführen“), die Zeit-Durchgangs-Methode (Passing Time Method = PTM) und die Zeit-Differenz-Methode (Time Difference Method = TDM). Für alle drei Methoden wurde die Unsicherheit der Weisung bestimmt, einschließlich ihrer Einzelanteile. Diese Ergebnisse sind den hier ermittelten in Tabelle 4 gegenübergestellt.

Die Unsicherheiten s_z und s_{U_0} bzw. s_{α_s} werden durch das verwendete Tachymeter bestimmt und bleiben daher unverändert.

Unser automatisierter Ansatz verbessert die Unsicherheiten der Schwingungsmittellagen s_{t_m} und $s_{\Delta u}$ bzw. s_u um etwa eine Größenordnung.

Die Unsicherheit der Kalibrierkonstante s_{dW_E} bzw. s_{k_T/k_K} konnte mit unserem Ansatz um den Faktor drei verbessert werden. In [2, 8] wurde dW_E durch eine manuelle Kalibrierung des Kreisels bestimmt, welche mechanische Eingriffe am Kreiselinstrument erforderte. Dabei wird mechanisch die Stellung des Torsionsbandes mehrfach verstellt und jeweils eine Messung der Bandruhelage durchgeführt, welche wiederum mit großen Unsicherheiten behaftet ist und den bestimmenden Einfluss auf die Unsicherheit der Weisung darstellt. Im hier vorgestellten Ansatz kann dW_E direkt aus den Messungen der Kreiselschwingung abgeleitet werden. Die Identifizierung

$$\frac{dW_E^0}{\cos \varphi} = \frac{k_T}{k_K} C \tag{60}$$

mit der geographischen Breite φ erlaubt die auf den Äquator $\varphi = 0^\circ$ bezogene Bestimmung zu

$$dW_E^0 = -0.0091 \text{ gon/incr} \quad (\text{Heger [1]}), \tag{61}$$

$$dW_E^0 = -0.0091 \text{ gon/incr} \quad (\text{hier}). \tag{62}$$

Die zahlenmäßige Übereinstimmung ist zufällig, die Unsicherheit beträgt $s_{dW_E^0} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ gon/incr}$.

Letztlich ergibt sich die in [2] betrachtete Umrechnungskonstante C^* (im Originaltext mit C bezeichnet) in guter Übereinstimmung zu

$$C^* = 0.19 \text{ gon/incr.} \quad (\text{Martienßen [2]}) \tag{63}$$

$$C^* = \left(1 + \frac{k_T}{k_K}\right) C = 0.1938 \text{ gon/incr.} \quad (\text{hier}) \tag{64}$$

Deren Unsicherheit konnte mit unserem Ansatz um mehr als eine Größenordnung verbessert werden.

Insgesamt verbessert sich die Unsicherheit einer Weisung von $s_W = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ gon}$ [2] auf $s_W = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ gon}$.

Tabelle 4:
Die Unsicherheiten der Weisung und deren Anteile aus den manuellen Methoden TPM, PTM und TDM in der Gegenüberstellung mit den hier automatisiert extrahierten Werten.

Marienßen et al. [2]				hier	
Größe	TPM	PTM	TDM	Größe	Wert
s_Z [gon]	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	s_Z [gon]	$1 \cdot 10^{-3}$
s_{U_0} [gon]	-	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	s_{α_s} [gon]	$1 \cdot 10^{-3}$
s_{dW_E} $\left[\frac{\text{gon}}{\text{incr}}\right]$	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	s_{k_T/k_K} $\left[\frac{\text{gon}}{\text{incr}}\right]$	$3 \cdot 10^{-5}$
s_{t_m} [incr]	0.1	0.1	0.1	s_{t_m} [incr]	$4.2 \cdot 10^{-4}$ (Least Squares) $5 \cdot 10^{-3}$ (konservativ)
s_{U_i} [gon]	$2 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-
$s_{\Delta u}$ [incr]	-	$9 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	s_u [incr]	$1.4 \cdot 10^{-4}$ (Least Squares) $1 \cdot 10^{-3}$ (konservativ)
s_C $\left[\frac{\text{gon}}{\text{incr}}\right]$	-	$8 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	s_{C^*} $\left[\frac{\text{gon}}{\text{incr}}\right]$	$4 \cdot 10^{-5}$ (anderes C!)
s_W [gon]	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	s_W [gon]	$1.4 \cdot 10^{-3}$

5 Fazit

Die eingehende mathematische Beschreibung des bandgehängten Vermessungskreisels und die automatisierte Ablesung und Analyse der Kreiselschwingung verbesserten die Unsicherheit einer Weisung auf $s_w = 1.4 \cdot 10^{-3}$ gon. Diese Unsicherheit ist nun durch die Unsicherheit des Tachymeters limitiert. Zusätzlich konnte die zuvor aufwendige Bestimmung von Kalibrierkonstanten durch eine detaillierte Analyse der Kreiselschwingung ersetzt werden. Ein Vergleich experimenteller Daten mit herkömmlich erhaltenen Daten validiert das hier vorgestellte Verfahren.

Eine weitere Verbesserung der Unsicherheit der Schwingungsmittellage erscheint zum jetzigen Zeitpunkt wenig sinnvoll, da die Unsicherheit der Weisung maßgeblich durch die Unsicherheit des Tachymeters bestimmt ist. Möglich sind detailliertere Analysen des Zeitverlaufs der Kreiselschwingung und entsprechende Rückschlüsse auf das Verhalten und den Zustand des Kreiselinstruments. Konkret geplant sind Messreihen um empirisch, unter realen Einsatzbedingungen erhaltene Wiederholgenauigkeiten den hier analytisch bestimmten gegenüberzustellen.

Literatur

- [1] W. Heger, *GMT Heger*, 2020: URL: <https://www.gmt-heger.com/>.
- [2] T. Martienßen und J. Benndorf: „Genauigkeitsuntersuchung zur Azimutbestimmung mit dem Aufsatzkreisel Gyromax AK-2M“. In: *Markscheidewesen* 129 (2 2022). <http://dx.doi.org/10.23689/figeo-6244>, S. 22–33. URL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?gldocs-11858/11939>.
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton und M. Sands: *Band 1 Mechanik*. De Gruyter, 2015. URL: <https://doi.org/10.1515/9783110444292>.
- [4] M. Zanini: „Hochpräzise Azimutbestimmung mit Vermessungskreiseln“. In: *Tech. rep. ETH Zürich* (1992).
- [5] J. Menz: „Vermessungskreisel zur Bestimmung von Astronomisch-Nord ohne Eichstrecken“. In: *Markscheidewesen* 123 (2016), S. 3–12.
- [6] G. Irmer: „Theoretische Grundlagen und ein Programm zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Vermessungskreiseln“. In: *Markscheidewesen* 123 (2016), S. 13–23.
- [7] D. Amberg: *FittingaDampedSineWave*. 2015. URL: <https://www.dsprelated.com/showarticle/795.php>.
- [8] W. Heger: „Bedienungsanleitung und Dokumentation zum Aufsatzkreisel Gyromax AK-2M“. (2019).